

7P

Versió 1.2

Exercicis globals de cinemàtica

(Repàs per l'examen parcial)

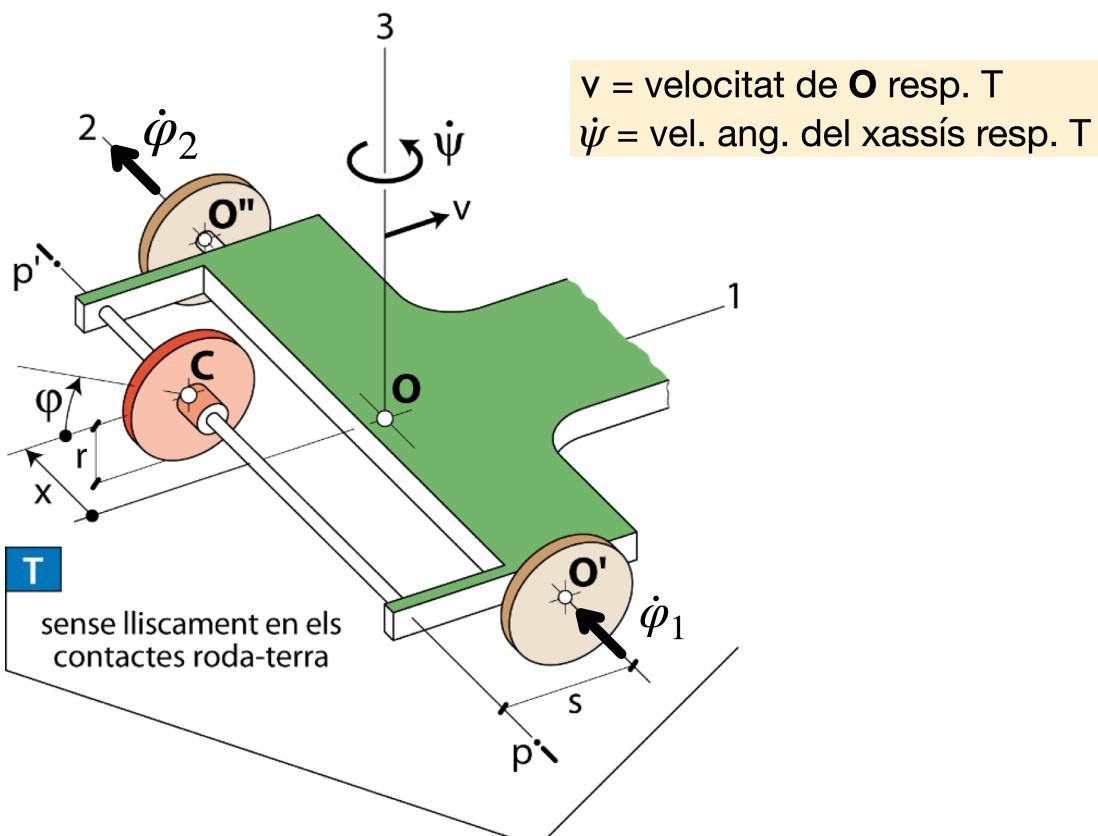
Lluís Ros

<https://lluisros.github.io/mecanica>

Telecontrol d'un vehicle

Les tres rodes del vehicle no llisquen respecte del terra (T). Les rodes a O' i O'' estan articulades al xassís, mentre que la roda a C manté un enllaç cilíndric amb la barra $p-p'$, paral·lela a $O'-O''$.

- Diagrama de moviments relatius?
- GL del sistema?
- Funcions $\dot{\phi}_1 = f(v, \dot{\psi})$ i $\dot{\phi}_2 = f(v, \dot{\psi})$?
- Funcions $\dot{x} = f(v, \dot{\psi})$ i $\dot{\phi} = f(v, \dot{\psi})$?



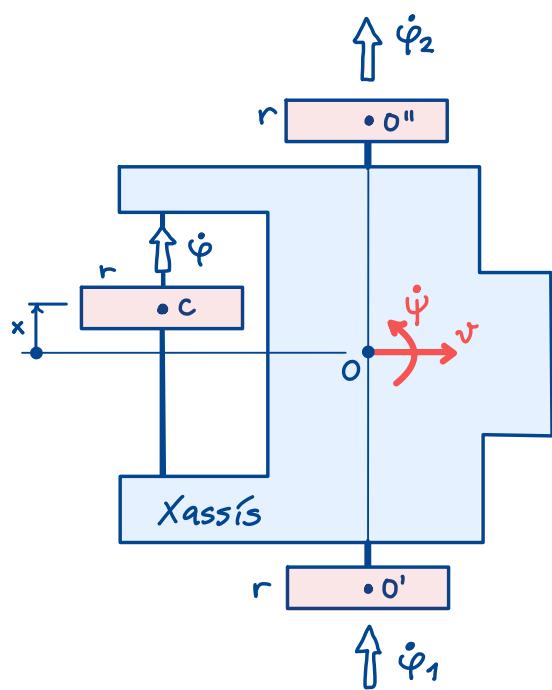
Aplicació a telecontrol del vehicle:

Aquest vehicle es pot utilitzar com a plataforma robòtica mòbil per a transport de càrrega. El vehicle es pot motoritzar de dues maneres:

- Amb dos motors que actuen les rotacions pròpies $\dot{\phi}_1$ i $\dot{\phi}_2$ de les rodes del davant respecte el xassís.
- Amb dos motors que actuen els graus de llibertat \dot{x} i $\dot{\phi}$ de la roda del darrere.

Si suposem que v i $\dot{\psi}$ són consignes de velocitat donades per un joystick, les funcions que ens demanen permeten convertir v i $\dot{\psi}$ en les comandes de velocitat que hauran de satisfer els motors per assolir v i $\dot{\psi}$.

