

# Problemes APA

## Problema 5 La fàbrica de píndoles I

Lluc Bové

Q1 2016-17

La companyia farmacèutica *Nice Pills* ha construït una cinta transportadora que porta dues *classes* de píndoles (adequades per dos tipus de malalties diferents), que anomenem  $C_1$  i  $C_2$ . Aquestes píndoles surten en dos colors:  $\{yellow, white\}$ , que són detectats per una càmera. La companyia fabrica píndoles en proporcions  $P(C_1) = \frac{1}{3}, P(C_2) = \frac{2}{3}$ . Se'ns facilita també la informació sobre la distribució del color per cada classe:  $P(yellow|C_1) = \frac{1}{5}, P(white|C_1) = \frac{4}{5}, P(yellow|C_2) = \frac{2}{3}, P(white|C_2) = \frac{1}{3}$ . Es demana:

1. **Quina és la probabilitat d'error si no s'utilitza el color per classificar?**

La probabilitat d'error si no s'utilitza el color per classificar és el que té la regla de classificació següent:

$$R_1 = \begin{cases} C_1 & \text{si } P(C_1) > P(C_2) \\ C_2 & \text{si } P(C_1) < P(C_2) \end{cases}$$

En aquest cas és triar sempre  $C_2$  per tant la probabilitat d'error és  $C_1$  és a dir  $\boxed{\frac{1}{3}}$

2. **Calcular les probabilitats  $P(yellow)$  i  $P(white)$  i les probabilitats  $P(C_1|yellow), P(C_2|yellow), P(C_1|white)$  i  $P(C_2|white)$**

Calculem les probabilitats de *yellow* i *white* usant la llei de probabilitat total:

$$P(yellow) = P(yellow|C_1)P(C_1) + P(yellow|C_2)P(C_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{23}{45}}$$

$$P(white) = 1 - P(yellow) = 1 - \frac{23}{45} = \boxed{\frac{22}{45}}$$

Usem la fórmula de Bayes per calcular la resta de probabilitats:

$$P(C_1|yellow) = \frac{P(C_1)P(yellow|C_1)}{P(yellow)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}}{\frac{23}{45}} = \boxed{\frac{3}{23}}$$

$$P(C_2|yellow) = 1 - P(C_1|yellow) = 1 - \frac{3}{23} = \boxed{\frac{20}{23}}$$

$$P(C_1|white) = \frac{P(C_1)P(white|C_1)}{P(white)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}}{\frac{22}{45}} = \boxed{\frac{6}{11}}$$

$$P(C_2|white) = 1 - P(C_1|white) = 1 - \frac{6}{11} = \boxed{\frac{5}{11}}$$

3. **Quina és la decisió òptima per pastilles *yellow*? I per pastilles *white*? Quins són els *odds* en ambdós casos?**

La regla de decisió òptima depenent del color, que l'anomenem regla de Bayes, és la següent:

$$R_{bayes} = \begin{cases} C_1 & \text{si } P(C_1|x) > P(C_2|x) \\ C_2 & \text{si } P(C_1|x) < P(C_2|x) \end{cases}$$

On  $x$  és el color.

Per tant si tenim que  $x = yellow$  aleshores la millor regla de decisió és triar  $C_2$  ja que  $P(C_1|yellow) < P(C_2|yellow)$  i els odds són de:

$$odds = \frac{P(yellow|C_1)P(C_1)}{P(yellow|C_2)P(C_2)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}} = \boxed{\frac{3}{20}}$$

Però si tenim que  $x = white$  aleshores la millor regla de decisió és escollir  $C_1$  ja que  $P(C_1|white) > P(C_2|white)$  i els odds són de:

$$odds = \frac{P(white|C_1)P(C_1)}{P(white|C_2)P(C_2)} = \frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

4. **Quina és la probabilitat d'error si s'utilitza el color per classificar? Per què és millor que la de l'apartat 1?**

La probabilitat d'error és el de la regla de Bayes, per tant tenim que:

$$P(Error_{R_{Bayes}}|x) = \min\{P(C_1|x), P(C_2|x)\}$$

I la probabilitat d'error total és:

$$E()$$