12P

Teoremes vectorials

Exemples 2D

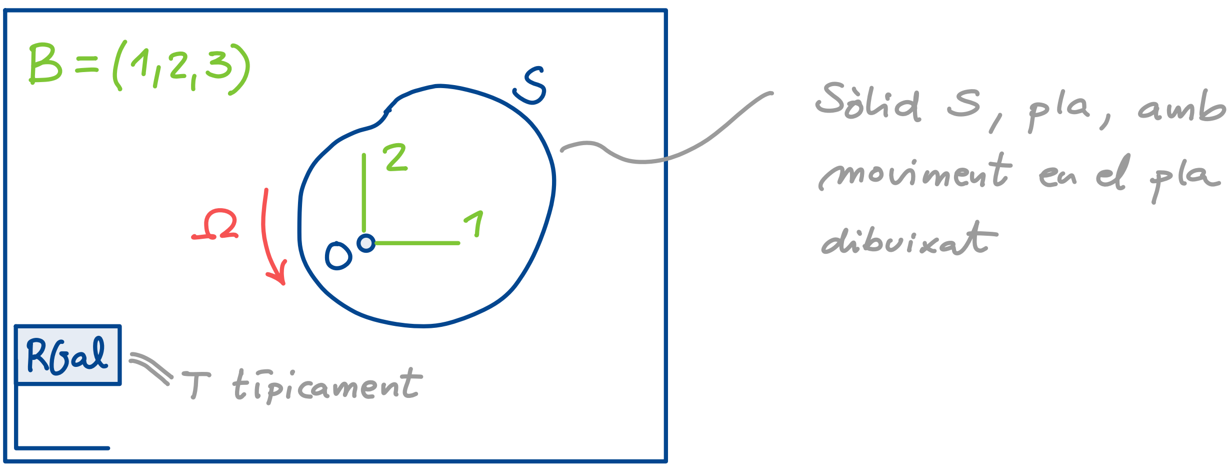
En els problemes d'avui, els sistemes mecànics seran plans i el seu moviment també. En aquesta situació, els teoremes vectorials

(TQM) $\sum \bar{F}_{ext} = m_{sist} \cdot \bar{a}_{RGal}(G)$

(TMC) $\sum \bar{M}_{ext}(O) - \overline{OG} \times m_{sist}\, \bar{a}_{RGal}(O) = \dot{\bar{H}}_{RTO}(O)$

proporcionen 3 eqs i no 6 (2 del TQM i 1 del TMC)

A més, el càlcul d'$\dot{\bar{H}}_{RTO}(O)$ es simplifica molt perquè, en ser plans els sòlids, la dir. $\perp$ al pla del sòlid és DPI, i tenim el següent:



$$\left\{\bar{H}^{S}_{RTO}(O)\right\}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}}_{[\mathbb{I}(O)]_B} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}^{S}_{RTO} = \bar{\Omega}^{S}_{RGal}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}\,\Omega \end{Bmatrix} = \odot\, I_{33}\,\Omega$$

$$\boxed{\dot{\bar{H}}_{RTO}(O) = \odot\, I_{33}\,\dot{\Omega} = I_{33}\underbrace{(\odot\,\dot{\Omega})}_{\substack{\text{Accel.}\\ \text{angular}\\ \text{d'S resp. T}\\ (\bar{\alpha}^{S}_{T})}} = I_{33} \cdot \bar{\alpha}^{S}_{T}}$$

