

6P

Versió 0.9 (preliminar)

Cinemàtica del sòlid rígid 2D
(moviment pla)

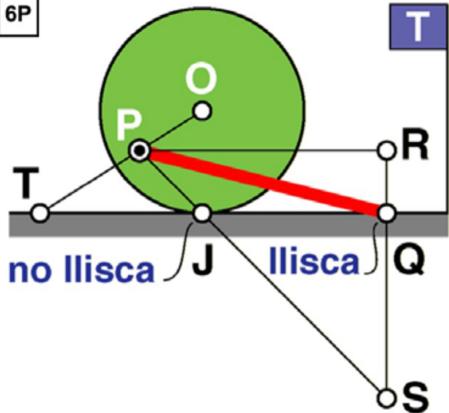
+

Cinemàtica de vehicles

Lluís Ros

<https://lluisros.github.io/mecanica>

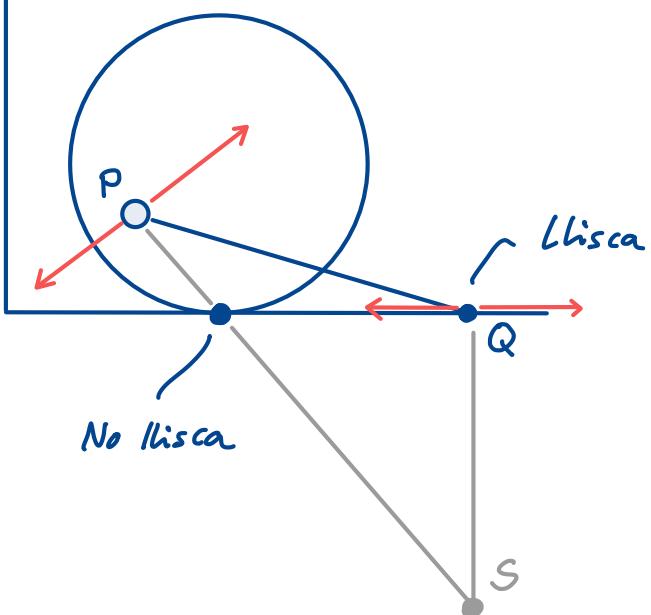
6P



La roda no llisca al damunt del terra (T). La barra està articulada a la roda i recolza sobre el terra.

Determina el CIR_T^{barra} .

T



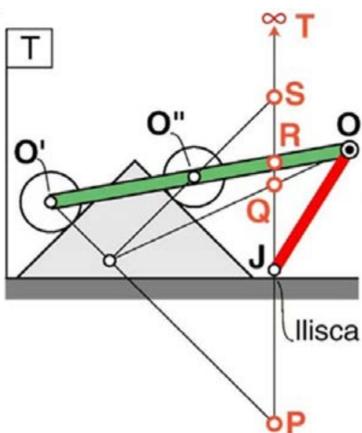
La dir. de les vel. de P i Q resp. T és la indicada en vermell. Ergo:

$$CIR_T(\text{Barra}) = S$$

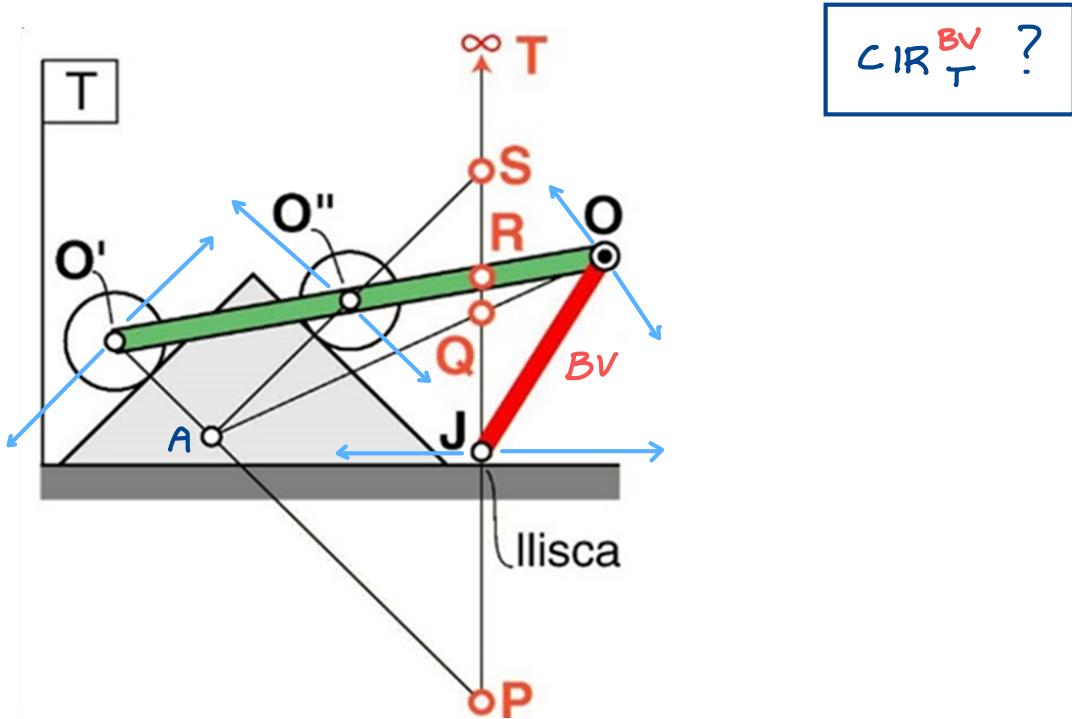
$S = \text{Intersecció de les rectes} :$

- \perp a $\bar{v}_T(P)$ passant per P
- \perp a $\bar{v}_T(Q)$ " " " Q

6P



Les rodes mantenent contacte amb el terra inclinat (T).
La barra verda està articulada a les dues. La barra vermella (BV) està articulada a la verda i recolza sobre el terra.
Determine el CIR_T^{BV} .

