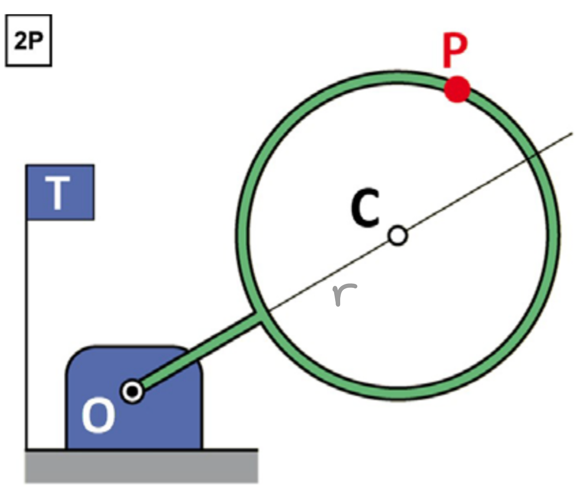
2P

Problemes de derivació geomètrica i analítica

Lluís Ros
https://lluisros.github.io/mecanica

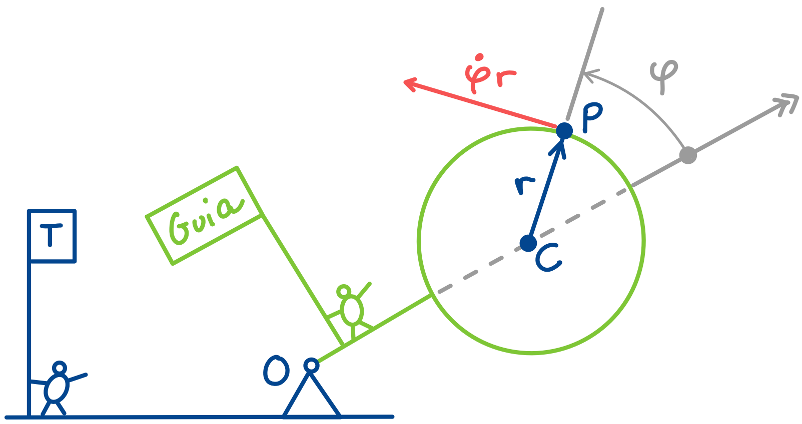
2P



La guia circular està articulada al terra (T). La partícula **P** es mou dins la guia. Mitjançant la derivada geomètrica, calcula $\bar{v}_{guia}(\mathbf{P})$, $\bar{v}_T(\mathbf{P})$, $\bar{\alpha}_T^{guia}$, $\bar{\alpha}_T^{\overline{CP}}$.

$\bar{v}_{Guia}(P)$

Derivem el vec. pos. $\overline{CP}$ obtingut a 1P (*):



$|\overline{CP}| = r$

$$\boxed{\bar{v}_{Guia}(P)} = \left[\frac{d\,\overline{CP}}{dt}\right]_{Guia} = \overbrace{\left[\text{canvi valor}\right]}^{0} + \overbrace{\left[\text{canvi dir.}\right]}^{\bar{\Omega}^{\overline{CP}}_{Guia} \times \overline{CP}} =$$

$$= \boxed{(\circlearrowleft \dot{\varphi}) \times (\nearrow r) = (\nwarrow \dot{\varphi} r)} \quad (**)$$

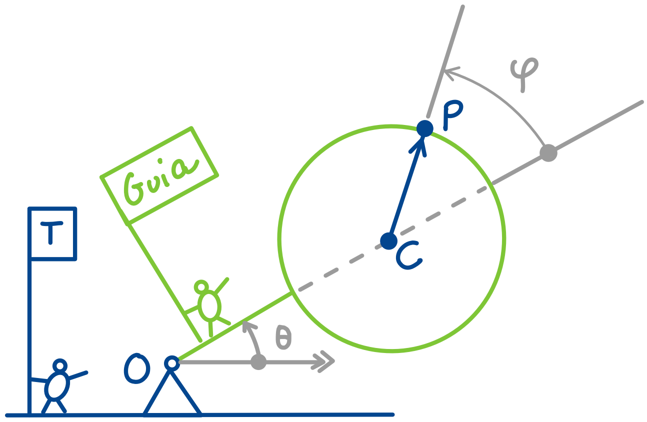
(*) $\overline{CP}$ és un vec. pos. vàlid per estudiar el moviment de P resp. la guia perquè C és fix a la guia.

(**) Les direccions indicades a $(\nearrow r)$ i $(\nwarrow \dot{\varphi} r)$ són aproximades: ja les indiquem de manera precisa al dibuix.

$\bar{\alpha}^{Guia}_{T}$ ⟵ Accel. angular de la guia resp. T

Clarament :

$$\bar{\Omega}^{Guia}_{T} = (\circlearrowleft\odot\ \dot{\theta})$$



Per tant :

$$\bar{\alpha}^{Guia}_{T} = \left.\frac{d\bar{\Omega}^{Guia}_{T}}{dt}\right]_{T} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}\text{canvi}\\ \text{valor}\end{bmatrix}}_{\circlearrowleft\odot\ \ddot{\theta}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\text{canvi}\\ \text{dir.}\end{bmatrix}}_{=0} = (\circlearrowleft\odot\ \ddot{\theta})$$

perquè $\bar{\Omega}^{Guia}_{T}$ sempre té dir. $\circlearrowleft\odot$

$\bar{\alpha}^{\overline{CP}}_{T}$

$$\bar{\Omega}^{\overline{CP}}_{T} = \bar{\Omega}^{\overline{CP}}_{Guia} + \bar{\Omega}^{Guia}_{T} =$$

$$= (\circlearrowleft\odot\ \dot{\varphi}) + (\circlearrowleft\odot\ \dot{\theta}) = \left[\circlearrowleft\odot\,(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\right]$$

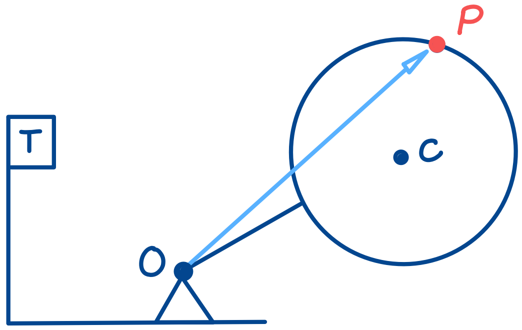
$$\bar{\alpha}^{\overline{CP}}_{T} = \left.\frac{d\bar{\Omega}^{\overline{CP}}_{T}}{dt}\right]_{T} = \begin{bmatrix}\text{canvi}\\ \text{valor}\end{bmatrix} + \underbrace{\cancel{\begin{bmatrix}\text{canvi}\\ \text{direcció}\end{bmatrix}}}_{0} =$$

$$= \left[\circlearrowleft\odot\,(\ddot{\varphi}+\ddot{\theta})\right]$$

Ja que $\bar{\Omega}^{\overline{CP}}_{T}$ sempre té dir. $\circlearrowleft\odot$

$\overline{v}_T(P)$

A 1P ja vam obtenir un vec. de posició adient per a estudiar el moviment de P resp. T. Era $\overline{OP}$ (pq O és fix a T(*)):



Ara bé: $\overline{OP}$ costa de derivar directament, perquè canvia tant en valor com en direcció.

