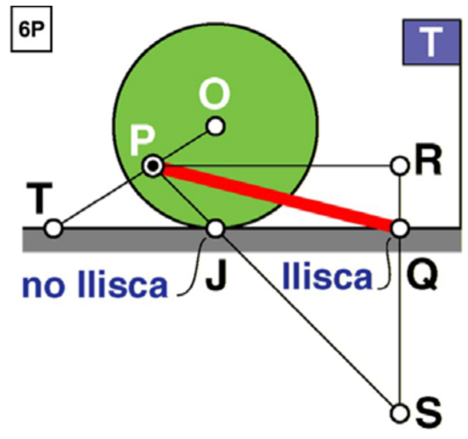
6P

Versió 0.9.1 (preliminar)

Cinemàtica del sòlid rígid 2D
(moviment pla)
+
Cinemàtica de vehicles

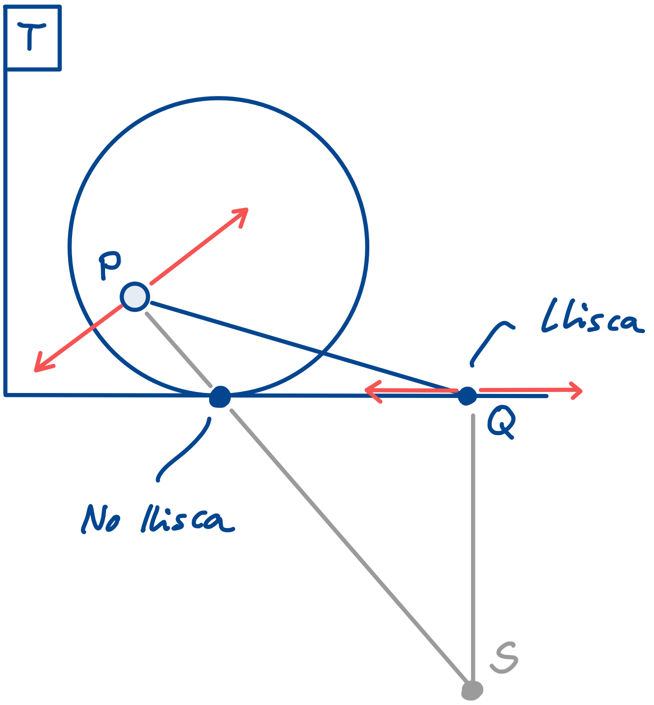
Lluís Ros

https://lluisros.github.io/mecanica



La roda no llisca al damunt del terra (T). La barra està articulada a la roda i recolza sobre el terra.

Determina el $\mathbf{CIR}_T^{barra}$.



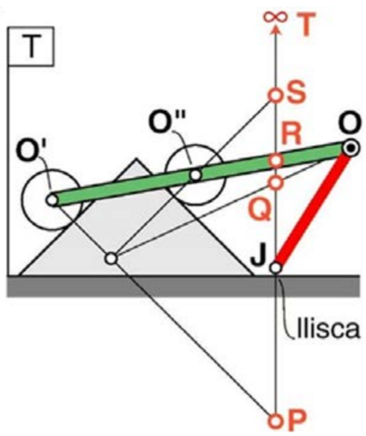
La dir. de les vel. de P i Q resp. T és la indicada en vermell. Ergo:

$$\boxed{CIR_T\,(Barra) = S}$$

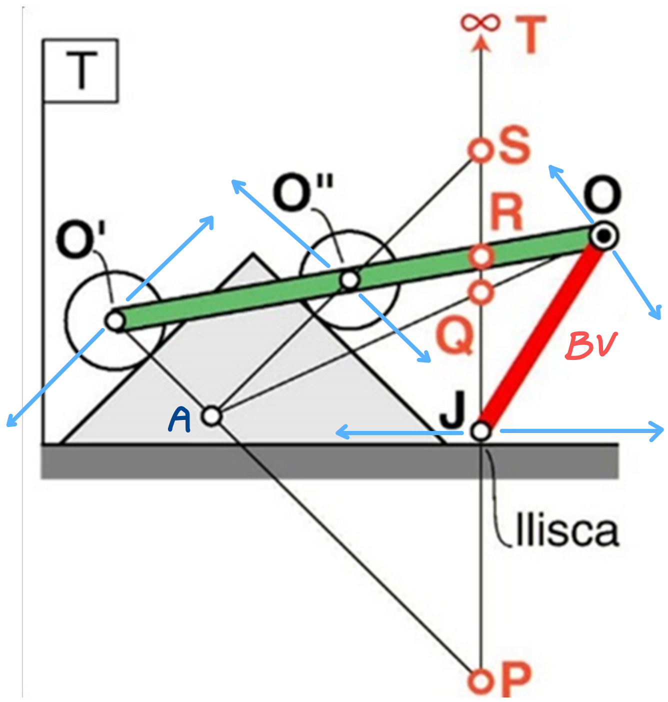
S = Intersecció de les rectes:

- $\perp$ a $\bar{v}_T(P)$ passant per P
- $\perp$ a $\bar{v}_T(Q)$ " " Q

6P



Les rodes mantenen contacte amb el terra inclinat (T). La barra verda està articulada a les dues. La barra vermella (BV) està articulada a la verda i recolza sobre el terra. Determina el $\mathbf{CIR}_T^{BV}$.