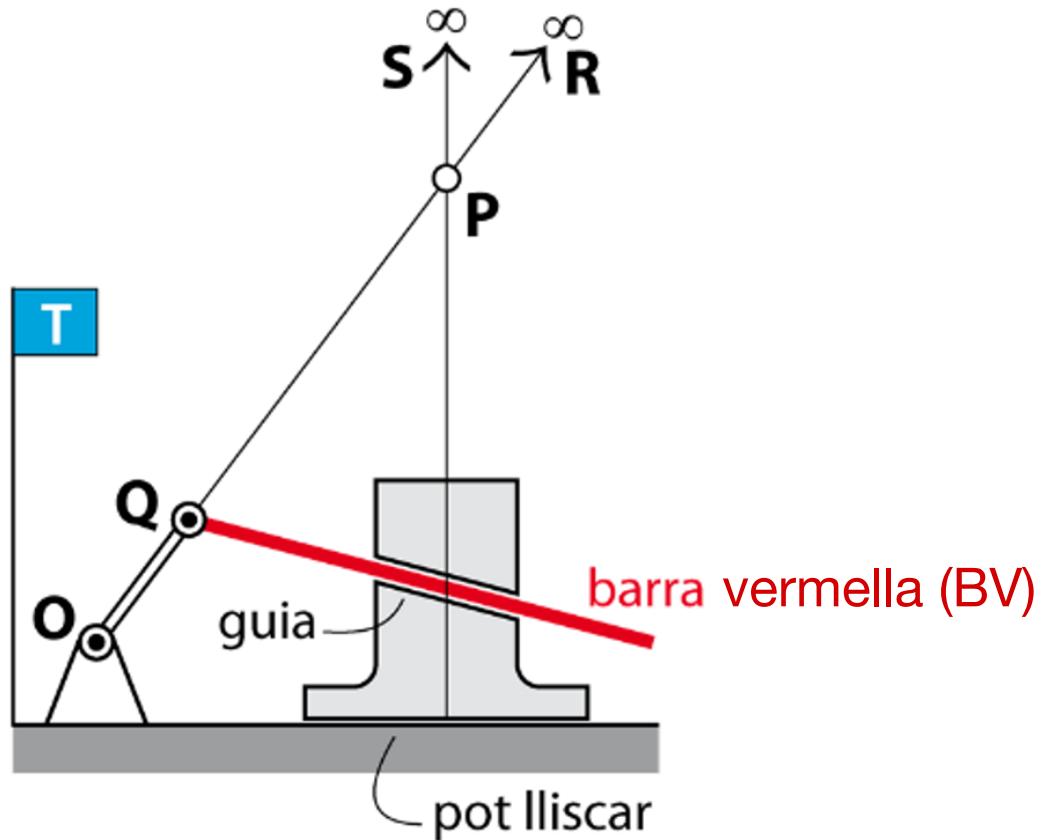


$CIR_T^{BV} ?$

$\bar{v}_T(O')$ té dir \nwarrow
 $\bar{v}_T(O'')$ té dir \nearrow

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v}_T(O') \text{ té dir } \nwarrow \\ \bar{v}_T(O'') \text{ té dir } \nearrow \\ \bar{v}_T(J) \text{ té dir. horizontal} \\ \bar{v}_{BV}(Q) \text{ té dir. vertical} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} CIR_T^{\text{Barra verde}} = A \\ CIR_T^{BV} = Q \end{array} \right\} \Rightarrow CIR_T^{BV} = Q$$

La barra blanca està articulada al terra (T). La barra vermella (BV) està articulada a la blanca i té un enllaç prismàtic amb el suport, que recolza sobre el terra. Determina el CIR_T^{BV} .

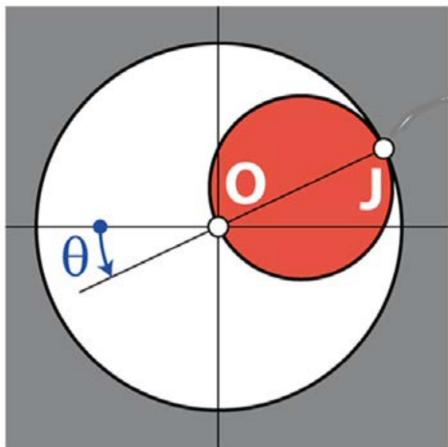


La barra vermella només ser pot traslladar. No pot girar, perquè els 2 enllaços prismàtics no li ho permeten.

Vol dir que $\overline{I2}_T^{\text{barra}} = 0$. Això implica que el seu CIR es a l' ∞ (sobre un punt de la recta de l' ∞). Per altra banda CIR_T^{barra} ha de ser sobre la recta OQ perquè Q té velocitat \perp a aquesta recta. Per tant, CIR_T^{barra} ha de ser el punt de l' ∞ de la recta OQ .

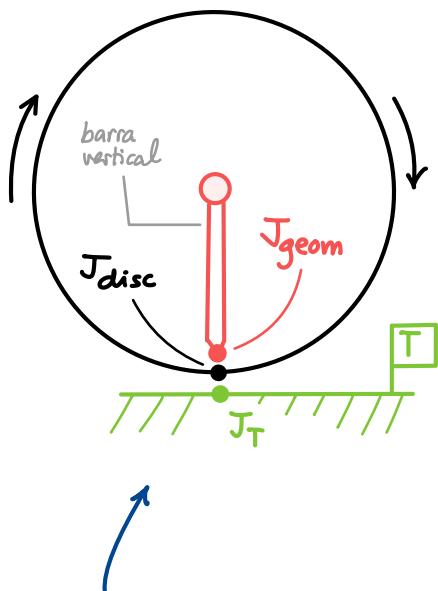
$$CIR_T^{BV} = R$$

6P



El disc rodola sense lliscar dins una cavitat cilíndrica fixa al terra (T).
Calcula $\bar{v}_T(O_{\text{disc}})$, $\bar{a}_T(J_{\text{disc}})$.

Abans de fer l'exercici, recordem coses... En un disc que rodola sobre un terra sense lliscar, distingim tres punts en el contacte roda-terra



J_{disc} = Punt del disc en contacte amb el terra

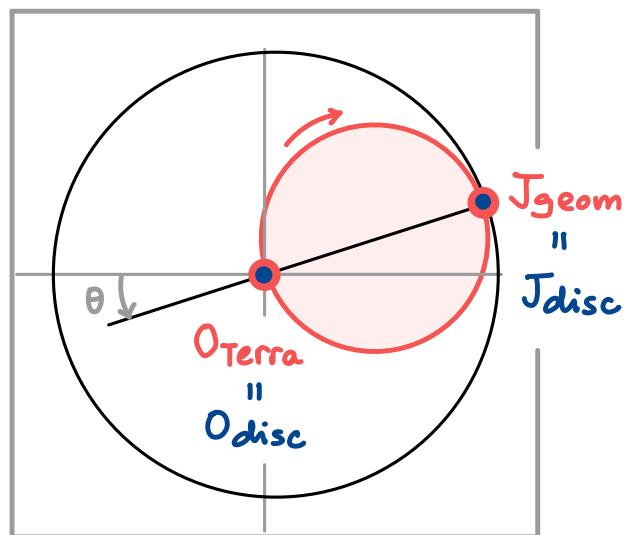
J_T = Punt del terra en contacte amb el disc

J_{geom} = Punt geomètric de contacte.
És el que, en cada instant, està situat en el contacte entre disc i terra. No és ni del disc, ni del terra ! (*)

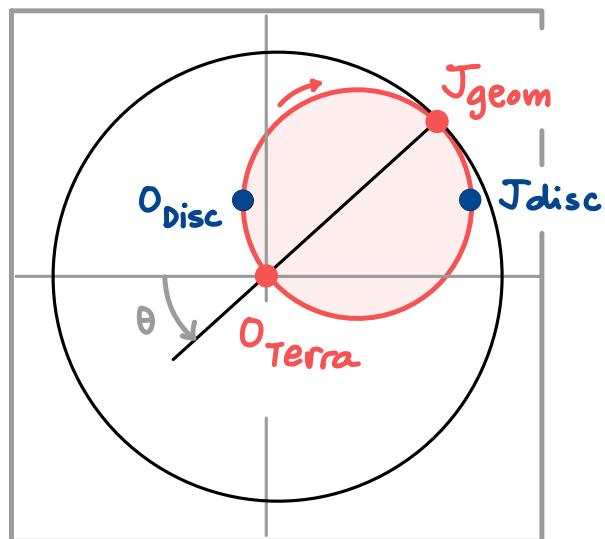
En aquest exemple el disc rodola sobre terreny pla horitzontal, però els mateixos tres punts es poden definir en el cas del disc rodolant sobre cavitat cilíndrica de l'exercici.

(*) En aquest exemple del disc rodolant sobre terra pla, seria l'apuntat per una barra articulada al centre del disc que sempre es manté vertical gràcies a la gravetat.

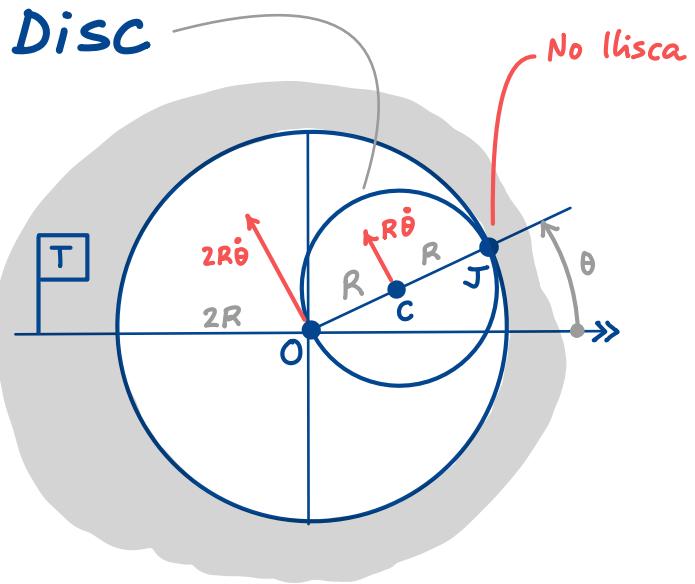
En l'instant del dibuix de l'enunciat, J_{disc} coincideix amb J_{geom} , i O_{disc} amb O_{Terra} :



Però uns instants més tard J_{disc} i O_{disc} ja s'hauran separat de O_{Terra} i J_{geom} perquè viatgen solidaris al disc:



Passem a resoldre l'exercici:



$$\bar{v}_T(o_{Disc}) ?$$

$$\bar{a}_T(j_{Disc}) ?$$

Aplicarem CSR

Ens caldran $\bar{\Omega}_T^{Disc}$ i $\bar{\alpha}_T^{Disc}$

Sigui θ l'angle que orienta el diàmetre $O_T C$ resp. T
vol dir $O \in T$

Clarament, C descriu un mov. circular amb centre a O_T i radi R , de vel. angular $\oplus \dot{\theta}$.