Però el podem descomponadre així:

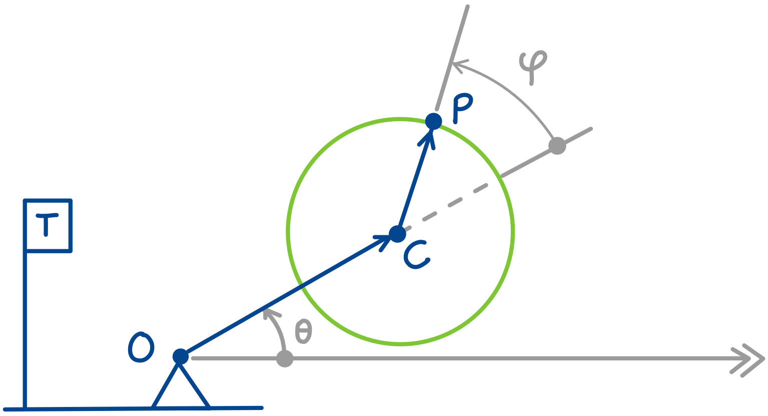
$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}$$

$\overline{OC}$ i $\overline{CP}$ són fàcils de derivar perquè només canvien de direcció, no de valor. Per tant, utilitzarem el fet que

$$\overline{v}_T(P) = \left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T = \left.\frac{d\overline{OC}}{dt}\right]_T + \left.\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_T$$

Per derivar $\overline{OC}$ i $\overline{CP}$ ens cal tenir aquests vectors orientats resp. T. Així podrem obtenir les seves velocitats angulars. Podem utilitzar aquests angles, que ja hem definit:

(*) Sovint escrivim "$O \in T$" per indicar que "O és fix a T".



Ara... Amb quina vel. angular gira $\overline{OC}$?

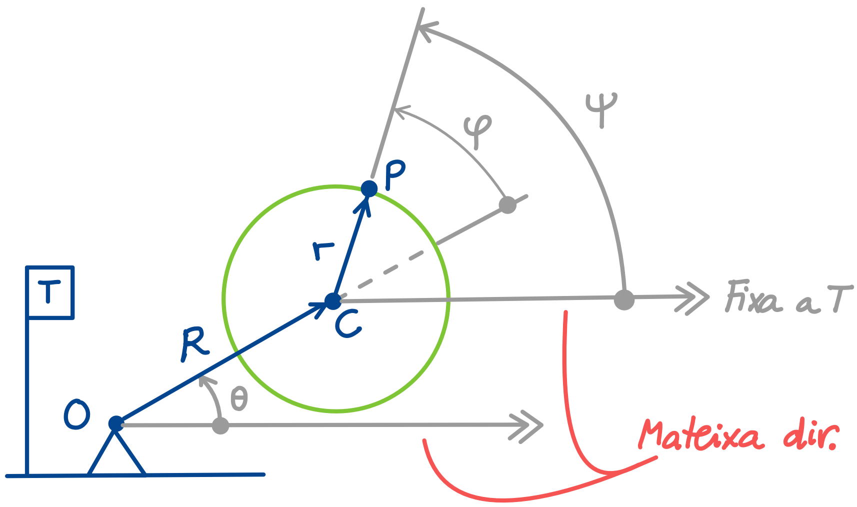
$$\bar{\Omega}^{\overline{OC}}_{T} = (\odot\, \dot{\theta}) \quad \longleftarrow \text{Perfecte!}$$

I amb quina gira $\overline{CP}$?

$$\bar{\Omega}^{\overline{CP}}_{T} = (\odot\, \dot{\varphi}), \text{ oi?}$$

Doncs no! Estem observant el moviment de $\overline{CP}$ resp. T, ergo ens cal veure com canvia l'orientació de $\overline{CP}$ resp. una dir. fixa a T. Per fer-ho bé, doncs, orientarem $\overline{CP}$ amb

$$\psi = \theta + \varphi$$



Conclusió:

$$\bar{\Omega}^{\overline{CP}}_{T} = \underbrace{(\odot\, \dot{\psi})}_{=\ \left[\odot\,(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\right]}$$

Ara sí!

Vinga, ja podem derivar:

Només tenen canvi de dir.

$$\boxed{\bar{v}_T(P)} = \left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T = \left.\frac{d\overline{OC}}{dt}\right]_T + \left.\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_T =$$

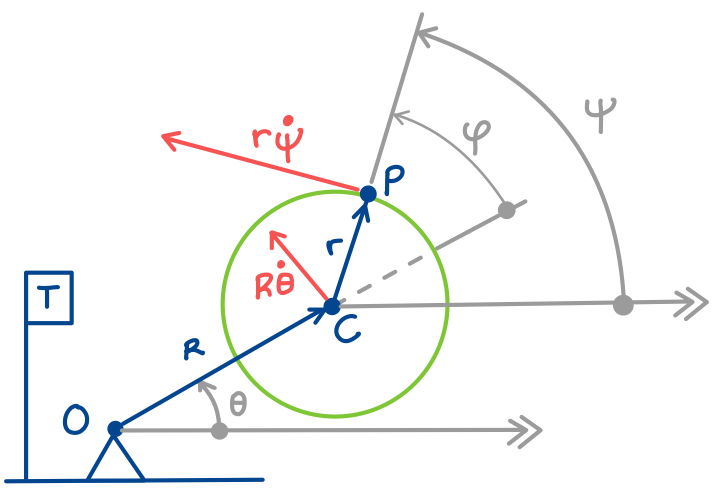
$$= \bar{\Omega}^{\overline{OC}}_T \times \overline{OC} + \bar{\Omega}^{\overline{CP}}_T \times \overline{CP} =$$

$$= (\odot\, \dot{\theta}) \times (\nearrow R) + (\odot\, \dot{\psi}) \times (\uparrow r) =$$

