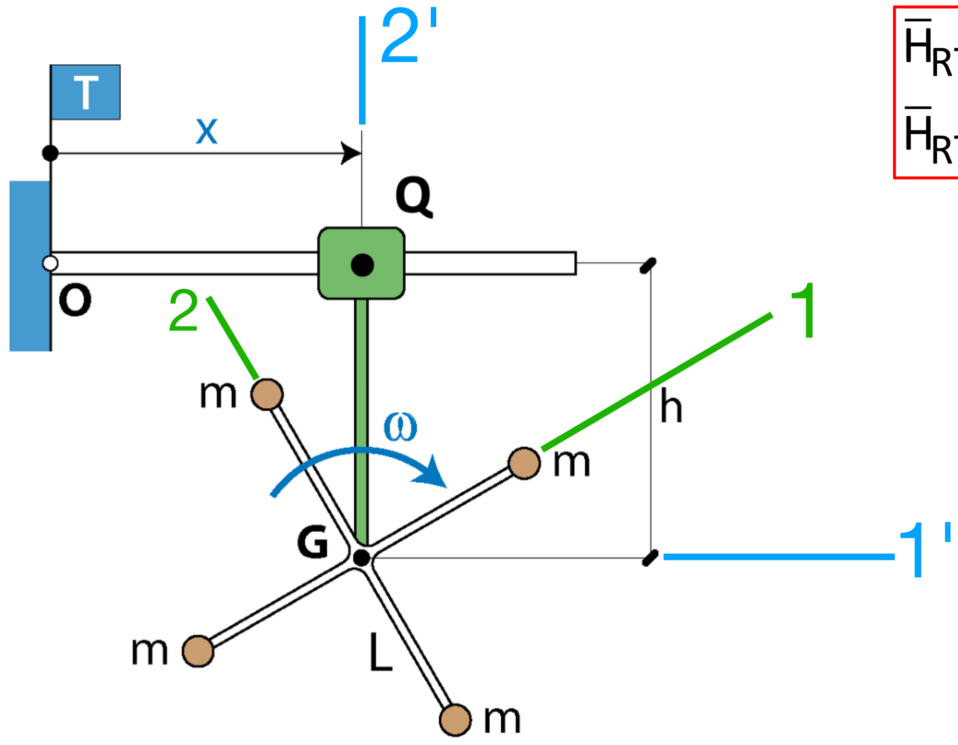
11P

Teoremes vectorials I

Exercicis de càlcul del moment cinètic

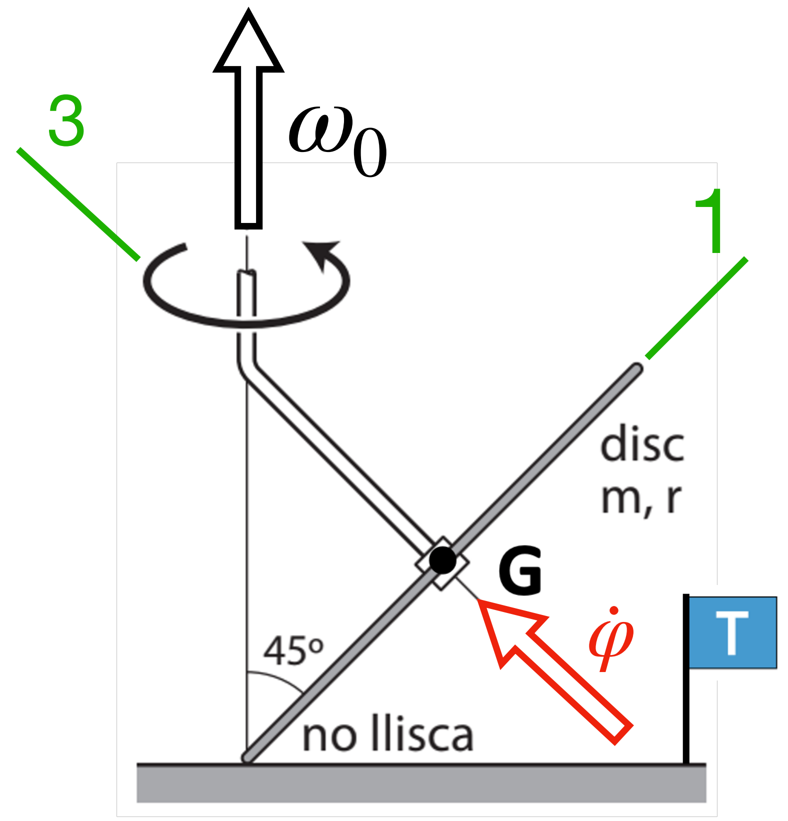
Problema 3D



$\bar{H}_{RTQ}(\mathbf{Q})$?

