1P

Versió 1.1

Definició de coordenades
lineals i angulars

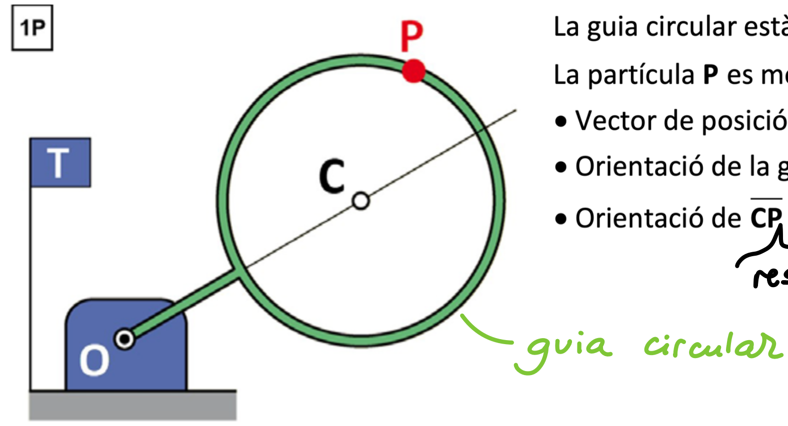
Rotacions simples

Diagrama de moviments relatius (DMR)

Graus de llibertat (GL)

Lluís Ros
https://lluisros.github.io/mecanica

Anella giratòria (2D)



La guia circular està articulada al terra (T).

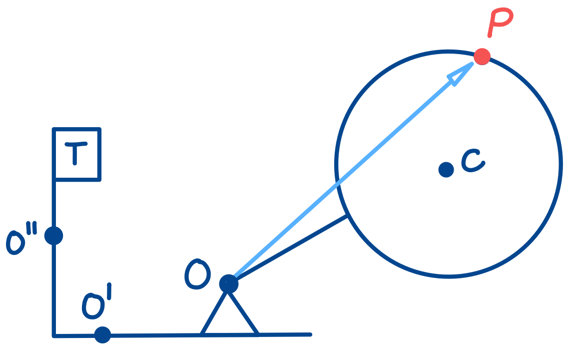
La partícula **P** es mou dins la guia.

- Vector de posició de **P** respecte de T i de la guia?
- Orientació de la guia respecte de T?
- Orientació de $\overline{\mathbf{CP}}$ de la guia i de T?

  respecte

Cal pensar P com una caliva petita movent-se dins la guia.

Vec. pos. de P resp. T



Cal triar un origen O per al vector, que sigui un punt fix a T

El més natural és O.

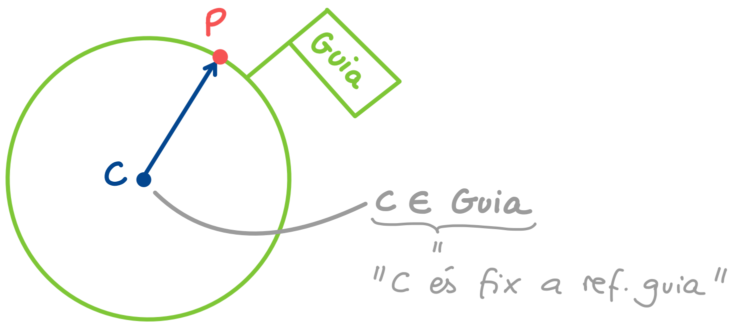
Triant O, el vec. pos. demanat és $\overline{OP}$.

Vec. pos. de P resp. guia

Ens cal un punt fix a la guia com a origen.

