4P

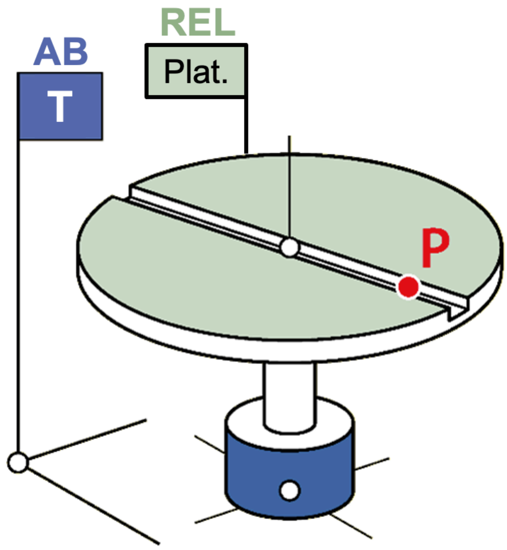
Versió 0.9.1 (preliminar)

Composició de moviments

Lluís Ros
https://lluisros.github.io/mecanica

Recordem:

Relació entre vel. i accel. en 2 refs.



$$\overline{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P}) + \overline{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P})$$

$$\text{amb} \quad \overline{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P} \in \text{REL})$$

$$\overline{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{a}}_{REL}(\mathbf{P}) + \overline{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) + \overline{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P})$$

$$\text{amb} \quad \begin{cases} \overline{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P} \in \text{REL}) \\ \overline{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P}) = 2\overline{\Omega}^{REL}_{AB} \times \overline{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P}) \end{cases}$$

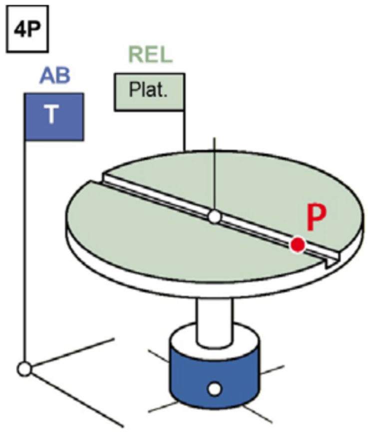
IMPORTANT:

Sempre cal declarar les referències.

Quan feu composició de moviments, cal declarar què feu servir com a referències absoluta i relativa (AB i REL)

Si expresseu els resultats en alguna base, indiqueu a què són fixes les direccions d'aquesta base.

Per il·lustrar les relacions anteriors, apliquem-les al següent exemple:



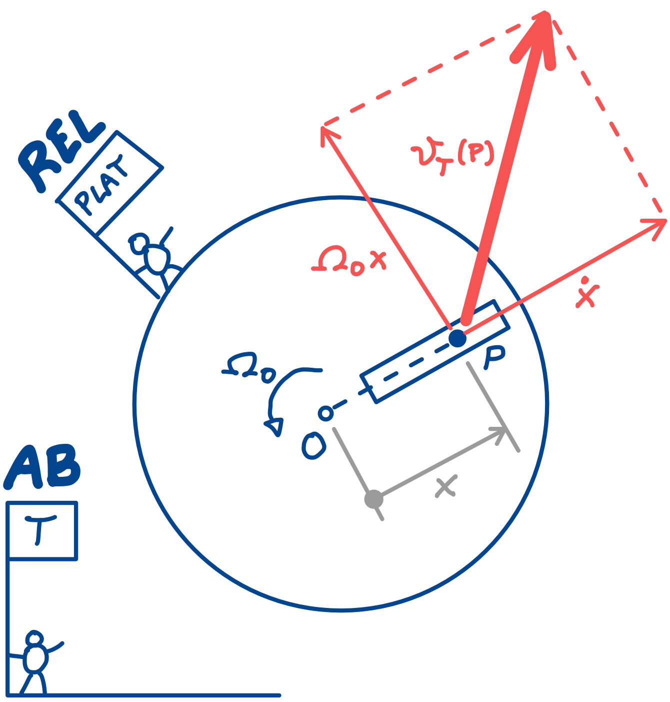
La plataforma gira amb velocitat angular Ω_0 constant respecte del terra (T). La partícula es mou radialment respecte de la plataforma. Calcula $\bar{v}_T(\mathbf{P})$, $\bar{a}_T(\mathbf{P})$.

$\bar{v}_T(P)$

Comp. mov. amb

REL = PLAT
AB = T

Declareu sempre les refs. AB i REL



$$\boxed{\bar{v}_{AB}(P)} = \overbrace{\bar{v}_{REL}(P)}^{\text{L'observada des de REL}} + \overbrace{\bar{v}_{ar}(P)}^{\text{La vel. absoluta de P si P fos fix a REL}} =$$

$$= \boxed{(\nearrow \dot{x}) + (\nwarrow \Omega_0 x)}$$

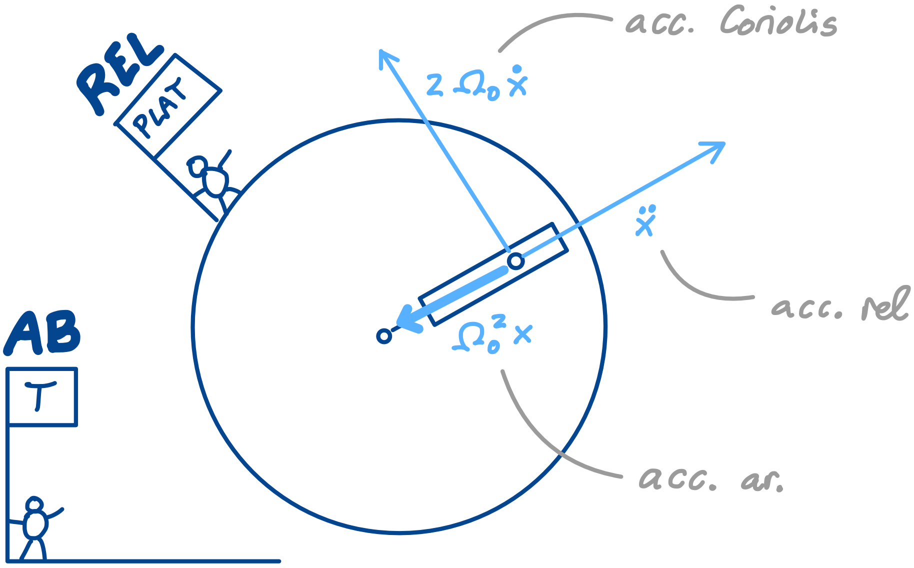
Definim la coordenada x per posicionar P resp. la ref. PLAT.

