9P

Geometria de masses

Introducció

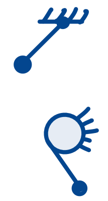
Estem utilitzant lleis dinàmica x obtenir
- eqs. mov.
- forces d'enllaç
- forces o parells motor

2 tipus problemes:

▸ Din. partícula P

No cal info distribució massa

Massa concentrada a P



Pèndol simple

Pèndol sobre cilindre

$$\sum \bar{F}_{\to P} = m_P \, \bar{a}_{RGal}(P) \qquad (3\text{eqs})$$

▸ Din. sòlid rígid

Cal info distribució massa

TQM (3 eqs) ⟵ centre d'inèrcia G
(x trobar $\bar{a}_{RGal}(G)$)

TMC (3 eqs) ⟵ Tensor d'inèrcia
(x calcular moment cinètic sist.)

Ja sabeu calcular-lo

Exercicis: D5.1, .2, .3

Exercicis centres inèrcia: D5.1, .2, .3

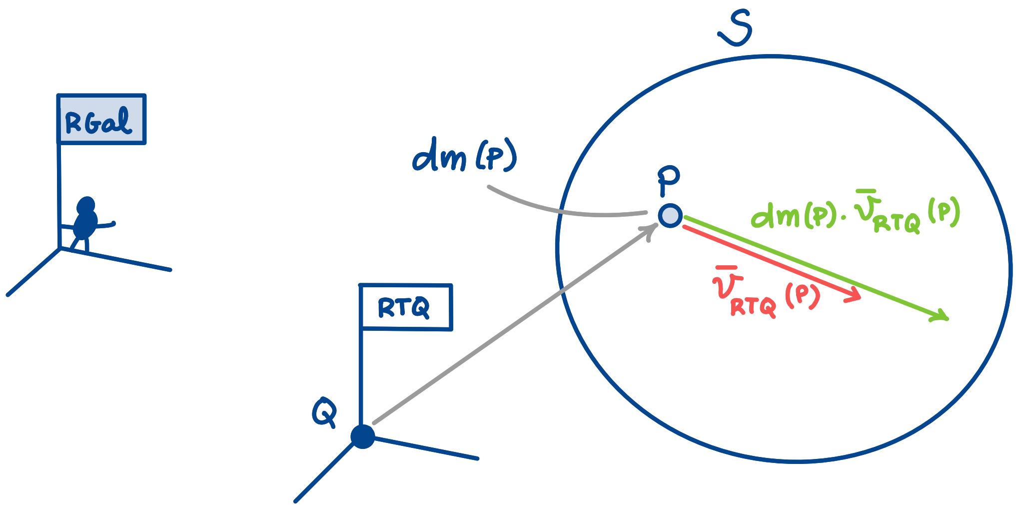
Moment cinètic d'un sòlid rígid S

Sòlid rígid S ← Volem estudiar seu movim. des de RGal

Q un punt (fix o mòbil a RGal)

RTQ = Ref. que es trasllada amb Q resp. RGal.

$\bar{\Omega}^{RTQ}_{RGal} = 0$



DEF.- $\underbrace{\text{MC}}$ (Moment cinètic) d'S resp. Q, a ref. RTQ:

$$\bar{H}^{S}_{RTQ}(Q) = \int_S \underbrace{\bar{QP} \times \Big[\overbrace{dm(P)\cdot\bar{v}_R(P)}^{\text{QDM de P a RTQ}} \Big]}_{\text{MC de dm(P) resp. Q, a RTQ}} \qquad (\square)$$

Integral sobre tots els dm(P) ∈ S

Malgrat complexitat de ($\square$) ... si Q ∈ S

$$\bar{H}^{S}_{RTQ}(Q) = \underbrace{\mathbb{I}(Q)}_{\substack{3\times 3 \\ \text{simètrica} \\ \text{def. pos.}}} \cdot \underbrace{\bar{\Omega}^{S}_{RTQ}}_{= \bar{\Omega}^{S}_{RGal}}$$

ja que $\bar{\Omega}^{RTQ}_{RGal} = 0$

Avui practicarem com construir-la

Tensor d'inèrcia

$B = (1,2,3)$

Punt $\in S$

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Base $\Rightarrow$ Eixos

Moments d'inèrcia

Productes "

