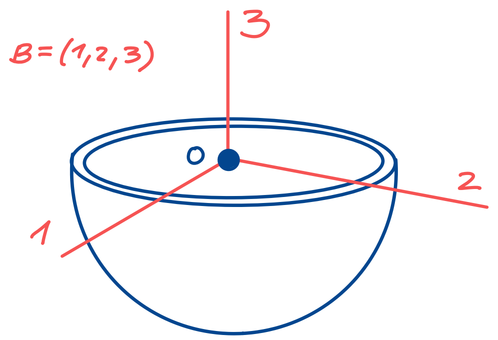
La closca semiesfèrica és rotor esfèric per a O

Demostració visual

Volem demostrar que $[\mathbb{I}(O)]_B$ és de la forma(*)

$$[\mathbb{I}(O)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}$$



DEMOSTRACIÓ:

Pla 13 és de simetria en la distribució de massa $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} I_{12} = 0 \\ I_{23} = 0 \end{matrix}}$ $\Rightarrow$ Dir. 2 és DPI

Pla 23 és de simetria en la distribució de massa $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} I_{12} = 0 \\ I_{13} = 0 \end{matrix}}$ $\Rightarrow$ Dir. 1 és DPI

A més, clarament, $I_{11} = I_{22}$, però potser $I_{33} \neq I$!

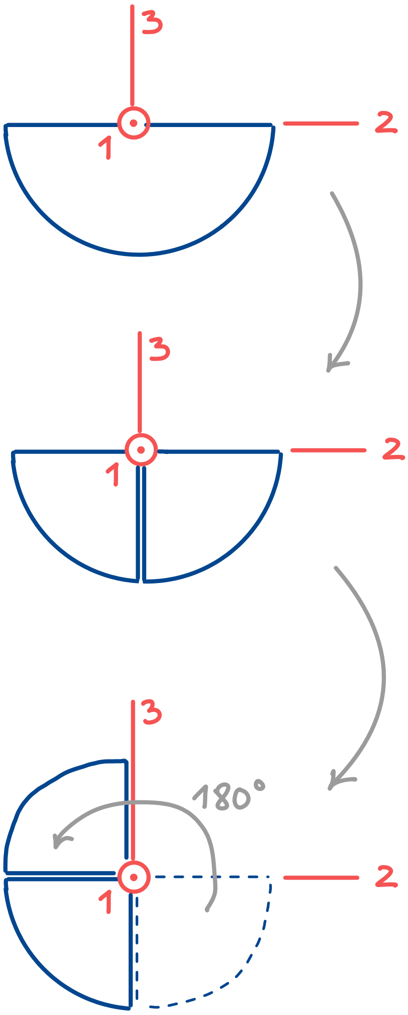
Fins ara tenim

$$[\mathbb{I}(O)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \quad \text{on } I = I_{11} = I_{22}$$

Anem a veure que $I_{33} = I$ també!

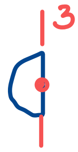
(*) Si ho demostrem per la base B pintada, ho haurem demostrat per qualsevol base, ja que $\underset{\text{Base nova}}{[\mathbb{I}(O)]_{B'}} = S^{-1} \underset{\text{Base vella}}{[\mathbb{I}(O)]_B} \underset{\text{Matriu de canvi de base}}{S} = I \cdot S^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} S = I \underbrace{S^{-1} S}_{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix} = [\mathbb{I}(O)]_B$

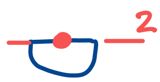
Apliquem un tall i una rotació de mitja closca sense afectar I_{33} :



"Tallem" closca per la meitat, pel pla 13
(el "tall" no canvia I_{33})

Girem subclosca dreta 180°
(aquesta operació tampoc canvia I_{33})

El moment d'inèrcia I_{33} de la closca final 

és igual al moment d'inèrcia I_{22} de la closca inicial 

!

Ergo $I_{33} = I_{22} = I$, i

$$[\mathbb{I}(0)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}$$

<u>QED</u>

NOTA : La demostració també és vàlida per a la semiesfera massissa !