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_T(C) &= \uparrow R\dot{\theta} \\ CIR_T^{Disc} &= J \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\Omega}_T^D = \otimes \dot{\theta}$$

$$\bar{\alpha}_T^D = \otimes \ddot{\theta}$$

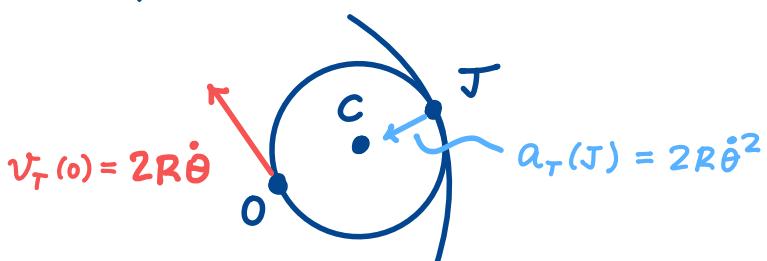
compte que θ no orienta el disc! Només el diàmetre OJ !
 $\bar{\Omega}_T^{Disc} = \otimes \dot{\theta}$ i no $\odot \dot{\theta}$!

$$\boxed{\bar{v}_T(o) = \cancel{\bar{v}_T(J)}^0 + \bar{\Omega}_T^{Disc} \times \bar{JO} = (\oplus \dot{\theta}) \times (-2R) = \cancel{\downarrow 2R\dot{\theta}}}$$

vec. foto!
No el podem derivar per obtenir $\bar{a}_T(j)$

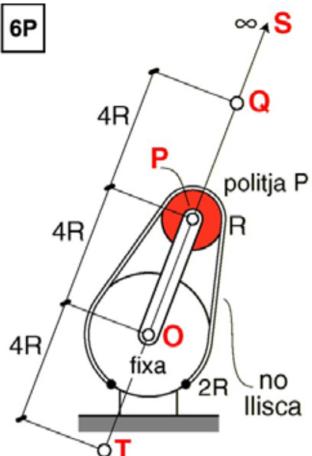
$$\boxed{\begin{aligned} \bar{a}_T(j) &= \bar{a}_T(c) + \bar{\alpha}_T^{Disc} \times \bar{CJ} + \bar{\Omega}_T^{Disc} \times (\bar{\Omega}_T^{Disc} \times \bar{CJ}) = \\ &= [(\cancel{R\ddot{\theta}}) + (\cancel{R\dot{\theta}^2})] + \underbrace{[(\otimes \ddot{\theta}) \times (\cancel{R})]}_{(\cancel{R\ddot{\theta}})} + \underbrace{[(\otimes \dot{\theta}) \times ((\oplus \dot{\theta}) \times (\cancel{R}))]}_{(\cancel{R\dot{\theta}^2})} = \cancel{\downarrow 2R\dot{\theta}^2} \end{aligned}}$$

En resum:



veure animació C5.1
Wikimec!

6P



El braç està articulat al terra (T) i a la politja P . La corretja inextensible no llisca en cap dels seus punts de contacte amb el terra i la politja. Determina el $CIR_T^{\text{politja } P}$.

Solució: pàgina següent.

Solució:

Basc = Basculant

P_0 = Polifia a O

PP = " " P

CIR_T^{PP} ?

Suposem $\bar{\Omega}_T^{\text{Basc}} = \vec{\omega} \otimes \omega$

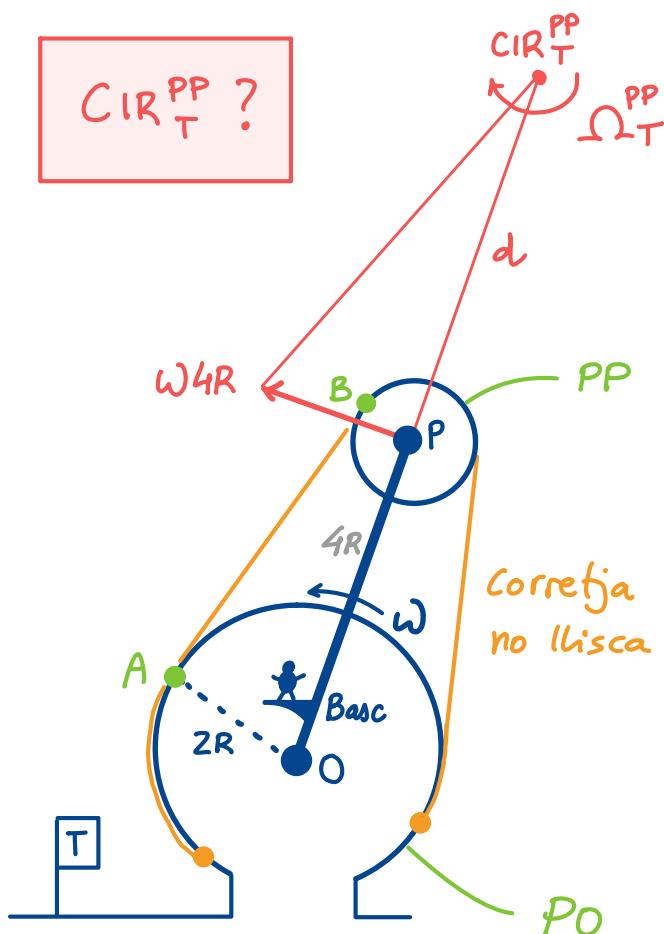


$$\bar{v}_T(P) = (-4R\omega)$$



Si sabessim $\bar{\Omega}_T^{\text{PP}}$, ja podríem localitzar el CIR trobant d via:

$$\bar{\Omega}_T^{\text{PP}} d = 4R\omega$$



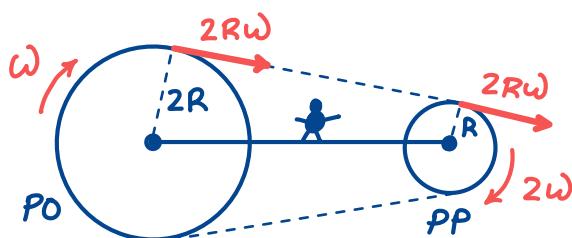
Busquem doncs $\bar{\Omega}_T^{\text{PP}}$:

$$\bar{\Omega}_T^{\text{PP}} = \underbrace{\bar{\Omega}_{\text{Basc}}^{\text{PP}}}_{\vec{\omega} \otimes 2\omega} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{\text{Basc}}}_{\vec{\omega} \otimes \omega} = \vec{\omega} \otimes \omega$$

Què veiem des del basculant?