$\boxed{CIR_T^{BV} \ ?}$

$\bar{v}_T(O')$ té dir ↗

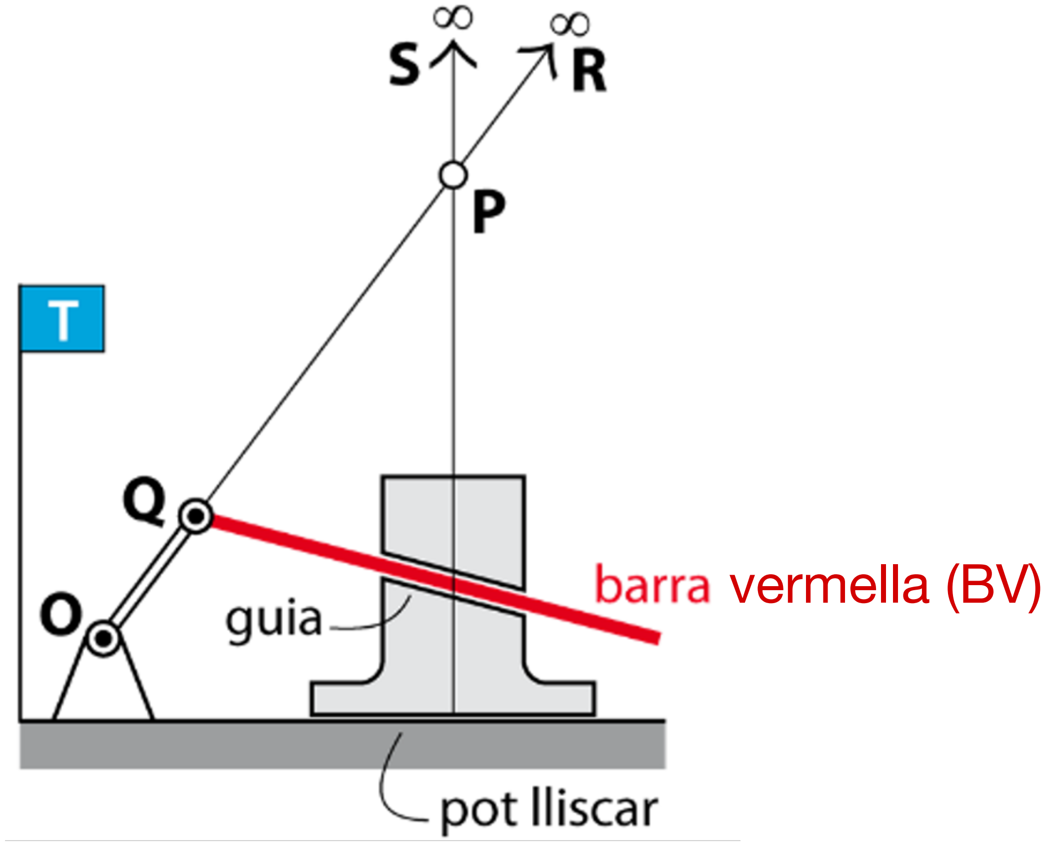
$v_T(O'')$ té dir ↖

↳ $CIR_T^{\text{Barra verda}} = A$ } ⇒ $\bar{v}_T(O)$ té dir ⊥ a recta AO

J llisca resp T } ⇒ $\bar{v}_T(J)$ té dir. horitzontal

⇒ $\boxed{CIR_T^{BV} = Q}$

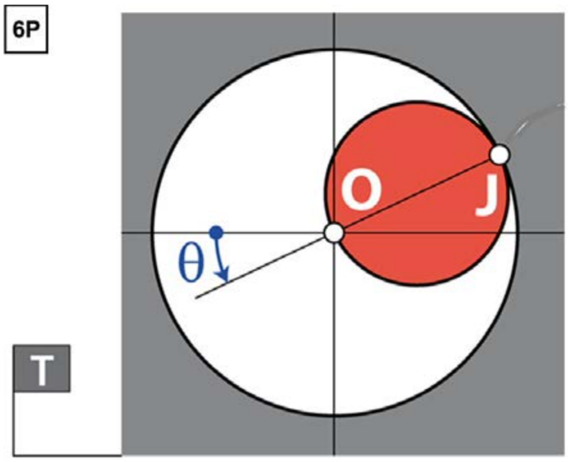
La barra blanca està articulada al terra (T). La barra vermella (BV) està articulada a la blanca i té un enllaç prismàtic amb el suport, que recolza sobre el terra. Determina el **CIR**$_T^{BV}$.



La barra vermella només es pot traslladar. No pot girar, perquè els 2 enllaços prismàtics no li ho permeten.

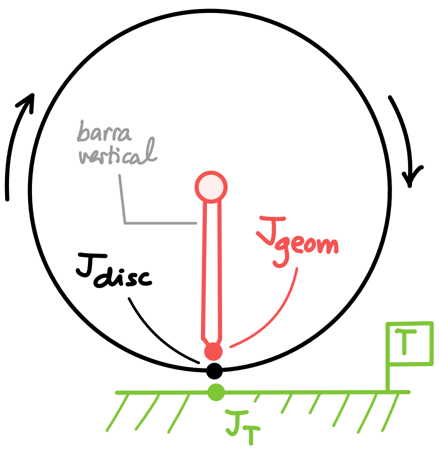
Vol dir que $\bar{\Omega}_T^{barra} = 0$. Això implica que el seu CIR és a l'∞ (sobre un punt de la recta de l'∞). Per altra banda CIR_T^{barra} ha de ser sobre la recta OQ perquè Q té velocitat ⊥ a aquesta recta. Per tant, CIR_T^{barra} ha de ser el punt de l'∞ de la recta OQ.

$$\boxed{CIR_T^{BV} = R}$$



El disc rodola sense lliscar dins una cavitat cilíndrica fixa al terra (T).
Calcula $\bar{v}_T(\mathbf{O}_{disc})$, $\bar{a}_T(\mathbf{J}_{disc})$.

Abans de fer l'exercici, recordem coses... En un disc que rodola sobre un terra sense lliscar, distingim tres punts en el contacte roda-terra



J_{disc} = Punt del disc en contacte amb el terra

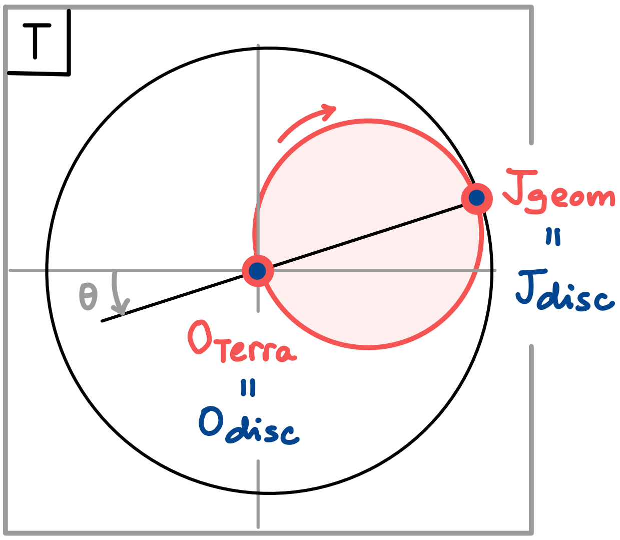
J_T = Punt del terra en contacte amb el disc

J_{geom} = Punt geomètric de contacte. És el que, en cada instant, està situat en el contacte entre disc i terra. No és ni del disc, ni del terra! (*)

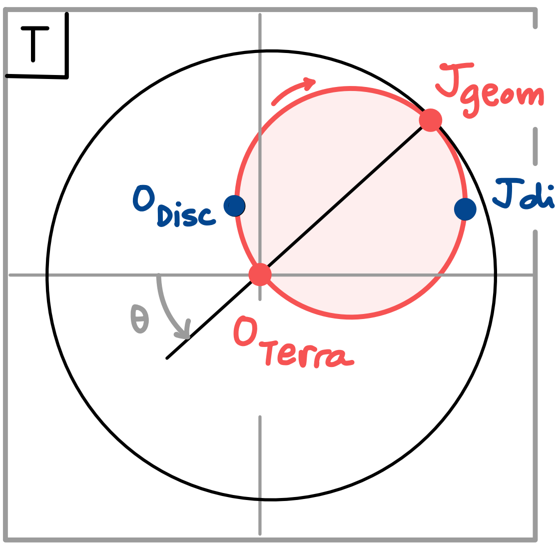
En aquest exemple el disc rodola sobre terreny pla horitzontal, però els mateixos tres punts es poden definir en el cas del disc rodolant sobre cavitat cilíndrica de l'exercici.

(*) En aquest exemple del disc rodolant sobre terra pla, seria l'apuntat per una barra articulada al centre del disc que sempre es manté vertical gràcies a la gravetat.