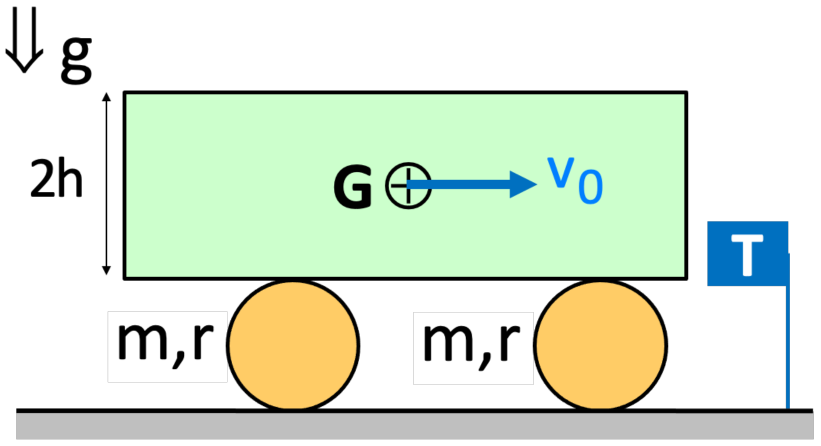
$\bar{H}_{RTO}(\mathbf{O})$?

Només les 4 partícules de la creu són de massa no negligible



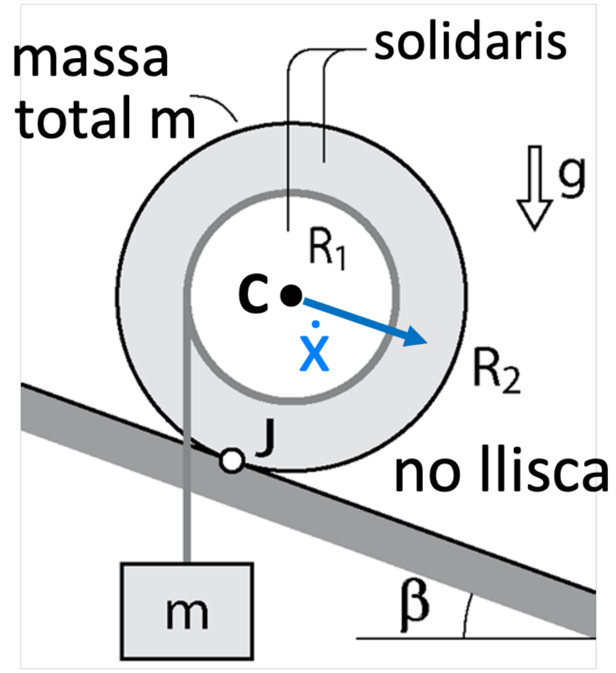
$\overline{H}_{RTG}(\mathbf{G})$?

$\boxed{\overline{H}_{RTG}(\mathbf{G})?}$

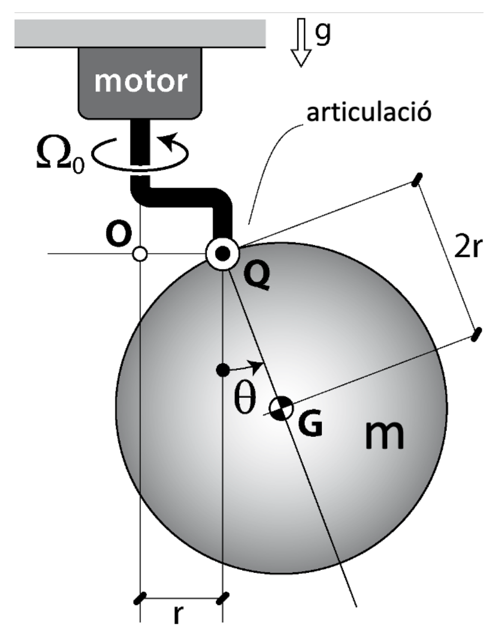


les rodes no llisquen

$$\boxed{\overline{H}_{RTC}(\mathbf{C})?}$$



Pèndol esfèric giratori



- Eq. mov. per a θ ?
- Parell motor que garanteix Ω_0?

Ens demanen l'equació del moviment per a la coordenada theta. És l'equació diferencial que determina com evoluciona theta a partir d'unes condicions inicials. Tindrà la forma

thetadospunts = f(theta,thetapunt)

[la funció de la dreta inclourà també paràmetres geomètrics i dinàmics, que hem omès]

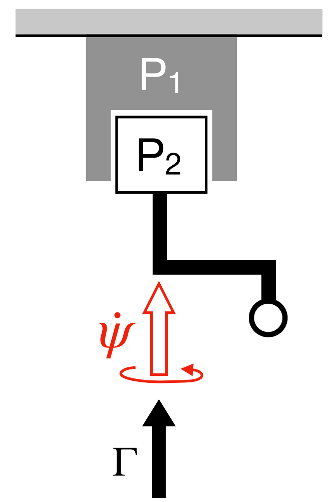
Aquesta forma deixa clar que l'acceleració és funció de l'**estat mecànic del sistema** (codificat per theta i thetapunt, i també per Ω_0, que ometo perquè és constant), tal i com es desprèn del principi de determinació de Newton.

