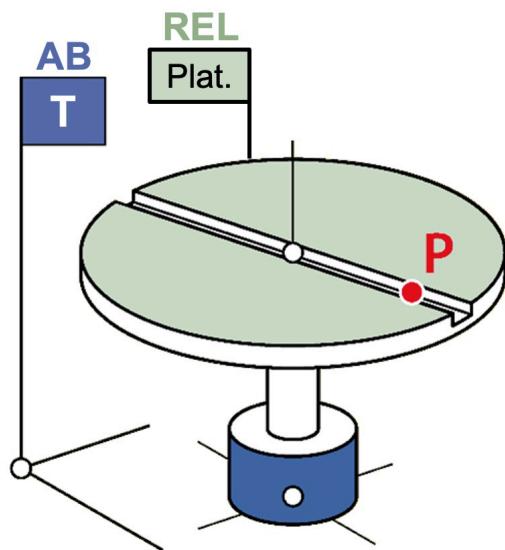


# 4P

Composició  
de moviments

## Relació entre vel. i accel. en 2 refs.



$$\bar{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P}) + \bar{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P})$$

$$\text{amb } \bar{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P} \in REL)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{a}}_{REL}(\mathbf{P}) + \bar{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) + \bar{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P})$$

$$\text{amb } \begin{cases} \bar{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P} \in REL) \\ \bar{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P}) = 2\bar{\Omega}_{AB}^{REL} \times \bar{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P}) \end{cases}$$

Recordeu:

Sempre cal declarar les referències.

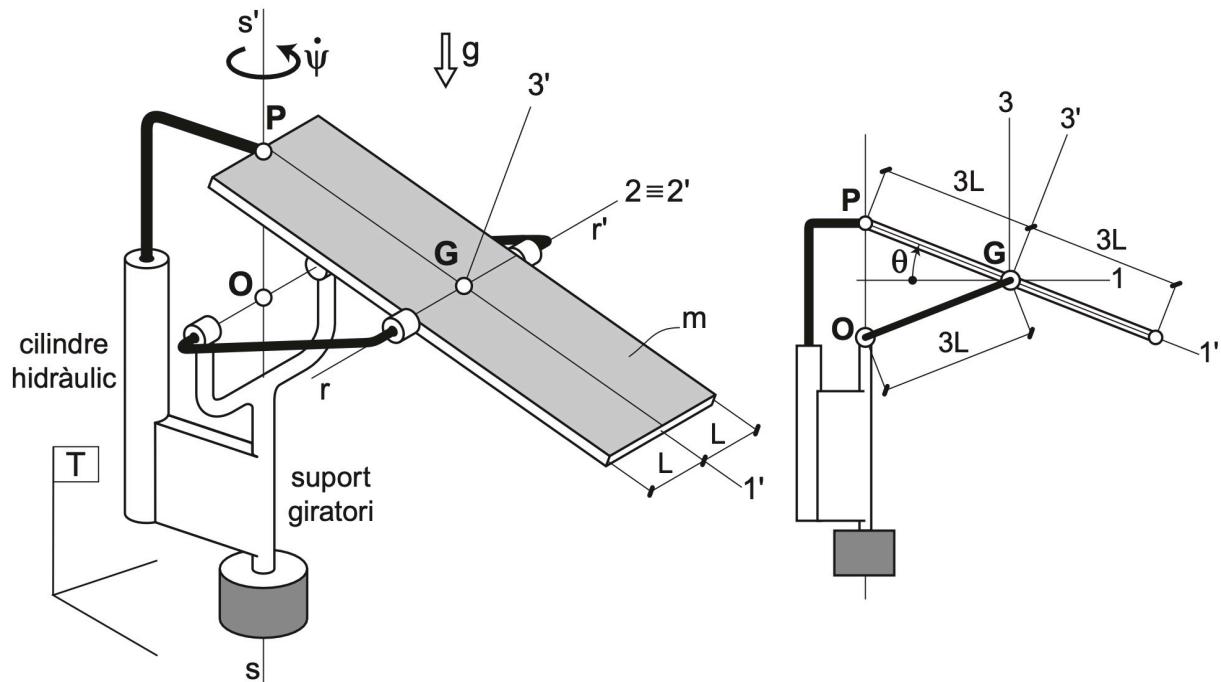
Quan feu composició de moviments, cal declarar què feu servir com a referències absoluta i relativa (AB i REL)

Si expresseu els resultats en alguna base, indiqueu a què són fixes les direccions d'aquesta base.

Problema 1, gener 2007 (variació del C3-E.2 de la Wikimec)

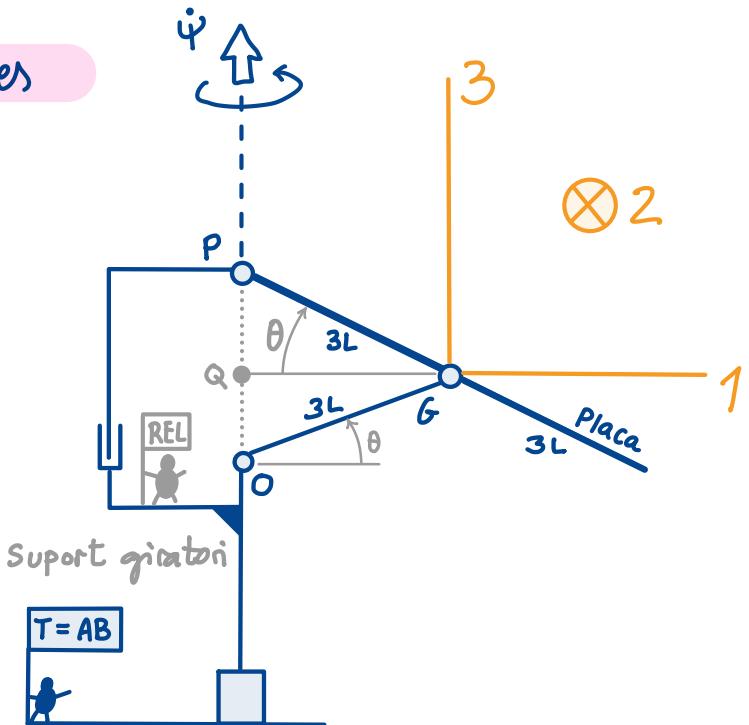
### Placa articulada giratòria

La placa rectangular està unida a un suport giratori a través de dues barres amb articulacions als extrems. Una tercera barra està unida a la placa a través d'una **ròtula esfèrica** (a P) i al suport a través d'un **enllaç cilíndric**. El suport gira amb velocitat angular  $\dot{\psi}$  de valor variable respecte del terra (T).



