

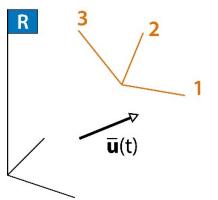
# Formulari de Mecànica 2025 - 2026 QP

Als exàmens, aquest formulari no pot contenir més informació que la que hi figura a la versió d'Atenea.

## Derivació temporal de vectors:

- geomètrica:  $\frac{d\bar{u}}{dt} \Big|_R = \begin{bmatrix} \text{canvi de valor} \\ \text{canvi de direcció} \end{bmatrix}_R = \dot{u} \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} + \bar{\Omega}_R^S \times \bar{u}$

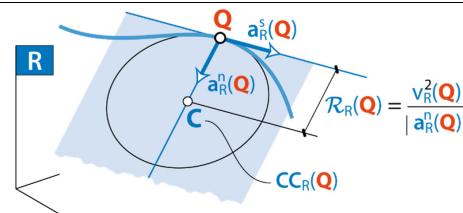
- analítica:  $\left\{ \frac{d\bar{u}}{dt} \Big|_R \right\}_B = \frac{d}{dt} \{ \bar{u} \}_B + \{ \bar{\Omega}_R^S \}_B \times \{ \bar{u} \}_B$



## Components intrínseqües de l'acceleració:

$$a^s \equiv a_R^s(P) = \dot{v} = \frac{d|\bar{v}_R(P)|}{dt}$$

$$a^n \equiv a_R^n(P) = \frac{v^2}{R} = \frac{|\bar{v}_R(P)|^2}{R} = \frac{v^2}{R_R(P)}$$

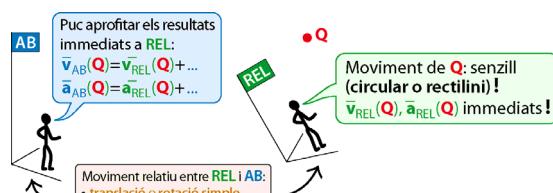


## Composició de moviments:

$$\bar{v}_{AB}(P) = \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P), \text{ amb } \bar{v}_{ar}(P) = \bar{v}_{AB}(P \in REL)$$

$$\bar{a}_{AB}(P) = \bar{a}_{REL}(P) + \bar{a}_{ar}(P) + \bar{a}_{Cor}(P),$$

amb  $\begin{cases} \bar{a}_{ar}(P) = \bar{a}_{AB}(P \in REL) \\ \bar{a}_{Cor}(P) = 2\bar{\Omega}_{AB}^S \times \bar{v}_{REL}(P) \end{cases}$



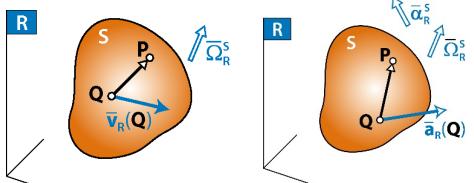
## Cinemàtica del sòlid rígid:

(les següents expressions són vàlides a qualsevol referència, per això s'omet el subíndex R)

$$\bar{v}(P) = \bar{v}(Q) + \bar{\Omega}^S \times \overline{QP}$$

$$\bar{a}(P) = \bar{a}(Q) + \bar{\Omega}^S \times (\bar{\Omega}^S \times \overline{QP}) + \bar{\alpha}^S \times \overline{QP},$$

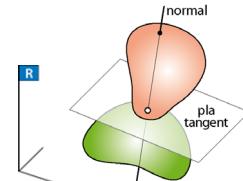
amb  $\bar{\alpha}^S = \frac{d\bar{\Omega}^S}{dt}$



## Condicions bàsiques d'enllaç:

- Contacte puntual amb lliscament:  $\bar{v}_R(J_1)|_{\text{normal}} = \bar{v}_R(J_2)|_{\text{normal}}$

- Contacte puntual sense lliscament:  $\bar{v}_R(J_1) = \bar{v}_R(J_2)$



## Lleis de Newton:

- 1a llei (llei de la inèrcia):  $\bar{a}_{Gal}(P_{\text{lliure}}) = \bar{0}$

- 2a llei (llei fonamental):  $\sum \bar{F}_{\rightarrow P} = m_P \bar{a}_{Gal}(P)$

- 3a llei (principi acció-reacció):  $\bar{F}_{Q \rightarrow P} = -\bar{F}_{P \rightarrow Q}$  (atracció o repulsió)



## Dinàmica de partícula en referència no galileana:

$$\sum \bar{F}_{\rightarrow P} + \bar{F}_{NGal \rightarrow P}^{ar} + \bar{F}_{NGal \rightarrow P}^{Cor} = m_P \bar{a}_{NGal}(P)$$

amb  $\bar{F}_{NGal \rightarrow P}^{ar} = -m_P \bar{a}_{ar}(P)$ ,  $\bar{F}_{NGal \rightarrow P}^{Cor} = -m_P \bar{a}_{Cor}(P)$