També ens demanen el parell Γ que ha d'aplicar el motor en cada instant per a garantir que Ω_0 sigui constant.

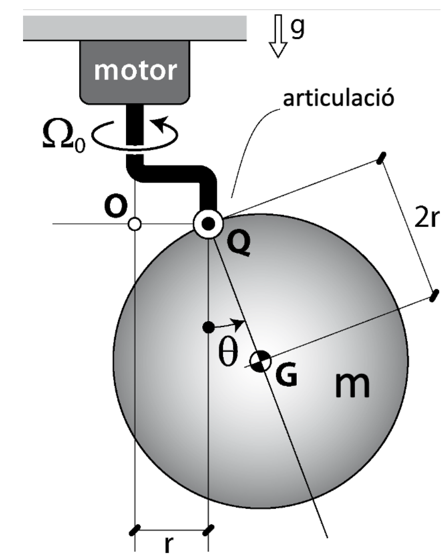
Aplicarem els teoremes vectorials per trobar thetadospunts i Γ.

El sistema té un motor (**actuador rotacional** en aquest cas). Vegem primer com tractar-lo.

Tractament de motors



En general



En aquest exercici

En un motor:	
O bé sabrem Γ, i $\ddot{\psi}$ serà incògnita O bé sabrem $\ddot{\psi}$, i Γ serà incògnita	$\dot{\psi} = \Omega_0 \;\; \Rightarrow \;\; \ddot{\psi} = 0$ (coneguda) Γ serà incògnita

Un actuador rotacional com aquest es pot veure com dues peces P1 i P2 (l'estàtor i el rotor) unides a dos altres sòlids del sistema respectivament (en aquest cas, el terra i la forquilla). Entre P1 i P2 hi ha una articulació. Per tant P2 gira respecte de P1 al voltant de l'eix d'aquesta articulació, amb una certa velocitat angular psipunt. El motor aplica un parell Γ sobre P2 en la direcció de l'eix.

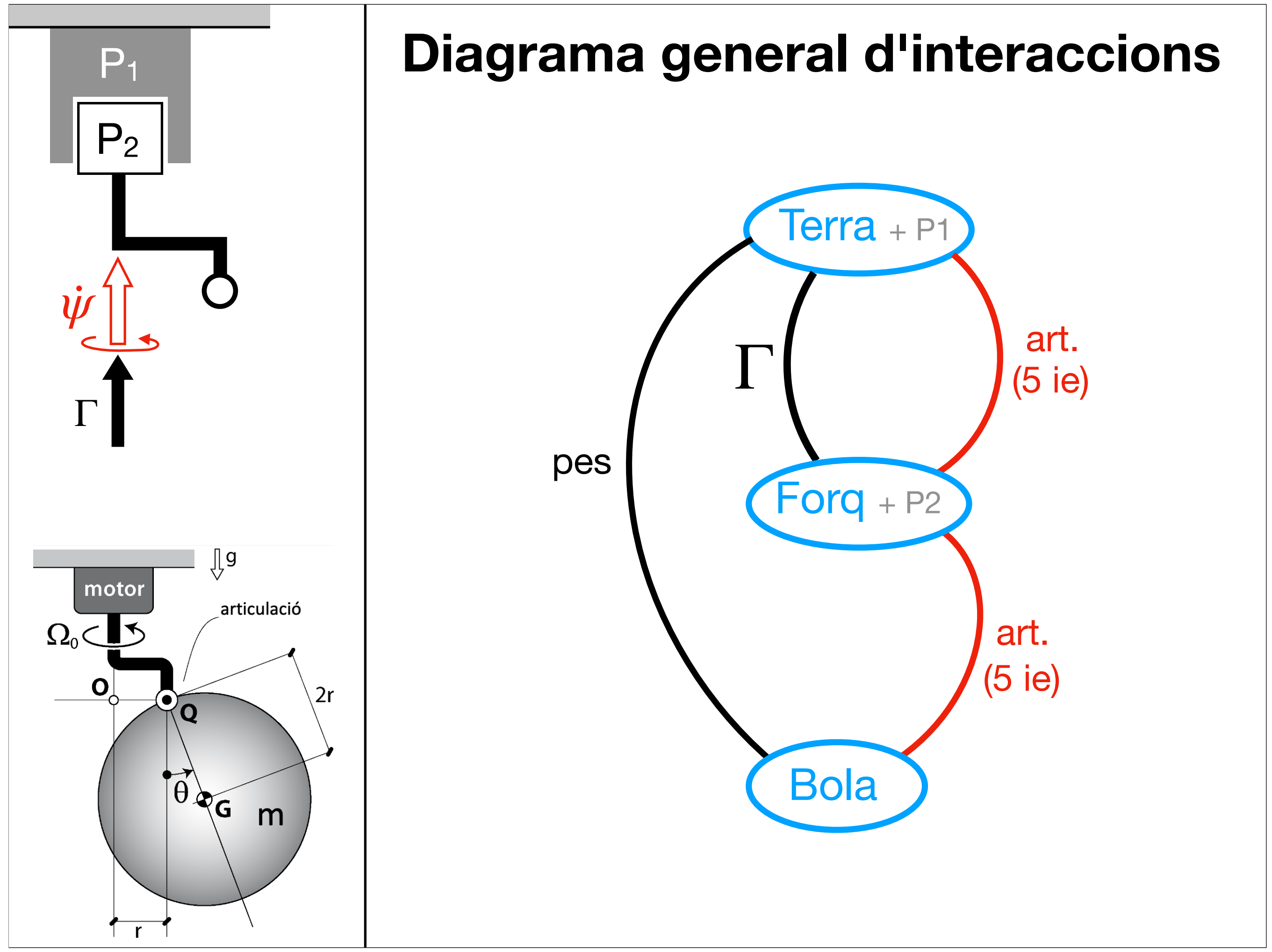
En general, es poden donar dos casos en un problema:

O bé sabrem el valor de Γ i psidospunts serà una incògnita.

O bé sabrem psidospunts i Γ serà la incògnita

En aquest exercici estem en la 2ª situació. Ens diuen que psipunt = Ω_0 = constant. Per tant, psidospunts és coneguda (**val zero**) i Γ serà incògnita del problema.

Ens demanen l'equació del moviment per a la coordenada θ, i el valor de Γ que garanteix que psipunt = Ω_0 = ctant.



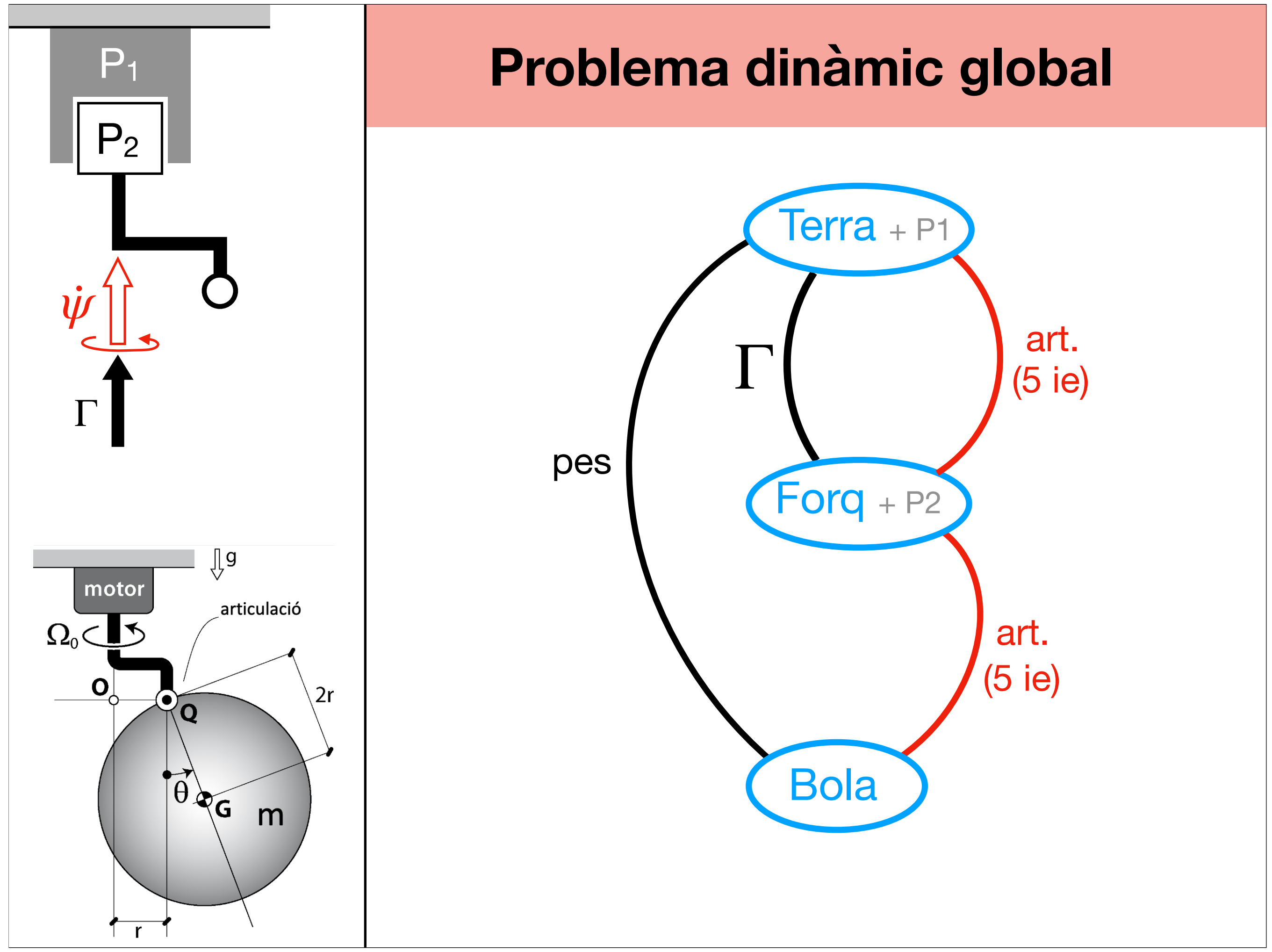
Per abordar un problema "gros" de dinàmica, i aquest ho comença a ser, dibuixarem primer un "**Diagrama general d'interaccions**" (DGI). S'assembla al diagrama de moviments relatius (DMR), però no són la mateixa cosa! En un DGI hi representem enllaços i forces d'interacció entre sòlids. És una eina de gran ajut per aplicar els teoremes vectorials perquè facilita la detecció de les forces d'interacció externament aplicades a un sistema (membre esquerre dels teoremes).