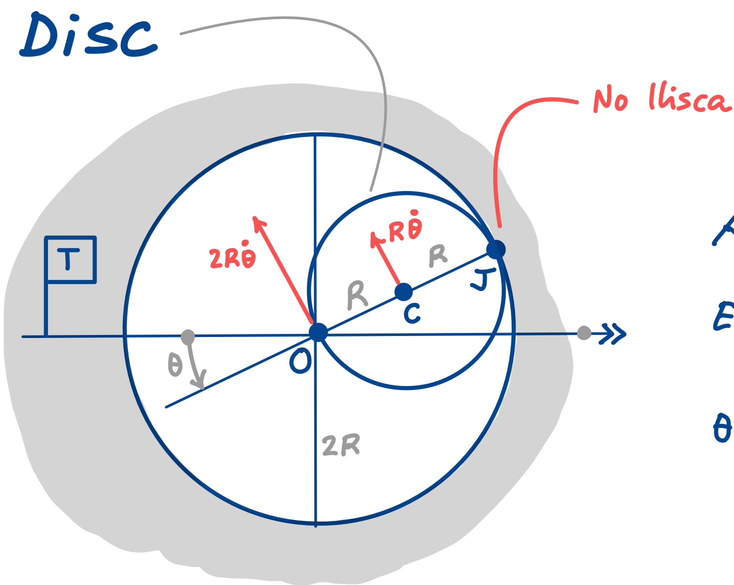
En l'instant del dibuix de l'enunciat, J_{disc} coincideix amb J_{geom}, i O_{disc} amb O_{Terra}:



Però uns instants més tard J_{disc} i O_{disc} ja s'hauran separat de O_{Terra} i J_{geom} perquè viatgen solidaris al disc:



Passem a resoldre l'exercici:



$$\boxed{\begin{array}{l}\bar v_T(O_{Disc})\ ?\\ \bar a_T(J_{Disc})\ ?\end{array}}$$

Aplicarem CSR

Ens caldran $\bar\Omega_T^{Disc}$ i $\bar\alpha_T^{Disc}$

θ = l'angle que orienta el diàmetre $O_{terra} J_{geom}$

Clarament, C descriu un mov. circular amb centre a O_{terra} i radi R, de vel. angular associada $\bar\Omega_T^{O_{terra}C} = (\circlearrowleft\!\odot\ \dot\theta)$.

$$\left.\begin{array}{l}\bar v_T(C) = (\nwarrow R\dot\theta)\\ CIR_T^{Disc} = J\end{array}\right\} \Rightarrow \bar\Omega_T^{Disc} = (\otimes\ \dot\theta) \Downarrow \bar\alpha_T^{Disc} = (\otimes\ \ddot\theta)$$

Compte que θ no orienta el disc! Només el diàmetre $O_{Terra} J_{Geom}$!
$\bar\Omega_T^{Disc} = (\otimes\ \dot\theta)$ i no pas $(\odot\ \dot\theta)$!

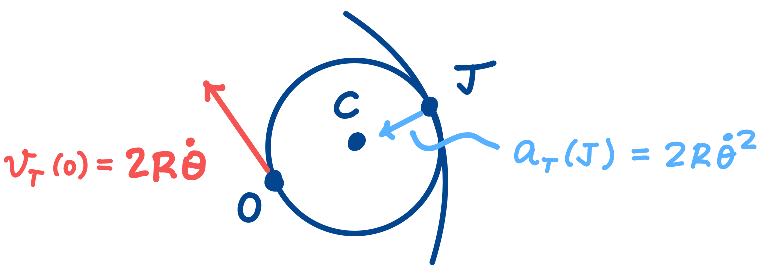
$$\boxed{\bar v_T(O_{Disc})} = \cancel{\bar v_T(J_{Disc})}^{\bar 0} + \bar\Omega_T^{Disc} \times \bar{JO} = (\otimes\ \dot\theta) \times (\swarrow 2R) = \boxed{(\nwarrow 2R\dot\theta)}$$

vec. foto! No el podríem derivar per obtenir $\bar a_T(O_{disc})$ (si la volguéssim)

$$\boxed{\bar a_T(J_{Disc})} = \bar a_T(C) + \bar\alpha_T^{Disc} \times \bar{CJ} + \bar\Omega_T^{Disc} \times (\bar\Omega_T^{Disc} \times \bar{CJ}) =$$

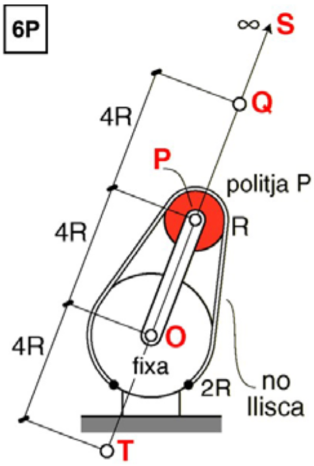
$$= \left[(\nwarrow R\ddot\theta) + (\swarrow R\dot\theta^2)\right] + \underbrace{\left[(\otimes\ \ddot\theta) \times (\nearrow R)\right]}_{(\searrow R\ddot\theta)} + \underbrace{\left[(\otimes\ \dot\theta) \times \left((\otimes\ \dot\theta) \times (\nearrow R)\right)\right]}_{(\swarrow R\dot\theta^2)} = \boxed{\swarrow 2R\dot\theta^2}$$

En resum:



Veure animació interactiva C5.2 de WiKimec!

6P



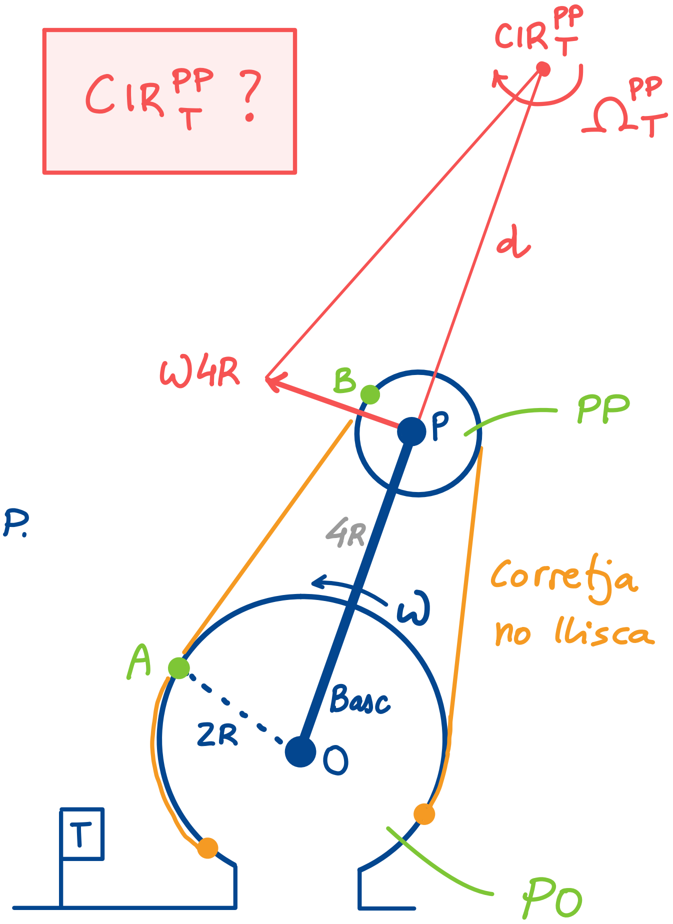
El braç està articulat al terra (T) i a la politja P. La corretja inextensible no llisca en cap dels seus punts de contacte amb el terra i la politja. Determina el $\mathbf{CIR}_{\mathrm{T}}^{\text{politja P}}$.

Solució: pàgina següent.

Solució:

Basc = Basculant
PO = Politja a O
PP = " " P

$\boxed{CIR^{PP}_{T}\ ?}$



Suposem $\bar{\Omega}^{Basc}_{T} = \circlearrowleft \odot\, \omega$

$\Downarrow$

$\bar{v}_T(P) = (\leftarrow 4R\omega)$

$\Downarrow$

$I = CIR^{PP}_{T}$ és sobre recta OP.

