# 14P - extra

Versió 1.0

## Exercicis de reforç

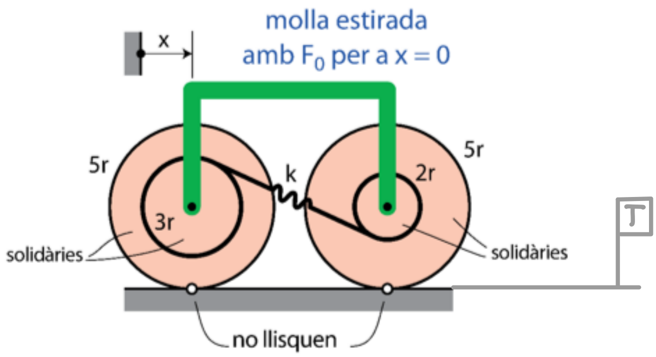
Lluís Ros

https://lluisros.github.io/mecanica

En exercicis de molles inserides en fils inextensibles que s'enrotllen a corrons, hi pot haver casos en que calgui calcular les velocitats dels extrems de la molla en una **referència diferent de T**, ja que si les calculem a T no surten longitudinals a la molla (cosa que dificulta determinar $\dot\rho$ ). El següent exemple ho il·lustra.

TP-G10, 3 abril 2025

Quina és l'expressió de la força d'atracció de la molla en funció de x ?




RE = Roda esquerra

RD = Roda dreta

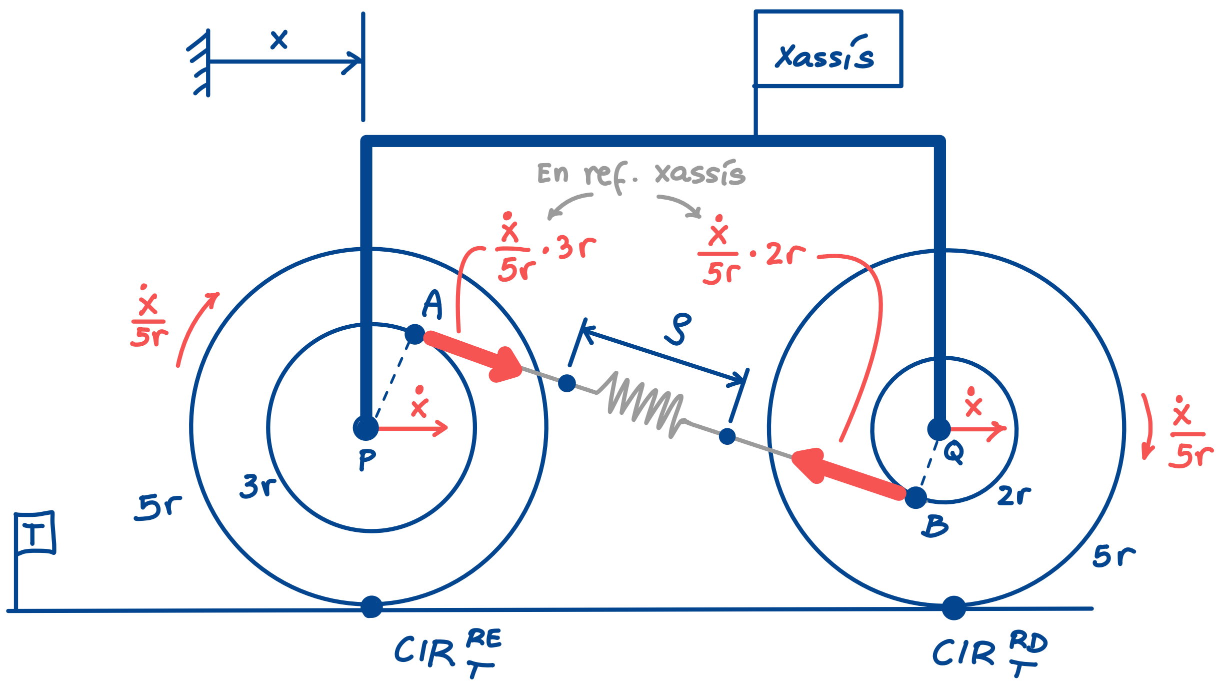
## Solució

Tenim una molla acoplada a un fil inextensible que s'enrotlla sobre corrons ⇒ calcularem $\dot\rho$ i integrarem. Per trobar $\dot\rho$ ens calen les velocitats de A i B en una ref. en la que surtin longitudinals a la molla. Això passa a la ref. xassís (i no a ref. T!):