## Formulació d'interaccions:

- Atracció gravitatorià:  $F_{P \leftrightarrow Q} = G \frac{m_P m_Q}{|\bar{PQ}|^2}$  (atracció)

$$\begin{cases} F_{molla}^{\text{atracció}} = F_0^{\text{at.}} + k\Delta\rho, & F_{molla}^{\text{repulsió}} = F_0^{\text{rep.}} - k\Delta\rho, \\ \text{amb } \rho \equiv \text{llargària}, \Delta\rho = \rho - \rho_0 & (\rho > 0 \text{ quan s'allarga}) \end{cases}$$

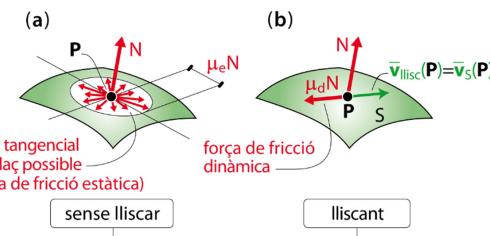
- Molles lineals:  $F_{\text{amortidor}}^{\text{atracció}} = +c\rho$ ,  $F_{\text{amortidor}}^{\text{repulsió}} = -c\rho$

- Molles torsionals:  $M_{\text{molla}} = M_0 \pm k_t \Delta\theta$ , amb  $\theta \equiv$  rotació relativa

- Amortidors torsionals:  $M_{\text{amortidor}} = \pm c_t \dot{\theta}$

- Frec viscós:  $F_{\text{fricció}} = CV_{\text{lliscament}}$ , oposada a  $V_{\text{lliscament}}$

- Frec sec de Coulomb:  $\begin{cases} F_{\text{frec}} \text{ (f. tangencial d'enllaç)} \leq \mu_e N, & \text{si no hi ha lliscament} \\ F_{\text{fricció}} = \mu_d N, & \text{oposada a } V_{\text{lliscament}} \end{cases}$



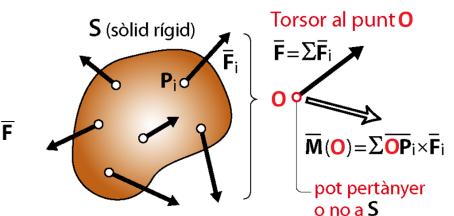
## Torsor associat a un sistema de forces sobre un sòlid rígid:

- torsor a O:  $\bar{F} = \sum \bar{F}_i$ ,  $\bar{M}(O) = \sum \overline{OP}_i \times \bar{F}_i$

$$\bar{F} = \sum \bar{F}_i, \quad \bar{M}(Q) = \sum \overline{QP}_i \times \bar{F}_i$$

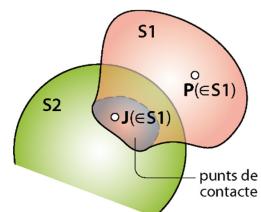
- torsor a Q: o bé, a partir del torsor a O:

$$\bar{F} = \sum \bar{F}_i, \quad \bar{M}(Q) = \bar{M}(O) + \overline{QO} \times \bar{F}$$



**Caracterització del torsor d'enllaç de S2 sobre S1 al punt P de S1:**

$$\bar{F}_E \cdot \bar{v}_{S2}(P_{S1}) + \bar{M}_E(P_{S1}) \cdot \bar{\Omega}_{S2}^{S1} = 0$$



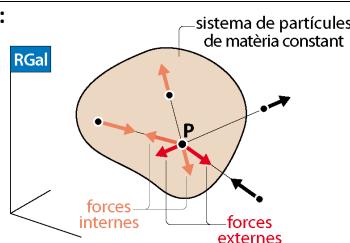
**Teoremes vectorials per a sistemes de matèria constant:**

- Teorema de la Quantitat de Moviment (TQM):

$$\sum_{sist} \bar{F}_{ext} = \dot{\bar{D}}_{RGal}^{sist} = m_{sist} \bar{a}_{RGal}(G_{sist}) = \sum_i m_i \bar{a}_{RGal}(G_i)$$

Quantitat de moviment:

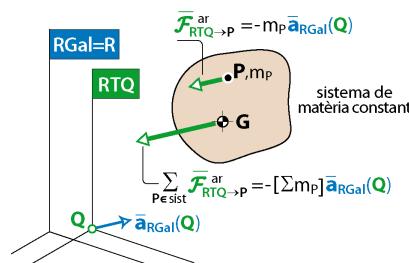
- d'una partícula:  $\bar{D}_R^P = m_p \bar{v}_R(P)$
- d'un sòlid rígid:  $\bar{D}_R^S = m_S \bar{v}_R(G)$
- d'un sistema de sòlids rígids:  $\bar{D}_R^{sist} = \sum_i \bar{D}_R^i = m_{sist} \bar{v}_R(G_{sist})$