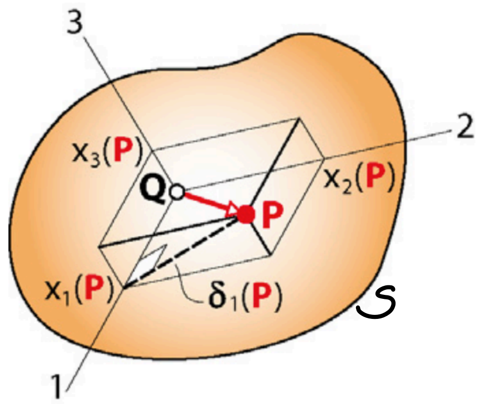
Moments d'inèrcia (≥ 0)

$$I_{ii} = \int_S \underbrace{\left[x_j^2(P) + x_k^2(P) \right]}_{\delta_i(P)} dm(P)$$

Productes d'inèrcia ($\gtrless 0$)

$$I_{ij} = -\int_S x_i(P) \cdot x_j(P) \cdot dm(P)$$

$B = (1,2,3)$



Sempre triarem B fixa al sòlid $\Rightarrow$ $\left. \begin{matrix} I_{ii} \\ I_{ij} \end{matrix} \right\}$ constants

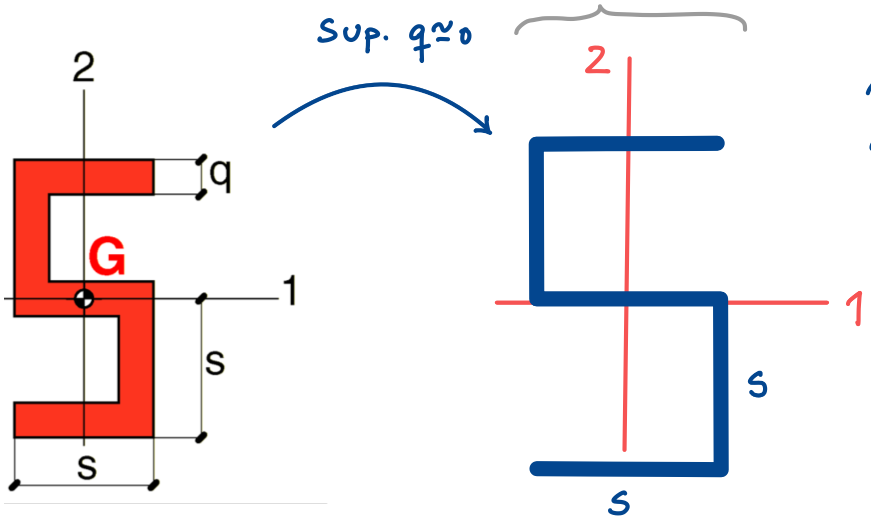
Practicarem càlcul de tensors in. amb $\neq$ exms

Anirem descobrint propietats x agilitzar càlculs

Sempre $\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ forma qualitativa } \mathbb{I}(Q) \\ (2) \text{ " quantitativa} \end{array} \right.$

Facilita

No el dibuixo d'entrada (+ endav. sí)



Anàlisi fàcilment generalitzable a $q > 0$

coses fàcils × començar:

- $I_{ii} = 0$?
- $I_{ij} \gtreqless 0$?

$x_3 = 0 \;\; \forall\, dm(P) \;\Rightarrow$

$$\underbrace{\left[\mathbb{I}(G)\right]_B = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} -\int x_1 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x_3}}\, dm = 0 \\ -\int x_2 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_3}}\, dm = \end{matrix}}_{\mathbb{I}(Q) \text{ tindria mateixa forma } \forall Q \in S}$$

Diem | "Dir. 3 és DPI de S en el punt G"
| "I_{33} és un moment ppal d'inèrcia"

Si dir $\perp$ a S fos 2 :

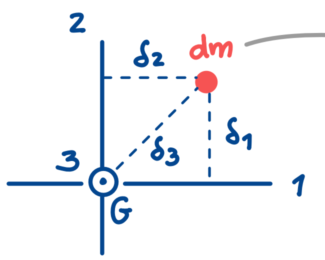
$$\begin{bmatrix} * & 0 & * \\ 0 & I_{22} & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

- Dir. 2 seria DPI d'S a G
- I_{22} seria MPI

$I_{ii} \neq 0$?

$$I_{ii} = \int_S \delta_i(P)^2 \cdot dm(P) \;\;\Rightarrow\;\; \text{En aq. sòlid} \left| \begin{array}{l} I_{11} \neq 0 \\ I_{22} \neq 0 \\ I_{33} \neq 0 \end{array} \right.$$