Determineu les components, en la base d'eixos (1,2,3), de l'acceleració del centre d'inèrcia **G** de la placa respecte al terra per composició de moviments, prenent com a ref. REL. la solidària al suport giratori [3 p]

Pistes



→ velocitat  
→ accel.

Dir. QG Dir Vertical  
 $B = (1, 2, 3)$   
fixa al suport giratori

$\bar{v}_T(G)$  via comp. vel.

REL = suport giratori

$AB = T$

$$\bar{v}_{AB}(G) = \underbrace{(\uparrow \text{ yellow})}_{\bar{v}_{REL}(G)} + \underbrace{(\otimes \text{ yellow})}_{\bar{v}_{ar}(G)} =$$

la que té G si G ∈ REL

Dibuixos vecs. vermellos a la fig. i els projecte

$\left\{ \begin{array}{c} \text{yellow bar} \\ \text{yellow bar} \\ \text{yellow bar} \end{array} \right\}_B$

No es demana, però ho fem x practicar

$\bar{a}_T(G)$  via comp. accel.

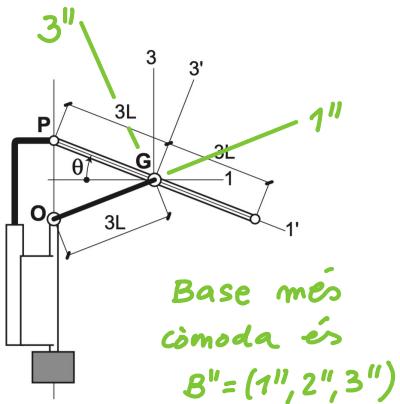
$$\bar{a}_{AB}(G) = \underbrace{(\text{yellow}) + (\text{yellow})}_{\bar{a}_{REL}(G)} + \underbrace{(\otimes \text{ yellow})}_{\bar{a}_{ar}(G)} + (\leftarrow \text{ yellow}) +$$

E és un vec. "pel·lícula" perquè l'hem obtingut per a una configuració genèrica del mecanisme. Si volem, el podem derivar respecte t per obtenir  $\bar{a}_{AB}(G)$  però, aquí buscarem  $\bar{a}_{AB}(G)$  per composició d'acceleracions

$$+ 2 \underbrace{(\text{yellow}) \times (\text{yellow})}_{\bar{a}_{cor}(G)} = \left\{ \begin{array}{l} -3L\ddot{\theta} \sin \theta - 3L\dot{\theta}^2 \cos \theta - 3L\dot{\psi}^2 \cos \theta \\ 3L\ddot{\psi} \cos \theta - 6L\dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta \\ 3L\ddot{\theta} \cos \theta - 3L\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{array} \right\}_B \quad (A)$$

Dibuixos vecs blaus a la figura i els projecte

Nota: La base + còmoda per expressar els resultats, de fet, és la solidària a les barres laterals, xq només requereix descompondre  $\leftarrow \dot{\psi}^2 3L \cos \theta$ . Deures: projecteu  $\vec{v}_{AB}(G)$  i  $\vec{a}_{AB}(G)$  en aq. base



Sol. alternativa, derivant un vec. pos. (No la farem)

També és una bona opció!

$$\overline{OG} = \begin{Bmatrix} 3L \cos \theta \\ 0 \\ 3L \sin \theta \end{Bmatrix}_B = 3L \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{Bmatrix}_B \quad \text{com que és un vec. de posició totalment genèric, és un vector "pel·lícula" i el podem derivar!}$$

Derivem dues vegades en base B, que gira amb  $\bar{\Omega}_T^B = (\uparrow \dot{\psi})$

$$\{\bar{\Omega}_T^B\}_B$$

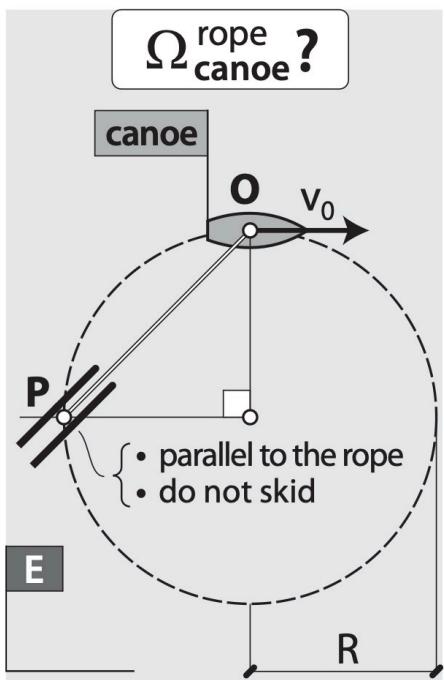
$$\vec{v}_T(G) = \frac{d\overline{OG}}{dt} \Big|_T = 3L \left[ \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \\ \dot{\theta} \cos \theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}} \right] = 3L \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \\ \dot{\theta} \cos \theta \end{Bmatrix}_B$$

$$\bar{a}_T(G) = 3L \left[ \begin{Bmatrix} -\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \\ \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \\ \dot{\theta} \cos \theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -\dot{\psi}^2 \cos \theta \\ -\dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}} \right] =$$

$$= 3L \begin{Bmatrix} -\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta - \dot{\psi}^2 \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - 2\dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \\ \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{Bmatrix}_B \quad (B)$$

