

# 14P

Versió 1.0

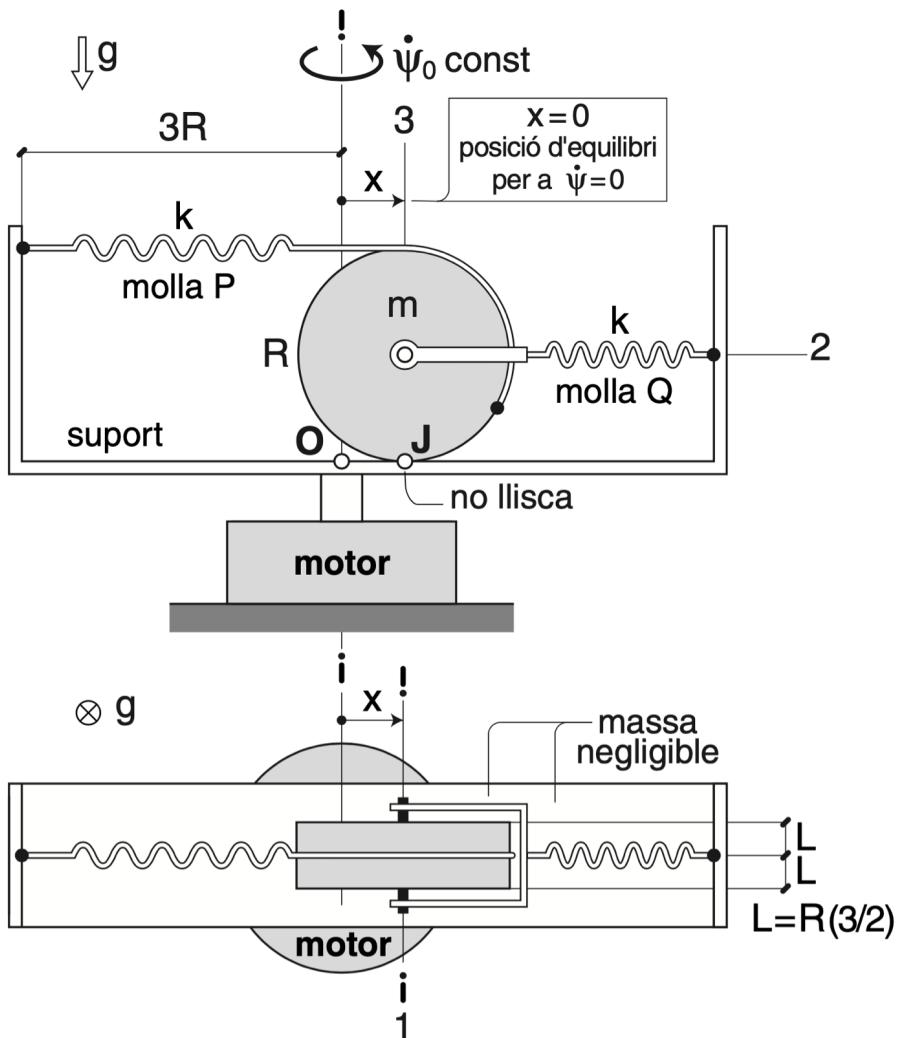
## Teoremes vectorials IV

Lluís Ros

<https://luisros.github.io/mecanica>

## Examen de REAVA, 7 de juliol 2015

El corró homogeni, de radi  $R$ , gruix  $2L$  (amb  $L=(3/2)R$ ) i massa  $m$ , manté contacte sense lliscar amb el suport, que té radi  $3R$ , massa negligible i gira amb velocitat angular  $\dot{\psi}_0$  constant respecte del terra. Les dues molles tenen una constant de rigidesa  $k$  i un dels seus extrems fixos al suport. La molla Q té l'altre extrem fix al centre del corró, en tant que la molla P s'enrotlla a la perifèria del corró. Per a  $x=0$ , que és d'equilibri per a  $\dot{\psi}_0=0$ , la molla P està tensada amb una força  $F_0$ .



Fes el diagrama general d'interaccions (DGI) i troba:

- L'equació del moviment per a la coordenada  $x$ .
- El parell motor  $\Gamma$  que garanteix  $\dot{\psi}_0 = \text{ct}$ .
- La força normal del suport sobre el corró.

## GL del sistema i incògnites associades

El sistema té 2 GL:

$\dot{\psi}_0$  (forçat)  $\Rightarrow \square$  és una incògnita del problema dinàmic.

$\ddot{x}$  (lliure)  $\Rightarrow \ddot{x}$  " " " " "

## Caracterització del contacte suport - corró a J

És un contacte multipuntual sense lliscament (c.m.p.s.ll.)

Com que el corró només té 1 GL respecte del suport (rodola radialment sobre aquest), el torsor d'enllaç suport  $\rightarrow$  corró introduirà 5 ie.

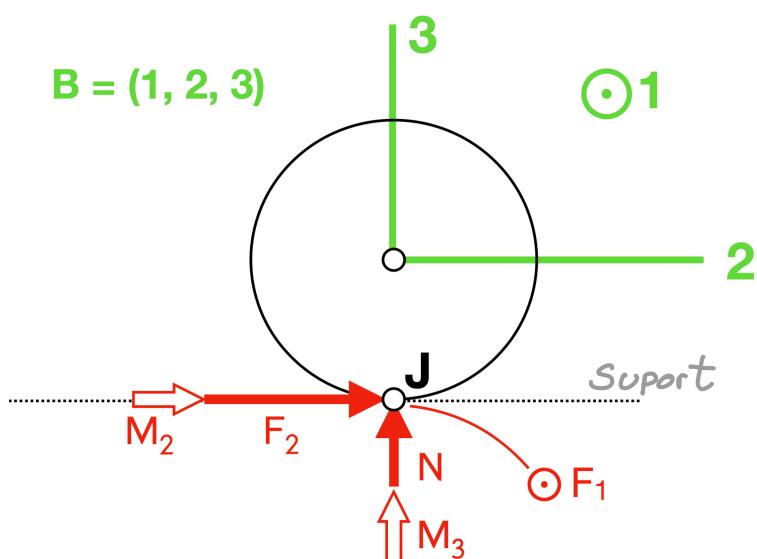
Caracteritzat a J, i en base B, aquest torsor és:

$$\left\{ \bar{F}_{\text{sup} \rightarrow \text{corro}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ N \end{Bmatrix}$$

$J_{\text{corró}}$  no llisca  
respecte suport

$$\left\{ \bar{M}_{\text{sup} \rightarrow \text{corro}} (J) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

Corró només pot girar  
en dir 1 resp suport



## Formulació de la força de la molla Q

Ens diuen que per a  $x=0$  i  $\dot{\psi}_0=0$  el sistema es en equilibri, i la molla P està fent una força de tensió  $F_0$   
entre els seus extrems.



Suposarem que la config inicial de referència que determina la llargària  $s_0$  és la donada per  $x=0$ .



Per trobar la força  $F'_0$  que fa la molla Q en aquesta config. apliquem les condicions d'equilibri sobre sist = corró :

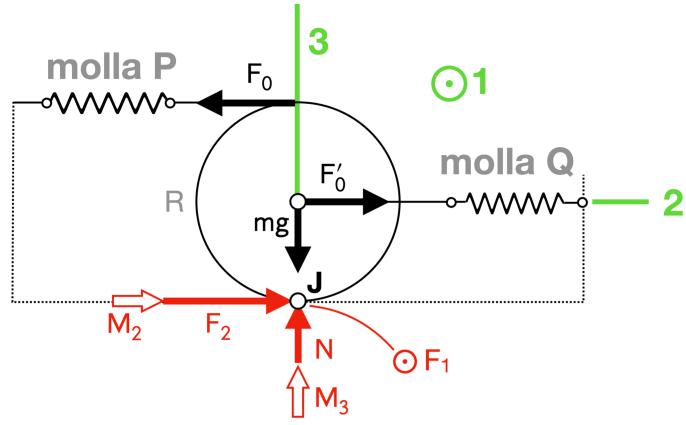
TMC (J) ]<sub>1</sub>, sist = corró :

$$\sum \bar{M}_{ext}(J) ]_1 = \bar{0}$$

$$(\odot F_{02R}) + (\otimes F_{0'R}) = \bar{0}$$

$$F_{02R} = F_{0'R}$$

$$F'_0 = 2 F_0$$



Surt  $F'_0$  atractiva  $\Rightarrow$  formulem la força de la molla Q amb el criteri d'atracció :

$$F_{mQ}^{at} = F'_0 + k \Delta g = 2 F_0 - k x$$

$$\Delta g = -x$$

(s'escurça en passar de la config de referència a la genèrica)

(\*) Una molla inserida en fil inextensible (com la molla P) només pot fer força atractiva, no repulsiva, ja que el fil sols pot treballar en tensió

### Pregunta freqüent

Acabem d'aplicar TMC a J, però J és un punt de contacte entre dos sòlids. No havíem quedat que es desaconsella aplicar el TMC en aquest tipus de punts?

### Resposta

Cert, però només es desaconsella en situacions dinàmiques, on cal calcular el moment cinètic i potser el terme complementari del TMC, que són càlculs delicats en aquests punts. En situacions d'equilibri estàtic aquests termes no apareixen i podem aplicar el TMC a qualsevol punt sense preocupar-nos-en (serà  $\sum \bar{M}_{ext}(\text{Punt}) = \bar{0}$  sobre el sistema).

