

6P

Versió 1.0

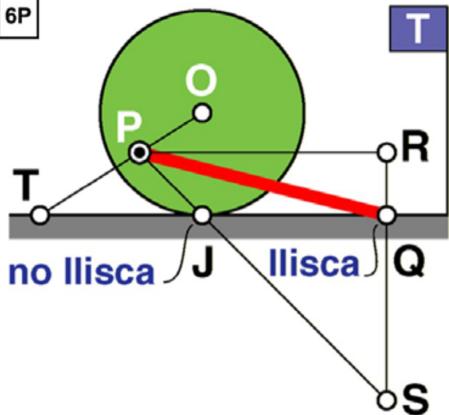
Cinemàtica del sòlid rígid 2D
(moviment pla)

+

Cinemàtica de vehicles

Lluís Ros
<https://lluisros.github.io/mecanica>

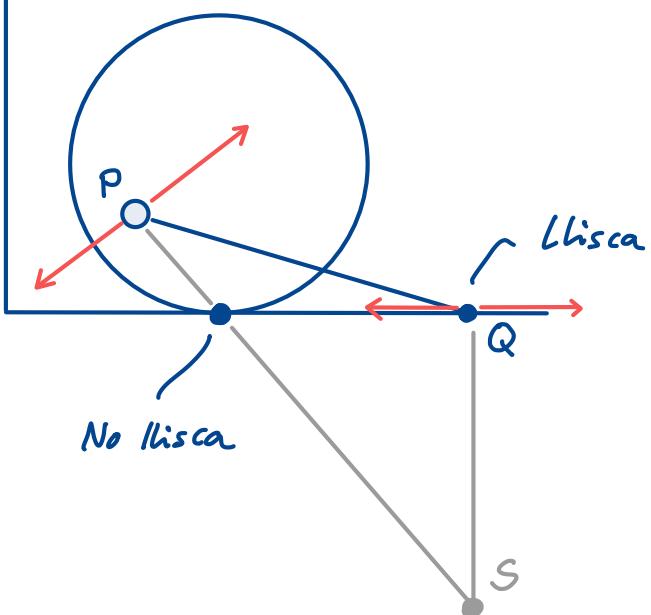
6P



La roda no llisca al damunt del terra (T). La barra està articulada a la roda i recolza sobre el terra.

Determina el CIR_T^{barra} .

T



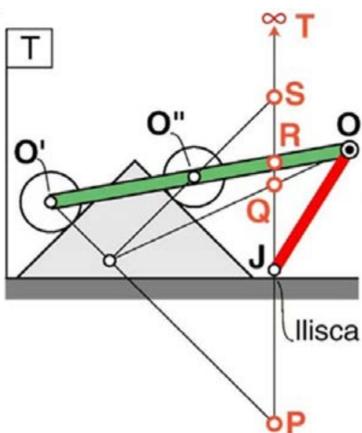
La dir. de les vel. de P i Q resp. T és la indicada en vermell. Ergo:

$$CIR_T(\text{Barra}) = S$$

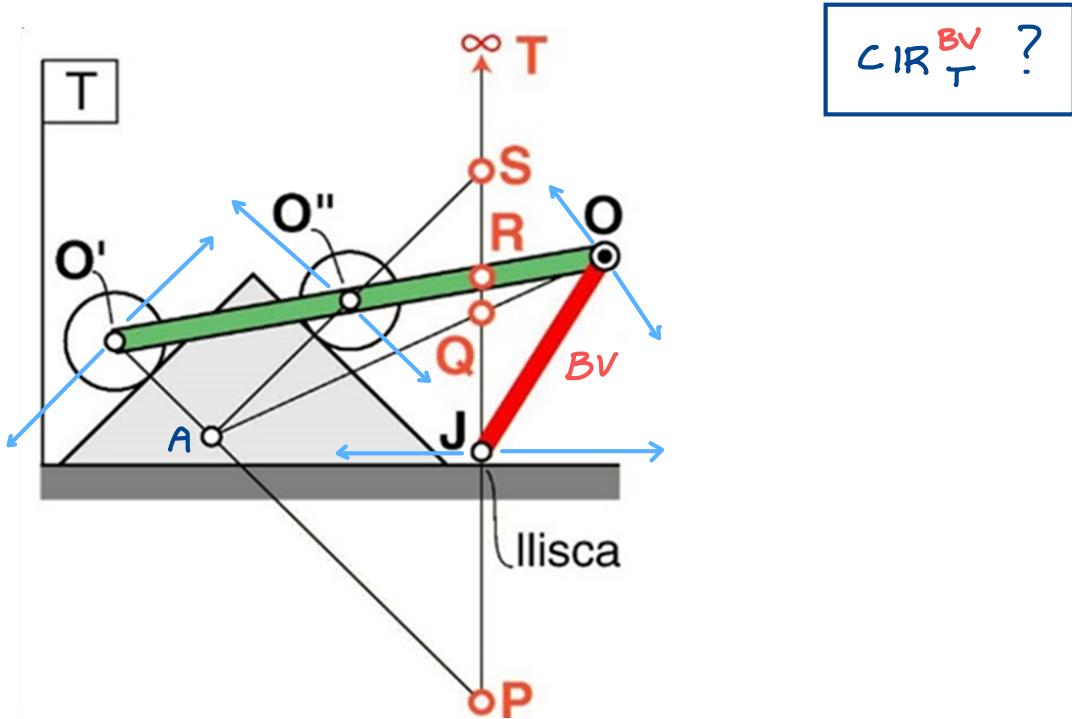
$S = \text{Intersecció de les rectes} :$

- \perp a $\bar{v}_T(P)$ passant per P
- \perp a $\bar{v}_T(Q)$ " " " Q

6P



Les rodes mantenent contacte amb el terra inclinat (T).
La barra verda està articulada a les dues. La barra vermella (BV) està articulada a la verda i recolza sobre el terra.
Determine el CIR_T^{BV} .

