

6P

Versió 1.4

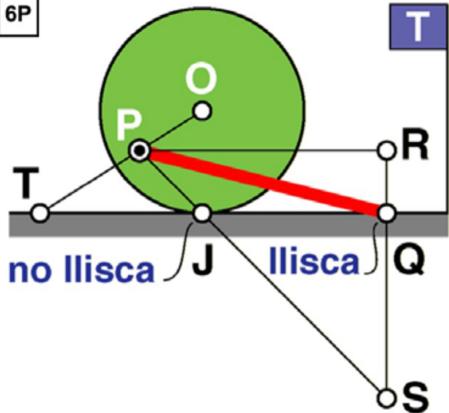
Cinemàtica del sòlid rígid 2D
(moviment pla)

+

Cinemàtica de vehicles

Lluís Ros
<https://lluisros.github.io/mecanica>

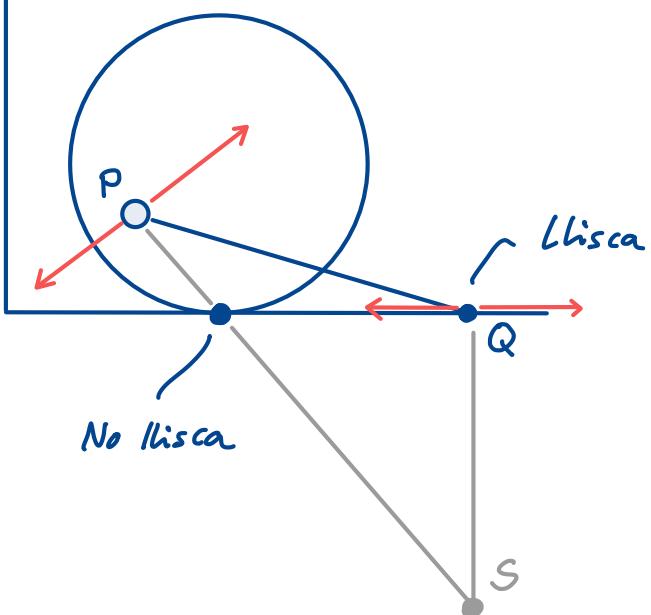
6P



La roda no llisca al damunt del terra (T). La barra està articulada a la roda i recolza sobre el terra.

Determina el CIR_T^{barra} .

T

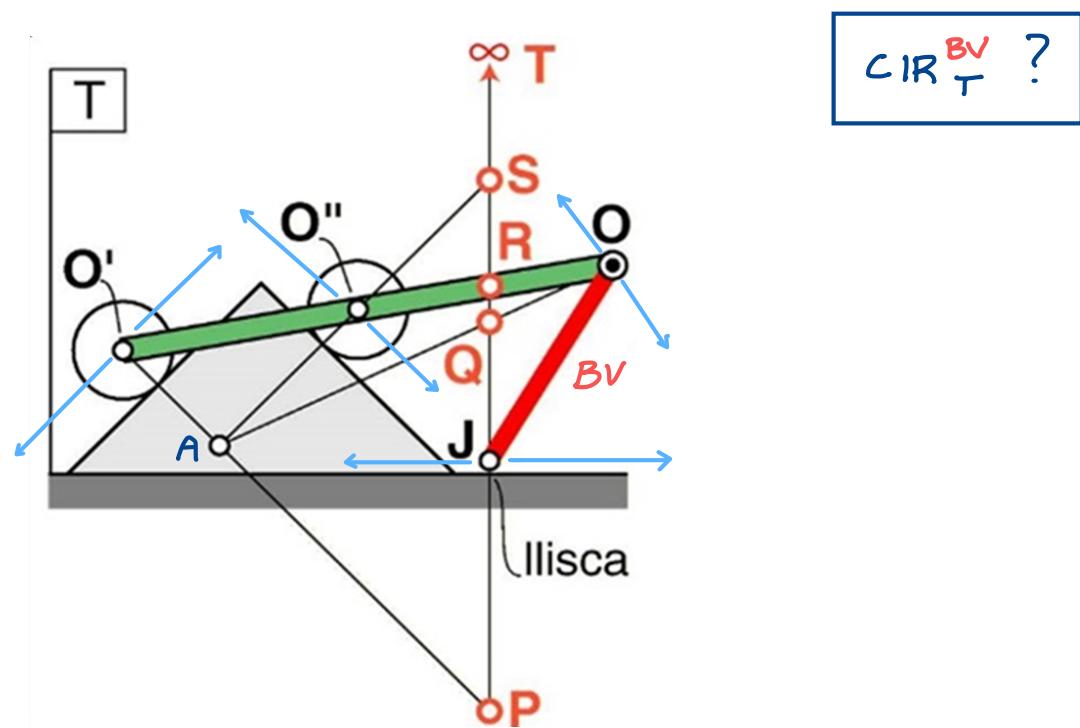
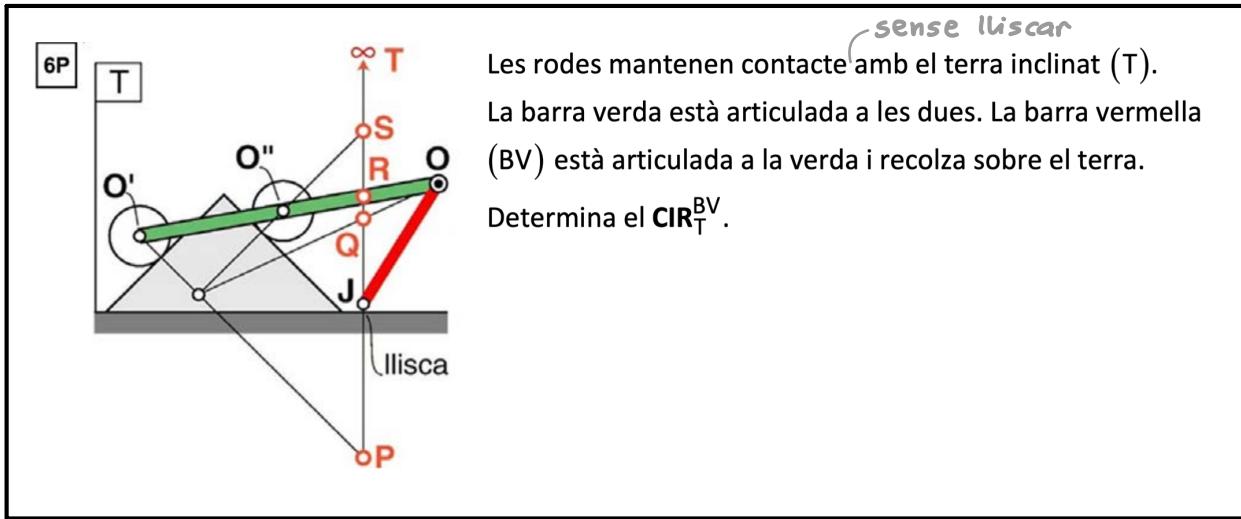


La dir. de les vel. de P i Q resp. T és la indicada en vermell. Ergo:

$$CIR_T(\text{Barra}) = S$$

$S = \text{Intersecció de les rectes} :$

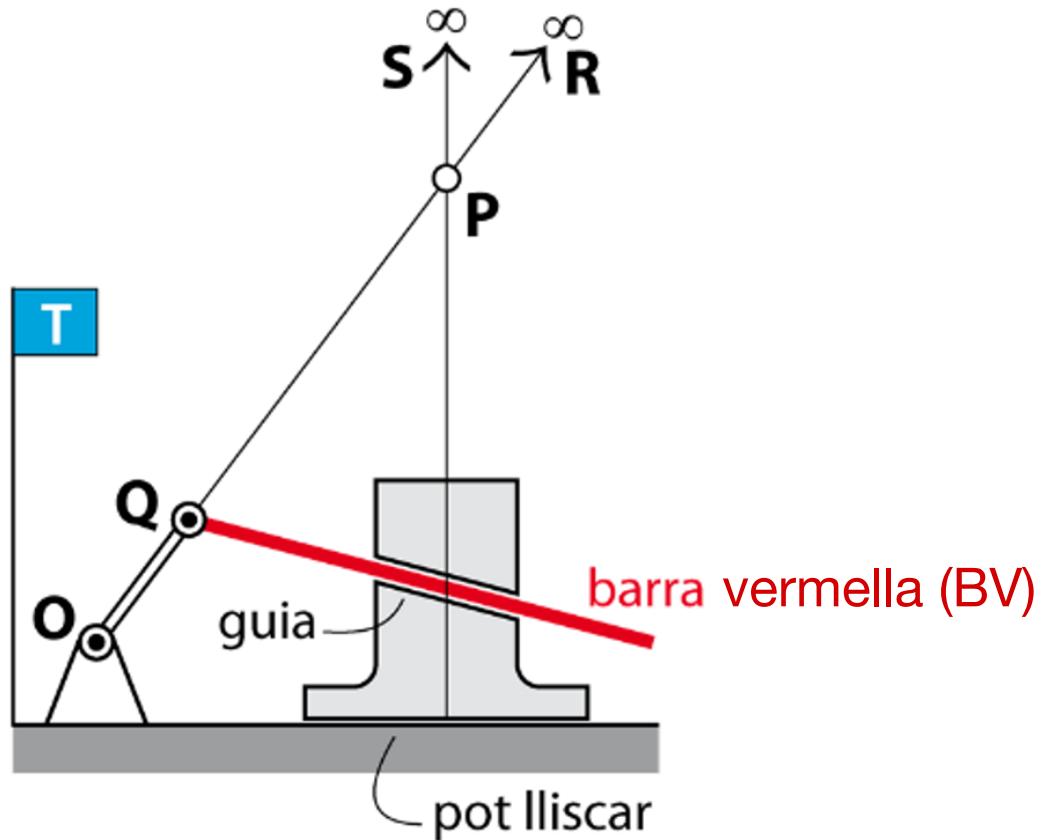
- \perp a $\bar{v}_T(P)$ passant per P
- \perp a $\bar{v}_T(Q)$ " " " Q



$\bar{v}_T(O')$ té dir \leftarrow
 $\bar{v}_T(O'')$ té dir \rightarrow

$$\begin{aligned} \Rightarrow CIR_T^{\text{Barra verde}} = A &\} \Rightarrow \bar{v}_T(O) \text{ té dir } \perp \text{ a recta } AD \\ \} \text{ llisca resp } T &\} \Rightarrow \bar{v}_T(J) \text{ té dir. horizontal } \} \Rightarrow CIR_T^{BV} = Q \end{aligned}$$

La barra blanca està articulada al terra (T). La barra vermella (BV) està articulada a la blanca i té un enllaç prismàtic amb el suport, que recolza sobre el terra. Determina el CIR_T^{BV} .