DMR

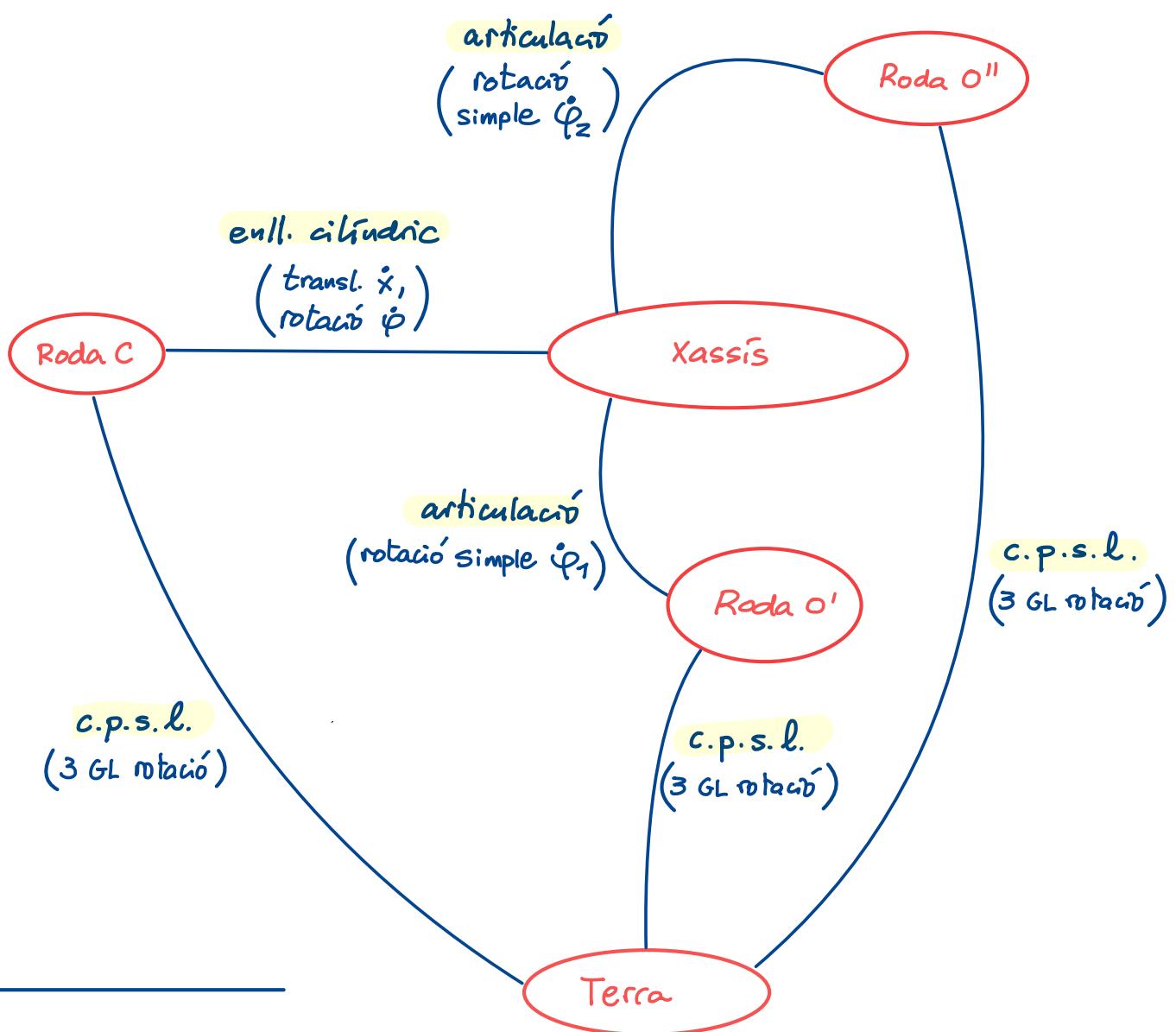


sòlids

— eixos
(GL relativs)

d'un solid resp. l'altre

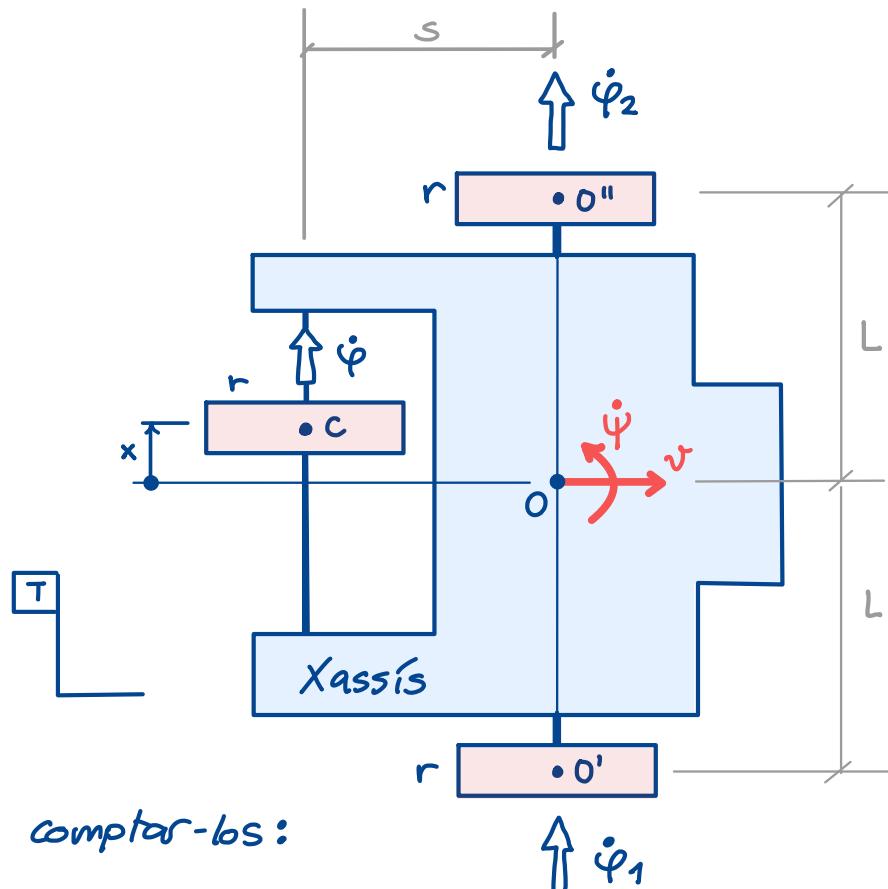
c.p.s.l. = contacte puntual
sense lliscament



GL sistema

El vehicle

té 2 GL!



2 maneres de comptar-los:

$\uparrow \dot{\varphi}_1$

Manera 1

Si bloquejo $\dot{\varphi}_1$, $\bar{v}_T(O') = \bar{0} \Rightarrow CIR_T^{xassís} = O' \Rightarrow$ xassís pot girar avd O' amb 1 GL encara. Si ara bloquejo $\dot{\varphi}_2$, $\bar{v}_T(O'') = \bar{0}$ i el xassís queda completament aturat. La roda del darrere tampoc es pot moure pq no llisca en el contacte amb T. Ergo el sist. té 2 GL (que podem associar a $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$).

