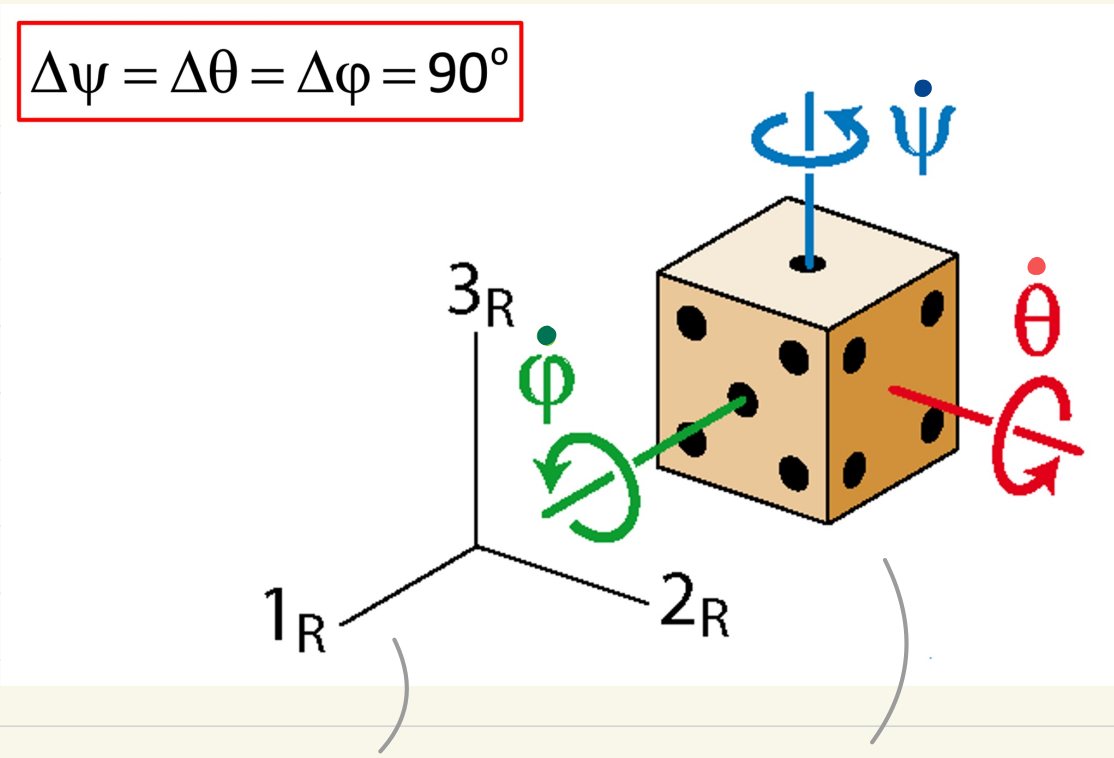
3P

Angles d'Euler

Orientació d'un dau

El dau s'orienta respecte d'una referència R mitjançant tres angles d'Euler. Per a la configuració $\psi = \theta = \varphi = 0$, les tres velocitats angulars associades tenen l'orientació indicada a la figura. Quina serà l'orientació de $\bar{\dot\psi}$, $\bar{\dot\theta}$ i $\bar{\dot\varphi}$ si es modifiquen els angles d'acord amb els increments $\Delta\psi = \Delta\theta = \Delta\varphi = 90°$? I com quedarà orientat el dau?



