

Problemes APA

Problema 5: Kernel polinòmic

Lluc Bové

Q1 2016-17

Considereu el kernel polinòmic $k(x, x') = (\langle x, x' \rangle + 1)^q, q \in \mathbb{N}, x, x' \in \mathbb{R}^d$. Feu el "truc del kernel" (expressió de k com un producte escalar) per $d = 2$ i $q = 3$ i doneu explícitament la funció ϕ en aquest cas. Quina és la dimensió del "feature space" a on porta ϕ ?

Diem x i y a x , i x' per simplicitat: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} k(x, y) &= ((x_1 y_1 + x_2 y_2) + 1)^3 = (x_1 y_1 + x_2 y_2)^3 + 3(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + 3(x_1 y_1 + x_2 y_2) + 1 \\ &= x_1^3 y_1^3 + 3x_1^2 y_1^2 x_2 y_2 + 3x_1 y_1 x_2^2 y_2^2 + x_2^3 y_2^3 + 3x_1^2 y_1^2 + 6x_1 y_1 x_2 y_2 + \\ &\quad 3x_2^2 y_2^2 + 3x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 1 \\ &= \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ \sqrt{3}x_1^2 x_2 \\ \sqrt{3}x_1 x_2^2 \\ \sqrt{3}x_1^2 \\ \sqrt{3}x_2^2 \\ \sqrt{6}x_1 x_2 \\ \sqrt{3}x_1 \\ \sqrt{3}x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^3 \\ y_2^3 \\ \sqrt{3}y_1^2 y_2 \\ \sqrt{3}y_1 y_2^2 \\ \sqrt{3}y_1^2 \\ \sqrt{3}y_2^2 \\ \sqrt{6}y_1 y_2 \\ \sqrt{3}y_1 \\ \sqrt{3}y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \phi(x)\phi(y) \end{aligned}$$

On $\phi(x)$ per a qualsevol $x \in \mathbb{R}^2$ és:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{10} \quad \phi(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ \sqrt{3}x_1^2 x_2 \\ \sqrt{3}x_1 x_2^2 \\ \sqrt{3}x_1^2 \\ \sqrt{3}x_2^2 \\ \sqrt{6}x_1 x_2 \\ \sqrt{3}x_1 \\ \sqrt{3}x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I per tant la dimensió del feature space on la funció de kernel calcula el producte escalar és 10.