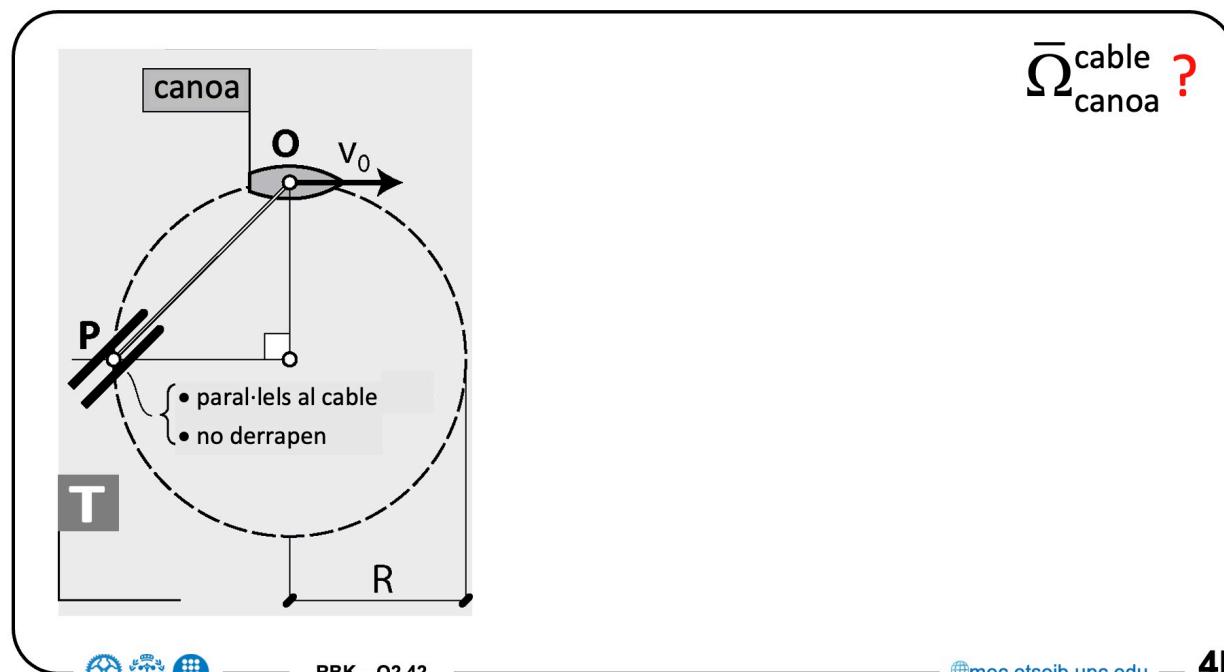
(B) = (A)  
Com esperavem!

Canoa i esquiador (qüestió 2.42 RBK, pàg. 96)

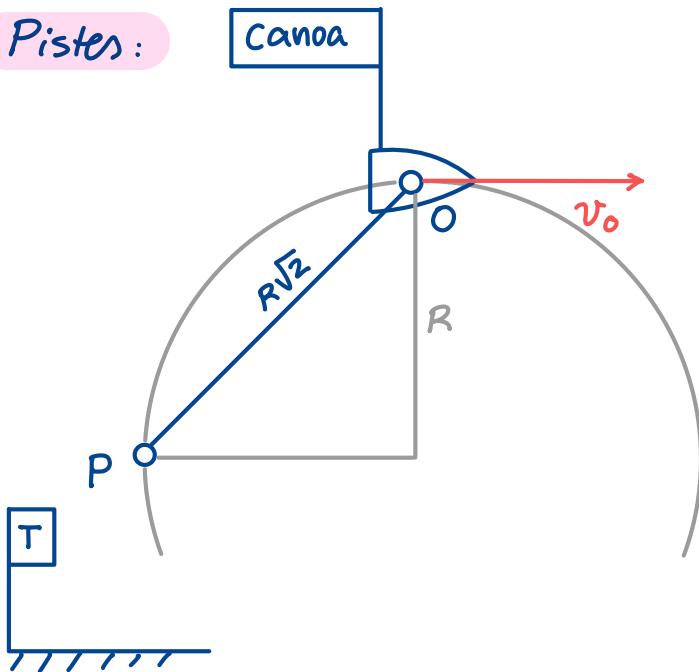


**2.42** Point O of the canoe has a uniform circular motion relative to the ground (E). The canoe drags a skier P (modeled as a particle) through a taut rope. What is the rope angular velocity relative to the canoe ( $\Omega^{\text{rope}}_{\text{canoe}}$ ) at this particular configuration?

- A 0
- B  $v_0/(\sqrt{2}R)$ , clockwise direction
- C  $v_0/(\sqrt{2}R)$ , counterclockwise direction
- D  $v_0/(2R)$ , clockwise direction
- E  $v_0/(2R)$ , counterclockwise direction



Pistes:



Farem comp. velocitats amb

$$AB = T$$

$REL = \text{Canoa}$

$$\bar{v}_{AB}(P) = \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P)$$

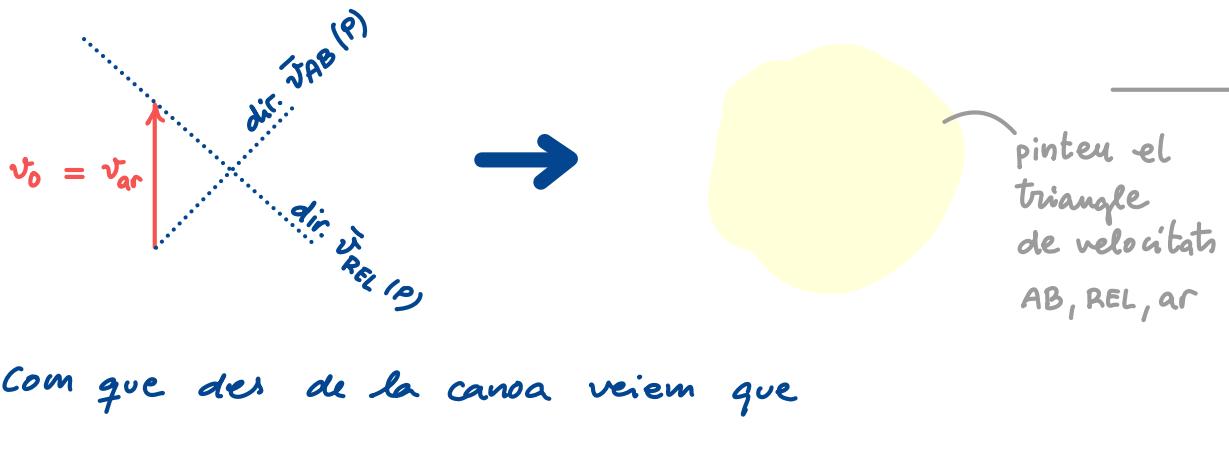
$$\begin{matrix} \text{sentit} \\ \text{indeterminat} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bar{v}_{AB} \\ = \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bar{v}_{REL} \\ + \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bar{v}_{ar} \\ (A) \end{matrix}$$