$$\bar{\Omega}_{\text{Basc}}^{P_0} = \vec{\omega} \otimes \omega$$

$$\bar{\Omega}_{\text{Basc}}^{\text{PP}} = \vec{\omega} \otimes 2\omega$$



Rel transm. 2:1

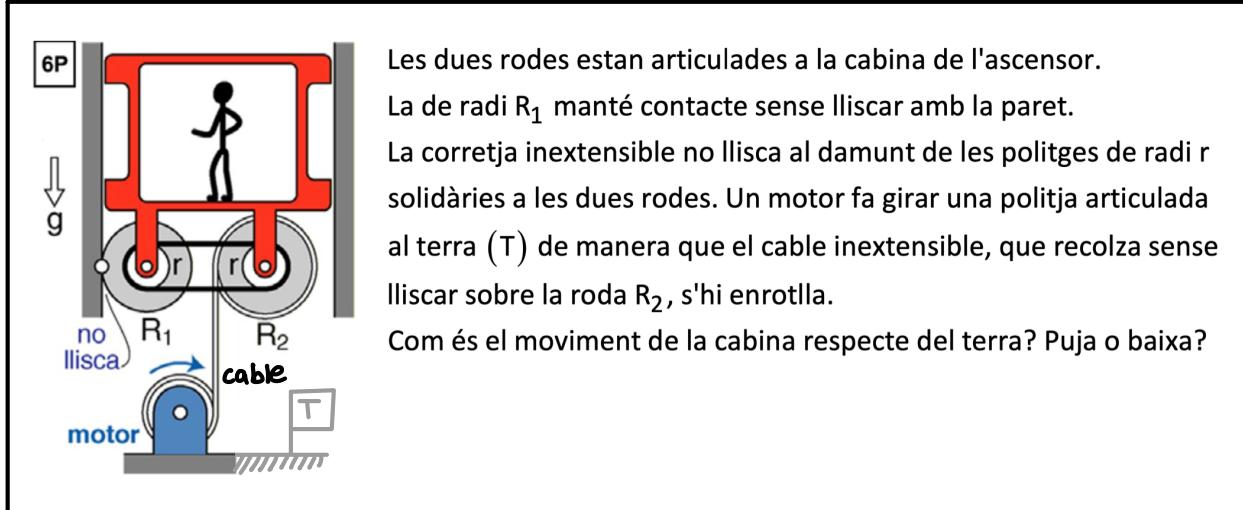
voltes sortida

voltes entrada

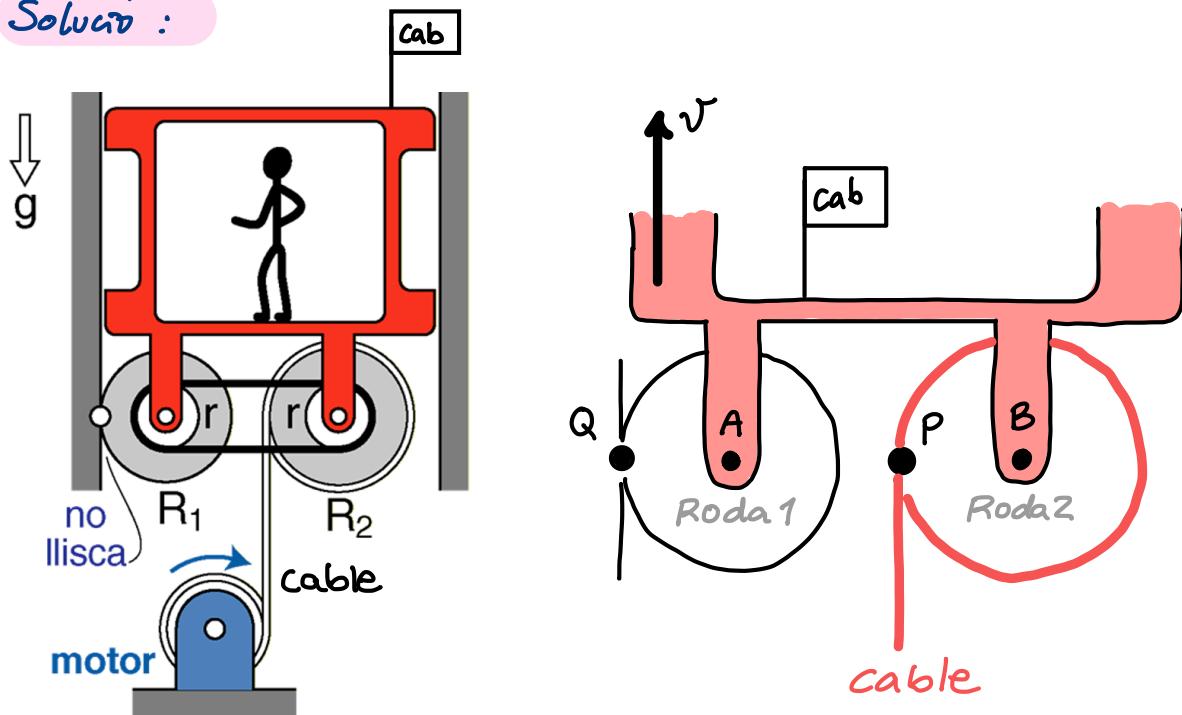
Ara ja és fàcil:

$$\omega \cdot d = 4\omega R \Rightarrow d = 4R$$

CIR_T^{PP} = Q



Solució :



Suposem que la cabina es mou amb velocitat ($\uparrow v$) respecte el terra. Cal esbrinar si, en enrotllar-se el cable a la politja motoritzada, v és positiva o negativa (la cabina puja o baixa, respectivament).

Fixem-nos que, en qualsevol cas, la velocitat del punt P resp. T només pot ser cap avall \downarrow , ja que el motor està **enrotllant** el cable.

Així doncs, calcularem $\bar{v}_T(P)$ en funció de v i imposarem que tingui direcció cap avall.

Calculem $\bar{v}_T(P)$ per comp. de movim. amb

$$\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = Cabina \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AB}(P) &= \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P) = \\ &= \bar{\Omega}_{REL}^{Rodaz} \times \overline{BP} + (\uparrow v) = \\ &= \left(\odot \frac{v}{R_1} \right) \times (\leftarrow R_2) + (\uparrow v) = \\ &= \left(\downarrow \frac{R_2}{R_1} v \right) - (\downarrow v) = \downarrow \left[v \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right] \quad (\square) \end{aligned}$$

De (\square) veiem que $\bar{v}_T(P)$ vindrà dir. \downarrow (i no \uparrow) si i només si

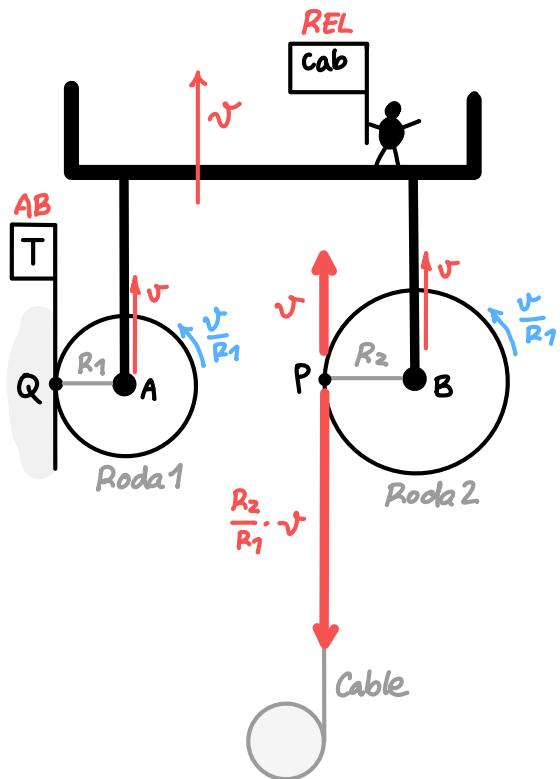
$$v \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) > 0,$$

que equival a demanar

$$v(R_2 - R_1) > 0$$

$\underbrace{A}_{\text{A}}$ $\underbrace{B}_{\text{B}}$

És a dir, A i B han de tenir el mateix signe.



$$\left. \begin{aligned} (*) \quad \bar{v}_T(A) &= (\uparrow v) \\ CIR_T^{Rodaz} &= Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\Omega}_T^{Rodaz} = \odot \frac{v}{R_1}$$

Cabina té orientació fixa resp. T

Relació transmissió
1:1 Roda 1 → Roda 2

$$\bar{\Omega}_{cabina}^{Rodaz} = \bar{\Omega}_{cabina}^{Rodaz}$$

Per tant, quan el cable s'enrotlla :

- Si $R_2 > R_1$, v ha de ser positiva \Rightarrow La cabina puja
 - Si $R_2 < R_1$, " " " negativa \Rightarrow " " baixa
-

Extra: i què passa quan el motor està aturat?