$\bar{a}_T(P)$

$$\boxed{\bar{a}_{AB}(P)} = \bar{a}_{REL}(P) + \bar{a}_{ar}(P) + \underbrace{\bar{a}_{cor}(P)}_{2\,\bar{\Omega}^{REL}_{AB} \times \bar{v}_{REL}(P)} =$$

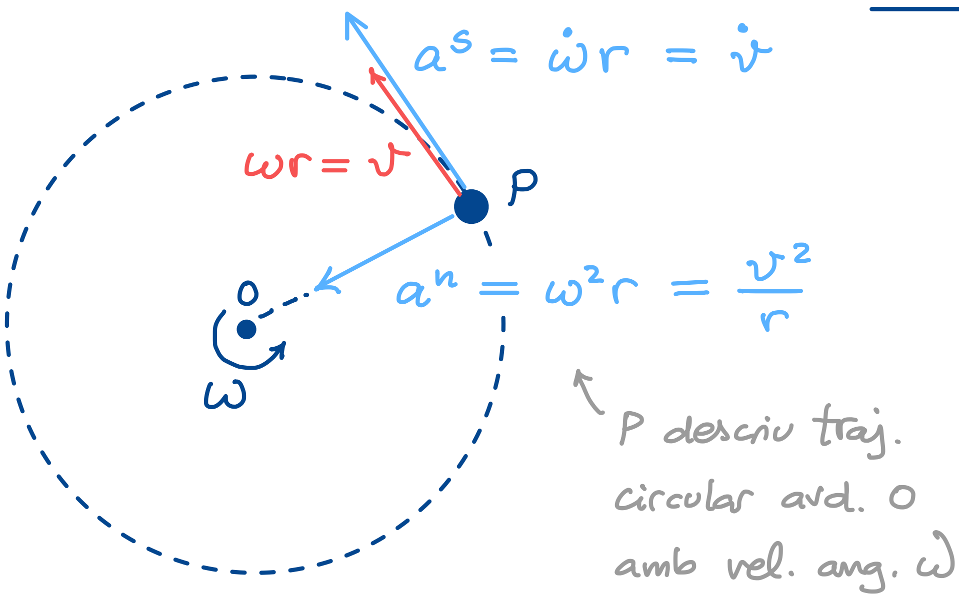
$$= (\nearrow \ddot{x}) + \underbrace{(\swarrow \Omega_0^2 x)}_{(*)} + \underbrace{2\left[(\circlearrowleft \Omega_0) \times (\nearrow \dot{x})\right]}_{(\nwarrow 2\Omega_0 \dot{x})} =$$

$$\boxed{= \left[\nearrow(\ddot{x} - \Omega_0^2 x)\right] + \nwarrow(2\Omega_0 \dot{x})}$$



(*)

Recordatori components intrínseques de l'accel.:

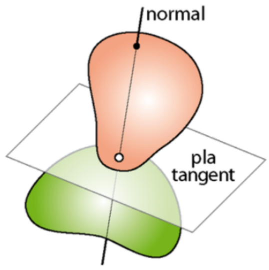
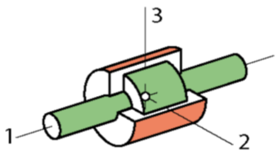
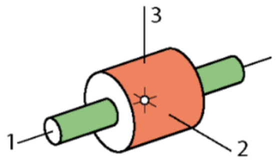
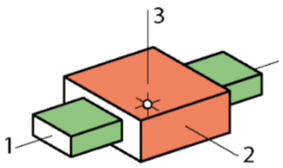
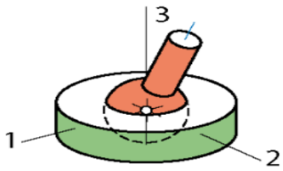
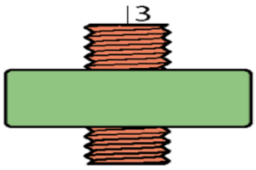
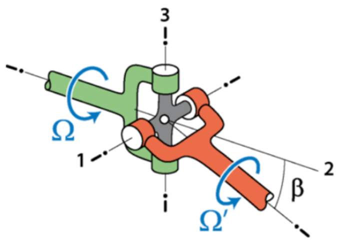


Cal saber-s'ho bé!

Recordem

Enllaços habituals entre dos sòlids

(vegeu Wikimec C2.8)

	**Contacte puntual amb lliscament [Permet 5 GL]:** Permet tres rotacions independents entre els dos sòlids (al voltant de la direcció normal i de les dues tangencials), i dues translacions independents (al llarg de les dues direccions tangencials). **Contacte puntual sense lliscament [Permet 3 GL]:** Permet tres rotacions independents entre els dos sòlids (al voltant de la direcció normal i de les dues tangencials).
	**Enllaç de revolució (articulació) [Permet 1 GL]:** Permet una rotació entre els dos sòlids al voltant de l'eix de revolució (eix 1 a la figura).
	**Enllaç cilíndric [Permet 2 GL]:** Permet una rotació entre els dos sòlids al voltant de l'eix 1, i una translació (desplaçament sense rotació) al llarg de l'eix 1.
	**Enllaç prismàtic [Permet 1 GL]:** Permet una translació entre els dos sòlids al llarg de l'eix 1.
	**Enllaç esfèric (ròtula esfèrica) [Permet 3 GL]:** Permet tres rotacions independents entre els dos sòlids al voltant dels eixos 1, 2, 3.
	**Enllaç helicoidal (enllaç cargolat) [Permet 1 GL]:** Permet una rotació entre els dos sòlids al voltant de l'eix 3; aquesta rotació provoca un desplaçament al llarg de l'eix 3. La relació entre la rotació i el desplaçament ve donada pel pas de rosca *e* [mm/volta].
	**Junta Cardan (junta universal o de creueta) [Permet 2 GL]:** Permet dues rotacions independents entre els dos sòlids al voltant dels eixos 1, 3. L'enllaç és indirecte, a través de la creueta, que es considera un sòlid auxiliar d'enllaç (**Video C2.2**).

Vector general o particularitzat?

A partir d'ara caldrà tenir ben present la diferència entre un vector general (o "pel·lícula") i un vector particularitzat (o "foto"):

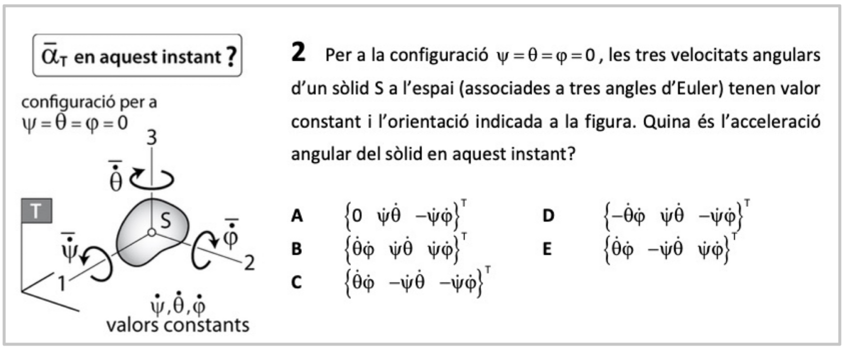
- Vector **general**, o "pel·lícula" = Un que és vàlid per a tota configuració del sistema (per a tot instant de temps). Són els vectors obtinguts a partir d'una configuració genèrica del sistema (per a valors "no especials" de les coordenades x, ψ, θ, φ, $\ldots$ que defineixen la configuració). N'és un exemple el vector $\overline{\mathbf{v}}_{\mathsf{T}}(\mathbf{C})$ en el problema de la placa articulada giratòria d'avui.