Triedre fix a R

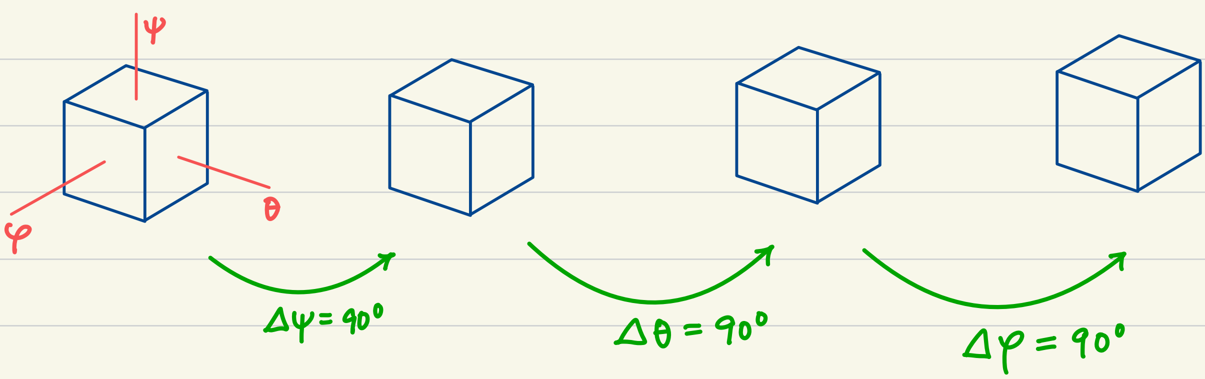
Config $\psi = \theta = \varphi = 0$

Pistes :

Recordeu com funcionen les rotacions d'Euler en el cas del giròscop (C1.4 Wikimec) :

- Eix ψ és fix a la ref.
- Eix θ gira amb ψ
- Eix φ gira amb ψ i θ però és <u>fix al sòlid</u> (dau)

Pinteu com queden els eixos ψ, θ, φ del dau després de les rotacions:

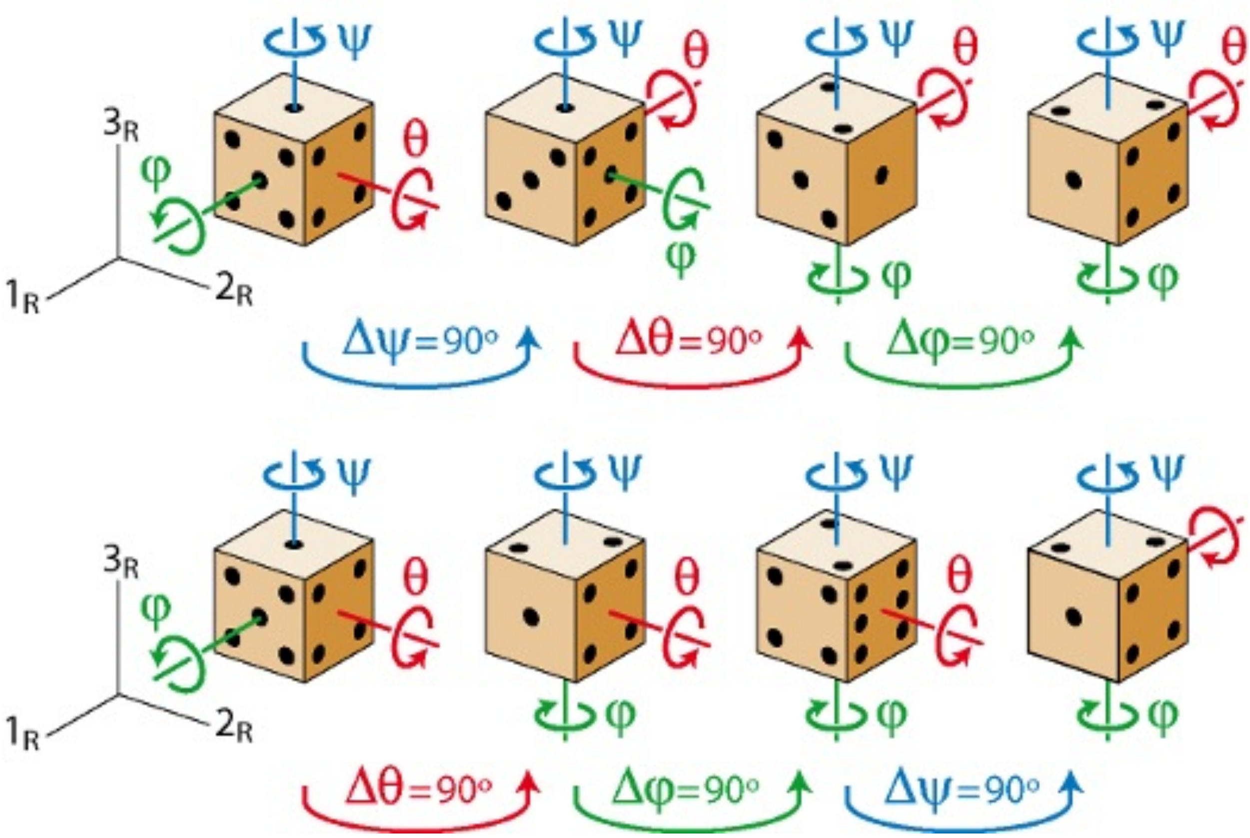


Després pinteu les cares del dau

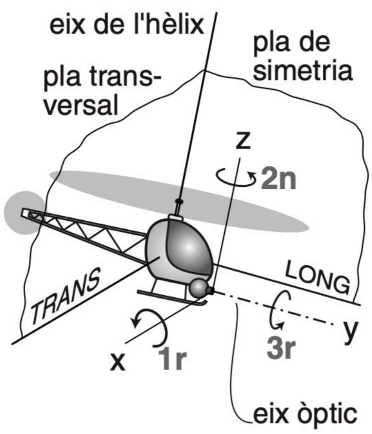
Recordeu : les cares oposades sumen 7.

Solució : pàg. següent.

Sol :



3_R
1_R
2_R
ψ
θ
φ
$\Delta\psi = 90°$
$\Delta\theta = 90°$
$\Delta\varphi = 90°$
3_R
1_R
2_R
$\Delta\theta = 90°$
$\Delta\varphi = 90°$
$\Delta\psi = 90°$



A2 Una càmera per filmar des d'un helicòpter s'orienta **respecte a l'helicòpter** per mitjà de tres angles d'Euler. Per a l'orientació $\psi = \theta = \varphi = 0$, els eixos de rotació d'Euler són els indicats a la figura. Per a una orientació arbitrària de la càmera, quina és la direcció de l'eix de la segona rotació?

A La de l'eix de l'hèlix.
B La de la projecció de l'eix z de la càmera sobre el pla transversal de l'helicòpter.
C La intersecció del pla de la pel·lícula amb el pla transversal de l'helicòpter.
D La intersecció del pla de la pel·lícula amb el pla de simetria de l'helicòpter.
E La de la direcció z de la càmera.

Compte :

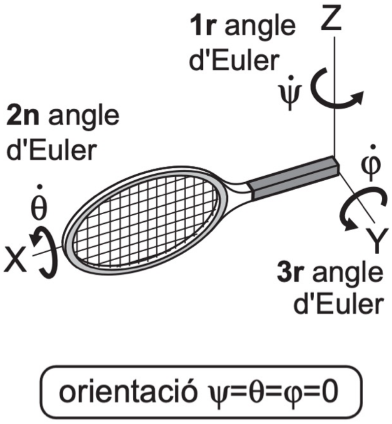
La càmera s'orienta respecte l'helicòpter, no el terra.

Vol dir que el 1er eix d'Euler, $\dot{\psi}$, és fix a l'helicòpter

Pista :

Visualitzeu el moviment del 2n eix $\dot{\theta}$. Aquest eix es manté sempre
| ⊥ al 1er eix $\dot{\psi}$
| ⊥ al 3er eix $\dot{\varphi}$

Feu-vos un dibuix d'aquest moviment.



2 Per estudiar la cinemàtica d'una raqueta, es descriu la seva orientació per mitjà de tres rotacions segons angles d'Euler que, per a $\psi = \theta = \varphi = 0$, tenen els eixos indicats a la figura. En aquesta configuració, la raqueta es troba en el pla vertical XZ. Per a una orientació general, quina és la direcció del segon eix d'Euler?