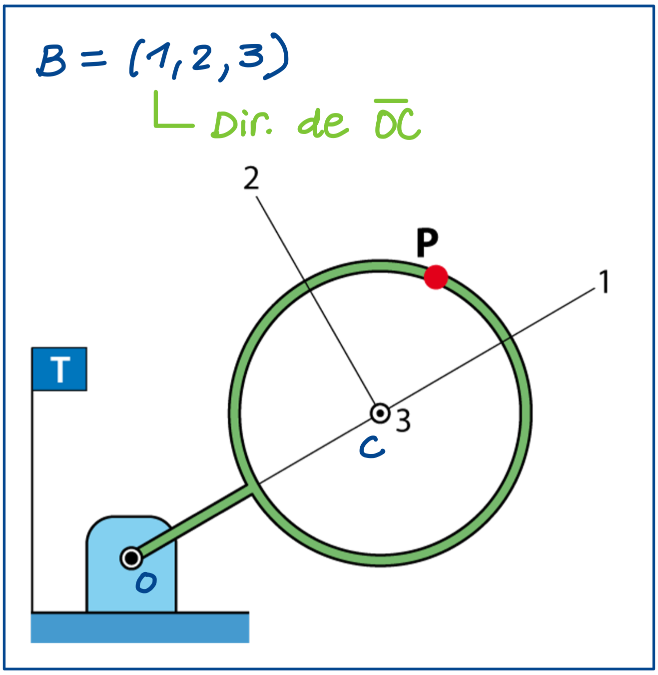
R ↳ $|\overline{OC}|$

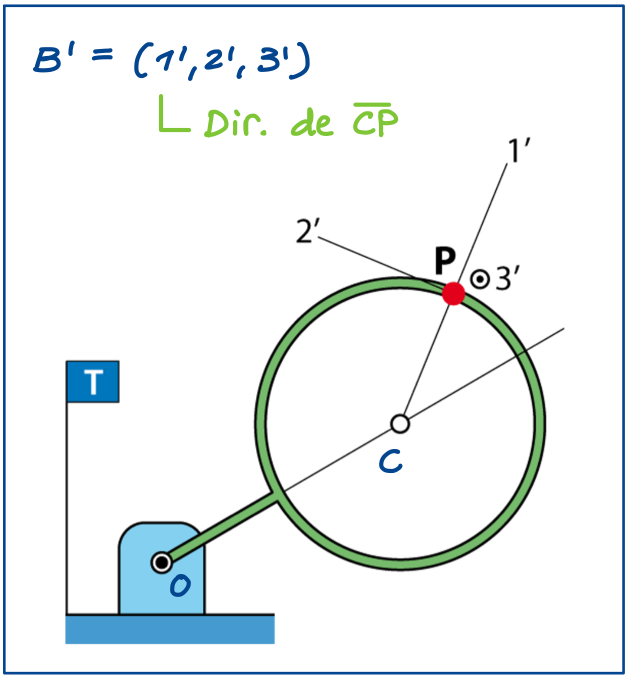
$$= \boxed{(\nwarrow R\dot{\theta}) + (\leftarrow r\dot{\psi})} \quad (\blacksquare)$$

Podem dibuixar els vectors $(\nwarrow R\dot{\theta})$ i $(\nwarrow r\dot{\psi})$:



Finalment, si volem, podem expressar $(\blacksquare)$ utilitzant una base vectorial. Hi ha 2 bases que faciliten la projecció de $(\blacksquare)$ perquè tenen almenys una direcció alineada amb un dels vectors de $(\blacksquare)$. Són:

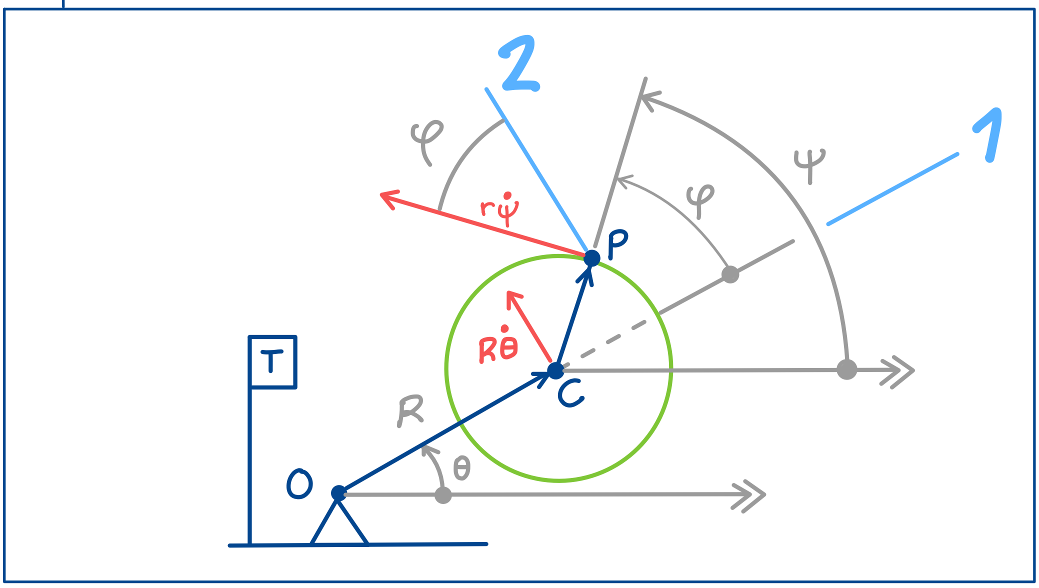




Utilitzant B, per exemple, tenim:

$$\bar{v}_T(P) = \left[\nearrow\left(-r\dot{\psi}\sin\varphi\right)\right] + \left[\nwarrow\left(R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi\right)\right] \quad (\bigstar)$$

versor en dir. 1 — versor en dir. 2

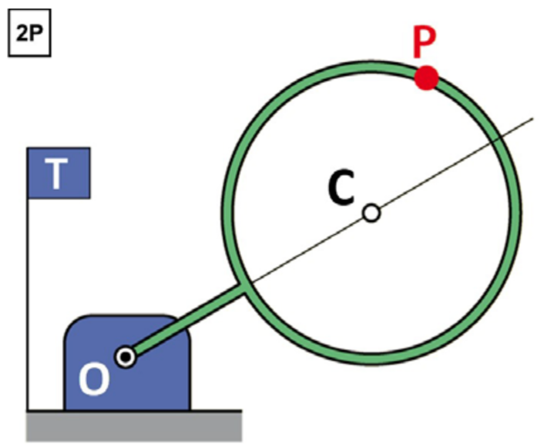


També podem escriure (★) com un vector de 3 components:

$$\left\{\bar{v}_T(P)\right\}_B = \begin{Bmatrix} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

base utilitzada (cal indicar-la!)

2P



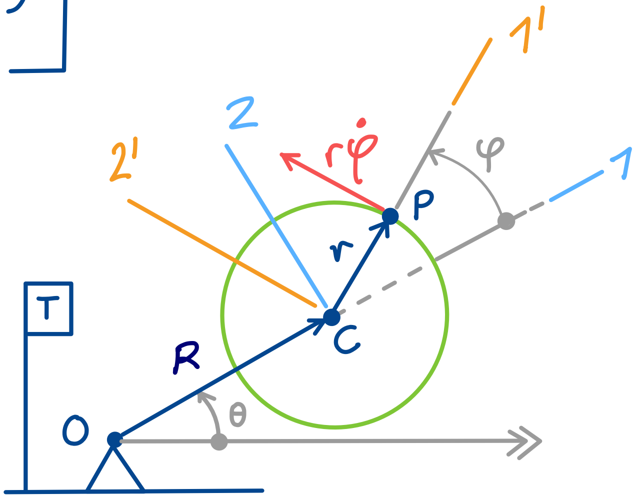
La guia circular està articulada al terra (T).
La partícula **P** es mou dins la guia.
Mitjançant la derivada analítica, calcula
$\bar{v}_{guia}(\mathbf{P}),\ \bar{v}_T(\mathbf{P}),\ \bar{a}_{guia}(\mathbf{P}),\ \bar{a}_T(\mathbf{P}),\ \Re_T(\mathbf{P})\big]_{\overline{OC}\|\overline{CP}}$.

