

**9P**

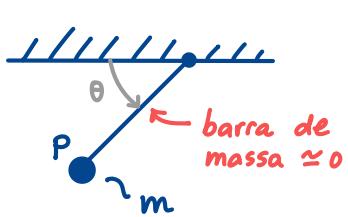
Geometria de masses

## Introducció

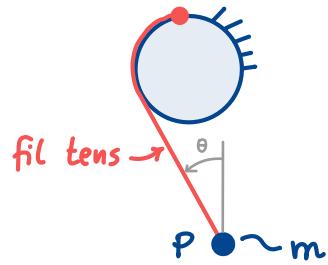
En aquesta segona part de l'assignatura estem utilitzant les lleis de la mecànica Newtoniana per obtenir

- equacions del moviment (\*)
- forces d'enllaç
- forces o parells que han d'aplicar els motors per garantir una certa acceleració.

Quan el sistema es senzill si només involucra una partícula P en tenim prou amb aplicar la 2a llei de Newton ( $\sum \bar{F}_{\rightarrow P} = m_p \ddot{\alpha}_{\text{RGA}}(P)$ , 3 eqs. escalaris). És el cas d'aquests dos sistemes ja vistos:



Pèndol simple



Pèndol sobre cilindre

En ambdós casos la massa està concentrada en un sol punt P i, per tant, no hi ha una geometria de masses a considerar. En els propers dies volarem analitzar sistemes mecànics més complexos, que involucrin sòlids, en els quals caldrà tenir en compte la distribució espacial de la massa.

---

(\*) Donen l'acceleració del sistema en funció de l'estat mecànic i de les forces i parells d'activació aplicats

Per analitzar aquests sistemes utilitzarem els teoremes de la quantitat de moviment (TQM) i del moment cinètic (TMC), que aviat presentarem. Aquests teoremes generalitzen les equacions de l'equilibri de l'estàtica que ja coneixeu.

$$\sum \underbrace{\bar{F}_{ext}}_{\text{forces exteriors aplicades al sistema}} = 0$$

forces exteriors aplicades al sistema

$$\sum \underbrace{\bar{M}_{ext}(Q)}_{\text{moments exteriors respecte un punt } Q, \text{ aplicats al sistema}} = 0$$

moments exteriors respecte un punt  $Q$ , aplicats al sistema

Per aplicar

Caldrà saber

TQM

centre d'inèrcia del sistema (\*)

TMC

Moment cinètic del sistema

Tant el centre d'inèrcia com el moment cinètic d'un sistema depenen de la distribució espacial (o geometria) de la massa del sistema (com està repartida).

### Centre d'inèrcia d'un sistema

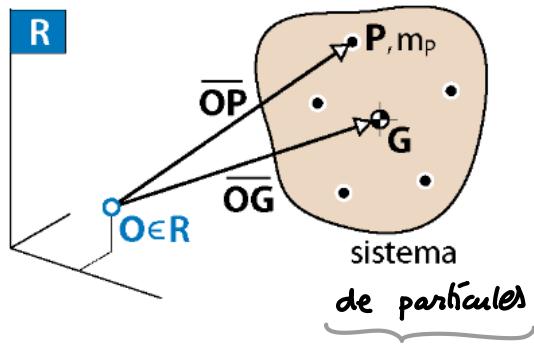
El centre d'inèrcia  $G$  d'un sistema de partícules (sorint un nòlid rígid) és un punt la cinemàtica del qual és un promig ponderat de la de totes les partícules del sist. Concretament, la posició de  $G$  en una referència  $R$  ve donada pel vector

(\*) "Centre d'inèrcia" = "centre de masses"

massa partícules  $P$

$$\overline{OG} = \sum_P \frac{m_P}{M} \cdot \overline{OP} \quad (\square)$$

massa total del sist.



Si derivem ( $\square$ ) resp. t a ref  $R$ , tenim:

S'orient és un  
sòlid rígid

$$\overline{v_R}(G) = \sum_P \frac{m_P}{M} \cdot \overline{v_R}(P)$$

Surt el promig  
ponderat que diem

$$\overline{a_R}(G) = \sum_P \frac{m_P}{M} \cdot \overline{a_R}(P)$$

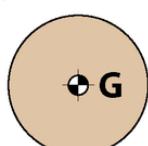
Fixem-nos que fent la substitució  $\overline{OP} = \overline{OG} + \overline{GP}$  a ( $\square$ ), i multiplicant per  $M$ , obtenim l'equació equivalent

$$\sum_P m_P \cdot \overline{GP} = \underbrace{\overline{0}}_{\text{vec. zero}} \quad (O)$$

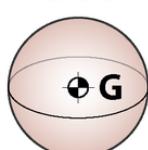
Si un punt  $G$  satisfa ( $O$ ) podem assegurar que és el centre d'inèrcia del sistema. Això facilita molt la localització de  $G$  en el cas de sòlids rígids homogenis que presentin simetries importants:

Centre de masses de sòlids homogenis

placa circular



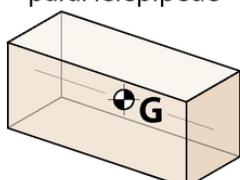
esfera



placa rectangular



paral·lelepípede



anella



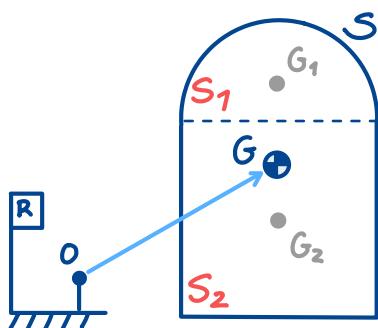
cilindre

Com veiem en  
aquest exemple,  
 $G$  no sempre és  
un punt físic  
d's!

## Centres d'inèrcia de sòlids "compostos"

### centre inèrcia

Els c.i. de sòlids habituals estan tabulats. Si tenim un sòlid  $S$  que es pot veure com la suma de diversos sòlids. Si, el c.i.  $G$  de  $S$  es pot trobar fent el promig ponderat dels c.i.  $G_i$  dels sòlids  $S_i$ :



$$\overline{OG} = \frac{m_1 \overline{OG}_1 + m_2 \overline{OG}_2}{m_1 + m_2}$$

Exercicis: Practiqueu el càlcul de c.i. resolent els exemples D5.1, D5.2, D5.3 de la Wikimec.