La barra vermella només ser pot traslladar. No pot girar, perquè els 2 enllaços prismàtics no li ho permeten.

Vol dir que $\overline{I2}_T^{\text{barra}} = 0$. Això implica que el seu CIR es a l' ∞ (sobre un punt de la recta de l' ∞). Per altra banda CIR_T^{barra} ha de ser sobre la recta OQ perquè Q té velocitat \perp a aquesta recta. Per tant, CIR_T^{barra} ha de ser el punt de l' ∞ de la recta OQ .

$$CIR_T^{BV} = R$$

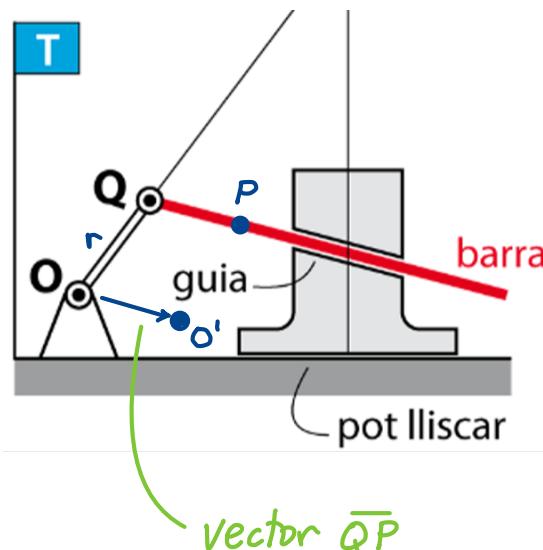
Aquest exercici és més important del que sembla.

Permet il·lustrar el fet que, quan un sòlid no gira, com és el cas de la barra vermella, les velocitats i acceleracions de tots els seus punts són (en cada instant) iguals! Es veu de les eqs. de CSR:

$$\bar{v}_T(P) = \bar{v}_T(Q) + \underbrace{\bar{\omega}_T^{\text{sòlid}} \times \bar{QP}}_{\bar{\omega}}$$

$$\bar{a}_T(P) = \bar{a}_T(Q) + \underbrace{\bar{\omega}_T^{\text{sòlid}} \times (\bar{\omega}_T^{\text{sòlid}} \times \bar{QP})}_{\bar{\omega}} + \underbrace{\bar{\alpha}_T^{\text{sòlid}} \times \bar{QP}}_{\bar{\alpha}}$$

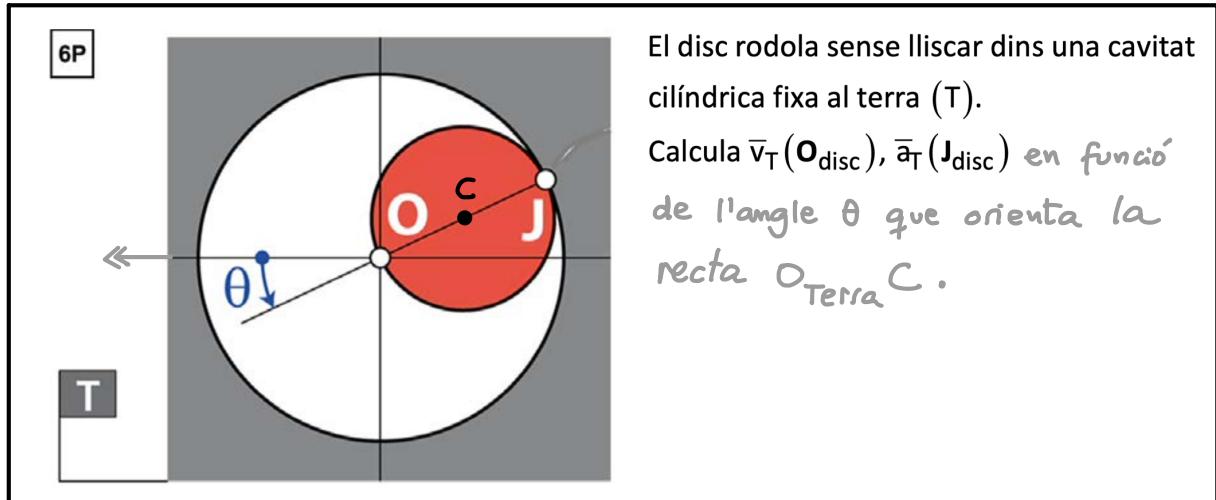
Això vol dir que si Q té una certa trajectòria resp. T, P haurà la mateixa trajectòria però desplaçada amb el vector \bar{QP} . Per exemple: en el cas de l'exercici Q descriu una trajectòria circular avd O, i això vol dir que P també descriurà una trajectòria circular, però desplaçada amb \bar{QP} . És a dir, tragaria un cercle de radi $r = |OQ|$ centrat a O'.



La barra està fent una translació circular, com en els exemples de la cabina d'una sínia vistos a teoria.

Fixeu-vos que el punt O, o l'O', no coincideixen amb el CIR. Centre de curvatura i CIR són coses diferents.

Disc rodolant sobre pista circular

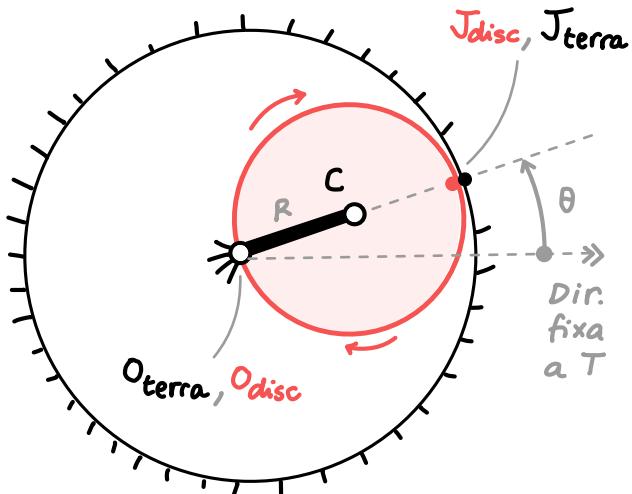


Entenguem primer el moviment del disc.

θ = orientació de la recta $O_{terra}C$ respecte del terra.

Si θ augmenta, com rodola el disc?

Per entendre-ho, va bé imaginar-se que el segment $O_{terra}C$ és una barra articulada amb el terra i amb el disc:



θ orienta aquesta barra fictícia (no el disc!) resp. T .

Quan θ augmenta, C descriu una trajectòria circular de radi R ardi O_{terra} , en sentit antihorari).

Com que a J no hi ha lliscament, el disc rodola girant en sentit horari respecte T . Es veu intuitivament, però més avall farem el càlcul precís de $\bar{\Omega}_T^{disc}$.

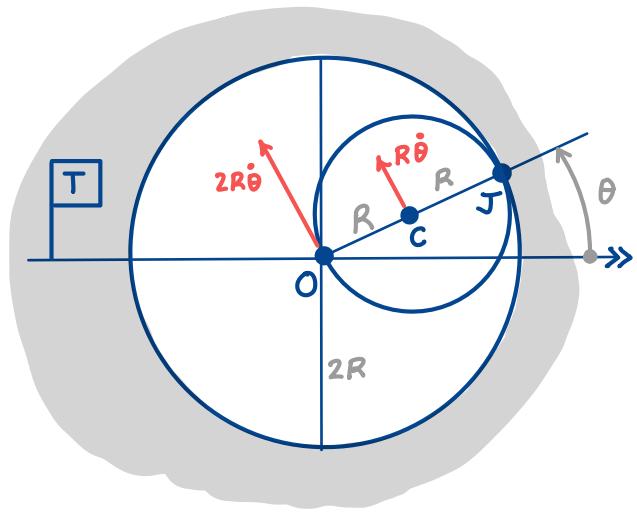
Vegeu animació online del moviment del disc
<https://www.geogebra.org/classic/tkb7md6s>

Buscarem $\bar{v}_T(0_{disc})$ i $\bar{\alpha}_T(J_{disc})$ per CSR.

Ens caldran $\bar{\omega}_T^{disc}$ i $\bar{\alpha}_T^{disc}$.