Ja que  
esquis  
no derrapen

Ja que  
mov. rel.  
és circular

Ja que canoa  
fa movim.  
circular

De (A) deduim la següent geometria de velocitats:



Com que des de la canoa veiem que

$$\bar{v}_{REL}(P) = ( ) \quad (B)$$

la vel. ang. del cable respecte la canoa ha de tenir la forma

$$\bar{\Omega}_{\text{cano}}^{\text{cable}} = \bar{\omega}. \quad \text{Això implica que}$$

$$\bar{v}_{REL}(P) = ( ) \quad (C)$$

Ja que P té movim. circular  
vist des de la canoa

igualant (B) i (C):

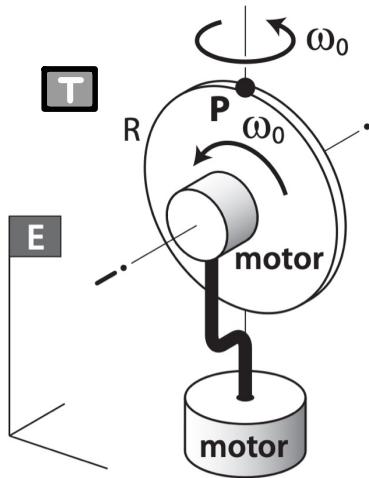
$$\Rightarrow \omega =$$

Per tant:

$$\bar{\Omega}_{\text{cano}}^{\text{cable}} =$$

Disc de 2 GL (qüestió 2.18 RBK)

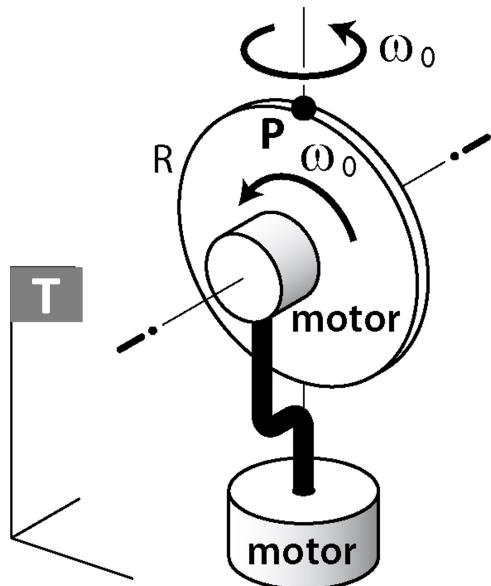
$$\mathfrak{R}_T(P) ?$$



**2.18** What is the value of the radius of curvature  $\mathfrak{R}_T(P)$  when point  $P$  of the disk goes through the highest position?

- A 0
- B  $R$
- C  $R/2$
- D  $R/\sqrt{2}$
- E  $R/\sqrt{5}$

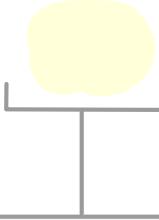
$$\mathfrak{R}_T(P) ?$$



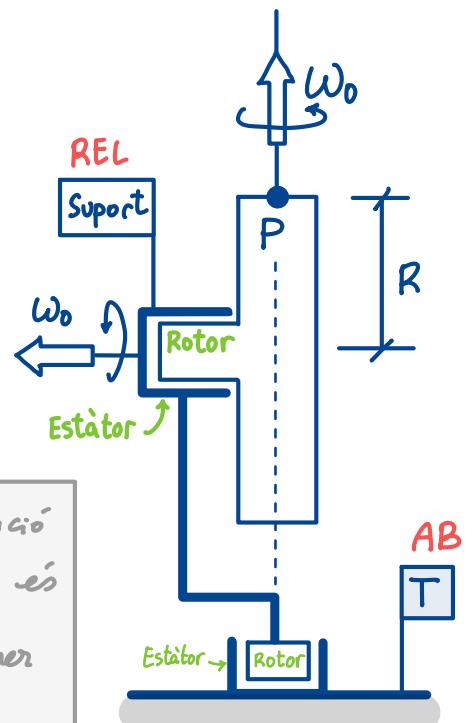
Pistes: (Sol. a pàg. seg.)

$$\begin{array}{l|l} \text{Comp.} & AB = T \\ \text{mov.} & REL = \text{Suport} \end{array}$$

$$\bar{v}_{AB}(P) = \underbrace{\bar{v}_{REL}(P)}_{\otimes \omega_0 R} + \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)}_0 =$$

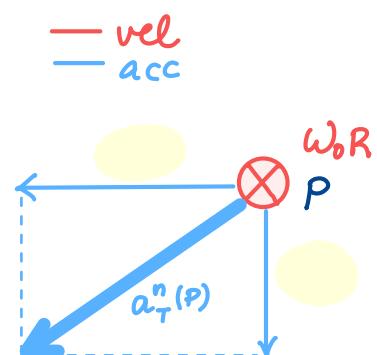


No és un vector "pel·lícula", perquè la configuració amb la que l'hem obtingut (la del dibuix) no és genèrica. Vol dir que no el podem derivar per obtenir  $\bar{a}_T(P)$ . Caldrà fer composició d'acceleracions.



$$\begin{aligned} \bar{a}_{AB}(P) &= \bar{a}_{REL}(P) + \bar{a}_{ar}(P) + \bar{a}_{cor}(P) = \\ &\quad \underbrace{2 \bar{\Omega}_{AB}^{REL} \times \bar{v}_{REL}(P)}_{cor} \\ &= (\downarrow \underbrace{\text{REL}}_{REL}) + (\underbrace{\text{ar}}_{ar}) + 2 \underbrace{\left[ (\underbrace{\text{REL}}_{REL}) \times (\underbrace{\text{ar}}_{ar}) \right]}_{cor} = (\downarrow \omega_0^2 R) + (-2 \omega_0^2 R) \end{aligned}$$

Dibuixem vel. i acc. de P per esbrinar quina part és  $\bar{a}_T^n(P)$ :



Tota l'accel.  
és normal!

$$a_T^n(P) = \sqrt{(\underbrace{\text{ar}}_{ar})^2 + (\underbrace{\text{cor}}_{cor})^2} =$$

$$R_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|} = \frac{\omega_0^2 R^2}{|a_T^n(P)|} =$$

$$RESP =$$

## Solució ràpida

Introduix una base, però només és per poder comparar resultats amb els de la pàg. següent. Per resoldre la qüestió, no cal.