## Moment cinètic d'un sistema de partícules

### sorint un sòlid rígid

Suposant un sòlid rígid, sigui  $S$  un sistema de partícules en moviment en relació a una referència  $R$ , i considerem una partícula  $P$  de  $S$  amb massa  $m_p$ . Per definició:

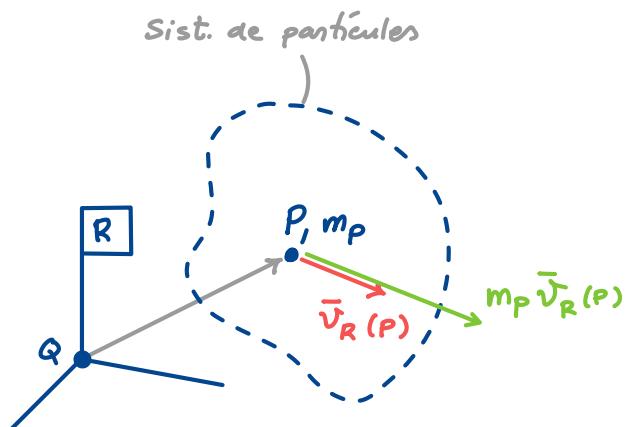
- La quantitat de moviment de  $P$  a  $R$  és el vector

$$m_p \cdot \vec{v}_R(P)$$

- El moment cinètic de  $P$  a  $R$  respecte un punt  $Q$  fix a  $R$  és

$$\overline{H}_R^P(Q) = \overline{QP} \times m_p \vec{v}_R(P)$$

moment resp. Q de la quantitat de moviment de  $P$



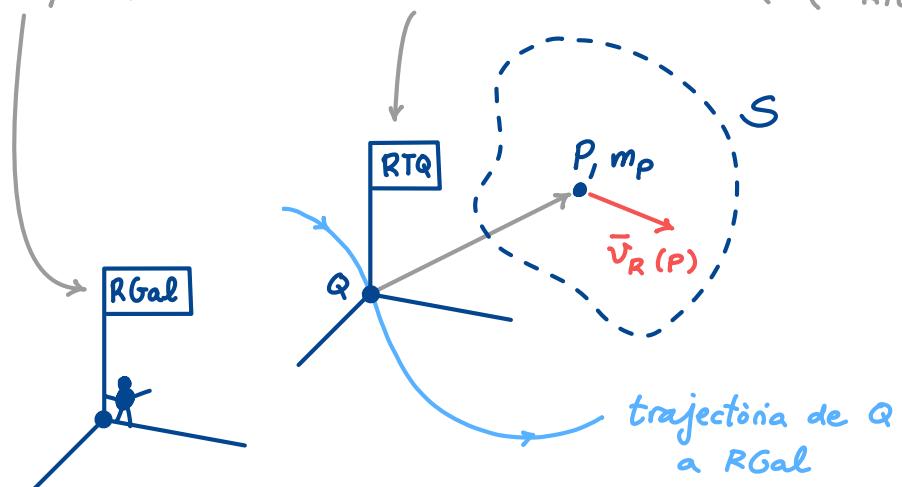
El moment cinètic de S a R, respecte Q, s'obté sumant el de totes les partícules d'S:

$$\bar{H}_R^S(Q) = \sum_P \bar{Q}P \times m_P \bar{v}_R(P) \quad (*)$$

En les properes sessions veurem que, en el teorema del moment cinètic, el vector  $\bar{H}_R^S(Q)$  es calcula per a una referència R que es trasllada amb Q (RTQ) respecte de la ref. Galileana (RGal) en la que realment volem estudiar el moviment de S:

Volem estudiar el movim.  
d'S des d'aquí...

... però ens caldrà calcular el mom.  
cinètic de S en la RTQ ( $\bar{H}_{RTQ}^S(Q)$ )



És a dir: Q és un punt fix a RTQ però que, en general, pot tenir moviment relatiu a RGal, i RTQ és simplement una referència "que viaja enganxada a Q" mantenint constant la seva orientació respecte RGal. Això vol dir que

$$\bar{\Omega}_{RGal}^{RTQ} = 0$$

(Important)

$$\bar{\Omega}_{RTQ}^S = \bar{\Omega}_{RGal}^S$$

## Moment cinètic d'un sólid rígid

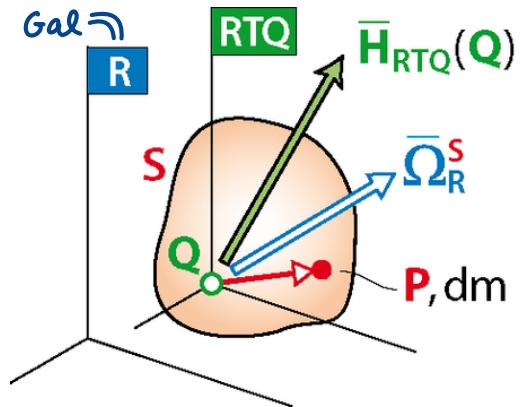
Quan  $S$  és un sólid rígid, el sumatori de l'Eq. (\*) es converteix en una integral estesa a tots els diferencials de massa de  $S$ :

$$\bar{H}_{RTQ}^S(Q) = \int_S \bar{QP} \times dm(P) \bar{\omega}_{RTQ}(P)$$

Malgrat la complexitat aparent d'aquesta expressió, quan  $Q$  és un punt de  $S$  ( $Q \in S$ ) es demostra que

$$\bar{H}_{RTQ}^S(Q) = I(Q) \cdot \underbrace{\bar{\Omega}_{RTQ}^S}_{\parallel \bar{\Omega}_{RGal}^S}$$

$| Q \in S$



on :

$\mathbb{I}(Q)$  = Tensor d'inèria de  $S$  al punt  $Q$

(matriu  $3 \times 3$  simètrica, definida positiva,  
que depèn de la distribució de massa de  $S$ )

$\bar{\Omega}_{RTQ}^S$  = Velocitat angular de  $S$  respecte la RTQ

(com hem dit abans, és igual a  $\bar{\Omega}_{RGal}^S$ )

Important!

COMPTE  
!

Si  $Q \notin S$ , no podem calcular el moment cinètic amb l'anterior expressió. Caldrà fer servir la descomposició baricèntrica. Ja ho veurem.

## Forma del tensor d'inèrcia d'un sólid rígid $S$

Els elements de  $\mathbb{II}(Q)$  depenen de la distribució de massa de  $S$  al voltant d'uns eixos de coordenades  $(x_1, x_2, x_3)$  amb origen a  $Q$ , orientats d'acord amb una base vectorial  $B = (1, 2, 3)$  triada:

$$[\mathbb{II}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

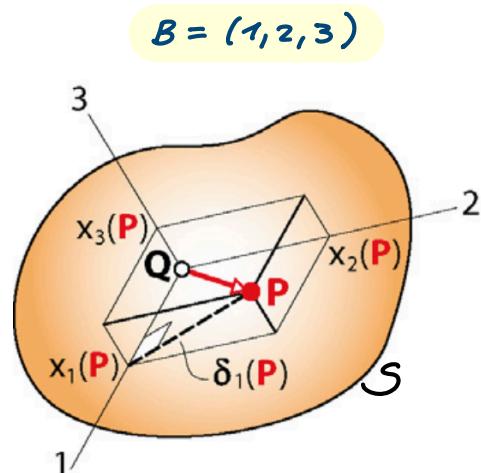
Indiquem la base triada

Moments d'inèrcia  
 Productes "

$$I_{ii} = \int_S \left[ x_j^2(P) + x_k^2(P) \right] dm(P)$$

||  
(distància de  $P$  a eix  $i$ )<sup>2</sup>  
 $\delta_i^2(P)$

$$I_{ij} = - \int_S x_i(P) \cdot x_j(P) \cdot dm(P)$$



Quan la base  $B = (1, 2, 3)$  és fixa al sólid  $S$ , els elements de  $\mathbb{II}(Q)$  són constants. En aquest curs sempre triarem una base  $B$  fixa a  $S$  per poder expressar  $\mathbb{II}(Q)$  amb valors constants.

