

# 6P

Versió 1.1

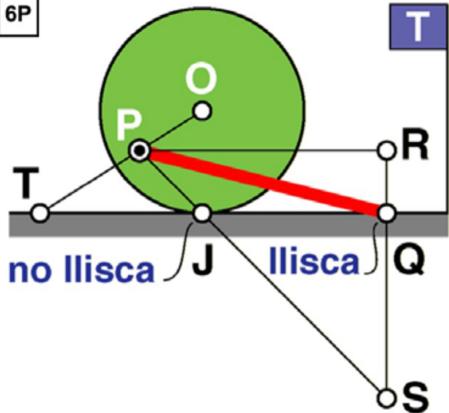
Cinemàtica del sòlid rígid 2D  
(moviment pla)

+

Cinemàtica de vehicles

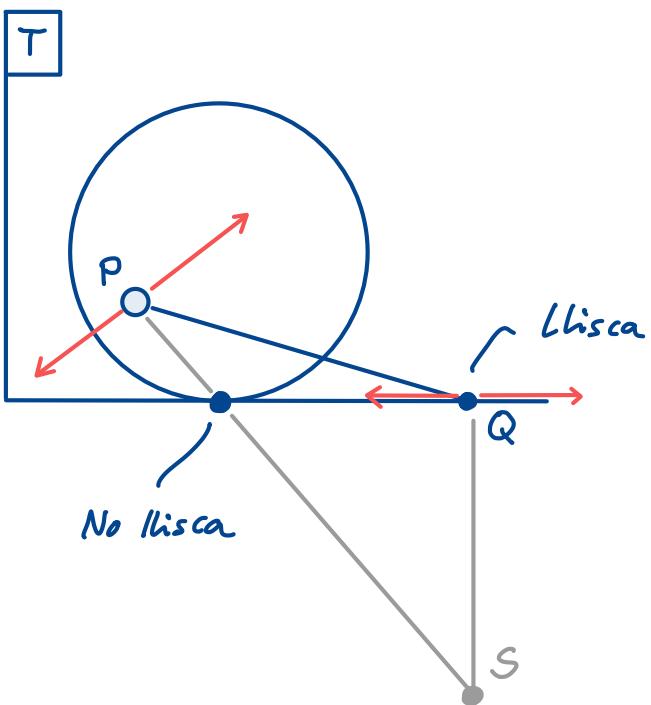
Lluís Ros  
<https://lluisros.github.io/mecanica>

6P



La roda no llisca al damunt del terra (T). La barra està articulada a la roda i recolza sobre el terra.

Determina el  $CIR_T^{\text{barra}}$ .

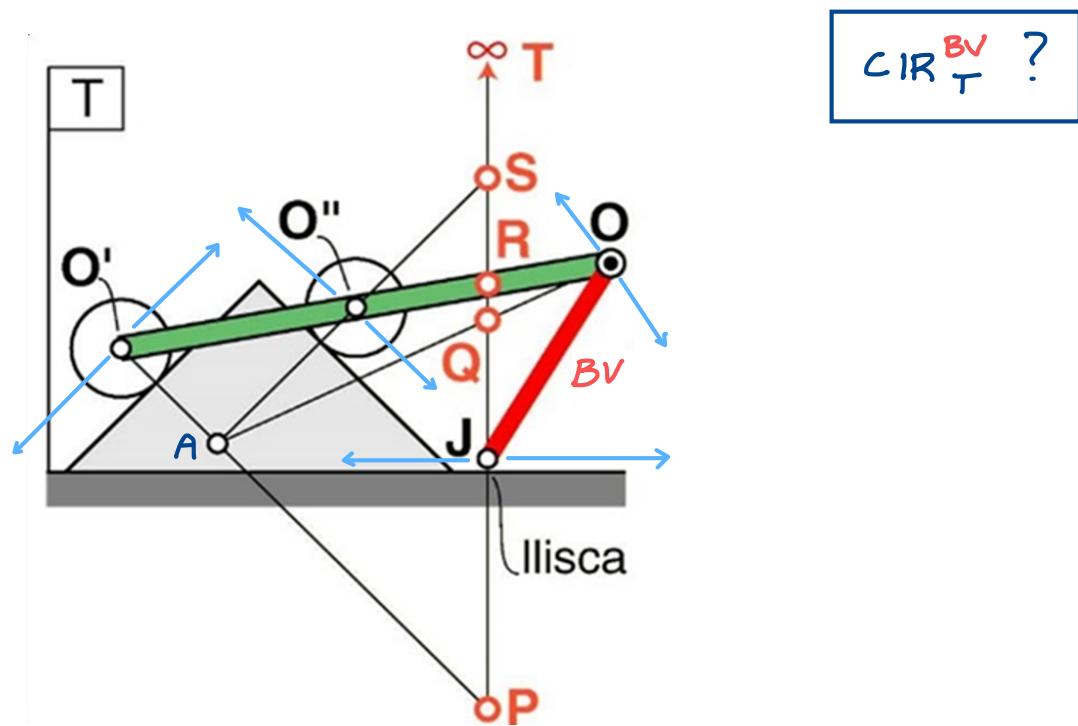
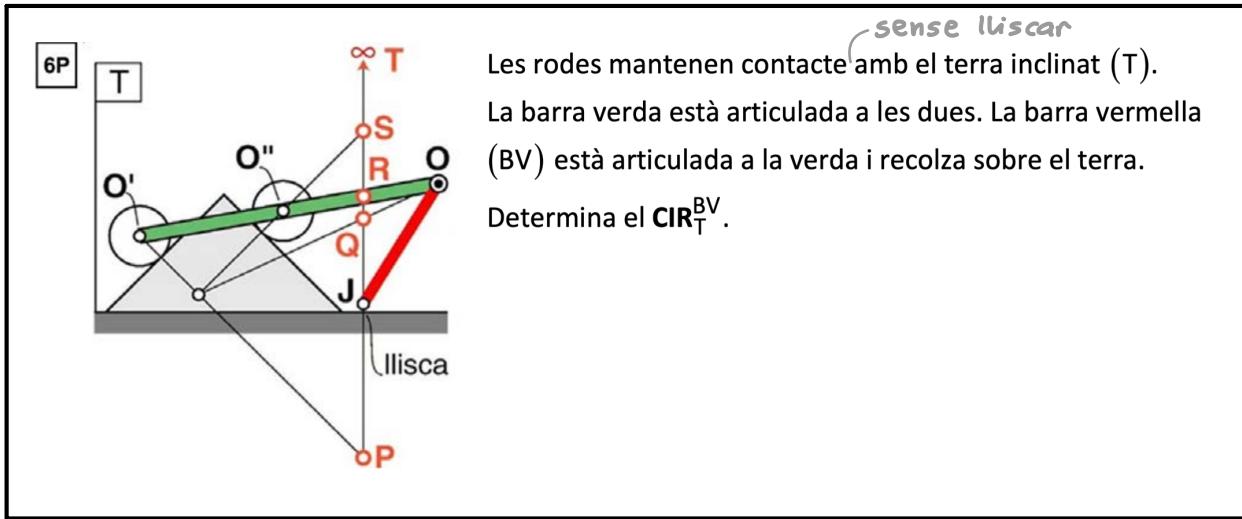