APLICACIÓ DEL TMC A CONTACTES PUNTUALS

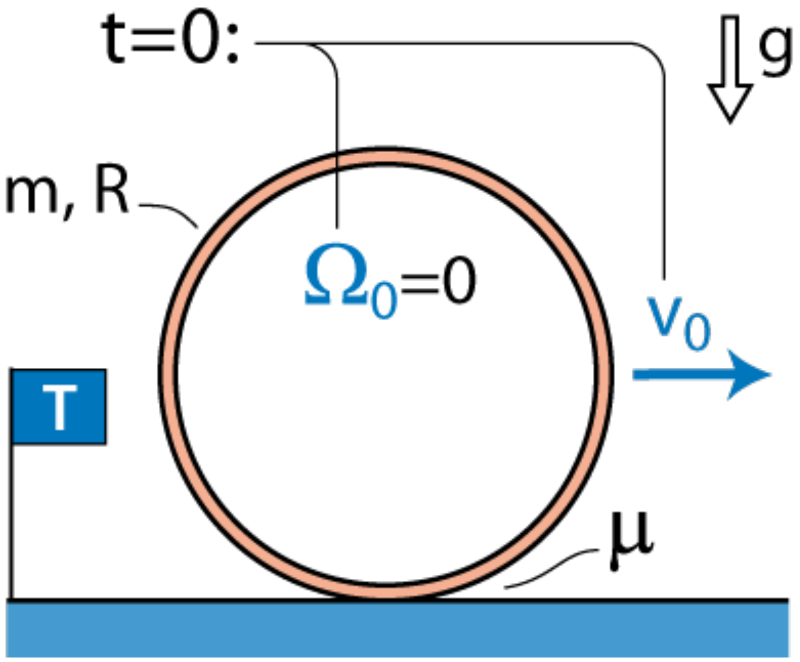
IMPORTANT

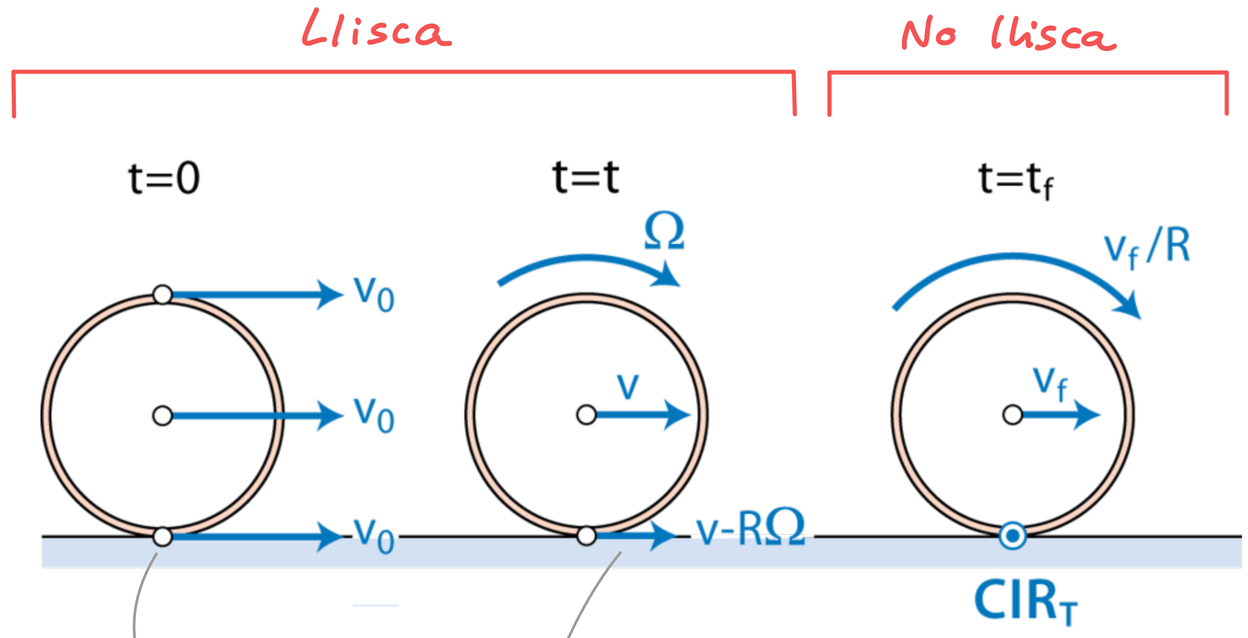
Tot i que es pot, en aquest curs <u>mai</u> aplicarem el TMC a un punt que sigui de contacte puntual entre dos sòlids (amb o sense lliscament)

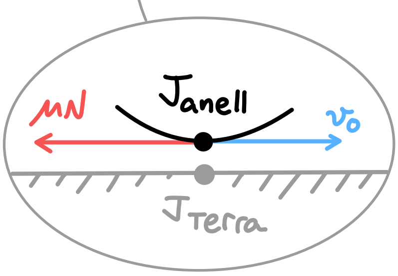
En els exercicis següents apareixen contactes puntuals amb o sense lliscament i veuren que mai apliquem el TMC en els punts de contacte implicats.

Anell llençat tangencialment
(Ex. 8.47 llibre MPSR)

L'anell homogeni, de massa m i radi R, té inicialment un moviment de translació respecte del terra rugós. Quant de temps trigarà a deixar de lliscar respecte el terra?



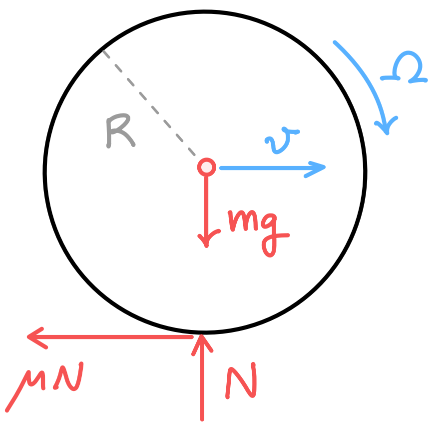




$$v_T(J_{anell}) = (\overset{v}{\rightarrow}) + (\overset{\Omega}{\curvearrowright}) \times (\downarrow R)$$
$$= (\overset{v}{\rightarrow}) + (\overset{\Omega R}{\leftarrow}) =$$
$$= (\overset{v-\Omega R}{\longrightarrow})$$

Per a quin t tindrem $v(t) - \Omega(t) R = 0$? $\longleftarrow$ serà t_f

Ens calen $v(t), \Omega(t)$ $\Rightarrow$ Busquem eqs mov per a v i Ω $\Big]$ $\underbrace{\text{via TQM + TMC}}_{\text{Per } t=t}$



Sist = Anell:

- incògn: $N, \dot{v}, \dot{\Omega}$
- # incògn $= 3$
- # eqs $= 3 <$ 2 TQM, 1 TMC

Problema DET

FULL RUTA
- SIST = Anell
- TQM
- TMC (G)

No a J! Mai aplicarem TMC en un punt on hi hagi | c.p.a. ll. / c.p.s. ll.

!