En aquest cas, el cable no s'enrotlla a la polifà
motoritzada $\Rightarrow \bar{V}_T(P) = 0$, i per tant ha de ser

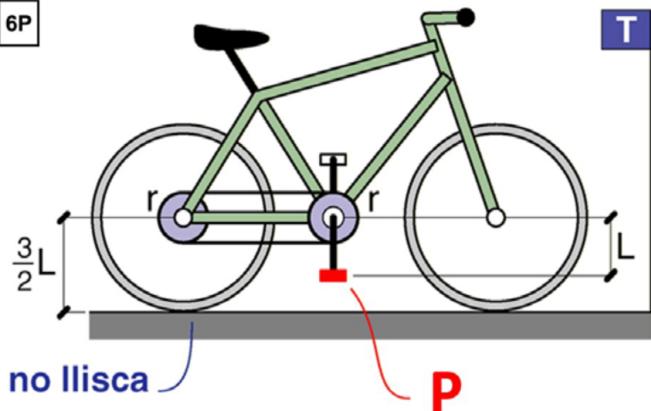
$$v(R_2 - R_1) = 0$$

Aquesta condició es compleix en dos casos:

(i) Si $R_2 \neq R_1 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow$ La cabina està
aturada

(ii) Si $R_2 = R_1 \Rightarrow v$ pot tenir qualsevol valor \Rightarrow
El moviment de la cabina no queda determinat
cinemàticament. Pot pujar o baixar, o quedar
en repòs. Té llibertat per a fer qualsevol
d'aquestes coses. I quinà farà? No ho sabem!
Calen les eines de la dinàmica per a determinar
el moviment.

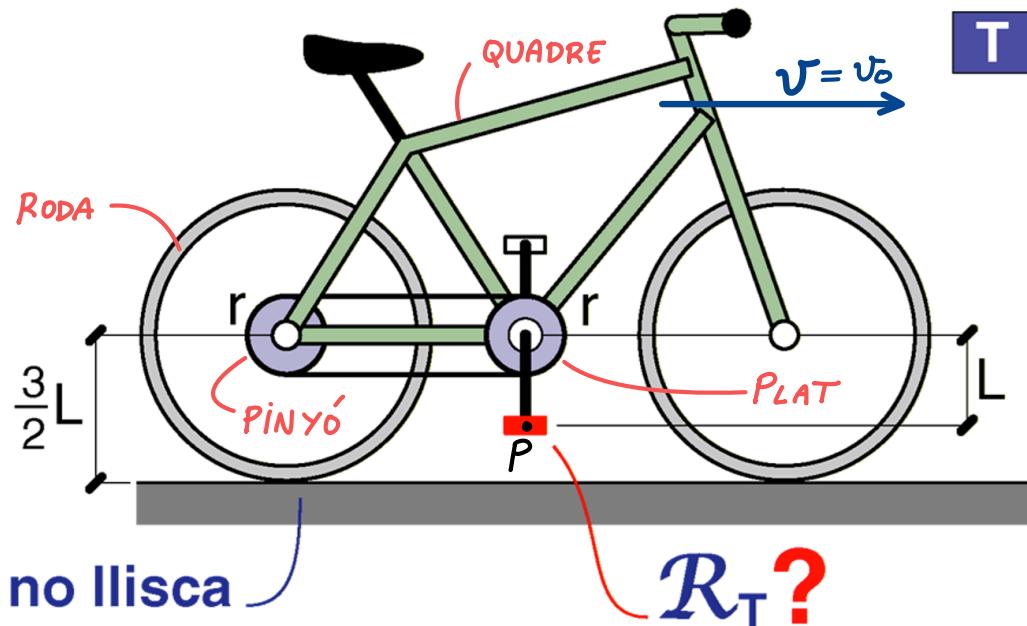
6P



Les rodes de la bicicleta no llisquen al damunt del terra (T). Plat i pinyó tenen la mateixa mida. Calcula $\mathcal{R}_T(P)$.

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|\ddot{a}_T^n(P)|} \Rightarrow \text{Hem de calcular } \bar{v}_T(P) \text{ i } \bar{\ddot{a}}_T(P) \text{ i extreure } \bar{\ddot{a}}_T^n(P).$$

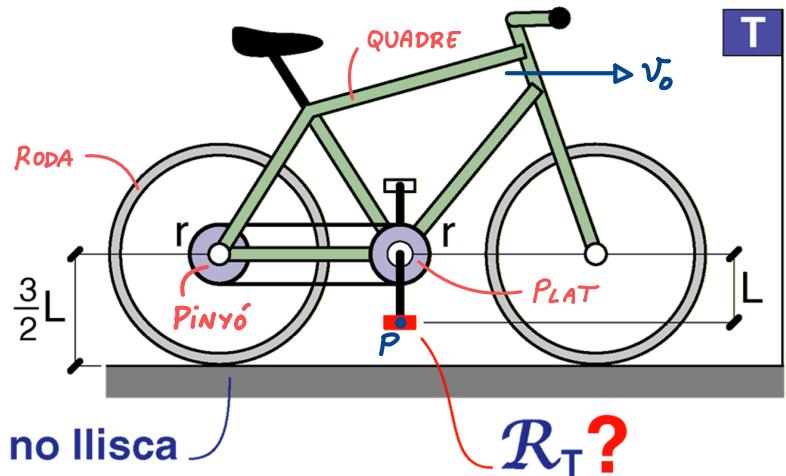
Per a fer els càlculs, podem suposar que el quadre de la bicicleta es mou amb celeritat v cap endavant. Podíem suposar un valor de v variable, però com que $\mathcal{R}_T(P)$ no depèn de la velocitat amb que P descriu la seva trajectòria, suposarem $v = v_0 = ct$ (constant $\forall t$). Això simplifica una mica els càlculs.



Som-hi:

Fem comp. mov. amb

$$\begin{aligned} AB &= T \\ REL &= \text{Quadre} \end{aligned}$$



$$\bar{v}_{AB}(P) = \underbrace{\bar{v}_{REL}(P)} + \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)} = \left(-\frac{2v_o}{3} \right) + (\rightarrow v_o) = \overline{(\rightarrow \frac{v_o}{3})}$$

$$\underbrace{\bar{\Omega}_{\text{Plat Quadre}}}_{\text{Rel. transm. 1:1 plat - pinyó}} \times (\downarrow L) \quad (\rightarrow v_o)$$

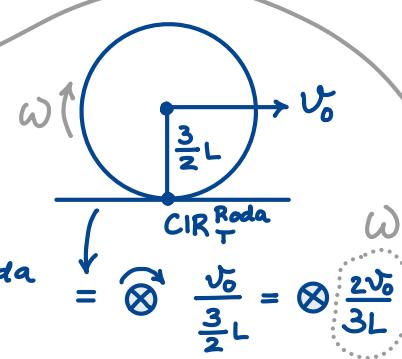
$$\therefore \bar{\Omega}_T = \left(\otimes \frac{v_o}{\frac{3}{2}L} \right)$$

$$\bar{\Omega}_{\text{Plat Quadre}} = \bar{\Omega}_{\text{Pinyó Quadre}} = \bar{\Omega}_{\text{Rodas Quadre}}$$