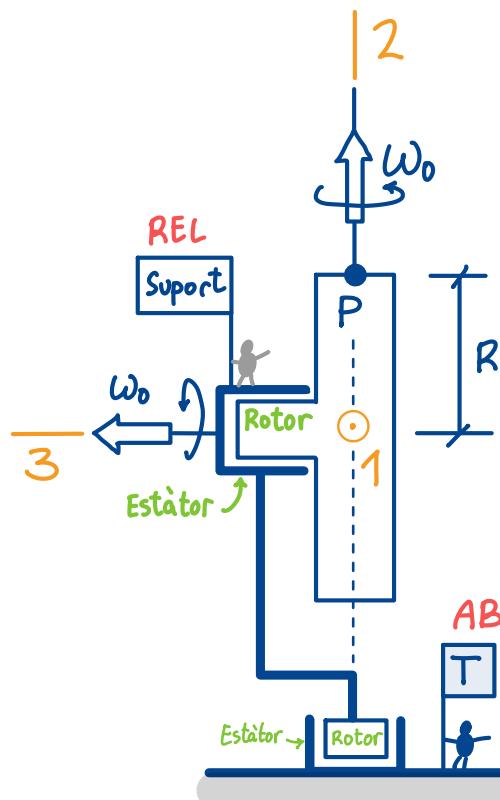
Farem comp.  
movim. amb

$AB = T$
$REL = \text{Suport}$

$$\bar{v}_{AB}(P) = \underbrace{\bar{v}_{REL}(P)}_{\otimes w_0 R} + \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)}_{\bar{o}} = \otimes w_0 R$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -w_0 R \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_B \quad (\square)$$

No és un vector "pel·lícula", perquè la configuració amb la que l'hem obtingut (la del dibuix) no és genèrica. Vol dir que no el podem derivar per obtenir  $\bar{a}_T(P)$ . Caldrà fer composició d'acceleracions



$$B = (1, 2, 3)$$

$\downarrow$

Dir. vertical      Dir. eix motor Superior

$$\bar{a}_{AB}(P) = \bar{a}_{REL}(P) + \bar{a}_{ar}(P) + \bar{a}_{cor}(P) =$$

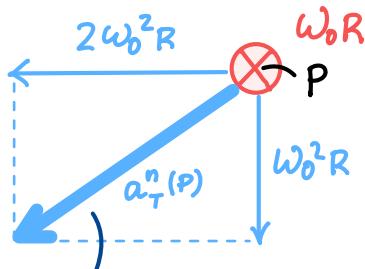
$\underbrace{\quad\quad\quad}_{2 \bar{\omega}_{AB}^{REL} \times \bar{v}_{REL}(P)}$

$$= (\downarrow w_0^2 R) + \bar{o} + 2 \underbrace{[(\uparrow w_0) \times (\otimes w_0 R)]}_{\leftarrow 2 w_0^2 R} = (\downarrow w_0^2 R) + (\leftarrow 2 w_0^2 R)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -w_0^2 R \\ 2w_0^2 R \end{array} \right\}_B \quad (\bullet)$$

Dibuixem vel. i accel. per deduir  $\bar{a}_T^n(P)$ :

— vel  
— acc



Tota l'accel.  
és normal  
a  $\otimes w_0 R$  ! (\*)

$$a_T^n(P) = \sqrt{(2w_0^2 R)^2 + (w_0^2 R)^2} = w_0^2 R \sqrt{5}$$

$$R_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|} = \frac{(w_0 R)^2}{w_0^2 R \sqrt{5}} = \frac{R}{\sqrt{5}}$$