$$\bar\Omega^{RE}_{T} = \overset{\curvearrowright}{\otimes}\,\frac{\dot x}{5r} = \bar\Omega^{RE}_{xassís}$$

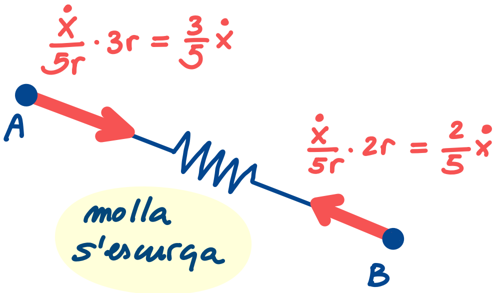
$$\bar\Omega^{RD}_{T} = \overset{\curvearrowright}{\otimes}\,\frac{\dot x}{5r} = \bar\Omega^{RD}_{xassís}$$

Des del xassís s'observen les mateixes vel. angulars que des de T, p.q. $\bar\Omega^{xassís}_{T} = \bar 0$



En el dibuix anterior: $P = CIR^{RE}_{xassís}$, $Q = CIR^{RD}_{xassís}$, i per tant A i B descriuen, en ref. xassís, trajectòries circulars amb centre a P i Q, respectivament. Això permet deduir ràpidament les velocitats de A i B a la ref. xassís, que tenen la dir. de la molla:

A la ref. xassís tenim




$$\dot{\rho} = -\left(\frac{3}{5}\dot{x} + \frac{2}{5}\dot{x}\right) = -\dot{x}$$

$$\Delta\rho = \int_0^t \dot{\rho}\, dt = -\int_0^t \dot{x}\, dt$$

$$= -\left(x(t) - \underbrace{x(0)}_{=0}\right) = -x(t) = \boxed{-x}$$

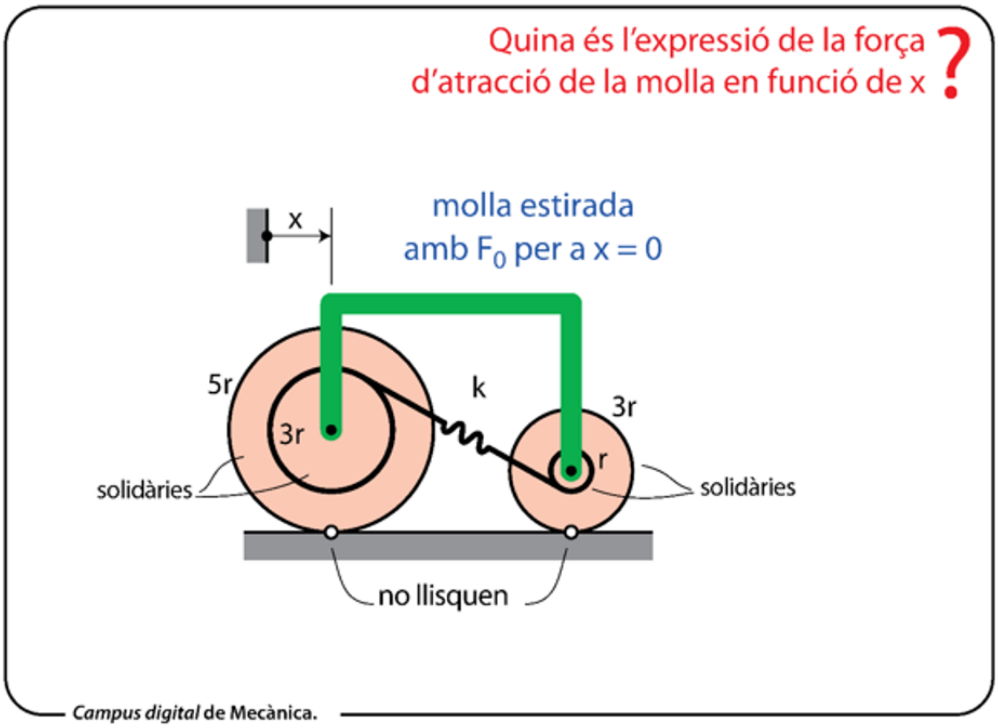
A la config. de referència inicial tenim $x = 0$