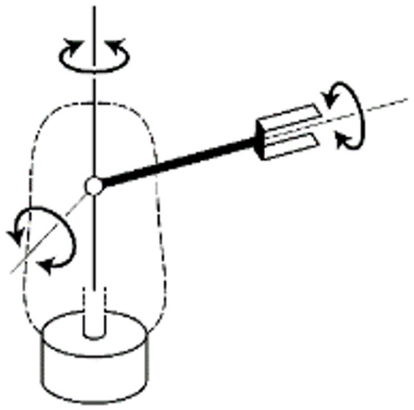
A La de l'eix X fix a terra
B La del mànec de la raqueta
C La de la projecció horitzontal del mànec
D La de la recta horitzontal del pla de la raqueta
E La de la recta de màxim pendent del pla de la raqueta

Pinça braç robòtic

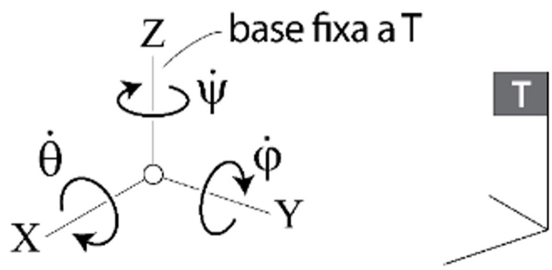
La pinça d'un braç robòtic (no dibuixat) pot tenir una orientació arbitrària. Si utilitzem els eixos d'Euler indicats per a indicar aquesta orientació, determineu:

(1) – La dir. i sentit de $(\dot{\bar{\psi}}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ per a $\psi = \theta = \varphi = 90°$

(2) – $\bar{\alpha}_T^{\text{pinça}}$ per a $\psi = \theta = \varphi = 0$ si $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ tenen valors constants



braç robòtic introdueix ψ, θ, φ



eixos d'Euler per a $\psi = \theta = \varphi = 0°$

Pistes

– Per respondre (1) feu-vos un dibuix

– Per respondre (2), calculeu $\bar{\alpha}_T^{\text{pinça}}$ per derivació geomètrica

$$\bar{\alpha}_T^{\text{pinga}} = \underbrace{\left.\frac{d\dot{\bar{\psi}}}{dt}\right]_T}_{0} + \underbrace{\left.\frac{d\dot{\bar{\theta}}}{dt}\right]_T}_{\dot{\bar{\psi}} \times \dot{\bar{\theta}}} + \underbrace{\left.\frac{d\dot{\bar{\varphi}}}{dt}\right]_T}_{(\dot{\bar{\psi}} + \dot{\bar{\theta}}) \times \dot{\bar{\varphi}}}$$

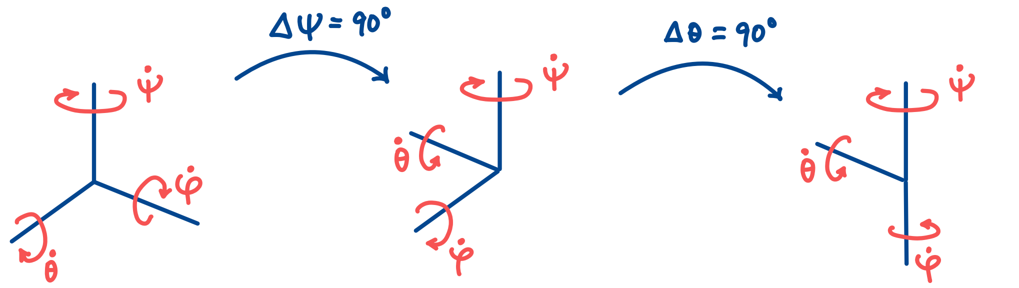
mitjançant un dibuix.