- Vector **particularitzat**, o "foto" = Un que només és vàlid per a una configuració especial del sistema (per a un instant concret). N'és un exemple el vector $\overline{\mathbf{v}}_{\mathsf{T}}(\mathbf{P})$ en l'exercici del disc de 2 GL (penúltim d'avui), quan $\mathbf{P}$ passa per la posició més alta.

Els vectors pel·lícula sempre es poden derivar per obtenir velocitats o acceleracions. Per exemple, a la placa articulada giratòria podem derivar $\overline{\mathbf{v}}_{\mathsf{T}}(\mathbf{C})$ per obtenir $\overline{\mathbf{a}}_{\mathsf{T}}(\mathbf{C})$. Tot i que a classe obtenim $\overline{\mathbf{a}}_{\mathsf{T}}(\mathbf{C})$ per composició de moviments, en aquestes notes també l'obtinc derivant $\overline{\mathbf{v}}_{\mathsf{T}}(\mathbf{C})$ i el resultat és idèntic!

Els vectors foto, en canvi, no es poden derivar en general. En el problema del disc de 2 GL (vegeu més endavant), per trobar $\overline{\mathbf{a}}_{\mathsf{T}}(\mathbf{P})$ no podem derivar la velocitat $\overline{\mathbf{v}}_{\mathsf{T}}(\mathbf{P})$ obtinguda per composició perquè aquesta només és vàlida per a l'instant en que $\mathbf{P}$ passa pel punt més alt.

En determinades situacions, però, hi haurà vectors foto que sí que podrem derivar perquè sabrem com evolucionen a partir de l'instant de la "foto". N'és un exemple el càlcul de $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathsf{S}}_{\mathsf{T}}$ en la següent qüestió:



2 Per a la configuració $\psi=\theta=\varphi=0$, les tres velocitats angulars d'un sòlid S a l'espai (associades a tres angles d'Euler) tenen valor constant i l'orientació indicada a la figura. Quina és l'acceleració angular del sòlid en aquest instant?

A $\{0 \;\; \dot\psi\dot\theta \;\; -\dot\psi\dot\varphi\}^{\mathsf{T}}$

B $\{\dot\theta\dot\varphi \;\; \dot\psi\dot\theta \;\; \dot\psi\dot\varphi\}^{\mathsf{T}}$

C $\{\dot\theta\dot\varphi \;\; -\dot\psi\dot\theta \;\; -\dot\psi\dot\varphi\}^{\mathsf{T}}$

D $\{-\dot\theta\dot\varphi \;\; \dot\psi\dot\theta \;\; -\dot\psi\dot\varphi\}^{\mathsf{T}}$

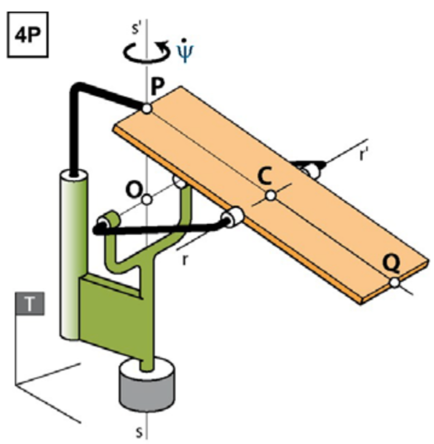
E $\{\dot\theta\dot\varphi \;\; -\dot\psi\dot\theta \;\; \dot\psi\dot\varphi\}^{\mathsf{T}}$

Per teoria d'angles d'Euler, en aquest cas sabem perfectament com són les velocitats angulars dels vectors $\overline{\dot{\boldsymbol{\psi}}}$, $\overline{\dot{\boldsymbol{\theta}}}$ i $\overline{\dot{\boldsymbol{\varphi}}}$ que conformen $\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathsf{S}}_{\mathsf{T}}$. Per tant, podem obtenir $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathsf{S}}_{\mathsf{T}}$ derivant aquests vectors geomètricament, tot i tenir-los donats per a la configuració especial que veiem a la figura. Vegeu la solució online a:

`https://lluisros.github.io/mecanica/problemes/3P_extra.pdf`

La denominació vector "pel·lícula" o "foto" és del tot informal. Quan hagueu de ser formals digueu vector "general" o "particularitzat", respectivament.

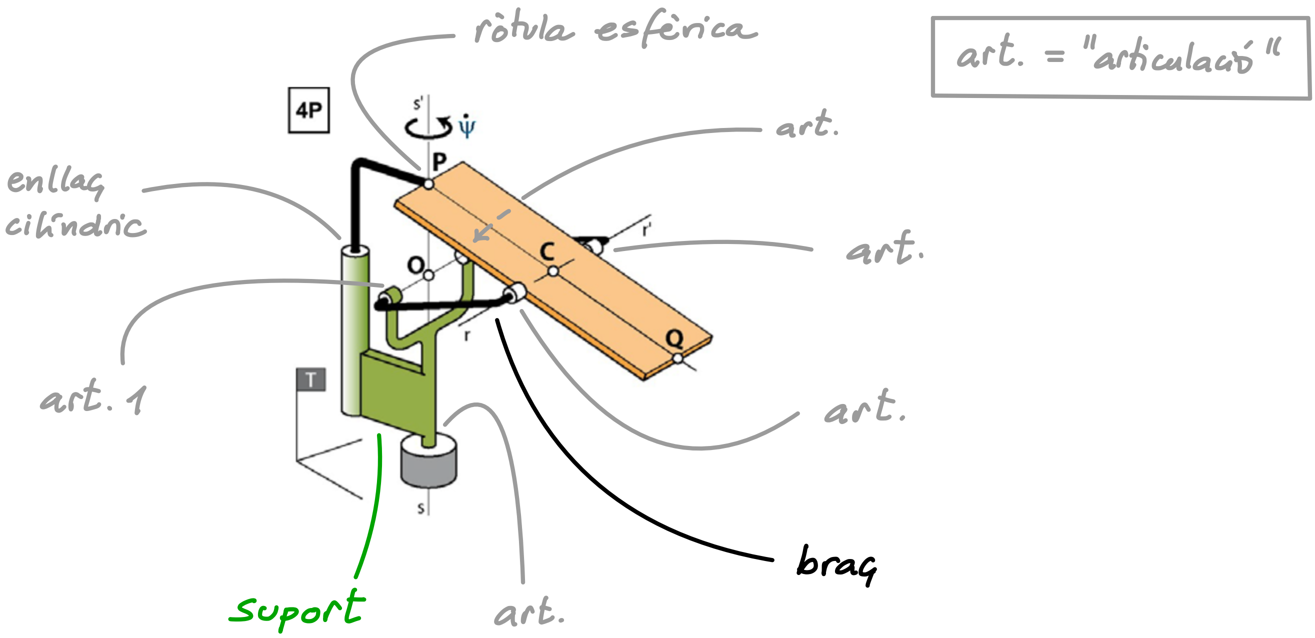
Placa articulada giratòria



La placa està articulada a tres barres, articulades respecte d'un suport que gira amb velocitat angular $\dot{\psi}$ constant respecte del terra (T). Calcula $\bar{v}_T(\mathbf{C})$, $\bar{a}_T(\mathbf{C})$.