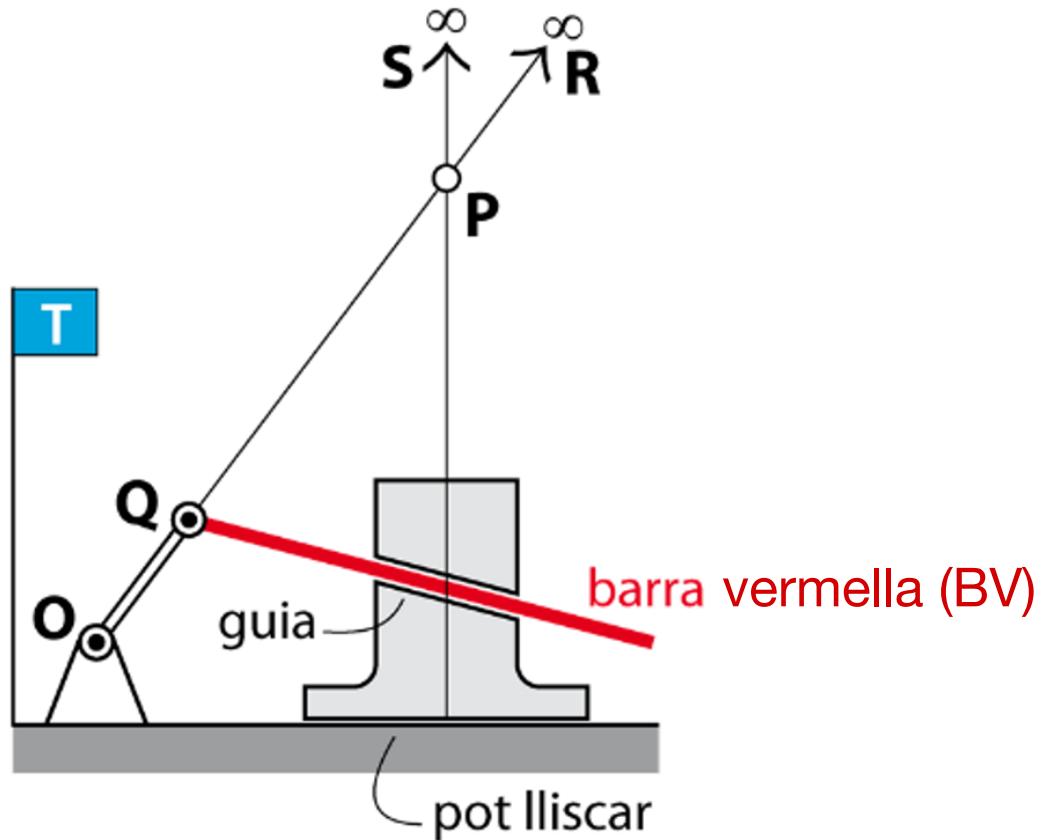


$CIR_T^{BV} ?$

$\bar{v}_T(O')$ té dir \nwarrow
 $\bar{v}_T(O'')$ té dir \nearrow

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}_T(O') \text{ té dir } \nwarrow \\ \bar{v}_T(O'') \text{ té dir } \nearrow \\ \bar{v}_T(J) \text{ té dir. horizontal} \\ \bar{v}_{BV}(Q) \perp \text{ a recta } AD \end{array} \right\} \Rightarrow CIR_T^{Barra\ verda} = A \quad \left. \begin{array}{l} \bar{v}_T(O) \text{ té dir } \perp \text{ a recta } AD \\ \bar{v}_T(J) \text{ té dir. horizontal} \end{array} \right\} \Rightarrow CIR_T^{BV} = Q$$

La barra blanca està articulada al terra (T). La barra vermella (BV) està articulada a la blanca i té un enllaç prismàtic amb el suport, que recolza sobre el terra. Determina el CIR_T^{BV} .

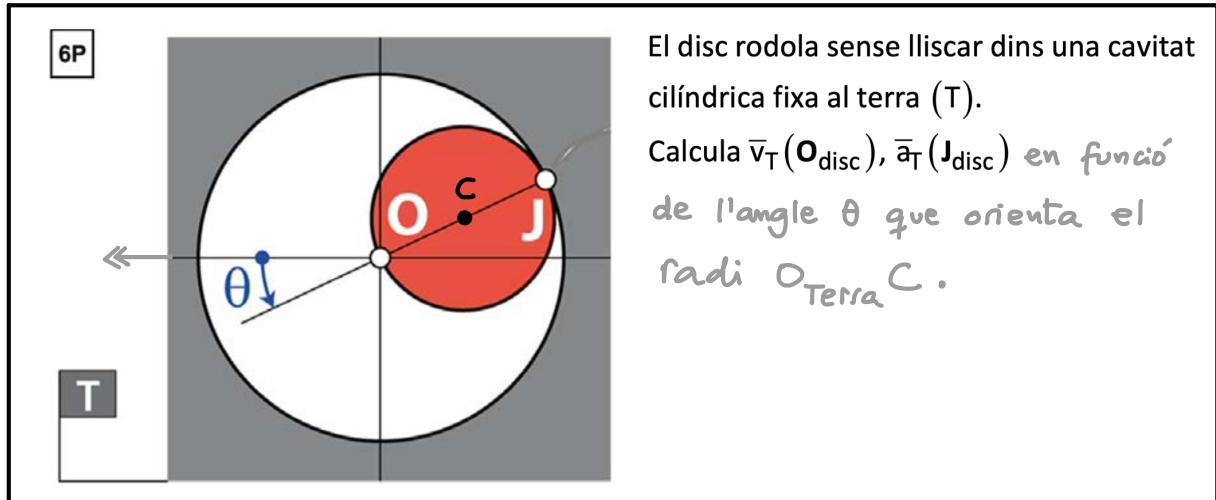


La barra vermella només ser pot traslladar. No pot girar, perquè els 2 enllaços prismàtics no li ho permeten.

Vol dir que $\overline{I2}_T^{\text{barra}} = 0$. Això implica que el seu CIR es a l' ∞ (sobre un punt de la recta de l' ∞). Per altra banda CIR_T^{barra} ha de ser sobre la recta OQ perquè Q té velocitat \perp a aquesta recta. Per tant, CIR_T^{barra} ha de ser el punt de l' ∞ de la recta OQ .

$$CIR_T^{BV} = R$$

Disc rodolant sobre pista circular

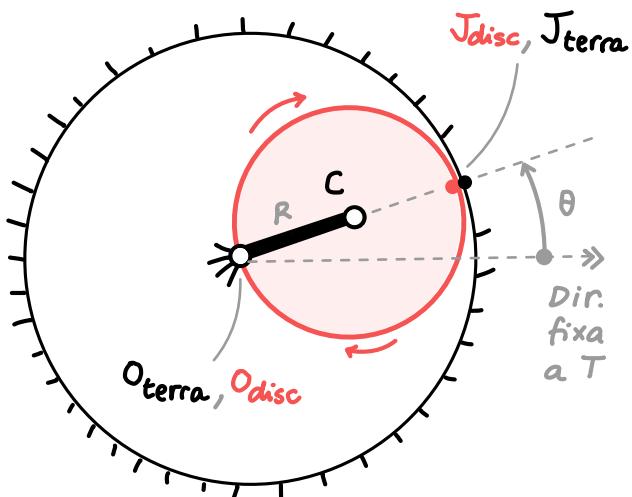


Entenguem primer el moviment del disc.

θ = orientació del radi $O_{\text{Terra}}C$ respecte del terra.

Si θ augmenta, com rodola el disc?

Per entendre-ho, va bé imaginar-se que el radi $O_{\text{Terra}}C$ és una barra articulada amb el terra i amb el disc:



θ orienta aquesta barra fictícia (no el disc!) resp. T .

Quan θ augmenta, C descriu una trajectòria circular de radi R ardi O_{Terra} , en sentit antihorari).

Com que a J no hi ha lliscament, el disc rodola girant en sentit horari respecte T . Es veu intuitivament, però més avall farem el càlcul precís de $\bar{\Omega}_T^{\text{disc}}$.

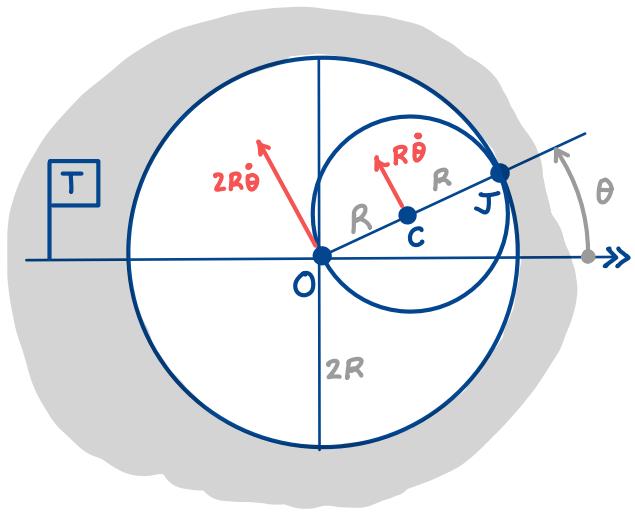
Vegeu animació online del moviment del disc
<https://www.geogebra.org/classic/tkb7md6s>

Buscarem $\bar{v}_T(0_{disc})$ i $\bar{\alpha}_T(J_{disc})$ per CSR.

Ens caldran $\bar{\omega}_T^{disc}$ i $\bar{\alpha}_T^{disc}$.

Comengarem buscant-les

Clarament, C descriu una trajectòria circular amb centre a O terra, radi R, i vel. angular associada ($\dot{\theta}$) resp. T.