Per un dm qualsevol:



Contrib. a I_{11} : $\delta_1^2 \cdot dm$

" " I_{22} : $\delta_2^2 \cdot dm$

" " I_{33} : $\delta_3^2 \cdot dm = (\delta_1^2 + \delta_2^2) \cdot dm$

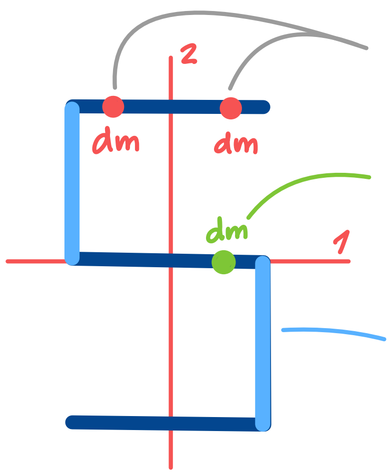
Pitàgores

Ergo $\boxed{I_{33} = I_{11} + I_{22}}$

Per ara:

$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

Signe de $I_{12} = -\int_S x_1 x_2 \, dm$?



cancelen seva contrib a I_{12}

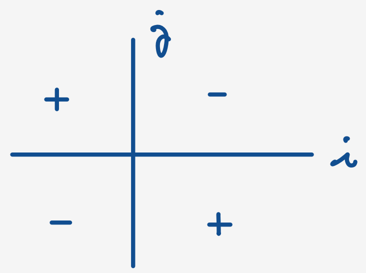
contrib = 0 $(x_2 = 0)$

Només trossos blau cel contribueixen (amb signe > 0)

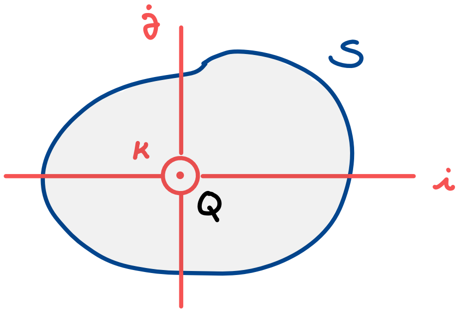
Ergo

$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & |I_{12}| & 0 \\ |I_{12}| & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

Signe contrib dm a I_{ij}:



Si $S =$ sòlid pla



$$B = (i, j, k)$$

es compleix :

1

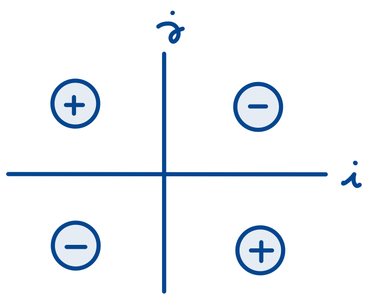
$\forall Q \in S$ la dir. $\perp$ a S és DPI

$$\underbrace{I_{kk}}_{\text{És MPI}} = I_{ii} + I_{jj}$$

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{ii} & I_{ij} & 0 \\ I_{ij} & I_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{I_{ii} + I_{jj}}_{I_{kk}} \end{bmatrix}$$

2

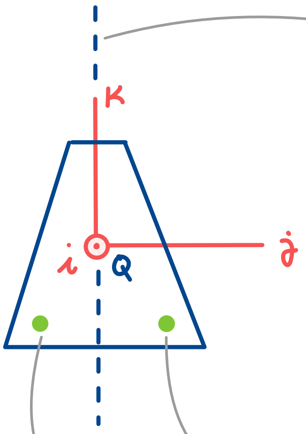
Signe contribució dm a I_{ij} :



$$I_{ij} = -\int_S x_i \, x_j \, dm$$

S = sòlid (no necessàriament pla)

Amb pla simetria en la distrib massa $\Longrightarrow$ Eix $\perp$ pla sim és DPI