El més natural és C (centre de la guia).(*)

Triant C, el vec. pos. demanat és $\overline{CP}$



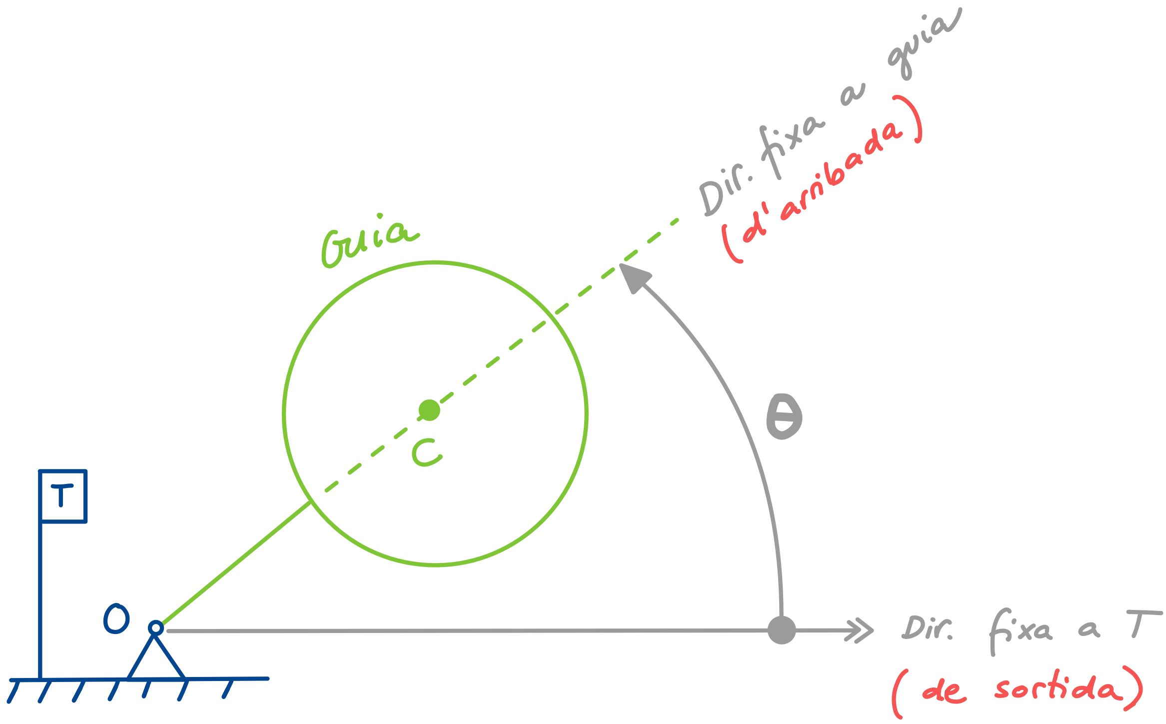
(*) Podríem triar O també, però $\overline{OP}$ canvia de valor i dir., mentre que $\overline{CP}$ sols canvia de dir.

Orientació de la guia respecte de T

La guia té un moviment de rotació simple respecte de T, al voltant d'un eix que passa per O i és perpendicular al pla del dibuix.