Si sabéssim $\bar{\Omega}^{PP}_{T}$, ja podríem localitzar el CIR trobant d via(*):

$$\Omega^{PP}_{T}\, d = 4R\omega$$

Busquem doncs $\bar{\Omega}^{PP}_{T}$:

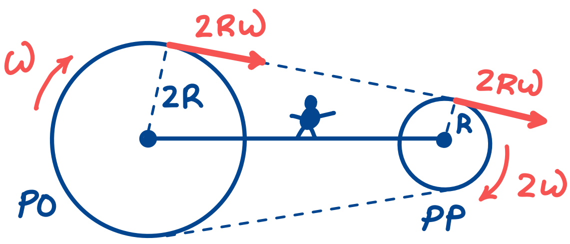
$$\bar{\Omega}^{PP}_{T} = \underbrace{\bar{\Omega}^{PP}_{Basc}}_{\otimes 2\omega} + \underbrace{\bar{\Omega}^{Basc}_{T}}_{\circlearrowleft\odot\,\omega} = \otimes\,\omega$$

Què veiem des del basculant?

$$\bar{\Omega}^{PO}_{Basc} = \otimes\,\omega$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{\Omega}^{PP}_{Basc} = \otimes\, 2\omega$$



Rel transm. 2 : 1

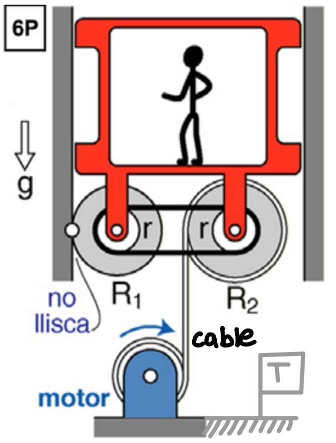
voltes sortida — voltes entrada

Ara ja és fàcil:

$$\omega \cdot d = 4\omega R \Rightarrow d = 4R$$

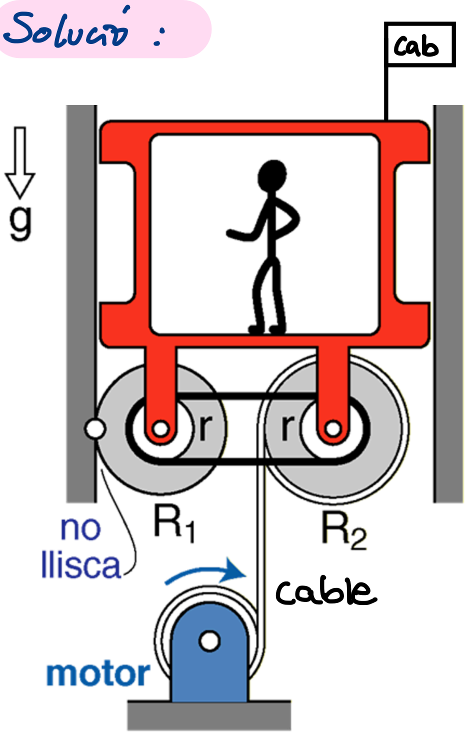
$\boxed{CIR^{PP}_{T} = Q}$

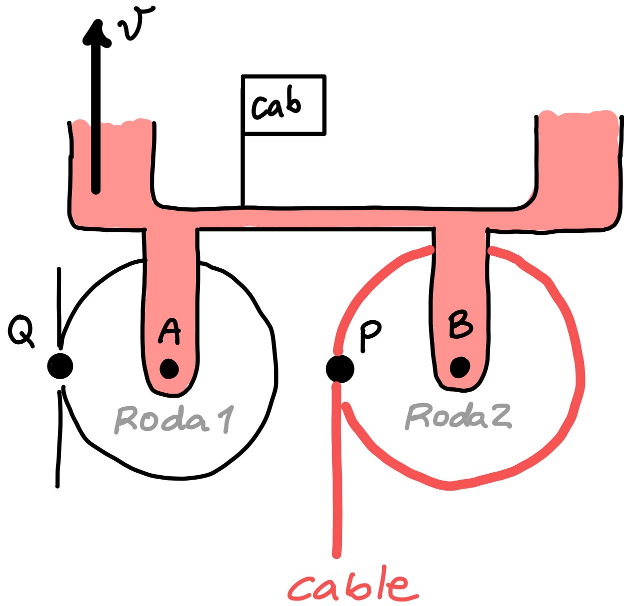
(*) $I = CIR^{PP}_T$ serà per sobre de P si $\bar{\Omega}^{PP}_T$ té sentit $\otimes$, altrament serà per sota.



Les dues rodes estan articulades a la cabina de l'ascensor.
La de radi R_1 manté contacte sense lliscar amb la paret.
La corretja inextensible no llisca al damunt de les politges de radi r solidàries a les dues rodes. Un motor fa girar una politja articulada al terra (T) de manera que el cable inextensible, que recolza sense lliscar sobre la roda R_2, s'hi enrotlla.
Com és el moviment de la cabina respecte del terra? Puja o baixa?

Solució :





Suposem que la cabina es mou amb velocitat ($\uparrow v$) respecte el terra. Cal esbrinar si, en enrotllar-se el cable a la politja motoritzada, v és positiva o negativa (la cabina puja o baixa, respectivament).

Fixem-nos que, en qualsevol cas, la velocitat del punt P resp. T només pot ser cap avall $\downarrow$, ja que el motor està enrotllant el cable.

Així doncs, calcularem $\bar{v}_T(P)$ en funció de v i imposarem que tingui direcció cap avall.

Calculem $\bar{v}_T(P)$ per comp. de movim. amb $\left|\begin{array}{l} AB = T \\ REL = \text{Cabina} \end{array}\right.$

$$\bar{v}_{AB}(P) = \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P) =$$

$$= \bar{\Omega}^{Roda2}_{REL} \times \overline{BP} + (\uparrow v) \overset{\text{Utilitzant } (*)}{=}$$

$$= \left(\odot \frac{v}{R_1}\right) \times (\leftarrow R_2) + (\uparrow v) =$$

$$= \left(\downarrow \frac{R_2}{R_1} v\right) - (\downarrow v) = \downarrow\left[v\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)\right] \quad (\square)$$

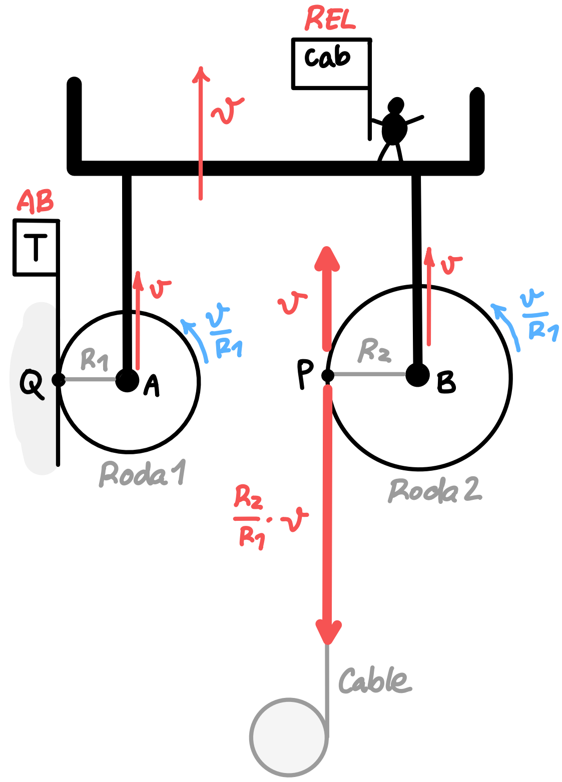
De $(\square)$ veiem que $\bar{v}_T(P)$ tindrà dir. $\downarrow$ (i no $\uparrow$) si i només si

$$v\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right) > 0,$$

que equival a demanar

$$\underbrace{v}_{A}\underbrace{(R_2 - R_1)}_{B} > 0$$

És a dir, A i B han de tenir el mateix signe.



$$(*) \quad \left.\begin{array}{l} \bar{v}_T(A) = (\uparrow v) \\ CIR^{Roda1}_T = Q \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{\Omega}^{Roda1}_T = \circlearrowleft \frac{v}{R_1}$$

$$\| \;\; \bar{\Omega}^{Roda1}_{cabina} = \bar{\Omega}^{Roda2}_{cabina}$$

Cabina té orientació fixa resp. T

Relació transmissió 1:1 Roda 1 → Roda 2

Per tant, quan el cable s'enrotlla:

- Si $R_2 > R_1$, v ha de ser positiva $\Rightarrow$ La cabina puja
- Si $R_2 < R_1$, " " " " negativa $\Rightarrow$ " " baixa

Extra: i què passa quan el motor està aturat?