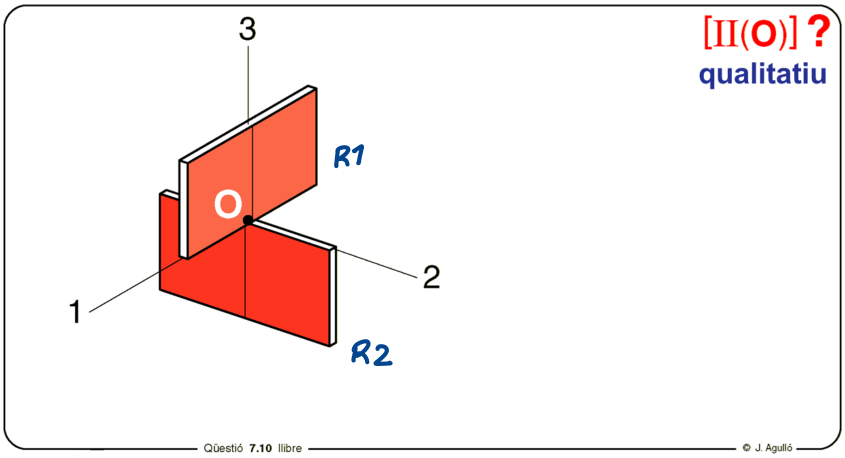
Pla (i,k) de simetria $\Rightarrow$ j és DPI

I_{ij}

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} * & 0 & * \\ 0 & I_{jj} & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

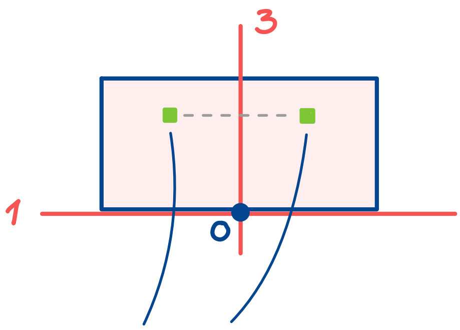
I_{jk}

Contrib nul·la a $\begin{cases} I_{ij} \\ I_{jk} \end{cases}$



$$\mathbb{I}(O) = \mathbb{I}_{R1}(O) + \mathbb{I}_{R2}(O)$$

Tensor de R1



Cancelen contrib a I_{13}

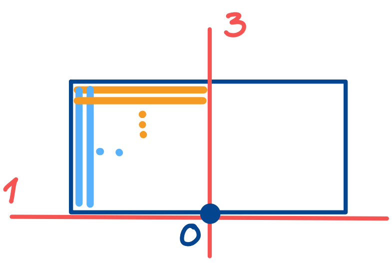
Fig. plana amb eix 2 $\perp$ a figura — Dir. 2 és DPI

Pla 23 de simetria — Dir. 1 és DPI

→ Tensor diagonal

$$\left[\mathbb{I}_{R1}(Q)\right]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11}+I_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

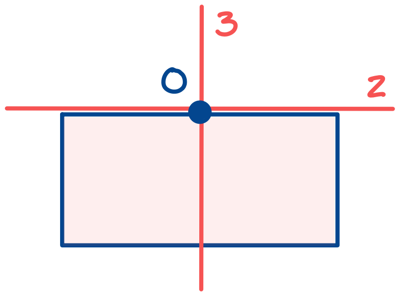
$I_{11} \gtreqless I_{33}$?



dm grocs i blaus contribueixen = a I_{11}, I_{33} resp. $\rightarrow I_{11} = I_{13} = I$

$$\left[\mathbb{I}(O)_{R1}\right]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 2I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Tensor de R2



$$\left[\mathbb{I}(O)_{R2}\right]_B = \begin{bmatrix} 2I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

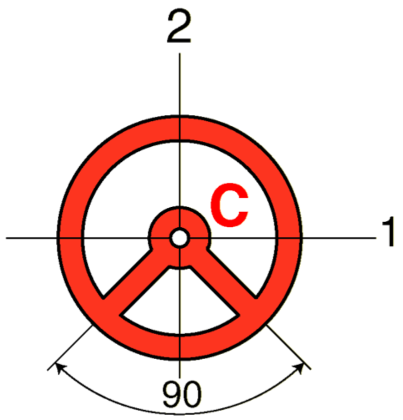
Tensor total

$$\left[\mathbb{I}(O)\right]_B = \left[\mathbb{I}_{R1}(O)\right]_B + \left[\mathbb{I}_{R2}(O)\right]_B = \begin{bmatrix} 3I & 0 & 0 \\ 0 & 3I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

I = Mom inèrcia placa rectangular] Només caldria calcular això

$[\mathrm{II}(\mathbf{C})]$?