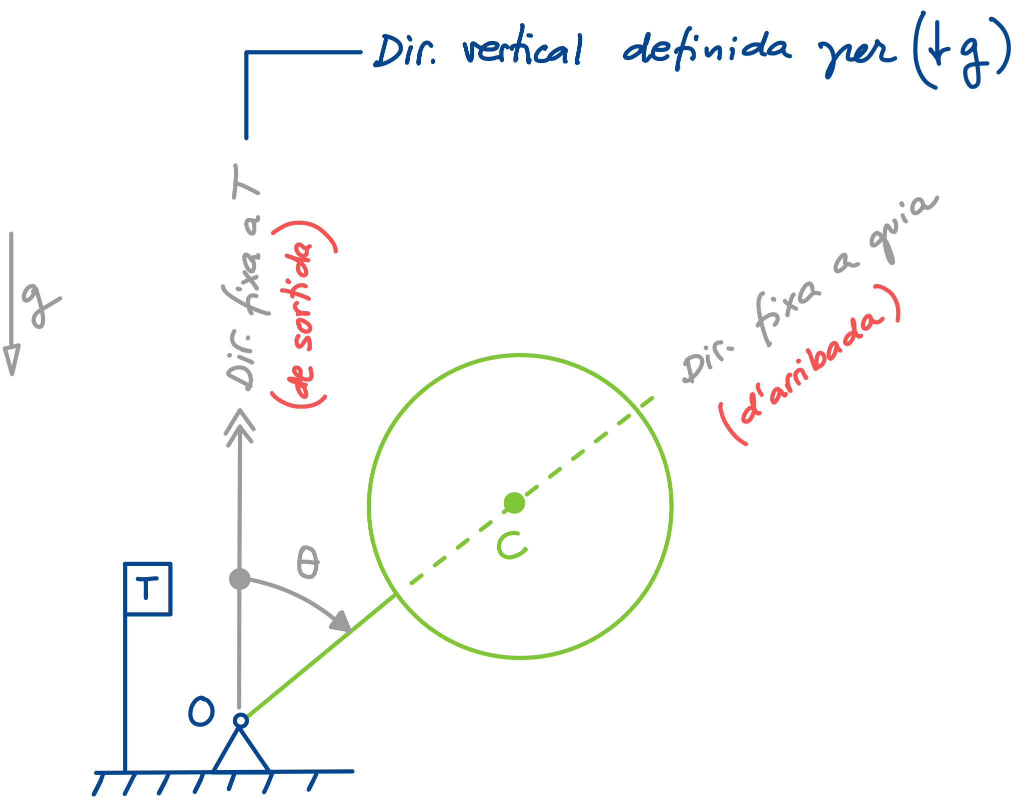
En una rotació simple, l'orientació del sòlid respecte d'una referència (en aquest cas la guia respecte T) ve donada per l'angle entre una direcció fixa a la referència (dir. de sortida) i una altra fixa al sòlid (dir. d'arribada).

Triant les direccions següents, l'orient. de la guia resp. T queda descrita per θ:



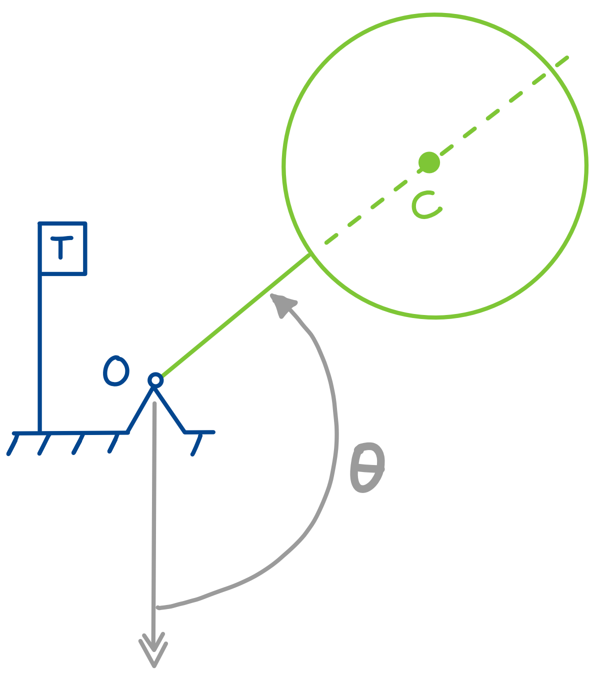
__Altres opcions:__

L'elecció de les direccions "fixa a la referència" i "fixa al sòlid" és arbitrària. Sempre hi ha múltiples opcions. Per exemple hauríem pogut triar