Suposarem: $|\overline{OC}| = |\overline{CP}| = L$

Sempre començarem entenent com es pot moure el sistema i comptant el nº de graus de llibertat (GL) que té. A tal efecte cal entendre primer com són els enllaços entre els seus sòlids:



Si aturem la rotació $(\Uparrow\dot{\psi})$ del suport resp. T, la placa encara es pot moure (P es pot desplaçar lliurement encara, al llarg de l'eix vertical s-s'). Si ara aturem la rotació relativa de l'art. 1 (del braç resp. el suport) tot queda aturat. Per tant, el sist. té 2 GL. Aquests GL corresponen a $\dot{\psi}$ i $\dot{\theta}$, on θ és l'angle definit al dibuix següent:

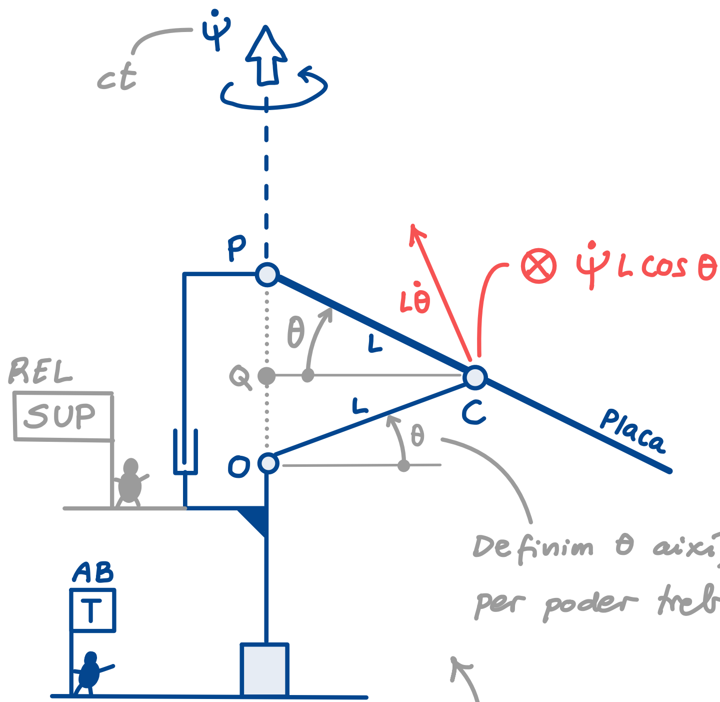
$\bar{v}_T(C)$

Podríem calcular $\bar{v}_T(C)$ derivant $\overline{OC}$, ja que és un vec. pos. adient per a C (perquè $O \in T$) i alhora és un vec. general (perquè la configuració del dibuix és genèrica). Tanmateix, calcularem $\bar{v}_T(C)$ per composició de moviments, per practicar aquest nou mètode.

Fem un dibuix 2D del sistema pq. tot quedi clar.

Declarem refs:

REL = suport (SUP)
AB = T



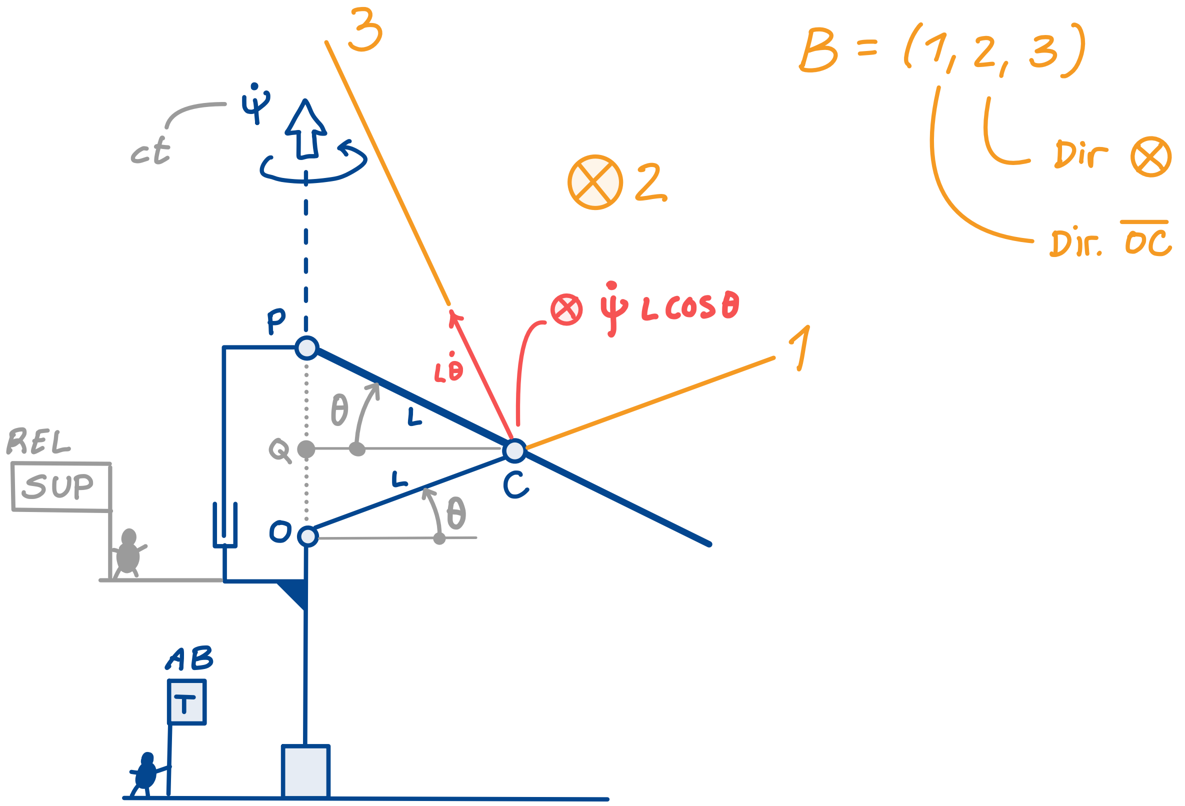
Definim θ així, per poder treballar

Pinto aquests vecs. al dibuix, en vermell

$$\underset{\substack{\parallel \\ T}}{\bar{v}_{AB}}(C) = \bar{v}_{REL}(C) + \bar{v}_{ar}(C) =$$

$$= \underbrace{(\nwarrow L\dot\theta)}_{\text{Respecte REL, C descriu una traj. circular al voltant de O}} + \underbrace{(\otimes\ \dot\psi L\cos\theta)}_{\text{Si fixem C a REL (bloquejant } \theta\text{), C descriu una traj. circular al voltant de Q}} \qquad (1)$$