La dir. de les vel. de P i Q resp. T és la indicada en vermell. Ergo:

$$CIR_T(\text{Barra}) = S$$

$S = \text{Intersecció de les rectes} :$

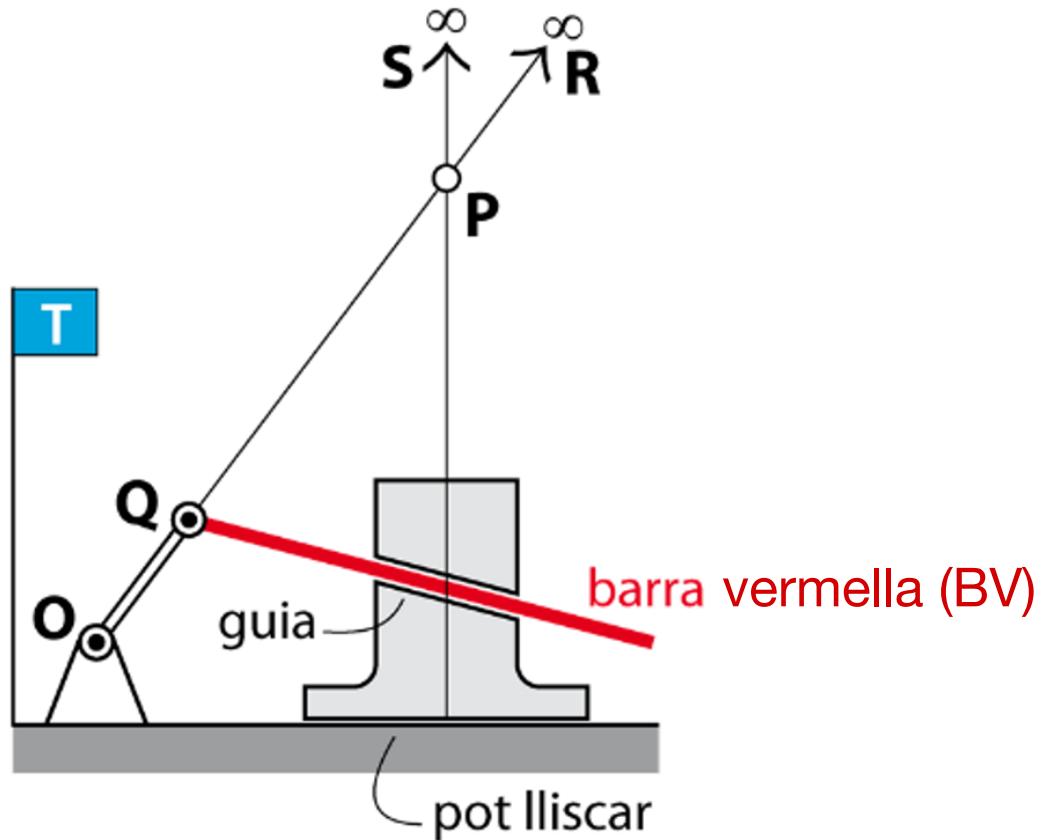
- $\perp$  a  $\bar{v}_T(P)$  passant per P
- $\perp$  a  $\bar{v}_T(Q)$  " " " Q



$\bar{v}_T(0')$  té dir ↗  
 $v_T(0'')$  té dir ↘

$$\left. \begin{array}{l} CIR_T^{\text{Barra verda}} = A \\ J \text{ l'isca resp } T \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{v}_T(0) \text{ té dir} \\ \perp \text{ a recta } AD \\ \bar{v}_T(J) \text{ té dir. horizontal} \end{array} \right\} \Rightarrow CIR_T^{\text{BV}} = Q$$

La barra blanca està articulada al terra ( $T$ ). La barra vermella ( $BV$ ) està articulada a la blanca i té un enllaç prismàtic amb el suport, que recolza sobre el terra. Determina el  $CIR_T^{BV}$ .

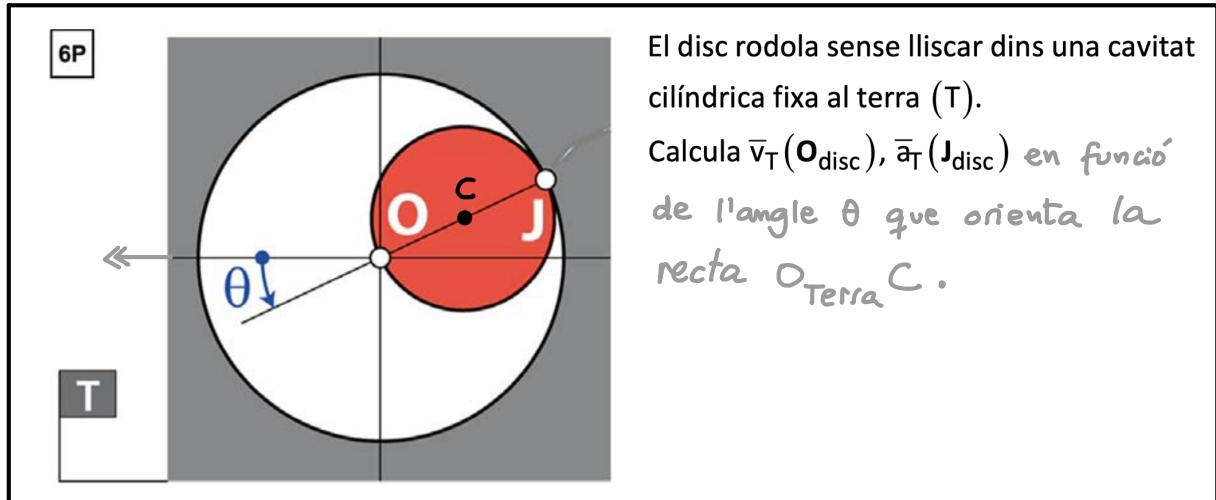


La barra vermella només ser pot traslladar. No pot girar, perquè els 2 enllaços prismàtics no li ho permeten.

Vol dir que  $\overline{I2}_T^{\text{barra}} = 0$ . Això implica que el seu CIR es a l' $\infty$  (sobre un punt de la recta de l' $\infty$ ). Per altra banda  $CIR_T^{\text{barra}}$  ha de ser sobre la recta  $OQ$  perquè  $Q$  té velocitat  $\perp$  a aquesta recta. Per tant,  $CIR_T^{\text{barra}}$  ha de ser el punt de l' $\infty$  de la recta  $OQ$ .

$$CIR_T^{BV} = R$$

## Disc rodolant sobre pista circular

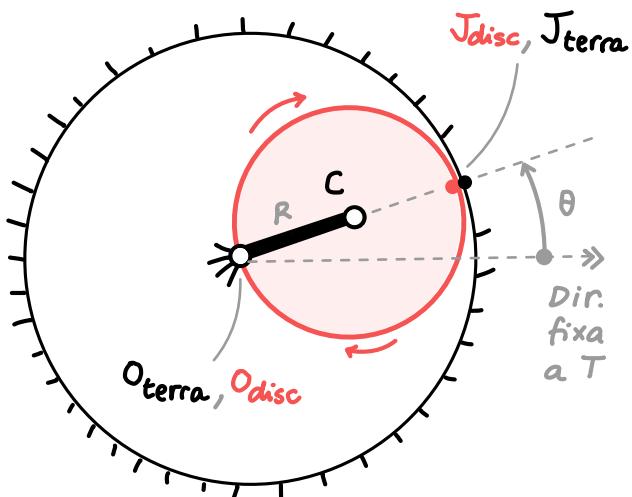


Entenguem primer el moviment del disc.

$\theta$  = orientació de la recta  $O_{terra}C$  respecte del terra.

Si  $\theta$  augmenta, com rodola el disc?

Per entendre-ho, va bé imaginar-se que el segment  $O_{terra}C$  és una barra articulada amb el terra i amb el disc:



$\theta$  orienta aquesta barra fictícia (no el disc!) resp.  $T$ .

Quan  $\theta$  augmenta,  $C$  descriu una trajectòria circular de radi  $R$  ardi  $O_{terra}$ , en sentit antihorari).

Com que a  $J$  no hi ha lliscament, el disc rodola girant en sentit horari respecte  $T$ . Es veu intuitivament, però més avall farem el càlcul precís de  $\bar{\Omega}_T^{disc}$ .