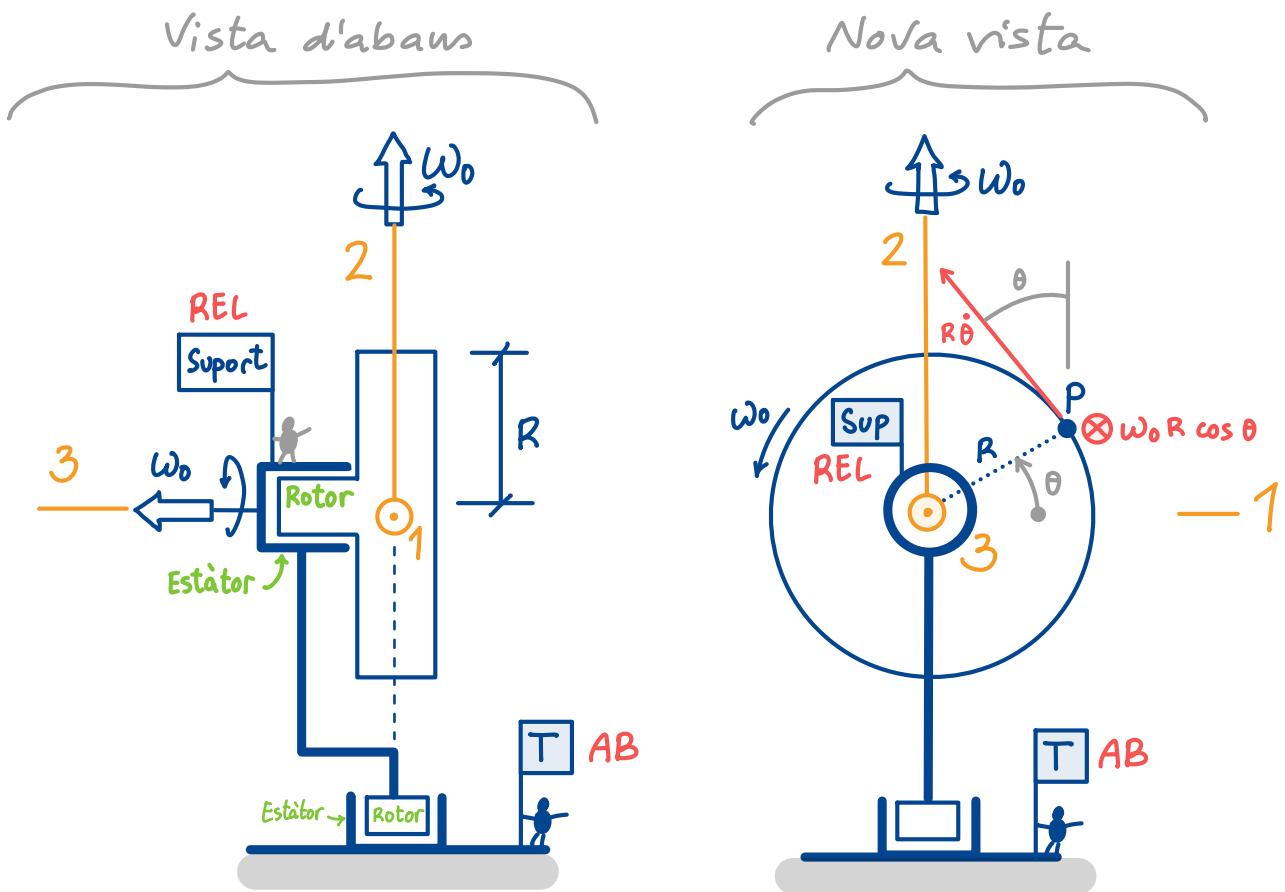
RESP = E

(\*) Punt que a alguns estudiants els costa de veure

La faig perquè es vegi la superioritat de la compos. de moviments en aquest problema

Solució + feixuga via l'obtenció d'un vec. pel·li per  $\bar{v}_{AB}(P)$ , i derivant-lo

Cal obtenir-lo sobre una config. genèrica. Això obliga a treballar sobre una altra vista del sistema, i a posar P en posició general, introduint la coordenada  $\theta$ :



Treballant amb la nova vista:

$$\bar{v}_{AB}(P) = (\cancel{\bar{v}_{REL}(P)} + \cancel{\bar{v}_{ar}(P)}) = \left\{ \begin{array}{c} -R\dot{\theta}\sin\theta \\ R\dot{\theta}\cos\theta \\ -w_0 R \cos\theta \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} -Rw_0 \sin\theta \\ Rw_0 \cos\theta \\ -w_0 R \cos\theta \end{array} \right\}_B$$

Ara  $\bar{v}_{AB}(P)$  sí que és un vec. pel·lícula i el podem derivar!

Abans de fer-ho, fixem-nos que si el particularitzem per a  $\theta = 90^\circ$ , obtenim la velocitat de P quan passa pel punt més alt. És a dir, la de (■) a la pàgina anterior:

$$\left[ \bar{v}_{AB}(P) \right]_{\theta=90^\circ} = \left\{ \begin{array}{c} -Rw_0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_B \leftarrow \text{Coincideix amb (■) !} \quad (\text{com esperavem})$$

Doncs va! Ara derivem el  $\bar{v}_{AB}(P)$  genèric per obtenir  $\bar{a}_{AB}(P)$  genèrica. Fem-ho analíticament:

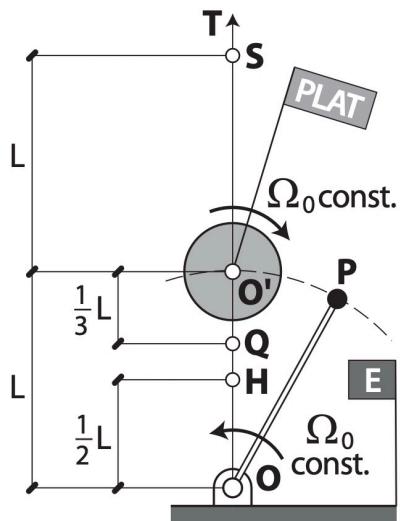
$$\begin{aligned} \{\bar{v}_{AB}(P)\}_B &= \begin{Bmatrix} -R\omega_0 \sin \theta \\ R\omega_0 \cos \theta \\ -R\omega_0 \cos \theta \end{Bmatrix}_B \\ \downarrow & \\ \{\bar{a}_{AB}(P)\}_B &= \begin{Bmatrix} -R\omega_0 \dot{\theta} \cos \theta \\ -R\omega_0 \dot{\theta} \sin \theta \\ R\omega_0 \dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -R\omega_0 \sin \theta \\ R\omega_0 \cos \theta \\ -R\omega_0 \cos \theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -R\omega_0^2 \cos \theta \\ 0 \\ R\omega_0^2 \sin \theta \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} -2R\omega_0^2 \cos \theta \\ -R\omega_0^2 \sin \theta \\ 2R\omega_0^2 \sin \theta \end{Bmatrix}_B \quad (*) \\ &\quad \dot{\theta} = \omega_0 \end{aligned}$$

Si ara particularitzem (\*) per  $\theta = 90^\circ$  obtenim l'acceleració de P quan passa pel punt més alt (la de (●), al principi):

$$\left[ \{\bar{a}_{AB}(P)\}_B \right]_{\theta=90^\circ} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R\omega_0^2 \\ 2R\omega_0^2 \end{Bmatrix}_B \leftarrow \begin{array}{l} \text{Coinideix amb (●) !} \\ (\text{com esperavem}) \end{array}$$