Si volem expressar $\bar{v}_{AB}(C)$ en alguna base, triem tres direccions ortogonals que facilitin la projecció de ($\nwarrow L\dot{\theta}$) i ($\otimes \dot{\psi} L\cos\theta$). Triem, per exm., la base B:



En aquesta base:

$$\left\{\bar{v}_T(C)\right\}_B = \underbrace{\left\{\begin{matrix} 0 \\ \dot{\psi} L\cos\theta \\ L\dot{\theta} \end{matrix}\right\}} \qquad (2)$$

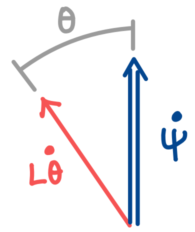
És un vec. general (o "pel·lícula") ⇒ Si volem, el podem derivar per obtenir $\bar{a}_T(C)$, però calcularem $\bar{v}_T(C)$ per composició de moviments per practicar:

$\bar{a}_T(G)$

$$\boxed{\bar{a}_{AB}(C)} = \bar{a}_{REL}(C) + \bar{a}_{ar}(C) + \overbrace{\bar{a}_{Cor}(C)}^{2\,\bar{\Omega}^{REL}_{AB} \times \bar{v}_{REL}(C)} =$$

Vaig pintant cada terme al dibuix de baix, en blau

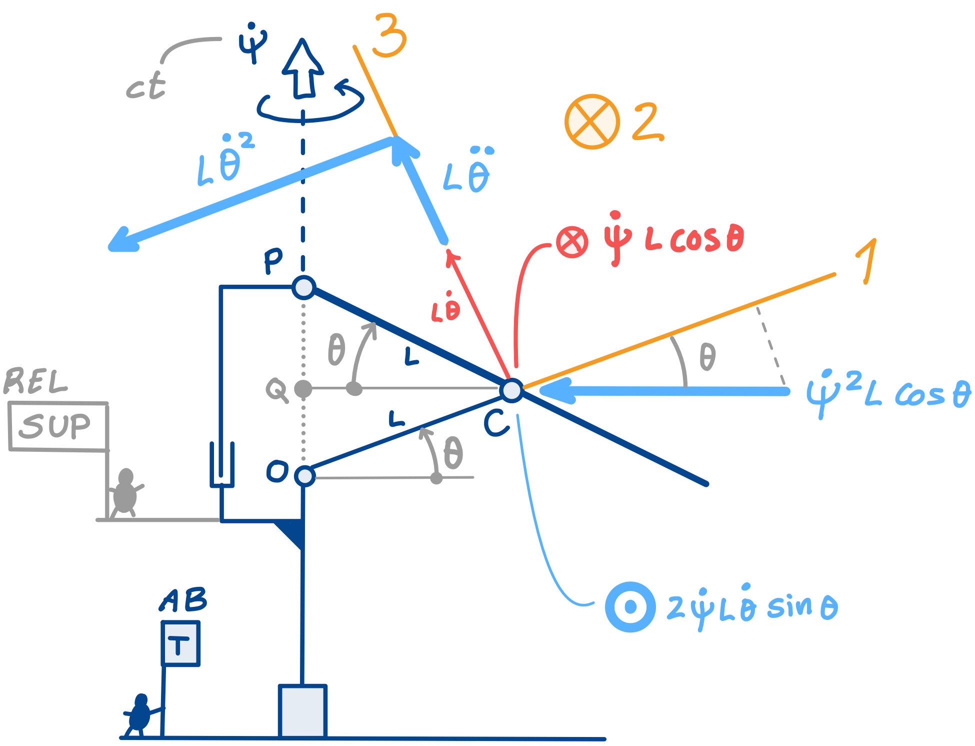
$$= \overbrace{(\nwarrow L\ddot{\theta}) + (\swarrow \dot{\theta}^2 L)}^{REL} + \overbrace{(\leftarrow \dot{\psi}^2 L\cos\theta)}^{ar} + \overbrace{2\underbrace{\left[(\Uparrow \dot{\psi}) \times (\nwarrow L\dot{\theta})\right]}_{\odot\, 2\dot{\psi}L\dot{\theta}\sin\theta}}^{Cor} =$$



$$= (\nwarrow L\ddot{\theta}) + (\swarrow \dot{\theta}^2 L) + (\leftarrow \dot{\psi}^2 L\cos\theta) + (\odot\, 2\dot{\psi}L\dot{\theta}\sin\theta)$$

O, expressat en base B, ...

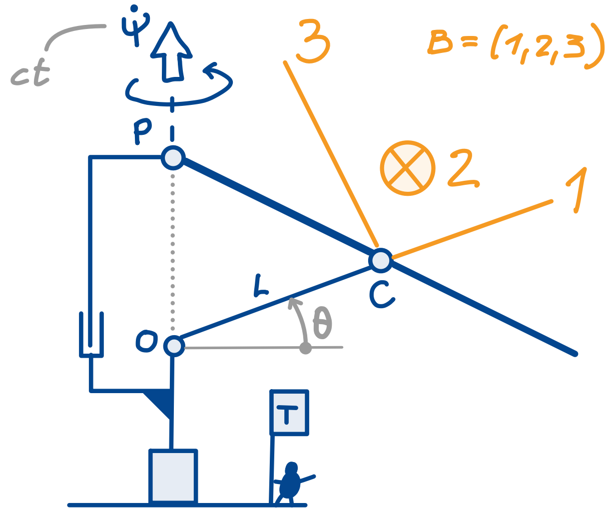
$$\boxed{\left\{\bar{a}_{AB}(C)\right\}_B = \begin{Bmatrix} -L\dot{\theta}^2 - \dot{\psi}^2 L\cos^2\theta \\ -2\dot{\psi}L\dot{\theta}\sin\theta \\ L\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2 L\cos\theta\sin\theta \end{Bmatrix}} \quad (3)$$



Obtenció de $\bar{v}_T(C)$ i $\bar{a}_T(C)$ derivant un vec. pos.

També és una bona solució! Com que $\overline{OC}$ és un vec. pos. general, el podem derivar dues vegades per obtenir $\bar{v}_T(C)$ i $\bar{a}_T(C)$. Fem-ho:

$$\{\overline{OC}\}_B = \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A)$$



$$\{\bar{v}_T(C)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot\psi \sin\theta \\ -\dot\theta \\ \dot\psi\cos\theta \end{Bmatrix}}_{\{\bar\Omega_T^B\}_B} \times \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L\dot\psi\cos\theta \\ L\dot\theta \end{Bmatrix} \quad (B)$$

Coincideix amb l'Eq.(2) d'abans.

