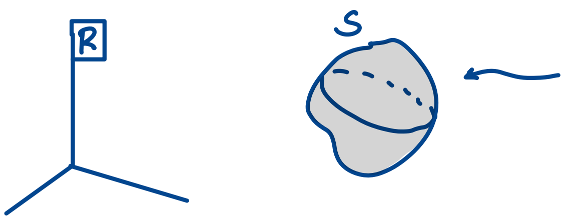
3P

Angles d’Euler

Repàs Angles Euler

Permeten orientar un sòlid resp. una ref. i expressar la vel. angular del sòlid respecte aquesta ref.



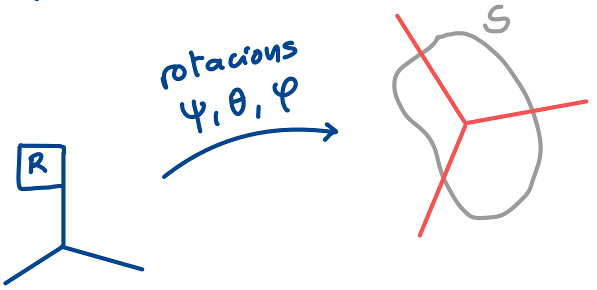
- Com està orientat ?
- $\underbrace{\text{Com gira S respecte R ?}}_{\text{Quina és } \overline{\Omega}^{S}_{R} \text{ ?}}$

Recordem els angles

ψ	θ	φ
psi	theta	phi
precessió	nutació	spin

Sempre en aquest ordre! →

Sigui un sòlid S amb un triedre fix a ell. Les rotacions d'Euler són 3 rotacions encadenades (en sèrie), al voltant de 3 eixos, que permeten definir l'orientació del triedre fix a S relativa a un triedre fix a la referència:



Triedre fix a S

Triedre fix a R

A teoria hem vist com són aquestes rotacions en el cas del giroscopi. Vegeu apartat C1.4 de $\underbrace{\text{mec.etseib.edu}}_{\text{wikimec}}$

Però una cosa és com queda orientat aquest triedre fix al sòlid, i una altra de ben diferent és com queden els eixos de rotació després de cada gir. Vegem-ho:

A 90°	Eix	Com queda?	Gira degut a
	$\bar{\dot{\psi}}$	Fix a R	Res!
A 90°	$\bar{\dot{\theta}}$	$\perp$ a $\bar{\dot{\psi}}$, i $\perp$ a $\bar{\dot{\varphi}}$	ψ
	$\bar{\dot{\varphi}}$	Fix a S	ψ i θ

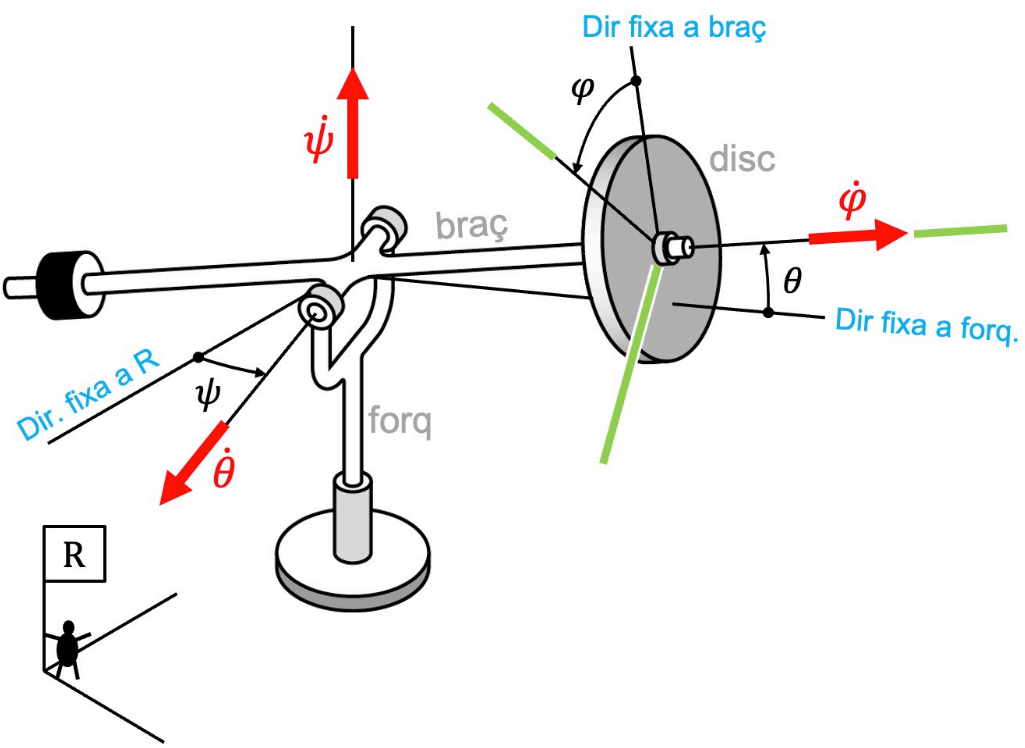
$$\text{Eix } \bar{\dot{\theta}} = \left(\text{Pla} \perp \bar{\dot{\psi}}\right) \cap \left(\text{Pla} \perp \bar{\dot{\varphi}}\right)$$

Especificació rigorosa de la posició del 2n eix

Tot això es veu clar al giroscopi, on S = disc:

Triedre fix a S? $\longrightarrow$ El verd!