Per tant :

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_T(C) &= (\nabla R\dot{\theta}) \\ CIR_T^{disc} &= J \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\omega}_T^{disc} = (\otimes \dot{\theta}) \Rightarrow \bar{\alpha}_T^{disc} = (\otimes \ddot{\theta})$$

$\bar{v}_T(0_{disc})$

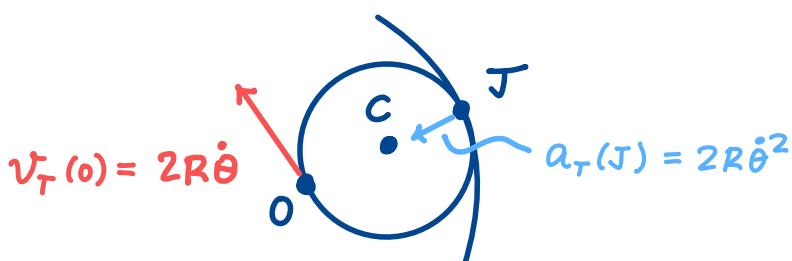
$$\bar{v}_T(0_{disc}) = \bar{v}_T(J_{disc}) + \bar{\omega}_T^{disc} \times \bar{J}O = (\otimes \dot{\theta}) \times (-2R) = (\nabla 2R\dot{\theta})$$

vec. foto!
No el podríem derivar per
obtenir $\bar{\alpha}_T(0_{disc})$
(si la volguéssim)

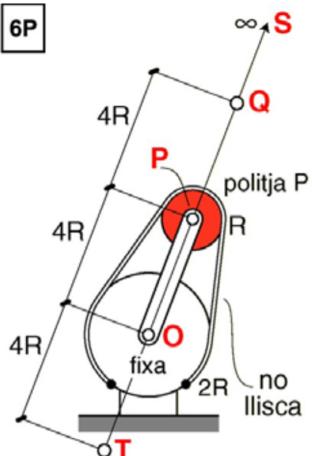
$\bar{\alpha}_T(J_{disc})$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_T(J_{disc}) &= \bar{\alpha}_T(C) + \bar{\alpha}_T^{disc} \times \bar{C}J + \bar{\omega}_T^{disc} \times (\bar{\omega}_T^{disc} \times \bar{C}J) = \\ &= [(\nabla R\ddot{\theta}) + (-R\dot{\theta}^2)] + \underbrace{[(\otimes \ddot{\theta}) \times (R)]}_{(-R\ddot{\theta})} + \underbrace{[(\otimes \dot{\theta}) \times ((\otimes \dot{\theta}) \times (R))]}_{(-R\dot{\theta}^2)} = -2R\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

En resum :



6P



El braç està articulat al terra (T) i a la politja P . La corretja inextensible no llisca en cap dels seus punts de contacte amb el terra i la politja. Determina el $CIR_T^{\text{politja } P}$.

Solució: pàgina següent.

Solució:

Basc = Basculant

PO = Politja a O

PP = " " P

Suposem $\bar{\Omega}_T^{Basc} = \vec{\omega}$



$$\bar{v}_T(P) = (-4RW)$$



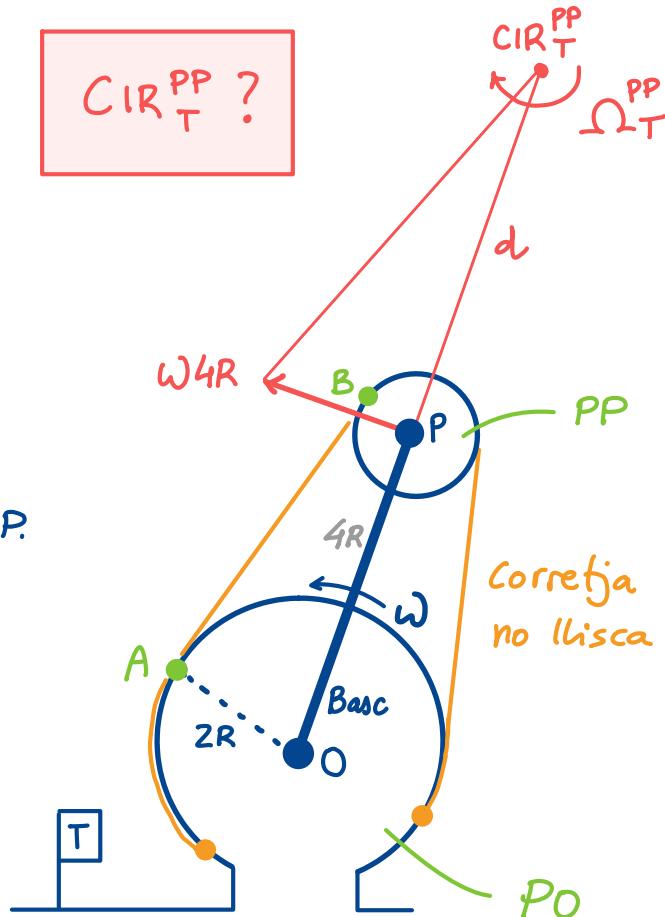
$I = CIR_T^{PP}$ és sobre recta OP.

Si sabessim $\bar{\Omega}_T^{PP}$, ja podríem localitzar el CIR trobant d via (*):

$$\bar{\Omega}_T^{PP} d = 4RW$$

Busquem doncs $\bar{\Omega}_T^{PP}$:

$$\bar{\Omega}_T^{PP} = \underbrace{\bar{\Omega}_{Basc}^{PP}}_{\vec{\omega} 2\omega} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Basc}}_{\vec{\omega}} = \vec{\omega}$$

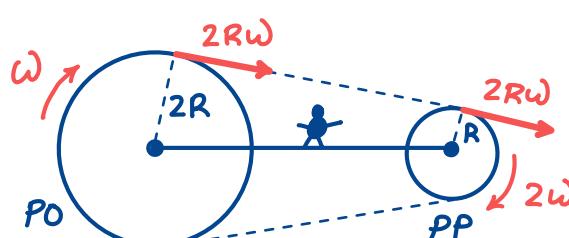


Què veiem des del basculant?

$$\bar{\Omega}_{Basc}^{PO} = \vec{\omega}$$



$$\bar{\Omega}_{Basc}^{PP} = \vec{\omega} 2\omega$$



Rel transm. 2:1

voltes sortida

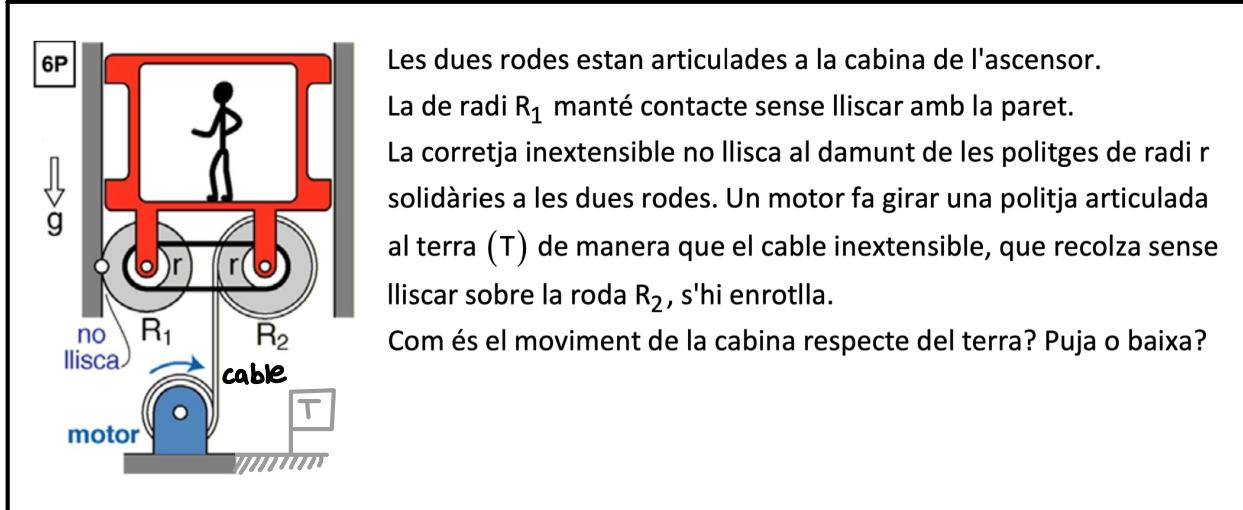
voltes entrada

Ara ja és fàcil:

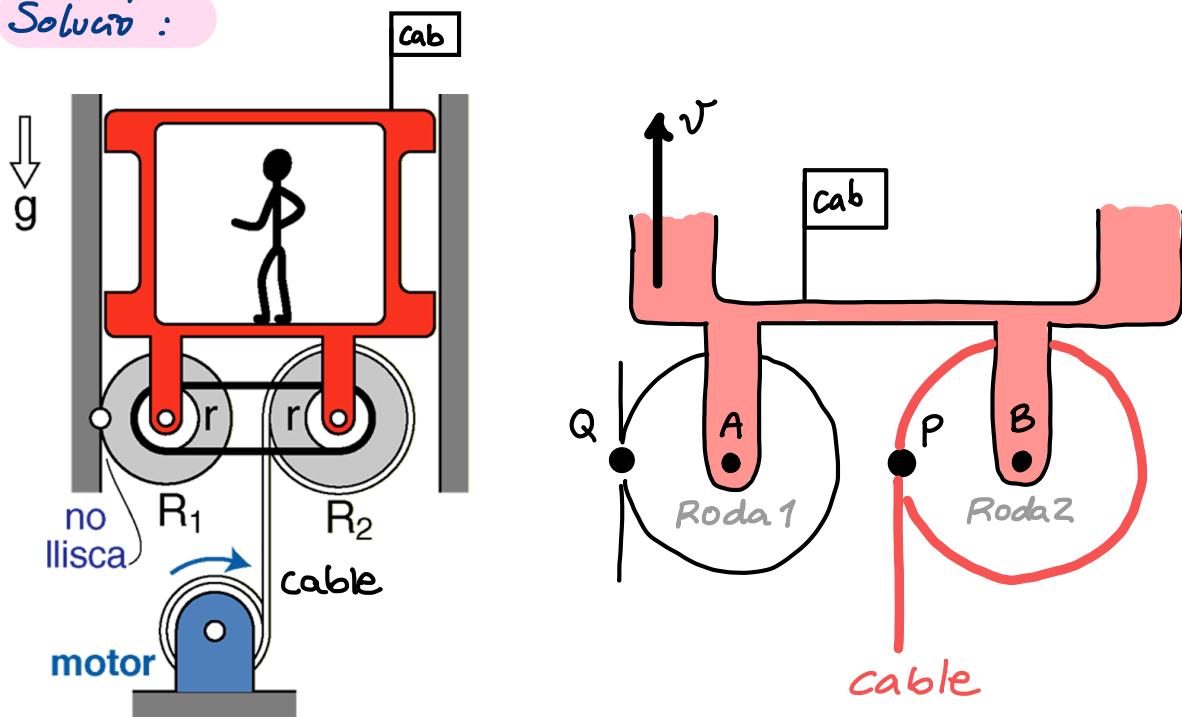
$$\omega \cdot d = 4WR \Rightarrow d = 4R$$

$$CIR_T^{PP} = Q$$

(*) $I = CIR_T^{PP}$ serà per sobre de P si $\bar{\Omega}_T^{PP}$ té sentit $\vec{\omega}$, altrament serà per sota.



Solució :



Suposem que la cabina es mou amb velocitat ($\uparrow v$) respecte el terra. Cal esbrinar si, en enrotllar-se el cable a la politja motoritzada, v és positiva o negativa (la cabina puja o baixa, respectivament).

Fixem-nos que, en qualsevol cas, la velocitat del punt P resp. T només pot ser cap avall \downarrow , ja que el motor està enrotllant el cable.

Així doncs, calcularem $\bar{v}_T(P)$ en funció de v i imposarem que tingui direcció cap avall.

Calculem $\bar{v}_T(P)$ per comp. de movim. amb

$$\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = Cabina \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AB}(P) &= \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P) = \\ &= \bar{\Omega}_{REL}^{Rodaz} \times \overline{BP} + (\uparrow v) = \\ &= \left(\odot \frac{v}{R_1} \right) \times (\leftarrow R_2) + (\uparrow v) = \\ &= \left(\downarrow \frac{R_2}{R_1} v \right) - (\downarrow v) = \downarrow \left[v \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right] \quad (\square) \end{aligned}$$

De (\square) veiem que $\bar{v}_T(P)$ vindrà dir. \downarrow si i només si

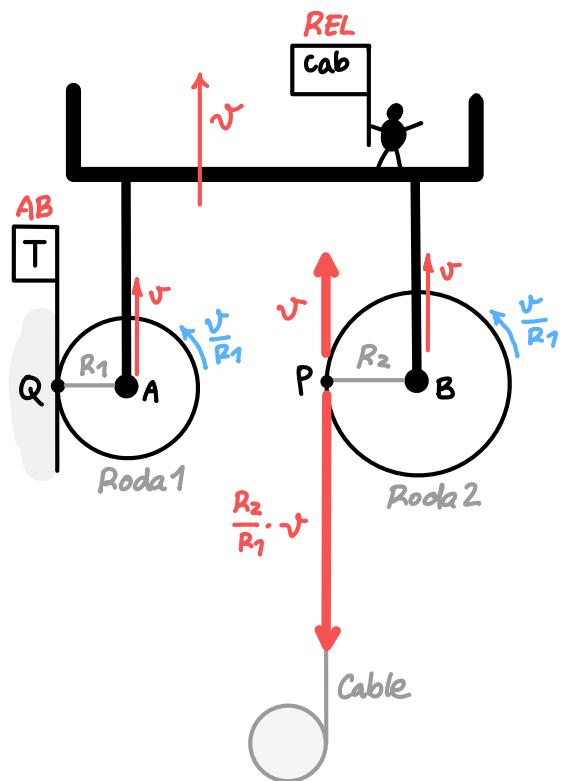
$$v \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) > 0,$$

que equival a demanar

$$v(R_2 - R_1) > 0$$

$\underbrace{A}_{\text{A}}$ $\underbrace{B}_{\text{B}}$

És a dir, A i B han de tenir el mateix signe.



$$\left. \begin{aligned} (*) \quad \bar{v}_T(A) &= (\uparrow v) \\ CIR_T^{Rodaz} &= Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\Omega}_T^{Rodaz} = \odot \frac{v}{R_1}$$

Cabina té orientació fixa resp. T

Relació transmissió 1:1 Roda1 \rightarrow Roda2

$$\bar{\Omega}_{cabina}^{Rodaz} = \bar{\Omega}_{cabina}^{Rodaz}$$

Per tant, quan el cable s'enrotlla :

- Si $R_2 > R_1$, v ha de ser positiva \Rightarrow La cabina puja
 - Si $R_2 < R_1$, " " " negativa \Rightarrow " " baixa
-

Extra: i què passa quan el motor està aturat?