TQM

$$\sum \bar{F}_{ext} = m\, \bar{a}_T(G)$$

$$\left.\begin{array}{l}(\uparrow N) + (\downarrow mg) = 0 \\ (\leftarrow \mu N) = m\,(\rightarrow \dot{v})\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} N = mg \\ \mu N = -m\dot{v}\end{array}\right.$$

v minvarà a ritme μg

$$\boxed{\dot{v} = -\frac{\mu N}{m} = -\frac{\mu m g}{m} = -\mu g}$$

Eq. mov. per a v
(EDO 1er ordre lineal i trivial)

Integrem $\dot{v} = -\mu g$

$$\int_0^t \dot{v}\, dt = \int_0^t -\mu g\, dt$$

$$\boxed{v(t) = v_0 - \mu g t}$$

Evolució de v

TMC :

$$\sum \bar{M}_{ext} = I(G)\, \bar{\alpha}_T^{\,anell}$$

$$(\otimes\, \mu N \cancel{R}) = m R^{\cancel{2}} (\otimes\, \dot{\Omega})$$

Ω augmentarà a ritme $\frac{\mu g}{R}$

$$\boxed{\dot{\Omega} = \frac{\mu}{mR} N = \frac{\mu}{mR} \cdot mg = \frac{\mu g}{R}}$$

Eq. mov. per Ω

Integrem $\dot{\Omega} = \frac{\mu g}{R}$

$$\boxed{\Omega(t) = \cancelto{0}{\Omega_0} + \frac{\mu g}{R} t}$$

Evolució de Ω

$\Omega_0 = 0$ perquè per $t = 0$, anell es traslladà

Imposem $v(t) - \Omega(t) R = 0$

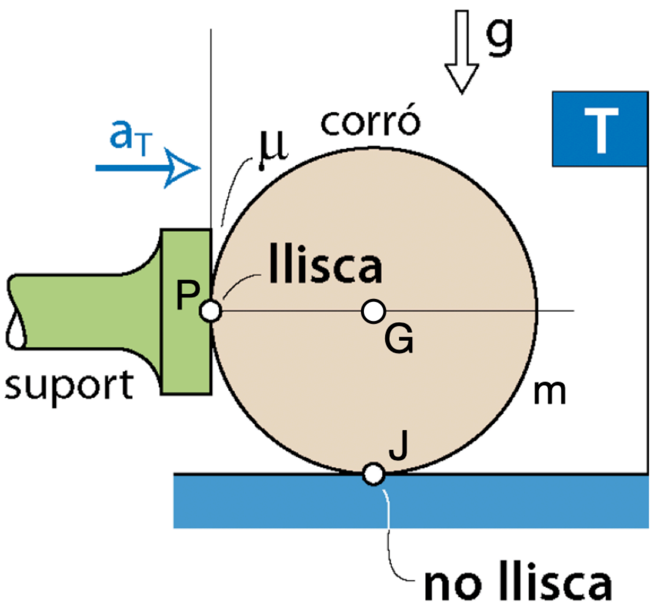
$$v_0 - \mu g t - \left(\frac{\mu g}{\cancel{R}} t\right) \cancel{R} = 0 \longrightarrow \boxed{t = \frac{v_0}{2\mu g}}$$

És t_f !

Corró empès per suport

(Problema breu, examen final gener 2024)

I [3p] El corró homogeni de massa m es mou sense lliscar sobre un terra horitzontal empès per un suport que té una acceleració a_T respecte del terra. Quin és el valor de la força normal del suport sobre el corró?



"Sup" = "suport"

Sigui v_T = vel. del sup. resp. T

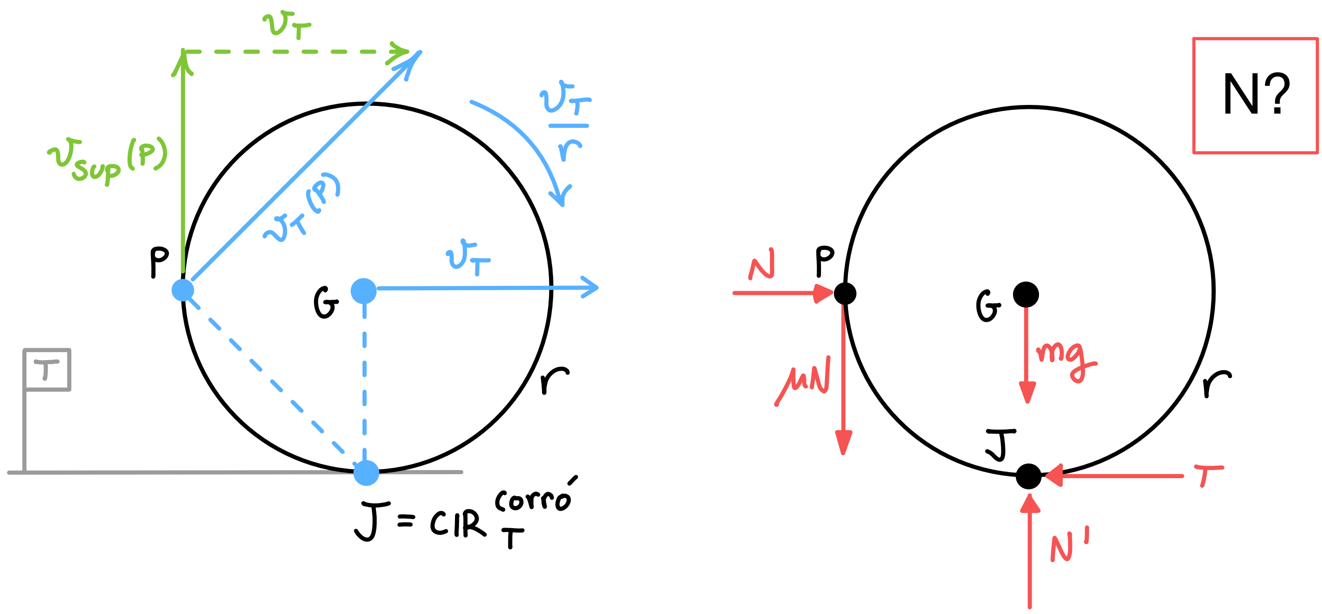
Llavors, $\dot{v}_T$ = accel. del sup. resp. T = $\underbrace{a_T}_{\text{Dada}}$

Tots els punts del suport tenen igual vel. i accel.