Determinem-les:

Clarament, C descriu una trajectòria circular amb centre a O terra, radi R, i vel. angular associada ($\dot{\theta}$) resp. T.



Per tant :

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_T(C) &= (\nwarrow R\dot{\theta}) \\ CIR_T^{disc} &= J \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\omega}_T^{disc} = (\otimes \dot{\theta}) \Rightarrow \bar{\alpha}_T^{disc} = (\otimes \ddot{\theta})$$

$\bar{v}_T(0_{disc})$

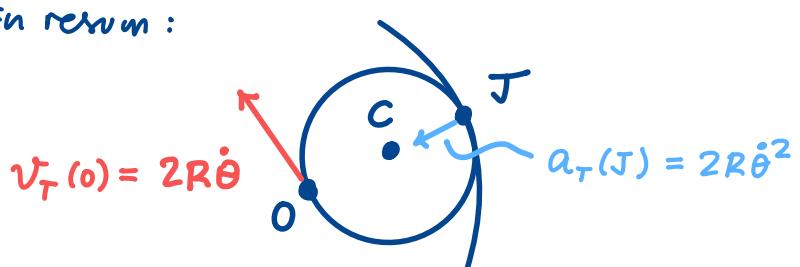
$$\bar{v}_T(0_{disc}) = \bar{v}_T(J_{disc}) + \bar{\omega}_T^{disc} \times \bar{J}O = (\hat{\otimes} \dot{\theta}) \times (\leftarrow 2R) = (\nwarrow 2R\dot{\theta})$$

vec. foto!
No el podríem derivar per
obtenir $\bar{\alpha}_T(0_{disc})$
(si la volguéssim)

$\bar{\alpha}_T(J_{disc})^{(*)}$

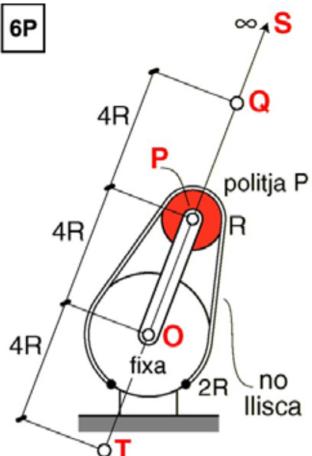
$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_T(J_{disc}) &= \bar{\alpha}_T(C) + \bar{\alpha}_T^{disc} \times \bar{C}J + \bar{\omega}_T^{disc} \times (\bar{\omega}_T^{disc} \times \bar{C}J) = \\ &= \underbrace{[(\nwarrow R\ddot{\theta}) + (\leftarrow R\dot{\theta}^2)]}_{(\searrow R\ddot{\theta})} + \underbrace{[(\otimes \ddot{\theta}) \times (\rightarrow R)]}_{(\leftarrow R\dot{\theta}^2)} + \underbrace{(\otimes \dot{\theta}) \times [(\otimes \dot{\theta}) \times (\rightarrow R)]}_{(\leftarrow 2R\dot{\theta}^2)} = \end{aligned}$$

En resum:



(*) $\bar{\alpha}_T(0_{disc})$ es calcularia de manera anàloga.

6P



El braç està articulat al terra (T) i a la politja P . La corretja inextensible no llisca en cap dels seus punts de contacte amb el terra i la politja. Determina el $CIR_T^{\text{politja } P}$.

Solució: pàgina següent.

Solució:

Basc = Basculant

PO = Politja a O

PP = " " P

Suposem $\bar{\Omega}_T^{Basc} = \vec{\omega}$



$$\bar{v}_T(P) = (-4RW)$$



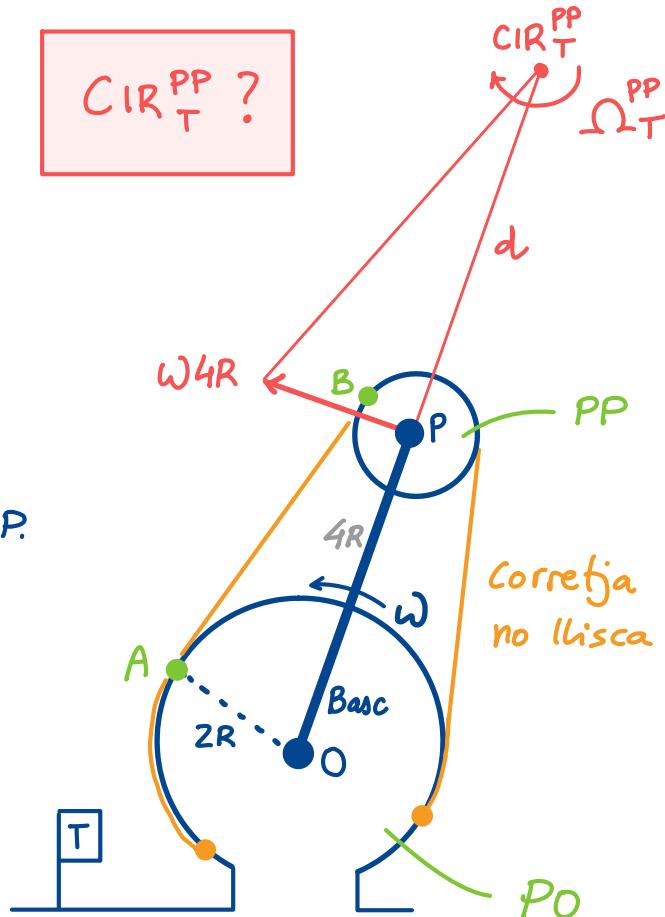
$I = CIR_T^{PP}$ és sobre recta OP.

Si sabessim $\bar{\Omega}_T^{PP}$, ja podríem localitzar el CIR trobant d via (*):

$$\bar{\Omega}_T^{PP} d = 4RW$$

Busquem doncs $\bar{\Omega}_T^{PP}$:

$$\bar{\Omega}_T^{PP} = \underbrace{\bar{\Omega}_{Basc}^{PP}}_{\vec{\omega} 2\omega} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Basc}}_{\vec{\omega}} = \vec{\omega}$$

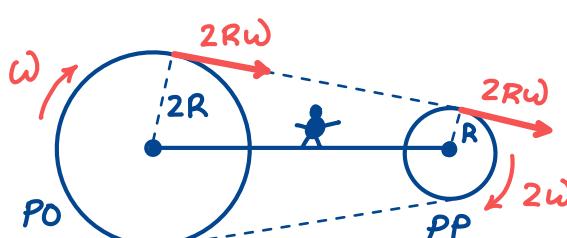


Què veiem des del basculant?

$$\bar{\Omega}_{Basc}^{PO} = \vec{\omega}$$



$$\bar{\Omega}_{Basc}^{PP} = \vec{\omega} 2\omega$$



Rel transm. 2:1

voltes sortida

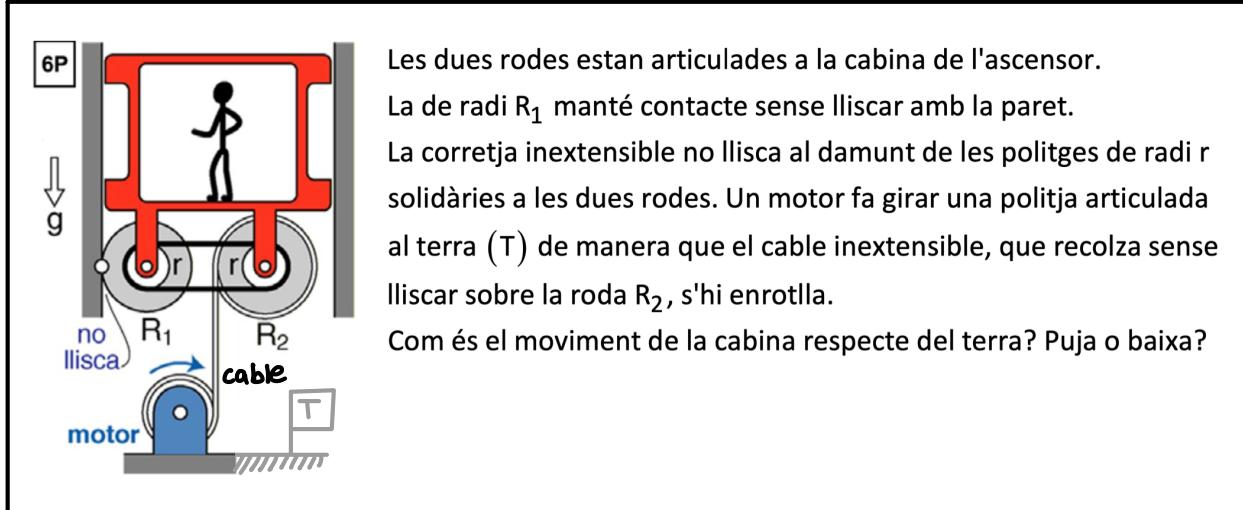
voltes entrada

Ara ja és fàcil:

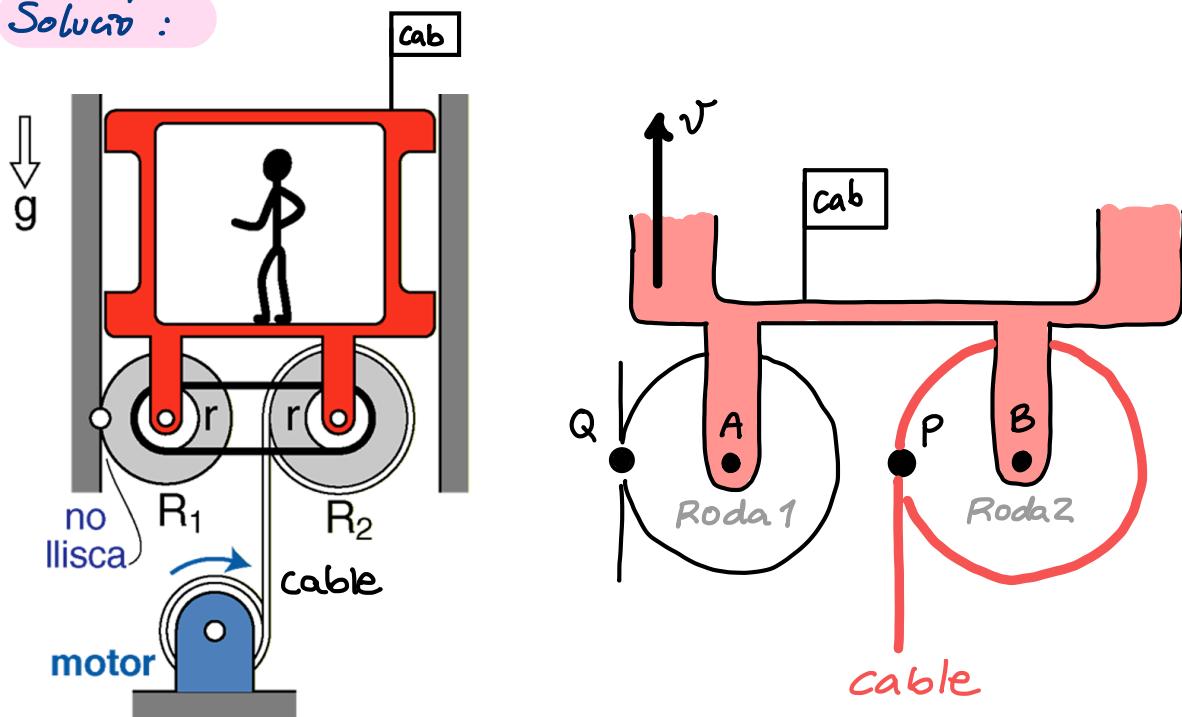
$$\omega \cdot d = 4WR \Rightarrow d = 4R$$

$$CIR_T^{PP} = Q$$

(*) $I = CIR_T^{PP}$ serà per sobre de P si $\bar{\Omega}_T^{PP}$ té sentit $\vec{\omega}$, altrament serà per sota.



Solució :



Suposem que la cabina es mou amb velocitat ($\uparrow v$) respecte el terra. Cal esbrinar si, en enrotllar-se el cable a la politja motoritzada, v és positiva o negativa (la cabina puja o baixa, respectivament).

Fixem-nos que, en qualsevol cas, la velocitat del punt P resp. T només pot ser cap avall \downarrow , ja que el motor està **enrotllant** el cable.

Així doncs, calcularem $\bar{v}_T(P)$ en funció de v i imposarem que tingui direcció cap avall.

Calculem $\bar{v}_T(P)$ per comp. de movim. amb

$$\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = Cabina \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AB}(P) &= \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P) = \\ &= \bar{\Omega}_{REL}^{Rodaz} \times \overline{BP} + (\uparrow v) = \\ &= \left(\odot \frac{v}{R_1} \right) \times (\leftarrow R_2) + (\uparrow v) = \\ &= \left(\downarrow \frac{R_2}{R_1} v \right) - (\downarrow v) = \downarrow \left[v \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right] \quad (\square) \end{aligned}$$

De (\square) veiem que $\bar{v}_T(P)$ vindrà dir. \downarrow si i només si

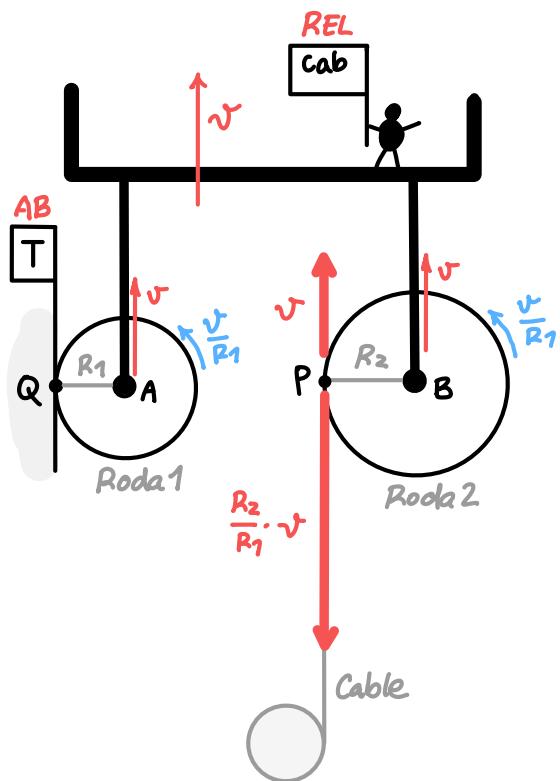
$$v \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) > 0,$$

que equival a demanar

$$v(R_2 - R_1) > 0$$

$\underbrace{A}_{\text{A}}$ $\underbrace{B}_{\text{B}}$

És a dir, A i B han de tenir el mateix signe.



$$\left. \begin{aligned} (*) \quad \bar{v}_T(A) &= (\uparrow v) \\ CIR_T^{Rodaz} &= Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\Omega}_T^{Rodaz} = \odot \frac{v}{R_1}$$

Cabina té orientació fixa resp. T

Relació transmissió
1:1 Roda1 → Roda2

$$\bar{\Omega}_{cabina}^{Rodaz} = \bar{\Omega}_{cabina}^{Rodaz}$$

Per tant, quan el cable s'enrotlla :

- Si $R_2 > R_1$, v ha de ser positiva \Rightarrow La cabina puja
 - Si $R_2 < R_1$, " " " negativa \Rightarrow " " baixa
-

Extra: i què passa quan el motor està aturat?

En aquest cas, el cable no s'enrotlla a la polifà
motoritzada $\Rightarrow \bar{V}_T(P) = 0$, i per tant ha de ser

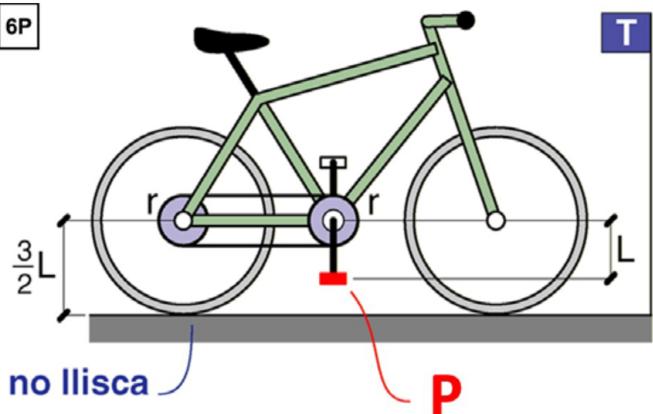
$$v(R_2 - R_1) = 0$$

Aquesta condició es compleix en dos casos:

(i) Si $R_2 \neq R_1 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow$ La cabina està
aturada

(ii) Si $R_2 = R_1 \Rightarrow v$ pot tenir qualsevol valor \Rightarrow
El moviment de la cabina no queda determinat
cinemàticament. Pot pujar o baixar, o quedar
en repòs. Té llibertat per a fer qualsevol
d'aquestes coses. I quinà farà? No ho sabem!
Calen les eines de la dinàmica per a determinar
el moviment.

6P



Les rodes de la bicicleta no llisquen al damunt del terra (T). Plat i pinyó tenen la mateixa mida. Calcula $\mathcal{R}_T(P)$.

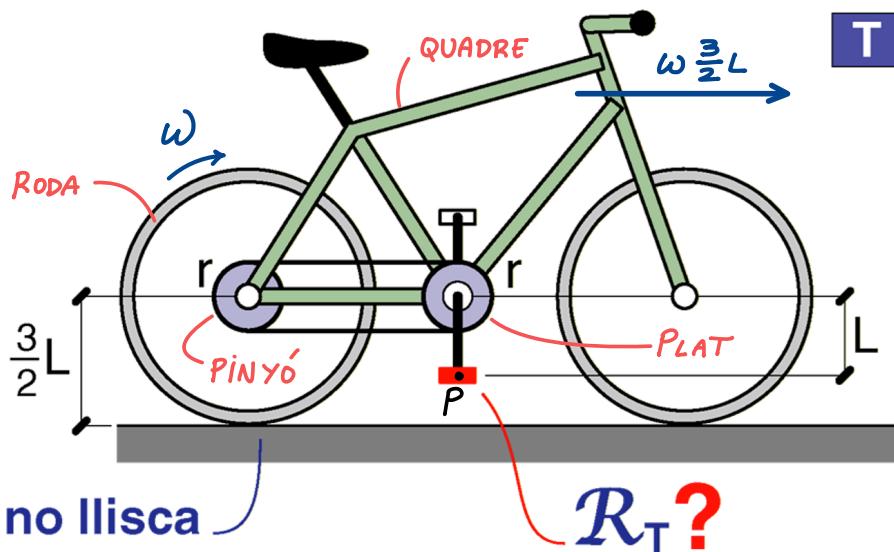
$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|\alpha_T^n(P)|} \Rightarrow \text{Hem de calcular } \bar{v}_T(P) \text{ i } \bar{\alpha}_T(P) \text{ i extreure } \bar{\alpha}_T^n(P).$$

Per a fer els càlculs, podem suposar que la roda del darrere gira amb velocitat angular $\vec{\omega}$ resp. T, de manera que el quadre avança amb velocitat

$$\left(\rightarrow \omega \cdot \frac{3}{2} L \right)$$

Podrem suposar un valor ω variable, però com que $\mathcal{R}_T(P)$ no depèn de la velocitat amb que P descriu la seva trajectòria, suposem $\omega = \omega_0 = ct$ (constant $\forall t$).