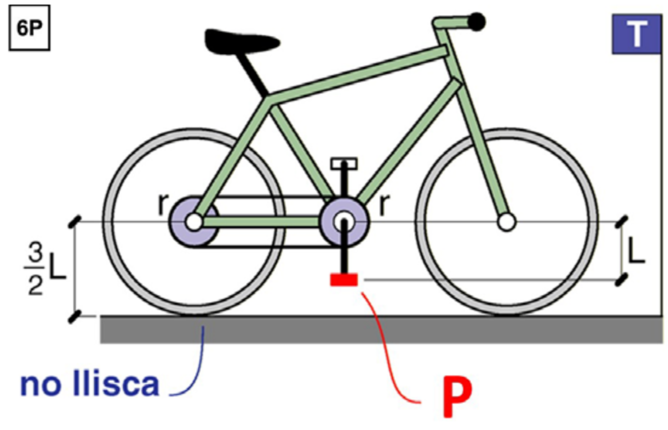
En aquest cas, el cable no s'enrotlla a la politja motoritzada $\Rightarrow$ $\bar{v}_T(P) = 0$, i per tant ha de ser

$$v\,(R_2 - R_1) = 0$$

Aquesta condició es compleix en dos casos:

(i) Si $R_2 \neq R_1$ $\Rightarrow$ $v = 0$ $\Rightarrow$ La cabina està aturada

(ii) Si $R_2 = R_1$ $\Rightarrow$ v pot tenir qualsevol valor $\Rightarrow$ El moviment de la cabina no queda determinat cinemàticament. Pot pujar o baixar, o quedar en repòs. Té llibertat per a fer qualsevol d'aquestes coses. I quina farà? No ho sabem! Calen les eines de la dinàmica per a determinar el moviment.



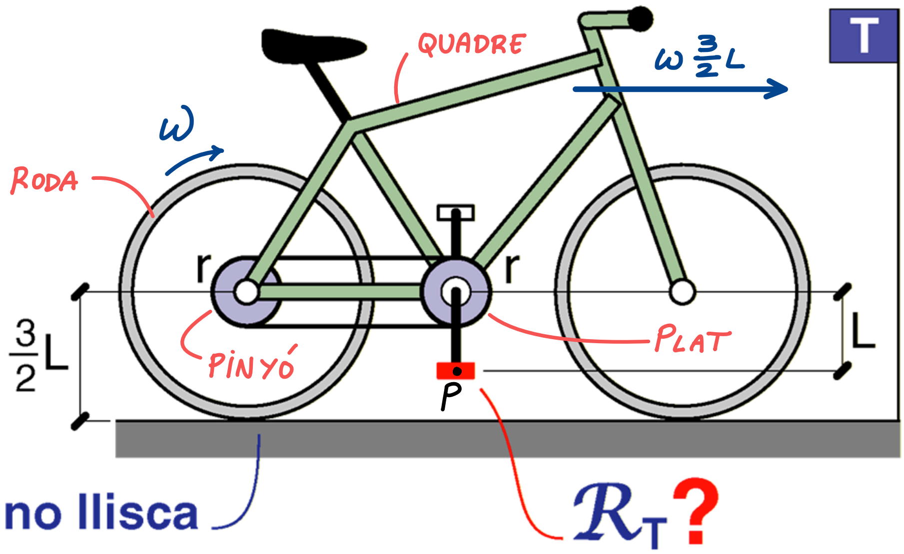
Les rodes de la bicicleta no llisquen al damunt del terra (T). Plat i pinyó tenen la mateixa mida. Calcula $\mathfrak{R}_T(\mathbf{P})$.

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|} \Rightarrow$$ Hem de calcular $\bar{v}_T(P)$ i $\bar{a}_T(P)$ i extreure $\bar{a}_T^n(P)$.

Per a fer els càlculs, podem suposar que la roda del darrere gira amb velocitat angular $\vec{\otimes}\,\omega$ resp. T, de manera que el quadre avança amb velocitat

$$\left(\rightarrow \omega \cdot \frac{3}{2} L\right)$$

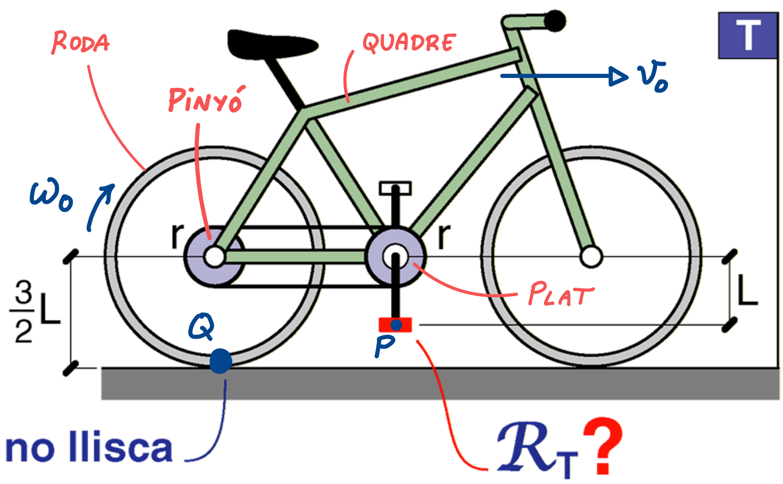
Podríem suposar un valor ω variable, però com que $\mathcal{R}_T(P)$ no depèn de la velocitat amb que P descriu la seva trajectòria, suposarem $\omega = \omega_0 = ct$ (constant $\forall t$).
Això simplifica els càlculs.



Farem composició de moviments amb

$AB = T$

$REL = \text{Quadre}$



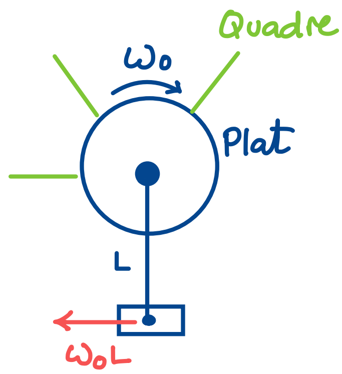
$$\left.\begin{aligned} \bar{\Omega}^{Roda}_{T} &= \otimes\, \omega_0 \\ CIR^{Roda}_{T} &= Q \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

Respecte T, el quadre avança amb velocitat

$$\bar{v}_0 = \left(\rightarrow \tfrac{3}{2} L \cdot \omega_0\right)$$

Clarament $\bar{\Omega}^{Plat}_{Quadre} = \otimes\, \omega_0$ també, ja que per cada volta que fa la roda resp. T, el pinyó i el plat en fan una resp. el quadre.