Clarament, la velocitat de G és $(\rightarrow v_T)$

Frec sec a P apunta en dir contrària a $\bar{v}_{sup}(P)$

Descripció cinemàtica | Descripció dinàmica



Volem N.

Aplicarem TQM + TMC a SIST = Corró (*)

Incògn.: N, N', T $\Rightarrow$ 3 incògn.
Eqs. : TQM, TMC $\Rightarrow$ 3 eqs.

PROBLEMA DET

On apliquem TMC?

- Mai a P o J (són de contacte puntual)
- Només queda G → L'apliquem a G

(*) SIST = Suport donaria un problema INDET. Vegeu anàlisi DGI a l'apèndix

Full ruta

$$\left[\begin{array}{l} \text{Sist} = \text{Corró} \\ \underbrace{TMC(G)\big]_{\perp\,\text{pla}}}_{\text{intervenen } N \text{ i } T} \quad , \quad \underbrace{TQM\big]_{\text{horitz}}}_{\text{intervenen } N \text{ i } T} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \text{ eqs.} \\ 2 \text{ incòg.} \end{array}$$

a_T no és incògn. perquè és dada

$TQM\big]_{\text{horitz}}$

$$(\rightarrow N) + (\leftarrow T) = m(\rightarrow a_T)$$

$$N = T + m a_T \qquad (\mathrm{I})$$

$TMC\big]_{\perp\,\text{pla}}$

$$\sum \bar{M}_{ext}(G) = \dot{\bar{H}}_{RTG}(G) = I(G)\cdot \bar{\alpha}_T^{\text{corró}}$$

$$(\overset{\circlearrowleft}{\odot}\ \mu N \cancel{r}) + (\overset{\circlearrowright}{\otimes}\ T\cancel{r}) = \frac{m\cancel{r^2}}{2}\cdot\left(\overset{\circlearrowright}{\otimes}\ \frac{\overbrace{\dot{v}_T}^{a_T}}{\cancel{r}}\right)$$

$$\mu N - T = -\frac{m}{2} a_T$$

$$T = \mu N + \frac{m a_T}{2} \qquad (\mathrm{II})$$

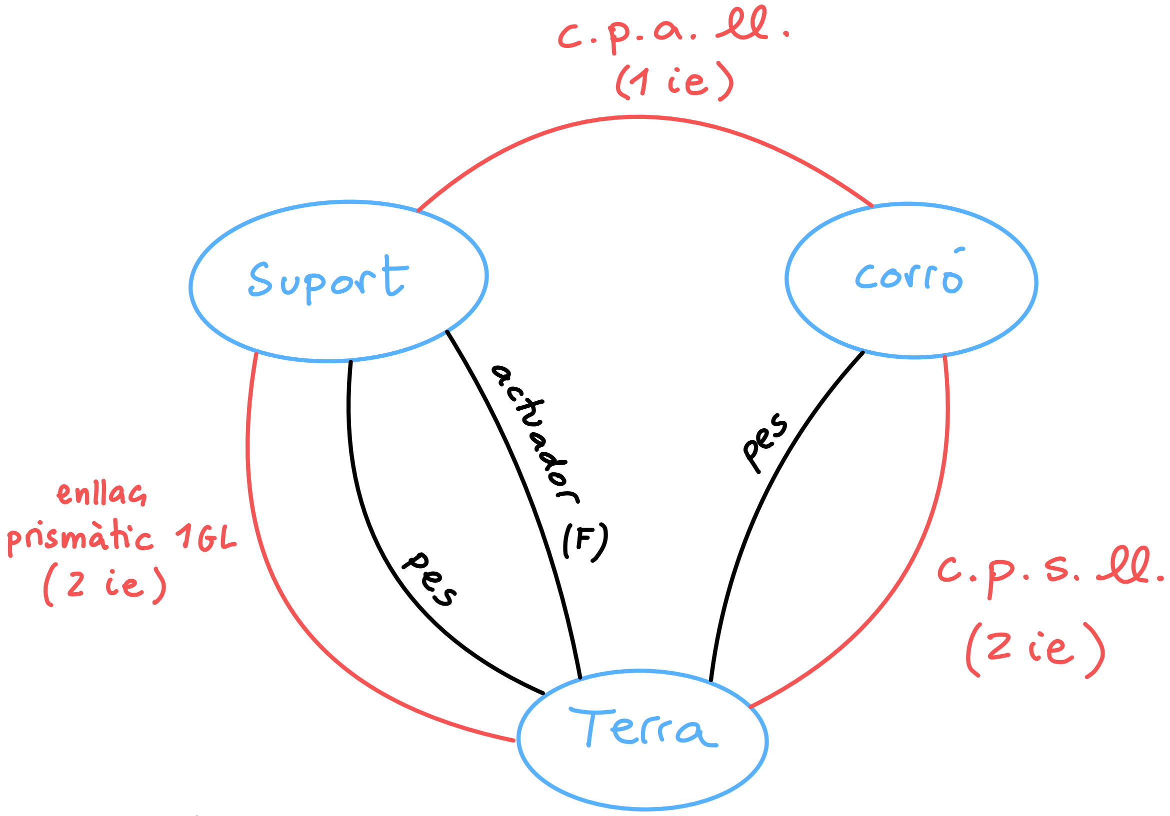
Subst (II) a (I):