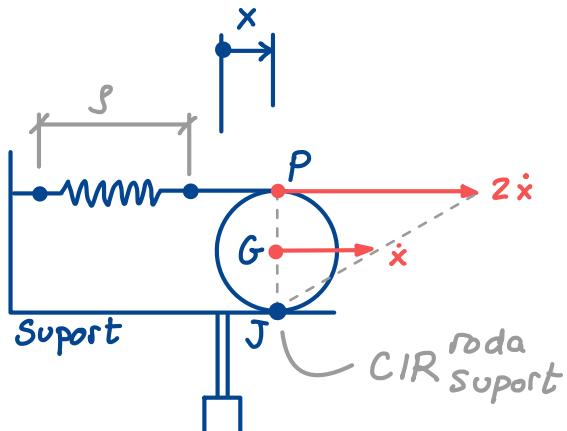
### Formulació de la força de la molla P

A la ref. suport

$$\bar{v}_{\text{Sup}}(P) = (-2\dot{x})$$

Clarament,

$$\dot{p} = 2\dot{x}$$



Integrant

$$\Delta p = \int_0^t \dot{p} dt = \int_0^t 2\dot{x}(t) dt = 2 \left[ x(t) \right]_0^t = 2 \left( x(t) - x(0) \right)$$

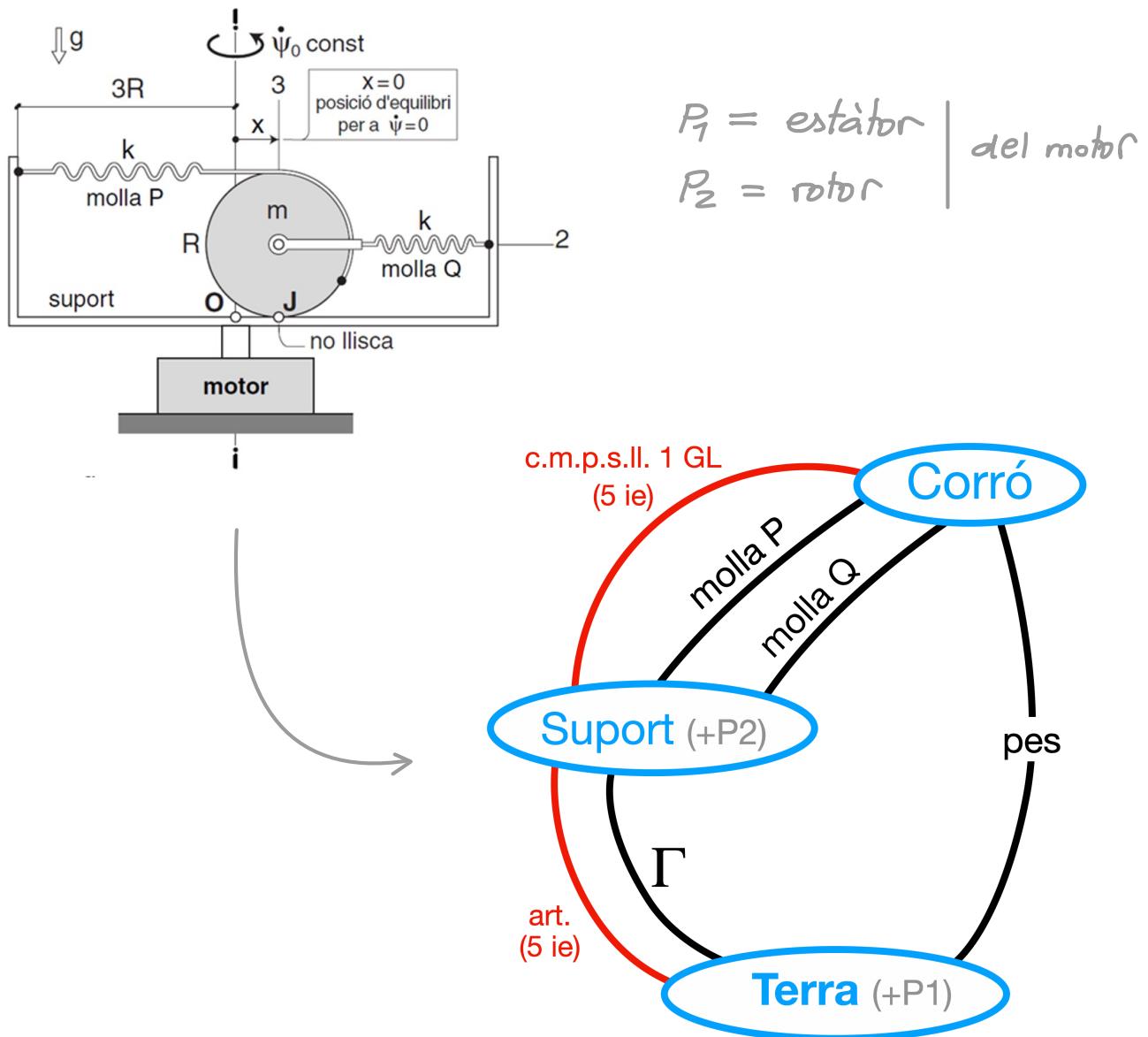
instant genèric del dibuix ↗  
instant en que  $x = 0$

En ser una molla inserida en fil inextensible només pot fer forces **atractives**  $\Rightarrow$  utilitzem el criteri d'atraçó:

Important

$$\boxed{\bar{F}_{mp}^{at}} = F_0 + K \Delta p = \boxed{F_0 + K 2x}$$

## DGI i anàlisi del problema dinàmic global



Recompte d'incògn. i egs. del problema dinàmic global:

12 incògnites : 10 ie,  $\Gamma$ ,  $\ddot{x}$

12 equacions : 2 sòlids .  $\frac{6 \text{ egs}}{\text{sòlid}}$



Problema **DETERMINAT**

## Eq. mov. coord. x

x només afecta la cinemàtica del corró (no la del suport). Per tant, el sist. haurà d'incloure el corró obligadament. Les úniques opcions són

Sistema	Incòg.	#incòg.	Problema
Corró	5 ie, $\ddot{x}$	6	DET
Corró + sup	5 ie, $\ddot{x}, \Gamma$	7	INDET

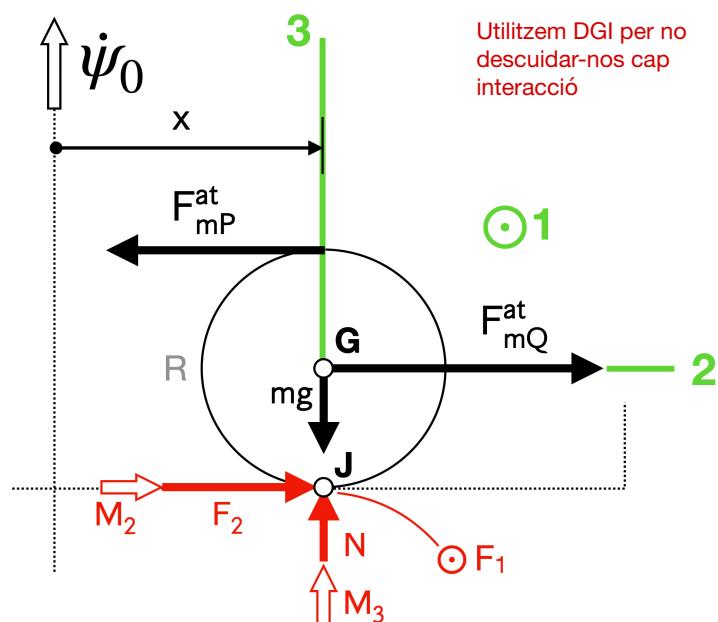
Per tant, explorem  $\sum \bar{F}_{ext}$  i  $\sum \bar{M}_{ext}$  sobre

sist = corró

per veure quines components del TMC i/o TQM caldran.

L'aplicació de TMC a J seria delicada, ja ho hem dit.

↓  
Explorem TMC a G (i potser TQM)



$$\left\{ \sum \bar{M}_{ext}(G) \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} F_{mP}^{at} \cdot R + F_2 R \\ M_2 - F_1 R \\ M_3 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Cap component lliure d'ie } \text{ (I)}$$

$$\left\{ \sum \bar{F}_{ext} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} F_1 \\ F_{mQ}^{at} - F_{mP}^{at} + F_2 \\ N - mg \end{array} \right\} \leftarrow \text{Explorem } \sum \bar{F}_{ext} \text{ pensant en TQM } \text{ (II)}$$

Amb TMC no n'hi haurà prou!

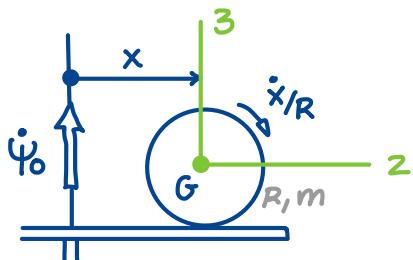
Veiem que les components  $TMC(G)]_1$  i  $TQM]_2$  sols contenen 1 ie  $(F_z)$ . També contindran  $\ddot{x}$ . Formaran un sistema d'eqs. lineal en 2 incògn. ( $\ddot{x} : F_z$ ). Ergo:

Full rotat eq. mov. $x$ ( $i F_z$ )	$TMC(G)]_1$ $TQM]_2$	sobre sist = corró (Aillarem $\ddot{x}$ i $F_z$ )
--	-------------------------	--

$TMC(G)]_1$ , sist = corró

$$\sum \bar{M}_{ext}(G) = \dot{\bar{H}}_{RTG}(G)$$

$$\bar{H}_{RTG}(G) = \mathbb{I}(G) \cdot \bar{\Omega}_{RTG}^{\text{corró}}$$



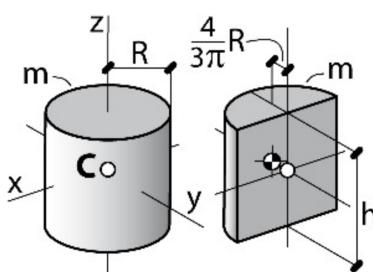
$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_T^{\text{corró}} &= \bar{\Omega}_{\text{sup}}^{\text{corró}} + \bar{\Omega}_T^{\text{sup}} = \\ &= \left( \otimes \frac{\dot{x}}{R} \right) + \left( \uparrow \dot{\psi}_0 \right) = \begin{Bmatrix} -\frac{\dot{x}}{R} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

$$\{\bar{H}_{RTG}(G)\}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I' & \\ & & I' \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}} \begin{Bmatrix} -\frac{\dot{x}}{R} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I \frac{\dot{x}}{R} \\ 0 \\ I' \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix}$$