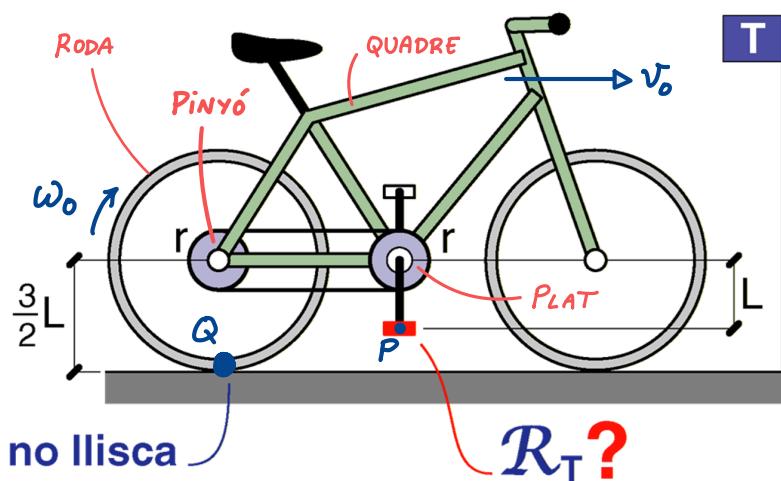
Això simplifica els càlculs.



Farem composició
de moviments amb

$$AB = T$$

$REL = \text{Quadre}$

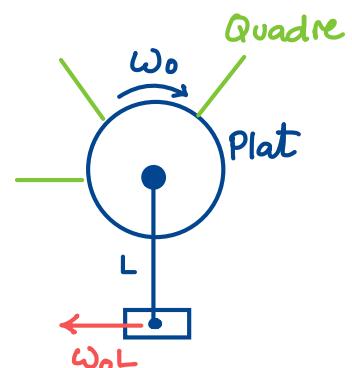


$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_T^{\text{Roda}} &= \hat{\otimes} \omega_0 \\ \text{CIR } \frac{\text{Roda}}{T} &= Q \end{aligned} \Rightarrow \text{Respecte } T, \text{ el quadre avança amb velocitat} \\ \bar{v}_0 = \left(\rightarrow \frac{3}{2} L \cdot \omega_0 \right)$$

Clarament $\bar{\Omega}_{\text{Quadre}}^{\text{Plat}} = \hat{\otimes} \omega_0$ també, ja que per cada volta que fa la roda resp. T , el pinyó i el plat en fan una resp. el quadre.

Aleshores:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AB}(P) &= \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P) = \\ &= (\leftarrow \omega_0 L) + (\rightarrow \omega_0 \frac{3}{2} L) = (\rightarrow \frac{\omega_0 L}{2}) \end{aligned}$$



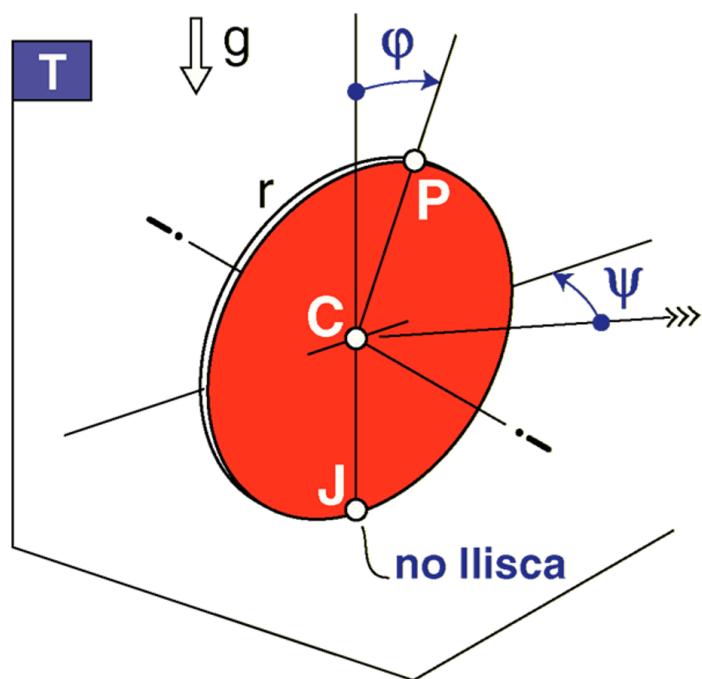
$$\bar{a}_{AB}(P) = \bar{a}_{REL}(P) + \cancel{\bar{a}_{ar}(P)}^0 + \underbrace{\bar{a}_{cor}(P)}_{0} = (\uparrow \omega_0^2 L)$$

i per tant:

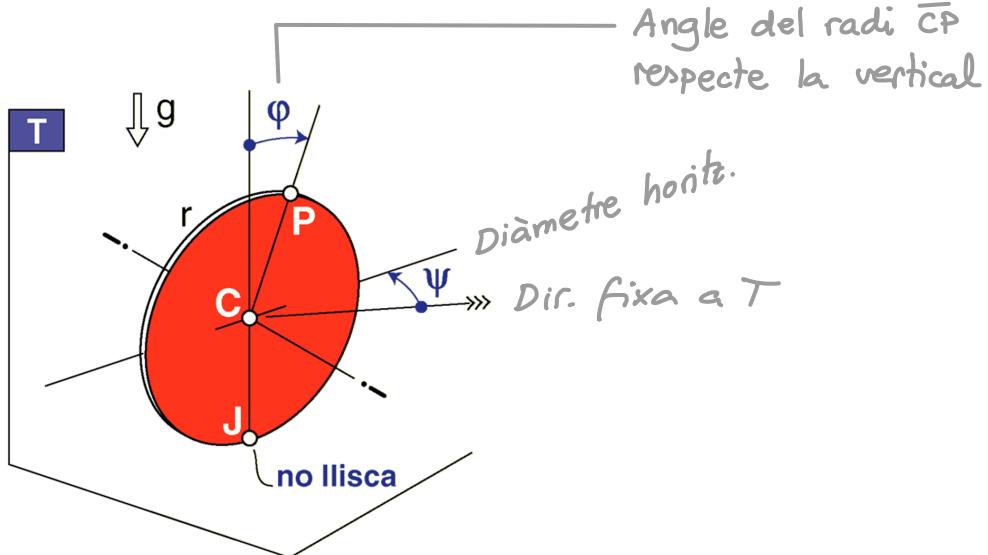
$$2 \underbrace{\bar{\Omega}_{AB}^{\text{REL}}}_{0} \times \bar{v}_{REL}(P)$$

$$\boxed{\bar{R}_T(P) = \frac{\bar{v}_T^2(P)}{|a_T^n(P)|} = \frac{\left(\frac{\omega_0 L}{2}\right)^2}{\omega_0^2 L} = \frac{L}{4}}$$

Introducció a cinemàtica de vehicles



La roda no llisca sobre el terra, i gira mantenint el seu pla perpendicular al terra (T). Calcula $\bar{v}_T(C)$.



Aquest exercici ens proporcionarà un resultat que permet fer anàlisis cinemàtiques ràpides de vehicles. Resolem-lo primer i després el posarem en context.

Comencem suposant que la roda es troba sola, desacoplada del xassís d'un vehicle, i que rodola sobre terreny pla, manteniint el seu pla perpendicular al terra en tot moment (*). Aquest fet permet orientar la roda amb només dos angles d'Euler, indicats al dibuix:

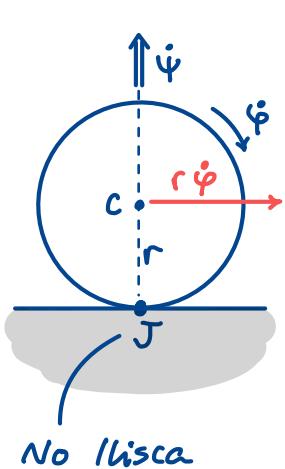
- ψ : angle entre una dir. horitz. fixa a T i el diàmetre horizontal de la roda. És un angle de **precessió** que orienta el pla vertical de la roda.

- φ : angle entre la dir. vertical i un radi concret de la roda. Per exemple, el \overline{CP} . És l'angle de **rotació pròpia** de la roda al voltant del seu eix.

(*) Penseu en una moneda que rodola sobre una taula sense abatre's.

Com que el pla de la roda es mante' vertical, no cal definir un angle θ de nutació.

Tal i com demana l'exercici, calculem $\bar{v}_T(C)$:



$$\begin{aligned}\boxed{\bar{v}_T(C)} &= \bar{v}_T(J) + \bar{\Omega}_T^{\text{roda}} \times \bar{JC} = \\ &= [(\uparrow\dot{\psi}) + (\vec{\Theta}\dot{\varphi})] \times (\uparrow r) = \\ &= (\rightarrow r\dot{\varphi}) \quad (\square)\end{aligned}$$

No depèn de $\dot{\psi}$ i el seu sentit és el causat per la rotació $\dot{\varphi}$.