Aleshores:



$$\bar{v}_{AB}(P) = \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P) =$$

$$= \left(\leftarrow \omega_0 L\right) + \left(\rightarrow \omega_0 \tfrac{3}{2} L\right) = \left(\rightarrow \frac{\omega_0 L}{2}\right)$$

$$\bar{a}_{AB}(P) = \bar{a}_{REL}(P) + \cancel{\bar{a}_{ar}(P)}^{\,\bar{0}} + \underbrace{\cancel{\bar{a}_{Cor}(P)}^{\,\bar{0}}}_{2\,\underbrace{\bar{\Omega}^{REL}_{AB}}_{0} \times\, \bar{v}_{REL}(P)} = \left(\uparrow \omega_0^2 L\right)$$

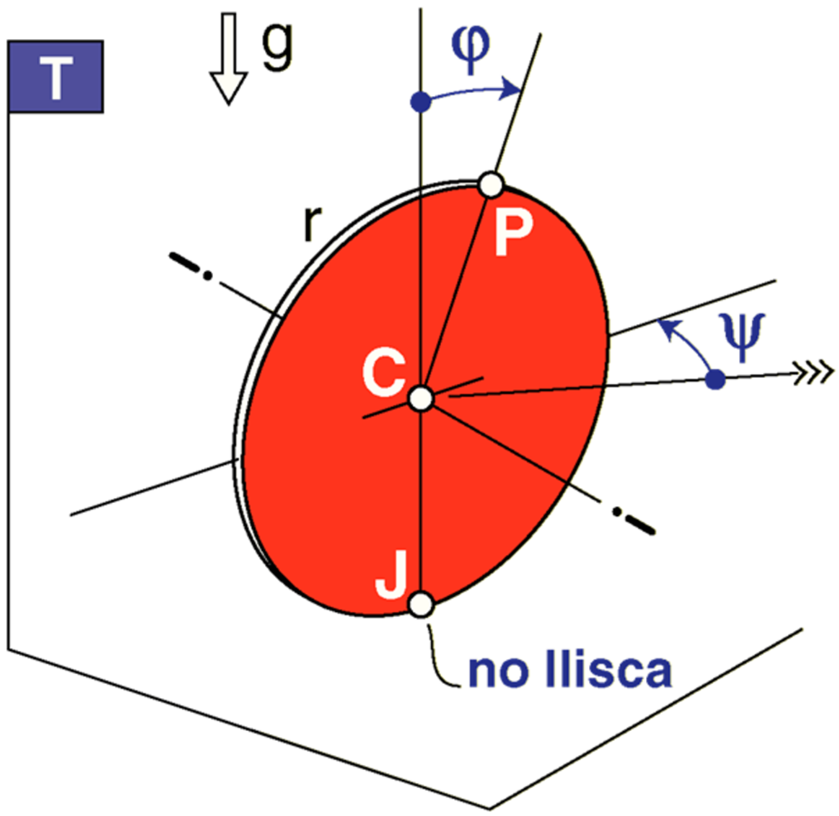
i per tant:

$$\boxed{\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|} = \frac{\left(\frac{\omega_0 L}{2}\right)^2}{\omega_0^2 L} = \frac{L}{4}}$$

Introducció a cinemàtica de vehicles

El següent exercici proporciona un resultat que ens
permetrà agilitzar les anàlisis cinemàtiques de vehicles.

La roda no llisca sobre el terra, i gira mantenint el seu pla perpendicular al terra (T). Calcula $\mathrm{v_T}(\mathbf{C})$.

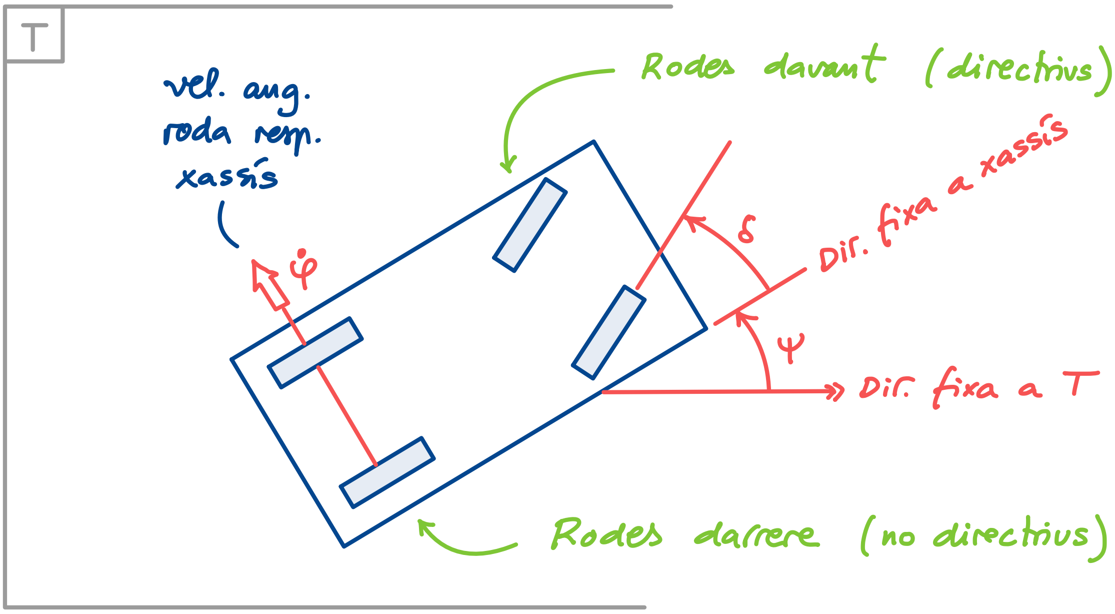


Resoldrem l'exercici posant-lo en context.

Considerarem un vehicle amb rodes, introduirem tres hipòtesis simplificadores, i calcularem la velocitat del centre d'una roda qualsevol respecte del terra.

Veurem que la velocitat d'aquest centre només depèn de la velocitat **phipunt** de rotació de la roda respecte del xassís (no de **psipunt**). Aquest resultat permet fer anàlisis cinemàtiques ràpides de vehicles, i l'aplicarem en exercicis futurs.

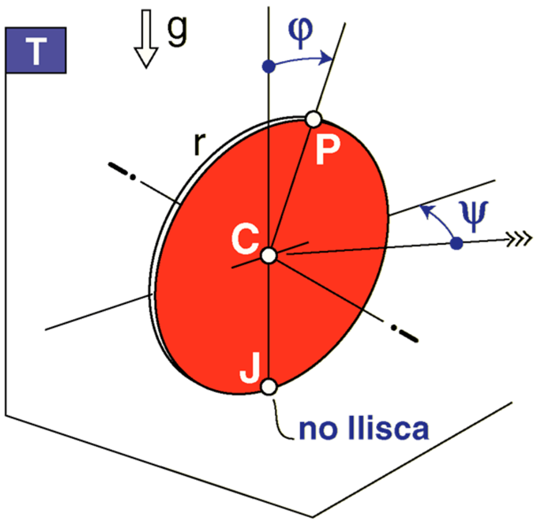
Considerem un vehicle:



3 hipòtesis simplificadores

- Vehicle es mou en terra pla
- Veh. no té suspensions ⇒ Roda es manté en un pla vertical i només cal orientar-la amb 2 angles.