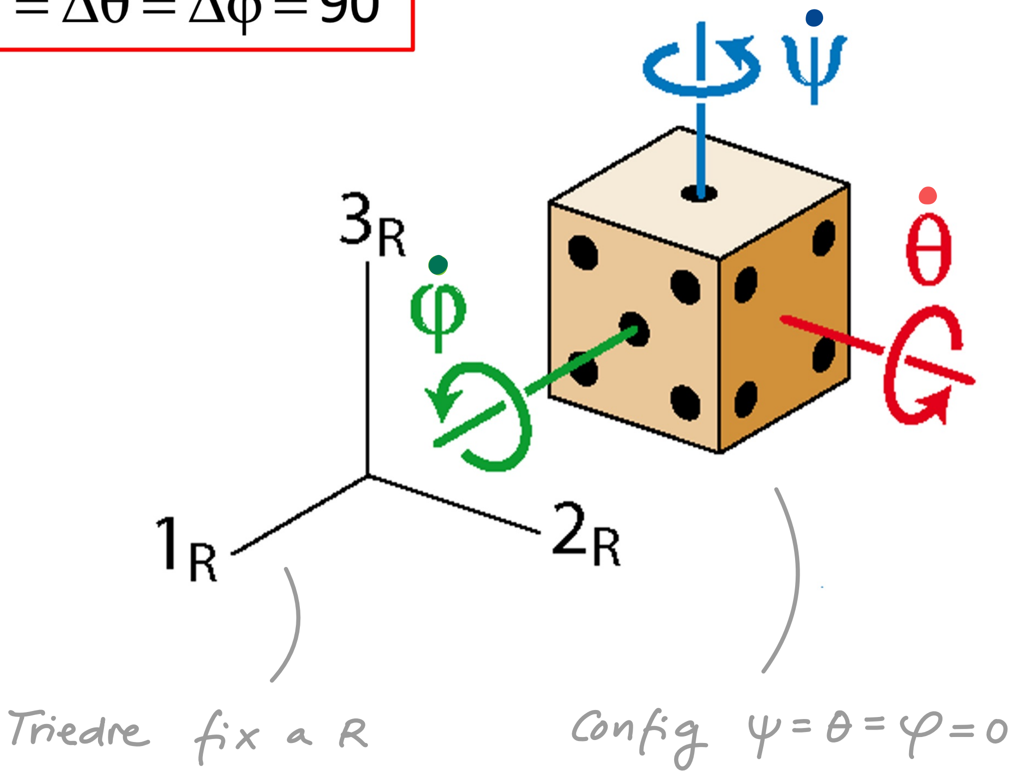
Eixos d'Euler? $\longrightarrow$ Els dels vecs. vermells! $\bar{\dot{\psi}}, \bar{\dot{\theta}}, \bar{\dot{\varphi}}$



Orientació d'un dau

El dau s'orienta respecte d'una referència R mitjançant tres angles d'Euler. Per a la configuració $\psi = \theta = \varphi = 0$, les tres velocitats angulars associades tenen l'orientació indicada a la figura. Quina serà l'orientació de $\bar{\dot{\psi}}$, $\bar{\dot{\theta}}$ i $\bar{\dot{\varphi}}$ si es modifiquen els angles d'acord amb els increments $\Delta\psi = \Delta\theta = \Delta\varphi = 90°$? I com quedarà orientat el dau?

$$\boxed{\Delta\psi = \Delta\theta = \Delta\varphi = 90^{\circ}}$$

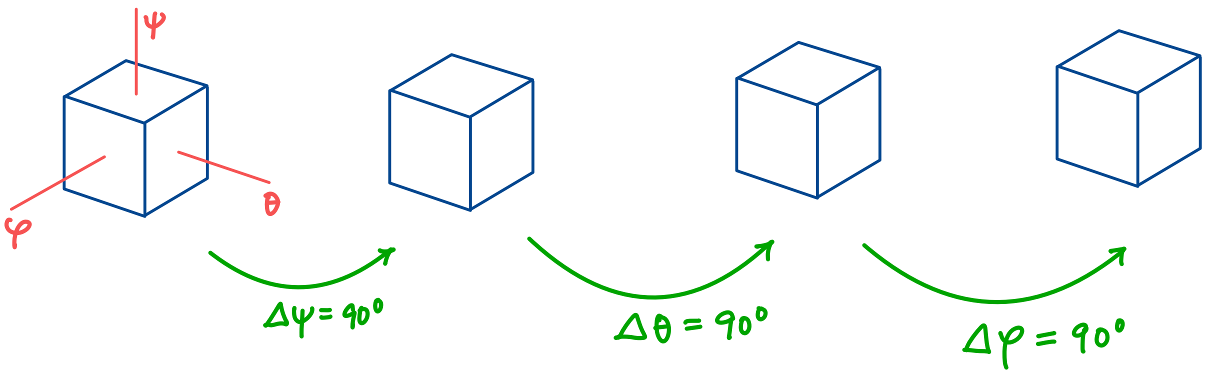


Pistes :

Recordeu com funcionen les rotacions d'Euler en el cas del giròscopi (C1.4 Wikimec) :

- Eix ψ és fix a la ref.
- Eix θ gira amb ψ
- Eix φ gira amb ψ i θ però és fix al sòlid (dau)

Pinteu com queden els eixos ψ, θ, φ del dau després de les rotacions:

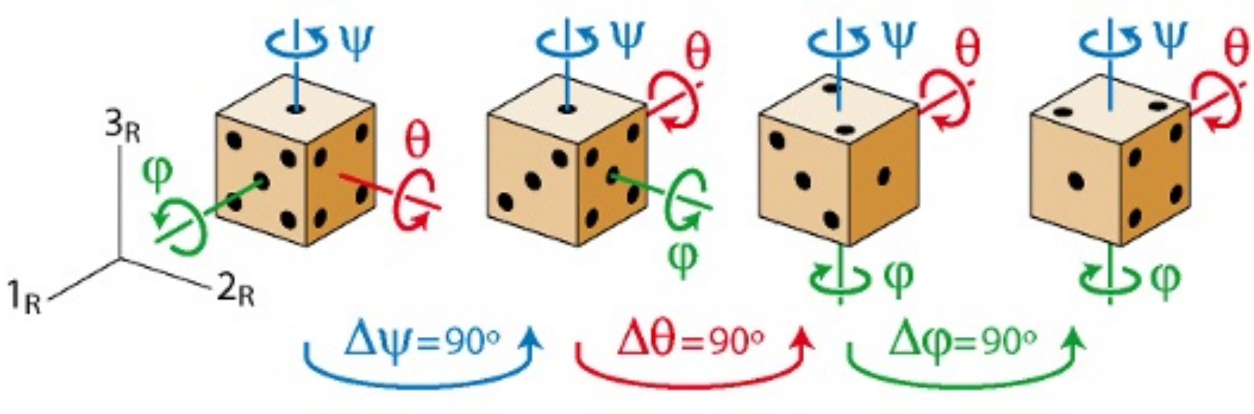


Després pinteu les cares del dau

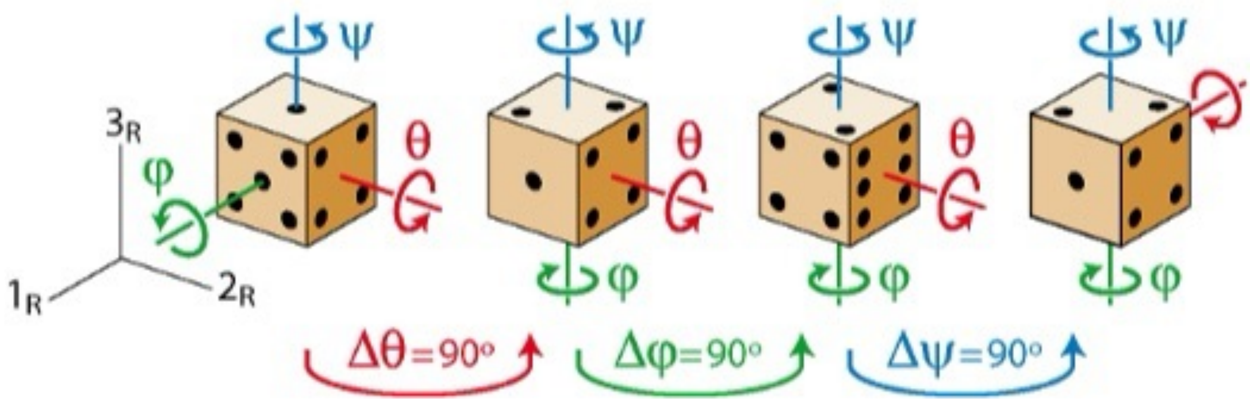
Recordeu : les cares oposades sumen 7.

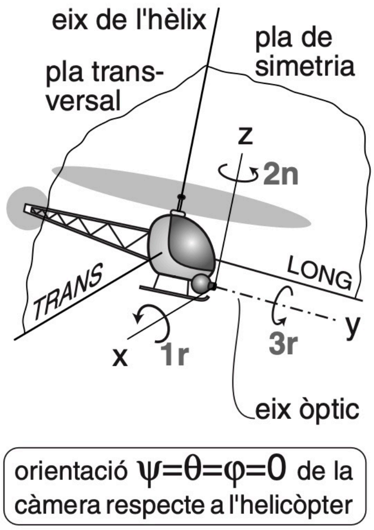
Solució : pàg. següent.

Aplicació en l'ordre $\Delta\psi, \Delta\theta, \Delta\varphi$



Aplicació en l'ordre $\Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta\psi$
(el resultat final ha de ser =)





A2 Una càmera per filmar des d'un helicòpter s'orienta **respecte a l'helicòpter** per mitjà de tres angles d'Euler. Per a l'orientació $\psi = \theta = \varphi = 0$, els eixos de rotació d'Euler són els indicats a la figura. Per a una orientació arbitrària de la càmera, quina és la direcció de l'eix de la segona rotació?

A La de l'eix de l'hèlix.

B La de la projecció de l'eix z de la càmera sobre el pla transversal de l'helicòpter.

C La intersecció del pla de la pel·lícula amb el pla transversal de l'helicòpter.

D La intersecció del pla de la pel·lícula amb el pla de simetria de l'helicòpter.

E La de la direcció z de la càmera.

Compte :

La càmera s'orienta respecte l'helicòpter, no el terra.

Vol dir que el 1er eix d'Euler, $\bar{\dot{\psi}}$, és fix a l'helicòpter

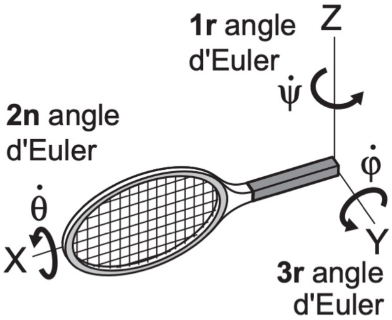
Pista :

Visualitzeu el moviment del 2n eix $\bar{\dot{\theta}}$. Aquest eix es manté sempre

$\left| \begin{array}{l} \perp \text{ al 1er eix } \bar{\dot{\psi}} \\ \perp \text{ al 3er eix } \bar{\dot{\varphi}} \end{array} \right.$

Feu-vos un dibuix d'aquest moviment.