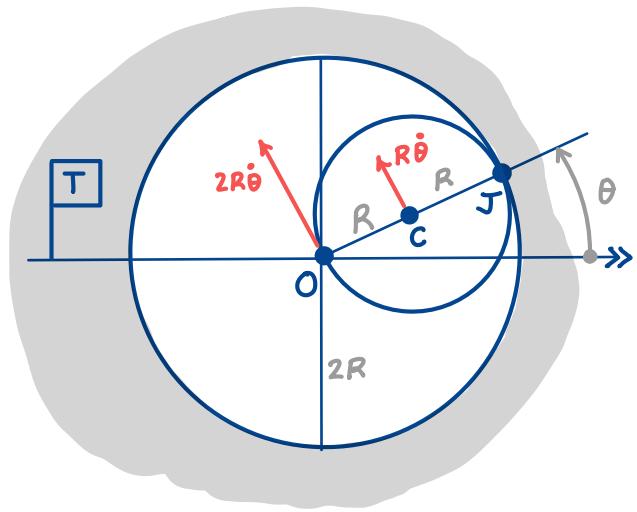
Vegeu animació online del moviment del disc  
<https://www.geogebra.org/classic/tkb7md6s>

Buscarem  $\bar{v}_T(0_{disc})$  i  $\bar{\alpha}_T(J_{disc})$  per CSR.

Ens caldran  $\bar{\omega}_T^{disc}$  i  $\bar{\alpha}_T^{disc}$ .

Determinem-les:

Clarament, C descriu una trajectòria circular amb centre a O terra, radi R, i vel. angular associada ( $\dot{\theta}$ ) resp. T.



Per tant :

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_T(C) &= (\nwarrow R\dot{\theta}) \\ CIR_T^{disc} &= J \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\omega}_T^{disc} = (\otimes \dot{\theta}) \Rightarrow \bar{\alpha}_T^{disc} = (\otimes \ddot{\theta})$$

$\bar{v}_T(0_{disc})$

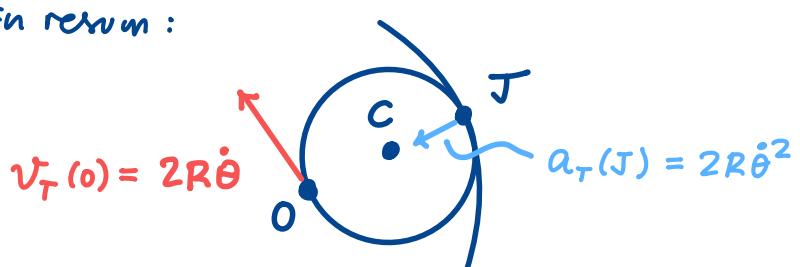
$$\bar{v}_T(0_{disc}) = \bar{v}_T(J_{disc}) + \bar{\omega}_T^{disc} \times \bar{J}O = (\hat{\otimes} \dot{\theta}) \times (\leftarrow 2R) = (\nwarrow 2R\dot{\theta})$$

vec. foto!  
No el podríem derivar per  
obtenir  $\bar{\alpha}_T(0_{disc})$   
(si la volguéssim)

$\bar{\alpha}_T(J_{disc})^{(*)}$

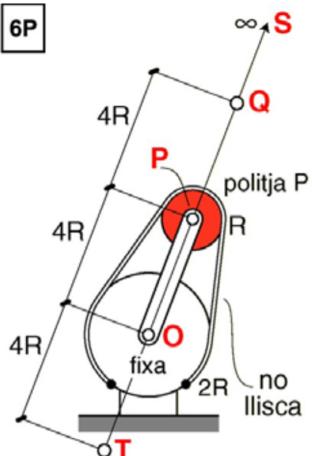
$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_T(J_{disc}) &= \bar{\alpha}_T(C) + \bar{\alpha}_T^{disc} \times \bar{C}J + \bar{\omega}_T^{disc} \times (\bar{\omega}_T^{disc} \times \bar{C}J) = \\ &= \underbrace{[(\nwarrow R\ddot{\theta}) + (\leftarrow R\dot{\theta}^2)]}_{(\searrow R\ddot{\theta})} + \underbrace{[(\otimes \ddot{\theta}) \times (\rightarrow R)]}_{(\leftarrow R\dot{\theta}^2)} + \underbrace{(\otimes \dot{\theta}) \times [(\otimes \dot{\theta}) \times (\rightarrow R)]}_{(\leftarrow 2R\dot{\theta}^2)} = \end{aligned}$$

En resum:



(\*)  $\bar{\alpha}_T(0_{disc})$  es calcularia de manera anàloga.

6P



El braç està articulat al terra ( $T$ ) i a la politja  $P$ . La corretja inextensible no llisca en cap dels seus punts de contacte amb el terra i la politja. Determina el  $CIR_T^{\text{politja } P}$ .

Solució: pàgina següent.

### Solución:

*Basc* = *Bascubant*

PO = Politja a O

*PP* = " " " *P*

Suposem  $\bar{\Omega}_T^{\text{Basc}} = \omega$

下

$$\bar{v}_T(P) = (\leftarrow 4R\omega)$$

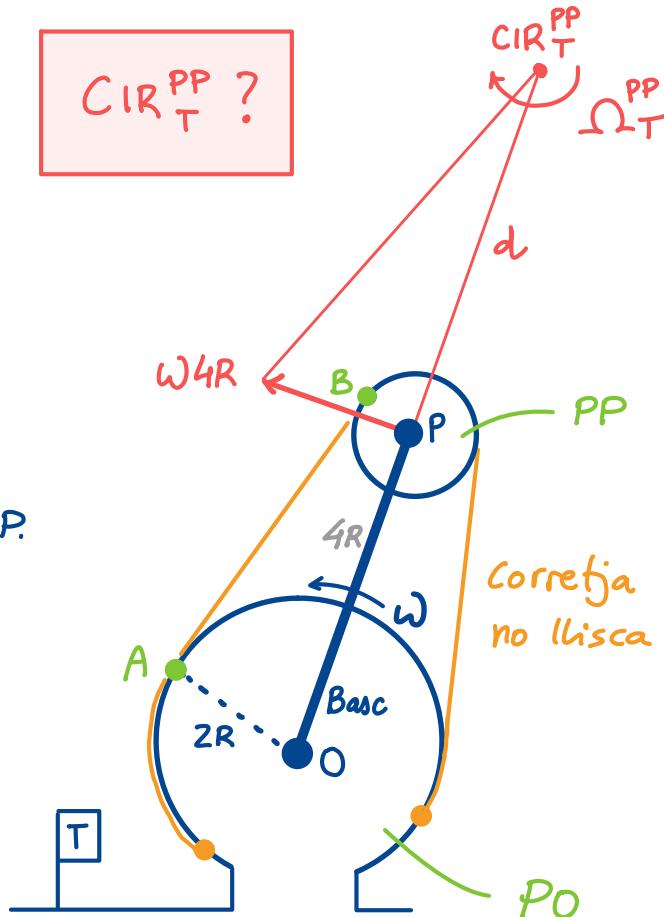
下

$I = CIR \frac{PP}{T}$  es sobre recta OP.

Si sabessim  $\bar{\Omega}_T^{PP}$ , ja podríem localitzar el CIR trobant d via (\*).

$$\omega_T^{pp} d = 4R\omega$$

Busquem doncs  $\bar{\Omega}_{\frac{T}{T}}$  :



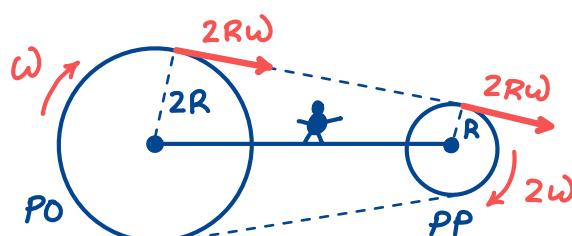
$$\bar{\Omega}_T^{PP} = \underbrace{\bar{\Omega}_{Basc}^{PP}}_{\textcircled{R} 2\omega} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Basc}}_{\textcircled{R}\omega} = \textcircled{\otimes} \omega$$

Què veiem des del basculant?