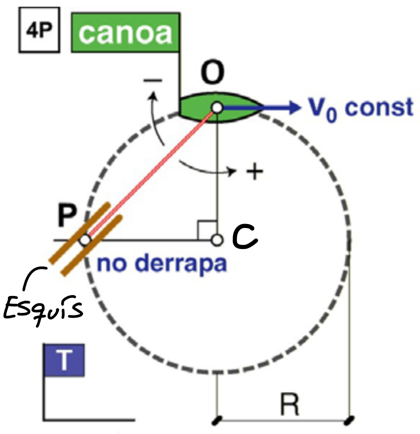
$$\bar\Omega_T^B = \bar\Omega_{\text{suport}}^B + \bar\Omega_T^{\text{suport}} = (\odot\dot\theta) + (\Uparrow\dot\psi)$$

$$\{\bar\Omega_T^B\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot\psi\sin\theta \\ 0 \\ \dot\psi\cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot\psi\sin\theta \\ -\dot\theta \\ \dot\psi\cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{a}_T(C)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -L\dot\psi\dot\theta\sin\theta \\ \ddot\theta L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot\psi\sin\theta \\ -\dot\theta \\ \dot\psi\cos\theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ L\dot\psi\cos\theta \\ L\dot\theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -L\dot\theta^2 - L\dot\psi^2\cos^2\theta \\ -2L\dot\psi\dot\theta\sin\theta \\ L\ddot\theta + L\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta \end{Bmatrix} \quad (C)$$

Coincideix amb l'Eq. (3) d'abans!



L'esquiador **P** és arrossegat, mitjançant un cable inextensible, per una canoa. La velocitat del punt central **O** respecte del terra (T) és de valor constant v_0. Calcula $\bar{\Omega}^{cable}_{canoa}$.

La canoa descriu, respecte de T, la trajectòria circular indicada, de radi R, al voltant de C ∈ T.

Coses que veiem a priori:

- Esquís no derrapen ⇒ $\bar{v}_T(P)$ té la dir. $\overline{PO}$

- Cable inextensible
- Cable tens

pq P és arrossegat

⇒ Respecte la canoa, P descriu un mov. circular avd O.

⇓

Si sabéssim $\bar{v}_{canoa}(P)$, seria fàcil trobar $\bar{\Omega}^{cable}_{canoa}$, ja que

$$v_{canoa}(P) = \Omega^{cable}_{canoa} \cdot \underbrace{R\sqrt{2}}_{|\overline{OP}|}$$

i el sentit de $\bar{v}_{canoa}(P)$ ens determinaria el de $\bar{\Omega}^{cable}_{canoa}$

Busquem doncs $\bar{v}_{canoa}(P)$, via comp. movim. amb

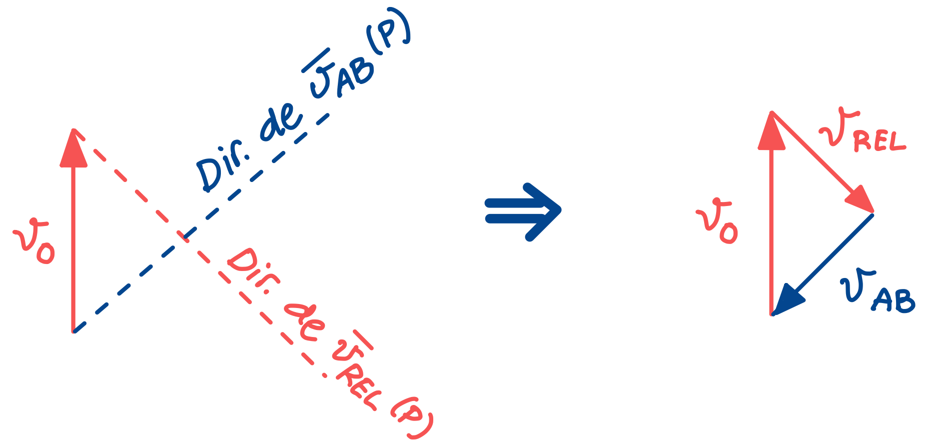
AB = T REL = Canoa

Apuntem l'eq. de comp. de moviments i allò que sabem de cada velocitat(*):

$$\bar{v}_{AB}(P) = \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P)$$

$$\underbrace{(\swarrow\!\!\nearrow v_{AB})}_{\text{Sabem que té la dir. de la recta PO. Desconeixem el seu sentit } (\swarrow \text{ o } \nearrow) \text{ i valor } v_{AB}} = \underbrace{(\nwarrow\!\!\searrow v_{REL})}_{\text{Sabem que té dir. } \perp \text{ a la recta PO, però desconeixem el seu sentit } (\swarrow \text{ o } \nearrow) \text{ i valor } v_{REL}.} + \underbrace{(\uparrow v_0)}_{\text{La sabem completament (si fixem P a la canoa, P tindrà la vel. } \uparrow v_0 \text{ resp. T, ja que podem veure la canoa com una plataf. que gira avd C)}} \qquad (I)$$

De (I) deduïm la següent geometria de velocitats:



Ergo

$$\underset{\text{canoa}}{\bar{v}_{REL}(P)} = (\searrow v_0/\sqrt{2}) \qquad (I)$$

(*) La notació $(\swarrow\!\!\nearrow u)$ indica "vector de valor u apuntant en dir. $\nearrow$ o bé $\swarrow$"

Això implica que $\bar{\Omega}^{cable}_{canoa}$ tindrà sentit $\overset{\curvearrowleft}{\odot}$.

És a dir:

$$\bar{\Omega}^{cable}_{canoa} = \overset{\curvearrowleft}{\odot} \underbrace{\omega}_{\text{pdet}^{(*)}}$$

Ara, com que

$$\bar{v}_{canoa}(P) = \left(\searrow \omega \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \right) \quad (II)$$

Igualant (I) = (II) tenim

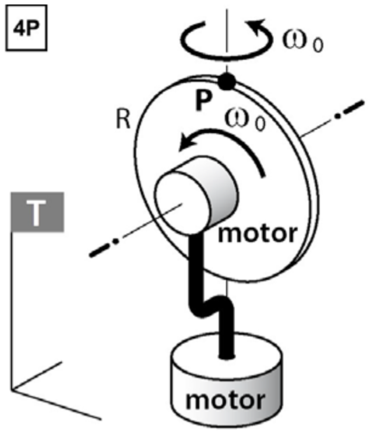
$$\frac{v_0}{\sqrt{2}} = \omega \frac{R}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_0}{R}$$

Per tant

$$\boxed{\bar{\Omega}^{cable}_{canoa} = \overset{\curvearrowleft}{\odot} \frac{v_0}{R}}$$

(*) Per determinar, encara

Disc de 2 GL



El disc gira amb ω_0 constant respecte del suport. El suport gira amb ω_0 constant respecte del terra (T). Calcula $\mathfrak{R}_T(\mathbf{P})$ quan **P** es troba a la posició més alta.

Aquest exercici va molt bé per entendre què és un "vector foto" (particularitzat).