$\bar{v}_{Guia}(P)$

Un vec. pos. adient és $\overline{CP}$ (ja que C ∈ Guia)

$\left.\begin{array}{l}\overline{CP} \text{ és fàcil de projectar} \\ \text{en la base } B' = (1', 2', 3') \\ \qquad \text{Fixa a } \overline{CP}\end{array}\right] \Rightarrow$ Treballem en B'

$$\{\overline{CP}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\boxed{\{\bar{v}_{Guia}(P)\}_{B'}} = \left\{\left[\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_{Guia}\right\}_{B'} = \underbrace{\left\{\frac{d\overline{CP}}{dt}\right\}_{B'}}_{\left[\begin{array}{l}\text{Deriv.}\\\text{components}\end{array}\right]} + \underbrace{\{\bar{\Omega}^B_{Guia}\}_{B'} \times \{\overline{CP}\}_{B'}}_{\left[\begin{array}{l}\text{òrn.}\\\text{base}\\\text{resp. Guia}\end{array}\right] \times \left[\begin{array}{l}\text{vec.}\\\text{sense}\\\text{derivar}\end{array}\right]} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} r \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad (1)$$

Coincideix amb l'obtingut geomètricament (ex. anterior)

Extra: Tb podem fer els càlculs amb $B=(1,2,3)$:

$$\left\{\overline{CP}\right\}_B = \begin{Bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Mateix resultat que (1), però en base B

$$\boxed{\left\{\bar{v}_{Guia}(P)\right\}_B} = \left\{\left[\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_{Guia}\right\}_B =$$

$$= \left\{\frac{d\overline{CP}}{dt}\right\}_B + \left\{\cancel{\bar{\Omega}^B_{Guia}}\right\}_B^{0} \times \left\{\overline{CP}\right\}_B = \boxed{\begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

$\bar{a}_{Guia}(P)$

Derivem (1):

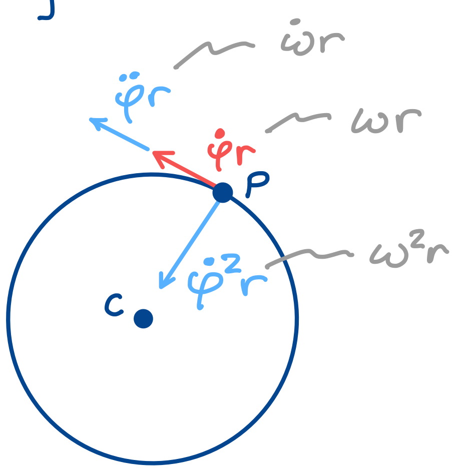
Tot en B'

$$\left\{\bar{a}_{Guia}(P)\right\}_{B'} = \left\{\left[\frac{d\bar{v}_{Guia}(P)}{dt}\right]_{Guia}\right\}_{B'} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{derivada} \\ \text{components} \\ \bar{v}_{Guia}(P) \end{bmatrix} + \bar{\Omega}^{B'}_{Guia} \times \bar{v}_{Guia}(P) =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}^2 r \\ \ddot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Surten les components intrínseques de l'acceleració típiques de la rotació simple, com era d'esperar

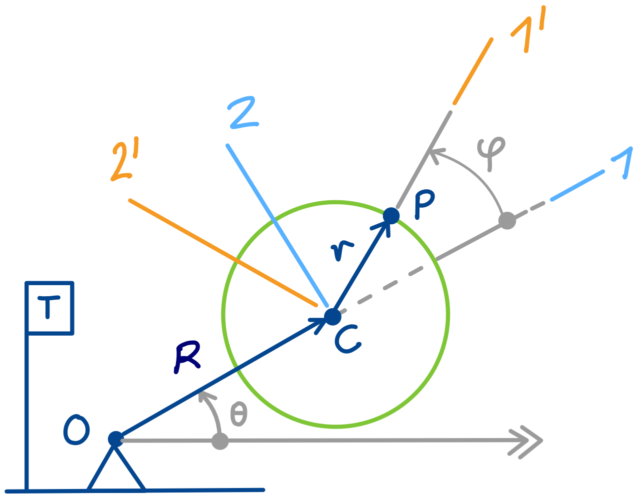


$\bar{v}_T(P)$

$B = (1, 2, 3)$

$B' = (1', 2', 3')$

Un vec. pos. adient per a P és $\overline{OP}$, pq $O \in T$.



$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}$$

És aconsellable treballar en B o B' ja que faciliten la projecció de $\overline{OC}$ i $\overline{CP}$ respectivament. Descartem l'ús d'una base fixa a T perquè no aniria tan bé. Triem B per treballar.

$$\{\overline{OP}\}_B = \{\overline{OC}\}_B + \{\overline{CP}\}_B = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R + r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

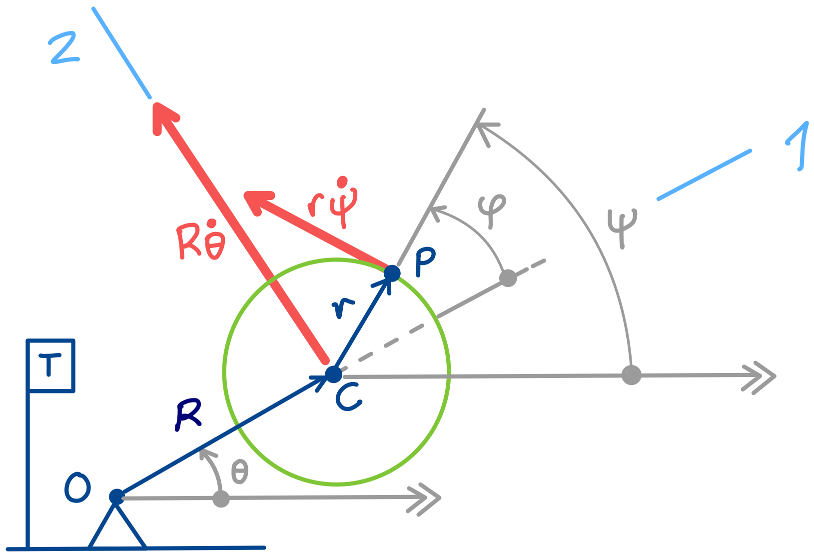
$$\{\bar{v}_T(P)\} = \left\{ \left[\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T \right\}_B = \begin{bmatrix} \text{deriv.} \\ \text{comp.} \end{bmatrix} + \bar{\Omega}^B_T \times \begin{bmatrix} \text{vec sense} \\ \text{derivar} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R + r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\theta}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\theta} + r\dot{\theta}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Analitzant (3) veiem que $\bar{v}_T(P)$ és suma dels dos vecs. vermells següents, que són la derivada temporal de $\overline{OC}$ i $\overline{CP}$ a la ref. T:



$\bar{a}_T(P)$

Derivem (3):

$$\left\{\bar{a}_T(P)\right\}_B = \left\{\left[\frac{d\,\bar{v}_T(P)}{dt}\right]_T\right\}_B = \left[\begin{matrix}\text{deriv.}\\ \text{comp}\end{matrix}\right] + \bar{\Omega}^B_T \times \left[\begin{matrix}\text{vec.}\\ \text{sense}\\ \text{deriv.}\end{matrix}\right] =$$

$$= \begin{Bmatrix} -\ddot{\psi} r\sin\varphi - \dot{\psi}\dot{\varphi} r\cos\varphi \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - r\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -\ddot{\psi} r\sin\varphi - \dot{\psi}\dot{\varphi} r\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 - r\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\varphi \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - r\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\dot{\theta} r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -\ddot{\psi} r \sin\varphi - \overbrace{(\dot{\varphi}+\dot{\theta})}^{\dot{\psi}} r \dot{\psi} \cos\varphi - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - (\dot{\varphi}+\dot{\theta}) r \dot{\psi} \sin\varphi \\ 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -\ddot{\psi} r \sin\varphi - r\dot{\psi}^2 \cos\varphi - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - r\dot{\psi}^2 \sin\varphi \\ 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$\left.\mathcal{R}_T(P)\right]_{\overline{OC} \parallel \overline{CP}}$$

Vol dir, quan $\overline{OC}$ és paral·lel a $\overline{CP}$

És a dir, quan $\varphi = 0$

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|}$$

$\left(\text{Valor de } v_T(P)\right)^2$

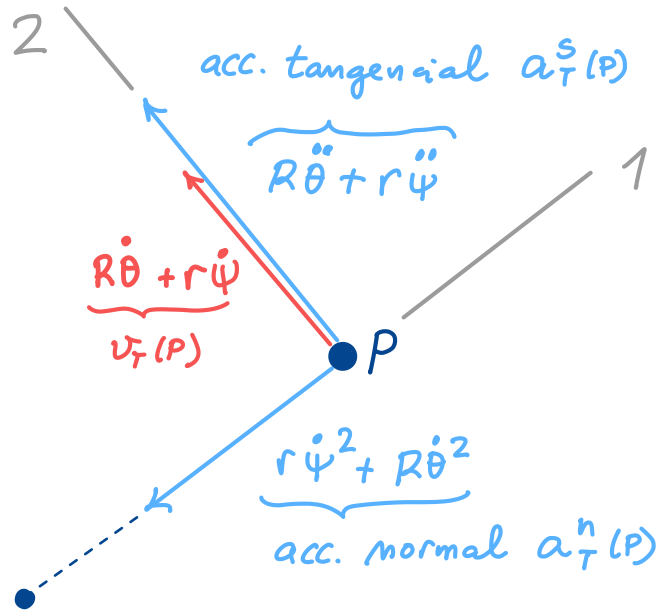
$$\left\{ \left.\bar{v}_T(P)\right]_{\varphi=0} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi} \\ 0 \end{array} \right\}$$

Particularitzant (3) per $\varphi = 0$

$$\left\{ \left.\bar{a}_T(P)\right]_{\varphi=0} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -r\dot{\psi}^2 - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi} \\ 0 \end{array} \right\}$$

Particularitzant (4) per $\varphi = 0$

Per identificar la component normal de $\overline{a}_T(P)$ sempre aconsello que us feu un dibuix:

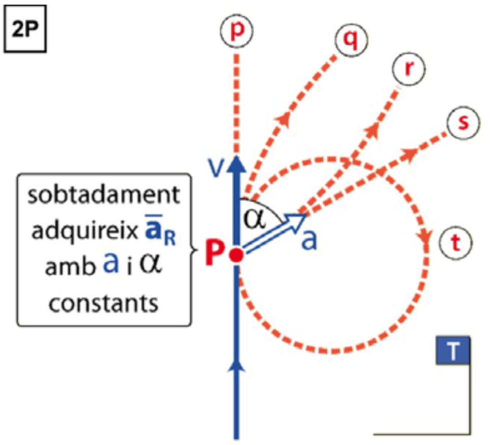


$CC_T(P)$ = centre de curvatura de P relatiu a T

Per tant:

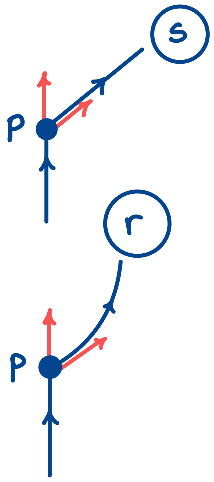
$$\mathcal{R}_T(P)\Big]_T = \frac{(R\dot{\theta}+r\dot{\psi})^2}{r\dot{\psi}^2+R\dot{\theta}^2} \qquad (5)$$

2P



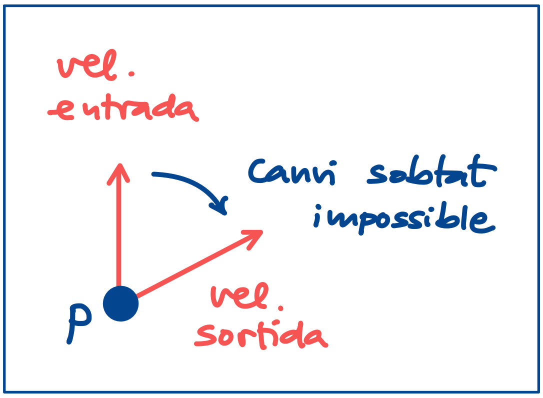
La partícula **P** descriu una trajectòria rectilínia respecte del terra (T). Quan té celeritat v, sobtadament s'accelera amb $\bar{a}_T(\mathbf{P})$ de valor constant, i formant un angle β constant amb $\bar{v}_T(\mathbf{P})$.
Quina trajectòria passa a fer?

α



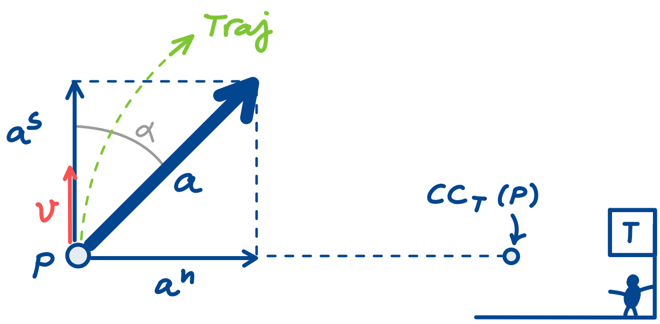
Impossibles !

Implicarien un canvi sobtat de velocitat



Ara cal saber si serà p, q o t.

A partir de l'instant dibuixat, tenim:



$$\left.\begin{aligned} a^s &= a \cos\alpha \\ a^n &= a \sin\alpha \end{aligned}\right\}$$ constants al llarg del temps (pq a i α ho són)

(*) A menys que es produeixi una col·lisió, que no és el cas.