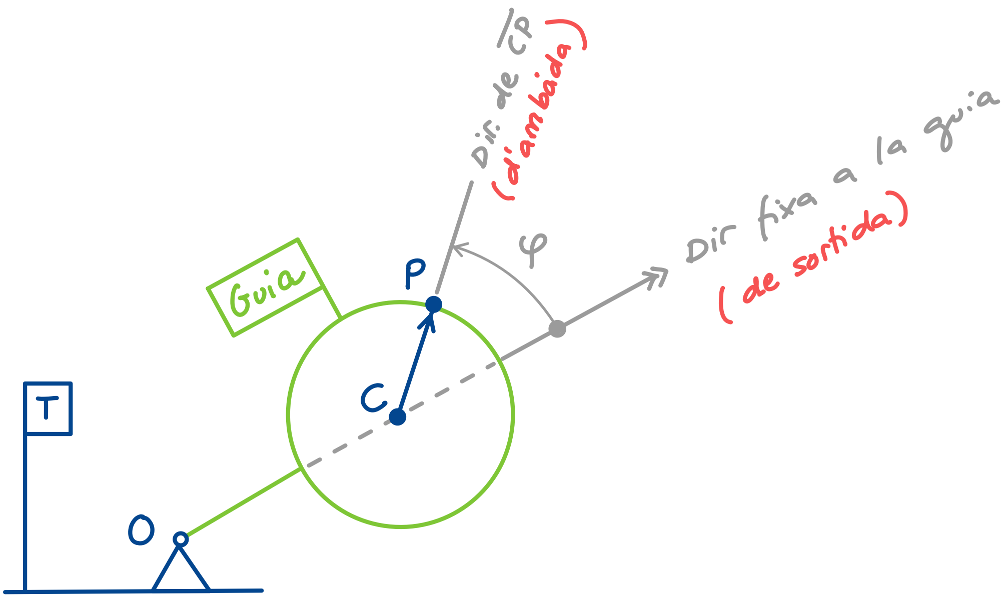
resultant-ne un angle θ diferent (tant en valor com en orientació perquè ara ha quedat definit en sentit horari).

També hauríem pogut definir θ així ...



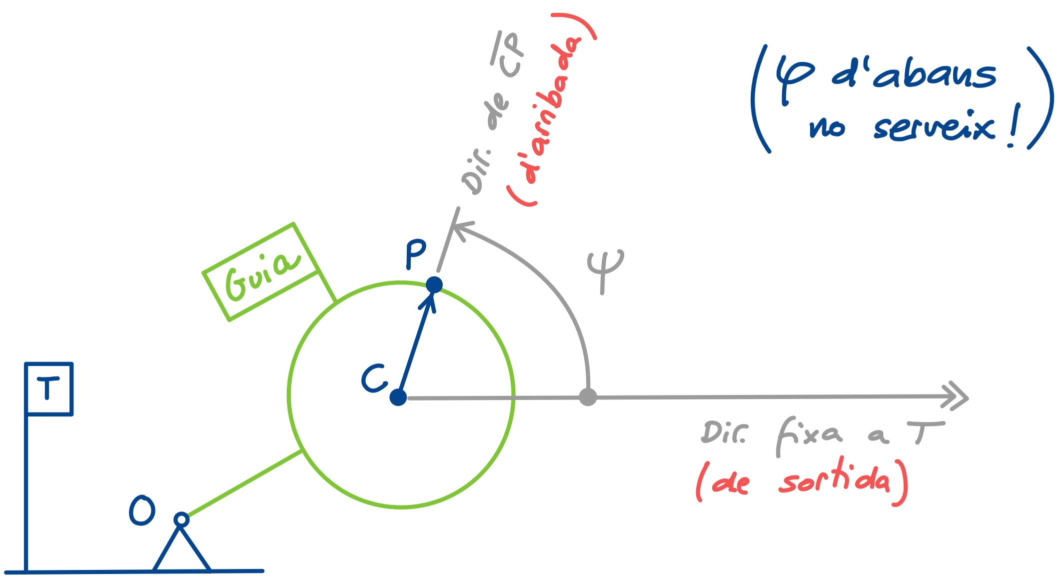
... però sempre va millor treballar amb angles aguts i no obtusos, ja que, així, els seus sinus i cosinus són positius, i això facilita les projeccions dels vectors de posició sobre una base (veure + endavant)