Ja no posem la dependència de $t$

Ara ja podem formular la força de la molla. Ho fem amb el criteri d'atracció perquè ens diuen que per $x = 0$ la molla està estirada $\Rightarrow$ Està fent una força atractiva entre els seus extrems $\Rightarrow$ $F_0$ és atractiva:

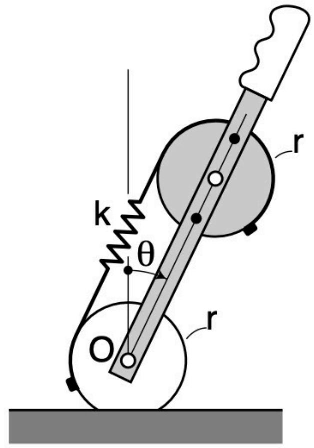
$$\boxed{F_m^{at} = F_0 + K\underbrace{(-x)}_{\Delta\rho} = F_0 - Kx}$$

Si heu entès l'anterior, intenteu resoldre aquest!




Solució:

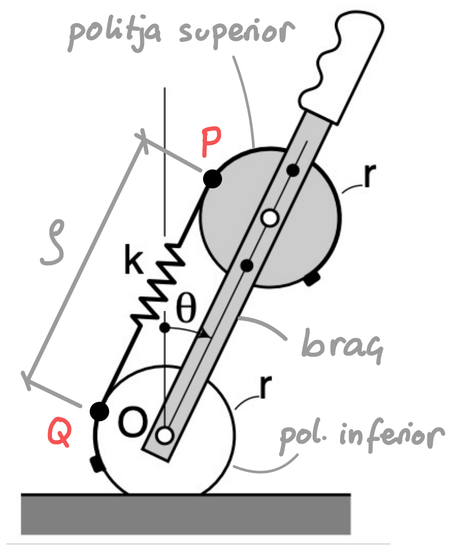
$$\boxed{F_m^{at} = F_0 - k\,\frac{14}{15}\,x}$$




5.29 En el mecanisme de la figura la politja inferior és solidària al terra i la superior, d'igual radi, és solidària al braç que pot girar al voltant de O. La molla de constant k està unida a les politges per mitjà de dos fils inextensibles que s'hi enrotllen i que no llisquen al seu damunt. Per a $\theta=0$ la molla està estirada amb una tensió $T_0$. Quina és la força d'atracció que fa la molla en funció de $\theta$?

A $T_0-k\,r\,\theta$
B $T_0+k\,r\sin\theta$
C $T_0+k\,r\,\theta$
D $T_0$
E $T_0-k\,r\sin\theta$

Molla inserida en fil inextensible $\Rightarrow$ necessàriament fa una força atractiva (ja que el fil només pot estar tibat per fer la seva funció) $\Rightarrow$ utilitzarem el criteri d'atracció.




Buscarem $\dot{\rho}$ i integrarem

Ens calen les velocitats de P i Q en una ref. en la que siguin longitudinals a la molla. Així el càlcul de $\dot{\rho}$ serà fàcil.

$\Downarrow$

Utilitzem la ref. braç!

$\bar{v}_{\text{braç}}(\text{P}) = 0$, ja que la politja superior és fixa al braç.