2 Per estudiar la cinemàtica d'una raqueta, es descriu la seva orientació per mitjà de tres rotacions segons angles d'Euler que, per a $\psi = \theta = \varphi = 0$, tenen els eixos indicats a la figura. En aquesta configuració, la raqueta es troba en el pla vertical XZ. Per a una orientació general, quina és la direcció del segon eix d'Euler?



orientació ψ=θ=φ=0

A La de l'eix X fix a terra

B La del mànec de la raqueta

C La de la projecció horitzontal del mànec

D La de la recta horitzontal del pla de la raqueta

E La de la recta de màxim pendent del pla de la raqueta

Pinça braç robòtic

La pinça d'un braç robòtic (no dibuixat) pot tenir una orientació arbitrària. Si utilitzem els eixos d'Euler de la figura per indicar aquesta orientació, determineu:

(1)– La dir. i sentit de $(\overline{\dot{\psi}}, \overline{\dot{\theta}}, \overline{\dot{\varphi}})$ per a $\psi = \theta = \varphi = 90°$

(2)– $\overline{\alpha}_T^{\text{pinça}}$ per a $\psi = \theta = \varphi = 0$ si $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ tenen valors constants

Pinça de braç robòtic

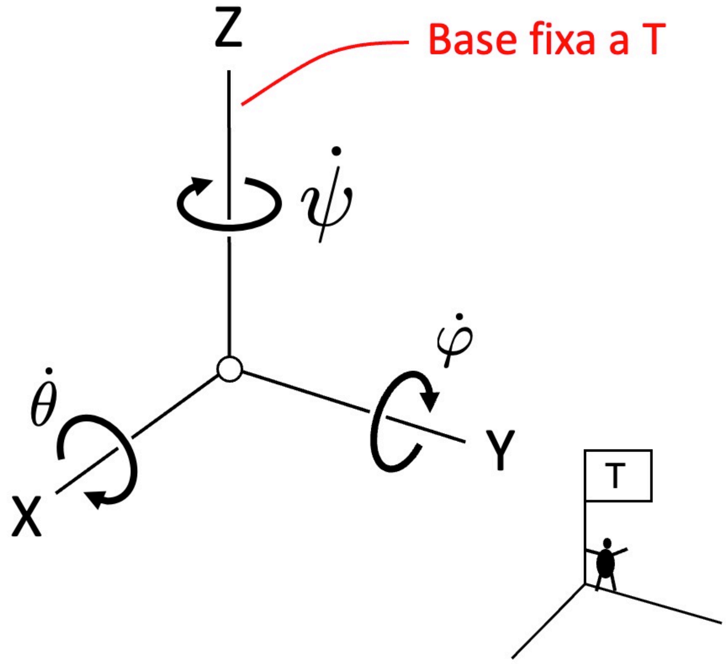
Dir. i sentit de

$$\overline{\dot{\psi}} \quad \overline{\dot{\theta}} \quad \overline{\dot{\varphi}}$$

per $\psi = \theta = \varphi = 90^\circ$?

$\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{T}}^{\text{pinça}}$ per $\psi = \theta = \varphi = 0^\circ$

si $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ tenen valors ct ?



eixos d'Euler per a

$\psi = \theta = \varphi = 0^\circ$

Pistes

- Per respondre (1) feu-vos un dibuix (3D o 2D)
- Per respondre (2), calculeu $\bar{\alpha}_T^{\text{pinga}}$ per derivació geomètrica mitjançant un dibuix i tenint en compte:

Tots només canvien de dir., perquè $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = (ct, ct, ct)$

$$\bar{\alpha}_T^{\text{pinga}} = \underbrace{\left.\frac{d\bar{\dot{\psi}}}{dt}\right]_T}_{0} + \underbrace{\left.\frac{d\bar{\dot{\theta}}}{dt}\right]_T}_{\bar{\dot{\psi}} \times \bar{\dot{\theta}}} + \underbrace{\left.\frac{d\bar{\dot{\varphi}}}{dt}\right]_T}_{(\bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\theta}}) \times \bar{\dot{\varphi}}}$$

És un bon exemple per veure que la derivació analítica pot ser traïdora: la temptació és projectar $\bar{\Omega}_T^{\text{pinga}}$ en tres eixos ortogonals... la qual cosa correspon necessàriament a una expressió particular, ja que $\bar{\dot{\psi}}$ i $\dot{\varphi}$ no són, en general, perpendiculars.

En canvi, amb la derivació geomètrica, com que sabem de quines rotacions està afectada cada rotació d'Euler, encara que treballem amb el dibuix particularitzat, la derivada surt bé!

Solució:

Següents 3 pàgines

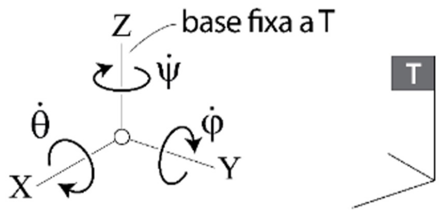
Solució:

Direcció i sentit de $\bar{\dot\psi}$, $\bar{\dot\theta}$, $\bar{\dot\varphi}$ per $\psi = \theta = \varphi = 90°$

Ho podem resoldre:

(1) Amb dibuixos 2D

(2) " " 3D



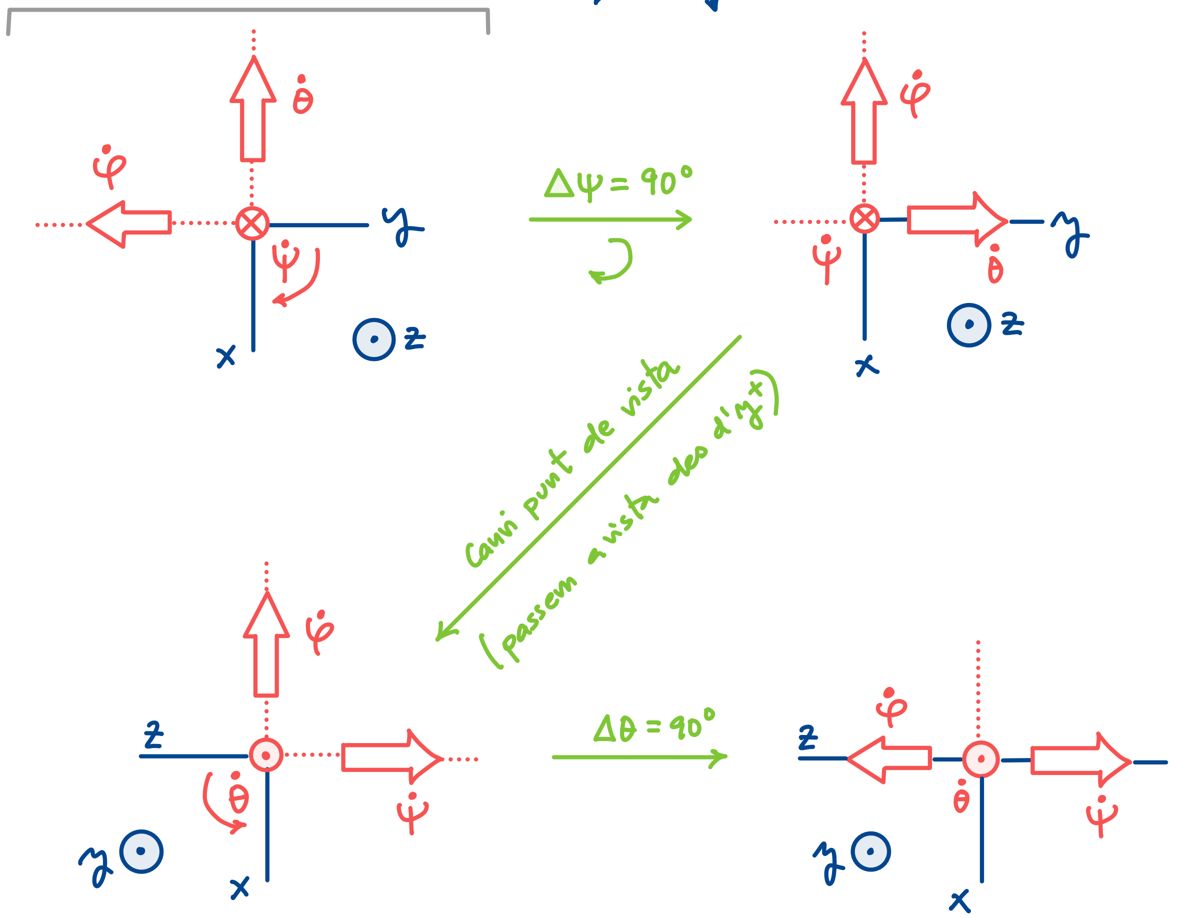
eixos d'Euler per a $\psi=\theta=\varphi=0°$

Situació inicial

Amb dibuixos 2D

Situació inicial (Vista des de z+)

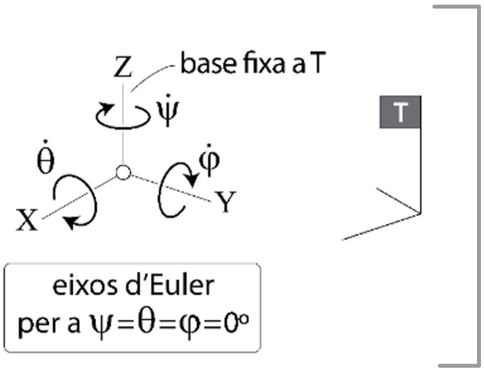
Triedre xyz fix a T pintat en blau



Resposta

Vel. angular	Dir. i sentit
$\bar{\dot\psi}$	z −
$\bar{\dot\theta}$	y +
$\bar{\dot\varphi}$	z +

Amb dibuixos 3D

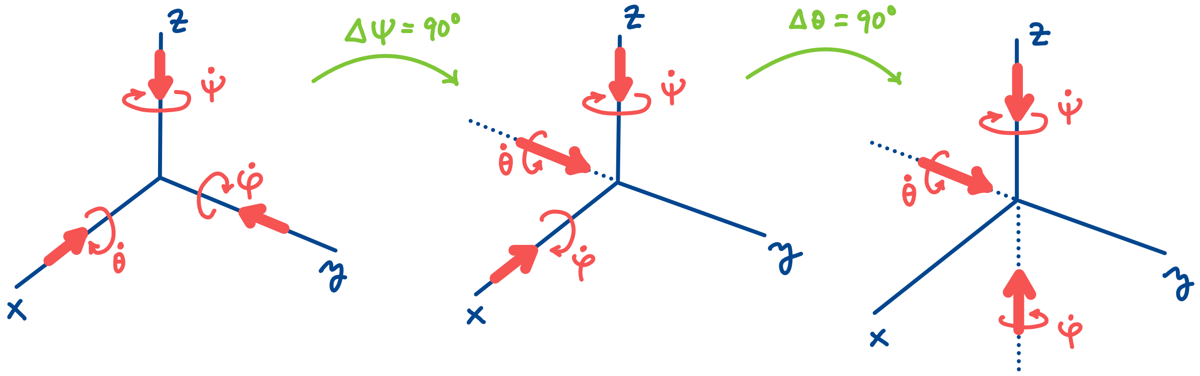


Situació inicial

Resposta :