qualitatiu

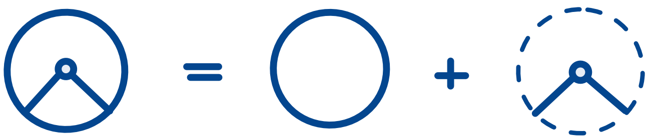


Aquest exm. permet il·lustrar

- Canvis de base
- Concepte de rotor simètric

Q 7.12 llibre

$[\mathrm{II}(c)]_B$



Anella Radis

Planes $\Rightarrow$ Dir. 3 DPI

$I_{11} = I_{22}$

$I_{12} = 0$ per simetria

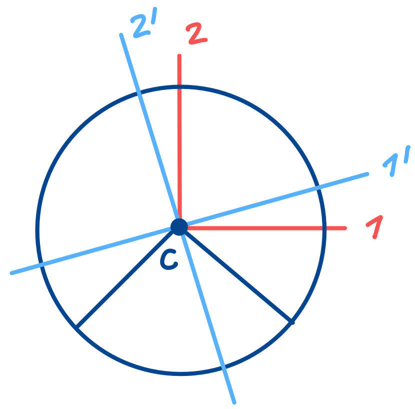
$$[\mathrm{II}_{anella}(c)]_B = \begin{bmatrix} I' & & \\ & I' & \\ & & 2I' \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{II}_{radis}(c)]_B = \begin{bmatrix} I'' & & \\ & I'' & \\ & & 2I'' \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [\mathrm{II}(c)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

$I = I' + I''$

$\left[\mathbb{I}(O)\right]_{B'}$? (En nova base)



Invocant propietat (*)

$$\left[\mathbb{I}(C)\right]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix} = \left[\mathbb{I}(C)\right]_{B'}$$

$$\underbrace{\text{Dir 1 i 2 DPI amb = MPI } (I)}_{\text{Quadrant 12 és invariant a rotacions al volt. eix 3}}$$

(*)

Rotor simètric

<u>PROP</u>: Si per al punt O $\left|\begin{array}{l}\text{Dirs. } i, j \text{ són DPI} \\ \text{Amb} = \text{MPI } (I)\end{array}\right.$

alesh. $\mathbb{I}(O)$ és invariant a rotacions al volt. eix k

Invariant a rotacions al volt. eix k

$$\left[\mathbb{I}(O)\right]_{\underbrace{ijk}_{B}} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix} = \left[\mathbb{I}(O)\right]_{\underbrace{i'j'k}_{B'}}$$

Es diu que el sòlid és un rotor simètric a O

Rotor esfèric

PROP Si per al punt O | Dirs. i, j, k són DPI | Amb = MPI (I)

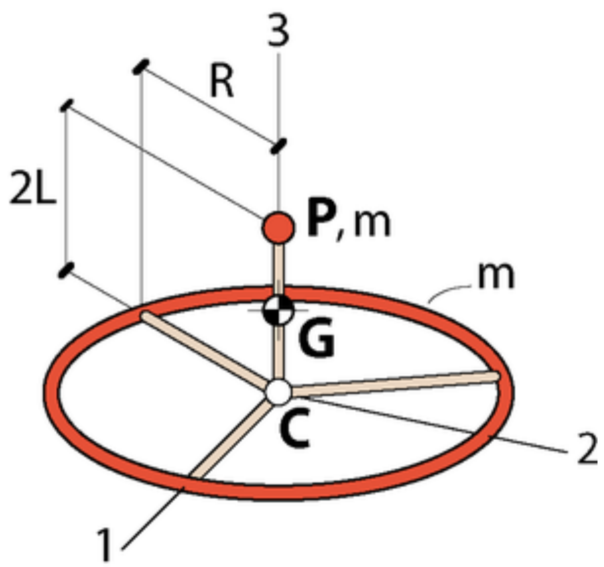
alesh. $\mathbb{I}(O)$ té la forma

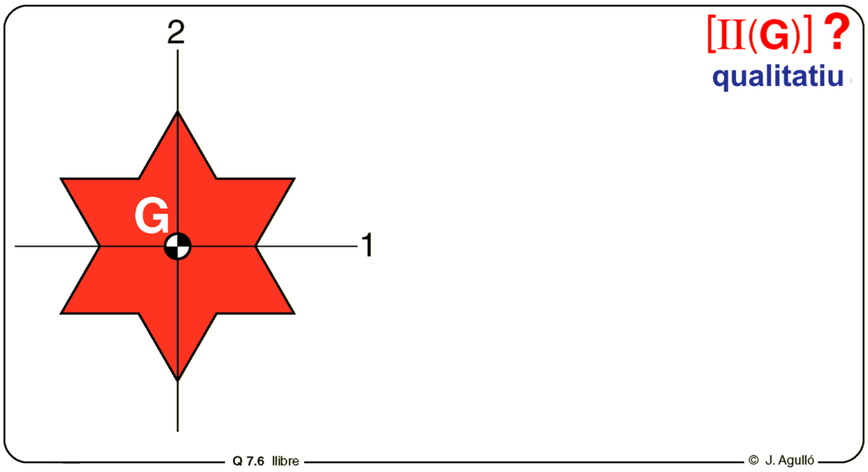
$$\left[\mathbb{I}(O)\right]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

independentment de la base B triada.