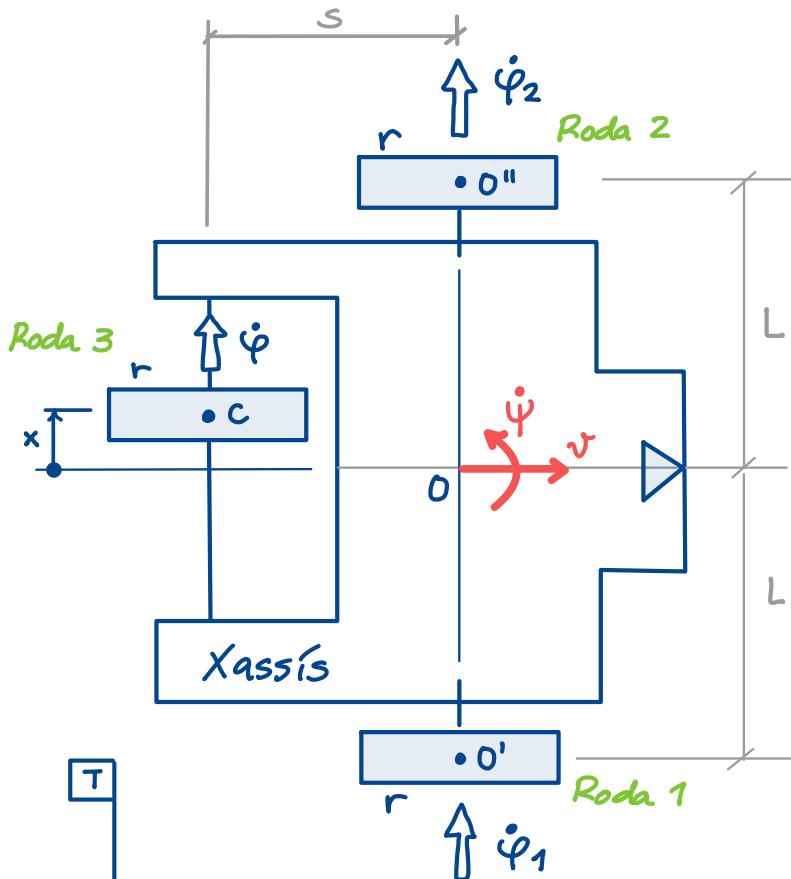
Manera 2

Si bloquejo \dot{x} , la roda para a ser un punt del xassís també (*), amb vel. \rightarrow . Els punts O' i O'' són del xassís ja, i tenen vel. \rightarrow també. Ergo $\bar{v}_T^{xassís} = \bar{0}$ i $CIR_T^{xassís}$ és a l' ∞ . El vehicle es pot moure només en dir. \rightarrow . Si ara aturo $\dot{\varphi}$, tot queda aturat. Per tant el vehicle té 2 GL.

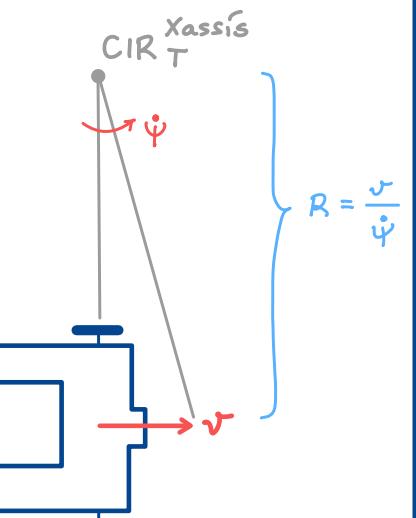
(*) Si $\dot{x} \neq 0$, la roda \neq xassís! ← Serà important després!

$\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ en funció de $(v, \dot{\psi})$

Suposem que $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ són activats amb motors (\ddot{x} : $\dot{\varphi}$ no activats) i que volem $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ en funció de $(v, \dot{\psi})$:



Fixem-nos que triant $(v, \dot{\psi})$ amb un joystick, estem triant la posició del CIR del xassís:



Via cinemàt. de roda

$$\bar{v}_T(O') = (-r\dot{\varphi}_1) \quad (I)$$

$$\bar{v}_T(O'') = (-r\dot{\varphi}_2) \quad (II)$$

Via CSR xassís

$$\begin{aligned} \bar{v}_T(O') &= \bar{v}(O) + \bar{\Omega}_T^{xas} \times \bar{OO'} = \\ &= (-v) + (0 \dot{\psi}) \times (\downarrow L) = [-v + L\dot{\psi}] \quad (I') \end{aligned}$$

$$\bar{v}_T(O'') = (-v) + (0 \dot{\psi}) \times (\uparrow L) = [-v - L\dot{\psi}] \quad (II')$$

Igualant

$$I = I'$$

$$II = II'$$

$$r\dot{\varphi}_1 = v + L\dot{\psi} \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{r}(v + L\dot{\psi})$$

$$r\dot{\varphi}_2 = v - L\dot{\psi} \Rightarrow \dot{\varphi}_2 = \frac{1}{r}(v - L\dot{\psi})$$

Aplicació a control

aqüestes funcions permeten calcular les velocitats $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ a les que hauran de girar els motors per satisfer $(v, \dot{\psi})$.

\dot{x} i $\dot{\varphi}$ en funció de v i $\dot{\psi}$

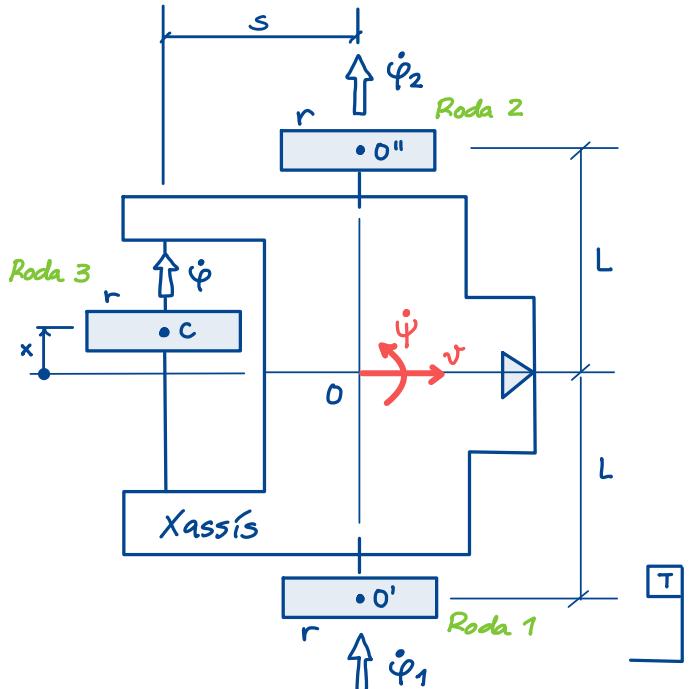
Ara suposem que actuem \dot{x} i $\dot{\varphi}$ (deixant $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ llisos) i que, per tant, volem \dot{x} i $\dot{\varphi}$ en funció de $(v, \dot{\psi})$:

Veient C com de la roda 3:

$$\bar{v}_T(C_{\text{roda}}) = (\rightarrow r\dot{\varphi}) \quad (\text{III})$$

Intentem ara calcular $\bar{v}_T(C_{\text{roda}})$ a partir de v i $\dot{\psi}$ per igualar amb (I):

Ara no podem aplicar CSR des de O directament perquè $C_{\text{roda}} \neq C_{\text{xassís}}$!



Però podem fer comp. mov. amb

$$\left| \begin{array}{l} \text{REL} = x_{\text{assís}} \\ AB = T \end{array} \right.$$

$$\bar{v}_T(C_{\text{roda}}) = \bar{v}_{\text{REL}}(C_{\text{roda}}) + \bar{v}_{\text{ar}}(C_{\text{roda}}) = \bar{v}_{\text{REL}}(C_{\text{roda}}) + \underbrace{\bar{v}_T(O)}_{qr} + \overline{\omega_T^{x_{\text{as}}} \times \vec{OC}} =$$

$$= (\uparrow \dot{x}) + (\rightarrow v) + (O \dot{\psi}) \times \underbrace{[(\leftarrow s) + (\uparrow x)]}_{(\downarrow \dot{\psi}s) + (\leftarrow \dot{\psi}x)} =$$

$$= [\uparrow (\dot{x} - \dot{\psi}s)] + [\rightarrow (v - \dot{\psi}x)] \quad (\text{III}')$$