Vel. angular	Dir. i sentit
$\bar{\dot\psi}$	$z-$
$\bar{\dot\theta}$	$y+$
$\bar{\dot\varphi}$	$z+$

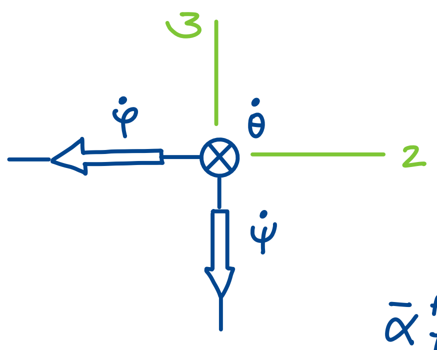
En blau, el triedre XYZ fix a T:



$\bar\alpha_T^{pinça}$ per $\psi=\theta=\varphi=0$ si $(\dot\psi, \dot\theta, \dot\varphi)$ tenen valors ct.

Compte: no podem derivar $\bar{\dot\psi}, \bar{\dot\theta}, \bar{\dot\varphi}$ analíticament en $B=(1,2,3)$ tal i com els tenim, p.q. no són en posició genèrica! Primer els hauríem de convertir a "vec. pel·lícula". En canvi, derivant geomètricament surt bé. Fem-ho:

Via geomètrica



$\bar{\dot\psi}$ no canvia de dir ni valor

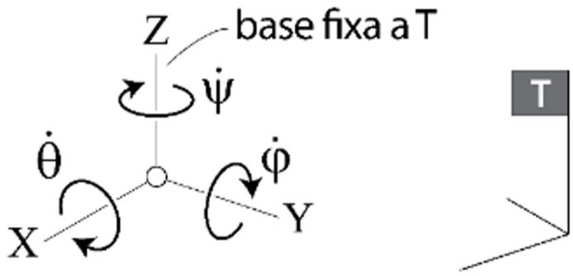
$\bar{\dot\theta}$ canvia de dir, afectat per $\bar{\dot\psi}$

$\bar{\dot\varphi}$ " " " , " " $\bar{\dot\psi}, \bar{\dot\theta}$

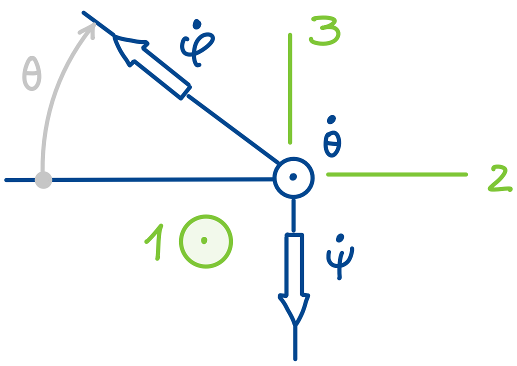
$$\bar\alpha_T^{pinça} = \underbrace{(\rightarrow \dot\psi\dot\theta)}_{\text{canvi dir de } \dot\theta} + \underbrace{(\otimes \dot\psi\dot\varphi) + (\uparrow \dot\varphi\dot\theta)}_{\text{canvi dir de } \dot\varphi} \qquad (A)$$

Via analítica (per qui la vulgui intentar)

- Cal dibuix genèric.
- $\bar{\dot\theta}$ es mou al pla horitz.
- Ens ho mirem des de la dir. de $\dot\theta$ genèrica i tenim



eixos d'Euler per a $\psi=\theta=\varphi=0°$



Dibuix genèric

En base $B = (1,2,3)$:

Això ja és un vector "pel·lícula"

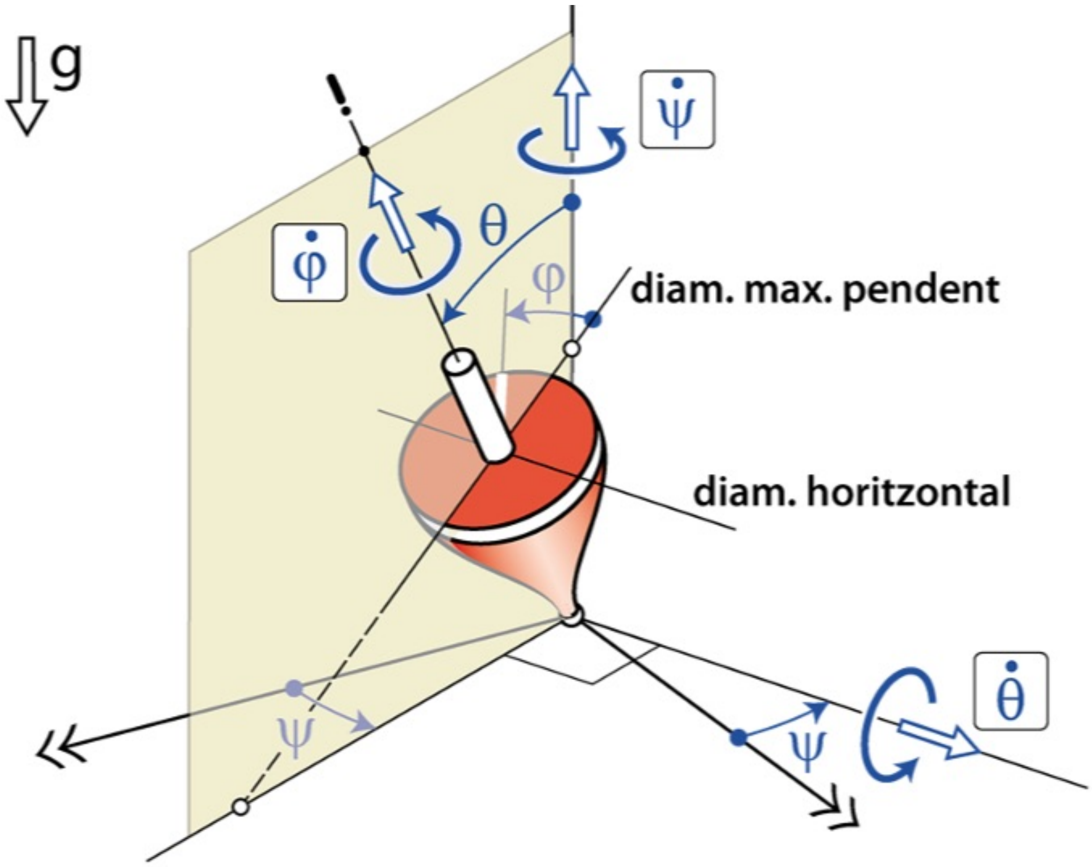
$$\bar{\Omega}^{\text{pinça}}_{T} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot\psi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\dot\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot\varphi\cos\theta \\ \dot\varphi\sin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot\theta \\ -\dot\varphi\cos\theta \\ -\dot\psi + \dot\varphi\sin\theta \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\alpha}^{\text{pinça}}_{T} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot\varphi\dot\theta\sin\theta \\ \dot\varphi\dot\theta\cos\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot\psi \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\dot\theta \\ -\dot\varphi\cos\theta \\ -\dot\psi + \dot\varphi\sin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot\psi\dot\varphi\cos\theta \\ \dot\varphi\dot\theta\sin\theta + \dot\psi\dot\theta \\ \dot\varphi\dot\theta\cos\theta \end{Bmatrix}$$