És un bon exemple per veure que la derivació analítica pot ser traïdora: la temptació és projectar $\bar{\Omega}_T^{\text{pinga}}$ en tres eixos ortogonals... la qual cosa correspon necessàriament a una expressió particular, ja que $\dot{\bar{\psi}}$ i $\dot{\bar{\varphi}}$ no són en general perpendiculars.

En canvi, amb la derivació geomètrica, com que sabem de quines rotacions està afectada cada rotació d'Euler, encara que treballem amb el dibuix particularitzat, la derivada surt bé!

Solucions

Dir. i sentit de $\bar{\dot{\psi}}, \bar{\dot{\theta}}, \bar{\dot{\varphi}}$ per a $\psi = \theta = \varphi = 90^\circ$



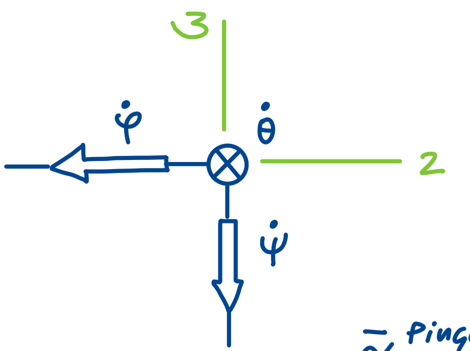
R:

$\dot\psi$: z+
$\dot\theta$: y−
$\dot\varphi$: z−

$\bar{\alpha}_T^{pinga}$ per $\psi = \theta = \varphi = 0$ si $(\dot\psi, \dot\theta, \dot\varphi)$ tenen valors ct.

Seguint el consell de les pistes ho fem per via geomètrica.

Via geomètrica



$\dot\psi$ no canvia de dir ni valor
$\dot\theta$ canvia de dir, afectat per $\bar{\dot\psi}$
$\dot\varphi$ " " " , " " $\bar{\dot\psi}, \bar{\dot\theta}$

$$\bar{\alpha}_T^{pinga} = \underbrace{(\rightarrow \dot\psi\dot\theta)}_{\text{canvi dir de } \dot\theta} + \underbrace{(\otimes \dot\psi\dot\varphi) + (\uparrow \dot\varphi\dot\theta)}_{\text{canvi dir de } \dot\varphi} \qquad (A)$$

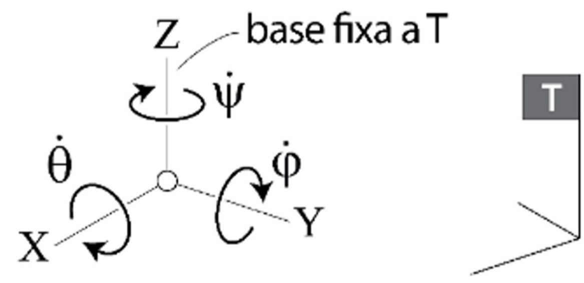
Via analítica

Per qui vulgui intentar la via analítica (opcional), allà va la solució:

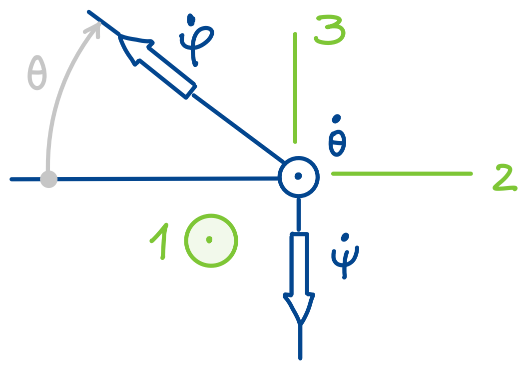
- Cal dibuix genèric.