Orient. de $\overline{CP}$ resp. la guia



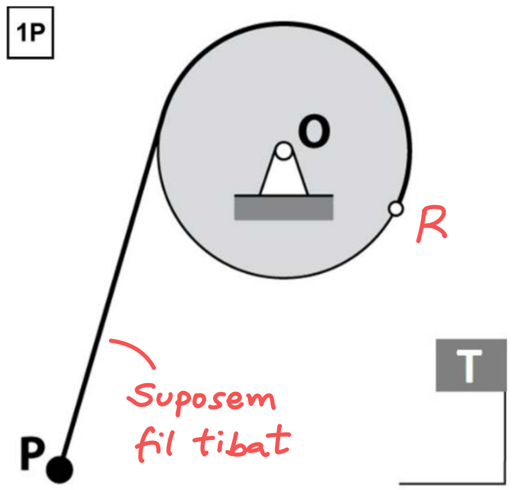
Amb la tria indicada, l'orient. de $\overline{CP}$ resp. de la guia ve donada per φ

Orient. de $\overline{CP}$ resp. T



Amb la tria indicada, l'orient. de $\overline{CP}$ resp. de T ve donada per ψ.

Fil sobre politja



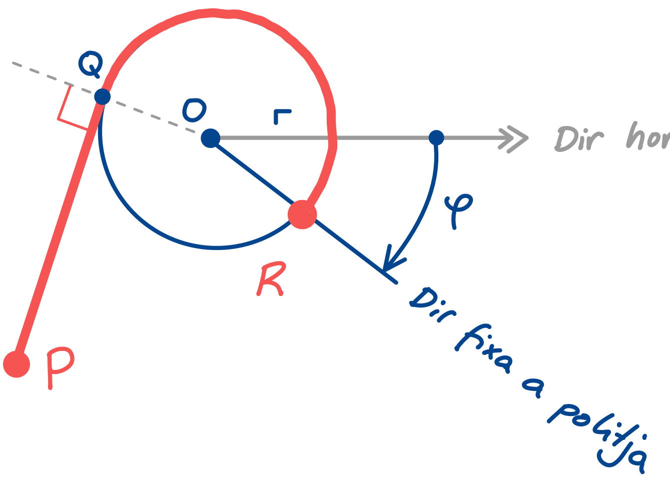
La politja està articulada al terra (T).

El fil inextensible recolza al damunt de la politja.

- Orientació de la politja respecte de T?
- Orientació del fil respecte de T?
- Vector de posició de **P** respecte de T?
- Orientació del fil respecte de la politja?
- Vector de posició de **P** respecte de la politja?
- Longitud lliure del fil, en una configuració general, en funció de la longitud en repòs i dels angles?

Orient. de la politja resp. T

R= ancoratge fil - politja



Amb les dir. triades:

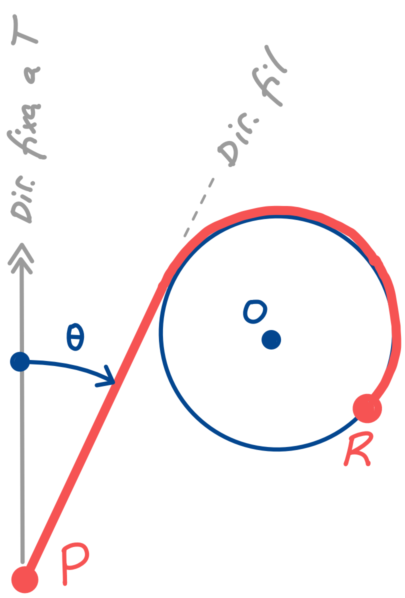
L'orient. de la politja resp. T ve donada per φ

⚠ Compte: la dir. OQ és fixa al fil(*) però no a la politja!

Orient. del fil resp. T

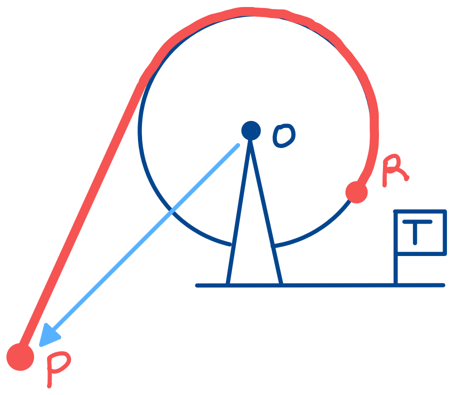
Amb les dir. triades al dibuix:

L'orientació del fil resp. T ve donada per θ



(*) $\overline{OQ}$ sempre es manté ⊥ al fil.