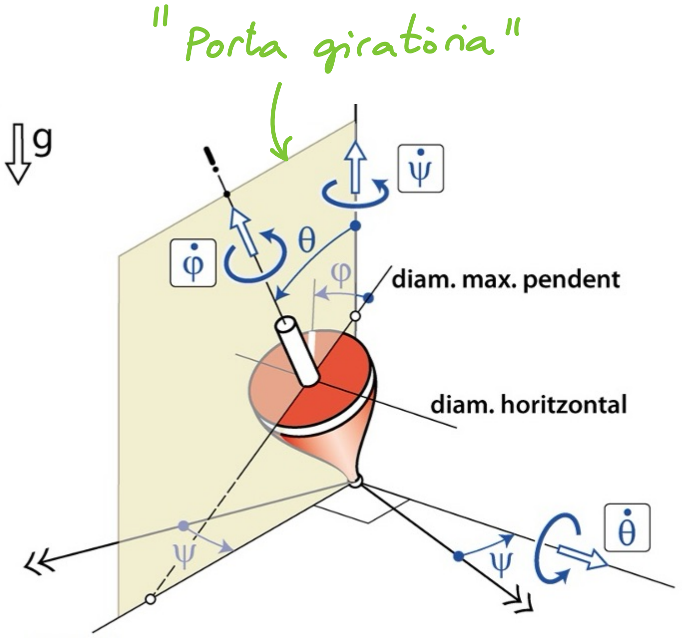
$$\bar{\alpha}^{\text{pinça}}_{T}\Big]_{\substack{\psi=0\\ \theta=0\\ \varphi=0}} = \begin{Bmatrix} -\dot\psi\dot\varphi \\ \dot\psi\dot\theta \\ \dot\varphi\dot\theta \end{Bmatrix} \quad (B) \leftarrow \text{Quadra amb } (A)$$

<u>Acceleració angular de la baldufa</u>

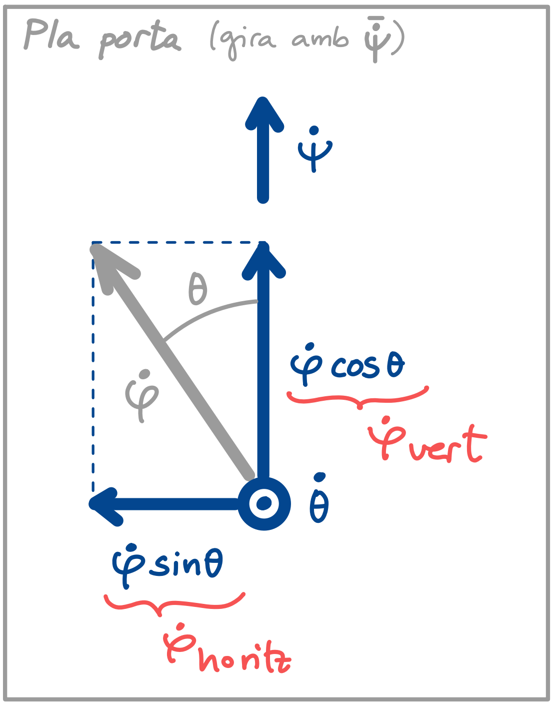
A l'exemple següent, calculeu $\bar{\alpha}_T^{\text{baldufa}}$ per derivació geomètrica (descomposant $\bar{\dot{\varphi}} = \bar{\dot{\varphi}}_{\text{vert}} + \bar{\dot{\varphi}}_{\text{horitz}}$), i també per derivació analítica



