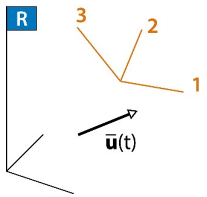
Formulari de Mecànica 2024 - 2025 QP

Als exàmens, aquest formulari no pot contenir més informació que la que hi figura a la versió d'Atenea.

Derivació de vectors :

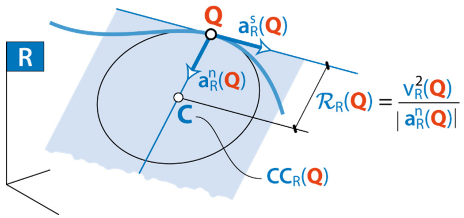
- geomètrica: $\left.\dfrac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt}\right]_R = \begin{bmatrix}\text{canvi de}\\ \text{valor}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{canvi de}\\ \text{direcció}\end{bmatrix}_R = \dot{u}\dfrac{\bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}|} + \bar{\Omega}_R^{\bar{\mathbf{u}}} \times \bar{\mathbf{u}}$
- analítica: $\left\{\left.\dfrac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt}\right]_R\right\}_B = \dfrac{d}{dt}\{\bar{\mathbf{u}}\}_B + \{\bar{\Omega}_R^B\}_B \times \{\bar{\mathbf{u}}\}_B$



Components intrínseques de l'acceleració :

$$a^s \equiv a_R^s(\mathbf{P}) = \dot{v} = \frac{d|\bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{P})|}{dt}$$

$$a^n \equiv a_R^n(\mathbf{P}) = \frac{v^2}{\mathcal{R}} = \frac{|\bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{P})|^2}{\mathcal{R}_R(\mathbf{P})}$$

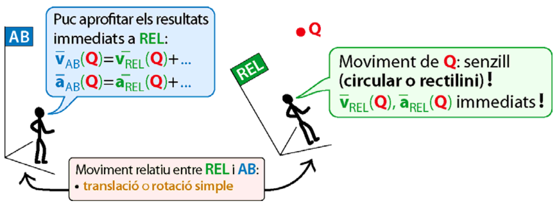


Composició de moviments :

$\bar{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P}) + \bar{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P})$, amb $\bar{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P} \in \mathrm{REL})$

$\bar{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{a}}_{REL}(\mathbf{P}) + \bar{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) + \bar{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P})$,

amb $\begin{cases}\bar{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P} \in \mathrm{REL})\\ \bar{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P}) = 2\bar{\Omega}_{AB}^{REL} \times \bar{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P})\end{cases}$



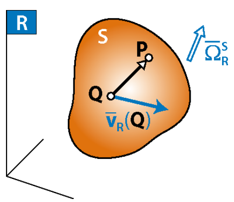
Cinemàtica del sòlid rígid :

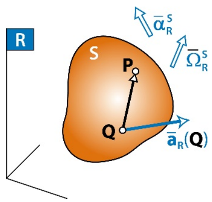
(les següents expressions són vàlides a qualsevol referència, per això s'omet el subíndex R)

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{Q}) + \bar{\Omega}^S \times \overline{\mathbf{QP}}$$

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{Q}) + \bar{\Omega}^S \times \left(\bar{\Omega}^S \times \overline{\mathbf{QP}}\right) + \bar{\alpha}^S \times \overline{\mathbf{QP}} \ ,$$

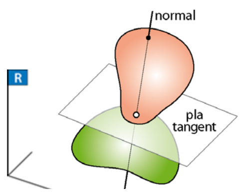
amb $\bar{\alpha}^S = \dfrac{d\bar{\Omega}^S}{dt}$





Condicions bàsiques d'enllaç :

- Contacte puntual amb lliscament: $\bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{J}_1)\big|_{normal} = \bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{J}_2)\big|_{normal}$
- Contacte puntual sense lliscament: $\bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{J}_1) = \bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{J}_2)$



Lleis de Newton :

- 1a llei (llei de la inèrcia): $\bar{\mathbf{a}}_{RGal}(\mathbf{P}_{lliure}) = \bar{\mathbf{0}}$
- 2a llei (llei fonamental): $\sum \bar{\mathbf{F}}_{\to \mathbf{P}} = m_P \bar{\mathbf{a}}_{RGal}(\mathbf{P})$
- 3a llei (principi acció-reacció): $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{Q}\to\mathbf{P}} = -\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{P}\to\mathbf{Q}}$ (atracció o repulsió)