En aquest cas, el cable no s'enrotlla a la polifà
motoritzada $\Rightarrow \bar{V}_T(P) = 0$, i per tant ha de ser

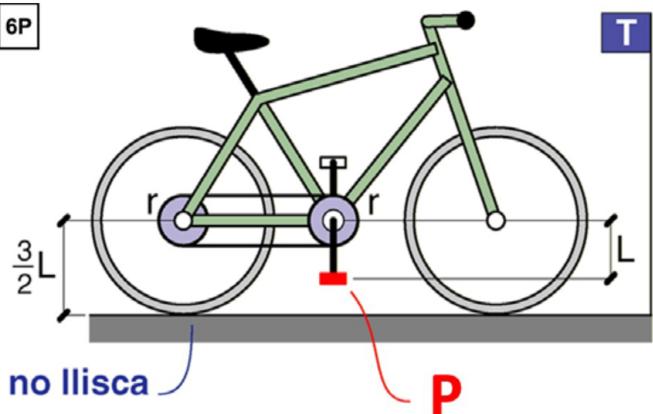
$$v(R_2 - R_1) = 0$$

Aquesta condició es compleix en dos casos:

(i) Si $R_2 \neq R_1 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow$ La cabina està
aturada

(ii) Si $R_2 = R_1 \Rightarrow v$ pot tenir qualsevol valor \Rightarrow
El moviment de la cabina no queda determinat
cinemàticament. Pot pujar o baixar, o quedar
en repòs. Té llibertat per a fer qualsevol
d'aquestes coses. I quinà farà? No ho sabem!
Calen les eines de la dinàmica per a determinar
el moviment.

6P



Les rodes de la bicicleta no llisquen al damunt del terra (T). Plat i pinyó tenen la mateixa mida. Calcula $\mathcal{R}_T(P)$.

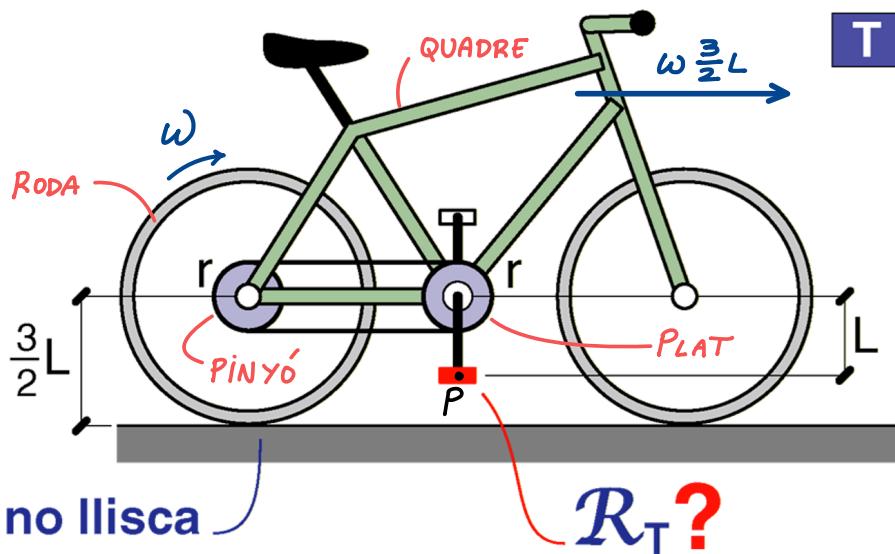
$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|\alpha_T^n(P)|} \Rightarrow \text{Hem de calcular } \bar{v}_T(P) \text{ i } \bar{\alpha}_T(P) \text{ i extreure } \bar{\alpha}_T^n(P).$$

Per a fer els càlculs, podem suposar que la roda del darrere gira amb velocitat angular $\vec{\omega}$ resp. T, de manera que el quadre avança amb velocitat

$$\left(\rightarrow \omega \cdot \frac{3}{2} L \right)$$

Podrem suposar un valor ω variable, però com que $\mathcal{R}_T(P)$ no depèn de la velocitat amb que P descriu la seva trajectòria, suposem $\omega = \omega_0 = ct$ (constant $\forall t$).

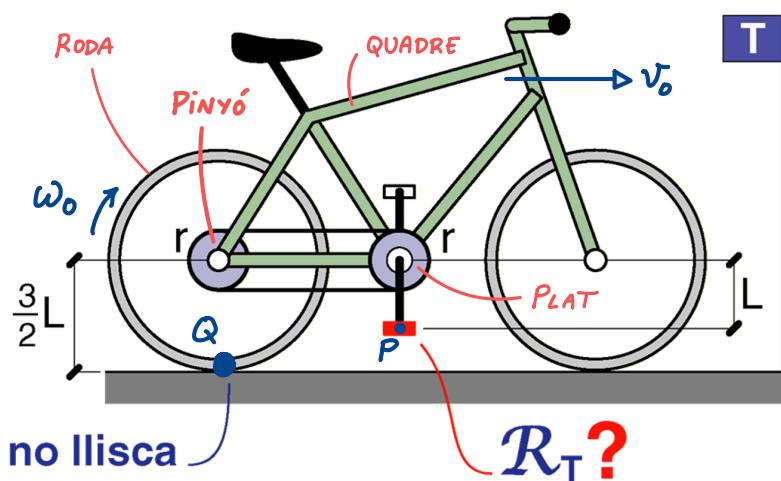
Això simplifica els càlculs.



Farem composició
de moviments amb

$$AB = T$$

$REL = \text{Quadre}$

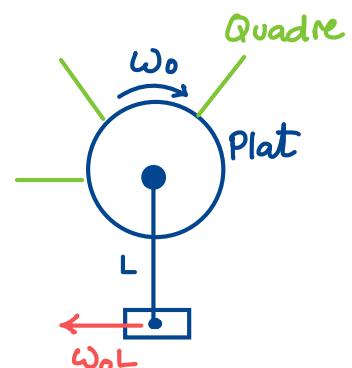


$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_T^{\text{Roda}} &= \hat{\otimes} \omega_0 \\ \text{CIR } \frac{\text{Roda}}{T} &= Q \end{aligned} \Rightarrow \text{Respecte } T, \text{ el quadre avança amb velocitat} \quad v_0 = \left(\rightarrow \frac{3}{2} L \cdot \omega_0 \right)$$

Clarament $\bar{\Omega}_{\text{Quadre}}^{\text{Plat}} = \hat{\otimes} \omega_0$ també, ja que per cada volta que fa la roda resp. T , el pinyó i el plat en fan una resp. el quadre.

Aleshores:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AB}(P) &= \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P) = \\ &= (\leftarrow \omega_0 L) + (\rightarrow \omega_0 \frac{3}{2} L) = (\rightarrow \frac{\omega_0 L}{2}) \end{aligned}$$



$$\bar{a}_{AB}(P) = \bar{a}_{REL}(P) + \cancel{\bar{a}_{ar}(P)}^0 + \underbrace{\bar{a}_{cor}(P)}_{0} = (\uparrow \omega_0^2 L)$$

i per tant:

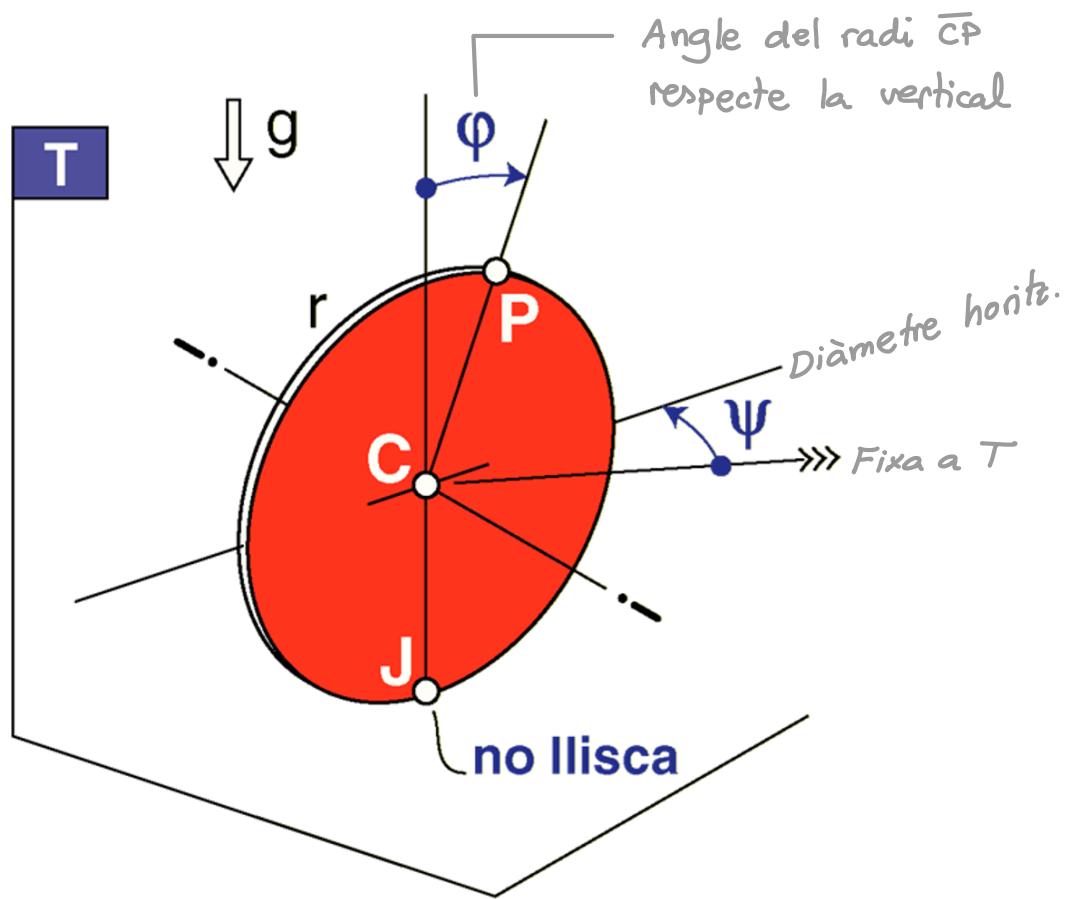
$$2 \underbrace{\bar{\Omega}_{AB}^{\text{REL}}}_{0} \times \bar{v}_{REL}(P)$$

$$\boxed{\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|} = \frac{\left(\frac{\omega_0 L}{2}\right)^2}{\omega_0^2 L} = \frac{L}{4}}$$

Introducció a cinemàtica de vehicles

El següent exercici proporciona un resultat que ens permetrà agilitzar les anàlisis cinemàtiques de vehicles.

La roda no llisca sobre el terra, i gira mantenint el seu pla perpendicular al terra (T). Calcula $\bar{v}_T(C)$.

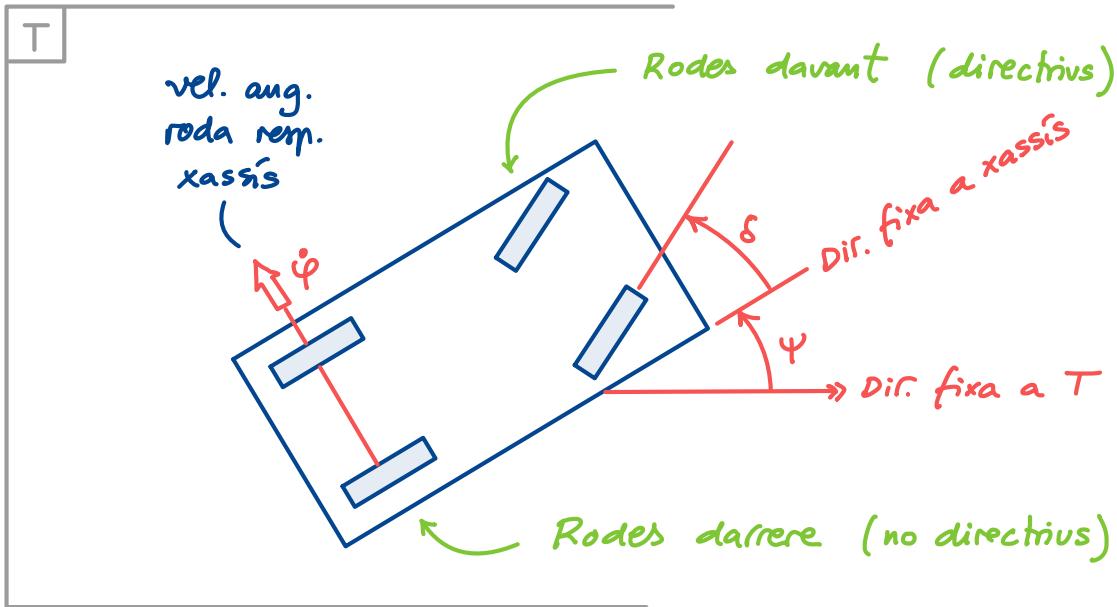


Resoldrem l'exercici posant-lo en context.

Considerarem un vehicle amb rodes, introduirem tres hipòtesis simplificadores, i calcularem la velocitat del centre d'una roda qualsevol respecte del terra.

Veurem que la velocitat d'aquest centre només depèn de la velocitat **phipunt** de rotació de la roda respecte del xassís (no de **psipunt**). Aquest resultat permet fer anàlisis cinemàtiques ràpides de vehicles, i l'aplicarem en exercicis futurs.

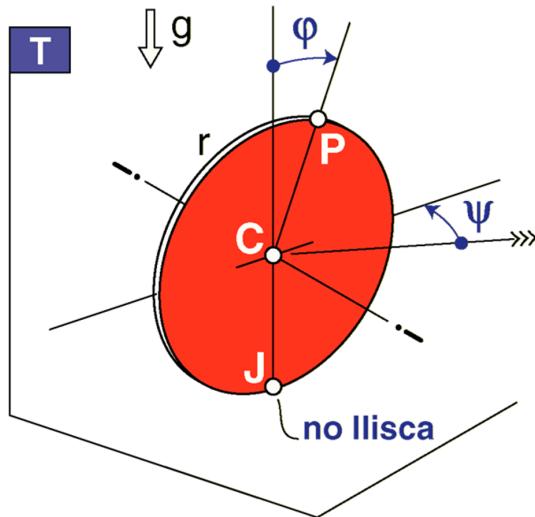
Considerem un vehicle:



3 hipòtesis simplificadores

- Vehicle es mou en terra pla
- Veh. no té suspensions \Rightarrow Roda es manti en un pla vertical i només cal orientar-la amb 2 angles.

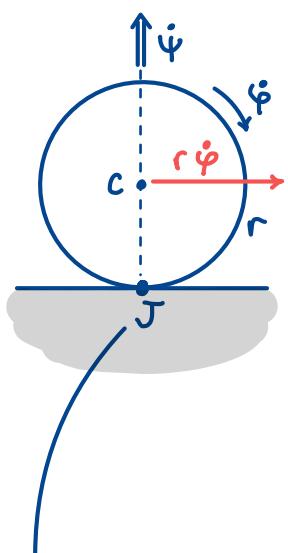
Per la roda del darrere serien ψ i φ :



Per la del davant serien $\psi + \delta$, φ

- Rodes primes \Rightarrow contacte puntual amb el terra. Permet introduir hipòtesi de no lliscament a J. Si el contacte fos en un segment de recta seguir que hi hauria lliscament en alguns punts.

Anàlisi cinemàtica roda del darrere:
(per la roda del davant surt el mateix!)



Aplicant CSR a roda:

$$\bar{v}_T(c) = \bar{v}_T(J) + (\hat{\pi} \dot{\psi} + \hat{\otimes} \dot{\varphi}) \times (\uparrow r) = (\rightarrow r \dot{\varphi})$$

0!