Vector de posició de P resp. T

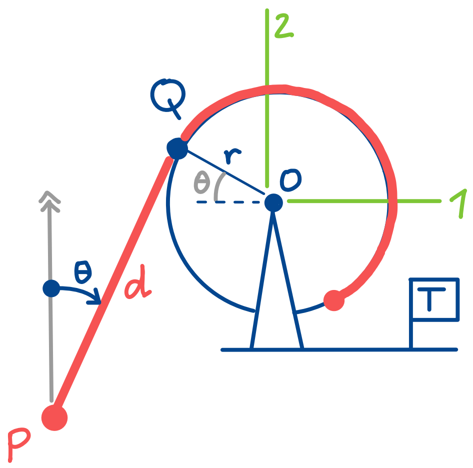


Com a origen del vector cal triar un punt fix a T. Triem O.

R no podria ser ($R \notin T$)

Triem $\overline{OP}$ com a vec. pos. de P resp. T

<u>Extra (*)</u> : Si volem, podem expressar $\overline{OP}$ en funció de φ, θ i la longitud lliure del fil ($d = |\overline{QP}|$), utilitzant una base vectorial; p. ex. la base



$B = (1, 2, 3)$

- 1: Dir. horitz. de T
- 2: Dir. vertical de T

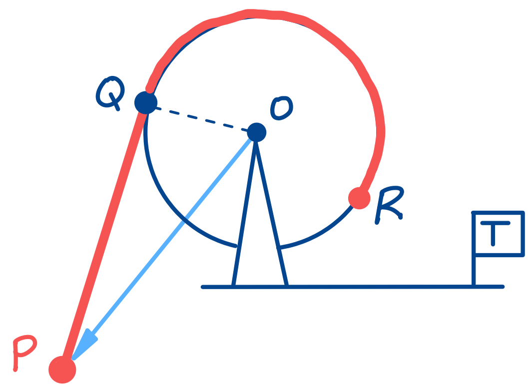
$$\{\overline{OP}\}_B = \{\overline{OQ}\}_B + \{\overline{QP}\}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} -r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\overline{OQ}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -d\sin\theta \\ -d\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\overline{QP}}$$

Més avall veurem que d es pot expressar en funció de φ, θ, i L (la longitud "en repòs" del fil).

(*) Salteu-vos-ho per ara (cal saber bases vectorials ⇒ setmana vinent)

Vector de posició de P resp. politja

Com origen del vector podem triar O novament ja que O també és fix a la politja.



Amb aquesta tria, el vector demanat és $\overline{OP}$.

Alternatives

També podríem triar R com origen, però és menys natural. La tria de O permet fer la descomposició

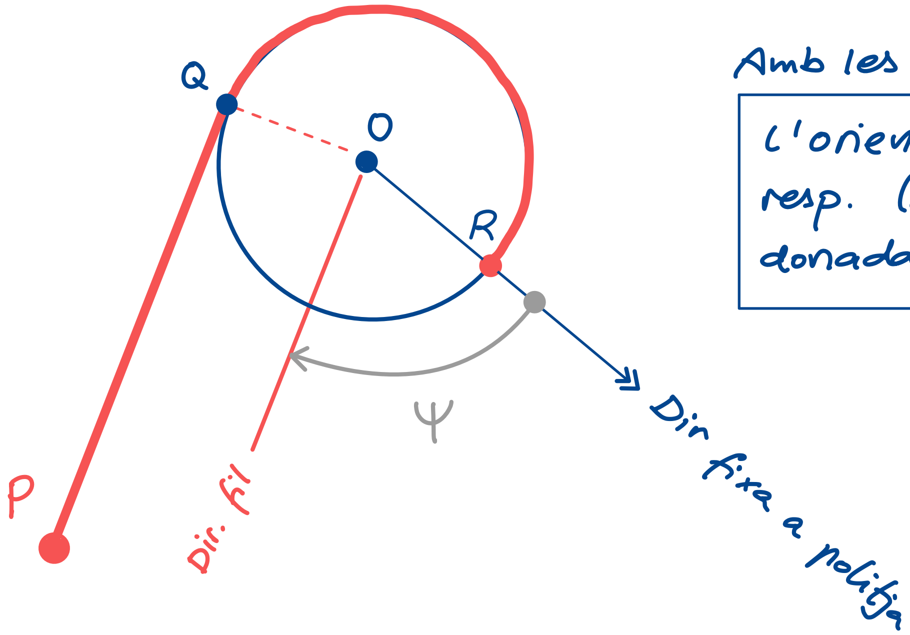
$$\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP}$$