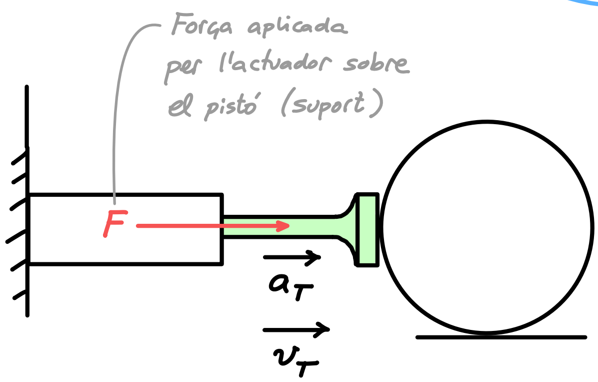
$$N = \mu N + \frac{m a_T}{2} + m a_T$$

$$N(1-\mu) = \frac{3 m a_T}{2}$$

$$\boxed{N = \frac{3 m a_T}{2(1-\mu)}}$$

Appèndix : Anàlisi del DGI





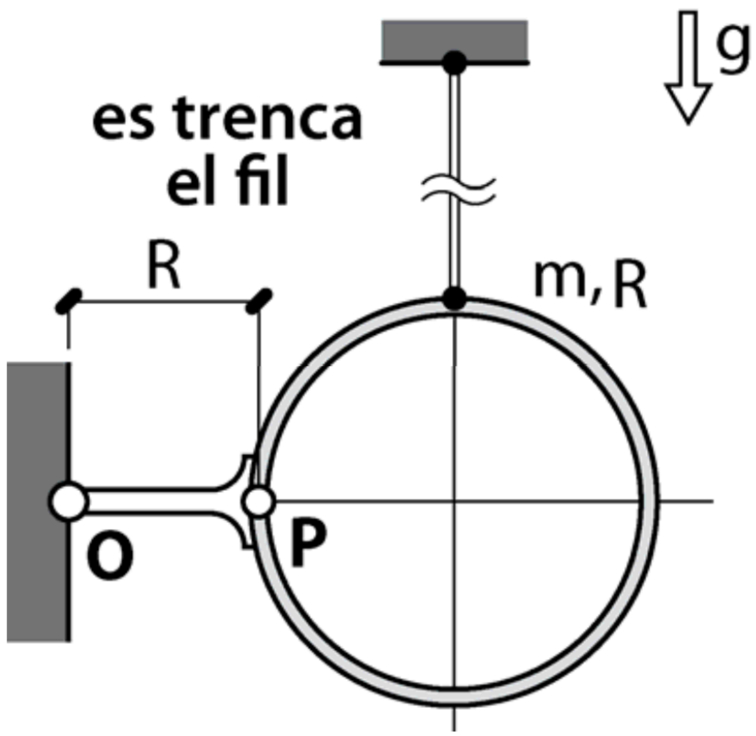
Com que a_T és coneguda, cal pensar que hi ha un actuador lineal (pistó hidràulic) que la imposa. És a dir, v_T és un grau de llibertat forçat per l'actuador, i això vol dir que $v_T(t)$ és coneguda, i per tant $a_T(t) = \dot{v}_T(t)$ també.

Sistema	incògn.	# incògn.	problema
corró	3 ie	3	DET
corró + sup.	4 ie, F	5	INDET
sup.	3 ie, F	4	INDET

Trenquem el fil!

Problema breu   Examen final 6 juny 2023

I [3p] L'anell de radi R i massa m és solidari a la barra **OP** de massa negligible articulada a terra a **O**. Quina és l'acceleració angular de l'anell respecte del terra just quan es trenca el fil? Quant val la força vertical d'enllaç a **O** en aquest mateix instant?

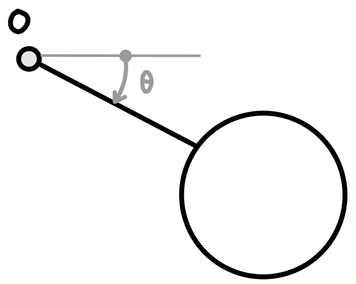


Quan tenim 1 sol sòlid, triem aquest com a sistema

Triem sist = $\underbrace{\text{anell + barra}}_{\text{"peça"}}$

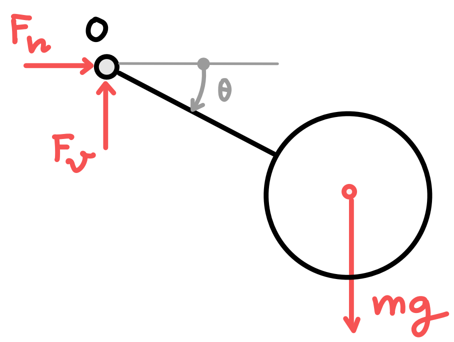
Quan tallem fil $\rightarrow$ Sist. tindrà 1 GL

Introduim coord θ per descriure'l

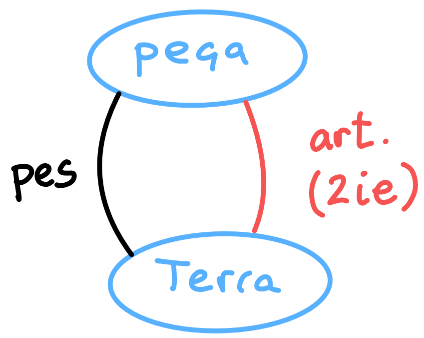


Situació genèrica

Forces sobre peça:



DGI:



En 2D | Torsors d'enllaç tenen | 2 comp. de força, 1 comp. de moment

TQM té 2 eqs.
TMC " 1 eq.
} 3 eqs

Full nta per la situació genèrica, si volguéssim l'eq. del mov. $\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}, \text{pars})$ i F_h i F_v en funció de $\theta, \dot{\theta}$:

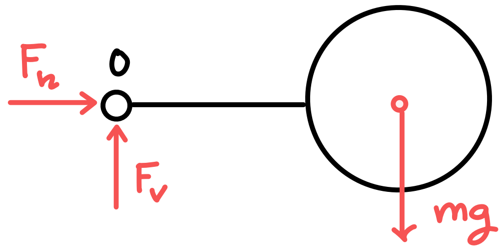
SIST = Peça (3 incòg: $F_h, F_v, \ddot{\theta}$)

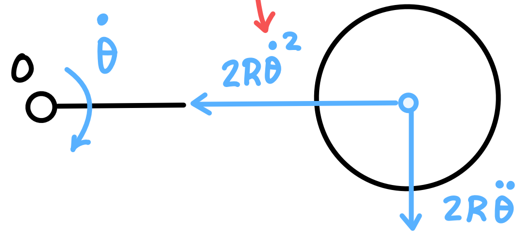
TQM
TMC (O)
} (3 eqs)

PROBLEMA DETERMINAT

Però només volem F_v i $\ddot{\theta}$ per $\underbrace{\theta = 0 \text{ i } \dot{\theta} = 0}_{\text{condicions inicials}}$:

$\dot{\theta} = 0$ perquè partim del repòs (tallem el fil)





Formulant	Apareixen les incògn.
TQM]vert	F_v, $\ddot{\theta}$
TMC (O)	$\ddot{\theta}$

2 incòg ! Probl. DET

Full ruta: sist = peça, TQM]vert, TMC (O)

TQM]vert

$$(\uparrow F_v) + (\downarrow mg) = m(\downarrow 2R\ddot{\theta}) \Rightarrow F_v = mg - 2mR\ddot{\theta} \quad (\mathrm{I})$$

TMC (O)

$$(\vec{\otimes}\, 2Rmg) = \underbrace{I(O)}_{\text{Steiner: } mR^2 + m(2R)^2 = 5mR^2} \cdot (\vec{\otimes}\, \ddot{\theta})$$

$$2Rmg = 5mR^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2g}{5R} \quad (\mathrm{II})$$

Subst. II a I:

$$\boxed{F_v = mg - 2mR\left(\frac{2g}{5R}\right) = mg - \frac{4}{5}mg = \frac{1}{5}mg}$$

Avís: fixem-nos que no ens ha calgut aplicar les condicions inicials $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ per calcular F_v, perquè θ i $\dot{\theta}$ no han intervingut. Si haguessin intervingut, caldria haver substituït aquests valors en l'expressió de F_v.

Com a exemple, fixeu-vos que en el càlcul de F_h (si l'haguessin demanat) hi apareix $\dot{\theta}$ i per tant cal imposar $\dot{\theta} = 0$:

$$\underline{\text{TQM}]_{\text{horitz}}}$$

$$(\rightarrow F_h) = m\,(\leftarrow 2R\dot{\theta}^2)$$

$$\boxed{F_h = -m\,2R\dot{\theta}^2 \underset{\dot{\theta}=0\,!}{=} 0}$$

Pèndol de Salomon

Prob. 8.7 llibre MPSR

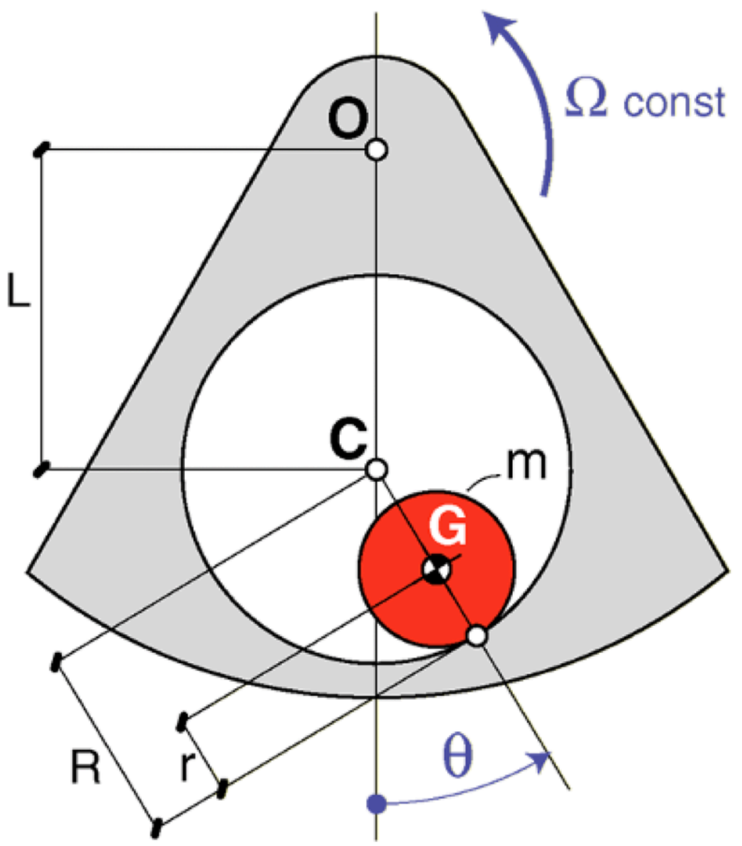
En el sistema de la figura, que s'anomena *pèndol de Salomon,* el corró és massís i homogeni, i rodola sense lliscar sobre la pista cilíndrica que gira amb velocitat angular Ω constant al voltant de l'eix, perpendicular al pla de la figura, que passa per O. Es negligeix la intervenció de la gravetat.