Aplicació a control

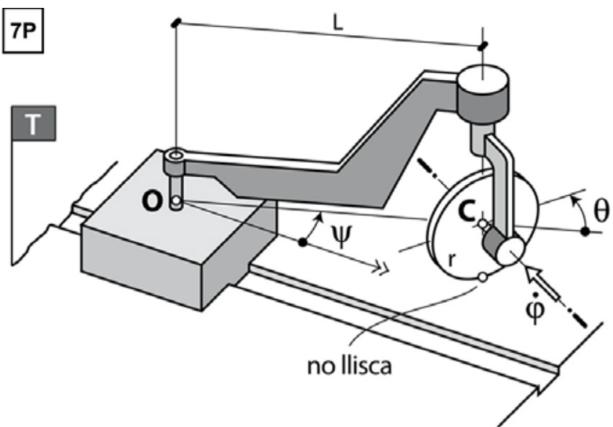
(III) = (III'):

$$O = \dot{x} - \dot{\psi}s \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \dot{\psi}s$$

$$r\dot{\varphi} = v - \dot{\psi}x \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{r} (v - \dot{\psi}x)$$

Si piloto amb joystick que dóna commandes de v i $\dot{\psi}$, aquestes funcions proporcionen les velocitats \dot{x} i $\dot{\varphi}$ que hauran de satisfer els motors.

7P



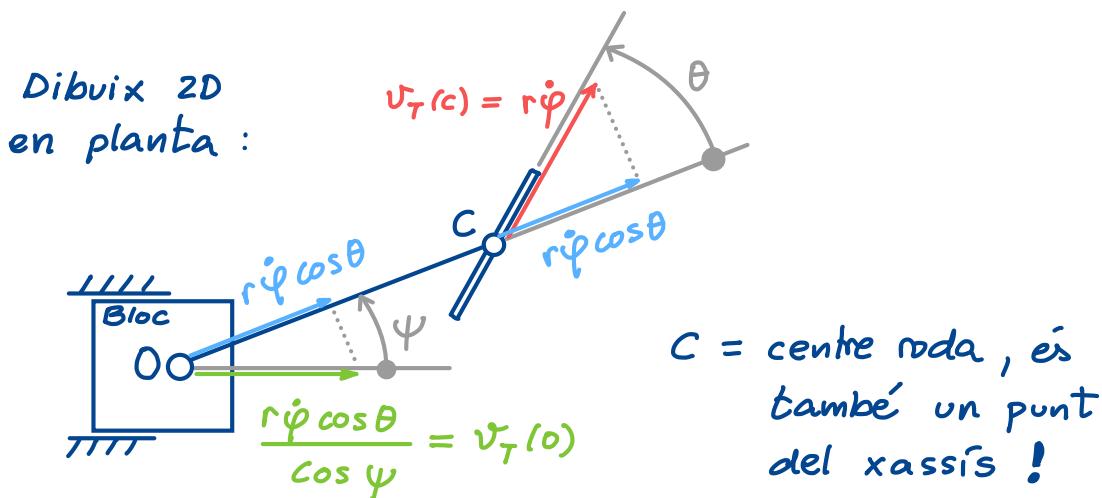
La roda no llisca al damunt del terra (T), i està articulada a un suport vertical.

El suport està articulat a un braç, que està articulat a un bloc. El bloc pot lliscar dins la guia rectilínia fixa a terra.

Calcula $|\bar{v}_T(O)|$ en funció de θ i de $\dot{\phi}$.



Es resol ràpidament aplicant equiprojectivitat :

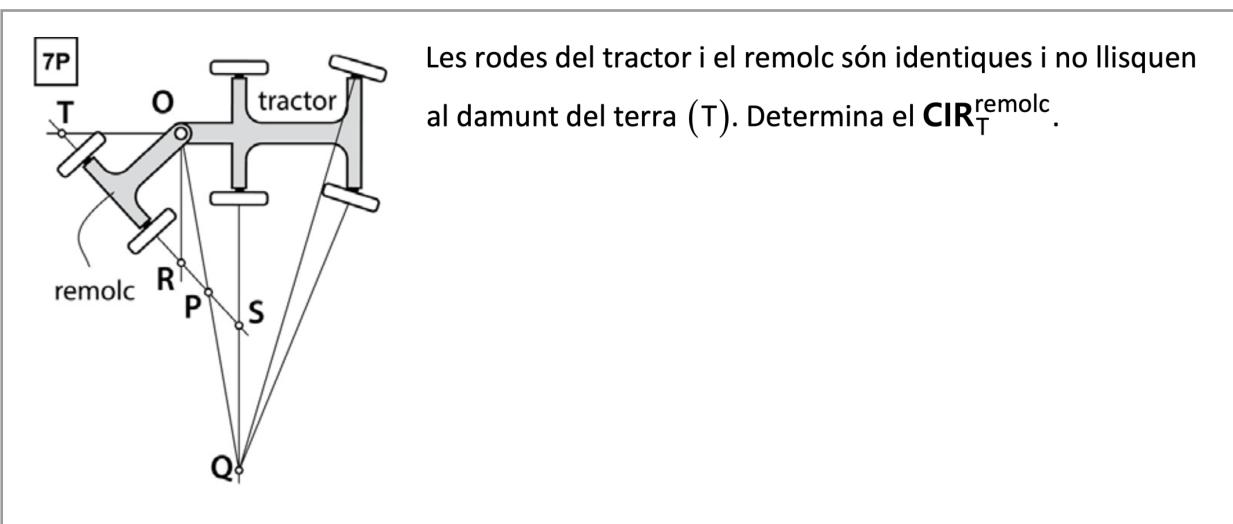


Passos :

1. Per cinemàtica de roda $\bar{v}_T(c) = (\pi r \dot{\phi})$.
2. La velocitat de O resp. T ha de ser en dir \rightarrow degut a l'eullaq prismàtic bloc - terra
3. Les projeccions (blaves) de $\bar{v}_T(c)$ i $\bar{v}_T(O)$ sobre la recta OC han de ser iguals per equiprojectivitat (altrament O i C s'allunyarien o s'apropanien).
4. De la projecció blava de $\bar{v}_T(c)$ dedui'm la projecció blava de $\bar{v}_T(O)$, i d'aquesta darrera dedui'm $\bar{v}_T(O) = \left(\rightarrow \frac{r\dot{\phi} \cos \theta}{\cos \psi} \right)$

Nota: Fixem-nos que l'anterior sistema té 2 GL: si aturem $\dot{\theta}$, el punt C encara es pot moure en la direcció del diàmetre horitzontal de la roda, fent desplaçar O al llarg de la dir. de la guia. Si ara aturem $\dot{\varphi}$ (o bé $\dot{\psi}$), tot queda aturat. Per tant, $\dot{\varphi}$ i $\dot{\psi}$ no són independents