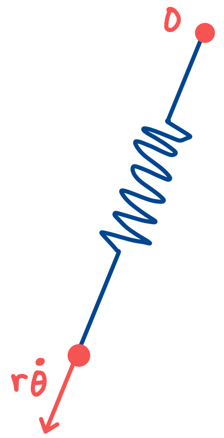
politja inferior

$$\bar{v}_{\text{braç}}(\text{Q}) = \bar{\Omega}^{\text{pol. inf.}}_{\text{braç}} \times \overline{\text{OQ}} = \left(\circlearrowleft \odot\, \dot{\theta}\right) \times \left(\nwarrow r\right) = \left(\swarrow \dot{\theta} r\right)$$

$\boxed{\text{O} = \text{CIR}^{\text{pol. inf}}_{\text{braç}}}$

$$\bar{\Omega}^{\text{pol. inf.}}_{\text{T}} = \bar{\Omega}^{\text{pol. inf.}}_{\text{braç}} + \bar{\Omega}^{\text{braç}}_{\text{T}}$$

$$\bar{\Omega}^{\text{pol. inf.}}_{\text{braç}} = \bar{\Omega}^{\text{pol. inf.}}_{\text{T}} - \bar{\Omega}^{\text{braç}}_{\text{T}} = \bar{0} - \left(\circlearrowright \otimes\, \dot{\theta}\right) = \left(\circlearrowleft \odot\, \dot{\theta}\right)$$




← A la ref braç tenim aquestes velocitats.

Per tant:

$$\dot{\rho} = r\dot{\theta}$$ (quan $\dot{\theta} > 0$, la molla s'allarga)

Integrant $\dot{\rho}$:

$$\Delta\rho = \int_0^t \dot{\rho}\, dt = \int_0^t r\dot{\theta}\, dt = r\left[\theta(t)\right]_0^t = r\theta(t) = r\theta$$

La config. inicial de referència de la molla és per a $\theta(0) = 0$ (veure enunciat)

Per tant

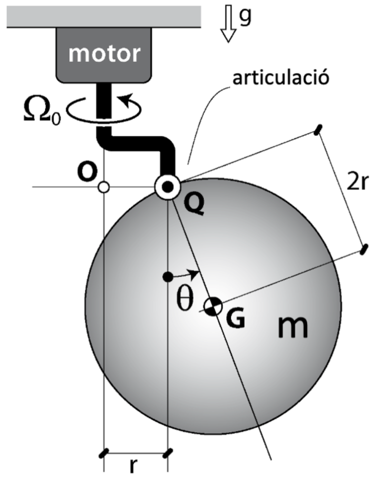
$$\boxed{F_m^{at}} = F_0 + K\Delta\rho = \boxed{T_0 + Kr\theta}$$

A 8P_extra.pdf trobareu altres exercicis de reforç de molles

La bola homogènia, de massa m i radi 2r, està articulada a un braç que gira amb $\Omega_0$ constant respecte del terra (T) sota l'acció d'un motor. Si volem que $\theta$ es mantingui constant i igual a un cert valor $\theta_0$, quin valor ha de tenir $\Omega_0$?

$\boxed{\Omega_0 \text{ per tal que } \theta = \theta_0 = ct\ ?}$

Dada !




**Entenguem el moviment**

Podem assimilar el sistema a un model senzill de gronxador articulat a una plataforma de fira. Quan la plataforma gira amb $\Omega_0$, el gronxador (aquí, la bola) surt centrifugat en direcció radial fins que assoleix un cert angle $\theta_0$ d'equilibri, en el qual es manté.