$$\bar{\Omega}^{PO}_{Bac} = \vec{\otimes} \omega$$

↓

$$\bar{\Omega}_{\text{Bear}}^{pp} = \vec{\otimes} 2\omega$$



Rel transm. 2:1

## voltes sortida

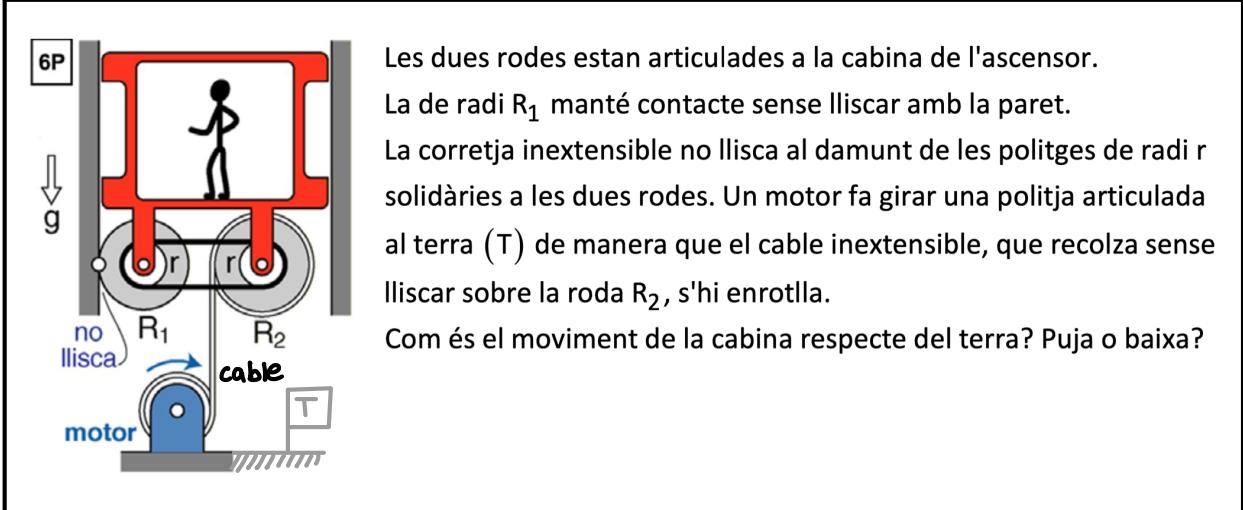
voltos entrada

Ara ja és fàcil:

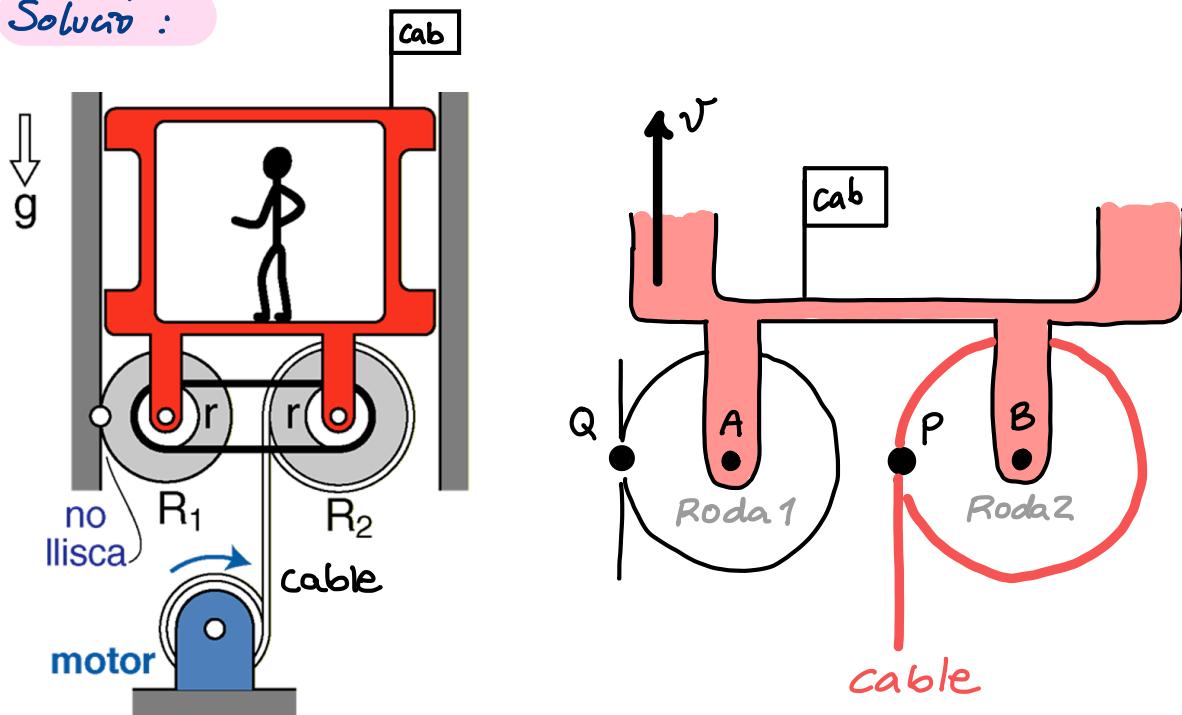
$$\omega \cdot d = 4\omega R \Rightarrow d = 4R$$

$$CIR \frac{PP}{T} = Q$$

(\*)  $I = CIR_T^{PP}$  serà per sobre de  $P$  si  $\bar{Q}_T^{PP}$  té sentit  $\otimes$ ,  
altrament serà per sota.



Solució :



Suposem que la cabina es mou amb velocitat ( $\uparrow v$ ) respecte el terra. Cal esbrinar si, en enrotllar-se el cable a la politja motoritzada,  $v$  és positiva o negativa (la cabina puja o baixa, respectivament).

Fixem-nos que, en qualsevol cas, la velocitat del punt P resp. T només pot ser cap avall  $\downarrow$ , ja que el motor està enrotllant el cable.

Així doncs, calcularem  $\bar{v}_T(P)$  en funció de  $v$  i imposarem que tingui direcció cap avall.

Calculem  $\bar{v}_T(P)$  per comp. de movim. amb

$$\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = Cabina \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AB}(P) &= \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P) = \\ &= \bar{\Omega}_{REL}^{Rodaz} \times \overline{BP} + (\uparrow v) = \\ &= \left( \odot \frac{v}{R_1} \right) \times (\leftarrow R_2) + (\uparrow v) = \\ &= \left( \downarrow \frac{R_2}{R_1} v \right) - (\downarrow v) = \downarrow \left[ v \left( \frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right] \quad (\square) \end{aligned}$$

De  $(\square)$  veiem que  $\bar{v}_T(P)$  vindrà dir.  $\downarrow$  si i només si

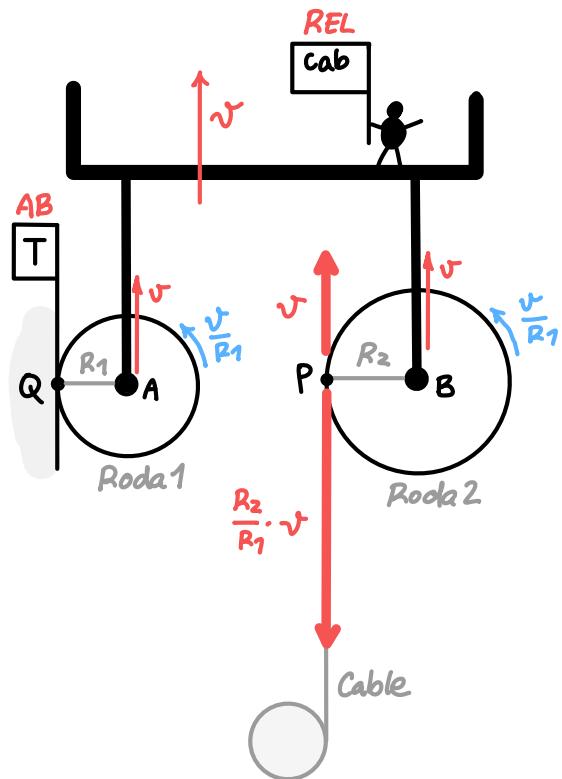
$$v \left( \frac{R_2}{R_1} - 1 \right) > 0,$$

que equival a demanar

$$v(R_2 - R_1) > 0$$

$\underbrace{A}_{\text{A}}$     $\underbrace{B}_{\text{B}}$

És a dir, A i B han de tenir el mateix signe.



$$\left. \begin{aligned} (*) \quad \bar{v}_T(A) &= (\uparrow v) \\ CIR_T^{Rodaz} &= Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\Omega}_T^{Rodaz} = \odot \frac{v}{R_1}$$

Cabina té orientació fixa resp. T

Relació transmissió 1:1 Roda1  $\rightarrow$  Roda2

$$\bar{\Omega}_{cabina}^{Rodaz} = \bar{\Omega}_{cabina}^{Rodaz}$$

Per tant, quan el cable s'enrotlla :

- Si  $R_2 > R_1$ ,  $v$  ha de ser positiva  $\Rightarrow$  La cabina puja
  - Si  $R_2 < R_1$ , " " " negativa  $\Rightarrow$  " " baixa
- 

Extra: i què passa quan el motor està aturat?