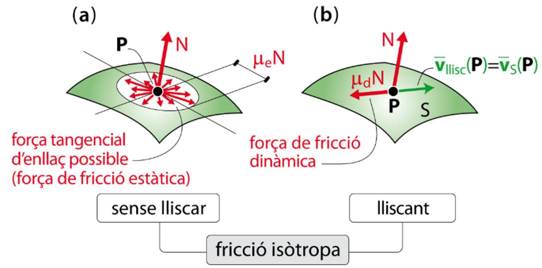
Dinàmica de partícula en referència no galileana :

$$\sum \bar{\mathbf{F}}_{\to \mathbf{P}} + \bar{\mathscr{F}}^{\,ar}_{NGal\to\mathbf{P}} + \bar{\mathscr{F}}^{\,Cor}_{NGal\to\mathbf{P}} = m_P \bar{\mathbf{a}}_{NGal}(\mathbf{P})$$

amb $\bar{\mathscr{F}}^{\,ar}_{NGal\to\mathbf{P}} = -m_P \bar{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P})$, $\bar{\mathscr{F}}^{\,Cor}_{NGal\to\mathbf{P}} = -m_P \bar{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P})$

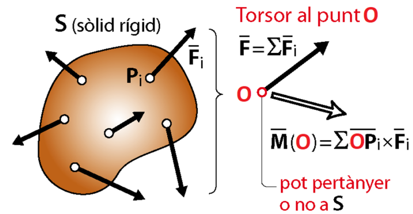
Formulació d'interaccions :

- Atracció gravitatòria: $F_{P\leftrightarrow Q} = G\dfrac{m_P m_Q}{|\overline{\mathbf{PQ}}|^2}$ (atracció)
- Molles lineals: $\begin{cases}F_{molla}^{atracció} = F_0^{at.} + k\Delta\rho \ , \quad F_{molla}^{repulsió} = F_0^{rep.} - k\Delta\rho \ ,\\ \text{amb } \rho \equiv \text{llargària} \ , \ \Delta\rho = \rho - \rho_0 \quad (\dot{\rho} > 0 \text{ quan s'allarga})\end{cases}$
- Amortidors lineals: $F_{amortidor}^{atracció} = +c\dot{\rho}$, $F_{amortidor}^{repulsió} = -c\dot{\rho}$
- Molles torsionals: $M_{molla} = M_0 \pm k_t\Delta\theta$, amb $\theta \equiv$ rotació relativa
- Amortidors torsionals: $M_{amortidor} = \pm c_t\dot{\theta}$
- Frec viscós: $F_{fricció} = c v_{lliscament}$, oposada a $v_{lliscament}$
- Frec sec de Coulomb: $\begin{cases}F_{frec} \text{ (f. tangencial d'enllaç)} \le \mu_e N \ , \quad \text{si no hi ha lliscament}\\ F_{fricció} = \mu_d N \ , \quad \text{oposada a } v_{lliscament}\end{cases}$



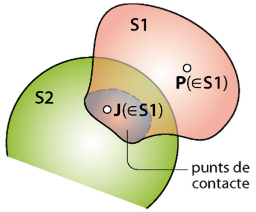
Torsor associat a un sistema de forces sobre un sòlid rígid :

- torsor a **O**: $\bar{\mathbf{F}} = \sum \bar{\mathbf{F}}_i$, $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{O}) = \sum \overline{\mathbf{OP}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i$
- torsor a **Q**: $\begin{cases}\bar{\mathbf{F}} = \sum \bar{\mathbf{F}}_i \ , \ \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{Q}) = \sum \overline{\mathbf{QP}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i\\ \text{o bé, a partir del torsor a } \mathbf{O}\text{:}\\ \bar{\mathbf{F}} = \sum \bar{\mathbf{F}}_i \ , \ \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{Q}) = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{O}) + \overline{\mathbf{OQ}} \times \bar{\mathbf{F}}\end{cases}$



Caracterització del torsor d'enllaç de S2 sobre S1 al punt P de S1:

$\bar{F}_E\cdot\bar{v}_{S2}(P_{S1})+\bar{M}_E(P_{S1})\cdot\bar{\Omega}^{S1}_{S2}=0$



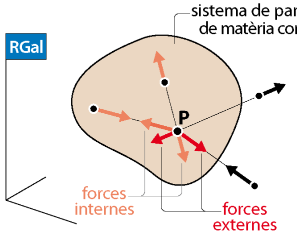
Teoremes vectorials per a sistemes de massa constant:

- Teorema de la Quantitat de Moviment (TQM):

$$\sum_{sist}\bar{F}_{ext}=\dot{\bar{D}}^{sist}_{RGal}=m_{sist}\bar{a}_{RGal}(G_{sist})=\sum_i m_i\bar{a}_{RGal}(G_i)$$

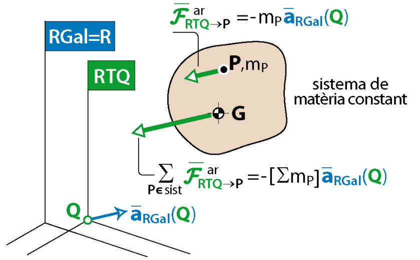
Quantitat de moviment:

- d'una partícula: $\bar{D}^P_R=m_P\bar{v}_R(P)$
- d'un sòlid rígid: $\bar{D}^S_R=m_S\bar{v}_R(G)$
- d'un sistema de sòlids rígids: $\bar{D}^{sist}_R=\sum_i\bar{D}^i_R=m_{sist}\bar{v}_R(G_{sist})$



- Teorema del Moment Cinètic (TMC):

$$\sum_{sist}\bar{M}_{ext}(Q)-\overline{QG}_{sist}\times m_{sist}\bar{a}_{RGal}(Q)=\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$$

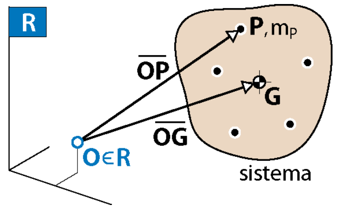


Moment cinètic:

- d'una partícula: $\bar{H}^P_{RTQ}(Q)=\overline{QP}\times m_P\bar{v}_{RTQ}(P)$
- d'un sòlid rígid S:
  - Si $Q\in$ sòlid S: $\bar{H}^S_{RTQ}(Q)=\mathrm{II}(Q)\bar{\Omega}^S_{RTQ}=\mathrm{II}(Q)\bar{\Omega}^S_{RGal}$
  - Si $Q\notin$ sòlid S: $\bar{H}^S_{RTQ}(Q)=\bar{H}^S_{RTG}(G)+\bar{H}^{\oplus}_{RTQ}(Q)=$
    $=\bar{H}^S_{RTG}(G)+\overline{QG}\times m\bar{v}_{RTQ}(G)$
- d'un sistema de sòlids rígids: $\bar{H}^{sist}_{RTQ}(Q)=\sum_i\bar{H}^i_{RTQ}(Q)$

Centre d'inèrcia:

- d'un sistema de partícules: $\overline{OG}=\sum_{P_i}m_{P_i}\overline{OP_i}\Big/\sum_{P_i}m_{P_i}$
- d'un sòlid rígid S: $\overline{OG}_S=\dfrac{1}{m_S}\int_S\overline{OP}\,dm(P)$
- d'un sistema de sòlids rígids: $\overline{OG}=\sum_i m_i\overline{OG}_i\Big/\sum_i m_i$

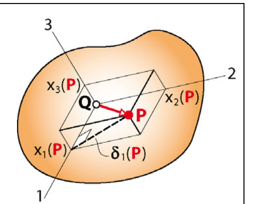


Tensor d'inèrcia $\mathrm{II}(Q)$:

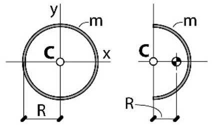
- moments i productes d'inèrcia:

$$I_{ii}(Q)=\int_S(x_j^2+x_k^2)dm=\int_S\delta_i^2dm\ ,\quad I_{ij}(Q)=-\int_S x_ix_j\,dm$$