Que simple!

Per la roda davantera també surt
 $\bar{v}_T(c) = (\rightarrow r \dot{\varphi})$ perquè en lloc de
 $\uparrow \dot{\psi}$ tenim $\uparrow (\dot{\psi} + \dot{\delta})$

J no és el CIR! Ho seria si el movim.
de la roda fos plà. Però aquí és 3D!

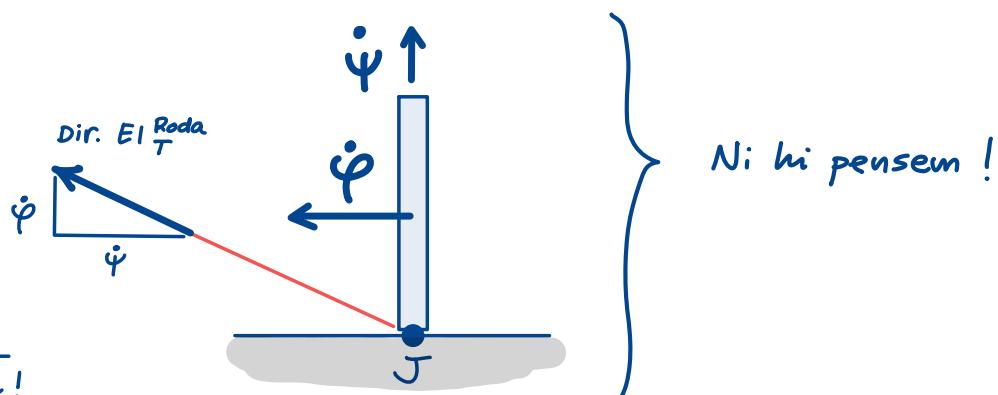
Per tant, $\rightarrow r \dot{\varphi}$ no és
"distància al CIR · R",
sinó el resultat
d'aplicar CSR!

En fer analisi cinemàtica de veh. pensarem sempre en això **la roda**

És a dir: pensarem que el centre C de la roda té vel. $(\rightarrow r \dot{\varphi})$
Això ens permetrà fer analisis cinemàtics ràpids perquè C sol
ser, allora, un punt del xamís (veure questió del Tricicle
com a exemple, pàg. següent).

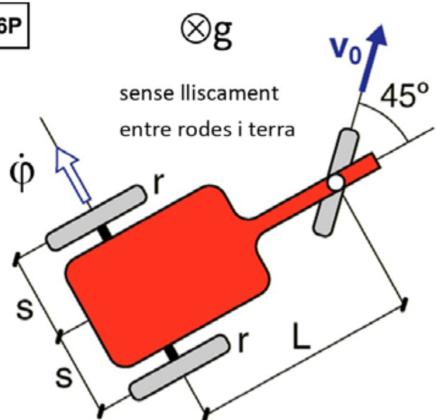
Observació:

L' EI_T^{roda} passa per J, però la roda té 2 GDL. La dir. de
l' EI és $\bar{\psi} + \bar{\varphi}$, per tant EI_T^{roda} no queda determinat.
No ens servirà útil. No cal que hi pensem!



(*) No sempre ho serà!

6P

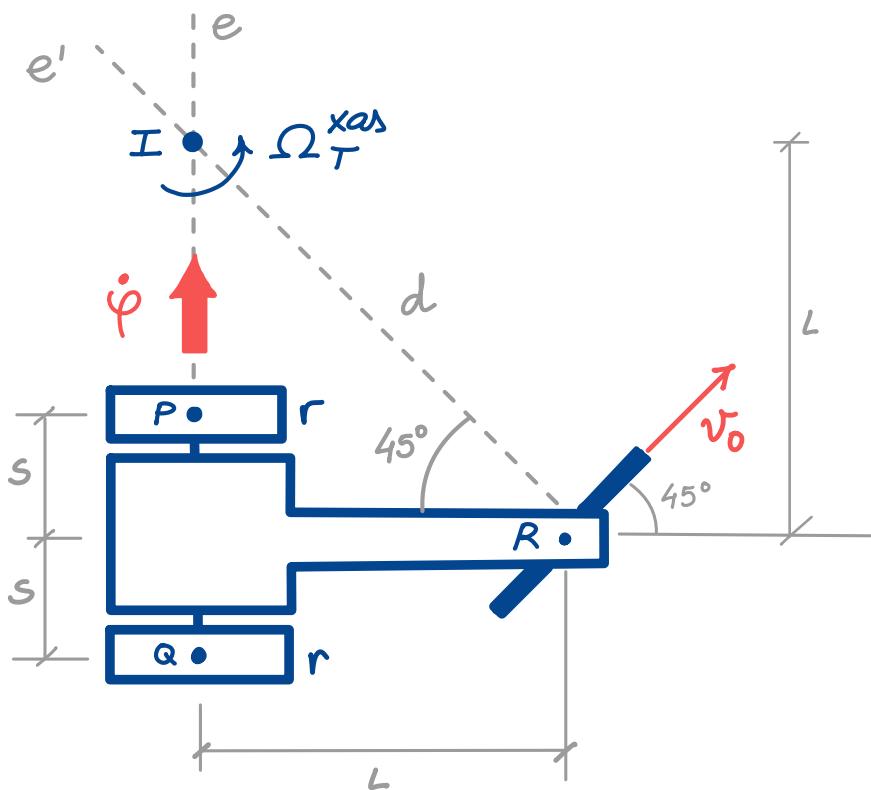


Les rodes del tricicle són identiques i no llisquen al damunt del terra (T). La velocitat del centre de la roda del davant té velocitat v_0 respecte del terra. Calcula la rotació pròpia $\dot{\phi}$ de la roda posterior esquerra en funció de v_0 .

Solució: pàgina següent.

Solució:

$$\dot{\varphi} ?$$



P, Q, R són centres de les respectives rodes, però també punts del xassís.

$$P \text{ i } Q \text{ tenen vel. } \perp \text{ eix } e \quad | \Rightarrow CIR_T^{\text{xassís}} = I \\ R \text{ té vel. } \perp \text{ eix } e' \\ |$$

Busquem Ω_T^{xas} :

$$\Omega_T^{\text{xas}} = \frac{v_0}{d} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} \quad "xas" = \text{xassís}$$

Ara, veient P com a punt de la roda:

$$v_T(P) = r \cdot \dot{\varphi} \quad (I)$$

I veient P com del xassís:

$$v_T(P) = \Omega_T^{\text{xas}} \cdot \underbrace{(L-s)}_{\text{dist. al CIR}} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} \cdot (L-s) \quad (II)$$

$$I = II :$$

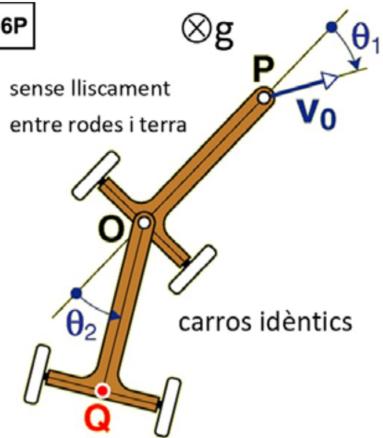
$$r \dot{\varphi} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} (L-s) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{rL\sqrt{2}} (L-s)$$