- Teorema del Moment Cinètic (TMC):

$$\sum_{sist} \bar{M}_{ext}(Q) - \bar{Q}G_{sist} \times m_{sist} \bar{a}_{RGal}(Q) = \dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$$

- d'una partícula:  $\bar{H}_{RTQ}(Q) = \bar{Q}P \times m_p \bar{v}_{RTQ}(P)$
- d'un sòlid rígid S:  $\begin{cases} \text{Si } Q \in \text{sòlid } S: \bar{H}_{RTQ}(Q) = \bar{H}_{RTQ}^S(Q) = II(Q)\bar{\Omega}_{RTQ}^S = II(Q)\bar{\Omega}_{RGal}^S \\ \text{Si } Q \notin \text{sòlid } S: \bar{H}_{RTQ}(Q) = \bar{H}_{RTG}^S(G) + \bar{H}_{RTQ}^\oplus(Q) = \bar{H}_{RTG}^S(G) + \bar{Q}G \times m \bar{v}_{RTQ}(G) \end{cases}$
- d'un sistema de sòlids rígids:  $\bar{H}_{RTQ}(Q) = \sum_i \bar{H}_{RTQ}^i(Q)$

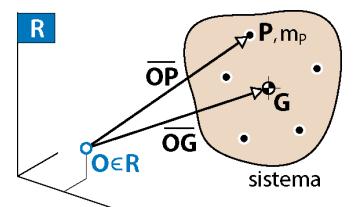


**Centre d'inèrcia:**

- d'un sistema de partícules:  $\bar{O}G = \sum_{P_i} m_{P_i} \bar{O}P_i / \sum_{P_i} m_{P_i}$

$$\bar{O}G_s = \frac{1}{m_s} \int \bar{O}P dm(P)$$

- d'un sòlid rígid S:  $\bar{O}G = \sum_i m_i \bar{O}G_i / \sum_i m_i$



**Tensor d'inèrcia  $II(Q)$ :**

- moments i productes d'inèrcia:

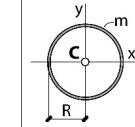
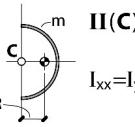
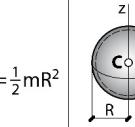
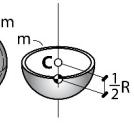
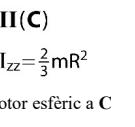
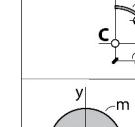
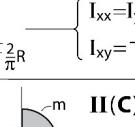
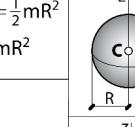
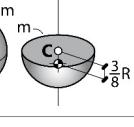
$$I_{ii}(Q) = \int_S (x_j^2 + x_k^2) dm = \int_S \delta_i^2 dm, \quad I_{ij}(Q) = - \int_S x_i x_j dm$$

$$\bullet \text{ canvi de base: } [II(Q)]_B = [\bar{e}'_1 \quad \bar{e}'_2 \quad \bar{e}'_3]^{-1} [II(Q)]_B [\bar{e}'_1 \quad \bar{e}'_2 \quad \bar{e}'_3]_B$$

$$\bullet \text{ moment d'inèrcia en la direcció } \bar{v}: \quad I_{vv}(Q) = \{\bar{v}\}^T [II(Q)] \{\bar{v}\}, \text{ on } \bar{v} \text{ = versor}$$

$$\bullet \text{ teorema de Steiner: } II(Q) = II(G) + II^\oplus(Q), \text{ on } II^\oplus(Q) \equiv II(Q), \text{ massa concentrada a } G$$

**Taules de centres d'inèrcia, i moments i productes d'inèrcia de sòlids homogenis:**

<b>II(C)</b>		$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mR^2$	
<b>II(C)</b>		$I_{zz}=\frac{2}{3}mR^2$ rotor esfèric a C	
<b>II(C)</b>		$I_{zz}=\frac{2}{5}mR^2$ rotor esfèric a C	
<b>II(C)</b>		$I_{xx}=\frac{1}{5}m(b^2+c^2)$ $I_{yy}=\frac{1}{5}m(a^2+c^2)$ $I_{zz}=\frac{1}{5}m(a^2+b^2)$	
<b>II(C)</b>		$I_{xx}=\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{12}h^2$ $I_{zz}=mR^2$ rotor simètric a C	
<b>II(A)</b>		$I_{xx}=\frac{1}{6}mb^2$ $I_{xy}=\frac{1}{12}mab$	
<b>II(A)</b>		$I_{xx}=\frac{1}{3}mb^2$ $I_{xy}=-\frac{1}{4}mab$	
<b>II(A)</b>		$I_{xx}=\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{2}h^2$ $I_{zz}=\frac{1}{2}mR^2$ rotor simètric a C	
<b>II(A)</b>		$I_{xx}=\frac{1}{12}m(b^2+c^2)$ $I_{zz}=\frac{3}{10}mR^2$ rotor simètric a A	