Entre els sòlid "Terra + P1" i el "Forquilla + P2" hi ha una articulació (la del motor). Entre "Forq + P2" i "Bola" hi ha una altra articulació. Pintem els arcs vermells que les representen ("art."). Recordeu de caracterització de torsors d'enllaç que cadascuna d'elles introdueix 5 incògnites d'enllaç (3 components de força i 2 de moment). Hi anotem "(5 ie)" per recordar-ho!

El Terra aplica un parell Γ a la forquilla. Pintem un arc negre que ho representa (Γ).

La Bola rep l'acció de la gravetat. Pintem un altre arc negre que ho representa (pes).

Hem pintat en vermell els arcs relatius a incògnites d'enllaç perquè quan busquem eqs. del mov. voldrem evitar aquestes incògnites (o almenys utilitzar-ne un nombre mínim).



A nivell global, el problema dinàmic surt **DETERMINAT**, ja que tenim:

> 12 incògnites: thetadospunts, Γ, i 10 incògnites d'enllaç (ie).
> 12 equacions = 2 sòlids · 6 equacions/sòlid

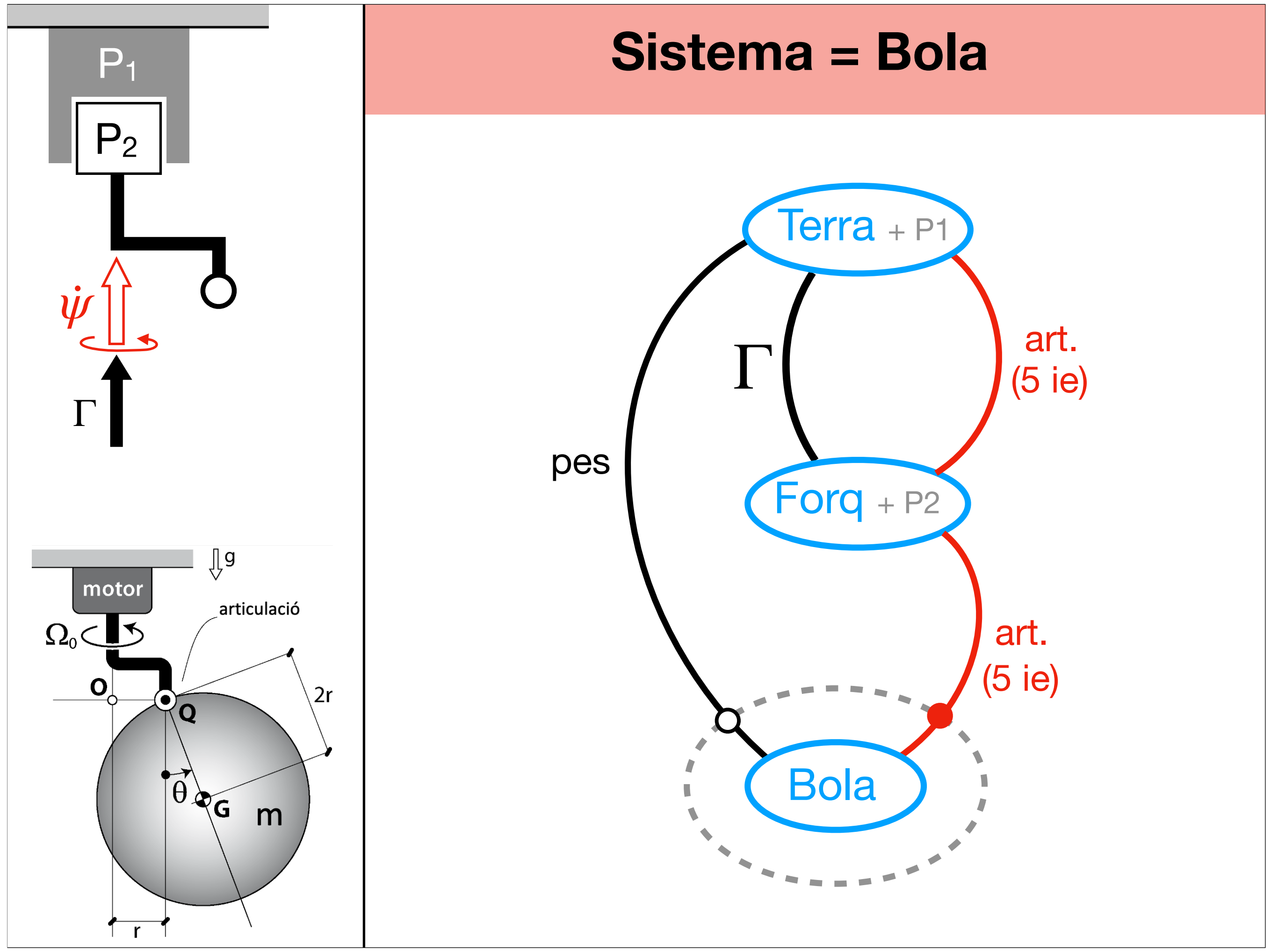
Les 12 equacions surten d'aplicar TQM i TMC (3+3 equacions) a cadascun dels dos sòlids per separat. Aquestes 12 equacions, reunides, formen un sistema **lineal** de 12 equacions en 12 incògnites (lineal **en les incògnites,** no en les variables d'estat, que veuen com a "dades").

En general: en un sistema multisòlid sempre tindrem 6·N equacions independents com a màxim, on N = nombre de sòlids del sistema. Les incògnites seran:

- Les variables d'acceleració desconegudes (en aquest cas thetadospunts, però no psidospunts)
- Els parells o forces d'actuació desconeguts (en aquest cas Γ)
- Les forces i moments d'enllaç (aquí, les 5 + 5 ie de les articulacions)

Les variables d'estat no es compten mai com a incògnites. Per tant, en aquest exercici theta i thetapunt es consideren valors coneguts. Això és així perquè el sistema mecànic sempre parteix d'unes condicions inicials (theta0,thetapunt0) que determinen l'evolució futura del sistema. Sabudes (theta0,thetapunt0), i integrant l'equació del moviment per a theta sempre podrem trobar els valors futurs de l'estat (theta,thetapunt).

El problema dinàmic consisteix, precisament, a trobar les expressions de totes les incògnites en funció de les variables d'estat. En aquest exercici, l'expressió de thetadospunts en funció de theta i thetapunt és l'equació del moviment demanada.