  Per la roda del darrere serien ψ i φ:

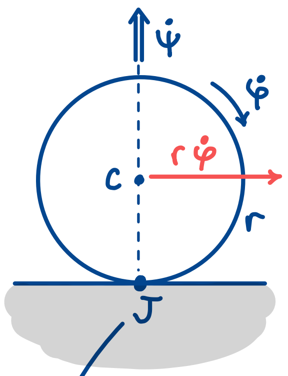


  Per la del davant serien $\psi+\delta$, φ

- Rodes primes → contacte puntual amb el terra. Permet introduir hipòtesi de no lliscament a J. Si el contacte fos en un segment de recta segur que hi hauria lliscament en alguns punts.

Anàlisi cinemàtica roda del darrere:

(Per la roda del davant surt el mateix!)



Aplicant CSR a roda:

Que simple!

$$\bar{v}_T(C) = \cancel{\bar{v}_T(J)} + (\Uparrow\underbrace{\dot\psi} + \vec{\otimes}\dot\varphi) \times (\uparrow r) = \overbrace{(\rightarrow r\dot\varphi)}$$

0!

Per la roda davantera surt el mateix perquè en lloc de $\Uparrow\dot\psi$ tenim $\Uparrow(\dot\psi + \dot s)$

J no és el CIR! Ho seria si el movim. de la roda fos pla. Però aquí és 3D!

Per tant, $\rightarrow r\dot\varphi$ no és "distància al CIR · R", sinó el resultat d'aplicar CSR!

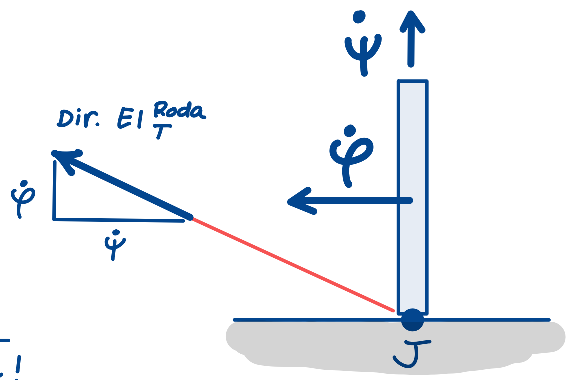
En fer anàlisi cinemàtica de veh. pensarem sempre en això ∀roda

És a dir: pensarem que el centre C de la roda té vel. $(\rightarrow r\dot\varphi)$

Això ens permetrà fer anàlisis cinemàtiques ràpides perquè C sol ser(*), alhora, un punt del xassís (veure qüestió del Tricicle com a exemple, pàg. següent).

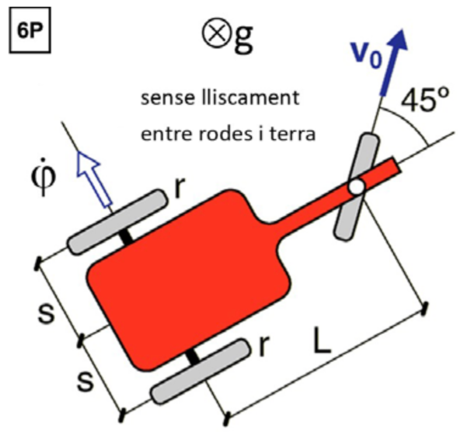
Observació:

L'EI_T^{roda} passa per J, però la roda té 2 GDL. La dir. de l'EI és $\bar{\dot\psi} + \bar{\dot\varphi}$, per tant EI_T^{roda} no queda determinat. No ens serà útil. No cal que hi pensem!



Ni hi pensem!

(*) No sempre ho serà!

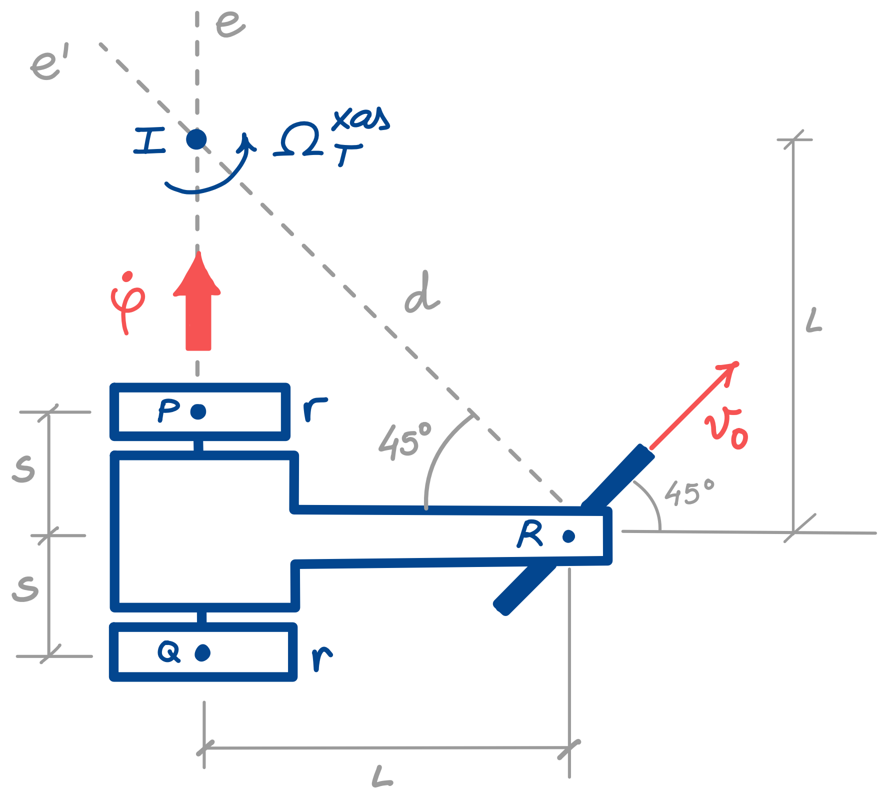


Les rodes del tricicle són identiques i no llisquen al damunt del terra (T). La velocitat del centre de la roda del davant té velocitat v_0 respecte del terra. Calcula la rotació pròpia $\dot{\varphi}$ de la roda posterior esquerra en funció de v_0.

Solució: pàgina següent.

Solució:

$\boxed{\dot{\varphi}\ ?}$



P, Q, R són punts de les respectives rodes, però també del xassís.

P i Q tenen vel. ⊥ eix e
R té vel. ⊥ eix e' $\Rightarrow$ $CIR_T^{xassís} = I$

Busquem Ω_T^{xas}:

$$\Omega_T^{xas} = \frac{v_0}{d} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}}$$

"xas" = xassís

Ara, veient P com a punt de la roda:

$$v_T(P) = r \cdot \dot{\varphi} \qquad (I)$$

CSR roda

I veient P com del xassís:

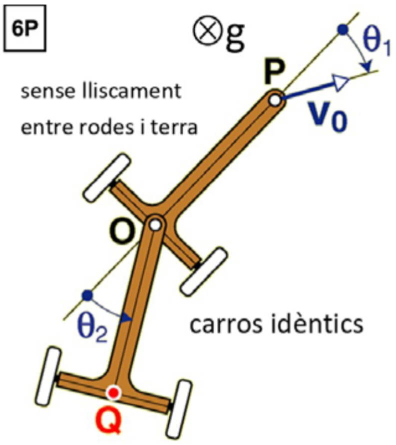
$$v_T(P) = \Omega_T^{xas} \cdot \underbrace{(L-s)}_{\text{dist. al CIR}} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} \cdot (L-s) \qquad (II)$$

CSR xassís

I = II :

$$r\dot{\varphi} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}}(L-s) \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{v_0}{rL\sqrt{2}}(L-s)}$$