En aquest cas, el cable no s'enrotlla a la polifà  
motoritzada  $\Rightarrow \bar{V}_T(P) = 0$ , i per tant ha de ser

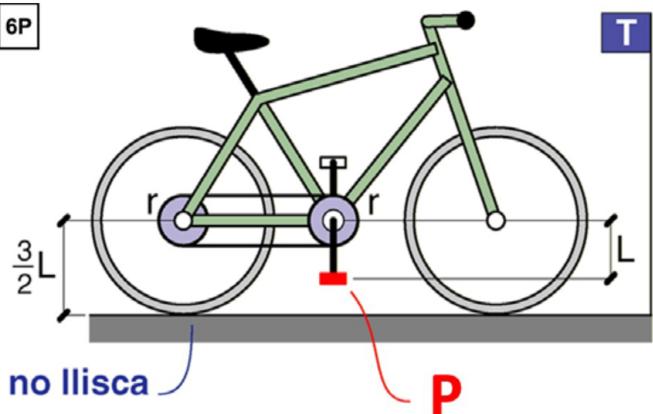
$$v(R_2 - R_1) = 0$$

Aquesta condició es compleix en dos casos:

(i) Si  $R_2 \neq R_1 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow$  La cabina està  
aturada

(ii) Si  $R_2 = R_1 \Rightarrow v$  pot tenir qualsevol valor  $\Rightarrow$   
El moviment de la cabina no queda determinat  
cinemàticament. Pot pujar o baixar, o quedar  
en repòs. Té llibertat per a fer qualsevol  
d'aquestes coses. I quinà farà? No ho sabem!  
Calen les eines de la dinàmica per a determinar  
el moviment.

6P



Les rodes de la bicicleta no llisquen al damunt del terra (T). Plat i pinyó tenen la mateixa mida. Calcula  $\mathcal{R}_T(P)$ .

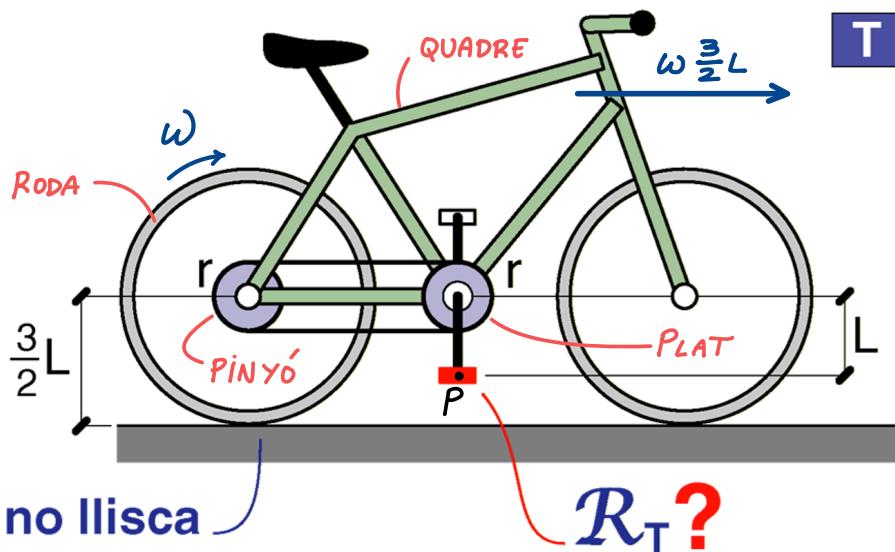
$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|\alpha_T^n(P)|} \Rightarrow \text{Hem de calcular } \bar{v}_T(P) \text{ i } \bar{\alpha}_T(P) \text{ i extreure } \bar{\alpha}_T^n(P).$$

Per a fer els càlculs, podem suposar que la roda del darrere gira amb velocitat angular  $\vec{\omega}$  resp. T, de manera que el quadre avança amb velocitat

$$\left( \rightarrow \omega \cdot \frac{3}{2} L \right)$$

Podrem suposar un valor  $\omega$  variable, però com que  $\mathcal{R}_T(P)$  no depèn de la velocitat amb que P descriu la seva trajectòria, suposem  $\omega = \omega_0 = ct$  (constant  $\forall t$ ).

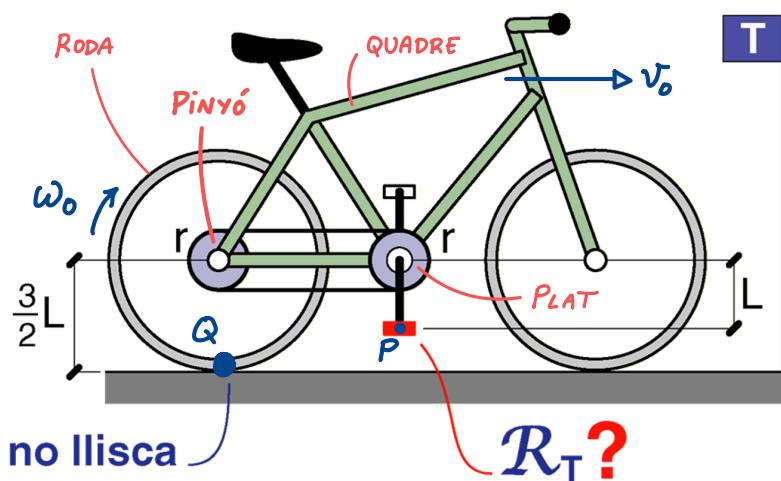
Això simplifica els càlculs.



Farem composició  
de moviments amb

$$AB = T$$

$REL = \text{Quadre}$

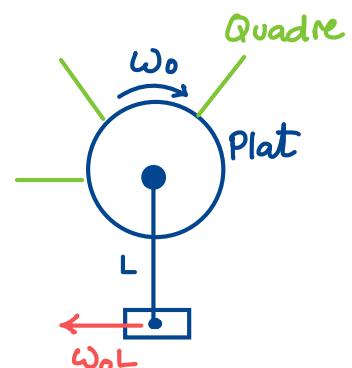


$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_T^{\text{Roda}} &= \hat{\otimes} \omega_0 \\ \text{CIR } \frac{\text{Roda}}{T} &= Q \end{aligned} \Rightarrow \text{Respecte } T, \text{ el quadre avança amb velocitat} \\ v_0 = \left( \rightarrow \frac{3}{2} L \cdot \omega_0 \right)$$

Clarament  $\bar{\Omega}_{\text{Quadre}}^{\text{Plat}} = \hat{\otimes} \omega_0$  també, ja que per cada volta que fa la roda resp.  $T$ , el pinyó i el plat en fan una resp. el quadre.

