Problemes APA
Problema 4: Propietats elàstiques d'una molla

Lluc Bové

Q1 2016-17

Volem determinar les propietats elàstiques d'una molla usant diferents pesos i mesurant la deformació que es produeix. La llei de Hooke realciona la longitud l i la força F que exerceix el pes com:

$$e + kF = l$$

on e, k són constants de la llei, que es volen determinar. S'ha realitzat un experiment i obtingut les dades:

F	1	2	3	4	5
l	7.97	10.2	14.2	16.0	21.2

1. **Plantajeu el problema com un problema de mínims quadrats**
   Hem de predir l en funció de F per tant tenim que la seva relació és estocàstica de la forma següent:

   $$l = f(F) + \epsilon$$

   On ϵés una variable aleatòria. Volem donar un model que té la forma següent:

   $$y(F; w) = w^T * \phi(F)$$

   On w és un vector de coeficients i ϕ el vector de les funcions de base. Hem de trobar doncs el vector w que faci que l'error quadràtic sigui mínim(En el nostre cas concret e i k). És a dir hem de resoldre el següent:

   $$\min_w \parallel l - \Phi w \parallel^2$$

   On Φ és la matriu de disseny. Per tant en el nostre cas concret tenim les següents dades:

   $$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad l = \begin{pmatrix} 7.97 \\ 10.2 \\ 14.2 \\ 16.0 \\ 21.2 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} e \\ k \end{pmatrix}$$

2. **Resoleu-lo amb el mètode de la matriu pseudo-inversa** Si el rang de la matriu és complet, aleshores podem assegurar que la solució de mínims quadrats és única i es calcula de la següent manera:

$$w = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T l$$

Podem veure com realment el rank de la matriu és complet ja que les seves columnes són linealment independents. Amb R calculem w resolent directament l'equació i trobem que:

$$w = \begin{pmatrix} e = 4.234 \\ k = 3.226 \end{pmatrix}$$

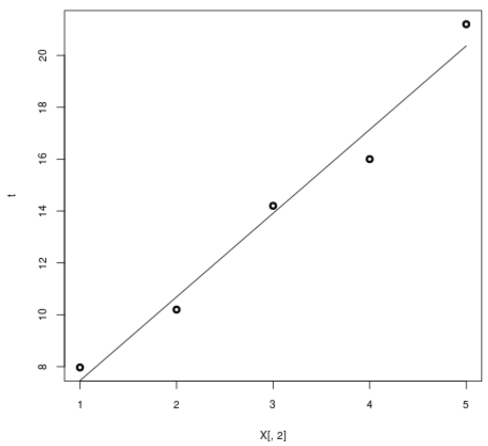

Figura 1: El gràfic representa el model (recta) respecte les seves dades (punts)

3. **Resoleu-lo amb el mètode basat en la SVD**
Ara resolem el problema utilitzant la descomposició SVD. Tota matriu es pot expressar com a:

$$\Phi_{n\times m} = U_{n\times m} \Delta_{n\times m} V_{m\times m}$$

On U conté els vector propis de $\Phi\Phi^T$, V conté tots els vector propis de $\Phi^T\Phi$ i Δ és una matriu quasi-diagonal on la diagonal conté les arrels quadrades dels valors propis de la matriu $\Phi^T\Phi$.

Es pot afirmar que donat un problema de mínims quadrats la solució es pot trobar de la següent manera:

$$w = V \, \mathrm{diag}_+ \left(\frac{1}{\lambda_i}\right) U^T$$

On λ_i són els valors de la diagonal de Δ i on diag_+ és la matriu diagonal on els valors de λ_i que no són més grans que zero valen 0. La nostre descomposició SVD és la següent:

$$U = \begin{pmatrix} 0.1600071 & 0.7578903 \\ 0.2853078 & 0.4675462 \\ 0.4106086 & 0.1772020 \\ 0.5359094 & -0.1131421 \\ 0.6612102 & -0.4034862 \end{pmatrix} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 7.691213 & 0.0000000 \\ 0.000000 & 0.9193696 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0.2669336 & 0.9637149 \\ 0.9637149 & -0.2669336 \end{pmatrix}$$

Resolem amb R[1] i ens n'adonem que la solució és la mateixa que en l'apartat anterior, és a dir $e = 4.234$ i $k = 3.226$. Per tant tenim que en el nostre cas tenim que el model és:

$$y(F) = 4.234 + 3.226F$$

[1]Tot el codi de la resolució es troba al fitxer *script.R* adjunt