- $\bar{\dot{\theta}}$ es mou en el pla XY

- Ens ho mirem des de la dir. de $\dot{\theta}$ genèrica i tenim



eixos d'Euler
per a $\psi=\theta=\varphi=0^\circ$



← Aquí $\bar{\dot{\psi}}$, $\bar{\dot{\theta}}$ i $\bar{\dot{\varphi}}$ ja tenen una configuració genèrica

En base $B = (1,2,3)$:

Ara això ja és un vector "pel·lícula" i el podem derivar

$$\bar{\Omega}_T^{pinça} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{\varphi}\sin\theta \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \\ -\dot{\varphi}\cos\theta \\ -\dot{\psi}+\dot{\varphi}\sin\theta \end{Bmatrix}}$$

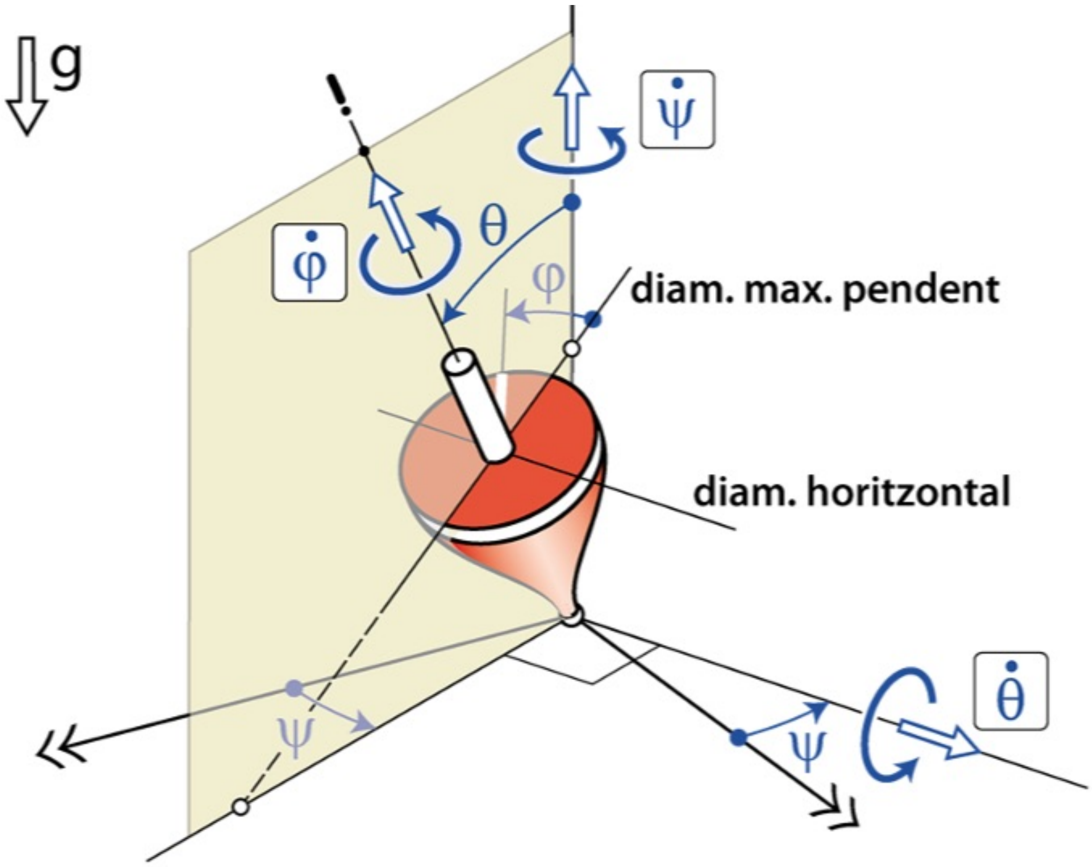
$$\bar{\alpha}_T^{pinça} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \\ -\dot{\varphi}\cos\theta \\ -\dot{\psi}+\dot{\varphi}\sin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\left.\bar{\alpha}_T^{pinça}\right]_{\substack{\psi=0\\ \theta=0\\ \varphi=0}} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi}\dot{\varphi} \\ \dot{\psi}\dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\dot{\theta} \end{Bmatrix} \qquad (B)$$