Es diu que el sòlid és un rotor esfèric a O.

Exemple D5.9 Wikimec (Rotor esfèric)





Sòlid pla $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ és DPI} \\ I_{33} = I_{22} + I_{11} \end{array} \right.$

Eix 2, de simetria $\Rightarrow \left\{ I_{12} = 0 \right.$

$$\left[\mathbb{I}(G)\right]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$$

$I_{11} \gtrless I_{22}$? Difícil de saber a priori !

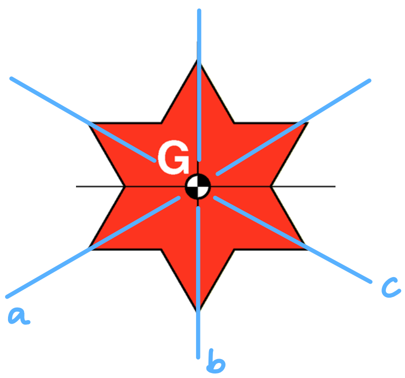
Invoquem

No ho demostrem

Equidistribució de massa al volt. 3 o més eixos

Si per un punt O $\left[\begin{array}{l} 3 \text{ o + mom. d'inèrcia en un mateix} \\ \text{pla } ij \text{ són iguals} \end{array} \right.$

alesh. el sòlid és rotor simètric a O



Clarament :

$$I_{aa} = I_{bb} = I_{cc} = I$$

Ergo :

$$\left[\mathbb{I}(G)\right]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

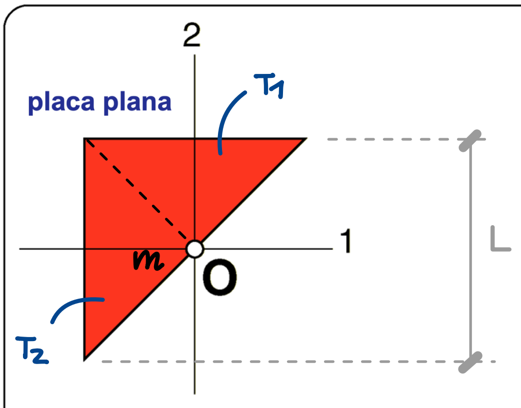
Rotor simètric a G

$[\mathbb{II}(\mathbf{O})]$ **?**

qualitatiu

quantitatiu

placa plana



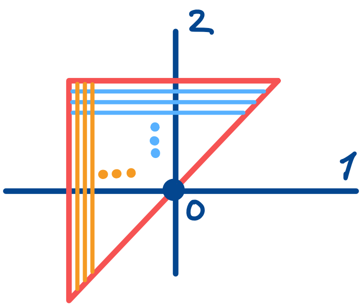
Tensor qualitatiu

Fig. plana $\Rightarrow$ 3 és DPI

Simetries T_1, T_2 $\Rightarrow$ $I_{12} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

$I_{11} \gtrless I_{22}$?



$\boxed{\text{dm blaus i grocs tenen} = \text{contrib. a } I_{11}, I_{22}}$

$\Downarrow$

$I_{11} = I_{22} = I$

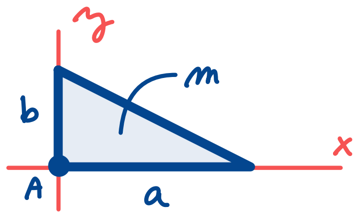
Ergo:

$$[\mathbb{II}(O)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{rotor simètric a } O$$

Tensor quantitatiu

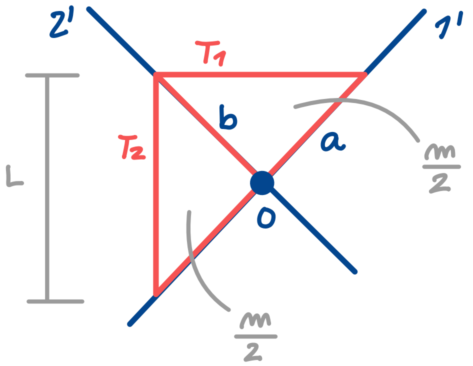
Només ens cal I $\Big(\overbrace{1 \text{ valor}}^{\text{Gràcies a l'aval. qualitativa}}!\Big)$