Com que

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|}$$

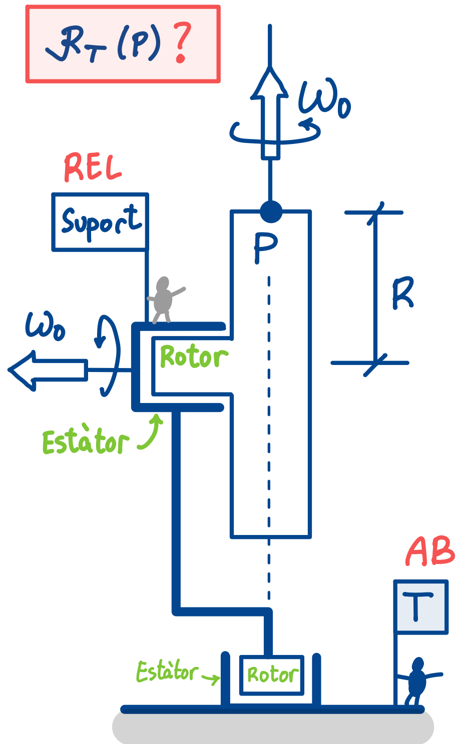
per determinar $\mathcal{R}_T(P)$ ens caldrà calcular primer

$$\bar{v}_T(P) \quad i \quad \bar{a}_T(P) \leftarrow$$ i descompondre aquesta en $\bar{a}_T^s(P)$ i $\bar{a}_T^n(P)$

És molt fàcil calcular $\bar{v}_T(P)$ via composició de velocitats (v. pàg. seg.) però el vector que en resulta no és un vector general (o "pel·lícula") perquè només és vàlid per a l'instant en que P passa pel punt més alt. Per tant, no el podem derivar respecte el temps per obtenir $\bar{a}_T(P)$. En conclusió: ens caldrà obtenir $\bar{a}_T(P)$ via composició de moviments.

Solució:

Comp. mov. $\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = \text{Suport} \end{array} \right.$



$$\bar{v}_{AB}(P) = \underbrace{\bar{v}_{REL}(P)}_{\otimes\, \omega_0 R} + \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)}_{\bar{0}} = \otimes\, \omega_0 R \qquad (1)$$

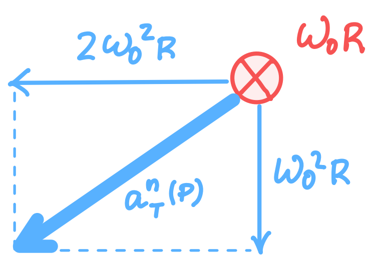
$(\otimes\, \omega_0 R)$ és un vec. foto (només és vàlid per a l'instant en que P passa pel punt més alt) $\Rightarrow$ No el podem derivar $\Rightarrow$ Cal fer comp. movim. per trobar $\bar{a}_T(P)$.

$$\bar{a}_{AB}(P) = \bar{a}_{REL}(P) + \bar{a}_{ar}(P) + \underbrace{\bar{a}_{cor}(P)}_{2\,\bar{\Omega}^{REL}_{AB} \times \bar{v}_{REL}(P)} =$$

$$= (\downarrow \omega_0^2 R) + 0 + \underbrace{2\left[(\Uparrow \omega_0) \times (\otimes\, \omega_0 R)\right]}_{(\leftarrow 2\omega_0^2 R)} = (\downarrow \omega_0^2 R) + (\leftarrow 2\omega_0^2 R) \qquad (2)$$

Dibuixem vel. i acc.:

— vel.
— accel.



Tota l'acceleració és normal a $\bar{v}_{AB}(P) = \otimes\, \omega_0 R$

$$a_T^n(P) = \sqrt{(2\omega_0^2 R)^2 + (\omega_0^2 R)^2} = \omega_0^2 R \sqrt{5}$$

$$\boxed{\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|} = \frac{\omega_0^2 R^2}{\omega_0^2 R \sqrt{5}} = \frac{R}{\sqrt{5}}}$$

Punt que a alguns estudiants els costa de veure

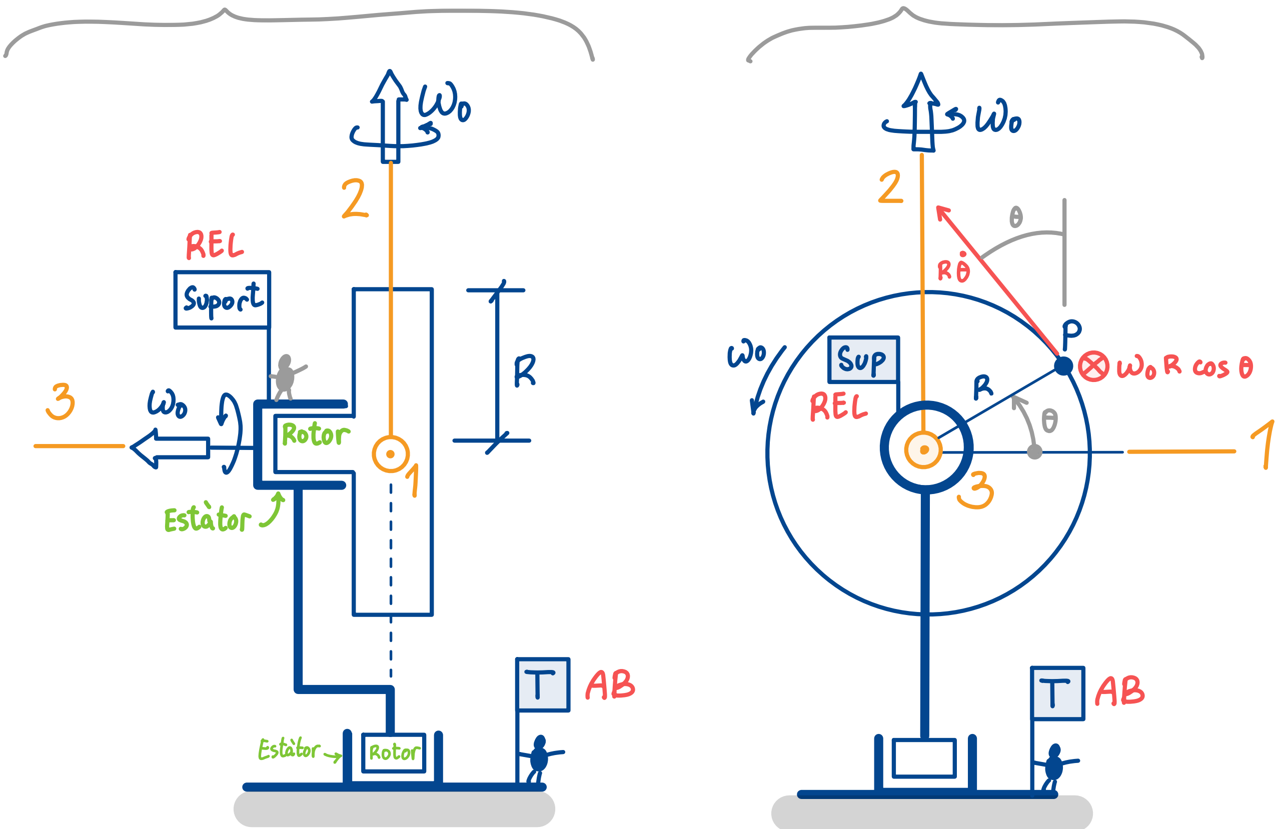
Ho poso per si teniu curiositat només...