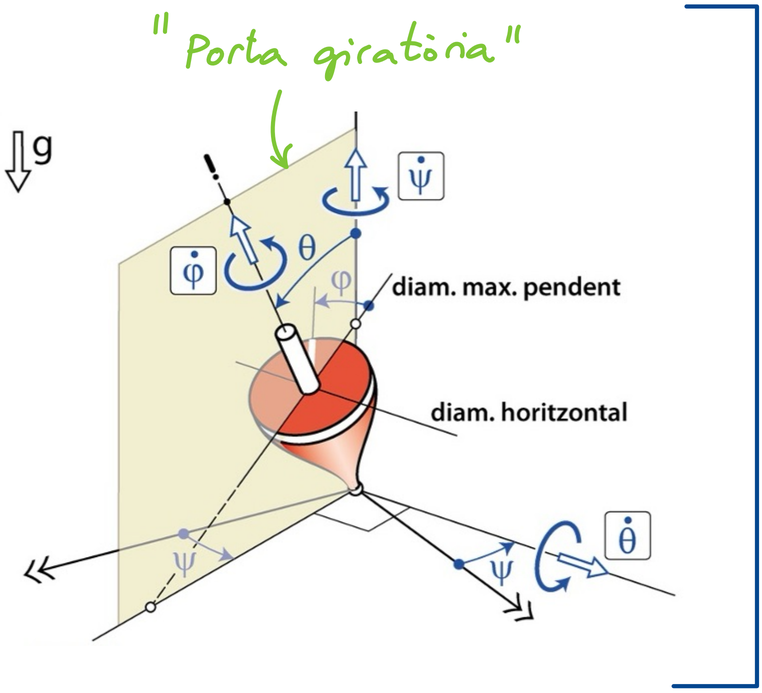
← Quadra amb (A) !

Acceleració angular de la baldufa

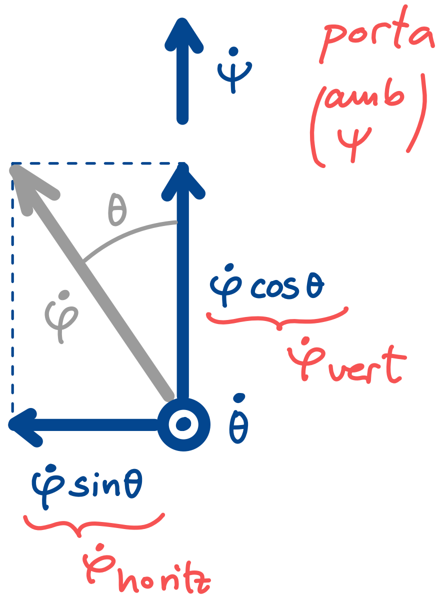
A l'exemple següent, calculeu $\bar{\alpha}_T^{baldufa}$ per derivació geomètrica (descomposant $\bar{\dot{\varphi}} = \bar{\dot{\varphi}}_{vert} + \bar{\dot{\varphi}}_{horitz}$), i també per derivació analítica