El resultat és molt simple, però extraordinàriament potent a l'hora de fer anàlisi cinemàtica de vehicles. Vegeu-ho:

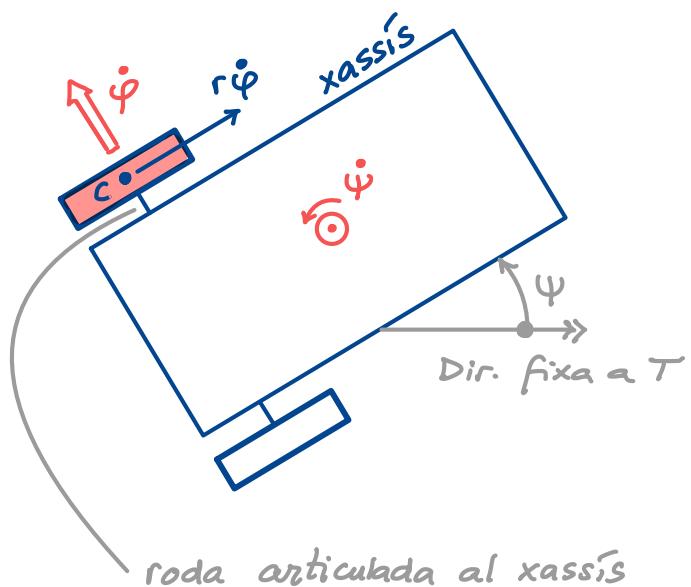
Quan una roda està articulada al xassís d'un vehicle, $\dot{\psi}$ ve donada per l'angle d'orientació del xassís resp. T, i $\dot{\varphi}$ és la vel. angular de rotació pròpia de la roda respecte el xassís.

Per a la roda vermella \rightarrow

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_T^{\text{roda}} &= \bar{\Omega}_{xassís}^{\text{roda}} + \bar{\Omega}_T^{\text{xassís}} \\ &= (\uparrow\dot{\varphi}) + (\odot\dot{\psi})\end{aligned}$$

i del resultat (\square) tenim

$$\bar{v}_T(C) = (\rightarrow r\dot{\varphi})$$

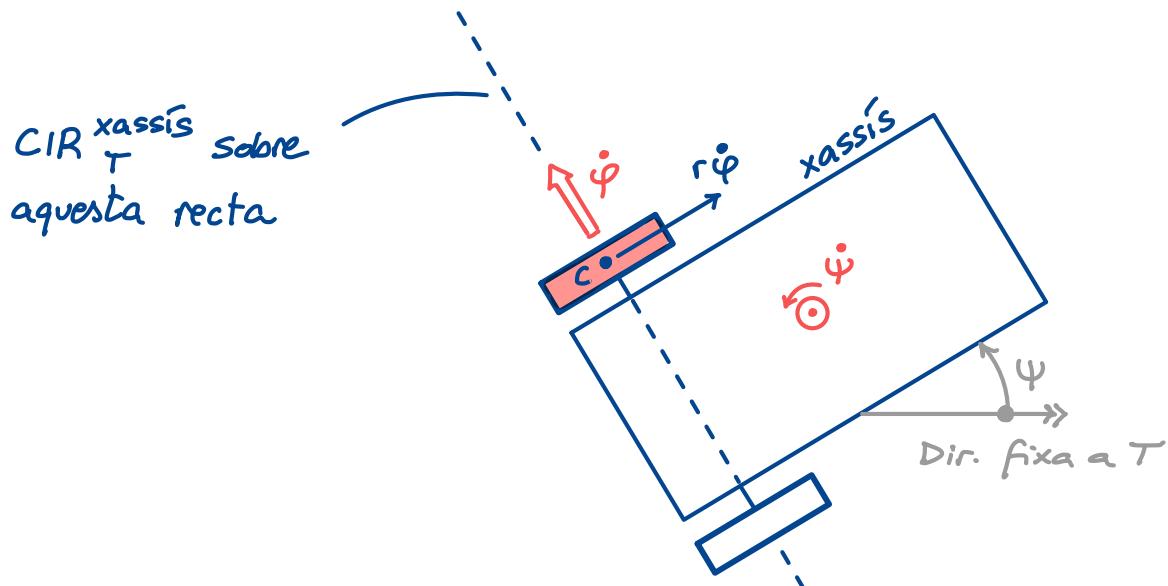


Ara, com que C és un punt de la roda, i alhora

del xassís, automàticament sabem que

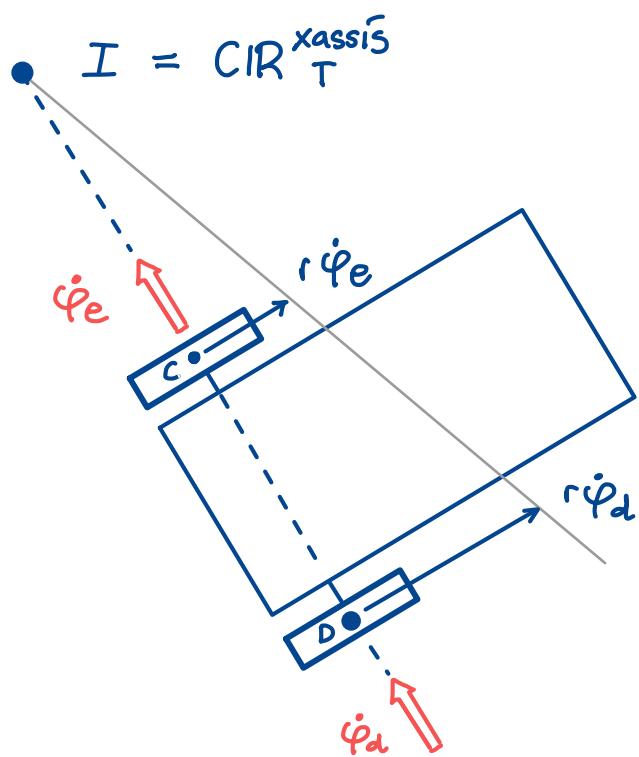
$$\ddot{v}_T(C_{xassís}) = (\rightarrow r\dot{\varphi})$$

i això ens diu que $CIR_T^{xassís}$ ha de ser sobre la recta suport de l'eix de la roda:



Si a més sabem les velocitats angulars de rotació pròpia de les dues rodes ($\dot{\varphi}_e$, $\dot{\varphi}_d$), podem localitzar el $CIR_T^{xassís}$:

recta esquerra

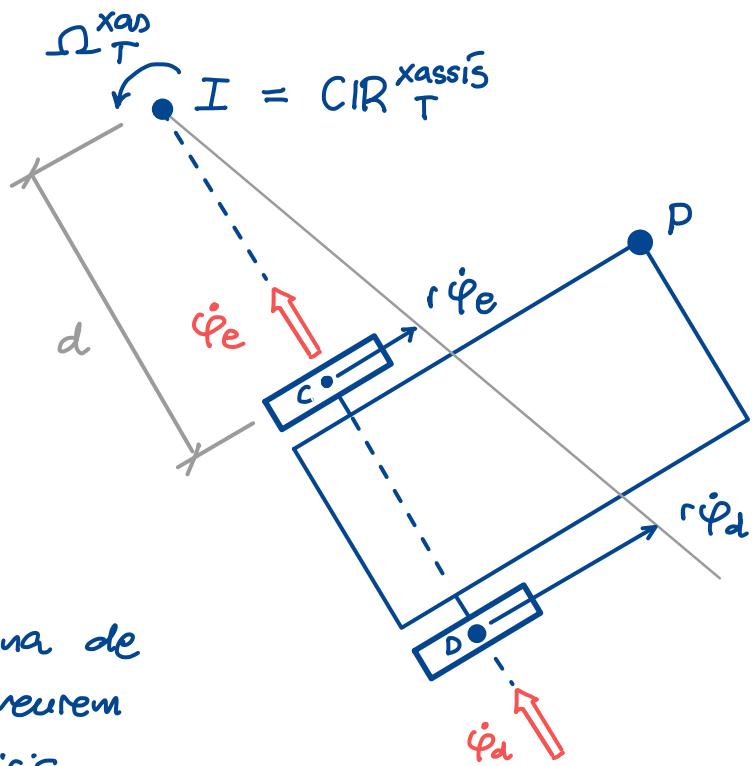


Amb el CIR ubicat, sabem d , i podem deduir que la velocitat angular del xassís és

$$\Omega_d^{xas} = \frac{r\dot{\varphi}_e}{d}$$

i a partir d'aquí podem deduir les velocitats d'altres punts P del xassís fent

$$\bar{v}_T(P) = \bar{\Omega}_T^{xas} \times \bar{IP}$$

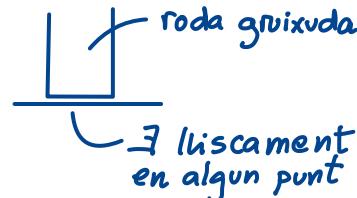


Podem fer aquesta mena de càlculs, i més! Ho veurem en els propers exercicis.

Hipòtesis simplificadores

Cal deixar clar que, en aplicar el resultat (\square) a l'anàlisi cinemàtica de vehicles, estem suposant que:

- ▷ El vehicle es mou en terreny pla \Rightarrow J cau a la vertical de C
- ▷ El vehicle no té suspensions (si en tingues, el pla de la roda no es mantindria vertical).
- ▷ Les rodes són primes \Rightarrow Podem suposar que el contacte roda-terra és puntual i sense lliscament. (en rodes quixudes hi ha punts de lliscament)



Sempre aplicarem les anteriors hipòtesis simplificadores en aquest curs.