(a) Determineu l'equació del moviment per a la coordenada θ.

(b) Demostreu que θ = 0 és una posició d'equilibri.

(d) Per a quins valors d' Ω és estable aquesta posició?

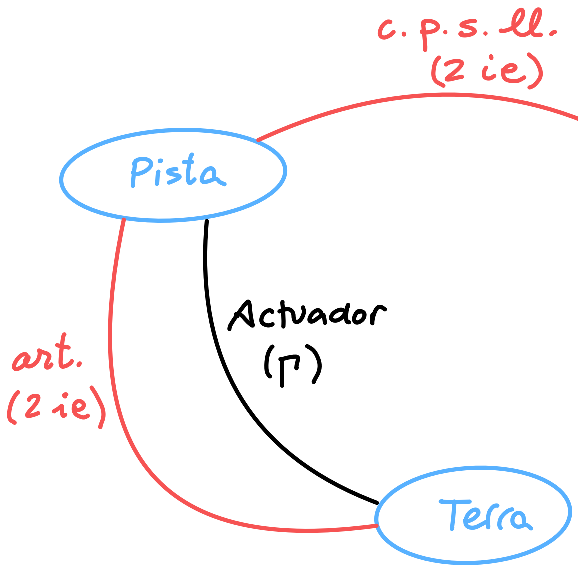
(f) Quina és la freqüència de les petites oscil·lacions del corró al voltant de la posició θ = 0



Sist amb 2 GL | Ω forçat
$\dot\theta$ lliure ← Volem eq. mov. $\ddot\theta = f(\theta, \dot\theta)$

(a) Eq. mov. coord. θ

DGI :



No hi ha pesos perquè es negligeix l'efecte de la gravetat (v. enunciat)

Sist	incògn.	# incògn.	problema
Corró	2 ie, $\ddot\theta$	3	DET
Corró + Pista	4 ie, Γ, $\ddot\theta$	6	INDET

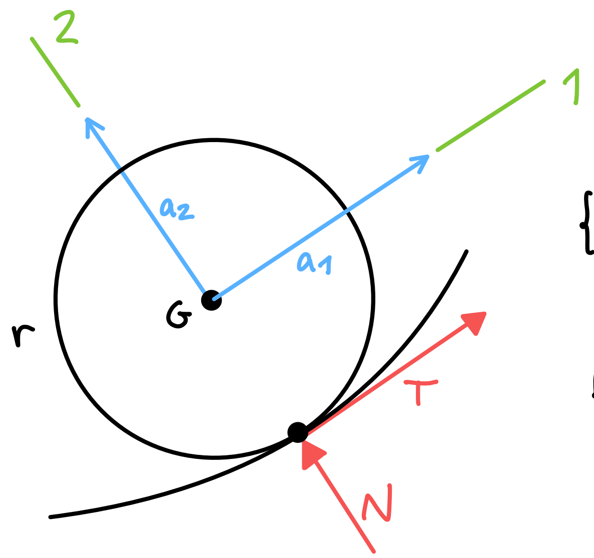
Explorem més en detall això | SIST = corró
TQM
TMC (G)

Mirem forces $\xrightarrow{}$ Sobre sist

No provem TMC (O) perquè O ∉ corró (però es podria, via descomp. baricèntrica)
ja ho veurem

No provem TMC (J) perquè a J hi ha un contacte puntual entre dos sòlids.

Forces sobre sist :



$$\{\bar{a}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\alpha}_T^{\text{corró}}\}_B$$

Ens caldran, en funció de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ i Ω.

Full ruta

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{SIST} = \text{Corró} \\ \underbrace{TQM]_1}_{\text{incòg. } \ddot{\theta}, T} \quad , \quad \underbrace{TMC(G)}_{\text{incòg } \ddot{\theta}, T} \end{array}}$$

2 eqs. en 2 incòg.

$\Downarrow$

caldrà eliminar T per obtenir

$$\underbrace{\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta})}_{\text{L'eq. del mov.}}$$

$TQM]_1$

$$(\nearrow T) = m\,(\nearrow a_1)$$

$$T = m a_1 \qquad (I)$$

$TMC(G)$

$$\sum \bar{M}_{ext}(G) = I(G) \cdot \bar{\alpha}_T^{\text{corró}}$$

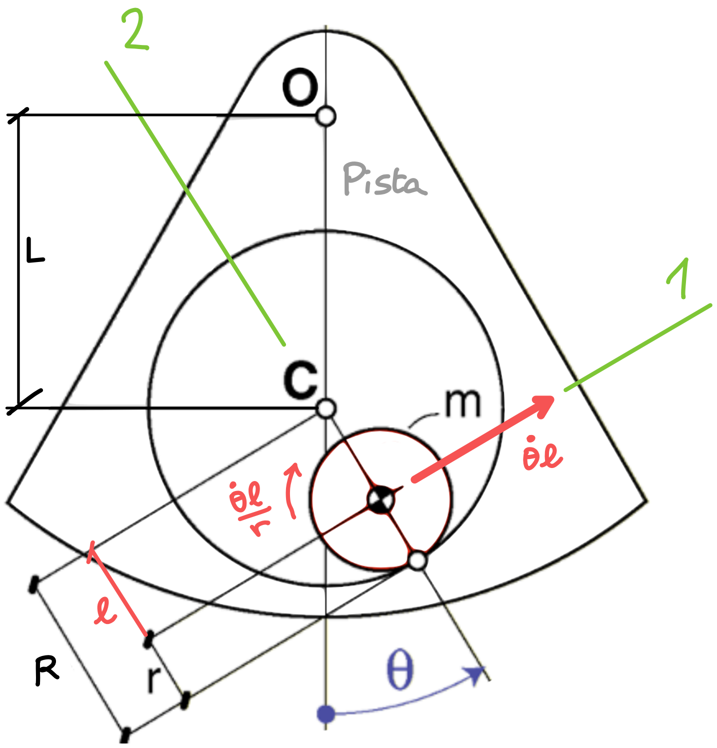
$$(\odot Tr) = \frac{mr^2}{2}\, \bar{\alpha}_T^{\text{corró}} \qquad (II)$$