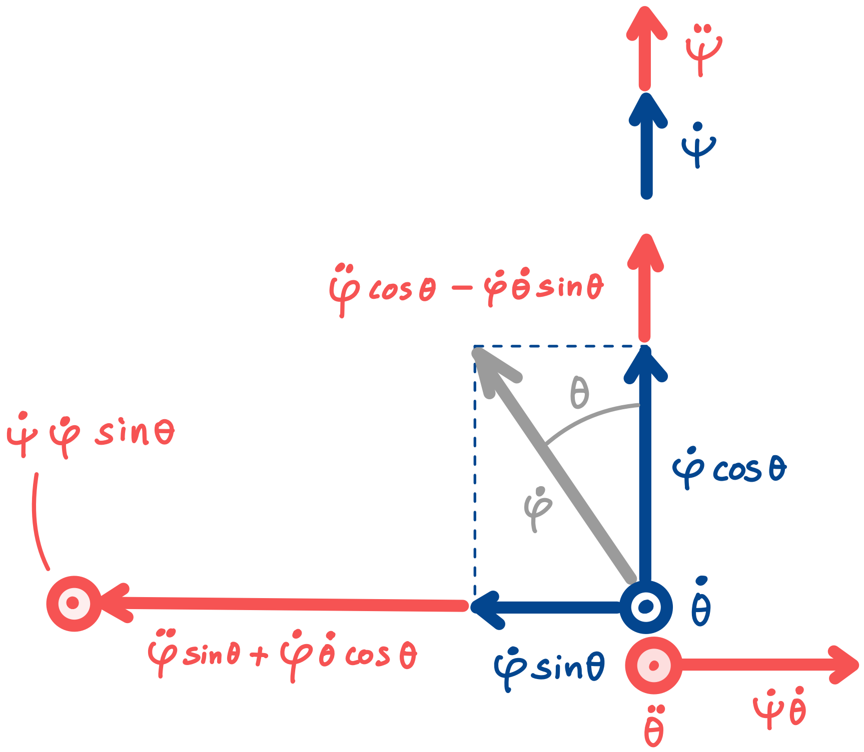
Solució:

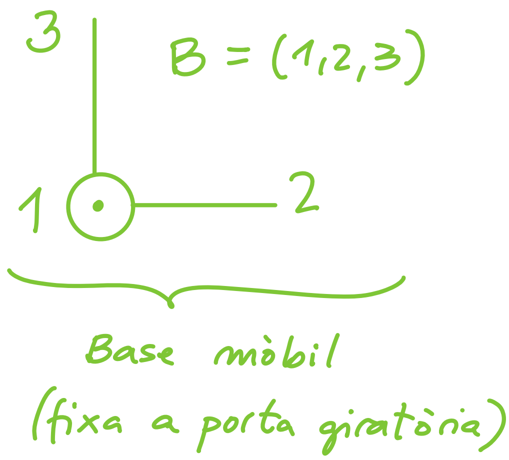


Mirat des de $\bar{\dot{\theta}}$:



Derivem geomètricament:

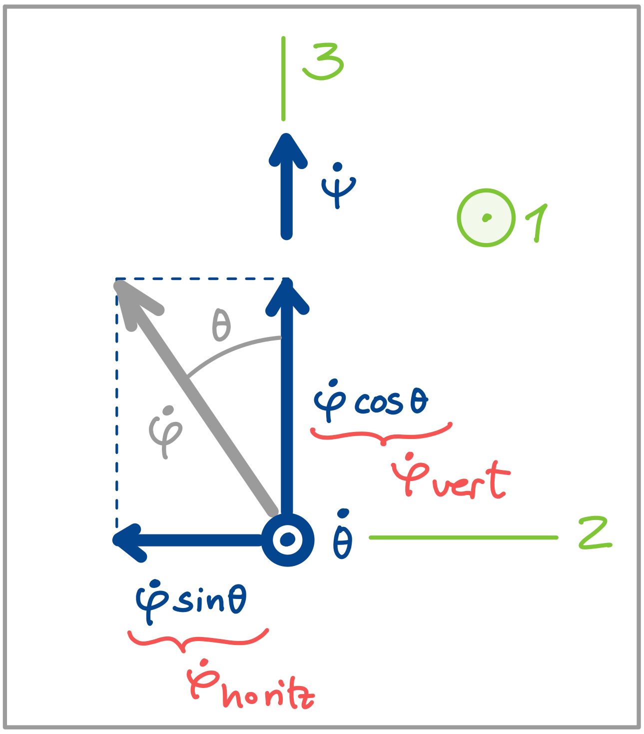




$$\left\{\bar{\alpha}_{T}^{bald}\right\}_B = \left\{\begin{matrix} \ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\dot{\theta} - \ddot{\varphi}\sin\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta \end{matrix}\right\}_B \qquad (A)$$

Derivant analíticament

Mirat des de $\bar{\dot\theta}$:



$$\left\{\bar\Omega^{bald}_{T}\right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot\theta \\ -\dot\varphi\sin\theta \\ \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\left\{\bar\alpha^{bald}_{T}\right\}_B} = \begin{Bmatrix} \ddot\theta \\ -\ddot\varphi\sin\theta - \dot\varphi\dot\theta\cos\theta \\ \ddot\psi + \ddot\varphi\cos\theta - \dot\varphi\dot\theta\sin\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot\theta \\ -\dot\varphi\sin\theta \\ \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} \dot\psi\dot\varphi\sin\theta \\ \dot\psi\dot\theta \\ 0 \end{Bmatrix}} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \ddot\theta + \dot\psi\dot\varphi\sin\theta \\ -\ddot\varphi\sin\theta - \dot\varphi\dot\theta\cos\theta + \dot\psi\dot\theta \\ \ddot\psi + \ddot\varphi\cos\theta - \dot\varphi\dot\theta\sin\theta \end{Bmatrix}$$

<u>Quadra amb (A)</u> !