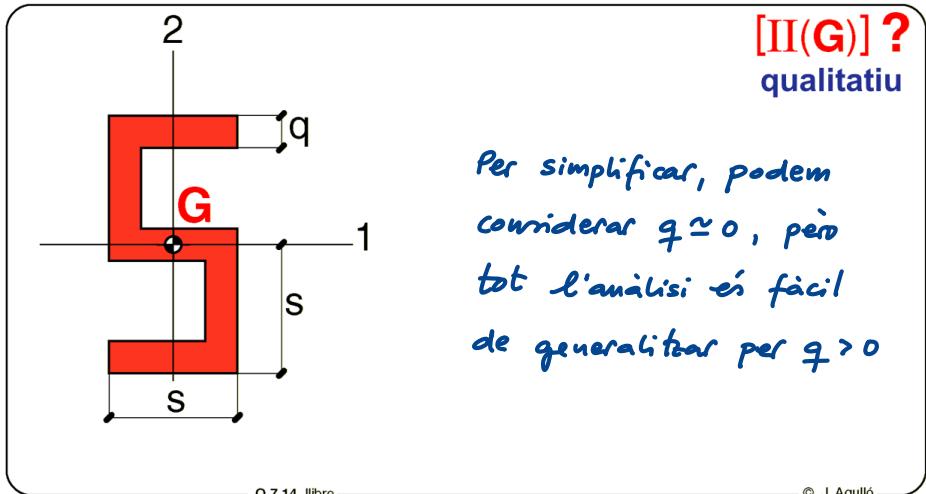
Avui practicarem el càlcul dels  $I_{ii}$ ,  $I_{ij}$  sobre diversos exemples. Sobre la marxa anirem descobrint variades propietats del tensor  $\mathbb{II}(Q)$  que en faciliten el seu càlcul. Les emmarcarem en rectangles grisos.

### Forma qualitativa vs quantitativa

Per obtenir  $\mathbb{II}(Q)$  sempre aplicarem 2 passos:

- (1) Estudiarem la forma qualitativa que té  $\mathbb{II}(Q)$ .  
Això ens ajudarà a extreure conclusions relatives a la dinàmica del rodat, i prepararem el terreny pel pas (2)
- (2) Amb l'ajut de taules, m'cal, obtindrem la forma quantitativa de  $\mathbb{II}(Q)$

Dedicarem la 1<sup>a</sup> meitat de la classe a obtenir formes qualitatives, i la 2<sup>a</sup> a les quantitatives.



Q 7.14 llibre

© J. Agulló

Figura plana  $\Rightarrow$  Tots els  $dm(P)$  tenen coordenada  $x_3(P) = 0$ .  
 $\Rightarrow$  els productes d'inèrnia que involucrin  $x_3(P)$  seran zero:

$$I_{13} = I_{23} = 0 \quad \longrightarrow \quad II(G) = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

Quan a la columna i ( $i$  per simetria a la fila  $i$ ) tinguen tots els productes d'inèrnia zero, direm que la direcció  $i$  és direcció principal d'inèrnia (DPI) per a S en el punt considerat ( $G$  en aquest exemple),<sup>(\*)</sup> i que  $I_{ii}$  és el moment principal d'inèrnia per aquesta DPI.

Ara ens preguntem com són  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$ . Per definició, no poden ser negatius, però podrien ser zero en algun cas. Mirant la posició dels diferencials de massa a la figura veiem que:

$$I_{11} = \int_S \delta_1^2(P) \cdot dm(P) \neq 0$$

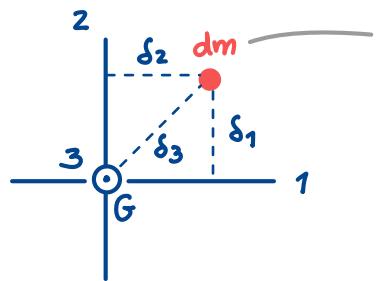
$$I_{22} = \int_S \delta_2^2(P) \cdot dm(P) \neq 0$$

$$I_{33} = \int_S \delta_3^2(P) \cdot dm(P) \neq 0$$

---

(\*) Anirem descorrint la importància de les DPI + endavant

Ara fixem-nos en un dm( $P$ ) qualquer:



Les contribucions del dm a  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  són respectivament:

$$\begin{aligned} \delta_1^2 \cdot dm \\ \delta_2^2 \cdot dm \\ \delta_3^2 \cdot dm = (\delta_1^2 + \delta_2^2) \cdot dm \end{aligned} \quad \text{Per Pitagòres}$$

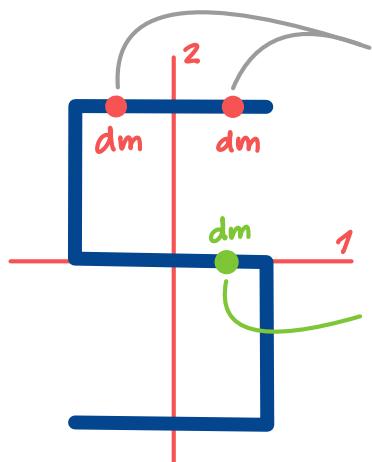
Acabem de descobrir que  $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ !

Ergo la forma qualitativa, per ara, és

$$[I(G)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

En general, per un sólid pla serà  $I_{KK} = I_{ii} + I_{jj}$ , on  $K$  és la dir.  $\perp$  al pla de la figura.

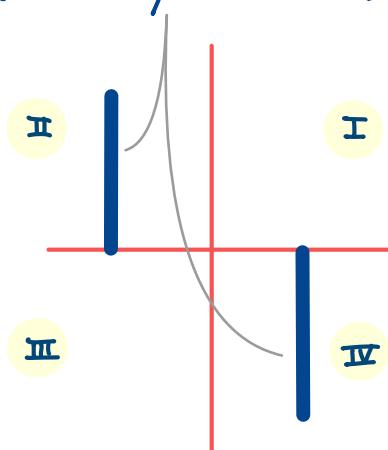
Els faltava saber el signe de  $I_{12} = - \int_S x_1 x_2 dm$ . Analitzem-lo:



Els dm en posicions simètriques respecte un eix cancelen mütuament la seva contribució a  $I_{12}$ .

Els dm sobre un eix tenen contribució nula a  $I_{12}$

Només aquests trossos contribueixen a  $I_{12}$ .



Però en ser els seus dm en els quadrants II i IV, tenim:

$$I_{12} = - \int_S \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{\text{negatiu}} dm > 0$$

Clarament: els signes de les contribucions en cada quadrant són

+	-
-	+

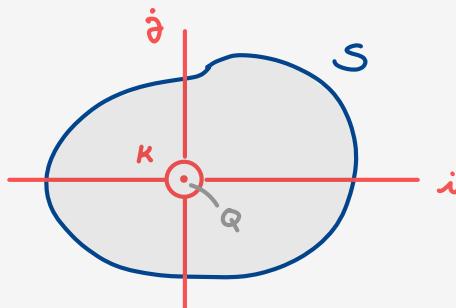
En conclusió: la forma qualitativa de  $\mathbb{II}(G)$  és:

$$\left[ \mathbb{II}(G) \right]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & |I_{12}| & 0 \\ |I_{12}| & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

Escrivim  $|I_{12}|$   
per fer pale  
que  $I_{12} > 0$

En resum:

Si  $S =$  sòlid pla amb eixos



$$B = (i, j, k)$$

es compleix:

Propietat  
1

$\forall Q \in S$  la dir.  $\perp$  a  $S$  es DPI

$$I_{KK} = I_{ii} + I_{jj}$$

$I_{KK}$  és moment principal d'inèria

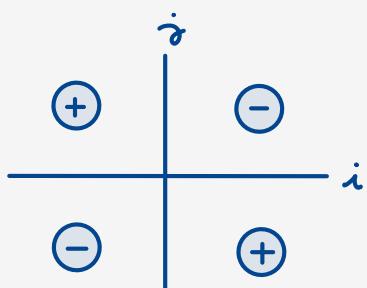
$$\left[ \mathbb{II}(Q) \right]_B = \begin{bmatrix} I_{ii} & I_{ij} & 0 \\ I_{ij} & I_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & I_{KK} \end{bmatrix}$$

$(I_{ii} + I_{jj})$

Propietat  
2

El signe de la contribució de la massa en cada quadrant als productes d'inèria és:

2



$$I_{ij} = - \int_S x_i x_j dm$$

També hem descobert que:

Per a un sòlid  $S$  homogeni, no necessàriament pla, si hi ha un pla de simetria en la distribució de la massa, l'eix perpendicular al pla és DPI:

Pla ( $i, k$ ) de simetria  $\Rightarrow$  Eix  $j$  és DPI

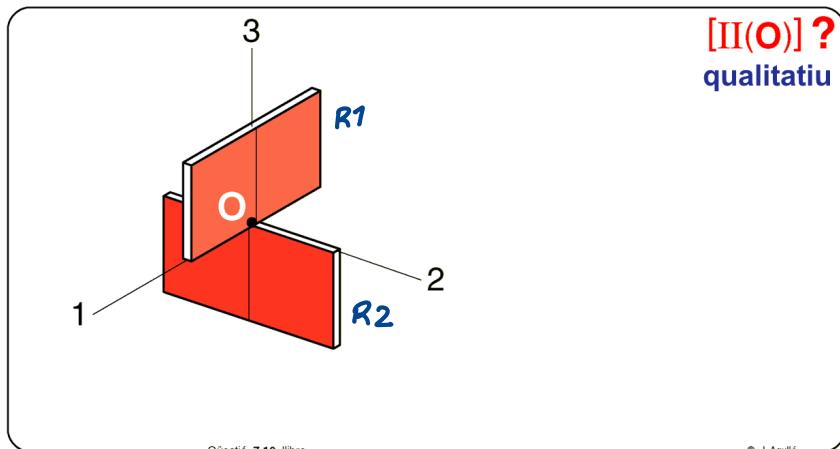
$B = (i, j, k)$

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} * & 0 & * \\ 0 & I_{jj} & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

$I_{ij} = 0$

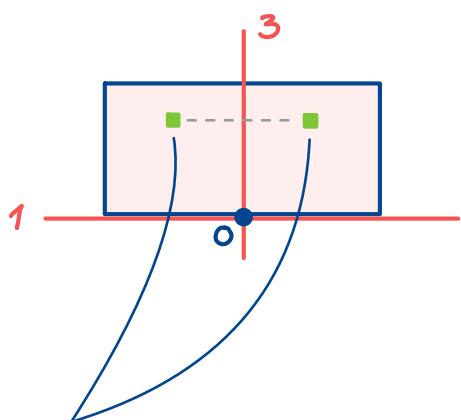
$I_{jk} = 0$

Els dm simètrics tenen contribució conjunta nula a  $I_{ij}, I_{jk}$ .  
Ergo  $I_{ij} = I_{jk} = 0$ .



$\text{II}(O)$  és suma dels tensors dels rectangles  $R1$  i  $R2$ .

Tensor de  $R1$



Cancelen la seva aportació a  $I_{13}$

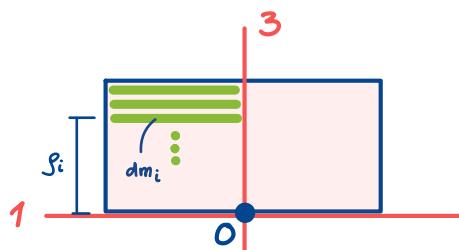
Fig. plana amb eix 2  $\perp$  a figura

Pla 23 de Simetria

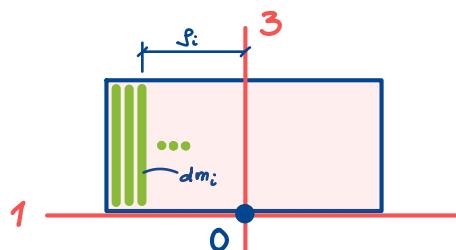
El tensor qualitatiu ha de ser

$$\text{II}(Q) = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} + I_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

Aspecte nou d'aquest exercici: Permet esbrinar visualment si  $I_{11}$  és menor, major, o = a  $I_{33}$ . Ràpidament veiem que  $I_{11} = I_{33}$  ja que:



Aquests dm contribueixen a  $I_{11}$  amb  $s_i^2 d m_i$



Aquests dm també contribueixen a  $I_{33}$  amb  $s_i^2 d m_i$

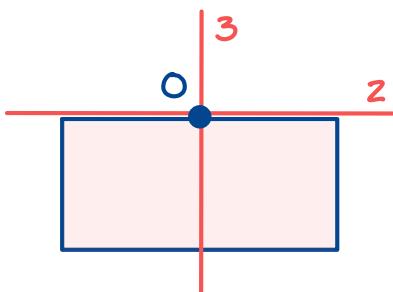
En resum, si  $I = I_{11} = I_{33}$ ,

$$\left[ \begin{smallmatrix} \mathbb{II}(0)_{R1} \end{smallmatrix} \right]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 2I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

### Tensor de R2

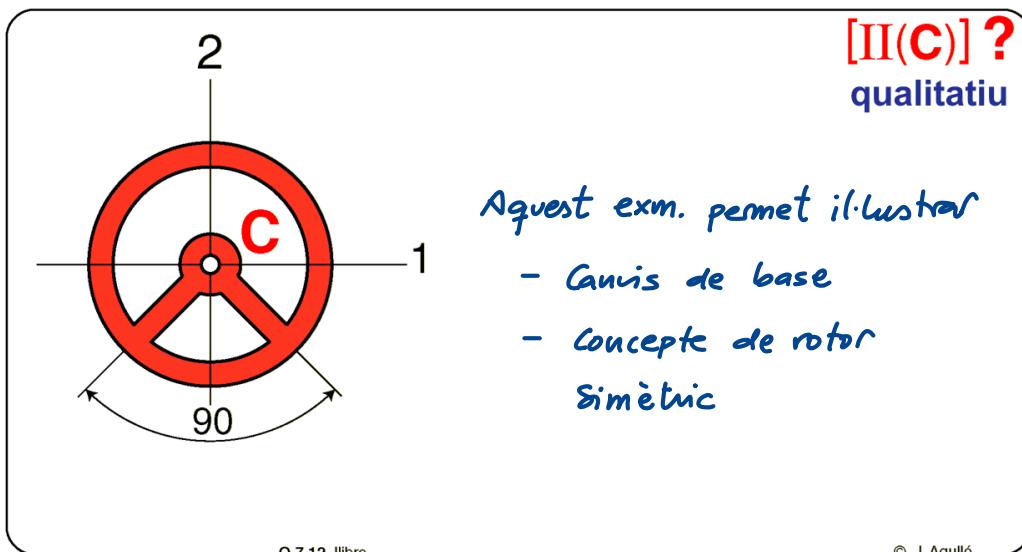
Amb un raonament anàleg veiem ràpidament que

$$\left[ \begin{smallmatrix} \mathbb{II}(0)_{R2} \end{smallmatrix} \right]_B = \begin{bmatrix} 2I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$



### Tensor global $\mathbb{II}(0)$

$$\left[ \begin{smallmatrix} \mathbb{II}(0) \end{smallmatrix} \right]_B = \left[ \begin{smallmatrix} \mathbb{II}_{R1}(0) \end{smallmatrix} \right]_B + \left[ \begin{smallmatrix} \mathbb{II}_{R2}(0) \end{smallmatrix} \right]_B = \begin{bmatrix} 3I & 0 & 0 \\ 0 & 3I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$



Podem descompondre el sòlid així:

$$\text{Anella} = \text{Círculo} + \text{Radios}$$

Són figures planes amb matríx moment d'inèria resp. eixos 1 i 2, i amb producte d'inèria 12 nul per simetria.