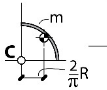
- canvi de base: $[\mathrm{II}(Q)]_{B'}=[\bar{e}'_1\ \ \bar{e}'_2\ \ \bar{e}'_3]_B^{-1}[\mathrm{II}(Q)]_B[\bar{e}'_1\ \ \bar{e}'_2\ \ \bar{e}'_3]_B$
- moment d'inèrcia en la direcció $\bar{v}$: $I_{vv}(Q)=\{\bar{v}\}^T[\mathrm{II}(Q)]\{\bar{v}\}$, on $\bar{v}\equiv$ versor
- teorema de Steiner: $\mathrm{II}(Q)=\mathrm{II}(G)+\mathrm{II}^{\oplus}(Q)$, on $\mathrm{II}^{\oplus}(Q)\equiv\mathrm{II}(Q)$, massa concentrada a **G**



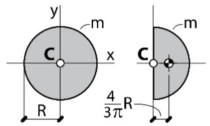
Taules de centres d'inèrcia, i moments i productes d'inèrcia de sòlids homogenis:



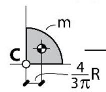
$\mathrm{II}(C)$: $I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mR^2$



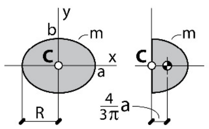
$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mR^2$, $I_{xy}=\frac{-1}{\pi}mR^2$



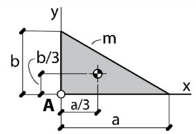
$\mathrm{II}(C)$: $I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{4}mR^2$



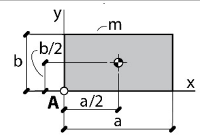
$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{4}mR^2$, $I_{xy}=\frac{-1}{2\pi}mR^2$



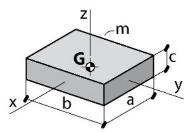
$\mathrm{II}(C)$: $I_{xx}=\frac{1}{4}mb^2$, $I_{yy}=\frac{1}{4}ma^2$



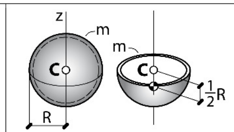
$\mathrm{II}(A)$: $I_{xx}=\frac{1}{6}mb^2$, $I_{xy}=\frac{-1}{12}mab$



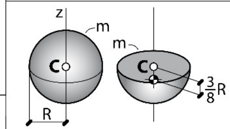
$\mathrm{II}(A)$: $I_{xx}=\frac{1}{3}mb^2$, $I_{xy}=\frac{-1}{4}mab$



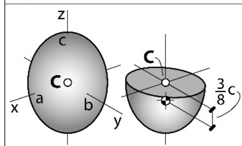
$\mathrm{II}(G)$: $I_{xx}=\frac{1}{12}m(b^2+c^2)$



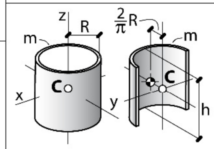
$\mathrm{II}(C)$: $I_{zz}=\frac{2}{3}mR^2$, rotor esfèric a C



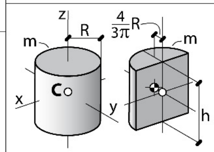
$\mathrm{II}(C)$: $I_{zz}=\frac{2}{5}mR^2$, rotor esfèric a C



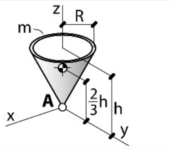
$\mathrm{II}(C)$: $I_{xx}=\frac{1}{5}m(b^2+c^2)$, $I_{yy}=\frac{1}{5}m(a^2+c^2)$, $I_{zz}=\frac{1}{5}m(a^2+b^2)$



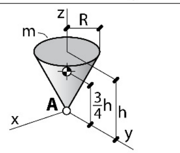
$\mathrm{II}(C)$: $I_{xx}=m(\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{12}h^2)$, $I_{zz}=mR^2$, rotor simètric a C



$\mathrm{II}(C)$: $I_{xx}=m(\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{12}h^2)$, $I_{zz}=\frac{1}{2}mR^2$, rotor simètric a C



$\mathrm{II}(A)$: $I_{xx}=m(\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{2}h^2)$, $I_{zz}=\frac{1}{2}mR^2$, rotor simètric a A



$\mathrm{II}(A)$: $I_{xx}=m(\frac{3}{20}R^2+\frac{3}{5}h^2)$, $I_{zz}=\frac{3}{10}mR^2$, rotor simètric a A