Rotor simètric a G pel pla (2,3)

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

$$I' = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{(2L)^2}{12} \right)$$



**II(C)**

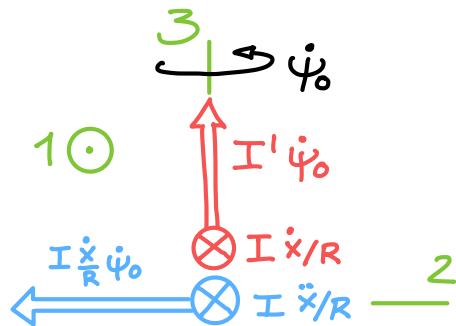
$$I_{xx} = m \left( \frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{12} h^2 \right)$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2} m R^2$$

rotor simètric a C

$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTG}(G) \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} -I \ddot{x}/R \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} + \left[ \bar{\Omega}_T^B \right] \times \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} -I \dot{x}/R \\ 0 \\ I' \dot{\psi}_0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -I \ddot{x}/R \\ -I \dot{x}/R \dot{\psi}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (\text{III})$$

Quadra amb  
deriv. analítica



$[I = \text{III}]_1 :$

$$F_{mp}^{at} \cdot R + F_2 R = -I \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$(F_0 + k_2 x) R + F_2 R = -\frac{m R^2}{z} \frac{\ddot{x}}{R}$$

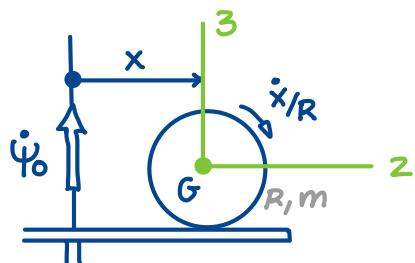
$$F_2 + F_0 + 2kx = -\frac{m \ddot{x}}{z}$$

$$F_2 = -\frac{m \ddot{x}}{z} - F_0 - 2kx \quad (\text{IV})$$

$TQM]_z$ , sist = corò

$$\sum \bar{F}_{ext} = m \bar{a}_T(G)$$

$\bar{a}_T(G)$  via comp. mov.  $\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = support \end{array} \right.$



$$\begin{aligned} \bar{a}_T(G) &= \bar{a}_{REL}(G) + \bar{a}_{ar}(G) + 2 \bar{\Omega}_{AB}^{REL} \times \bar{v}_{REL}(G) = \\ &= (\rightarrow \ddot{x}) + (-\dot{\psi}_0^2 x) + z (\uparrow \dot{\psi}_0) \times (\rightarrow \dot{x}) = \\ &= [\rightarrow (\ddot{x} - \dot{\psi}_0^2 x)] + (\otimes 2 \dot{\psi}_0 \dot{x}) = \left\{ \begin{matrix} 2 \dot{\psi}_0 \dot{x} \\ \ddot{x} - \dot{\psi}_0^2 x \\ 0 \end{matrix} \right\}_B \quad (\text{V}) \end{aligned}$$

$$[(II) = m \cdot (v)]_z :$$

$$F_{MQ}^{at} - F_{MP}^{at} + F_2 = m (\ddot{x} - \dot{\psi}_o^2 x)$$

$$2F_0 - kx - F_0 - 2kx + F_2 = m \ddot{x} - m \dot{\psi}_o^2 x$$

$$F_0 - 3kx + F_2 = m \ddot{x} - m \dot{\psi}_o^2 x$$

↓ utilitzant  $F_2$  de (IV)

$$\cancel{F_0} - 3kx - \frac{m\ddot{x}}{2} - \cancel{F_0} - 2kx = m \ddot{x} - m \dot{\psi}_o^2 x$$

I d'aquí arribem a l'eq. mov. que buscavem:

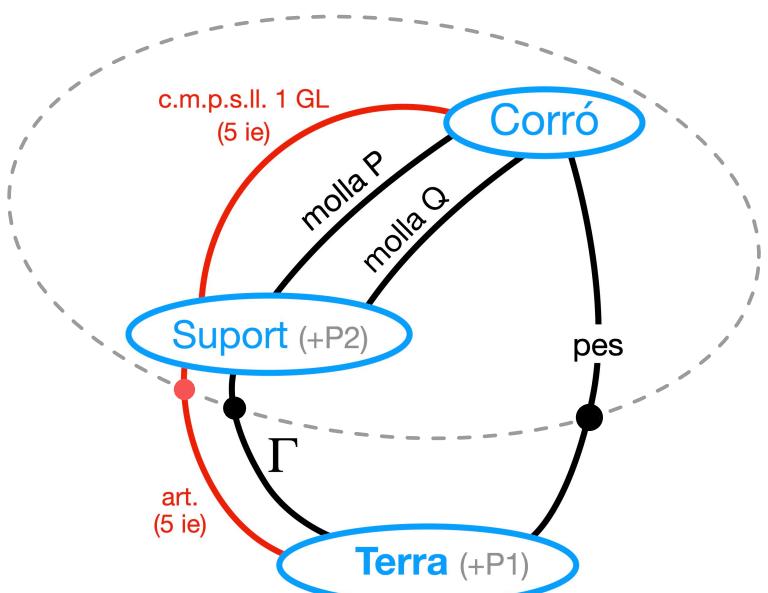
$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + (5k - m \dot{\psi}_o^2) x = 0$$

Forma implícita

$$\ddot{x} = \frac{2}{3m} (m \dot{\psi}_o^2 - 5k) x \quad (VI)$$

Forma explícita

Parell motor  $\Gamma$  per mantenir  $\dot{\psi}_o = ct$



Ara  $\ddot{x}$  ja no és incògnita [la sabem de (VI)].

Per sist = corró + suport tindrem

$$5ie + \Gamma \rightarrow 6 \text{ incògn.}$$

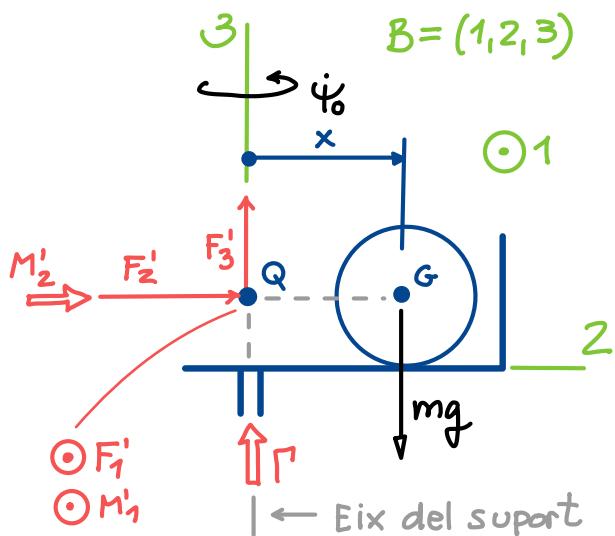
i el problema serà DETERMINAT

Mirant les forces i moments sobre sist = corró + suport:

Torsor enllaç T → sup a Q:

$$\{\bar{F}_{T \rightarrow \text{sup}}\} = \begin{Bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{M}_{T \rightarrow \text{sup}}(Q)\} = \begin{Bmatrix} M_1' \\ M_2' \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Si prenem moments resp. Q en dir. 3, només apareix  $\Gamma$ . Ergo:

Full ruta per  $\Gamma$

$TMC(Q)]_3$  per sist = corró + suport

$$\underbrace{\sum \bar{M}_{\text{ext}}(Q)]_3}_{\Gamma} = \underbrace{\bar{H}_{RTQ}(Q)]_3}_{\text{Calculem-ho}}$$

$$\bar{H}_{RTQ}(Q) = \bar{H}_{RTG}(G) + \underbrace{\bar{QG} \times m \bar{v}_T(G)}_{Q \notin \text{corró}}$$

$$\{\bar{H}_{RTQ}(Q)\}_B = \begin{Bmatrix} -I \ddot{x}/R \\ -I \dot{x}/R \cdot \dot{\psi}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \dot{\psi}_0 x^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I \ddot{x}/R \\ -I \dot{x}/R \cdot \dot{\psi}_0 \\ m \dot{\psi}_0 x^2 \end{Bmatrix}$$

Els tenim d'abans

$$\{\bar{QG} \times m \bar{v}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{Bmatrix} \times m \begin{Bmatrix} -\dot{\psi}_0 x \\ \dot{x} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \dot{\psi}_0 x^2 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q) \right\}_B = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 2m\dot{\psi}_o \times \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_o \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -I \ddot{x}/R \\ -I \dot{x}/R \cdot \dot{\psi}_o \\ m\dot{\psi}_o x^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 2m\dot{\psi}_o \times \dot{x} \end{Bmatrix}$$

$\boxed{\bar{\Omega}_T^B}$

Per tant

$$P = 2m\dot{\psi}_o \times \dot{x}$$

### Força normal a J

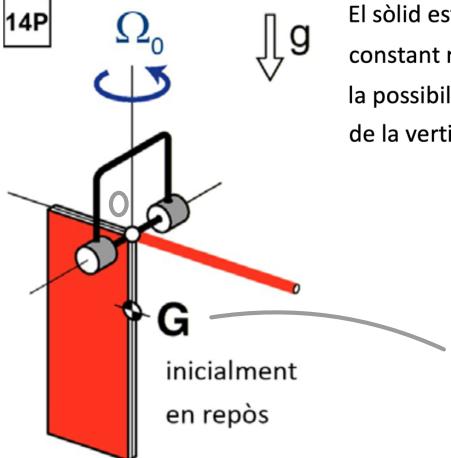
Del TQM  $]_3$  per sist = corró, tenim:

$$N - mg = m \cdot 0$$

$\Downarrow$

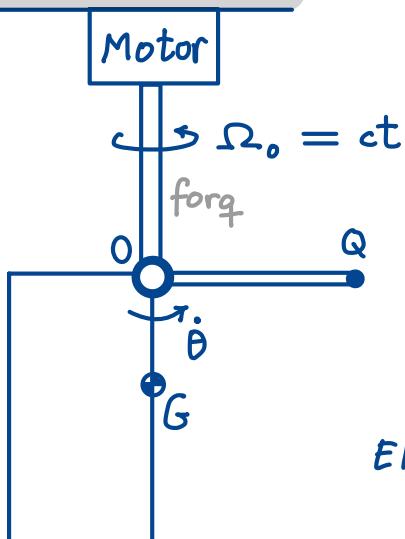
$$N = mg$$

14P



El sòlid està format per una barra i una placa rectangular, i gira amb  $\Omega_0$  constant respecte del terra ( $T$ ) sota l'acció d'un motor. Investiga la possibilitat que el sòlid giri sense que el seu centre d'inèrcia  $G$ s'allunyi de la vertical que passa per  $O$ .