Aleshores:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AB}(P) &= \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P) = \\ &= (-\omega_0 L) + (\rightarrow \omega_0 \frac{3}{2} L) = (\rightarrow \frac{\omega_0 L}{2}) \end{aligned}$$



$$\bar{a}_{AB}(P) = \bar{a}_{REL}(P) + \cancel{\bar{a}_{ar}(P)}^0 + \underbrace{\bar{a}_{cor}(P)}_{0} = (\uparrow \omega_0^2 L)$$

i per tant:

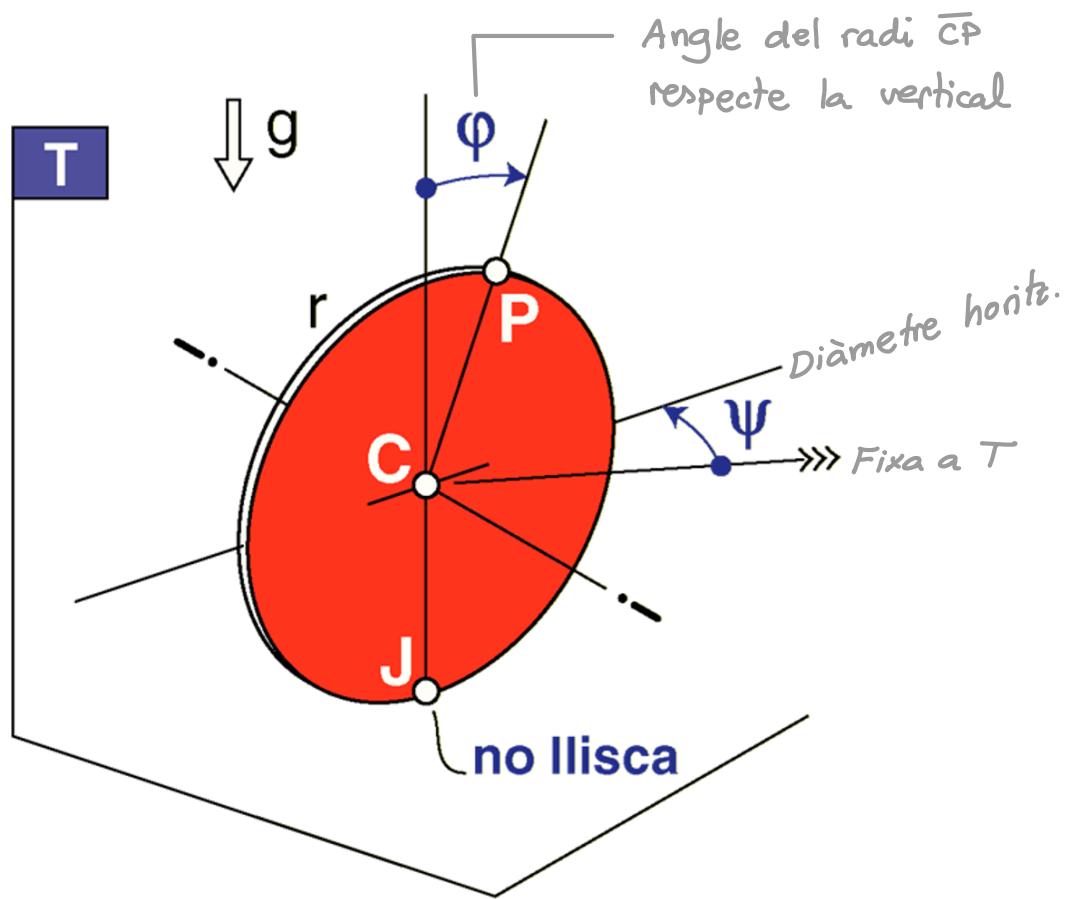
$$2 \underbrace{\bar{\Omega}_{AB}^{\text{REL}}}_{0} \times \bar{v}_{REL}(P)$$

$$\boxed{\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|} = \frac{\left(\frac{\omega_0 L}{2}\right)^2}{\omega_0^2 L} = \frac{L}{4}}$$

# Introducció a cinemàtica de vehicles

El següent exercici proporciona un resultat que ens permetrà agilitzar les anàlisis cinemàtiques de vehicles.

La roda no llisca sobre el terra, i gira mantenint el seu pla perpendicular al terra ( $T$ ). Calcula  $\bar{v}_T(C)$ .

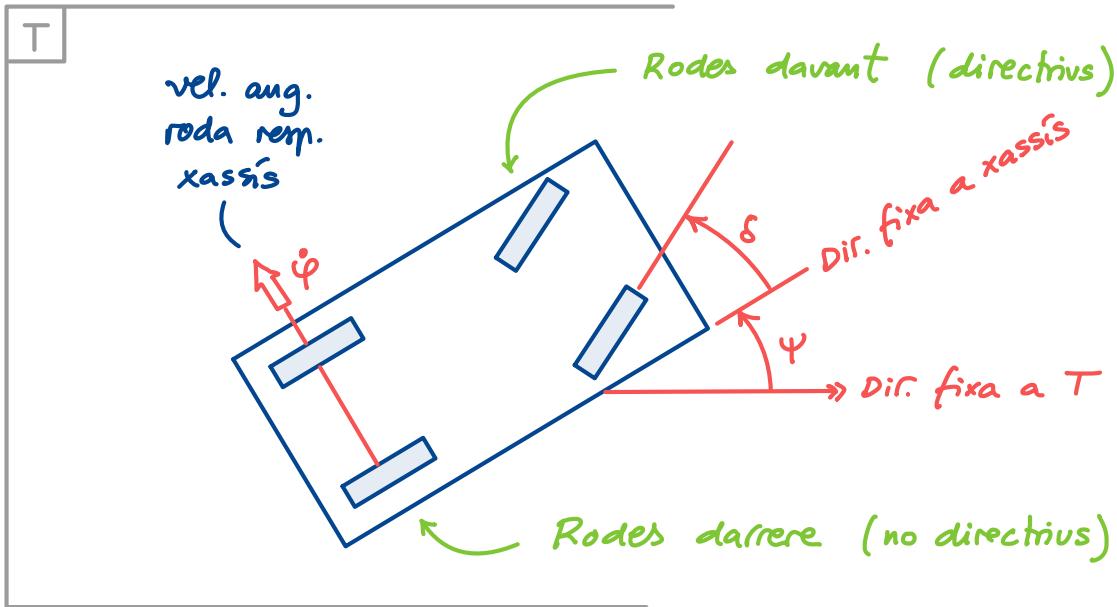


Resoldrem l'exercici posant-lo en context.

Considerarem un vehicle amb rodes, introduirem tres hipòtesis simplificadores, i calcularem la velocitat del centre d'una roda qualsevol respecte del terra.

Veurem que la velocitat d'aquest centre només depèn de la velocitat **phipunt** de rotació de la roda respecte del xassís (no de **psipunt**). Aquest resultat permet fer anàlisis cinemàtiques ràpides de vehicles, i l'aplicarem en exercicis futurs.

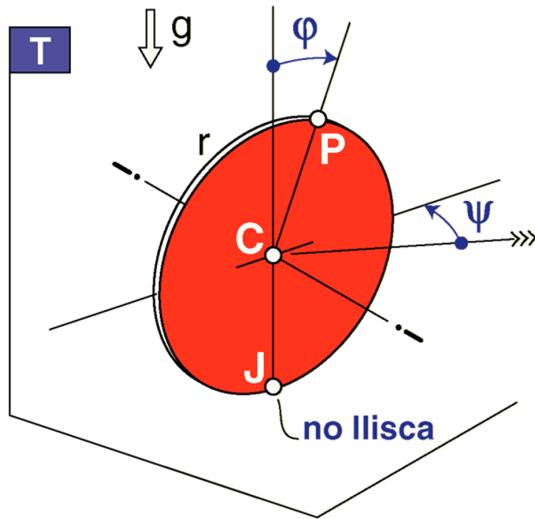
Considerem un vehicle:



3 hipòtesis simplificadores

- Vehicle es mou en terra pla
- Veh. no té suspensions  $\Rightarrow$  Roda es manti en un pla vertical i només cal orientar-la amb 2 angles.

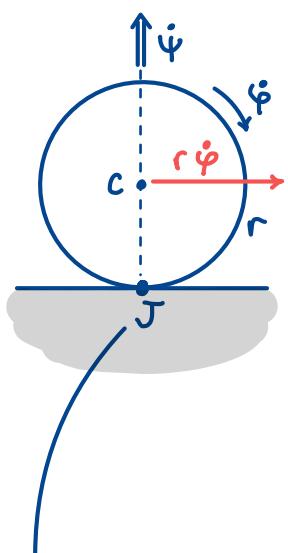
Per la roda del darrere serien  $\psi$  i  $\varphi$ :



Per la del davant serien  $\psi + \delta$ ,  $\varphi$

- Rodes primes  $\Rightarrow$  contacte puntual amb el terra. Permet introduir hipòtesi de no lliscament a J. Si el contacte fos en un segment de recta seguir que hi hauria lliscament en alguns punts.