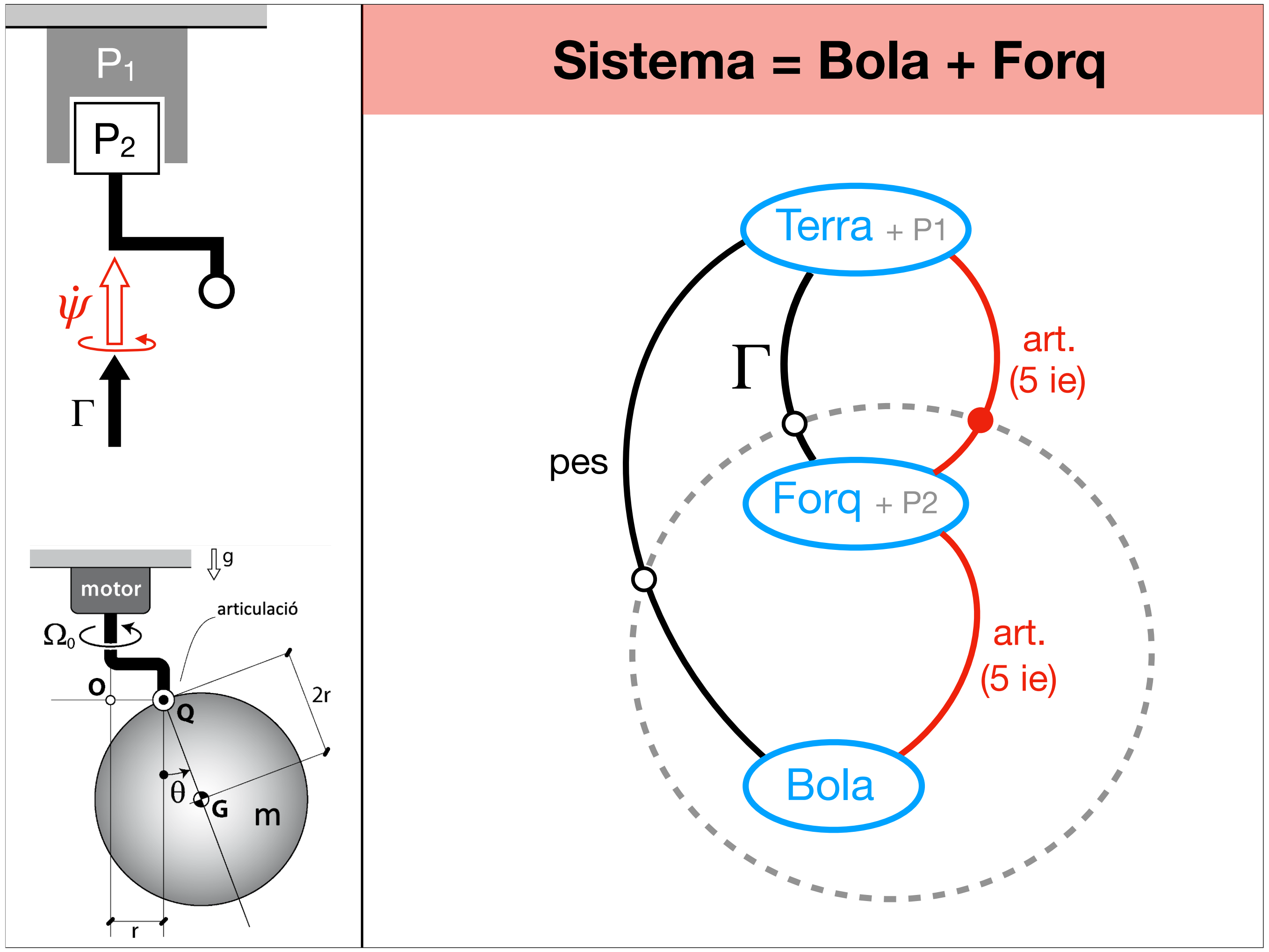
Resoldre 12 equacions en 12 incògnites és molt feixuc. Intentarem vies més ràpides aplicant el TQM o el TMC a subsistemes (sòlids o grups de sòlids).

Per exemple, per a **Sistema = "Bola"** tenim (encerclant-lo al DGI i comptant arcs tallats):

#incògnites = 6 (5 ie + thetadospunts)
#equacions = 6 (3 del TQM i 3 del TMC)

Problema **determinat**!