**Via d'atac "llarga":** si $\theta = \theta_0$ s'ha de mantenir constant, ha de correspondre a una configuració d'equilibri de l'equació del moviment per a $\theta$. Per tant, podem buscar aquesta equació i extreure'n la condició que defineix les configuracions d'equilibri $\theta_{eq} = \theta_0$. Això ens donarà una relació entre $\Omega_0$ i $\theta_0$ de la qual en podrem aillar el valor $\Omega_0$. Aquesta via ja la vam aplicar a l'exercici corresponent de 11P (vegeu 11P_sols.pdf), però ara utilitzarem una via més curta per arribar al mateix resultat 👇

**Via més curta:** l'estat mecànic que volem mantenir (definit per $\Omega_0$, $\theta_0$, i $\dot{\theta} = 0$) ha de ser compatible amb els teoremes vectorials. Podem imposar que aquest estat satisfaci el TMC a **Q** per al sistema = bola i d'aquí ens sortirà la relació desitjada entre $\Omega_0$ amb $\theta_0$ (la mateixa que per la via anterior).

Solució

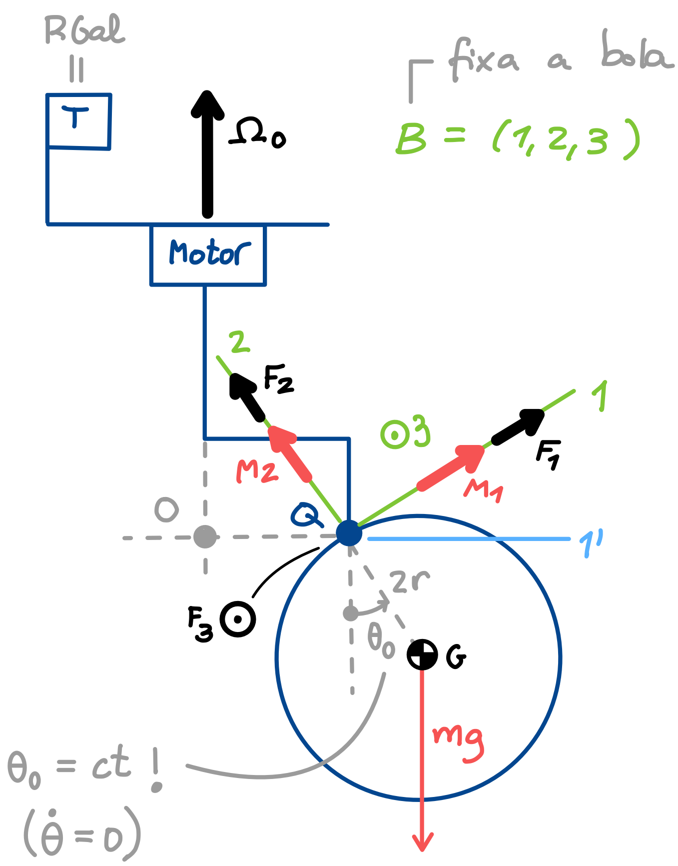
## Forces i moments sobre bola

- Pes: $\downarrow mg$

- Torsor forq → bola a Q:

$$\left\{\bar{F}_{forq \to bola}\right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{forq \to bola}(Q)\right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