És el centre d'inèrcia del sòlid  
(barra + placa)



Volem que la barra es mantingui horizontal

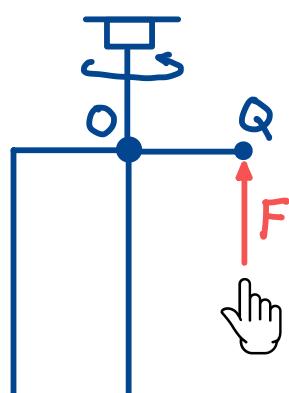
El motor garanteix  $\Omega_0 = ct$ , però

$$\bar{\Omega}_T^{\text{sòlid}} = \underbrace{(\ddot{\theta} \dot{\theta})}_{\bar{\Omega}_T^{\text{sòlid}}} + \underbrace{(\uparrow \Omega_0)}_{\bar{\Omega}_T^{\text{forq}}}$$

Per mantenir la barra horizontal caldrà que  $\dot{\theta} = 0$ . És a dir, que

$$\bar{\Omega}_T^{\text{sòlid}} = (\uparrow \Omega_0) = ct$$

Suposarem que  $\bar{\Omega}_T^{\text{sòlid}}$  és aquesta i esbrinarem si cal aplicar una força  $(\uparrow F)$  a  $Q$  per garantir-la.



Si ens surt

Voldrà dir que

$$F = 0$$

El sòlid pot girar amb  $(\uparrow \Omega_0)$ , sense necessitat d'aplicar cap força ( $\uparrow F$ ).

$$F > 0$$

Si no apliquem  $\uparrow F$ , el sòlid tendirà a girar així  respecte forç

$$F < 0$$

Si no apliquem  $\uparrow F$ , el sòlid tendirà a girar així  respecte forç

La velocitat angular  $\bar{\Omega}_T^{\text{sòlid}} = (\uparrow \Omega_0)$  ha de ser compatible amb el TMC aplicat al sòlid. Formulem aquest teorema per trobar  $F$ .

TMC (0), sist = sòlid

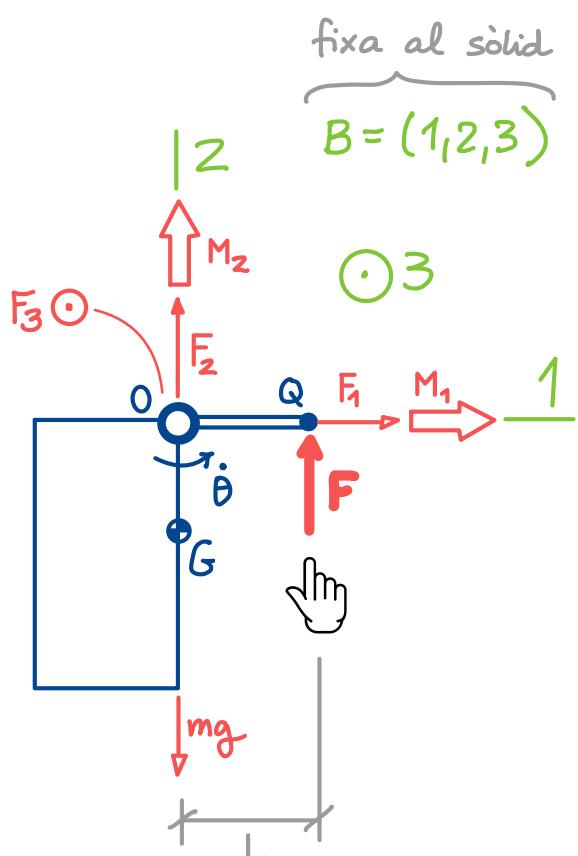
$$\underbrace{\sum \bar{M}_{\text{ext}}(0)}_{O \text{ fix a } T \Rightarrow \text{terme complementari nul}} = \dot{H}_{RTO}(0)$$

Per calcular-ho dibuixem forces i moments sobre el sòlid →

Torsor d'enllaç forç → sòlid a 0:

$$\left\{ \bar{F}_{\text{forç} \rightarrow \text{sòlid}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{M}_{\text{forç} \rightarrow \text{sòlid}(0)} \right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



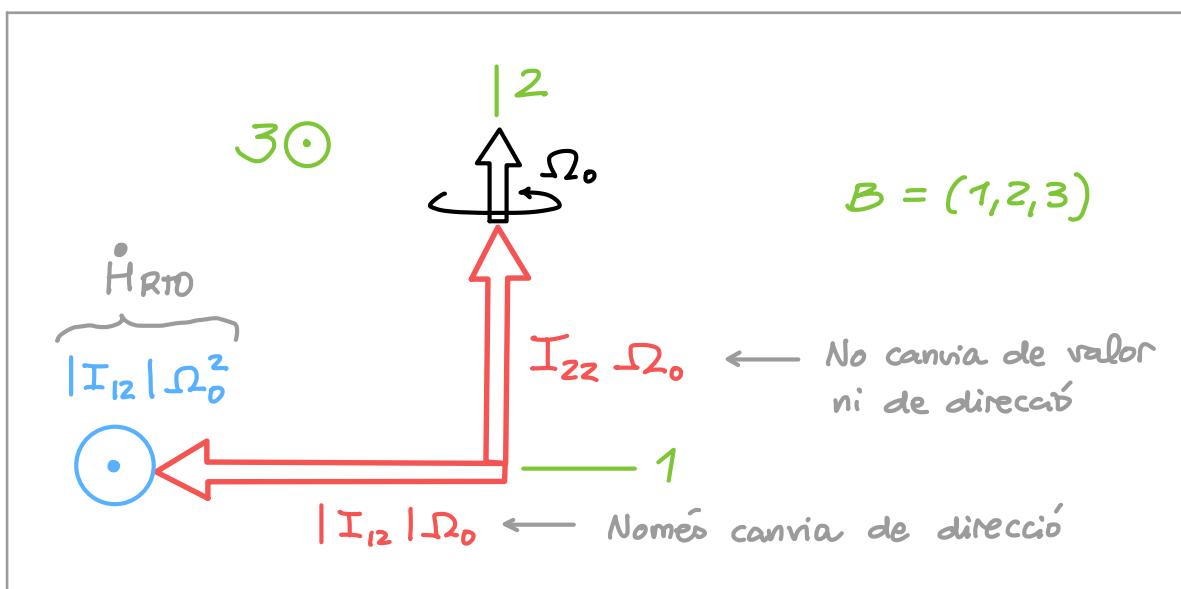
$$\left\{ \sum \bar{M}_{ext}(o) \right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ FL \end{Bmatrix} \quad (\text{I})$$

$$\left\{ \bar{H}_{RTO}(o) \right\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & -|I_{12}| & 0 \\ |I_{12}| & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -|I_{12}|\Omega_0 \\ I_{22}\Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\bar{\Omega}_{solid}(o)}$        $\bar{\Omega}_{RTO}^{solid} = \bar{\Omega}_T^{solid}$

Fig plana  $\Rightarrow$  3 és DPI

$I_{12} < 0$  ja que la massa és al 3er quadrant de o  
(la massa de la barra no contribueix a  $I_{12}$ )



$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTO}(o) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ |I_{12}|\Omega_0^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II})$$

$(\text{I}) = (\text{II})$

$$M_1 = 0$$

$$M_2 = 0$$

$$FL = |I_{12}|\Omega_0^2 \Rightarrow$$

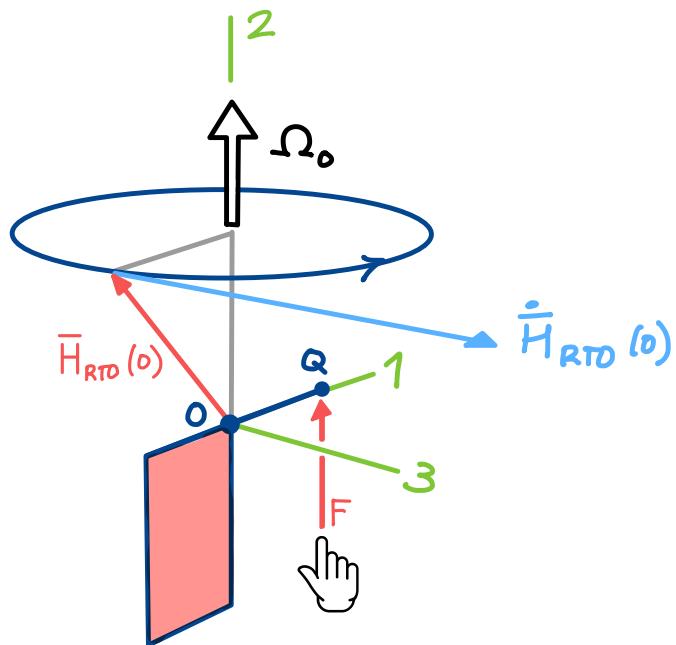
$$F = \frac{|I_{12}|\Omega_0^2}{L} \quad (\text{III})$$