Taula :



$$\mathbb{I}(A) = \begin{cases} I_{xx} = \frac{1}{6} m b^2 \\ I_{xy} = -\frac{1}{12} m a b \end{cases}$$

Sòlid és rotor simètric $\Rightarrow$ Puc girar la base sense alterar el tensor



$$\left[\mathbb{I}(O)\right]_{B'} = \left[\mathbb{I}(O)\right]_{B} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

$$I = 2\left[\frac{1}{6}\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = \frac{mL^2}{12}$$

$$\left[\mathbb{I}(O)\right]_{B} = \frac{mL^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

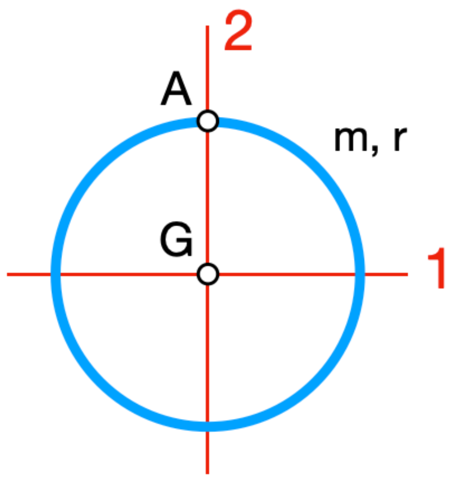
Teorema de Steiner

No sempre tindrem tanta sort! Sovint passarà que el punt al qual referim el tensor és diferent del de la taula. Afortunadament, el teorema de Steiner ens permet fer "canvis de punt":

$$\underbrace{\mathbb{I}(Q)}_{\text{Tensor per al punt } Q} = \underbrace{\mathbb{I}(G)}_{\text{Tensor per al centre d'inèrcia } G} + \underbrace{\mathbb{I}^{\oplus}(Q)}_{\text{Tensor per al punt } Q \text{ de tota la massa del sòlid concentrada a } G}$$

Exemple: anell homogeni

$\mathbb{I}(A)$?



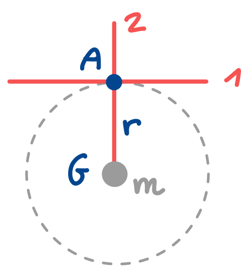
$\mathbb{I}(G)$ és fàcil:

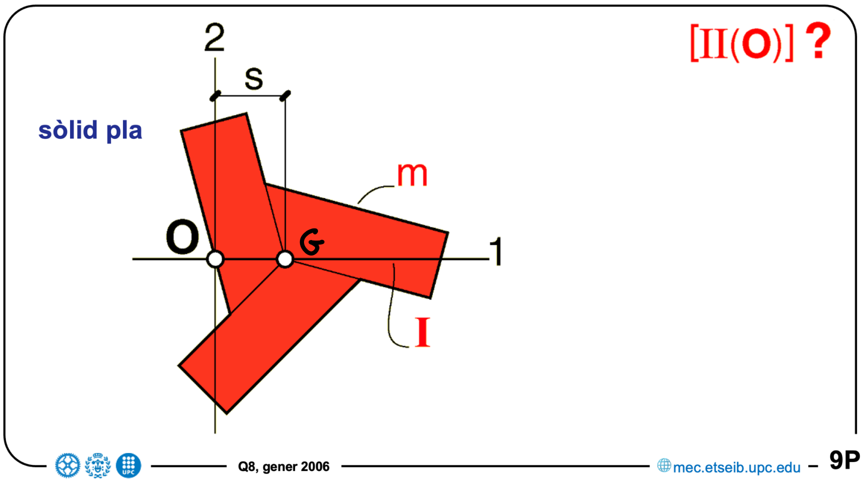
$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & \underbrace{2I}_{mr^2} \end{bmatrix}$$

$\mathbb{I}(A)$ via Steiner:

$$[\mathbb{I}(A)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & & \\ & \frac{mr^2}{2} & \\ & & mr^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}(G)} + \underbrace{\begin{bmatrix} mr^2 & & \\ & 0 & \\ & & mr^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}^{\oplus}(A)}$$