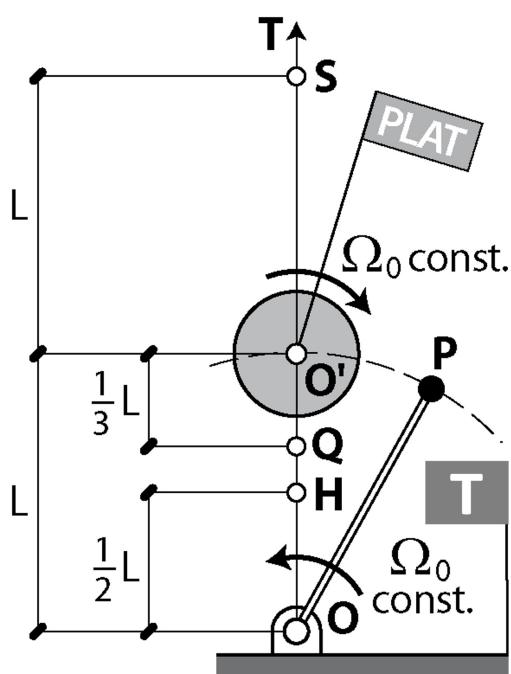
CC de P (Qüestió 2.21 RBK)

**Curv. Center<sub>PLAT</sub>(P)  
when P goes through O'?**



**2.21** Where is the **P** curvature center relative to the platform (PLAT) when **P** goes through the platform center **O'** (fixed to the ground **E**)?

- A    **O**
- B    **H**
- C    **Q**
- D    **S**
- E    **T**

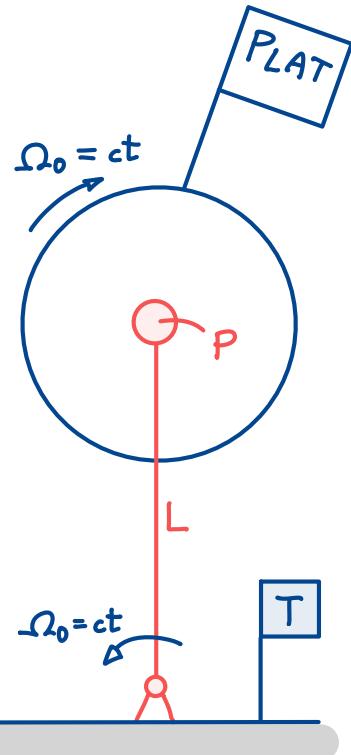


**CC<sub>PLAT</sub>(P) quan  
P passa per O'?**

## Pistes

Comp. vel. amb  $\left| \begin{array}{l} AB = \\ REL = \end{array} \right.$

$$\bar{v}_{REL}(P) = \underbrace{\bar{v}_{AB}(P)}_{\text{yellow}} - \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)}_{\text{yellow}} = (\leftarrow \Omega_0 L)$$



$$\bar{a}_{REL}(P) = \bar{a}_{AB}(P) - \bar{a}_{ar}(P) - \bar{a}_{cor}(P) =$$

$$\underbrace{2 \bar{\Omega}_{AB}^{REL} \times \bar{v}_{REL}(P)}_{\text{yellow}}$$

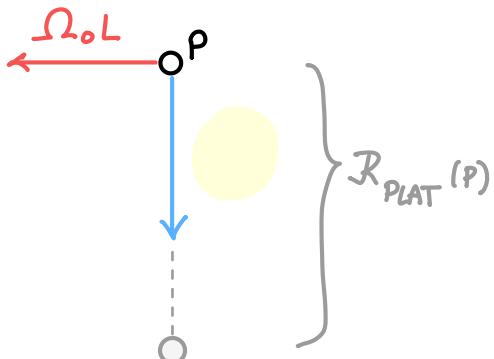
$$= (\downarrow \text{yellow}) - 0 - 2 \left[ (\curvearrowright \text{yellow}) \times (\leftarrow \text{yellow}) \right] =$$

$$\downarrow 2 \Omega_0^2 L$$

$$= (\text{yellow})$$

Dibuix per esbrinar quina és la component  $\bar{a}_{PLAT}^n(P)$

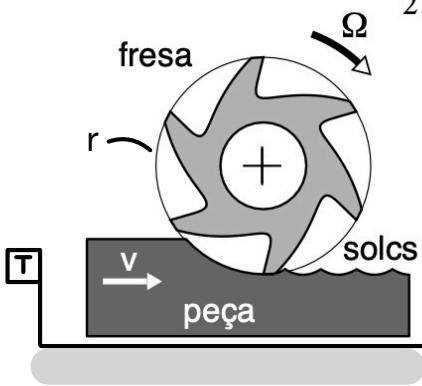
→ vel.  
→ acc.



$$R_{PLAT}(P) = \frac{v_{PLAT}^2(P)}{|\bar{a}_{PLAT}^n(P)|} = \frac{\text{yellow}}{\text{yellow}} = \text{yellow}$$

$$CC_{PLAT}(P) = \text{yellow}$$

$$RESP =$$



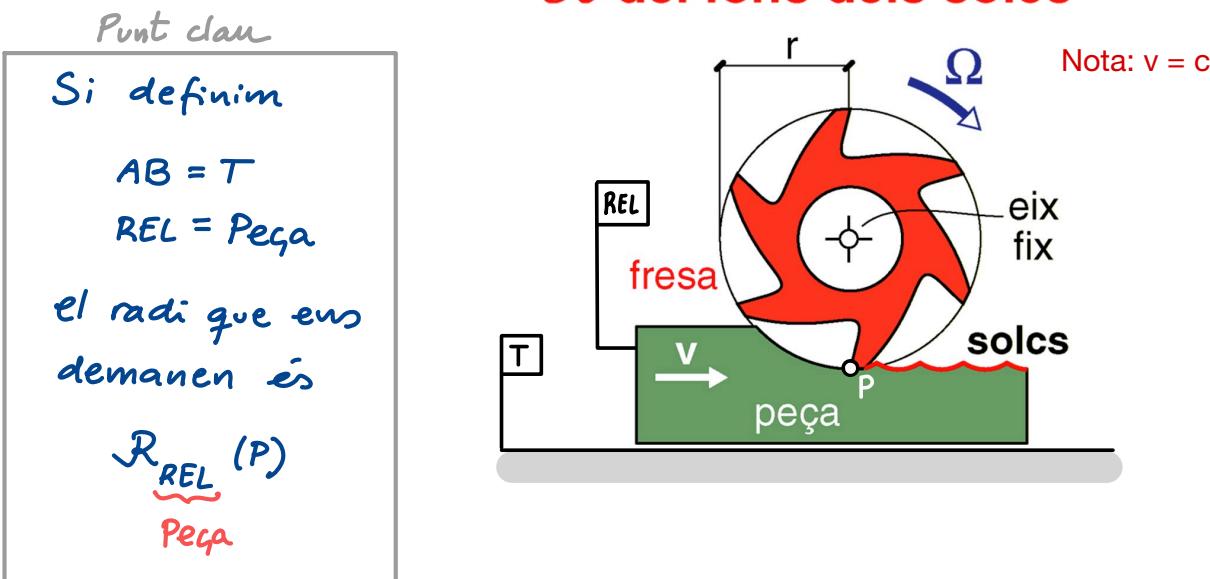
2.14 En una fresadora la fresa de radi  $r$  gira amb velocitat angular  $\Omega$  constant al voltant del seu eix, que és fix, i la peça que és fressada avança amb celeritat  $v$ . Quin és el radi de curvatura del fons dels solcs que queden al damunt de la superfície fresada?