$F > 0$

Conclusió

El sòlid girarà en sentit horari si no apliquem  $F$

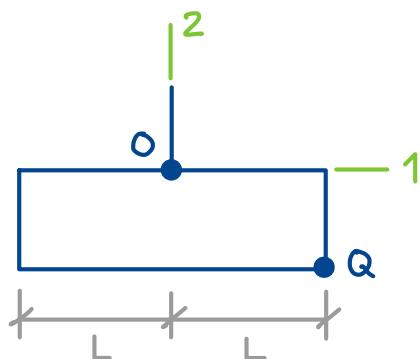
Per a mantenir  $\dot{\theta} = 0$  caldrà aplicar  $\uparrow F$  durant tot el moviment del sólid



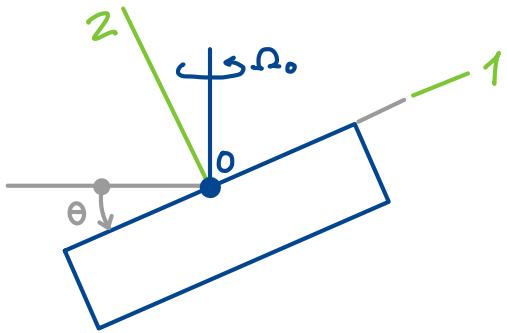
$(\uparrow F)$  crea el moment necessari, en dir. 3, que fa que la component 3 del TMC(0) es compleixi.

Què passaria si la dir. 2 fos DPI per al punt O ?

Un exemple de sólid on la dir. 2 és DPI és



En aquest cas,  $I_{12} = 0 \Rightarrow \bar{H}_{RTD}$  i  $\bar{\Omega}_0$  serien paral·lels, i de l'Eq. (III) veiem que  $F=0$ . No caldrà aplicar cap força sobre Q per mantenir  $\dot{\theta}=0$ . Dit d'una altra manera, si definim l'angle  $\theta$  així



la posició  $\theta = 0$  seria d'equilibri.

Però, ... seria estable? Per esbrinar-ho cal analitzar l'equació del mov. per a  $\theta$ , que de teoria sabem que és

$$I_{33} \ddot{\theta} + [mgl + (I_{zz} - I_{11})\Omega_0^2 \cos \theta] \sin \theta = 0 \quad (\text{IV})$$

Per trobar les configuracions d'equilibri substituim

$$\theta = \theta_{eq}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \ddot{\theta} = 0$$

a (IV) :

$$[mgl + (I_{zz} - I_{11})\Omega_0^2 \cos \theta_{eq}] \sin \theta_{eq} = 0 \quad (\text{V})$$

Clarament  $\theta_{eq} = 0$  és d'equilibri ja que satisfa (V).

Per veure si  $\theta_{eq} = 0$  és d'equilibri estable obtenim l'EDO de l'error associada a (IV)

$$I_{33} \ddot{\varepsilon} + [mgl + (I_{zz} - I_{11})\Omega_0^2 \cos \varepsilon] \sin \varepsilon = 0$$

La linearitzem al voltant de  $\varepsilon = 0$ :

$$\underbrace{I_{33} \ddot{\varepsilon}}_A + \underbrace{[mgl + (I_{zz} - I_{11})\Omega_0^2]}_B \varepsilon = 0$$

Identifiquem  $K$ :

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{B}{A}\varepsilon \quad K$$

I veiem que

$$K > 0 \Leftrightarrow \frac{B}{A} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{mgl + (I_{22} - I_{11})\Omega_0^2}_{\text{sempre} > 0} > 0$$

Equilibri estable

Ergo:

Si  $I_{22} > I_{11} \Rightarrow \theta_{eq} = 0^\circ$  és d'equilibri estable  $\forall \Omega_0$

Si  $I_{22} < I_{11} \Rightarrow \theta_{eq} = 0^\circ$  és d'equilibri estable per  $\Omega_0 < \Omega_{c\text{rítica}}$ , altrament inestable.

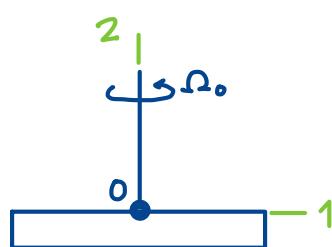
Càlcul de  $\Omega_{c\text{rítica}}$

$$mgl + (I_{22} - I_{11})\Omega_0^2 > 0 \Rightarrow \Omega_0 < \sqrt{\frac{mgl}{I_{11} - I_{22}}} \quad \Omega_{c\text{rítica}}$$

En resum:

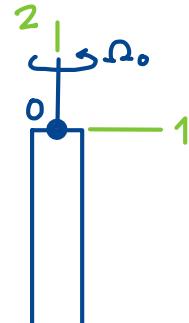
$I_{22} > I_{11}$	$I_{11} > I_{22}$
-------------------	-------------------

$\theta_{eq} = 0^\circ$  ESTABLE  $\forall \Omega_0$

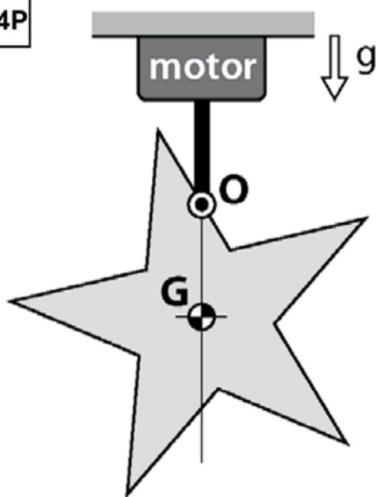


$I_{11} > I_{22}$
-------------------

$\theta_{eq} = 0^\circ$  | EST si  $\Omega_0 < \Omega_{c\text{rítica}}$   
| INEST altrament



14P



El sòlid homogeni en forma d'estrella gira amb  $\Omega_0$  constant respecte del terra ( $T$ ) sota l'acció d'un motor. Investiga la possibilitat que el sòlid giri que el seu centre d'inèrcia  $G$  s'allunyi de la vertical que passa per  $O$ .  
(sense)

Podem aplicar la mateixa tècnica que en l'exercici anterior.



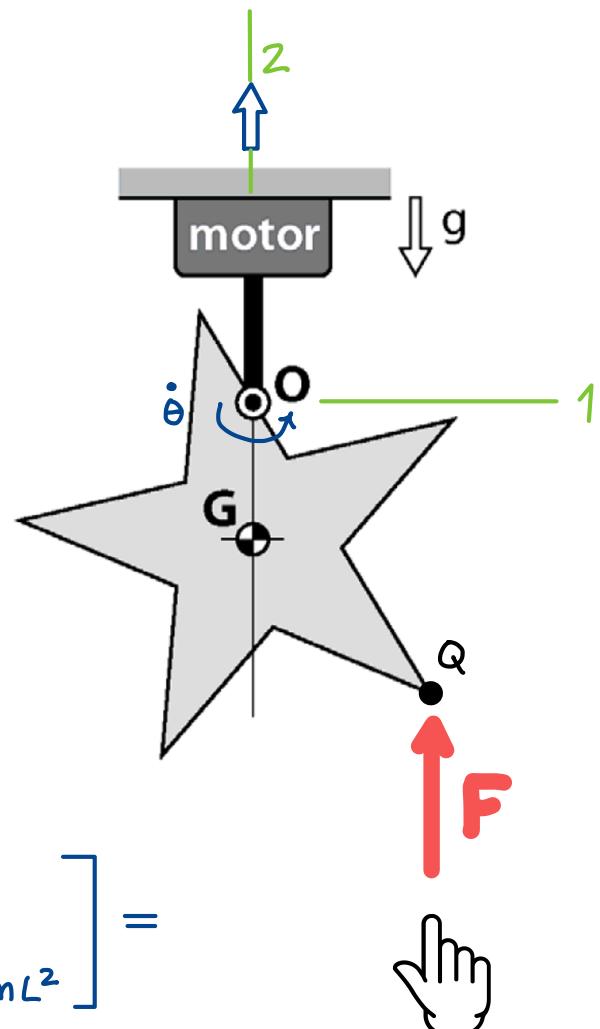
Quina ( $\uparrow F$ ) cal aplicar a  $Q$  per evitar la rotació  $\bar{\Omega}_{\text{forç}} = (\odot \dot{\theta})$ ?