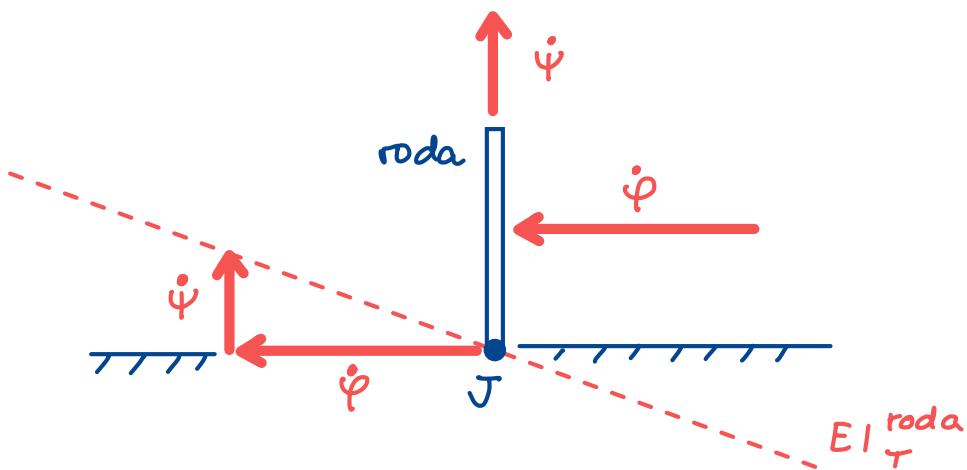
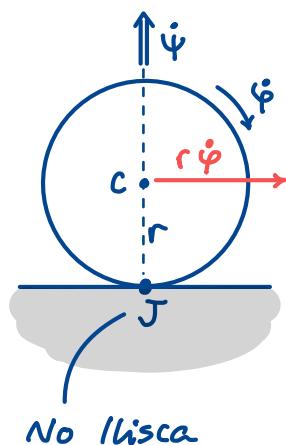
Observació important :

En la deducció de l'eq. (II)

$$\bar{v}_T(c) = (\rightarrow R\dot{\varphi})$$

fixeu-vos que J no és el CIR de la roda resp. T.

La roda té moviment 3D, no 2D (*), i per tant no té CIR, sinó eix instantani de rotació. Quin eix és? Passa per J i té la dir. de $\bar{\omega}_T^{\text{roda}} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}$:

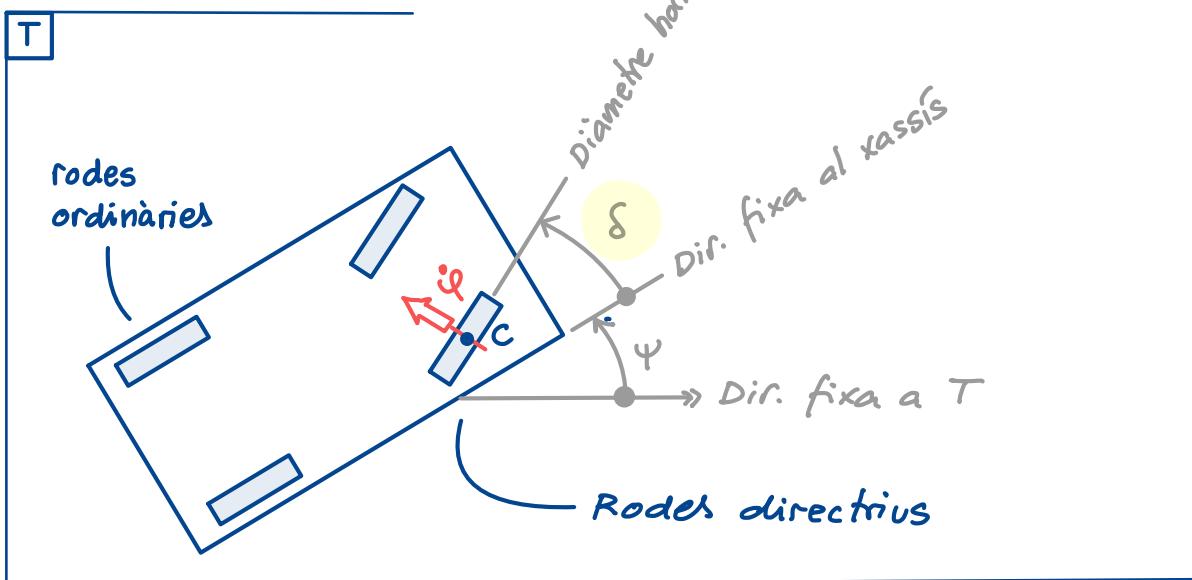


Com que $\dot{\psi}$ i $\dot{\varphi}$ poden ser qualssevol en principi, l' El_T^{roda} no queda determinat en general. Per tant, no és útil en l'anàlisi cinemàtica de vehicles. Ni hi pensem! I tampoc diguem mai que a l'Eq (II) $r\dot{\varphi}$ és "distància al CIR per $\dot{\varphi}$ ". Seria erroni!

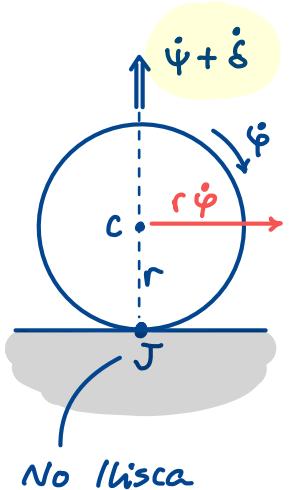
(*) Qui té moviment 2D és el xassís!

Velocitat del centre d'una roda directriu

A banda de les rodes ordinàries, directament articulades al xassís, un vehicle també pot tenir rodes directrius, com les del davant en un cotxe, o en un tricicle, on entra en joc un angle δ addicional que orienta el pla vertical de la roda respecte el xassís:



En aquestes rodes també s'obté el resultat de l'eq. (□), ja que, ara:



$$\boxed{\bar{v}_T(c)} = \left[\left(\uparrow (\dot{\psi} + \dot{\delta}) + (\vec{\omega} \vec{r}) \right) \times (\uparrow r) \right] = \\ = \boxed{(\rightarrow r \dot{\varphi})} \quad \text{— Com a l'eq. (□) !}$$

Per tant, tot el que hem dit abans per les rodes ordinàries, s'aplica també a les directrius!

Els dos últims exercicis d'avui serviran per aplicar els coneixements anteriors a vehicles concrets. En el treball autònom d'Atenea en trobareu més. Comencem amb aquest:

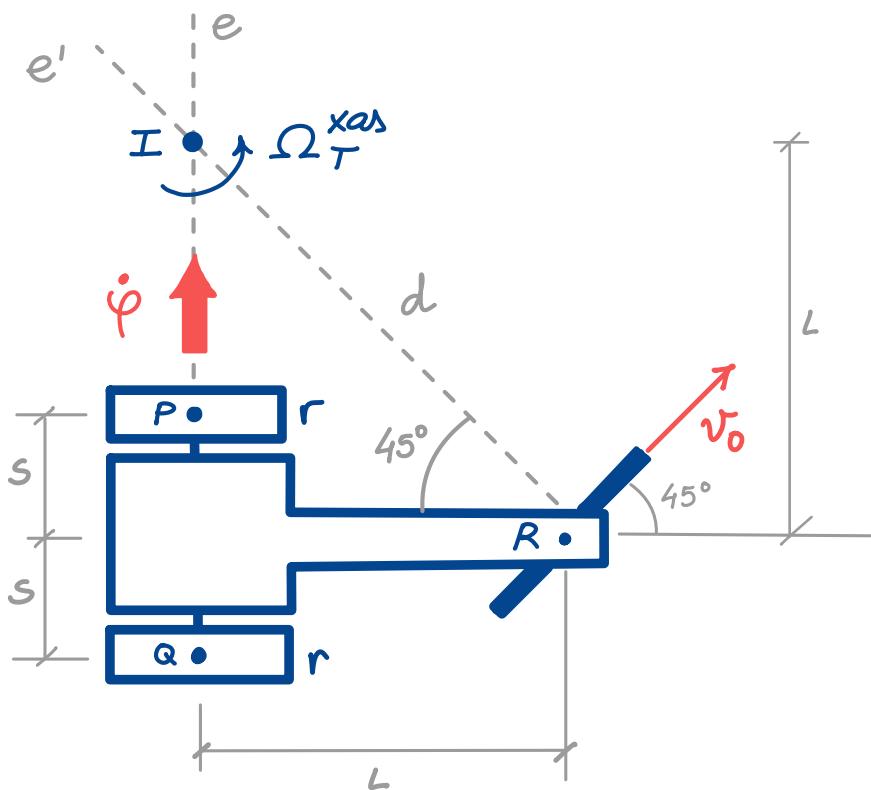
6P

Les rodes del tricicle són identiques i no llisqueren al damunt del terra (T). La velocitat del centre de la roda del davant té velocitat v_0 respecte del terra. Calcula la rotació pròpia $\dot{\phi}$ de la roda posterior esquerra en funció de v_0 .

Solució: pàgina següent.