CSR
roda

CSR
xassís

6P

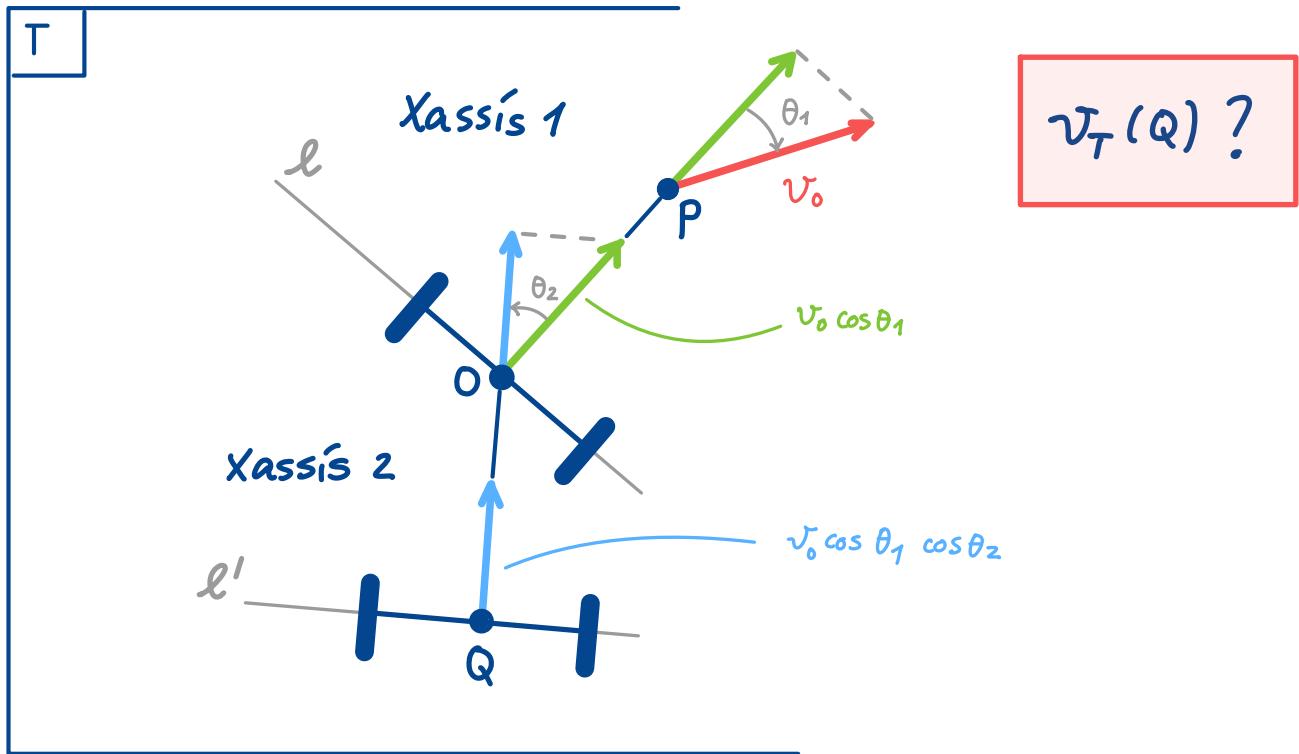


Les rodes del tractor i el remolc són identiques i no llisquen al damunt del terra (T). La velocitat del punt P respecte del terra és v_0 . Calcula $\bar{v}_T(Q)$.

Solució: pàgina següent.

Solució ràpida via equiprojectivitat !

(Solució menys directa, però igualment bona, a la pàg. seg.)

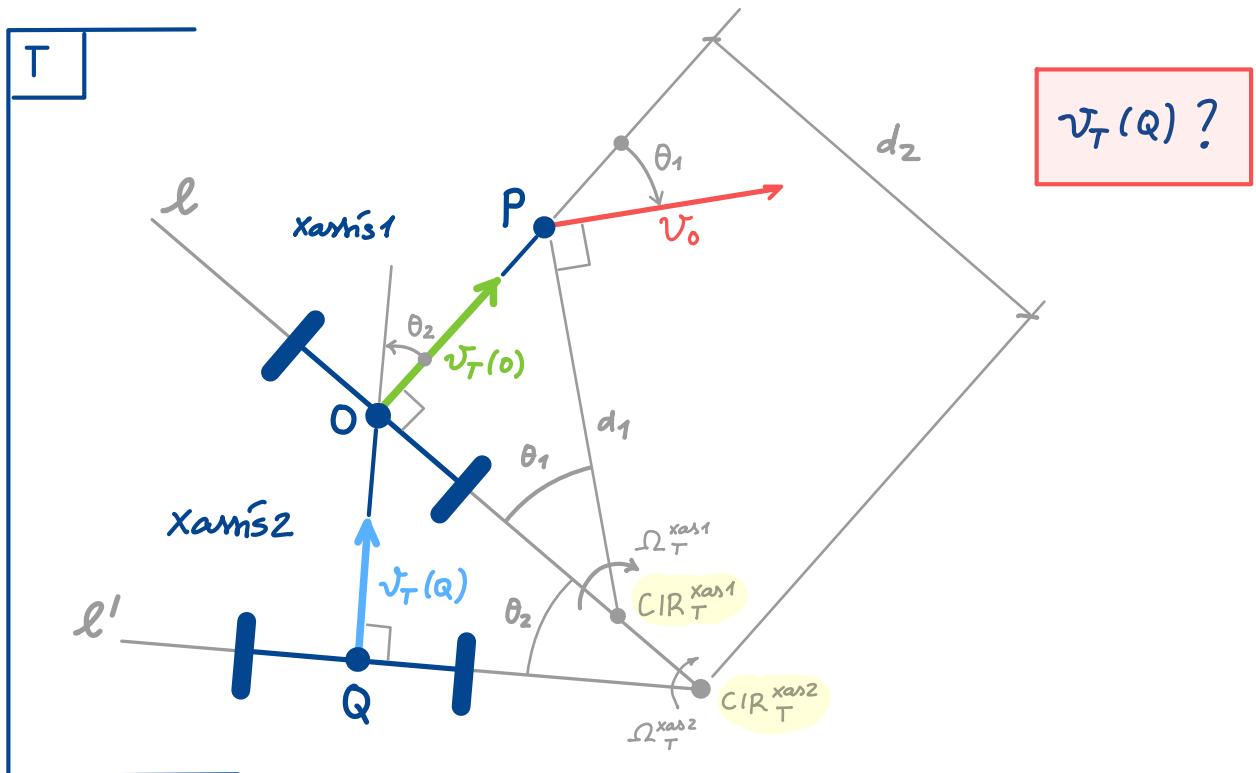


$$v_T(Q) ?$$

- CIR $\frac{xassís 1}{T}$ sobre $l \Rightarrow \bar{v}_T(O) \perp l$
 - Equiprojectivitat $P \rightarrow O : v_T(O) = v_0 \cos \theta_1$
 - CIR $\frac{xassís 2}{T}$ sobre $l' \Rightarrow \bar{v}_T(Q) \perp l'$
 - Equiprojectivitat $O \rightarrow Q :$
- $$\boxed{v_T(Q) = v_T(O) \cos \theta_2 = \underline{\underline{v_0 \cos \theta_1 \cos \theta_2}}}$$

Solució "lenta" via localitzar CIR_T^{xas1} i CIR_T^{xas2}

Els CIR_T^{xas1} i CIR_T^{xas2} han de ser on indiquem. A més, $v_T(0)$ i $v_T(Q)$ han de ser \perp a l i l' , respectivament.



- $\Omega_T^{xas1} = \frac{v_0}{d_1}$

$\curvearrowright \text{dist}(CIR_T^{xas1}, P)$

- $v_T(0) = \Omega_T^{xas1} \cdot d_1 \cos \theta_1 = v_0 \cos \theta_1$

- $\Omega_T^{xas2} = \frac{v_T(0)}{d_2} = \frac{v_0 \cos \theta_1}{d_2}$

$\curvearrowright \text{dist}(CIR_T^{xas2}, 0)$

- $\boxed{v_T(Q) = \Omega_T^{xas2} \cdot d_2 \cos \theta_2 = \frac{v_0 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{d_2}}$