En aquest cas

$$[\mathbb{I}(O)]_B = [\mathbb{I}(G)]_B + [\mathbb{I}^\oplus(O)]_B =$$

Steiner

$$= \left[ \begin{array}{cc} I & \\ & I \\ \hline & zI \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} mL^2 & \\ & 0 \\ \hline & mL^2 \end{array} \right] =$$



Sòlid és rotor simètric a  $G$ . No sabem  $I$  però no cal.

$$= \left[ \begin{array}{cc} I + mL^2 & \\ I & \\ \hline & 2I + mL^2 \end{array} \right]$$

$I_{11}$

$I_{22}$

Clarament  $I_{22} < I_{11}$

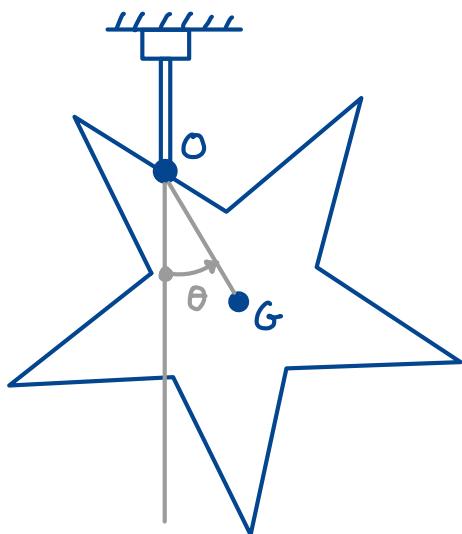
Com que la dir. z és DPI, per l'anàlisi que hem fet a l'exercici anterior (o a classe de teoria) el sólid no tindrà tendència inicial a inclinar-se

De l'anàlisi del tensor d'inèrzia hem vist que

$$I_{22} < I_{11}$$

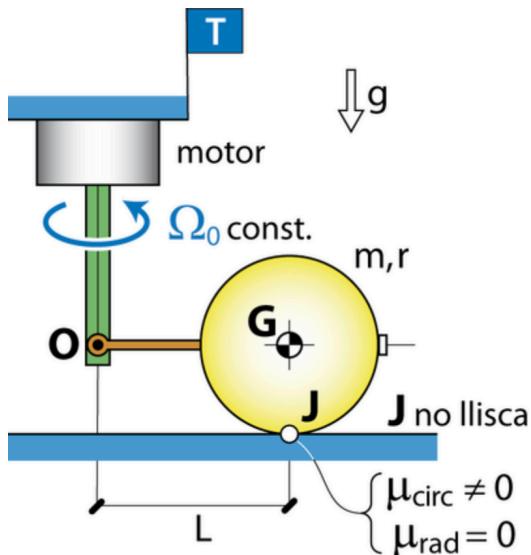
Per tant,  $\theta_{eq} = 0^\circ$  serà posició d'equilibri estable per a valors de  $\Omega_0$  inferiors a una certa  $\Omega_{c\text{rítica}}$ .

Per  $\Omega_0 > \Omega_{c\text{rítica}}$ , la posició  $\theta_{eq} = 0$  serà d'equilibri inestable.

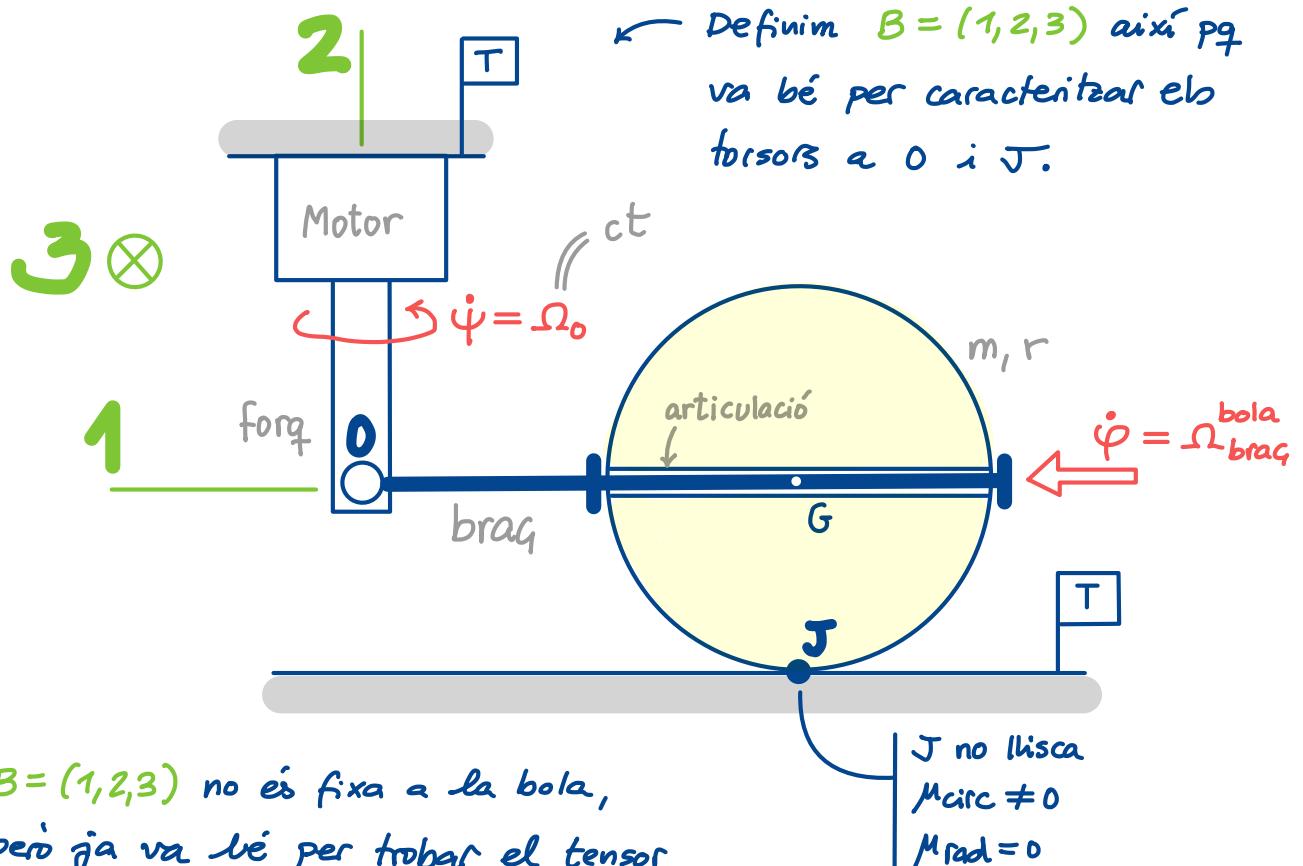


### Bola giratòria (Q8, juny 2016)

Exemple resolt D7.4 de Wikimec



La bola, de massa  $m$  i radi  $r$ , manté un contacte puntual sense lliscament amb el terra i està articulada a un braç horitzontal. El braç està articulat a una forquilla que gira amb velocitat angular constant sota l'acció d'un motor. Braç i forquilla tenen massa negligible. El coeficient de fricció en direcció radial entre bola i terra és nul ( $\mu_{\text{rad}} = 0$ ). Es tracta d'investigar si la rotació  $\Omega_0$  pot provocar la pèrdua de contacte entre bola i terra.



$B = (1,2,3)$  no es fixa a la bola, però ja va bé per trobar el tensor d'inèrcia de la bola, ja que aquesta és rotor esfèric a  $G$

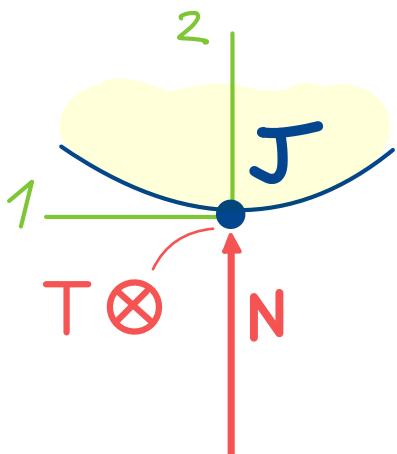
## Caracterització de l'enllaç Terra $\rightarrow$ Bola

A J hi tenim un contacte puntual sense lliscament (c.p.s.ll.)

En aquests contactes típicament hi ha la força normal  $N$  i dues components tangencials  $T_1$  i  $T_2$ , però en aquest cas ens diuen

$$\begin{array}{l} \mu_{\text{circ}} \neq 0 \\ \mu_{\text{rad}} = 0 \end{array} \Rightarrow \text{Sols hi ha rugositat en dir. circumferencial, no radial}$$

Per tant, sols hi haurà component tangencial en la dir. circumferencial<sup>(\*)</sup>, i el tensor d'enllaç  $T \rightarrow$  Bola a J serà:

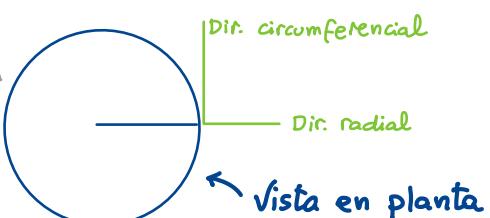


$$\left\{ \bar{F}_{T \rightarrow \text{Bola}} \right\}_B = \begin{cases} 0 \\ N \\ T \end{cases} \quad \begin{matrix} \leftarrow N > 0 \\ \leftarrow \text{Component en dir. circumferencial} \end{matrix}$$

$$\left\{ \bar{M}_{T \rightarrow \text{Bola}}(J) \right\}_B = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Per veure si el contacte a J es pot perdre, cal investigar si  $N$  es pot fer zero per algun valor  $\Omega_0$ .

(\*)  $J_{\text{geom}}$  descriu una circumferència sobre el terra.



## Anàlisi de GL i incògnites associades

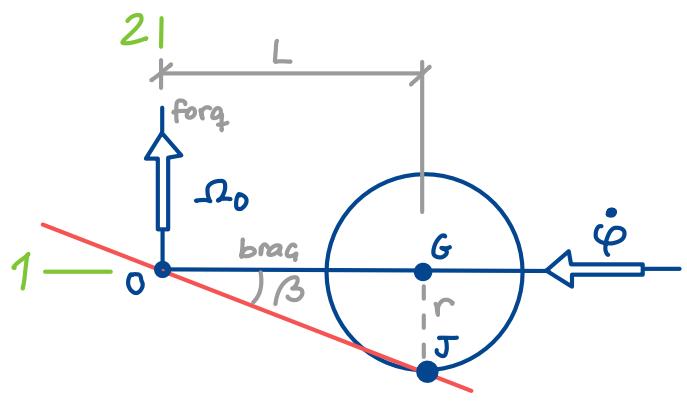
El sistema té 1 GL, que podem associar a  $\dot{\psi} = \Omega_0$  (si aturem  $\dot{\psi}$ , tot queda aturat pq a J no hi ha lliscament)

És un GL forgat: el motor aplica el parell  $\Gamma$  que calgui per garantir que  $\dot{\psi} = \Omega_0 = \text{ct}$ . Com que  $\ddot{\psi} = 0 \forall t$ , la incògnita associada al GL no és  $\ddot{\psi}$ , sinó  $\Gamma$ .