Subst. (I) a (II) per eliminar T

$$(\odot \cancel{m}\, a_1) = \frac{\cancel{m}r}{2}\, \bar{\alpha}_T^{\text{corró}} \qquad (III)$$

Ens calen en funció de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \Omega$

Càlcul de a_1 i $\bar{\alpha}_T^{corró}$



$$\bar{v}_{pista}(G) = (\nearrow \dot\theta\ell)$$

$$\bar{\Omega}_T^{corró} = \bar{\Omega}_{pista}^{corró} + \bar{\Omega}_T^{pista} =$$

$$= \left(\otimes\ \frac{\dot\theta\ell}{r}\right) + \left(\odot\ \Omega\right) =$$

$$= \left[\otimes\left(\frac{\dot\theta\ell}{r} - \Omega\right)\right]$$

$$\boxed{\bar{\alpha}_T^{corró} = \left(\otimes\ \frac{\dot\theta\ell}{r}\right)} \qquad \text{(IV)}$$

Comp. accel. | $AB = T$, Rel $=$ Pista

$$\bar{a}_T(G) = \bar{a}_{REL}(G) + \bar{a}_{ar}(G) + \bar{a}_{cor}(G) = \left\{\begin{matrix} \overbrace{\ddot\theta\ell + \Omega^2 L \sin\theta}^{a_1} \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\}_B \qquad \text{(V)}$$

Només els vecs grocs tenen comp. en dir 1

$$\bar{a}_{REL}(G) = (\nearrow \ddot\theta\ell) + (\nwarrow \dot\theta^2\ell)$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_T^{pista} = \odot\ \Omega$$

$$\bar{a}_{ar}(G) = \bar{a}_T(C) + \underbrace{\bar{\alpha}_T^{pista}}_{0} \times \overline{CG} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \overline{CG}) =$$

$$= (\uparrow \Omega^2 L) + \underbrace{(\odot\Omega) \times [(\odot\Omega) \times (\searrow\ell)]}_{(\nwarrow \Omega^2\ell)} =$$

$$= (\uparrow \Omega^2 L) + (\nwarrow \Omega^2 \ell)$$

$$\bar{a}_{cor}(G) = 2\ \bar{\Omega}_T^{pista} \times \bar{v}_{pista}(G) =$$

$$= 2\,\bar{\Omega}_T^{pista} \times \bar{v}_{pista}(G) = 2(\odot\ \Omega) \times (\nearrow \dot\theta\ell) = (\nwarrow 2\Omega\dot\theta\ell)$$

Subst. (IV) a (III)

$$\odot a_1 = \frac{\cancel{r}}{2}\left(\otimes \frac{\ddot\theta \ell}{\cancel{r}}\right) \quad \bar{\alpha} \ \text{corró } T$$

$$2a_1 + \ddot\theta\ell = 0 \qquad \text{(VI)}$$

Subst. (V) a (VI)

$$2\overbrace{\left(\ddot\theta\ell + \Omega^2 L \sin\theta\right)}^{a_1} + \ddot\theta\ell = 0$$

$$\boxed{3\ddot\theta\ell + 2\Omega^2 L \sin\theta = 0} \qquad \text{(VII)}$$

← Eq. mov. per a θ $(\ell = R - r)$

(b) Demostreu que $\theta = 0$ és d'equilibri

Subst. $\theta = \theta_{eq}$, $\dot\theta = 0$, i $\ddot\theta = 0$ a (VII) surt

$$2\Omega^2 L \sin\theta_{eq} = 0 \iff \theta_{eq} = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(c) Per a quins valors Ω $\theta_{eq} = 0$ és estable?

Subst. $\theta = \overbrace{\theta_{eq}}^{0} + \varepsilon$, $\dot\theta = \dot\varepsilon$, $\ddot\theta = \ddot\varepsilon$ a (VII):

$$3\ddot\varepsilon\ell + 2\Omega^2 L \underbrace{\sin\varepsilon}_{\approx \varepsilon}$$

← EDO de l'error

Linealitzem:

$$3\ddot\varepsilon\ell + 2\Omega^2 L\varepsilon = 0$$

$$\ddot\varepsilon = -\underbrace{\frac{2\Omega^2 L}{3\ell}}_{= K}\cdot\varepsilon$$

Analitzem K:

$$K > 0 \ \forall\Omega \Rightarrow \theta_{eq} = 0 \text{ és ESTABLE } \forall\Omega$$

(4) Freqüència de les petites oscil·lacions al volt. de $\theta = 0$

$$\omega = \sqrt{K} = \sqrt{\frac{2\Omega^2 L}{3\ell}} = \Omega\sqrt{\frac{2L}{3(R-r)}}$$

$\ell = R - r$