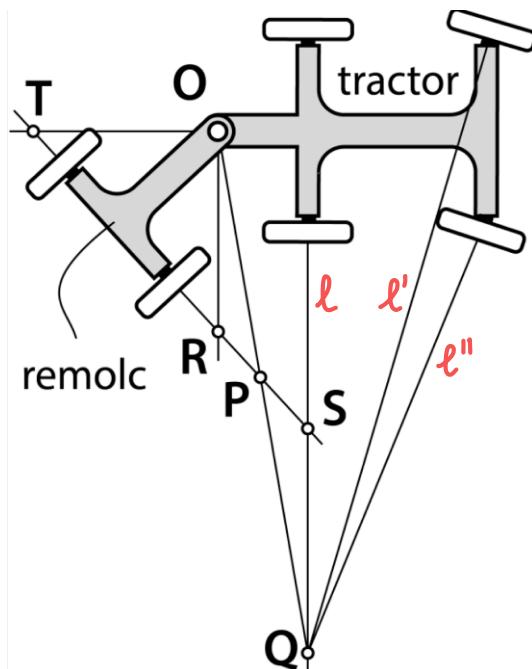
Els GL del sistema queden descrits per $\left| \begin{array}{l} \text{o bé } \dot{\theta} \text{ i } \dot{\varphi} \\ \text{o bé } \dot{\theta} \text{ i } \dot{\psi} \end{array} \right.$
però no per $\dot{\varphi}$ i $\dot{\psi}$ perquè no són independents



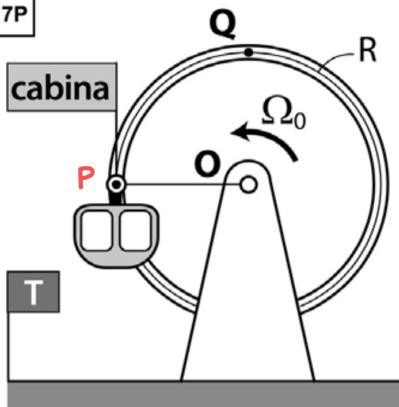
$$CIR_T^{\text{tractor}} = l \cap l' \cap l''$$

$\bar{v}_T(O)$ té dir. \perp a recta OQ

$$CIR_T^{\text{remolc}} = \left(\begin{array}{l} \text{recta} \\ \text{eix} \\ \text{remolc} \end{array} \right) \cap (\text{recta OQ})$$



7P



L'anella de la sénia gira amb velocitat Ω_0 constant respecte del terra (T). La cabina està articulada a l'anella. El punt Q és fix a l'anella. Calcula $\bar{a}_{\text{cabina}}(Q)$.

Fem comp. movim. amb $\left| \begin{array}{l} AB = T \\ \text{Rel} = \text{Cabina} \end{array} \right.$

$$\bar{a}_{\text{REL}}(Q) = \bar{a}_{AB}(Q) - \bar{a}_{ar}(Q) - \underbrace{\bar{a}_{cor}(Q)}_{0 \text{ perquè } \bar{\Omega}_{AB}^{\text{REL}} = 0} =$$

$$= (\downarrow \Omega_0^2 R) + (\rightarrow \Omega_0^2 R) = (\downarrow \Omega_0^2 R \sqrt{2})$$

$$\bar{a}_{AB}(Q) = (\downarrow \Omega_0^2 R)$$

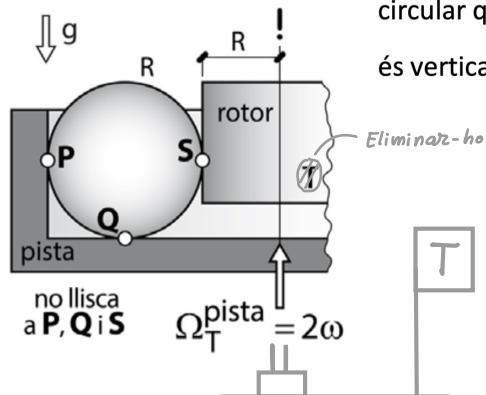
$$\bar{a}_{ar}(Q) = \bar{a}_{AB}(Q \in \text{Cabina}) = \bar{a}_{AB}(P) = (\rightarrow \Omega_0^2 R)$$

$\bar{\Omega}_T^{\text{cabina}} = \bar{0} \Rightarrow$ La cabina es translada (fa una translació circular). Tots els seus punts tenen igual vel. i accel.

$$\text{resp. } T \Rightarrow \bar{a}_{AB}(Q_{\text{cabina}}) = \bar{a}_{AB}(P) = (\rightarrow \Omega_0^2 R)$$

Obs: Respecte T , Q_{cabina} descriu una trajectòria circular igual a la de P , però desplaçada amb el vector $\bar{P}Q$. Sabeu veure on es $CC_T(Q_{\text{cabina}})$?

7P EIR_T^{bola} vertical



La bola manté contacte sense lliscar amb un rotor i una pista circular que gira amb 2ω respecte del terra (T). L'EIR_T^{bola} és vertical. Calcula $\bar{\Omega}_T^{\text{rotor}}$.

Solució 1: Via determinar EI_T^{Bola}

Adonem-nos que, com que P i Q no llisquen, P_{Bola} i Q_{Bola} tindran la mateixa velocitat que P_{pista} i Q_{pista} :

$$\bar{v}_T(P_{\text{Bola}}) = \bar{v}_T(P_{\text{pista}}) = (\odot 2\omega \cdot 3R) = (\odot 6\omega R)$$

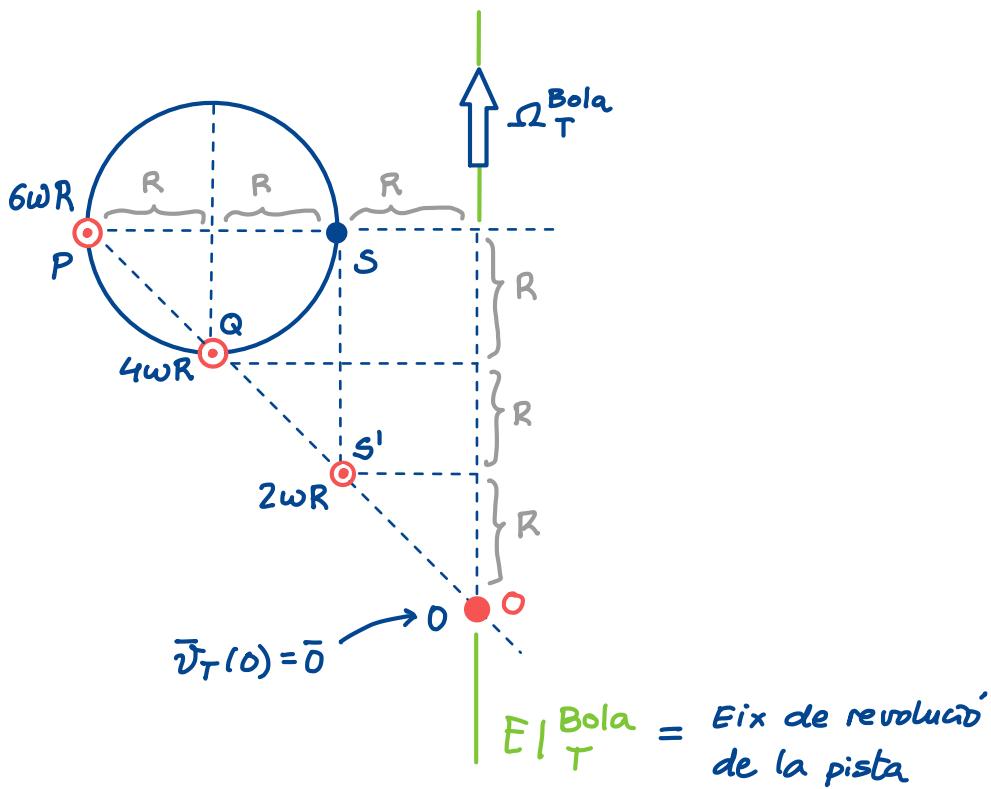
$$\bar{v}_T(Q_{\text{Bola}}) = \bar{v}_T(Q_{\text{pista}}) = (\odot 2\omega \cdot 2R) = (\odot 4\omega R)$$

Com que EI_T^{Bola} ha de ser vertical, necessàriament serà en el pla del dibuix i $\bar{v}_{EI} = \bar{v}$ (*), altrament les velocitats de P i Q no serien \perp al pla del dibuix.