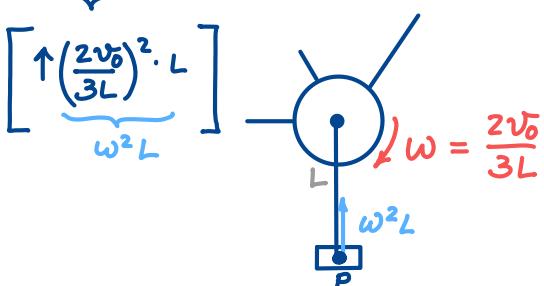
↑
Rel. transm. 1:1
plat - pinyó

Pinyó és
solidari
a roda

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{\text{Rodas Quadre}} &= \bar{\Omega}_T = \bar{\Omega}_{\text{Rodas}} = \otimes \frac{v_o}{\frac{3}{2}L} = \otimes \frac{2v_o}{3L} \\ \bar{\Omega}_T &= \bar{\Omega}_{\text{Rodas Quadre}} + \bar{\Omega}_T \end{aligned}$$



$$\bar{a}_{AB}(P) = \underbrace{\bar{a}_{REL}(P)} + \underbrace{\bar{a}_{ar}(P)}_{\uparrow \left(\frac{2v_o}{3L} \right)^2 \cdot L} + \underbrace{\bar{a}_{cor}(P)}_{\omega^2 L} = \left(\uparrow \frac{4v_o^2}{9L} \right)$$

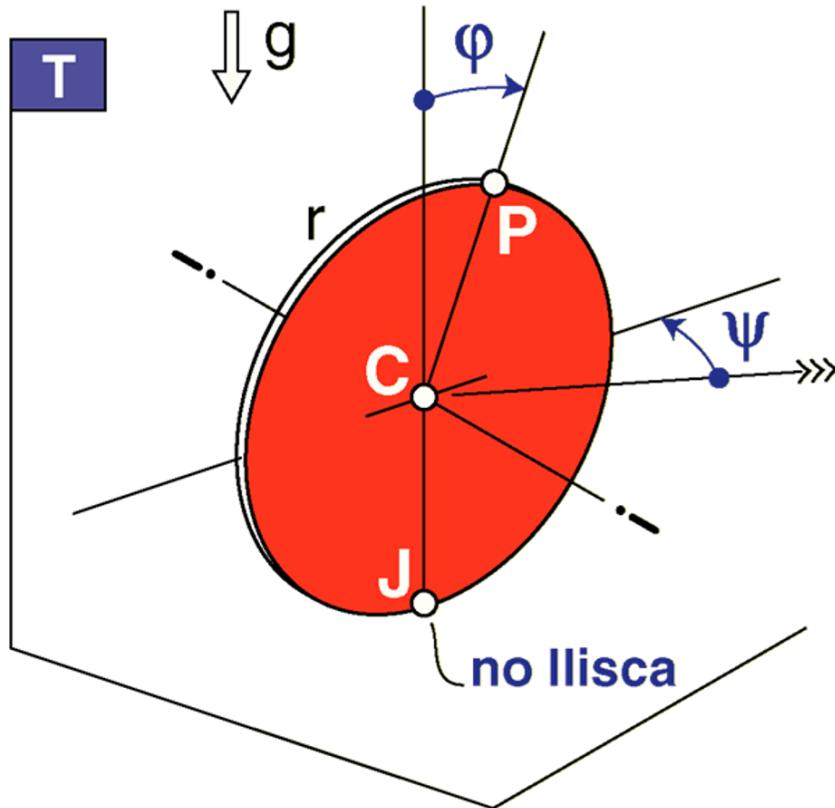


$$\begin{aligned} R_T(P) &= \frac{\left(\frac{v_o}{3} \right)^2}{\frac{4v_o^2}{9L}} = \frac{\frac{v_o^2}{9}}{\frac{4v_o^2}{9L}} = \frac{L}{4} \end{aligned}$$

Introducció a cinemàtica de vehicles

El següent exercici proporciona un resultat que ens permetrà agilitzar les anàlisis cinemàtiques de vehicles.

La roda no llisca sobre el terra, i gira mantenint el seu pla perpendicular al terra (T). Calcula $v_T(C)$.

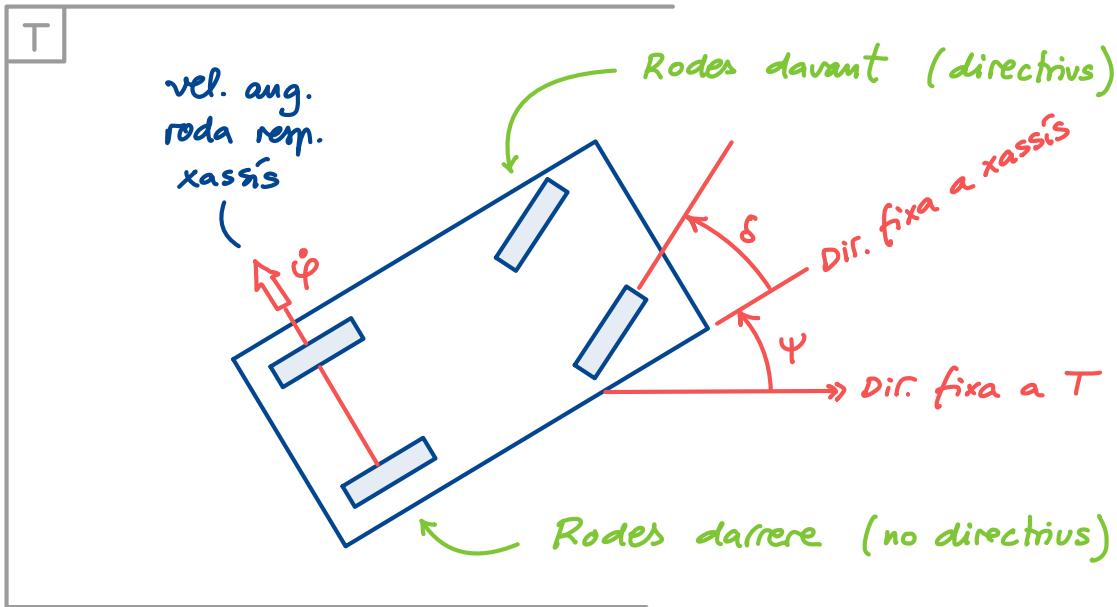


Seguidament resoldrem l'exercici posant-lo en context.

Considerarem un vehicle amb rodes, introduirem tres hipòtesis simplificadores, i calcularem la velocitat del centre d'una roda qualsevol respecte del terra.

Veurem que la velocitat d'aquest centre només depèn de la velocitat **phipunt** de rotació de la roda respecte del xassís (no de **psipunt**). Aquest resultat permet fer anàlisis cinemàtiques ràpides de vehicles, i l'aplicarem en exercicis futurs.

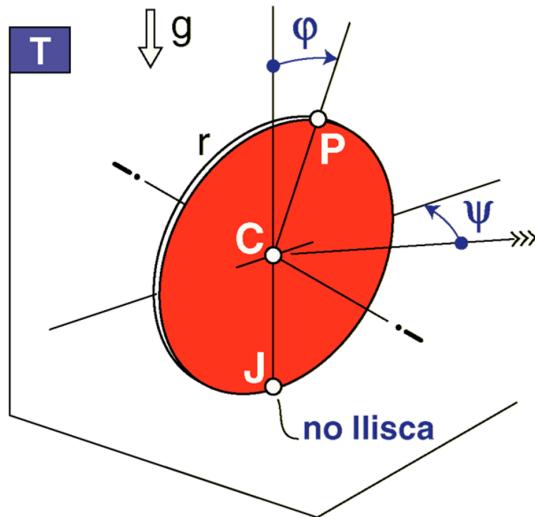
Considerem un vehicle:



3 hipòtesis simplificadores

- Vehicle es mou en terra pla
- Veh. no té suspensions \Rightarrow Roda es manti en un pla vertical i només cal orientar-la amb 2 angles.

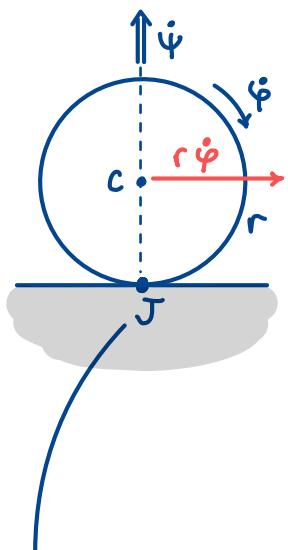
Per la roda del darrere serien ψ i φ :



Per la del davant serien $\psi + \delta$, φ

- Rodes primes \Rightarrow contacte puntual amb el terra. Permet introduir hipòtesi de no lliscament a J. Si el contacte fos en un segment de recta seguir que hi hauria lliscament en alguns punts.