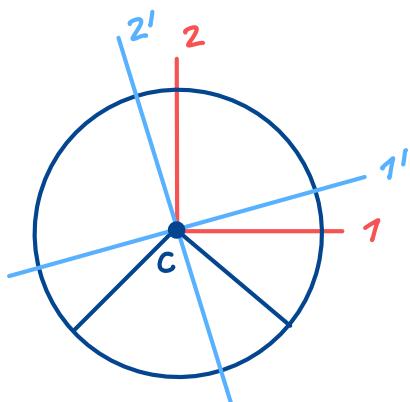
$$\begin{aligned} [\mathbb{I}_{\text{anella}}(c)]_B &= \begin{bmatrix} I' & I' \\ I' & 2I' \end{bmatrix} \\ [\mathbb{I}_{\text{radiis}}(c)]_B &= \begin{bmatrix} I'' & I'' \\ I'' & 2I'' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad [\mathbb{I}(c)]_B = \begin{bmatrix} I & I & 0 \\ I & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

$I = I' + I''$

Ara, ... què passaria si volguessim  $\mathbb{I}(0)$  en una nova base  $B' = (1', 2', 3')$ ?

Mateix que abans

Caldrà fer un canvi de base! Recordem com es fa, d'àlgebra lineal:



### Canvi de base d'un tensor d'inèrcia

$$[\mathbb{I}(P)]_{B'} = [S]^{-1} [\mathbb{I}(P)]_B [S]$$

on:

$$S = \left[ \begin{array}{c} \text{per columnes: els versors de la} \\ \text{base } B' \text{ expressats en base } B \end{array} \right]$$

Ara bé, en el cas de l'exemple l'eix 3 no canvia, i per tant, en passar de  $B$  a  $B'$ , només canviarià el quadrant superior esquerre de  $[\mathbb{I}(C)]$ . Com que, a més, aquest quadrant és de la forma  $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ , és invariant a rotacions al voltant de l'eix 3. Efectivament:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Quadrant} \\ \text{superior esquerre} \\ \text{de } \mathbb{I}(C) \end{array} \right]_{B'} = S^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} S = \underbrace{I \cdot S^{-1} S}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}_B$$

El que teníem

$S = \text{matríu de canvi de base } 12 \rightarrow 1'2'$   
(versors de  $1'2'$  en base 12)

Per tant:

$$[\mathbb{I}(C)]_{B'} = [\mathbb{I}(C)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

Invariant a rotacions  
al voltant de l'eix 3

Acabem de descobrir una nova propietat:

PROPIETAT: Quan en un sólid  $S$  les direccions  $i, j$  són DPI per a un punt  $O$ , i  $I_{ii}(O) = I_{jj}(O) = I$ , el tensor d'inèrzia de  $S$  a  $O$  és invariant sota rotacions al voltant de la dir.  $K$ :

$$\left[ \begin{matrix} II(O) \\ i'j'K \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} II(O) \\ ijk \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{KK} \end{matrix} \right]$$

*Invariant a rotacions al voltant de l'eix K*

### ROTOR SIMÈTRIC

Quan es compleix l'anterior propietat es diu que el sólid és un rotor simètric per al punt O en el pla  $ij$ .

És directe de veure que, en aquesta situació,

$$\text{Si } \bar{\Omega}_{RTO}^{\text{sòlid}} \text{ és } \parallel \text{ a } \begin{cases} \text{pla } ij \\ \text{o dir } K \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\bar{H}_{RTO}^{\text{sòlid}}(O)}_{\text{Té implicacions dinàmiques}} \parallel \bar{\Omega}_{RTO}^{\text{sòlid}}$$

(v. + endavant)

Així doncs, el sólid de l'exemple anterior és un rotor simètric per al punt C.

Ara que sabem què és un **rotor simètric**... què deu ser un **rotor esfèric**?

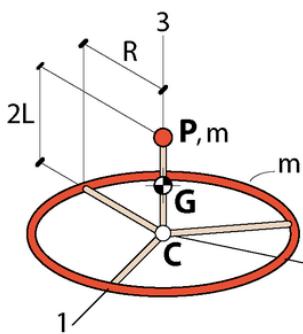
## ROTOR ESFÈRIC

Quan un sòlid té els tres moments principals d'inèrzia iguals per a un punt  $O$ ,  $\mathbf{II}(O)$  és de la forma  $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ , i és invariant a qualsevol canvi de base. Es diu que el sòlid és un rotor esfèric per a  $O$ .

En un rotor esfèric  $\overline{\mathbf{H}}_{RTO}^{\text{sòlid}}(O) \parallel \overline{\boldsymbol{\Omega}}_{RTO}^{\text{sòlid}}$  sempre !

### Exemple D5.9: rotor esfèric

El sòlid està format per una anella homogènia, de massa  $2m$ , i una partícula  $\mathbf{P}$  de massa  $m$ . Les barres que uneixen aquests elements són de massa negligible.



El tensor a  $\mathbf{C}$  és la suma de dos tensors:

$$\mathbf{II}(\mathbf{C}) = \mathbf{II}^{\text{part}}(\mathbf{C}) + \mathbf{II}^{\text{anella}}(\mathbf{C}).$$

El de la partícula és immediat:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1(\mathbf{P}) &= \delta_2(\mathbf{P}), \delta_3(\mathbf{P}) = 0 \\ x_1(\mathbf{P}) &= x_2(\mathbf{P}) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\mathbf{II}^{\text{part}}(\mathbf{C})]_B = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ja que l'anella és un sòlid pla i simètric respecte de l'eix 1 o del 2, la propietat 1 i la propietat 3 condueixen a:

$$[\mathbf{II}^{\text{anella}}(\mathbf{C})]_B = \begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 \\ 0 & 0 & 2I_a \end{bmatrix}.$$

El sòlid és un rotor simètric per a  $\mathbf{C}$  ja que té dos moments principals iguals:

$$[\mathbf{II}(\mathbf{C})]_B = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 \\ 0 & 0 & 2I_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p + I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_p + I_a & 0 \\ 0 & 0 & 2I_a \end{bmatrix}.$$