Solució:

$$\dot{\varphi} = f(v_0) ?$$



P, Q, R són centres de les respectives rodes, però també punts del xassís.

$$P \text{ i } Q \text{ tenen vel. } \perp \text{ eix } e \quad | \Rightarrow CIR_T^{\text{xassís}} = I \\ R \text{ té vel. } \perp \text{ eix } e'$$

Busquem Ω_T^{xas} :

$$\Omega_T^{\text{xas}} = \frac{v_0}{d} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} \quad "xas" = \text{xassís}$$

Ara, veient P com a punt de la roda:

$$v_T(P) = r \cdot \dot{\varphi} \quad (\text{I})$$

CSR
roda

I veient P com del xassís:

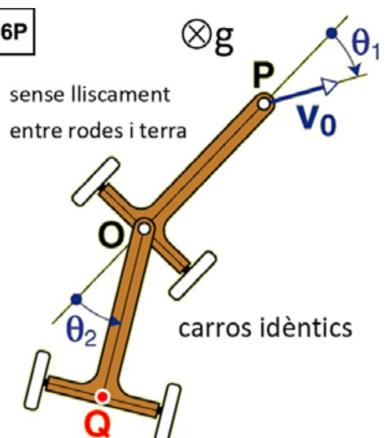
$$v_T(P) = \Omega_T^{\text{xas}} \cdot \underbrace{(L-s)}_{\text{dist. al CIR}} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} \cdot (L-s) \quad (\text{II})$$

CSR
xassís

$$I = II :$$

$$r \dot{\varphi} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} (L-s) \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{v_0}{rL\sqrt{2}} (L-s)$$

6P

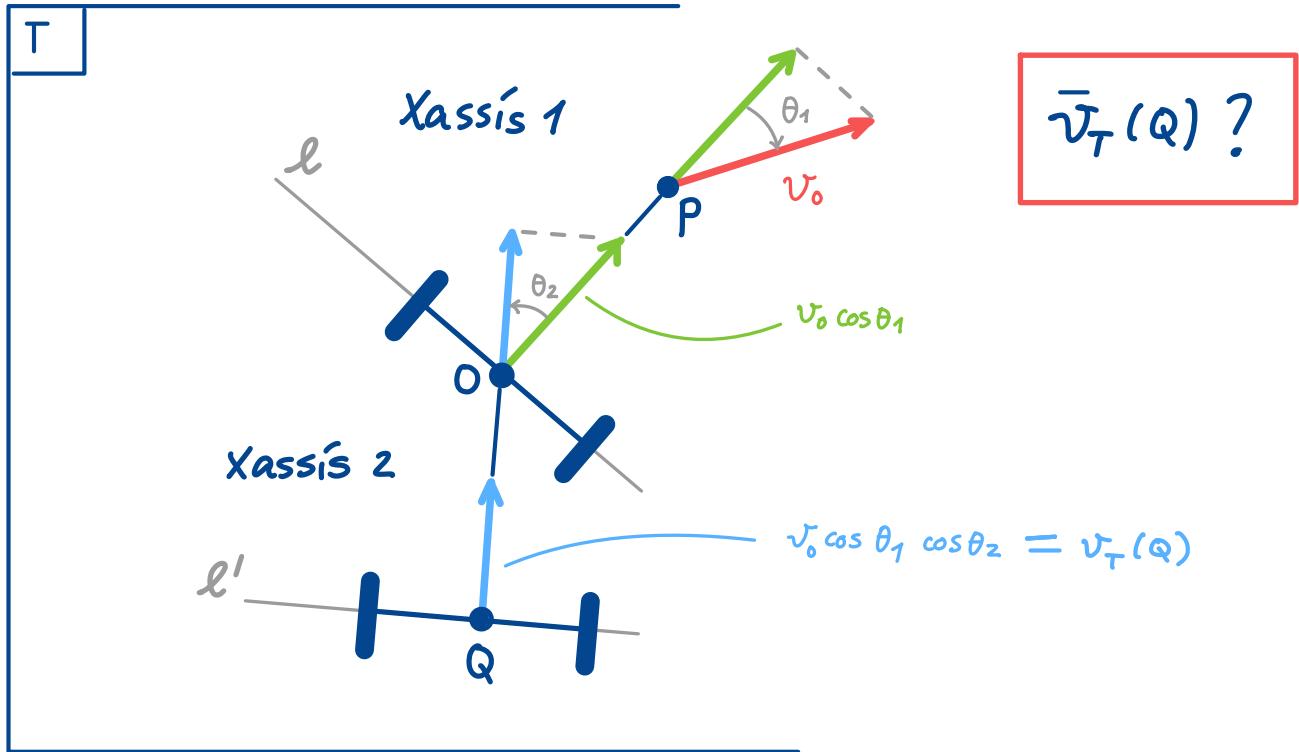


Les rodes del tractor i el remolc són identiques i no llisquen al damunt del terra (T). La velocitat del punt **P** respecte del terra és v_0 . Calcula $\bar{v}_T(Q)$.

Solució: pàgina següent.

Solució ràpida via equiprojectivitat !

(Solució menys directa, però igualment bona, a la pàg. seg.)

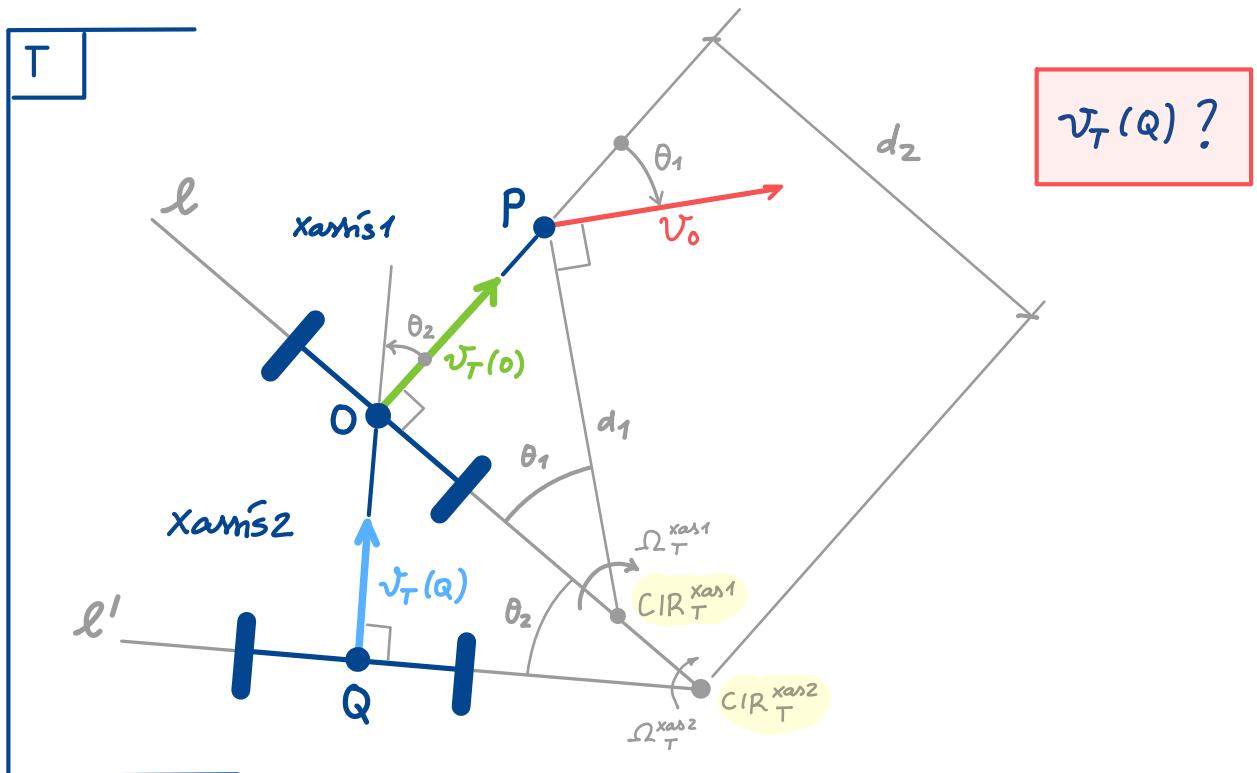


- CIR $\frac{xassís 1}{T}$ sobre $l \Rightarrow \bar{v}_T(O) \perp l$
 - Equiprojectivitat $P \rightarrow O : v_T(O) = v_0 \cos \theta_1$
 - CIR $\frac{xassís 2}{T}$ sobre $l' \Rightarrow \bar{v}_T(Q) \perp l'$
 - Equiprojectivitat $O \rightarrow Q :$
- $$\boxed{v_T(Q) = v_T(O) \cos \theta_2 = \frac{v_0 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{}}$$

La dir. de $\bar{v}_T(Q)$ és la de \overline{OQ} , apuntant cap a O .

Solució "lenta" via localitzar CIR_T^{xas1} i CIR_T^{xas2}

Els CIR_T^{xas1} i CIR_T^{xas2} han de ser on indiquem. A més, $v_T(0)$ i $v_T(Q)$ han de ser \perp a l i l' , respectivament.



$$\Omega_T^{xas1} = \frac{v_0}{d_1}$$

dist (CIR_T^{xas1} , P)

$$v_T(0) = \Omega_T^{xas1} \cdot d_1 \cos \theta_1 = v_0 \cos \theta_1$$

$$\Omega_T^{xas2} = \frac{v_T(0)}{d_2} = \frac{v_0 \cos \theta_1}{d_2}$$

dist (CIR_T^{xas2} , O)

$$v_T(Q) = \Omega_T^{xas2} \cdot d_2 \cos \theta_2 = \frac{v_0 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{d_2}$$