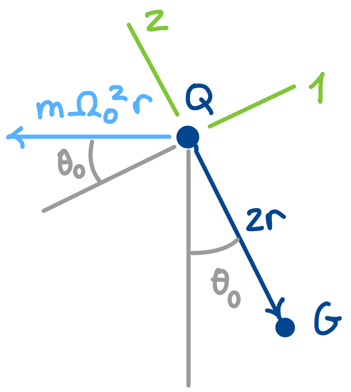



## TMC (Q), sist = bola

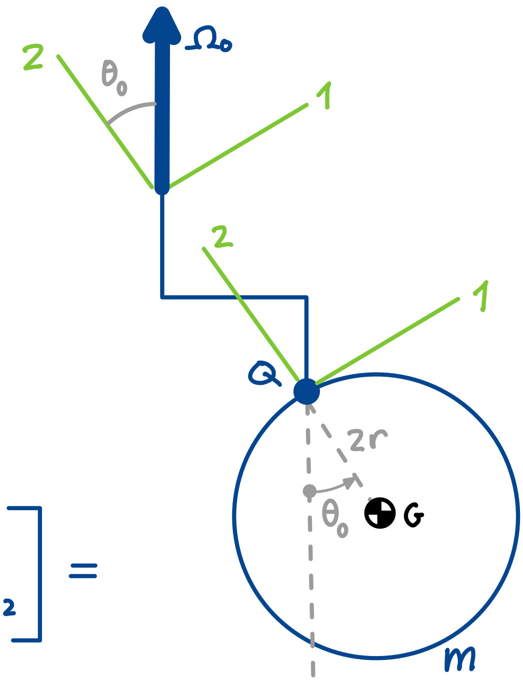
$$\sum \bar{M}_{ext}(Q) - \overline{QG} \times m\,\bar{a}_T(Q) = \dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$$

$$\left\{\sum \bar{M}_{ext}(Q)\right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ -mg\,2r\sin\theta_0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\overline{QG} \times m\,\bar{a}_T(Q)\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -m\Omega_0^2 r\cos\theta_0 \\ m\Omega_0^2 r\sin\theta_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2m\Omega_0^2 r^2\cos\theta_0 \end{Bmatrix}$$




$$\bar{a}_T(Q) = (\leftarrow m\Omega_0^2 r)$$




$$\bar{H}_{RTQ}(Q) = \mathbb{II}(Q)\cdot\bar{\Omega}^{Bola}_{T}$$

$Q \in$ Bola

$$\mathbb{II}(Q) = \mathbb{II}(G) + \mathbb{II}^{\oplus}(Q)$$

$$\left[\mathbb{II}(Q)\right]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{I=\frac{2}{5}m(2r)^2=\frac{8}{5}mr^2} + \begin{bmatrix} m4r^2 & & \\ & 0 & \\ & & m4r^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{4mr^2}{5}\begin{bmatrix} 7 & & \\ & 2 & \\ & & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} I_{11} &= I_{33} = \frac{28}{5}mr^2 \\ I_{22} &= \frac{8}{5}mr^2 \end{aligned}$$

$$\left\{\bar{H}_{RTQ}(Q)\right\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Omega_0 \sin\theta_0 \\ \Omega_0 \cos\theta_0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}^{Bola}_{T} = (\Uparrow\Omega_0)} = \begin{Bmatrix} I_{11}\,\Omega_0 \sin\theta_0 \\ I_{22}\,\Omega_0\cos\theta_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\leftarrow$ forcem que sigui $(\Uparrow\Omega_0)$, i no $(\Uparrow\Omega_0)+(\odot\dot{\theta})$

$$\left\{\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Omega_0 \sin\theta_0 \\ \Omega_0\cos\theta_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{11}\,\Omega_0\sin\theta_0 \\ I_{22}\,\Omega_0\cos\theta_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underbrace{(I_{22}-I_{11})}_{-4mr^2}\Omega_0^2 \sin\theta_0\cos\theta_0 \end{Bmatrix}$$

La component 3 de TMC (Q) ens dóna la relació buscada:

$$\underbrace{-mg2r\sin\theta_0 + 2m\Omega_0^2 r^2\cos\theta_0 = -4mr^2\Omega_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}_{\text{Relació que han de complir } \Omega_0 \text{ i } \theta_0 \text{ per tal que } \theta=\theta_0=ct \text{ sota la rotació } \Uparrow\Omega_0}$$

Arreglant una mica la relació anterior queda

$$\boxed{\Omega_0^2 \cos\theta_0 \left(1 + 2\sin\theta_0\right) - \frac{g}{r}\sin\theta_0 = 0}$$

És la mateixa expressió que vam obtenir a 11P via determinar l'eq. mov. per a $\theta$ i extreient-ne les configuracions d'equilibri.

Finalment, de l'equació anterior podem trobar el valor $\Omega_0$ que ens pregunten:

$$\boxed{\Omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{g}{r}\sin\theta_0}{\cos\theta_0\left(1 + 2\sin\theta_0\right)}}}$$

Veloc. angular del motor que permet mantenir $\theta = \theta_0$ constant