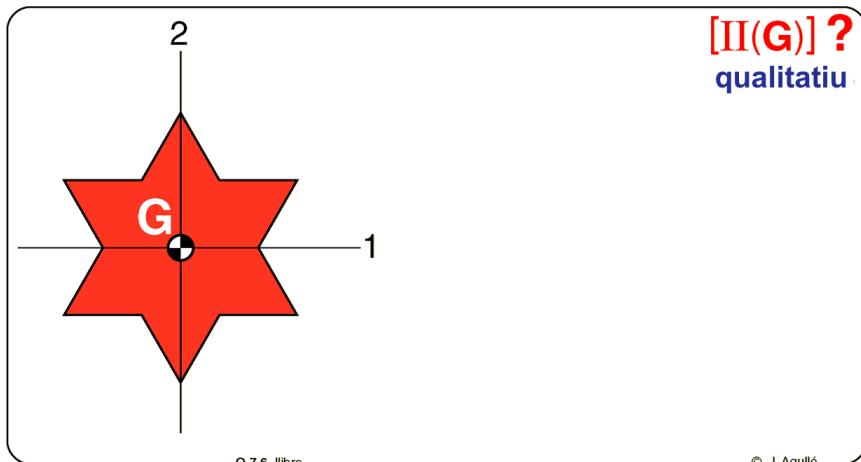
L'expressió quantitativa del tensor no requereix acudir a les taules:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1(\mathbf{P}) &= \delta_2(\mathbf{P}) = R \\ \delta_3(\text{dm} \in \text{anella}) &\Rightarrow 2I_a = 2mR^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\mathbf{II}(\mathbf{C})]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} mR^2$$

Es tracta d'un rotor esfèric, i per tant  $\overline{\mathbf{H}}_{RTC}(\mathbf{C})$  sempre és paral·lel a  $\overline{\boldsymbol{\Omega}}_T^S$ :

$$\overline{\mathbf{H}}_{RTC}(\mathbf{C}) = \mathbf{II}(\mathbf{C}) \overline{\boldsymbol{\Omega}}_T^S = 2mR^2 \overline{\boldsymbol{\Omega}}_T^S.$$

↪ T és la RG habitual en aquesta assignatura



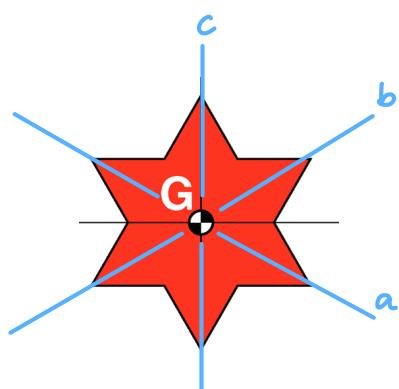
En ser un sòlid pla, dir. 3 és DPI, i  $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ . A més, en ser l'eix 2 de simetria,  $I_{12} = 0$ . Per tant :

$$II(G) = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

Ara bé,  $I_{11} \geq I_{22}$ ? A priori, és difícil de saber! Però es pot invocar la següent propietat (\*):

PROPIETAT (Equidistribució de massa al voltant de 3 eixos copланaris)

Quan un sòlid té 3 o més moments d'inèrcia en un matríx pla ij iguals per a un punt O, també és un rotor simètric per a O.

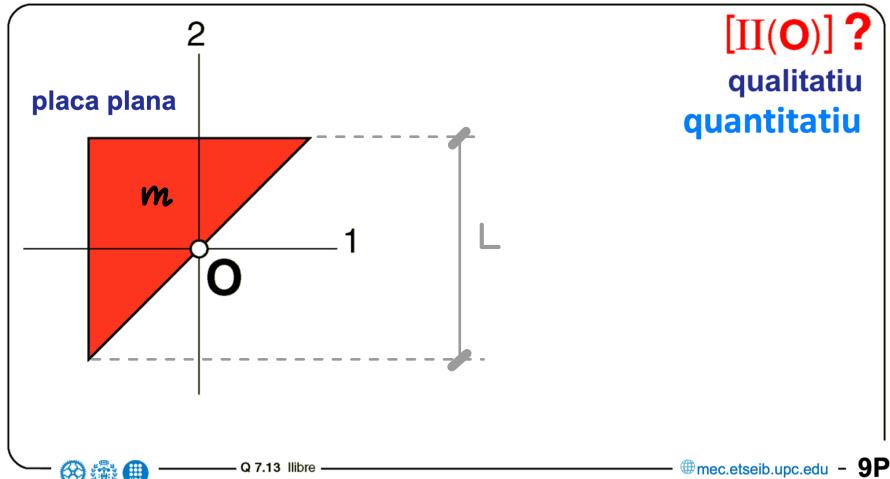


Clarament,  $I_{aa} = I_{bb} = I_{cc}$   
i, per l'anterior propietat, el sòlid és un rotor simètric a G:

$$II(G) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

Rotor Simètric a G

(\*) La demostració és feixuga i ens la saltarem



Amb aquest exemple començarem a practicar l'obtenció del tensor quantitatius. Però cal començar sempre pel qualitatius!



Q 7.13 llibre

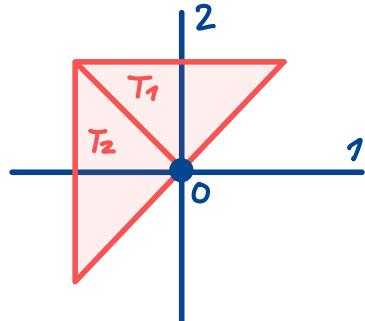
[mec.etseib.upc.edu](http://mec.etseib.upc.edu) - 9P

### Tensor qualitatius

Figura plana. Tensor té la forma

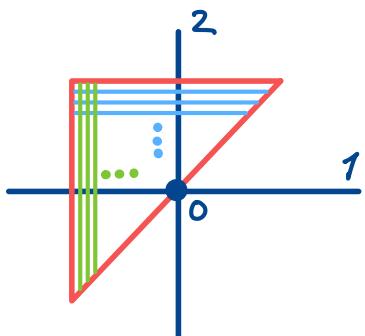
$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

Però  $I_{12} = 0$ , perquè els triangles  $T_1$  i  $T_2$  tenen, cadascun,



producte d'inèrcia ( $1,2$ ) nul degut a les simetries respecte els eixos 1 i 2.

A més,  $I_{11} = I_{22}$ , ja que els dm blaus i verds tenen la mateixa contribució a  $I_{11}$  i  $I_{22}$ , respectivament



Ergo tensor qualitatius és :

$$[II(O)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

rotor  
simètric  
a 0

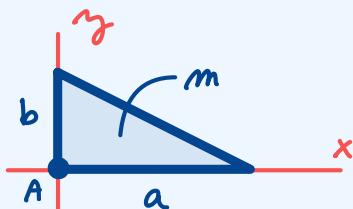
## Tensor quantitatiu

Els moments i productes d'inèria dels sòlids més habituals estan tabulats (vegeu formulari) però el sòlid que estigem estudiant sovint serà una combinació dels sòlids tabulats, i el punt o els eixos indicats a la taula podrien no coincidir amb els que ens calen. Caldrà aplicar la taula amb habilitat, i per a això:

Els clau haver determinat abans la forma qualitativa del tensor

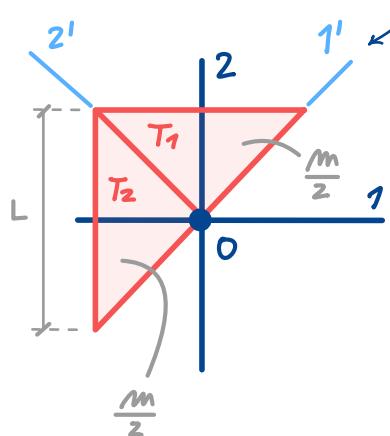
!