Com que $a^n \neq 0$ $\Rightarrow$ La trajectòria serà curvada $\Rightarrow$ Descartem (p)

El radi de curvatura $\mathcal{R} = \mathcal{R}_T(P)$ creixerà amb el pas del temps:

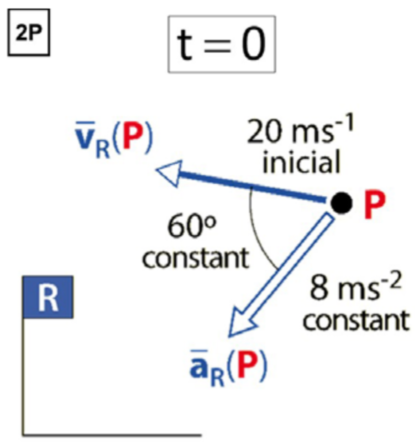
v creixerà pq $a^s = ct$

$$\mathcal{R} = \frac{v^2}{|a^n|} \Rightarrow \mathcal{R} \text{ creixerà}$$

a^n es manté ct

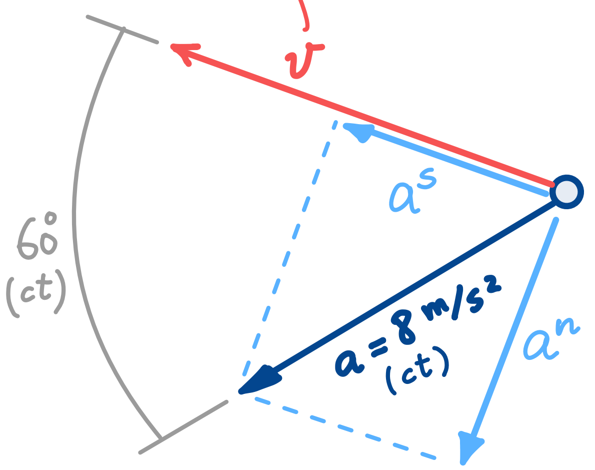
Això descarta (t), ja que té $\mathcal{R} = ct$

La traj. serà (q) pq és l'única de radi creixent.



En un cert instant, la partícula **P** té celeritat de 20 m/s respecte del terra (T). Si s'accelera amb $\bar{a}_T(\mathbf{P})$ de valor constant, i formant un angle de 60° constant amb $\bar{v}_T(\mathbf{P})$, quina és la seva celeritat 10 segons més tard?

Celeritat de P (inicialment, $v = 20$ m/s)



Només a^s pot canviar v

a^n canvia el radi de curvatura de la traj. de P, però no v.

Clarament:

$$a^s = a \cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \frac{m}{s^2} = \frac{4 \frac{m}{s}}{s}$$

$$\Downarrow$$

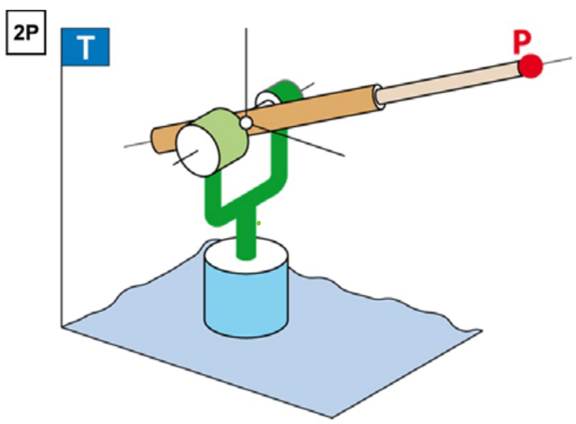
v augmenta a ritme de 4 m/s cada segon

$$\Downarrow$$

En 10" v haurà augmentat 40 m/s.

$$\Downarrow$$

Com que inicialment $v = 20$ m/s, al cap de 10s v serà de $20 + 40 = 60$ m/s.



La forquilla (forq) gira respecte del terra (T). La primera part de l'antena telescòpica (ant.1) està articulada a la forquilla. Mitjançant la derivada geomètrica, calcula $\bar{v}_{ant.1}(\mathbf{P})$, $\bar{a}_{ant.1}(\mathbf{P})$, $\bar{v}_{forq}(\mathbf{P})$, $\bar{a}_{forq}(\mathbf{P})$.

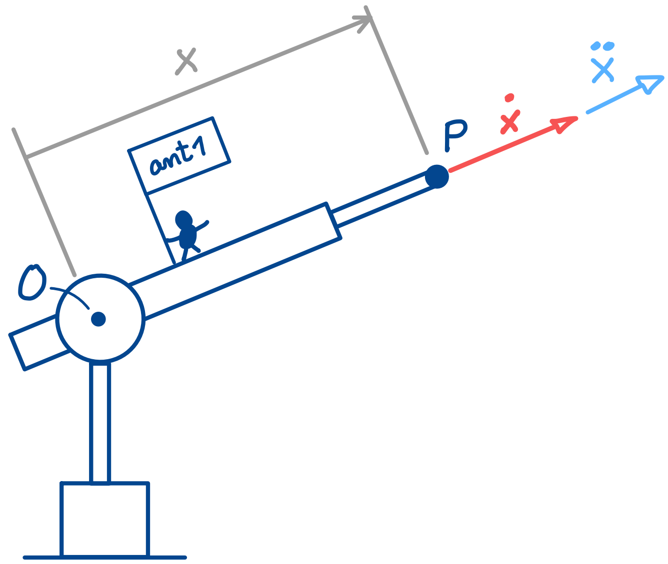
En aquest exercici i el següent utilitzarem les coords. ψ, θ, x ja definides a 1P.

$\bar{v}_{ant1}(P)$ i $\bar{a}_{ant1}(P)$

Derivem geomètricament $\overline{OP}$.

Vist des d'ant1, $\overline{OP}$ sols canvia de valor, no de direcció. Ergo:

$$\bar{v}_{ant1}(P) = (\nearrow \dot{x})$$



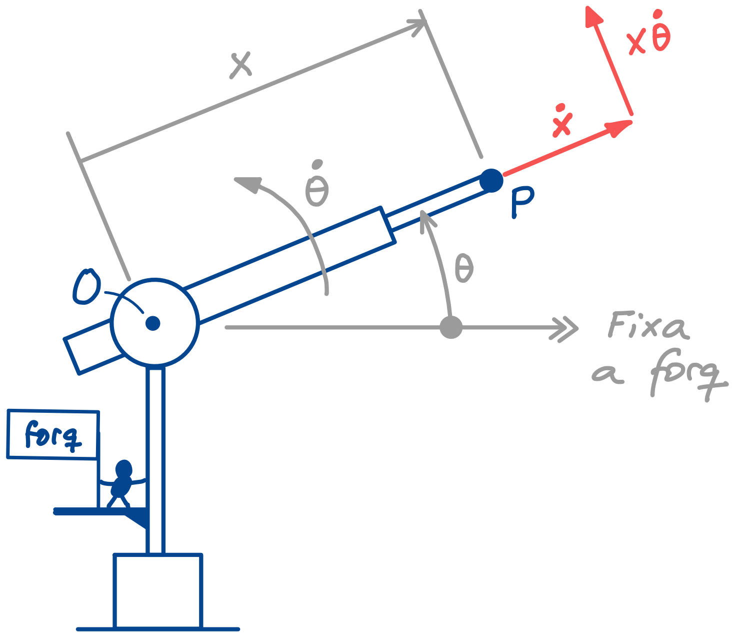
Derivant geomètricament $\bar{v}_{ant1}(P)$ obtenim

$$\bar{a}_{ant}(P) = (\nearrow \ddot{x})$$

$\bar{v}_{ant1}(P)$ tampoc pateix canvis de dir. només de valor

$\overline{v}_{forq}(P)$

Ara cal avaluar els canvis de $\overline{OP}$ des de forq!
Des de forq, $\overline{OP}$ varia per causa de x i θ:



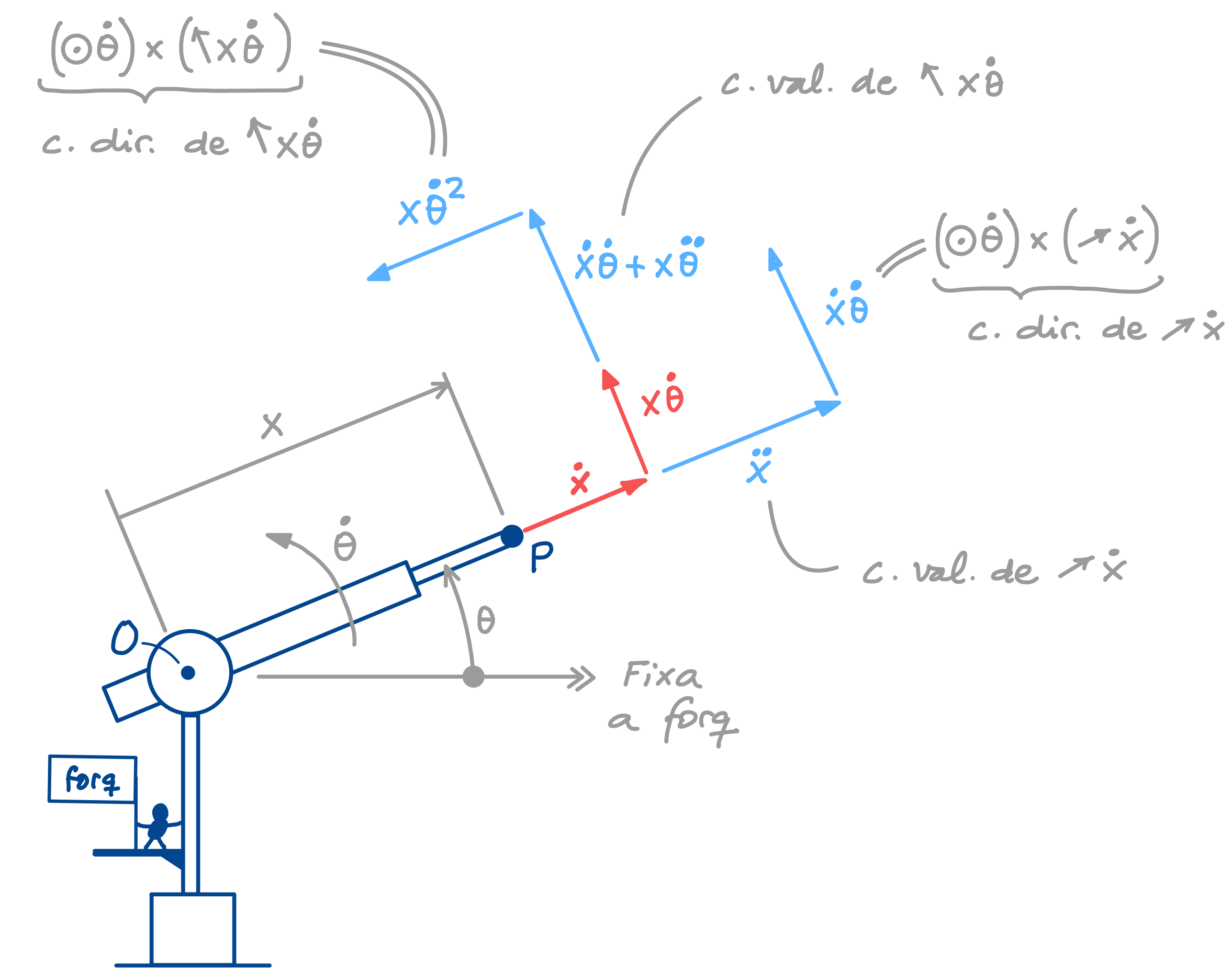
$\overline{OP}$ s'estira quan x varia, i $\circlearrowleft\odot\,\dot\theta$ el fa canviar de direcció. Ergo:

$$\text{c. dir} = \overline{\Omega}^{OP}_{forq} \times \overline{OP} = (\circlearrowleft\odot\,\dot\theta) \times (\nearrow x)$$

$$\overline{v}_{forq}(P) = \underbrace{\overbrace{(\nearrow \dot{x})}^{\text{c.val.}} + \overbrace{(\nwarrow x\dot\theta)}^{\text{c. dir}}}_{\text{vecs. vermells indicats al dibuix}}$$

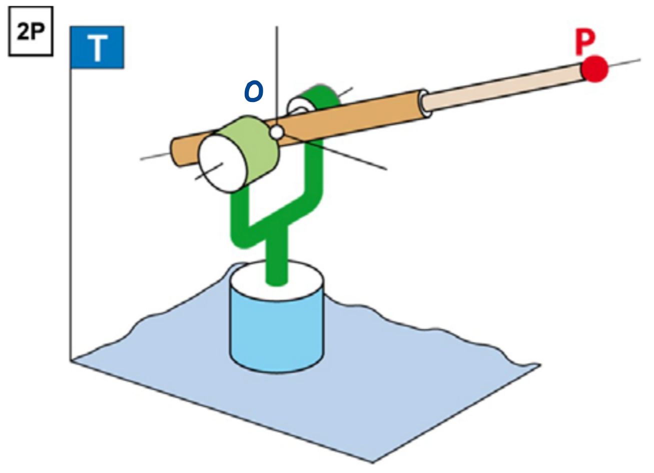
$\bar{a}_{forq}(P)$

Per calcular $\bar{a}_{forq}(P)$ derivem els vecs. vermells anteriors, adonant-nos que tots canvien de valor i també de dir. (per causa de $\odot\dot{\theta}$ novament). El resultat són els vecs. blaus:



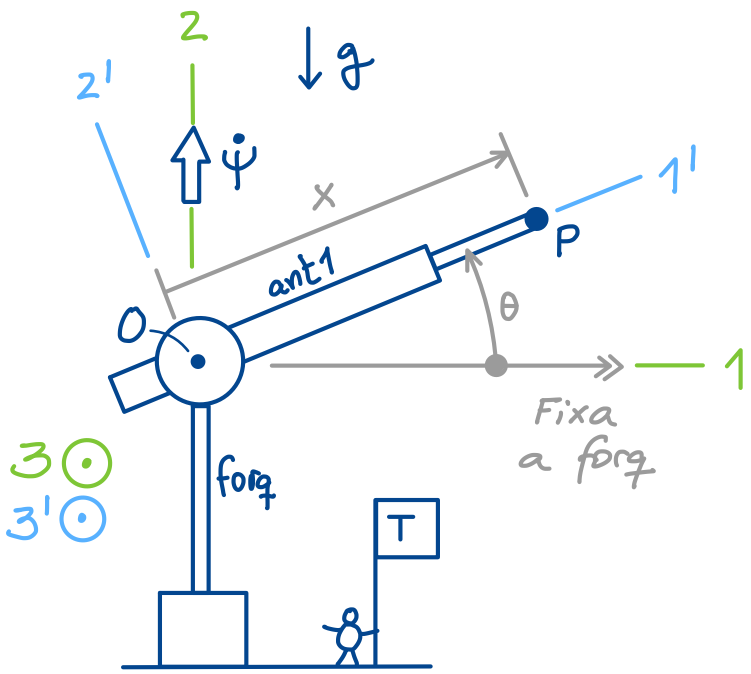
Agrupant els vecs. blaus queda:

$$\bar{a}_{forq}(P) = \underbrace{\left[\nearrow(\ddot{x}-x\dot{\theta}^2)\right]+\left[\nwarrow(2\dot{x}\dot{\theta}+x\ddot{\theta})\right]}_{\text{vecs. blaus}}$$