Ara, al llarg de la recta PQ hi ha d'haver una distribució lineal de velocitats, proporcionals a la distància a EI_T^{Bola} . Per tant, sobre aquesta recta, a la distància de Q , hi ha d'haver un punt O de la bola amb velocitat nula respecte T .

El dibuix de la pàg. seg. fa patètic que O ha de ser la intersecció de la recta PQ amb l'eix de revolució de la pista.

(*) La vel. de lliscament al llarg de l'eix, \bar{v}_{EI} , serà zero.



Amb aquesta informació deduiu'm ràpidament que

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = \left(\uparrow \frac{4\omega R}{2R} \right) = (\uparrow 2\omega)$$

i, per tant,

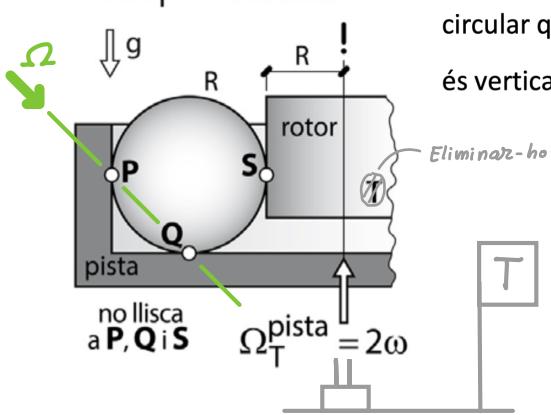
$$\bar{v}_T(S_{Bola}) = \bar{v}_T(S_{Rotor}) = (\uparrow 2\omega) \times (\leftarrow R) = (\odot 2\omega R) \quad (*)$$

Clarament, per induir aquesta velocitat sobre S , el rotor ha de girar amb

$\bar{\Omega}_T^{Rotor} = (\uparrow 2\omega)$

(*) Aquesta velocitat es podia anticipar poc abans observant la de S' ($\bar{v}_T(S') = v_T(S')$ perquè S i S' són sobre una recta \parallel a EI_T^{Bola}).

7P EIR_T^{bola} vertical



La bola manté contacte sense lliscar amb un rotor i una pista circular que gira amb 2ω respecte del terra (T). L'EIR_T^{bola} és vertical. Calcula $\bar{\Omega}_T^{\text{rotor}}$.

Eliminar ω_T

Solució 2, via composició de moviments

$$EI_{\text{Pista}}^{\text{Bola}} = \text{recta } PQ \Rightarrow \bar{\Omega}_{\text{Pista}}^{\text{Bola}} = (\Rightarrow \Omega)$$

Com que

Ha de tenir aquesta forma, amb Ω per determinar

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = \bar{\Omega}_{\text{Pista}}^{\text{Bola}} + \bar{\Omega}_T^{\text{Pista}} = (\Rightarrow \Omega) + (\uparrow 2\omega)$$

si $\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}}$ ha de ser vertical, necessàriament serà $\Omega = 0$, i per tant

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = (\uparrow 2\omega)$$

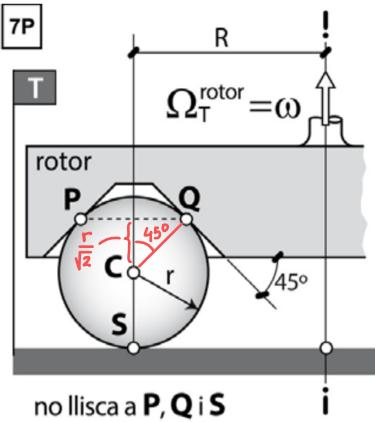
Podem calcular $\bar{v}_T(S_{\text{Bola}})$ fent comp. movim. $\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = \text{Pista} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AB}(S) &= \bar{v}_{REL}(S) + \bar{v}_{ar}(S) = \bar{v}_T(S_{\text{Bola}}) \\ &= \underbrace{(\Rightarrow \Omega) \times (\bar{Q}S)}_{0 \text{ perquè } \Omega = 0} + (\odot 2\omega R) = \underbrace{(\odot 2\omega R)}_{(\square)} \end{aligned}$$

Com que $S_{\text{Bola}} = S_{\text{rotor}}$, el rotor ha de girar amb

$$\bar{\Omega}_T^{\text{rotor}} = (\uparrow 2\omega)$$

per a provocar la velocitat $\bar{v}_T(S_{\text{Bola}})$ de (\square).



La bola manté contacte sense lliscar amb el terra (T) i amb un rotor que gira amb ω respecte del terra. Calcula $\bar{v}_T(C)$.

Solució :

$$EI \overset{\text{pdet}}{=} \text{recta } PQ \Rightarrow \bar{\Omega}_{\text{Rotor}}^{\text{Bola}} = (\Rightarrow \Omega), \text{ i per tant}$$

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = \bar{\Omega}_{\text{Rotor}}^{\text{Bola}} + \bar{\Omega}_T^{\text{Rotor}} = (\Rightarrow \Omega) + (\uparrow \omega) \quad (I)$$

Per determinar Ω , podem plantear ('equació' de composició de velocitats pel punt S, amb $AB = T$, $REL = \text{Rotor}$:

$$\bar{v}_{AB}(S) = \bar{v}_{REL}(S) + \bar{v}_{ar}(S)$$

$$\underbrace{\bar{v}_{AB}}_{AB} = \underbrace{(\Rightarrow \Omega)}_{REL} \times \left[+ \left(r + \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \right] + \underbrace{(\Omega \omega R)}_{ar}$$

1 equació en
1 incògnita
(Ω)

$$\bar{v}_{AB} = \left[\otimes \Omega \left(r + \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \right] + (\Omega \omega R)$$

$$\Omega \left(r + \frac{r}{\sqrt{2}} \right) = \omega R \Rightarrow \Omega = \frac{\omega R \sqrt{2}}{r(1+\sqrt{2})} \quad (II)$$

I finalment :

$$\boxed{\bar{v}_T(C) = \cancel{\bar{v}_T(S)} + \bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} \times \overline{SC} =} \quad \text{utilitzant (I)}$$

$$= \left[(\Rightarrow \Omega) + (\uparrow \omega) \right] \times (\uparrow r) =$$

$$= (\Omega \omega r) = \underline{\underline{\Omega \frac{\omega R \sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}}$$

Substituint (II)