6P

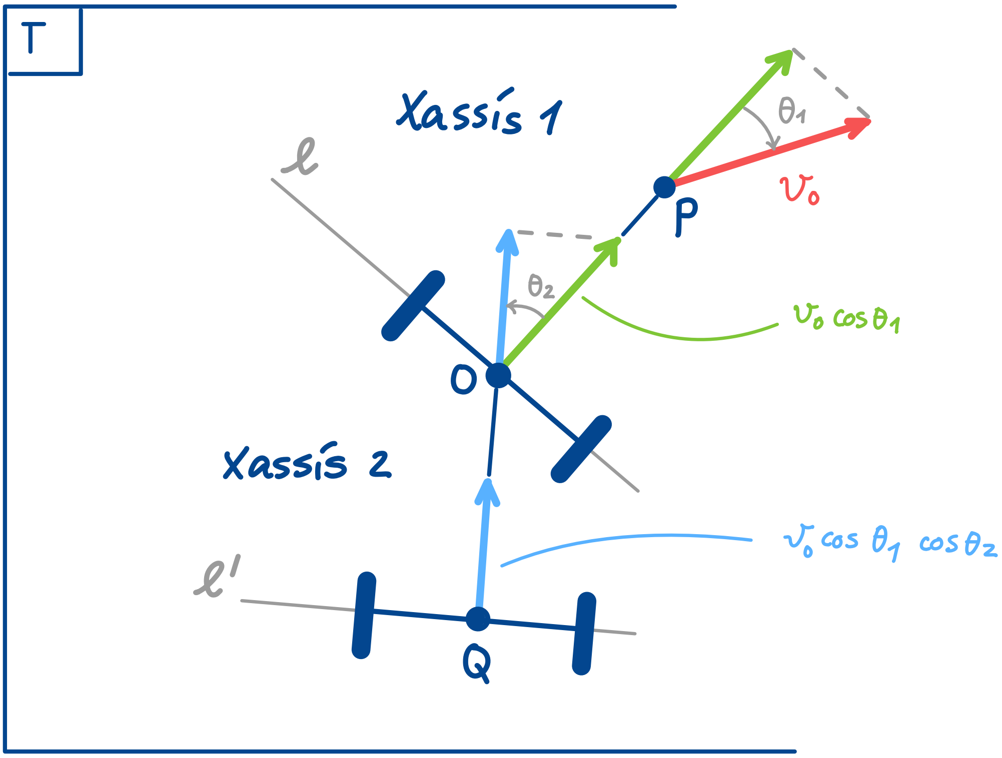


Les rodes del tractor i el remolc són identiques i no llisquen al damunt del terra (T). La velocitat del punt **P** respecte del terra és v_0. Calcula $\overline{v}_T(\mathbf{Q})$.

Solució: pàgina següent.

Solució ràpida via equiprojectivitat !

(Solució menys directa, però igualment bona, a la pàg. seg.)



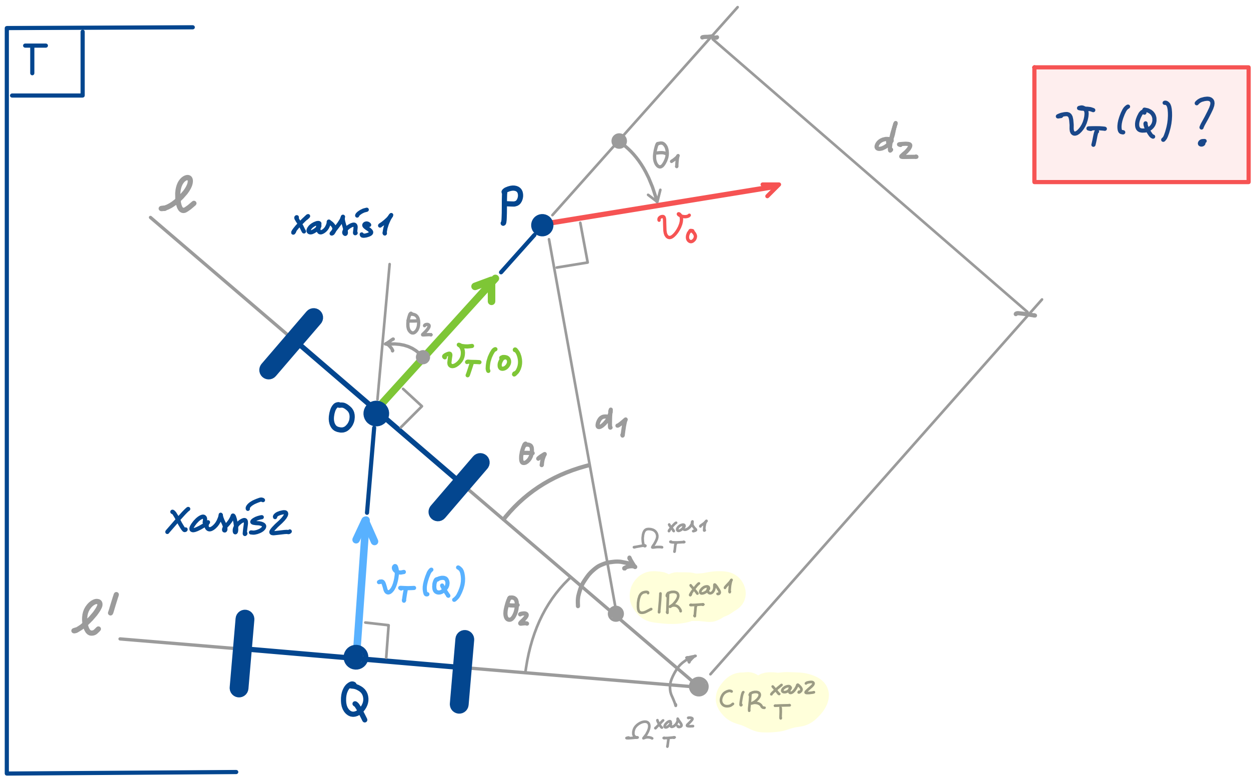
$\boxed{v_T(Q)\ ?}$

- $CIR^{\text{xassís 1}}_{T}$ sobre $\ell \Rightarrow \vec{v}_T(O) \perp \ell$
- Equiprojectivitat $P \to O$: $v_T(O) = v_0 \cos\theta_1$
- $CIR^{\text{xassís 2}}_{T}$ sobre $\ell' \Rightarrow \vec{v}_T(Q) \perp \ell'$
- Equiprojectivitat $O \to Q$:

$$\boxed{v_T(Q) =} \ v_T(O) \cos\theta_2 = \boxed{v_0 \cos\theta_1 \cos\theta_2}$$

Solució "lenta" via localitzar $CIR_T^{\overbrace{xas1}^{\text{xassís 1}}}$ i $CIR_T^{\overbrace{xas2}^{\text{xassís 2}}}$

Els CIR_T^{xas1} i CIR_T^{xas2} han de ser on indiquem. A més, $v_T(O)$ i $v_T(Q)$ han de ser $\perp$ a ℓ i ℓ', respectivament.



- $$\Omega_T^{xas1} = \frac{v_0}{\underbrace{d_1}_{\text{dist}(CIR_T^{xas1},\, P)}}$$

- $$v_T(O) = \Omega_T^{xas1} \cdot d_1 \cos\theta_1 = v_0 \cos\theta_1$$

- $$\Omega_T^{xas2} = \frac{v_T(O)}{\underbrace{d_2}_{\text{dist}(CIR_T^{xas2},\, O)}} = \frac{v_0\cos\theta_1}{d_2}$$

- $$\boxed{v_T(Q)} = \Omega_T^{xas2} \cdot d_2 \cos\theta_2 = \boxed{v_0 \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2}$$