Per a l'exm. anterior momèns ens cal  $\mathbf{I}$ . De la taula veiem que:



$$\mathbf{II}(A) = \begin{cases} I_{xx} = \frac{1}{6} m b^2 & (\blacksquare) \\ I_{xy} = -\frac{1}{12} m a b \end{cases}$$

Els eixos  $x, y$ , i el punt  $A$  de la taula no coincideixen amb els que tenim, però el nostre sòlid és rotor simètric! Per tant, el tensor en  $B' = (1', 2', 3)$  també serà  $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$



Veient el sòlid com  $T_1 + T_2$ , i aplicant  $(\blacksquare)$  a  $T_1$  i  $T_2$ :

$$I = I_{1'} = 2 \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{m}{2} \right) \left( \frac{L}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \frac{1}{72} m L^2$$

En conclusió:

$$[\mathbf{II}(O)]_B = \frac{m L^2}{72} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

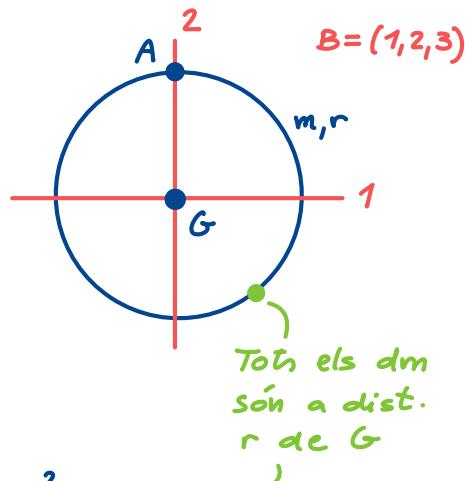
## Teorema de Steiner

No sempre trobarem tanta sort! Sovint passarà que el punt al qual referim el tensor és diferent del de la taula. Afortunadament, el teorema de Steiner ens permet fer "canvis de punt":

$$\mathbb{I}(Q) = \underbrace{\mathbb{I}(G)}_{\text{Tensor per al punt } Q} + \underbrace{\mathbb{I}^\oplus(Q)}_{\substack{\text{Tensor per al centre d'inèrcia } G \\ \text{Tensor a } Q \text{ de tota la massa del sólid concentrada a } G.}}$$

Exemple:

Per a l'anell de la fig., homogeni de massa  $m$ , calculeu  $[\mathbb{I}(A)]_B$

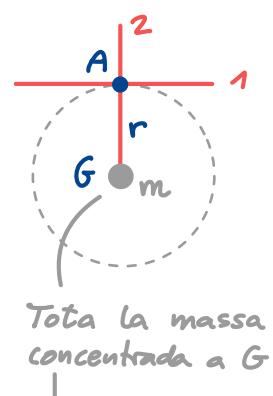


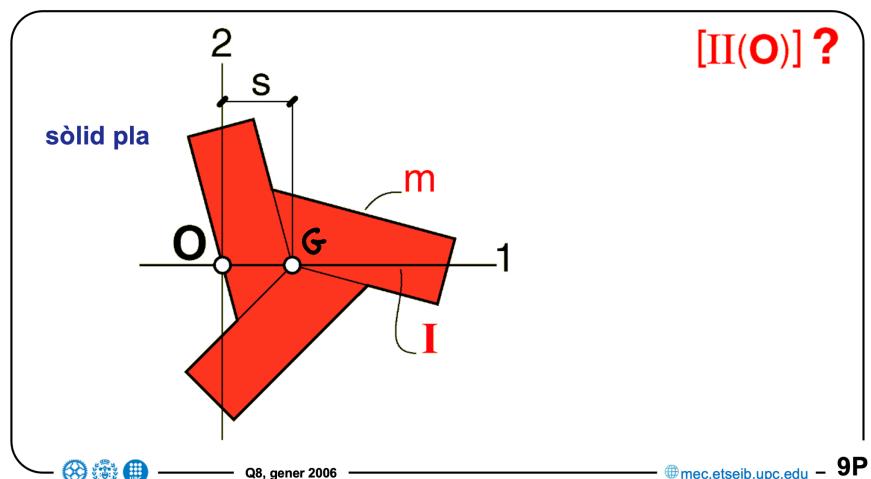
El tensor a  $G$  és fàcil:

$$\mathbb{I}(G) = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix} \quad I_3 = \underbrace{mr^2}_{2I}$$

El tensor a  $A$  s'obté via Steiner:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(A) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & \frac{mr^2}{2} & mr^2 \\ \frac{mr^2}{2} & \frac{mr^2}{2} & mr^2 \\ mr^2 & mr^2 & mr^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}(G)} + \underbrace{\begin{bmatrix} mr^2 & 0 & mr^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ mr^2 & 0 & mr^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}^\oplus(A)} \\ &= mr^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



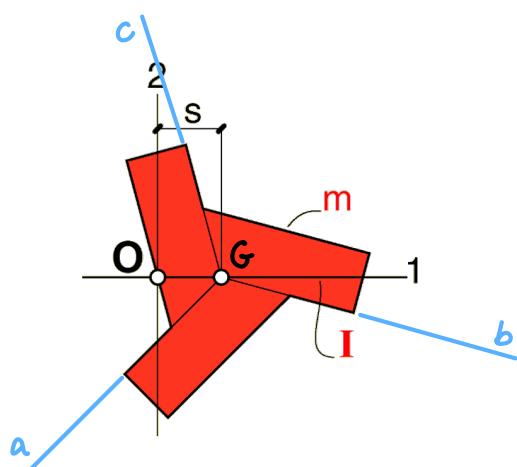


Practiquem Steiner  
una mica més...

Clarament:  
G és el centre  
d'inèrcia del sòlid!

Sòlid pla  $\Rightarrow$  Dir. 3 és DPI (independentment del punt triat)

Tenim 3 eixos del pla 12 amb = moment d'inèrcia ( $a, b, c$ )



però parten per G, no per O.  
És a dir, el sòlid és rotor  
simètric per a G, amb