Anàlisi cinemàtica roda del darrere:  
(per la roda del davant surt el mateix!)



Aplicant CSR a roda:

$$\bar{v}_T(c) = \bar{v}_T(J) + (\uparrow\dot{\psi} + \hat{\otimes}\dot{\varphi}) \times (\uparrow r) = (\rightarrow r\dot{\varphi})$$

0!

Que simple!

Per la roda davantera també surt  
 $\bar{v}_T(c) = (\rightarrow r\dot{\varphi})$  perquè en lloc de  
 $\uparrow\dot{\psi}$  tenim  $\uparrow(\dot{\psi} + \dot{\delta})$

J no és el CIR! Ho seria si el movim.  
de la roda fos plà. Però aquí és 3D!

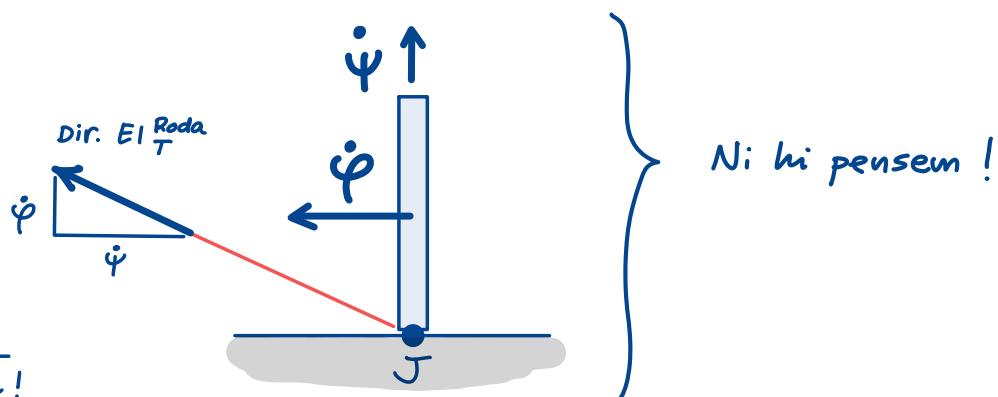
Per tant,  $\rightarrow r\dot{\varphi}$  no és  
"distància al CIR · R",  
sinó el resultat  
d'aplicar CSR!

En fer analisi cinemàtica de veh. pensarem sempre en això **la roda**

És a dir: pensarem que el centre C de la roda té vel.  $(\rightarrow r\dot{\varphi})$   
Això ens permetrà fer analisis cinemàtics ràpids perquè C sol  
ser, allora, un punt del xamís (veure questió del Tricicle  
com a exemple, pàg. següent).

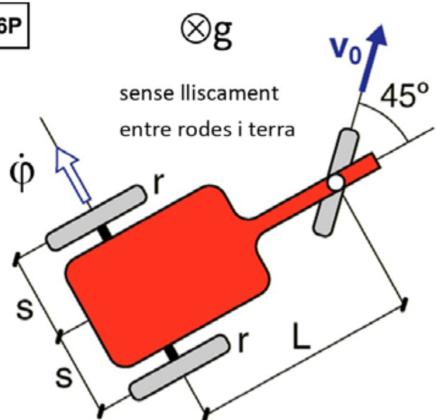
Observació:

L' $EI_T^{roda}$  passa per J, però la roda té 2 GDL. La dir. de  
l' $EI$  és  $\bar{\psi} + \bar{\varphi}$ , per tant  $EI_T^{roda}$  no queda determinat.  
No ens servirà útil. No cal que hi pensem!



(\*) No sempre ho serà!

6P

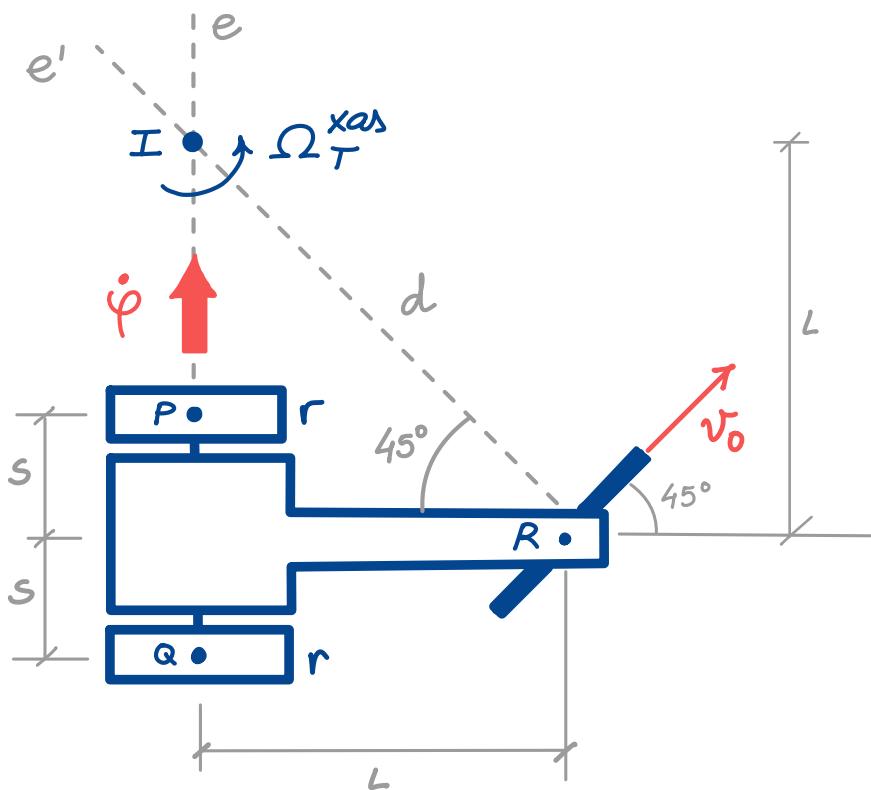


Les rodes del tricicle són identiques i no llisquen al damunt del terra ( $T$ ). La velocitat del centre de la roda del davant té velocitat  $v_0$  respecte del terra. Calcula la rotació pròpia  $\dot{\phi}$  de la roda posterior esquerra en funció de  $v_0$ .

Solució: pàgina següent.

Solució:

$$\dot{\varphi} ?$$



$P, Q, R$  són centres de les respectives rodes, però també punts del xassís.

$$P \text{ i } Q \text{ tenen vel. } \perp \text{ eix } e \quad | \Rightarrow CIR_T^{xassís} = I \\ R \text{ té vel. } \perp \text{ eix } e' \\$$

Busquem  $\Omega_T^{xas}$ :

$$\Omega_T^{xas} = \frac{v_0}{d} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} \quad "xas" = xassís$$

Ara, veient  $P$  com a punt de la roda:

$$v_T(P) = r \cdot \dot{\varphi} \quad (I)$$

I veient  $P$  com del xassís:

$$v_T(P) = \Omega_T^{xas} \cdot \underbrace{(L-s)}_{\text{dist. al CIR}} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} \cdot (L-s) \quad (II)$$

$$I = II :$$

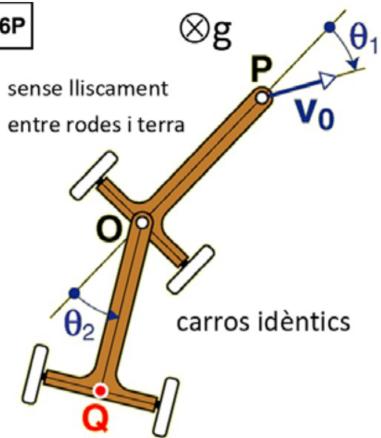
$$r \dot{\varphi} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} (L-s) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{rL\sqrt{2}} (L-s)$$