Extra : Trobeu EI_T^{Bola}

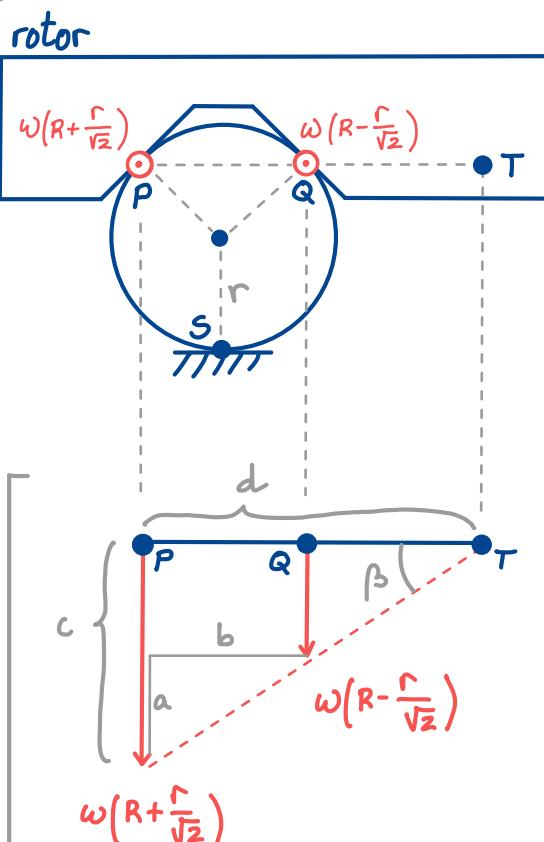
Amb la reducció prèvia, EI_T^{Bola} ja queda identificat: és la recta que passa per S i té vector director

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = \left(\Rightarrow \frac{\omega R \sqrt{2}}{r(1+\sqrt{2})} \right) + (\uparrow \omega)$$

Però busquem-lo partint de zero, amb les dades de l'enunciat. Com que $\bar{v}_T(S_{Bola}) = \bar{0}$, EI_T^{Bola} ha de passar per S i la velocitat de lliscament en la dir. de l'eix ha de ser zero. A més, veiem que :

$$\bar{v}_T(P) = \left[\odot \omega \left(R + \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad \bar{v}_T(Q) = \left[\odot \omega \left(R - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

Que ambdues velocitats s'igualen \odot indica que EI_T^{Bola} ha de ser en el pla del dibuix^(*). Al llarg de la recta PQ, la distribució ha de ser lineal (triangular).



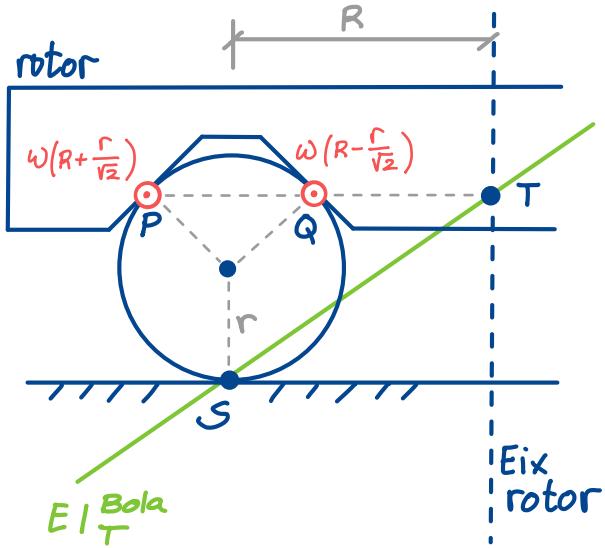
Del triangle de velocitats veiem que hi ha d'haver un punt T de velocitat nula a la reta de Q. Busquem la seva distància d a P :

$$d = \frac{c}{\tan \beta} = \frac{\omega(R + \frac{r}{\sqrt{2}})}{\omega} = R + \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \beta = \frac{a}{b} = \frac{\frac{2wr}{\sqrt{2}}}{\frac{2r}{\sqrt{2}}} = \omega$$

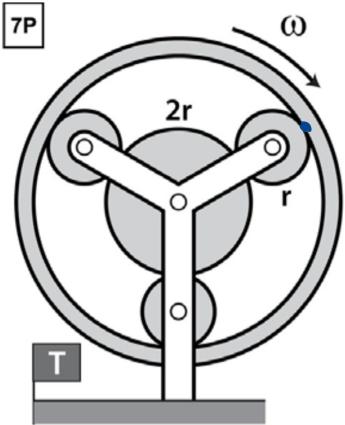
(*) Si no fos així, $\bar{v}_T(P)$ i $\bar{v}_T(Q)$ tindrien components addicionals, \perp al pla del dibuix

$d = R + \frac{r}{\sqrt{2}}$ és justament la distància de P a l'eix del rotor. Per tant, el punt T és la intersecció de la recta PQ amb l'eix del rotor:



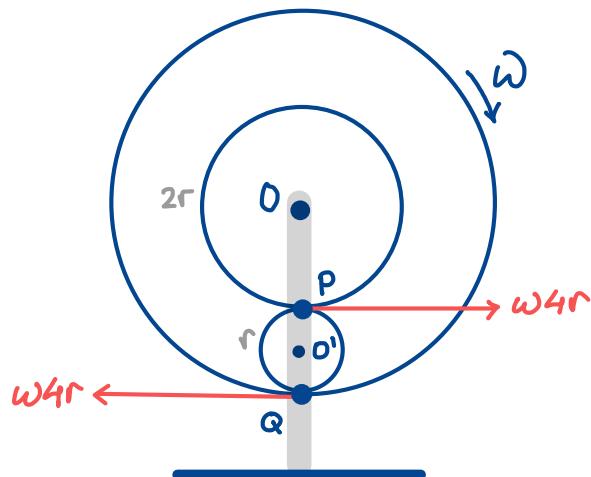
És a dir :

$$EI_{T}^{Bola} = \text{recta } ST$$



Les tres rodetes de radi r no llisquen en el seu contacte amb la de radi $2r$ ni en el contacte amb la corona exterior, que gira amb ω respecte del terra (T). Totes les rodes estan articulades al terra. Calcula $\bar{\Omega}_T^{\text{roda } 2r}$.

Solució



$$CIR_T^{\text{Corona}} = 0$$

↓

$$\bar{v}_T(Q) = (-\omega 4r)$$

$$CIR_T^{\text{Roda } r} = 0'$$

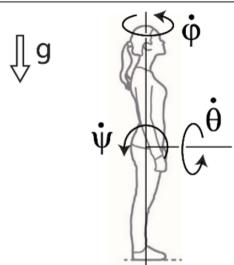
↓

$$\bar{v}_T(P) = (\omega 4r)$$

Com que $CIR_T^{\text{Roda } 2r} = 0$, ha de ser

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Roda } 2r} = \left(\odot \frac{\omega 4r}{2r} \right) = \left(\odot z\omega \right)$$

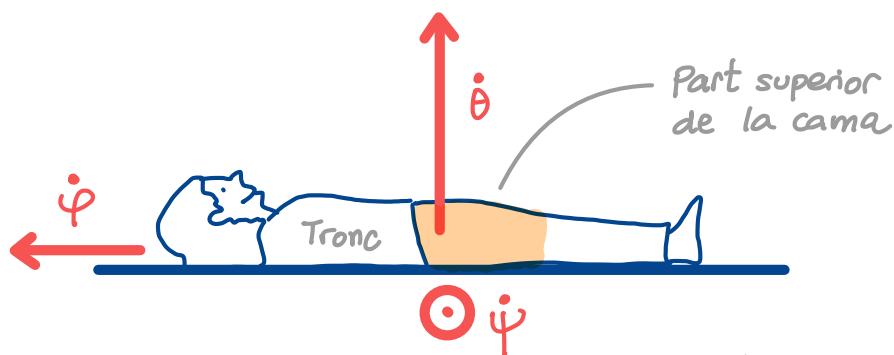
$\bar{\Omega}_{\text{tronc}}^{\text{cama}}$ en la posició de la figura inferior?