Solució + feixuga via l'obtenció d'un vec. pel·li per $\bar{v}_{AB}(P)$, i derivant-lo

La faig pq es vegi la superioritat de la comp. de movim. en aquest problema

Cal obtenir $\bar{v}_{AB}(P)$ sobre una config. genèrica. Això obliga a treballar sobre una altra vista del sistema, i a posar P en posició general, introduint la coordenada θ:

Vista d'abans — Nova vista



Treballant amb la nova vista:

$$\bar{v}_{AB}(P) = \underbrace{(\nwarrow R\dot{\theta})}_{\bar{v}_{REL}(P)} + \underbrace{(\otimes\, \omega_0 R \cos\theta)}_{\bar{v}_{ar}(P)} = \begin{Bmatrix} -R\dot{\theta}\sin\theta \\ R\dot{\theta}\cos\theta \\ -\omega_0 R\cos\theta \end{Bmatrix}_B \overset{\dot{\theta} = \omega_0}{=} \begin{Bmatrix} -R\omega_0 \sin\theta \\ R\omega_0 \cos\theta \\ -\omega_0 R\cos\theta \end{Bmatrix}_B$$

Ara $\bar{v}_{AB}(P)$ sí que és un vec. pel·lícula i el podem derivar!

Abans de fer-ho, fixem-nos que si el particularitzem per a $\theta = 90°$, obtenim la velocitat de P quan passa pel punt més alt. És a dir, la de (1) a la pàgina anterior:

$$\bar{v}_{AB}(P)\Big]_{\theta = 90°} = \begin{Bmatrix} -R\omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_B \quad \leftarrow$$

Coincideix amb el resultat de l'Eq. (1), com esperàvem!

Doncs va! Ara derivem el vector general $\bar{v}_{AB}(P)$ per obtenir un vector general $\bar{a}_{AB}(P)$. Fem-ho analíticament:

$$\{\bar{v}_{AB}(P)\}_B = \begin{Bmatrix} -R\omega_0 \sin\theta \\ R\omega_0 \cos\theta \\ -R\omega_0 \cos\theta \end{Bmatrix}_B$$

$\downarrow$ d/dt

És ω_0

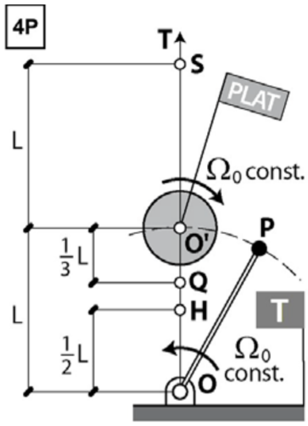
$\dot{\theta} = \omega_0$

$$\{\bar{a}_{AB}(P)\}_B = \begin{Bmatrix} -R\omega_0 \dot{\theta} \cos\theta \\ -R\omega_0 \dot{\theta} \sin\theta \\ R\omega_0 \dot{\theta} \sin\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -R\omega_0 \sin\theta \\ R\omega_0 \cos\theta \\ -R\omega_0 \cos\theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -R\omega_0^2 \cos\theta \\ 0 \\ R\omega_0^2 \sin\theta \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} -2R\omega_0^2 \cos\theta \\ -R\omega_0^2 \sin\theta \\ 2R\omega_0^2 \sin\theta \end{Bmatrix}_B \quad (*)$$

Si ara particularitzem $(*)$ per $\theta = 90°$ obtenim l'acceleració de P quan passa pel punt més alt:

$$\left.\{\bar{a}_{AB}(P)\}_B\right]_{\theta=90°} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R\omega_0^2 \\ 2R\omega_0^2 \end{Bmatrix}_B$$

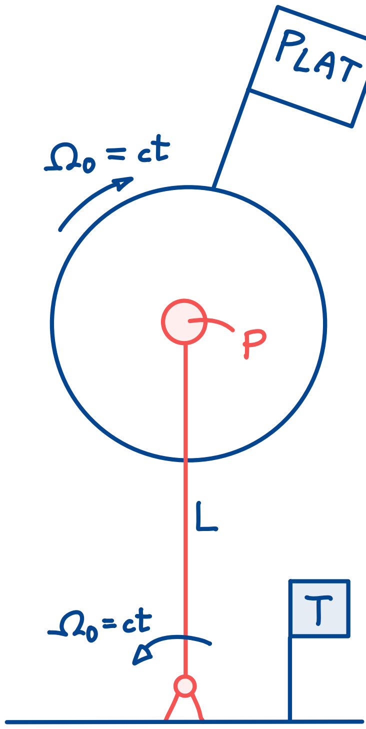
$\leftarrow$ Coincideix amb el resultat de l'Eq. (2), com esperàvem!



La plataforma i la barra, tots dos articulats al terra (T), giren amb ω_0 constant respecte del terra (T). Determina el $CC_T(\mathbf{P})$ quan **P** passa per **O'**.

Buscarem $\mathcal{R}_{Plat}(P) = \dfrac{v^2_{Plat}(P)}{|a^n_{Plat}(P)|}$

Farem comp. de movim amb $\left|\begin{array}{l} AB = T \\ REL = PLAT \end{array}\right.$

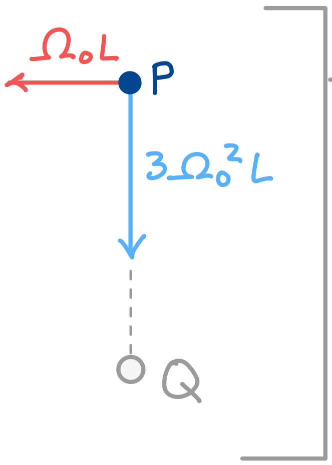


$$\boxed{\bar{v}_{REL}(P) = \underbrace{\bar{v}_{AB}(P)}_{\leftarrow \Omega_0 L} - \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)}_{0} = (\leftarrow \Omega_0 L)}$$

$$\bar{a}_{REL}(P) = \bar{a}_{AB}(P) - \bar{a}_{ar}(P) - \overbrace{\bar{a}_{cor}(P)}^{2\,\bar{\Omega}^{REL}_{AB} \times \bar{v}_{REL}(P)} =$$

$$= (\downarrow \Omega_0^2 L) - \bar{0} - \underbrace{2\left[(\circlearrowright \Omega_0) \times (\leftarrow \Omega_0 L)\right]}_{\downarrow 2\,\Omega_0^2 L} =$$

$$\boxed{= (\downarrow 3\,\Omega_0^2 L)}$$



$$\rightarrow \mathcal{R}_{PLAT}(P) = \frac{v^2_{Plat}(P)}{|a^n_{Plat}(P)|} = \frac{(\Omega_0 L)^2}{3\Omega_0^2 L} = \frac{L}{3}$$

Per tant:

$$\boxed{CC_{PLAT}(P) = Q}$$