Anàlisi cinemàtica roda del darrere:
(per la roda del davant surt el mateix!)



Aplicant CSR a roda:

$$\bar{v}_T(C) = \bar{v}_T(J) + (\underbrace{\pi\dot{\psi}}_{0!} + \hat{\otimes}\dot{\phi}) \times (\uparrow r) = (\rightarrow r\dot{\phi})$$

Que simple!

Per la roda davantera surt el mateix perquè en lloc de $\uparrow\dot{\psi}$ tenim $\uparrow(\dot{\psi} + \dot{\delta})$

J no és el CIR! Ho seria si el movim. de la roda fos plà. Però aquí és 3D!

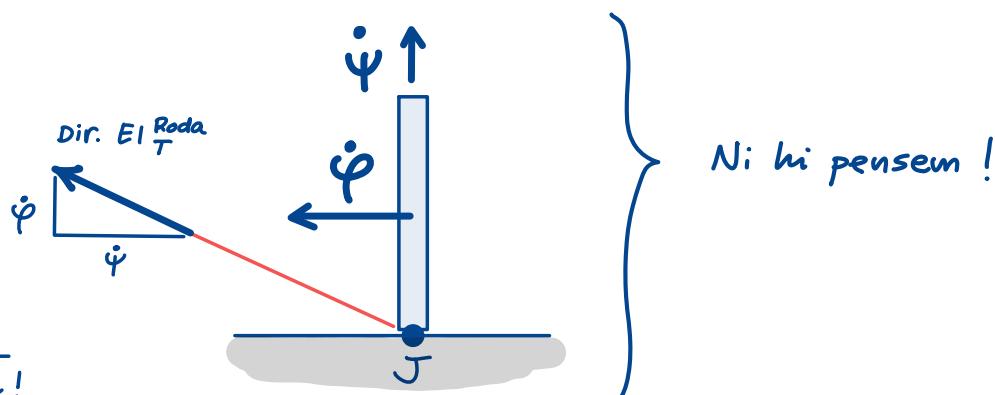
Per tant, $\rightarrow r\dot{\phi}$ no és "distància al CIR · R", sinó el resultat d'aplicar CSR!

En fer analisi cinemàtica de veh. pensarem sempre en això **la roda**

És a dir: pensarem que el centre C de la roda té vel. ($\rightarrow r\dot{\phi}$)
Això ens permetrà fer analisis cinemàtics ràpids perquè C sol ser, allora, un punt del xamís (veure questió del Tricicle com a exemple, pàg. següent).

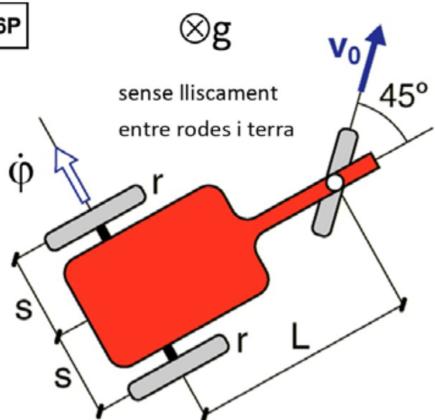
Observació:

L' EI_T^{roda} passa per J, però la roda té 2 GDL. La dir. de l' EI és $\bar{\psi} + \bar{\phi}$, per tant EI_T^{roda} no queda determinat.
No ens servirà útil. No cal que hi pensem!



(*) No sempre ho serà!

6P

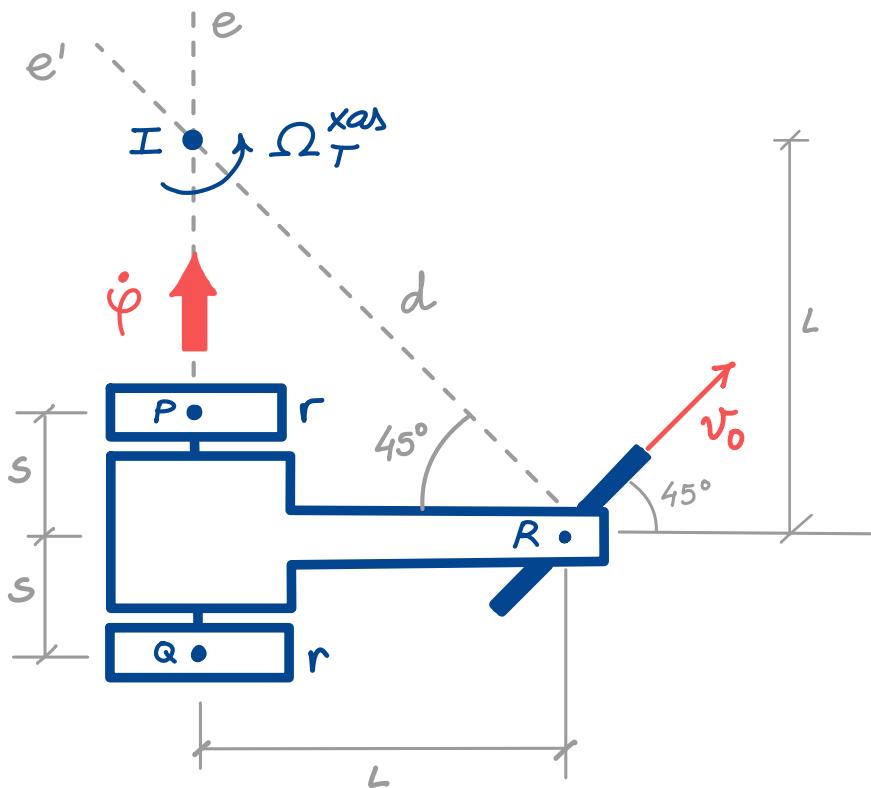


Les rodes del tricicle són identiques i no llisquen al damunt del terra (T). La velocitat del centre de la roda del davant té velocitat v_0 respecte del terra. Calcula la rotació pròpia $\dot{\phi}$ de la roda posterior esquerra en funció de v_0 .

Solució: pàgina següent.

Solució:

$$\dot{\varphi} ?$$



P, Q, R són punts de les respectives rodes, però també del xassís.

$$P \text{ i } Q \text{ tenen vel. } \perp \text{ eix } e \quad | \Rightarrow CIR_T^{\text{xassís}} = I \\ R \text{ té vel. } \perp \text{ eix } e' \\ |$$

Busquem Ω_T^{xas} :

$$\Omega_T^{\text{xas}} = \frac{v_0}{d} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} \quad "xas" = \text{xassís}$$

Ara, veient P com a punt de la roda:

$$v_t(P) = r \cdot \dot{\varphi} \quad (I)$$

I veient P com del xassís:

$$v_t(P) = \Omega_T^{\text{xas}} \cdot \underbrace{(L-s)}_{\text{dist. al CIR}} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} \cdot (L-s) \quad (II)$$

$$I = II :$$

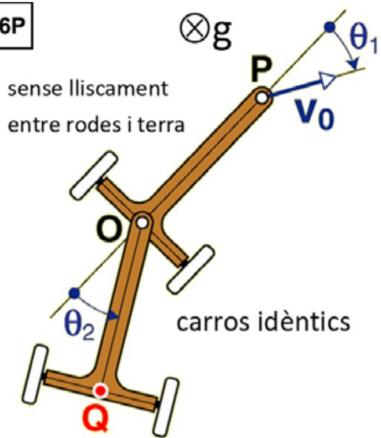
$$r \dot{\varphi} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} (L-s) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{rL\sqrt{2}} (L-s)$$