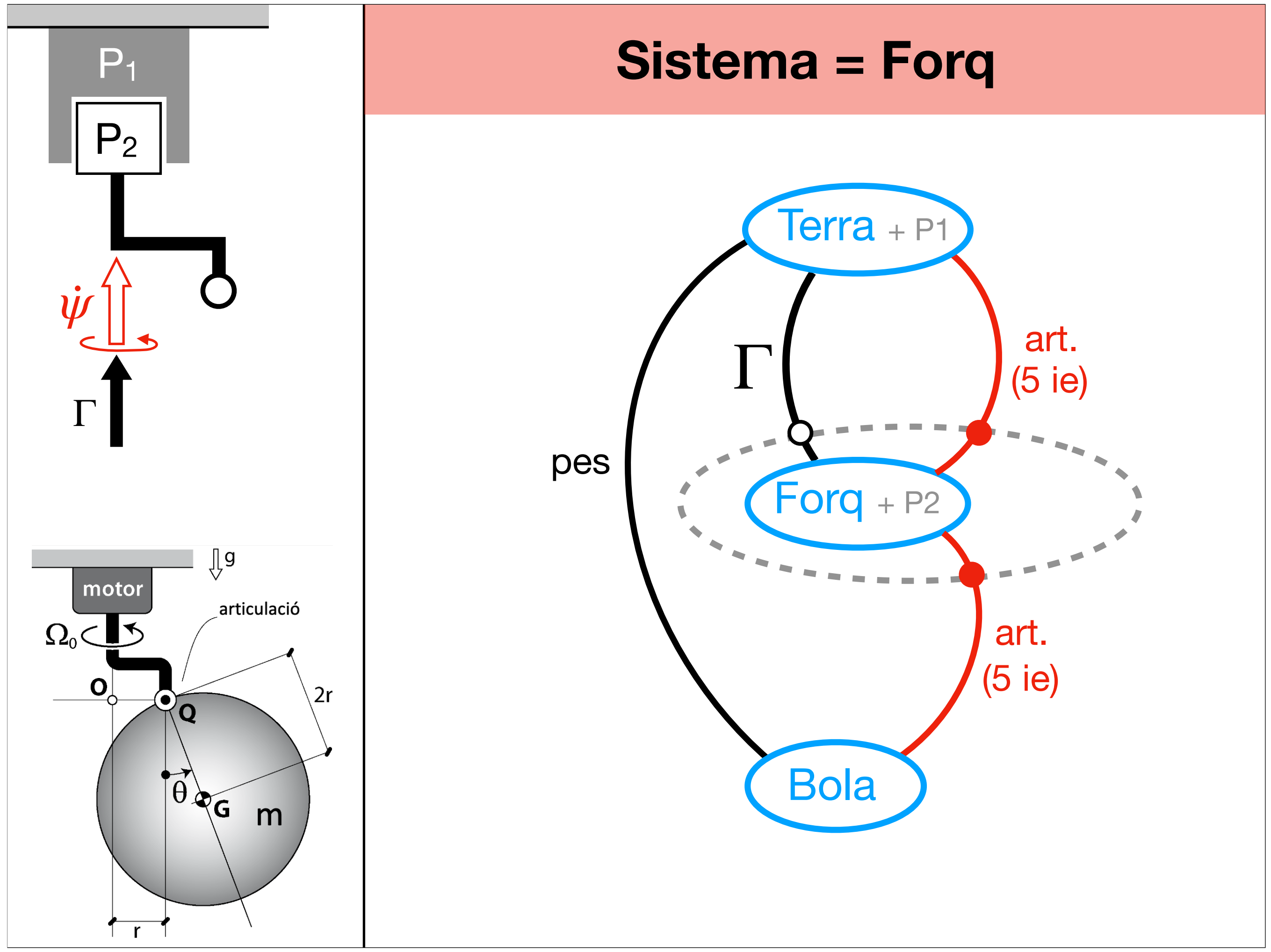
IMPORTANT: thetadospunts no està representada al DGI com a incògnita. Això sempre és així: al DGI no hi representem les variables d'acceleració. Caldrà imaginar-se-les i veure a quins sòlids afecten i a quins no. En aquest exemple és evident que thetadospunts és una incògnita del sistema=Bola, però no del sistema=Forquilla, ja que la cinemàtica de la forquilla només pot dependre de psi, psipunt i psidospunts (però no de theta, thetapunt i thetadospunts).



Per a **Sistema = "Bola + Forq"** tenim:

#incògnites = 7 (5 ie + thetadospunts + Γ)
#equacions = 6 (3 del TQM + 3 del TMC sobre el conjunt dels dos sòlids)

Problema **indeterminat**!



Per a Sistema = "Forq" tenim:

#incògnites = 11 (10 ie + Γ)
#equacions = 6 (3 del TQM + 3 del TMC sobre Forq)

Problema **indeterminat**!

Com hem dit abans, thetadospunts no surt com a incògnita en aquest sistema perquè la cinemàtica de la forquilla només pot dependre de psi, psipunt i psidospunts (essent psipunt = Ω_0 = ct, i psidospunts = 0 en el cas de l'exercici).

Taula resum

Sistema	Incògn.	#incògn.	Problema
Bola	5 ie, $\ddot{\theta}$	6	**DET**