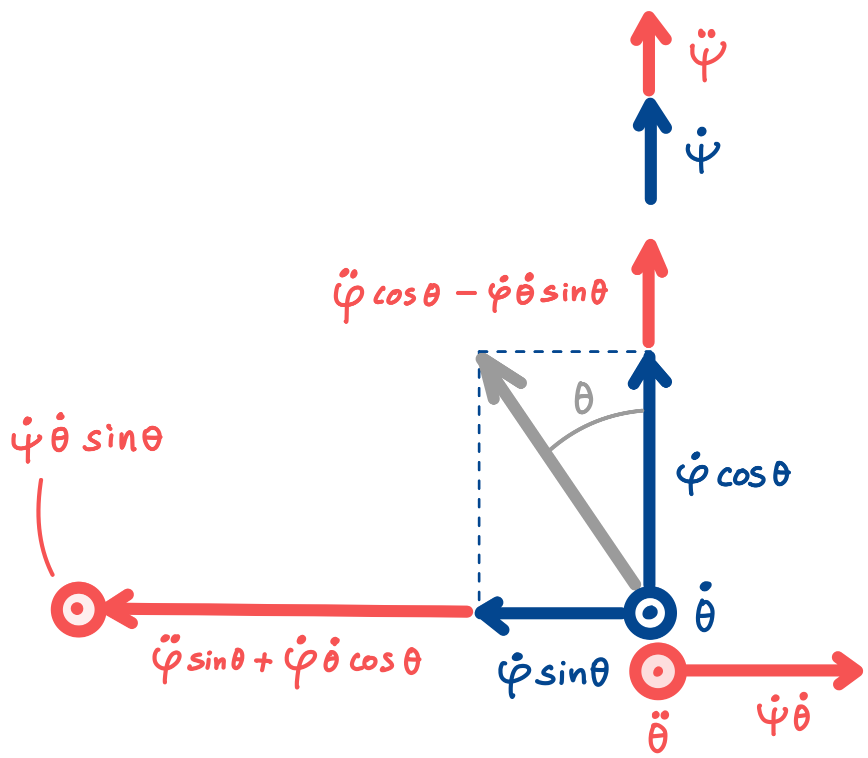
Solució:

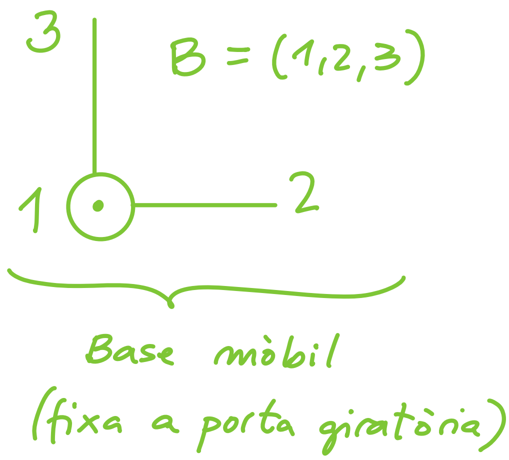


Mirat des de $\bar{\dot{\theta}}$:



Derivem geomètricament :

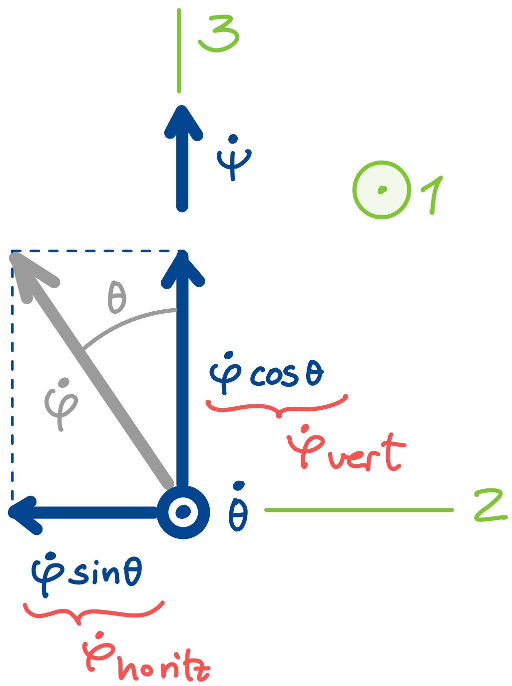




$$\left\{ \bar{\alpha}_T^{\text{bald}} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} \ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\dot{\theta} - \ddot{\varphi}\sin\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta \end{matrix} \right\}_B \qquad (A)$$

Analíticament :

Mirat des de $\bar{\dot{\theta}}$:



$$\left\{\bar{\Omega}^{bald}_{T}\right\}_B = \begin{Bmatrix} \theta \\ -\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\left\{\bar{\alpha}^{bald}_{T}\right\}_B} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ -\ddot{\varphi}\sin\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}} =$$

$$= \boxed{\begin{Bmatrix} \ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta \\ -\ddot{\varphi}\sin\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta} \\ \ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix}}$$

<u>Quadra amb (A)</u> !