CSR
roda

CSR
xassís

6P

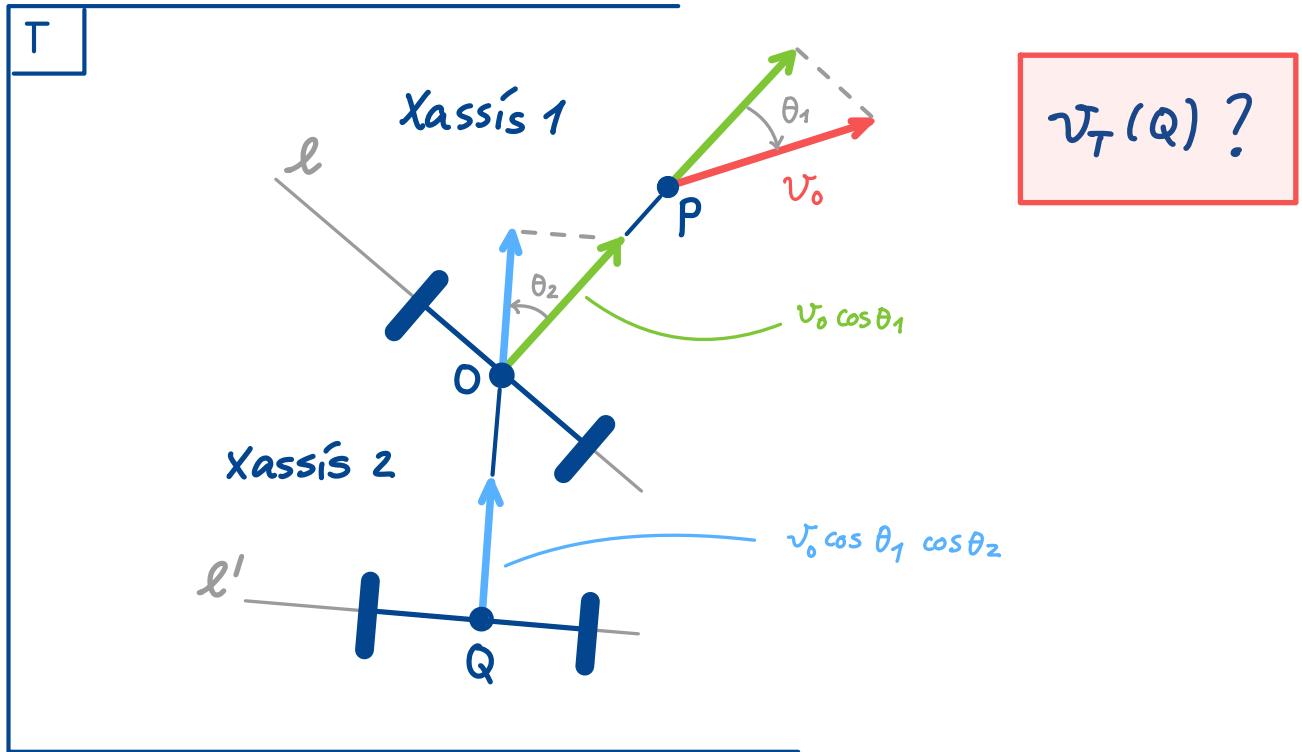


Les rodes del tractor i el remolc són identiques i no llisquen al damunt del terra (T). La velocitat del punt P respecte del terra és v_0 . Calcula $\bar{v}_T(Q)$.

Solució: pàgina següent.

Solució ràpida via equiprojectivitat !

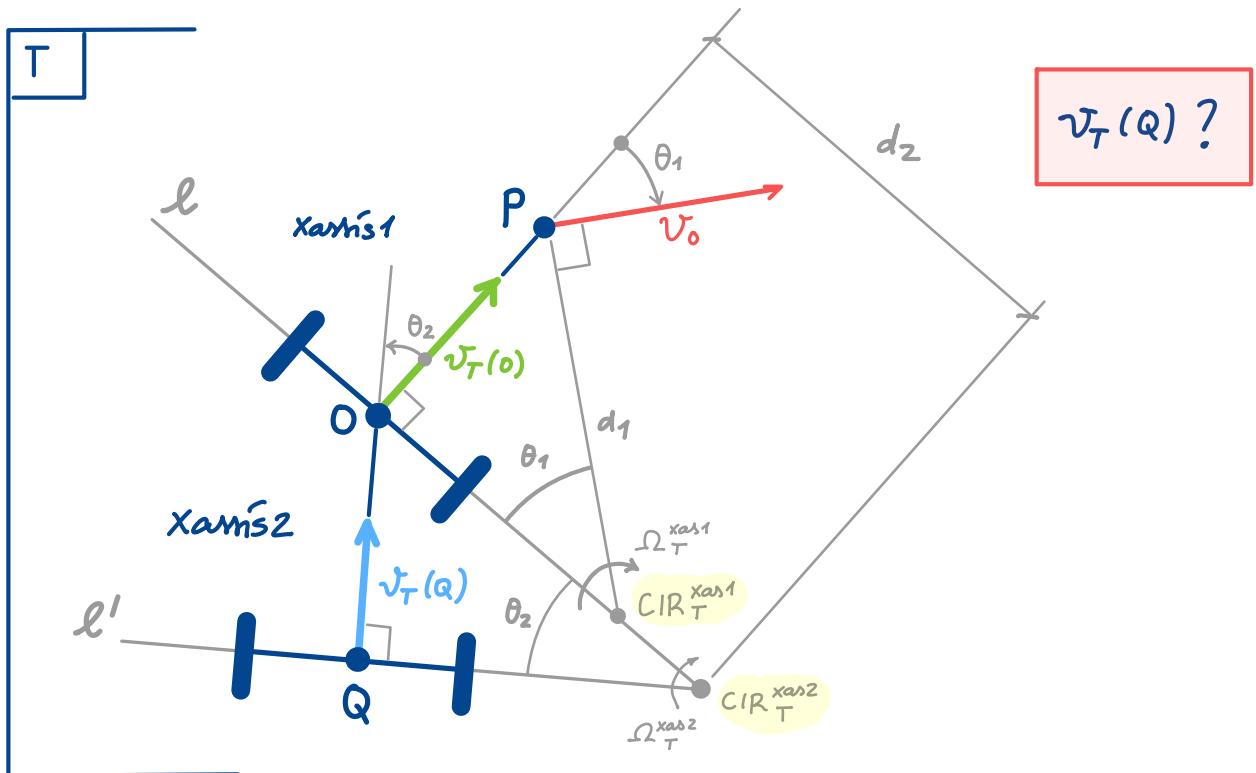
(Solució menys directa, però igualment bona, a la pàg. seg.)



- CIR $\frac{xassís}{T} 1$ sobre $\ell \Rightarrow \overline{v_T}(O) \perp \ell$
 - Equiprojectivitat $P \rightarrow O : v_T(O) = v_0 \cos \theta_1$
 - CIR $\frac{xassís}{T} 2$ sobre $\ell' \Rightarrow \overline{v_T}(Q) \perp \ell'$
 - Equiprojectivitat $O \rightarrow Q :$
- $$\boxed{v_T(Q) = v_T(O) \cos \theta_2 = \overline{v_0 \cos \theta_1 \cos \theta_2}}$$

Solució "lenta" via localitzar CIR_T^{xas1} i CIR_T^{xas2}

Els CIR_T^{xas1} i CIR_T^{xas2} han de ser on indiquem. A més, $v_T(0)$ i $v_T(Q)$ han de ser \perp a l i l' , respectivament.



- $\Omega_T^{xas1} = \frac{v_0}{d_1}$

$\curvearrowright \text{dist}(CIR_T^{xas1}, P)$

- $v_T(0) = \Omega_T^{xas1} \cdot d_1 \cos \theta_1 = v_0 \cos \theta_1$

- $\Omega_T^{xas2} = \frac{v_T(0)}{d_2} = \frac{v_0 \cos \theta_1}{d_2}$

$\curvearrowright \text{dist}(CIR_T^{xas2}, 0)$

- $v_T(Q) = \Omega_T^{xas2} \cdot d_2 \cos \theta_2 = \frac{v_0 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{d_2}$