- A       $r$
- B       $r(1+v/r \Omega)$
- C       $r(1-v/r \Omega)$
- D       $r(1+v/r \Omega)^2$
- E       $r(1-v/r \Omega)^2$

Nota:  $v = ct$

Pistes (Sol. a pàg. seg.)

## R del fons dels solcs

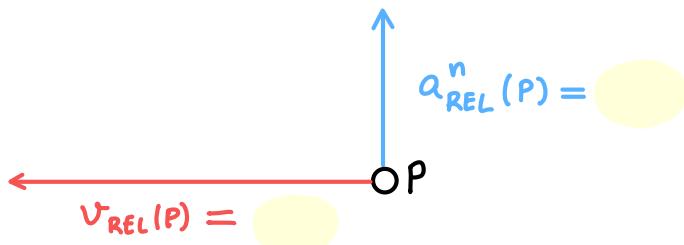


Cal trobar la  $\bar{v}_{REL}(P)$  i la  $\bar{\alpha}_{REL}^n(P)$ , i  $R_{REL}(P) = \frac{|\bar{v}_{REL}(P)|^2}{|\bar{\alpha}_{REL}^n(P)|}$

$$\bar{v}_{REL}(P) = \bar{v}_{AB}(P) - \bar{v}_{ar}(P) = (\quad) - (\quad) = [\leftarrow (\quad)]$$

$$\bar{\alpha}_{REL}(P) = \bar{\alpha}_{AB}(P) - \bar{\alpha}_{ar}(P) - 2\bar{\Omega}_{AB}^{REL} \times \bar{v}_{AB}^{REL}(P) =$$

$$= (\uparrow \quad) - (\quad) - 2(\quad \times \quad) = (\uparrow \quad)$$



$$R_{REL}(P) = \frac{(\quad)^2}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = r \left(1 + \frac{v}{\Omega r}\right)^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2b}{a}\right) = a^2 \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2$$

Aquest últim pas només rescriu la resposta en la forma de l'enunciat de la qüestió. Estrictament, no cal!

Sol. detallada

## R del fons dels solcs

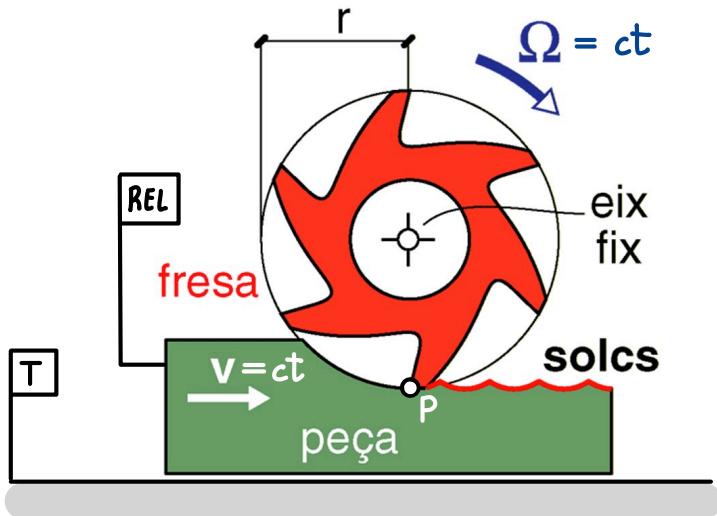
Si definim

$$AB = T$$

$$REL = \text{Pega}$$

el radi que ens  
demandan és

$$\underline{\underline{R}}_{REL}(P)$$
  
 $\text{Pega}$



Cal trobar la  $\bar{v}_{REL}(P)$  i la  $\bar{a}_{REL}^n(P)$ , i  $\underline{\underline{R}}_{REL}(P) = \frac{|\bar{v}_{REL}(P)|^2}{|\bar{a}_{REL}^n(P)|}$ .

$$\bar{v}_{REL}(P) = \bar{v}_{AB}(P) - \bar{v}_{ar}(P) = (\leftarrow \Omega r) - (\rightarrow v) = \leftarrow (\Omega r + v)$$

$$\bar{a}_{REL}(P) = \underbrace{\bar{a}_{AB}(P)}_{\uparrow r\Omega^2} - \underbrace{\bar{a}_{ar}(P)}_{\bar{0}} - 2 \underbrace{\bar{\Omega}_{AB} \times \bar{v}_{AB}(P)}_{\bar{0}} = \underbrace{r\Omega^2}_{\text{Tota ella}} \quad \text{es centrípeta}$$

p.g. es  $\perp$  a  $\bar{v}_{REL}(P)$

$$r\Omega^2 = a_{REL}^n(P)$$

$$v_{REL}(P) = \Omega r + v$$

$$\boxed{\underline{\underline{R}}_{REL}(P) = \frac{(\Omega r + v)^2}{r\Omega^2} = \frac{(\Omega r)^2 (1 + \frac{v}{\Omega r})^2}{\Omega^2 r} = r \left(1 + \frac{v}{\Omega r}\right)^2}$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2b}{a}\right) = a^2 \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2}$$

Aquest últim pas només rescriu la resposta en la forma  
de l'enunciat de la qüestió. Estrictament, no cal!