## Estudi cinemàtic

La rotació  $\dot{\psi}$  de la bola resp. braç es pot posar efd  $\Omega_0$ :

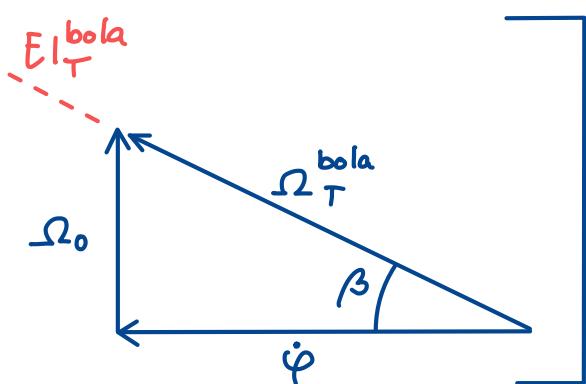
$$EI_T^{\text{bola}} = \text{recta } OJ$$



$$\bar{\Omega}_T^{\text{bola}} = \bar{\Omega}_{\text{braç}}^{\text{bola}} + \underbrace{\bar{\Omega}_{\text{forg}}^{\text{bola}}}_{\bar{\Omega}_0} + \bar{\Omega}_T^{\text{forq}}$$

$$= (\leftarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \Omega_0)$$

La suma ha de tenir la dir. de  $EI_T^{\text{bola}}$



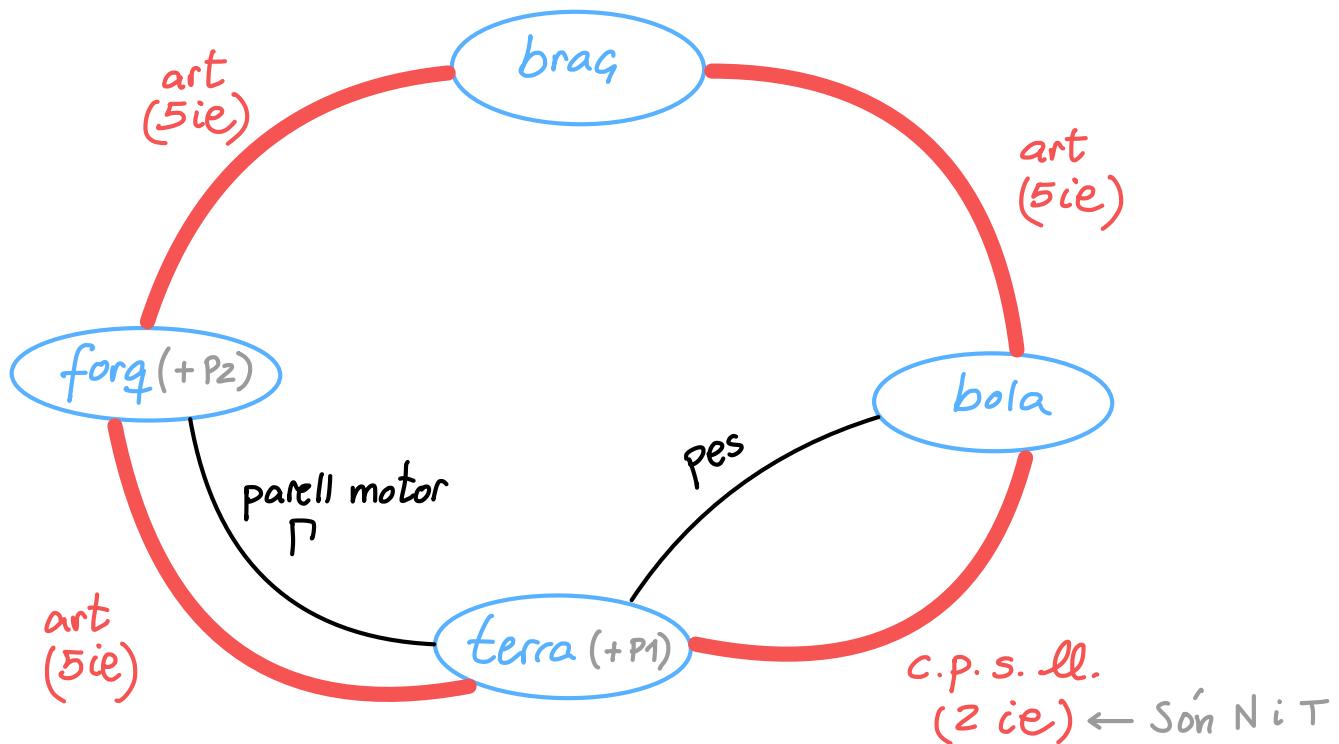
$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_0}{\tan \beta} = \frac{\Omega_0}{r/L} = \frac{L}{r} \Omega_0$$

D'aquí veiem que  $\dot{\varphi}$  depèn linealment de  $\Omega_0$  (és indirectament forçada pel motor)

Per tant:

$$\bar{\Omega}_T^{\text{bola}} = \left( \leftarrow \frac{L}{r} \Omega_0 \right) + \left( \uparrow \Omega_0 \right) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{r} \Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{array} \right\}_B \quad (\text{I})$$

## DGI i anàlisi global del problema dinàmic



18 incògnites :  $\underbrace{17 \text{ ie}}_{\text{d'enllaç}}, \underbrace{\Gamma}_{\text{incògn. associada al GL}}$

18 equacions: 3 sòlids.  $\frac{6 \text{ egs}}{\text{sòlid}}$

Problema  
DETERMINAT

Full de ruta per calcular **N** (sense eliminar SAEs)

veure via alternativa més avall ↓

El bras ho és !

Com que **N** és una incògn. del c.p.s.ll. :

- ▷ El sistema ha d'incloure la **bola**
- ▷ L'arc del c.p.s.ll. ha de ser interacció externa (tallem per aquest arc)

Les úniques opcions són (encerclant al DGI) :

Sistema	Incògn.	#incògn.	Problema
Bola	7 ie	7	INDET
Bola + braç	7 ie	7	INDET
Bola + braç + forq	7 ie, 7	8	INDET
Bola + forq	17 ie, 7	18	INDET

Tots els problemes associats surten indeterminats. Què podem fer? → Explorar l'aplicació dels teoremes vectorials als de menys variables. Si ho fem, veurem que:

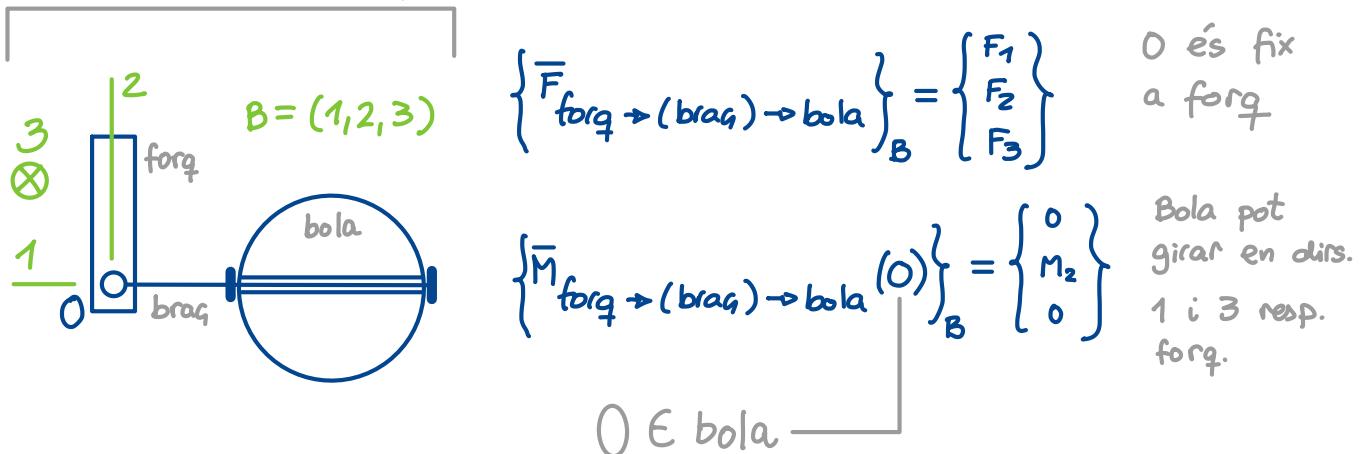
Full ruta per N	Sistema = Bola + braç TMC(0) ] <sub>3</sub>	Exercici pel lector veure-ho!
Full ruta per T	Sistema = Bola TMC(G) ] <sub>1</sub>	No demanen T però la podem buscar per practicar

Anem a veure un full de ruta alternatiu via eliminar el SAE.