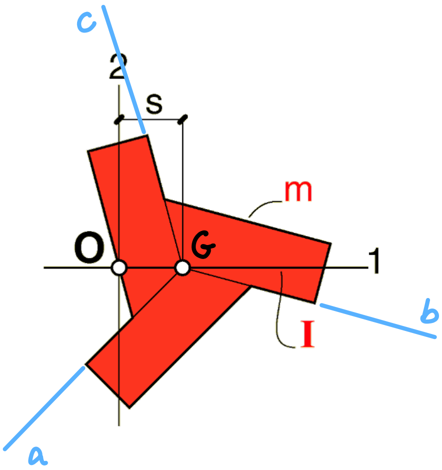
$$= mr^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$





$G =$ centre inèrcia

Tensor a G és fàcil



- Sòlid pla ⇒ 3 és DPI
- $\underbrace{I_{aa} = I_{bb} = I_{cc}}_{\Downarrow} = I$

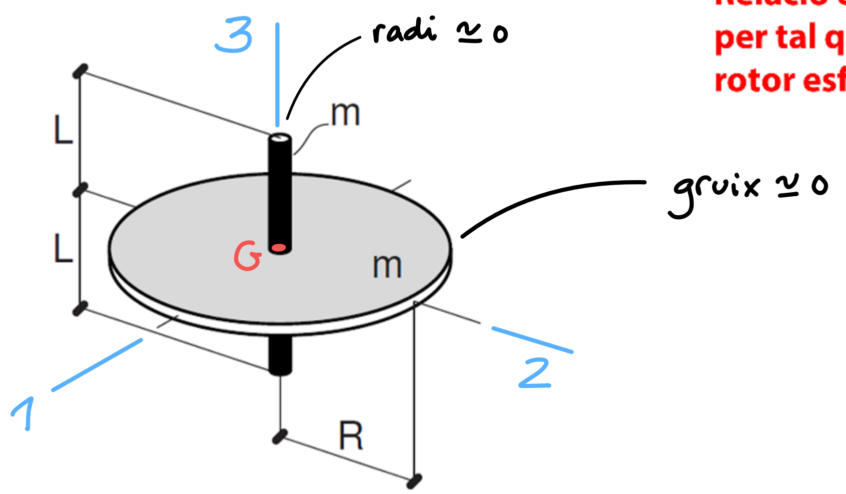
rotor simètric per a G

Ergo:

$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

Canvi a O via Steiner

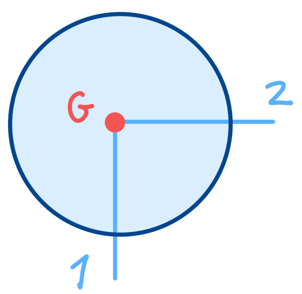
$$[\mathbb{I}(O)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}(G)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & \\ & ms^2 & \\ & & ms^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}^{\oplus}(O)} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I+ms^2 & \\ & & 2I+ms^2 \end{bmatrix}$$



Relació entre L i R per tal que sigui rotor esfèric a G?

$$[\mathbb{I}(G)]_B = [\mathbb{I}_{disc}(G)]_B + [\mathbb{I}_{barra}(G)]_B =$$

Disc

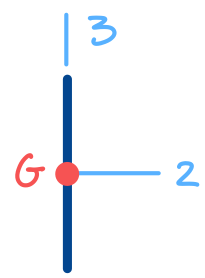


$$[\mathbb{I}_{disc}(G)]_B = \begin{bmatrix} I' & & \\ & I' & \\ & & 2I' \end{bmatrix} =$$

$I' = \frac{1}{4} m R^2$ (taules)

$$= \frac{mR^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Barra



$$[\mathbb{I}_{barra}(G)] = \begin{bmatrix} I'' & & \\ & I'' & \\ & & 0 \end{bmatrix} =$$

Taules (cilindre)

$$I'' = m\left(\frac{1}{4}\,0^2 + \frac{(2L)^2}{12}\right) = \frac{mL^2}{3}$$

$$= \frac{mL^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} & & \\ & \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} & \\ & & 2\,\frac{mR^2}{4} \end{bmatrix}$$

Han de ser = perquè sigui rotor esfèric

Caldrà que

$$\frac{\cancel{m}R^2}{4} + \frac{\cancel{m}L^2}{3} = \frac{\cancel{m}R^2}{2}$$

$$3R^2 + 4L^2 = 6R^2$$

$$4L^2 = 3R^2$$

$$\boxed{\frac{L}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$