$$[I(G)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

En ser rotor simètric, el moment  
d'inèrcia respecte qualquer eix

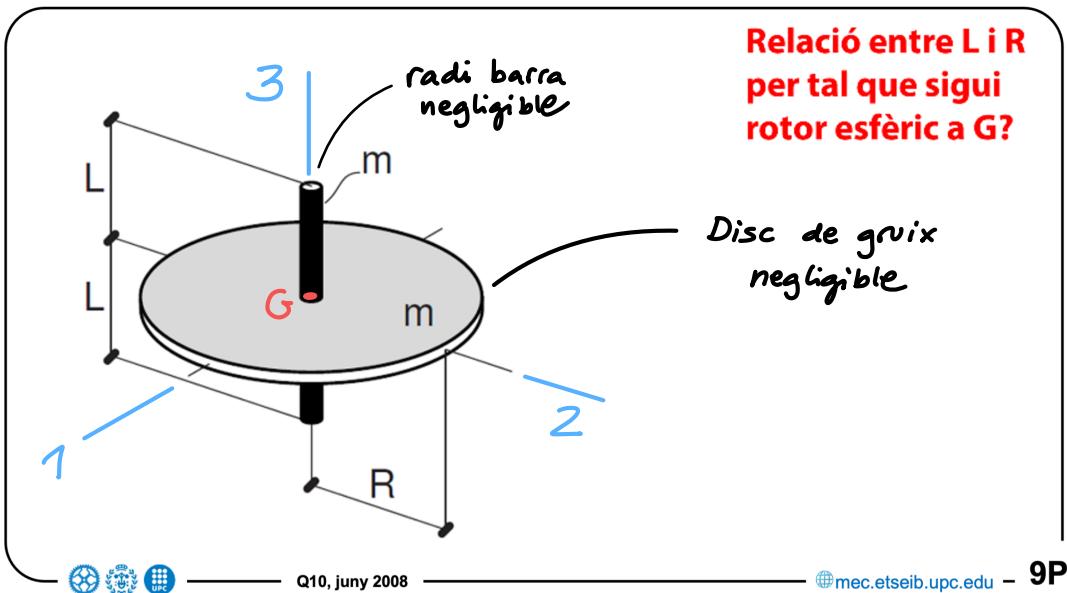
per G és igual. Com que ens donen el moment resp. eix 1  
(que és  $I$ ), utilitzem aquest a  $[I(G)]_B$

Ara només cal aplicar Steiner per obtenir  $[I(o)]_B$ :

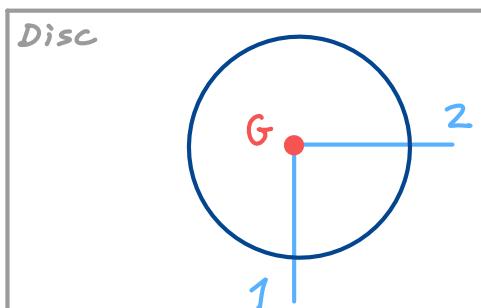
$$[I(o)]_B = [I(G)]_B + [I^\oplus(o)]_B =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & ms^2 & ms^2 \\ ms^2 & 0 & ms^2 \\ ms^2 & ms^2 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Tota la massa concentrada a } G} = \begin{bmatrix} I & I+ms^2 & I+ms^2 \\ I+ms^2 & I+2ms^2 & I+2ms^2 \\ I+ms^2 & I+2ms^2 & I+4ms^2 \end{bmatrix}$$

Tota la massa  
concentrada a G



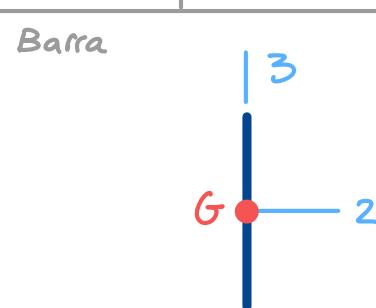
$$[I(G)]_B = [I_{\text{disc}}(G)]_B + [I_{\text{barra}}(G)]_B =$$



$$[I_{\text{disc}}(G)]_B = \begin{bmatrix} I' & I' \\ I' & 2I' \end{bmatrix} =$$

$$I' = \frac{1}{4}mR^2 \text{ (taules)}$$

$$= \frac{mR^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



$$[I_{\text{barra}}(G)]_B = \begin{bmatrix} I'' & I'' \\ I'' & 0 \end{bmatrix} =$$

$$I'' \leftarrow \text{Taules (cilindre)} \\ I'' = m \left( \frac{1}{4}0^2 + \frac{(2L)^2}{12} \right) = \frac{mL^2}{3}$$

$$= \frac{mL^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} & \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} \\ \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} & 2 \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix}$$

Han de ser = perquè sigui rotor esfèric

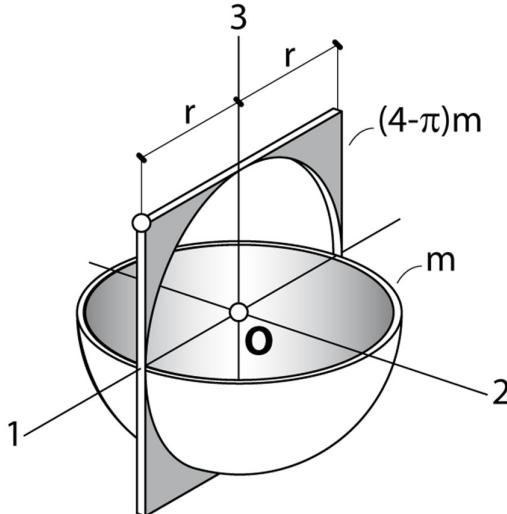
Caldrà que

$$\cancel{\frac{mR^2}{4}} + \cancel{\frac{mL^2}{3}} = \cancel{\frac{mR^2}{2}}$$

$$3R^2 + 4L^2 = 6R^2$$

$$4L^2 = 3R^2$$

$$\frac{L}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



**IV [4p]** El sòlid està format per una placa prima quadrada amb un forat circular, i una semiclosca esfèrica prima. Totes dues peces són homogènies. La closca té massa  $m$ , i la placa foradada té massa  $(4 - \pi)m$ . Quin és el tensor d'inèrcia al punt  $\mathbf{O}$ ? Fes-ne primer l'avaluació qualitativa, i després la quantitativa.

NOTA: El forat és equivalent a un disc de massa negativa.

## RESOLUCIÓ

### Avaluació qualitativa

$$[\mathbf{II}_{\text{placa}}(\mathbf{O})] + [\mathbf{II}_{\text{closca}}(\mathbf{O})] = \begin{bmatrix} I' & 0 & 0 \\ 0 & 2I' & 0 \\ 0 & 0 & I' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I'' & 0 & 0 \\ 0 & I'' & 0 \\ 0 & 0 & I''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'+I'' & 0 & 0 \\ 0 & 2I'+I'' & 0 \\ 0 & 0 & I'+I''' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

És clar que  $I_{11} < I_{22}$ , però no és evident si  $I_{33}$  és més gran o més petit que  $I_{11}$  o  $I_{22}$ .

### Avaluació quantitativa

El tensor d'inèrcia de la placa foradada es pot obtenir superposant el d'una placa quadrada sense forat, amb massa  $m_1$ , i el d'una placa circular amb massa  $m_2$  negativa (equivalent al forat):

La relació de masses ( $m_1/|m_2|$ ) ha de ser la mateixa que la de les àrees d'aquestes dues peces:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{m_1}{|m_2|} = \frac{(2r)^2}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi} \\ m_1 - |m_2| = (4 - \pi)m \end{array} \right\} \Rightarrow m_1 = 4m, m_2 = \pi m$$

$$[\mathbf{II}_{\text{placa}}(\mathbf{O})] = \frac{1}{3}m_1r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}m_2r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}4mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\pi mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per altra banda, les taules diuen que la closca és un rotor esfèric a  $\mathbf{O}$ . Per tant:

$$[\mathbf{II}_{\text{closca}}(\mathbf{O})] = \frac{2}{3}mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \text{ Sumant els dos tensors:}$$

$$[\mathbf{II}(\mathbf{O})] = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}, \text{ amb } I_{11} = I_{33} = \left( \frac{16 - 3\pi}{12} \right) mr^2 + \frac{2}{3}mr^2 = \left( \frac{8 - \pi}{4} \right) mr^2, I_{22} = \left( \frac{20 - 3\pi}{6} \right) mr^2$$