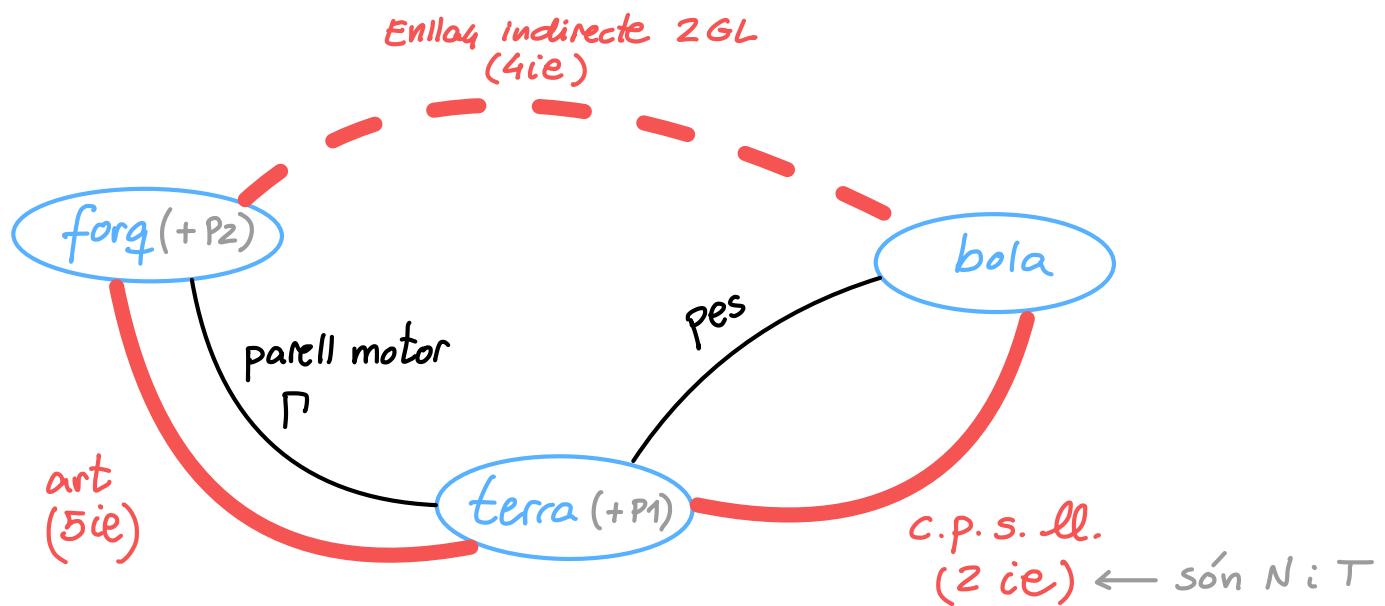
### Full de ruta per N eliminant SAEs del DGI

E) braç és un SAE (té massa nulla i només està sotmès a forces i mom. d'eullaq). Podem alleugerir el DGI substituint-lo pel torsor indirecte forq → (braç) → bola:

Bola té 2 GL resp forq ⇒ El torsor tindria 4 ie:



El DGI alleugerit queda així:



Recompte global

12 incògnites: 11 ie,  $\Gamma$

12 equacions: 2 solids.  $\frac{6 \text{ eqs}}{\text{solid}}$

Problema global  
**DETERMINAT**

Ara hi ha menys opcions per a la tria d'un subsistema.  
Només "Bola" o "Bola + forq", però no "Forq" ja que l'arc de  $N$  ha de ser interacció externa:

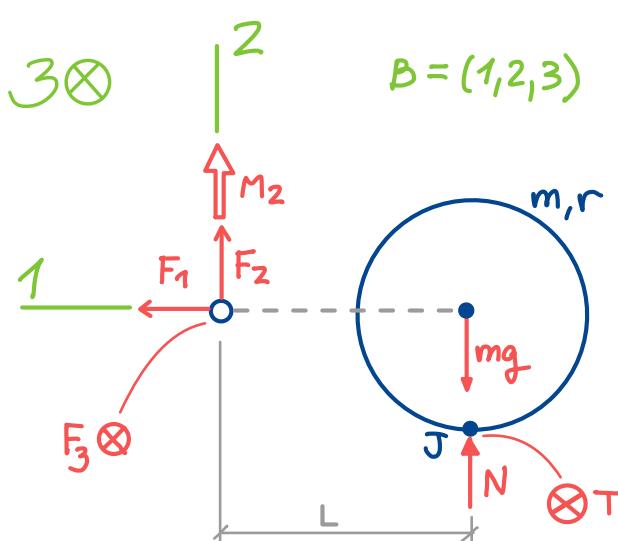
Sistema	Incògn.	#incògn.	Problema
Bola	6 ie	6	DET
Bola + forq	7 ie, $\Gamma$	8	INDET

L'eliminació del SAE ens il·lumina el camí!



Explorarem  $SIST = Bola$ :

Dibuixen les interaccions externes sobre sist = bola:  
(encerclen sist = bola mentalment al DGI per no descuidar-nos-en cap! )



Veiem que

- $N$  crea moment en dir. 3, i cap altra ie en crea!
- $T$  crea moment en dir. 1 i cap altra ie en crea!  
(no demanen  $T$  però la podem buscar per practicar)

Ergo:

Full nota per $N$	$TMC(o)]_3$ sobre sist = bola
Full nota per $T$	$TMC(o)]_1$ sobre sist = bola

No demanen  $T$   
però la podem  
buscar x practicar

$N$  via  $TMC(o)]_3$  sobre sist = bola

$$\sum \bar{M}_{ext}(o) - \overline{OG} \times m \times \bar{a}_T(o) = \dot{\bar{H}}_{RTO}(o)$$

$$\left\{ \sum \bar{M}_{ext}(o) \right\}_B = \begin{Bmatrix} -Tr \\ M_2 + TL \\ mgL - NL \end{Bmatrix} \quad (\text{II})$$

Calcularem  $\dot{\bar{H}}_{RTO}(o)$  de dues maneres per practicar:

$\dot{\bar{H}}_{RTO}(0)$  via tensor a  $G$ , Steiner, i derivada analítica

$$\bar{H}_{RTO}(0) = \underbrace{\mathbb{II}(0)}_{\substack{O \in \text{bola}}} \bar{\Omega}_T^{\text{bola}}$$

$$\left\{ \bar{H}_{RTO}(0) \right\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{L}{r} \Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\Omega}_T^{\text{bola}} \text{ de l'Eg. (I)}} = \begin{bmatrix} I_{11} \frac{L}{r} \Omega_0 \\ I_{22} \Omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbb{II}(0)]_B = [\mathbb{II}(G)]_B + [\mathbb{II}^\oplus(0)]_B =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Rotor esfèric a } G \\ I = \frac{2}{5}mr^2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & mL^2 & \\ & mL^2 & \end{bmatrix}}_{\substack{mL^2 \\ mL^2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix}}_{\substack{I_{11} = \frac{2}{5}mr^2 \\ I_{22} = I_{33} = \frac{2}{5}mr^2 + mL^2}}$$

Rotor esfèric a  $G$

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$



$$I_{11} = \frac{2}{5}mr^2$$

$$I_{22} = I_{33} = \frac{2}{5}mr^2 + mL^2$$

$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{11} \frac{L}{r} \Omega_0 \\ I_{22} \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{11} \frac{L}{r} \Omega_0^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5}mrL\Omega_0^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III})$$

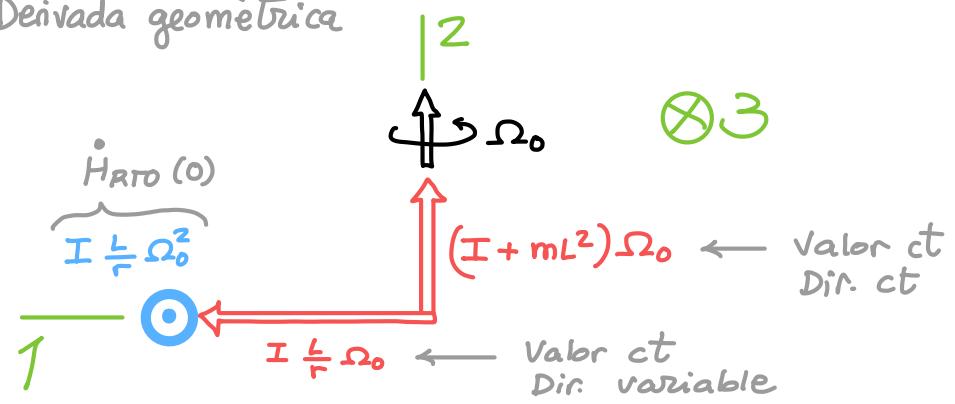
$\dot{\bar{H}}_{RTD}(0)$  na descomp. baricèntrica i derivada geomèt.

$$\bar{H}_{RTD}(0) = \underbrace{\bar{H}_{RTG}(G)}_{\parallel \quad \text{II}(G) \cdot \bar{\Omega}_T^{\text{bola}}} + \overline{OG} \times m \bar{\omega}_{RTD}(G) \quad \text{L}_T(0 \text{ fix a } T)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{H}_{RTD}(0)\}_B &= \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{\text{Rotor esfèric a } G} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{L}{r} \Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\Omega}_T^{\text{bola}} \text{ de l'Eg. (I)}} + \begin{bmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \Omega_0 L \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{IL}{r} \Omega_0 \\ I \Omega_0 + m \Omega_0 L^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{IL}{r} \Omega_0 \\ (I + m L^2) \Omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(\*)

Derivada geomètrica



$$\dot{\bar{H}}_{RTD}(0) = \left( \odot \frac{2}{5} mr^2 \frac{L}{r} \Omega_0^2 \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} mrL \Omega_0^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III})$$

(\*)  $B$  no és fixa a bola, però  $\text{II}(G)$  és constant i igual a  $\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}$  perquè la bola és rotor esfèric per a  $G$

$$[\mathbf{II} = \mathbf{III}]_3 :$$

$$mg\cancel{-1/N} = -\frac{2}{5}mr\cancel{L}/\Omega_0^2$$

$$N = mg + \frac{2}{5}mr\Omega_0^2$$



Conclusió:  $N$  sempre és positiva i la bola mai perdrà contacte a  $J$  independentment del valor  $\Omega_0$

$T$  via  $TMC(0)$  ], sobre sist = bola

$$[\mathbf{II} = \mathbf{III}]_1 :$$

$$-Tr = 0 \Rightarrow T=0$$

$$\boxed{T=0}$$

Arribats aquí ens preguntem: pot lliscar a  $J$ ?

Resposta: per a que llisi a  $J$  cal  $T > \mu_{\text{circ}} N$  però aquesta condició mai es compleix ja que  $T=0$  sempre, i  $\mu_{\text{circ}} N > 0$  (els coefs de freqüència tenen valor positiu sempre).



La bola mai lliscarà a  $J$