Bola + forq	5 ie, $\ddot{\theta}$, Γ	7	**INDET**
Forq	10 ie, Γ	11	**INDET**

Recomano que us feu una taula resum del que hem trobat, com ara aquesta.

Veient la taula: com podem trobar l'equació del moviment per a theta?

Mmmmm ... veiem que només surt un problema **determinat** en el cas Sistema = "Bola". En aquest problema hi surt thetadospunts com a incògnita? Sí! Doncs ja ho tenim! Aplicarem els teoremes vectorials a aquest sistema per trobar l'expressió de thetadospunts en funció de les variables d'estat (que és precisament l'equació del moviment per a theta). El sistema d'equacions serà molt més petit que el del problema global, que involucrava 12 eqs i 12 incògnites. Veurem després que, al final, en tindrem prou amb formular 1 sola equació via el TMC!

I com podrem trobar Γ després?

Com que ja tindrem thetadospunts, aquesta acceleració deixarà de ser una incògnita (ja la sabrem en funció de l'estat mecànic). Per tant, en el sistema = "Bola + Forq" ja només hi tindrem 6 incògnites (5 ie + Γ). El seu sistema d'equacions passarà a ser determinat ara, i podrem trobar Γ.

Vegeu les notes de 11P_sols.pdf a partir d'aquí.