CSR  
roda

CSR  
xassís

6P

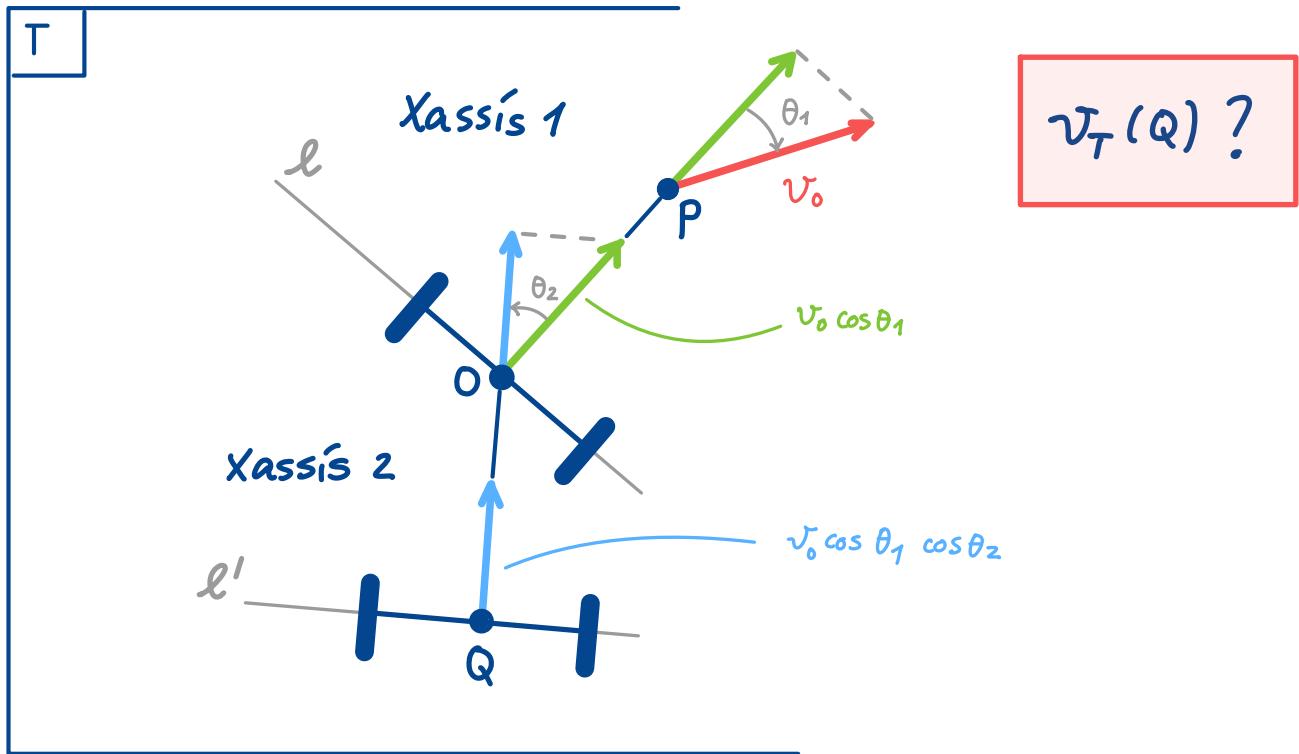


Les rodes del tractor i el remolc són identiques i no llisquen al damunt del terra ( $T$ ). La velocitat del punt  $P$  respecte del terra és  $v_0$ . Calcula  $\bar{v}_T(Q)$ .

Solució: pàgina següent.

Solució ràpida via equiprojectivitat !

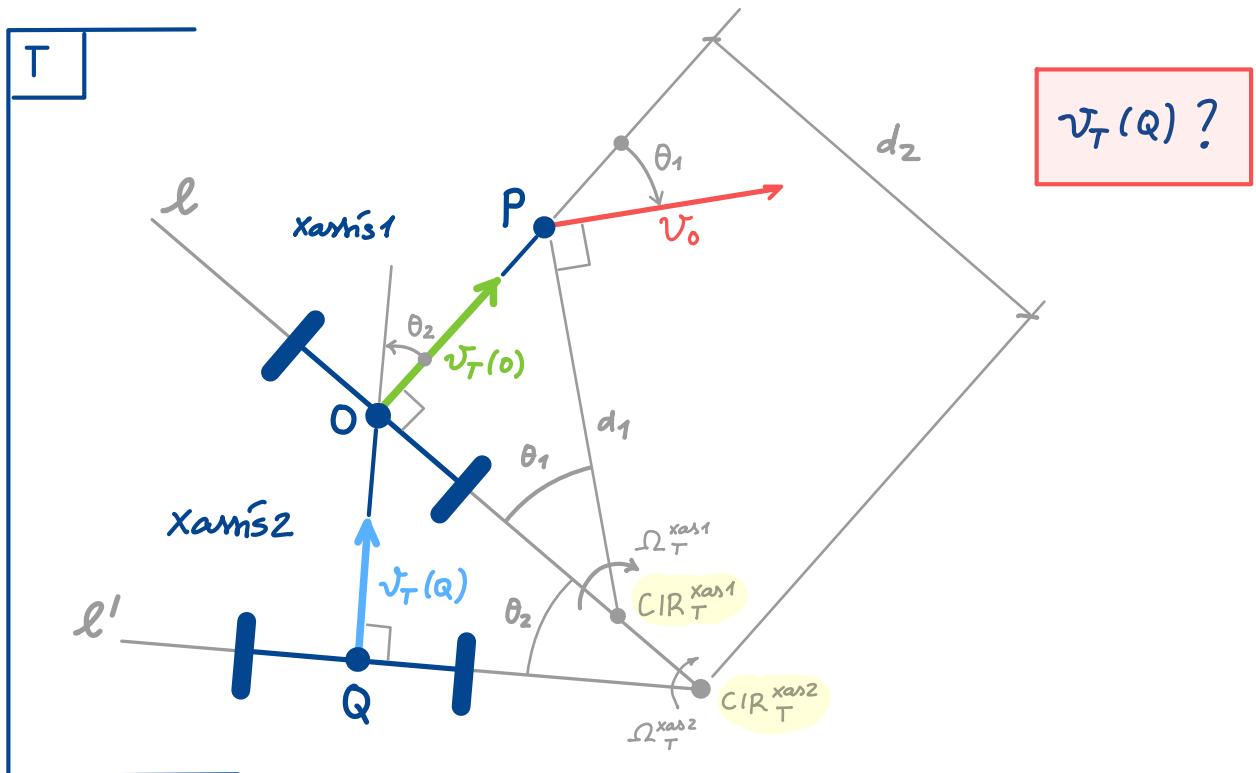
(Solució menys directa, però igualment bona, a la pàg. seg.)



- CIR  $\frac{xassís}{T} 1$  sobre  $\ell \Rightarrow \overline{v_T}(O) \perp \ell$
  - Equiprojectivitat  $P \rightarrow O : v_T(O) = v_0 \cos \theta_1$
  - CIR  $\frac{xassís}{T} 2$  sobre  $\ell' \Rightarrow \overline{v_T}(Q) \perp \ell'$
  - Equiprojectivitat  $O \rightarrow Q :$
- $$\boxed{v_T(Q) = v_T(O) \cos \theta_2 = \overline{v_0 \cos \theta_1 \cos \theta_2}}$$

Solució "lenta" via localitzar  $CIR_T^{xas1}$  i  $CIR_T^{xas2}$

Els  $CIR_T^{xas1}$  i  $CIR_T^{xas2}$  han de ser on indiquem. A més,  $v_T(0)$  i  $v_T(Q)$  han de ser  $\perp$  a  $l$  i  $l'$ , respectivament.



- $\Omega_T^{xas1} = \frac{v_0}{d_1}$

$\curvearrowright \text{dist}(CIR_T^{xas1}, P)$

- $v_T(0) = \Omega_T^{xas1} \cdot d_1 \cos \theta_1 = v_0 \cos \theta_1$

- $\Omega_T^{xas2} = \frac{v_T(0)}{d_2} = \frac{v_0 \cos \theta_1}{d_2}$

$\curvearrowright \text{dist}(CIR_T^{xas2}, O)$

- $\boxed{v_T(Q) = \Omega_T^{xas2} \cdot d_2 \cos \theta_2 = \frac{v_0 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{d_2}}$