La forquilla gira respecte del terra (T). La primera part de l'antena telescòpica (ant.1) està articulada a la forquilla. Mitjançant la derivada analítica, calcula $\bar{v}_T(\mathbf{P})$, $\bar{a}_T(\mathbf{P})$, $\bar{\alpha}_T^{ant.1}$.

Derivarem $\overline{OP}$. Aquest vector és fàcil de projectar en les següents bases:



$B = (1, 2, 3)$ — 1, 2: Vertical; 3: Dir de l'eix ant1 – forq

$B' = (1', 2', 3')$ — 1', 2': Dir antena; 3': Dir de l'eix ant1 – forq

La projecció de $\overline{OP}$ sobre B' és trivial, però la vel. angular de B' és $\bar{\Omega}_T^{B'} = (\uparrow \dot{\psi}) + (\odot \dot{\theta})$. En canvi, la vel. angular de B és més senzilla ja que

$$\bar{\Omega}_T^{B} = (\uparrow \dot{\psi})$$

Per aquest motiu, triarem B, però B' tampoc seria una mala opció. El que sí evitarem és treballar en una base fixa a T perquè dificultaria la projecció de $\overline{OP}$.

$\bar{v}_T(P)$

$$\left\{\overline{OP}\right\}_B = \begin{Bmatrix} x\cos\theta \\ x\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{v}_T(P)\right\}_B = \left\{\left[\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T\right\}_B = \overbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{x}\sin\theta + x\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}^{\text{Derivada de les comp.}} + \underbrace{\overbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix}}^{\bar{\Omega}_T^B} \times \overbrace{\begin{Bmatrix} x\cos\theta \\ x\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}^{\overline{OP}}}_{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x\dot{\psi}\cos\theta \end{Bmatrix}} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{x}\sin\theta + x\dot{\theta}\cos\theta \\ -x\dot{\psi}\cos\theta \end{Bmatrix} \qquad (\blacksquare)$$

A la pàg. següent hem calculat $\bar{v}_T(P)$ derivant $\overline{OP}$ geomètricament. Es pot comprovar que surt el mateix!

$\bar{a}_T(P)$

$$\left\{\bar{a}_T(P)\right\}_B = \begin{Bmatrix} \ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - x\ddot{\theta}\sin\theta - x\dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{x}\sin\theta + \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + x\ddot{\theta}\cos\theta - x\dot{\theta}^2\sin\theta \\ -\dot{x}\dot{\psi}\cos\theta - x\ddot{\psi}\cos\theta + x\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{x}\sin\theta + x\dot{\theta}\cos\theta \\ -x\dot{\psi}\cos\theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -x\dot{\psi}^2\cos\theta \\ 0 \\ -\dot{\psi}\dot{x}\cos\theta + \dot{\psi}x\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix}} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - x\ddot{\theta}\sin\theta - x\dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{x}\sin\theta + \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + x\ddot{\theta}\cos\theta - x\dot{\theta}^2\sin\theta \\ -2\dot{x}\dot{\psi}\cos\theta - x\ddot{\psi}\cos\theta + 2x\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix}$$

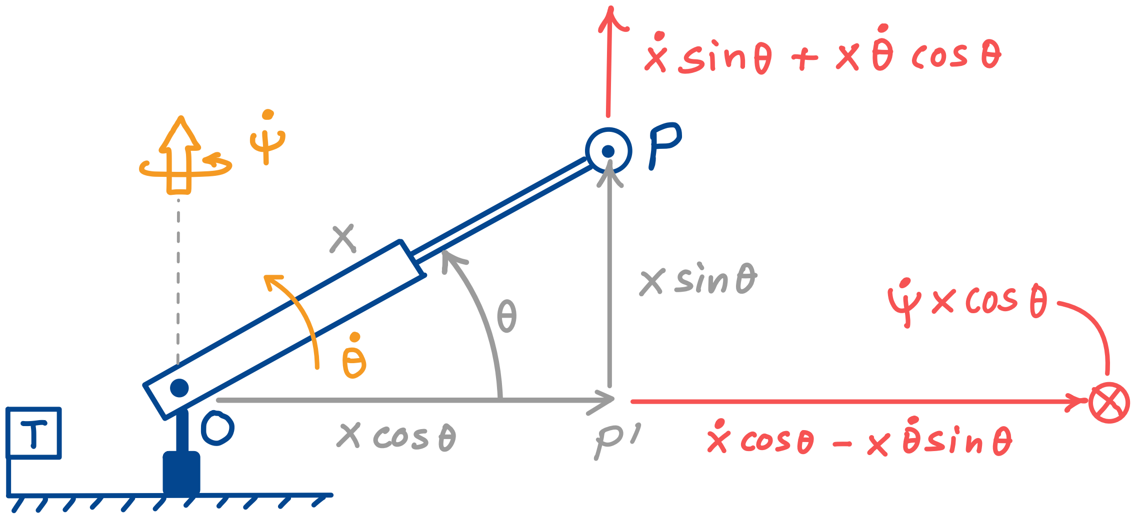
$\vec{v}_T(P)$ derivant geomètricament

Podem descompondre(*) $\overline{OP} = \overset{\text{horitz.}}{\overline{OP'}} + \overset{\text{vertical}}{\overline{P'O}}$

— $\overline{OP'}$ només queda afectat per $\bar{\dot\psi}$ (una rotació simple).

— $\overline{P'O}$ només canvia de valor

P' = projecció vertical de P sobre pla horitz. per O



Per tant, tenim:

$$\boxed{\vec{v}_T(P) = \left[\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T} = \underbrace{\left[\frac{d\overline{OP'}}{dt}\right]_T}_{\text{Sols canvia de valor}} + \underbrace{\left[\frac{d\overline{P'O}}{dt}\right]_T}_{\text{Canvia de valor i direcció}} =$$

$$= \boxed{\left[\uparrow (\dot x \sin\theta + x\dot\theta\cos\theta)\right] + \left[\rightarrow (\dot x \cos\theta - x\dot\theta \sin\theta)\right] + \left[\otimes\ x\dot\psi\cos\theta\right]}$$

Quadra amb (■) de la pàg. anterior

(*) Aquesta descomposició no és estrictament necessària, però facilita la derivada perquè, aleshores, sols apareix un canvi de direcció degut a una rotació simple.