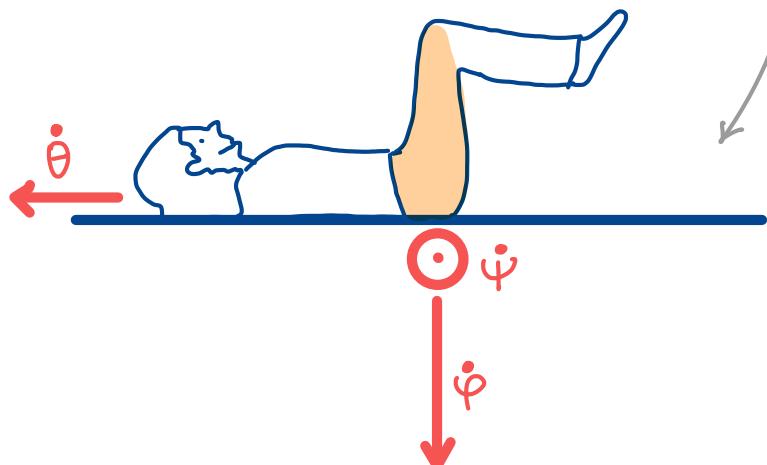
1 La part superior de la cama dreta (la que conté el fèmur) s'orienta respecte del tronc d'una persona mitjançant tres angles d'Euler. Quan la persona està dreta, les tres velocitats angulars associades tenen l'orientació indicada a la figura. Quina és l'orientació de les velocitats angulars associades als angles d'Euler d'aquesta mateixa cama respecte al tronc en la posició indicada a la figura inferior?

- A $(\odot\dot{\psi}), (\uparrow\dot{\theta}), (\leftarrow\dot{\phi})$
- B $(\odot\dot{\psi}), (\downarrow\dot{\theta}), (\leftarrow\dot{\phi})$
- C $(\odot\dot{\psi}), (\downarrow\dot{\theta}), (\Rightarrow\dot{\phi})$
- D $(\odot\dot{\psi}), (\leftarrow\dot{\theta}), (\downarrow\dot{\phi})$
- E $(\odot\dot{\psi}), (\leftarrow\dot{\theta}), (\uparrow\dot{\phi})$

Orientació de $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\phi}$ abans de flexionar

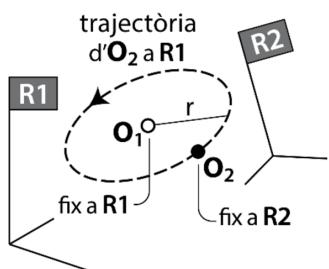


Després de flexionar:



Es produeix una rotació de 90° avd eix $\bar{\psi}$ que afecta $\bar{\theta}$ i $\bar{\phi}$ (però no $\bar{\psi}$)

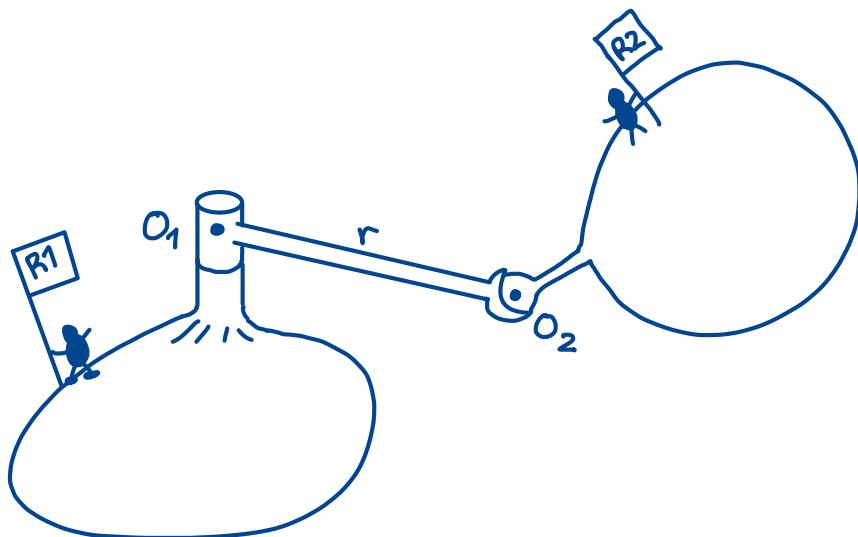
Trajectòria d' O_1 a R2?



2 El punt O_2 , fix a R2, descriu una trajectòria circular de radi r i centre O_1 respecte de R1. Què es pot dir de la trajectòria d' O_1 , fix a R1, respecte de R2?

- A Pot tenir qualsevol forma menys rectilínia
- B És circular amb radi $\neq r$
- C Pot tenir qualsevol forma sobre una esfera de radi r
- D És circular amb radi $=r$
- E Depèn de la base vectorial que es faci servir per descriure el vector de posició d' O_1 a R2

Podem pensar el segment O_1O_2 com una barra rígida articulada a R_1 :



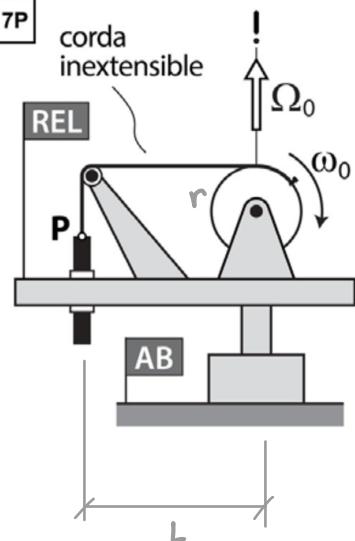
Com que l'extrem O_2 de la barra ha de ser fix a R_2 , l'imaginem enllaçat a R_2 mitjançant una ròtula esfèrica.

No hi ha més restriccions al moviment, apart de les dibuixades. Per tant:

Respecte l'observador d' R_2 O_1 es pot moure lliurement sobre una esfera de radi r centrada a O_2 .

RESP = C

7P



La politja està articulada a una plataforma, i gira respecte d'ella amb ω_0 constant. La plataforma gira amb Ω_0 constant respecte del terra (T). Una corda inextensible està enrotllada a la politja, i una pesa P penja de l'altre extrem. Calcula $\bar{a}_{ar}(P)$, $\bar{a}_{Cor}(P)$.

$$REL = Plat$$

$$AB = T$$

$$\bar{a}_{ar}(P) = \boxed{(\rightarrow \Omega_0^2 L)}$$

$$\bar{a}_{cor}(P) = 2 \bar{\Omega}_{AB}^{REL} \times \bar{v}_{REL}(P) = 2 (\uparrow \Omega_0) \times (\uparrow \omega_0 r) = \boxed{\bar{0}}$$