que facilita expressar $\overline{OP}$ en funció de φ i θ si cal, mitjançant alguna base vectorial (*)

Q no serviria com a origen perquè és el punt geomètric de contacte fil-politja, que no és fix a la politja.

(*) Començarem a treballar amb bases vectorials a 2P.

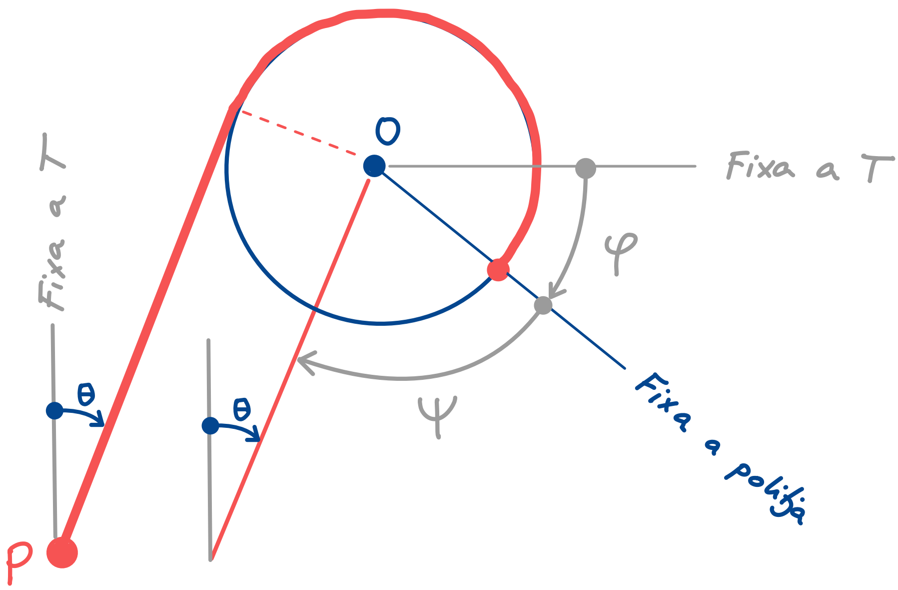
Orientació del fil resp. la politja



Amb les dir. triades:

> L'orient. del fil resp. la politja ve donada per ψ.

Obs: ψ es pot escriure en funció dels angles φ i θ definits abans:



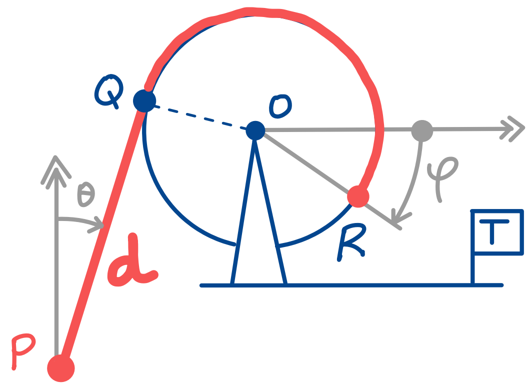
Clarament:

$$\varphi + \psi - \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\psi = \theta - \varphi + \frac{\pi}{2}}$$

Longitud lliure del fil

És $d = |\overline{QP}|$.

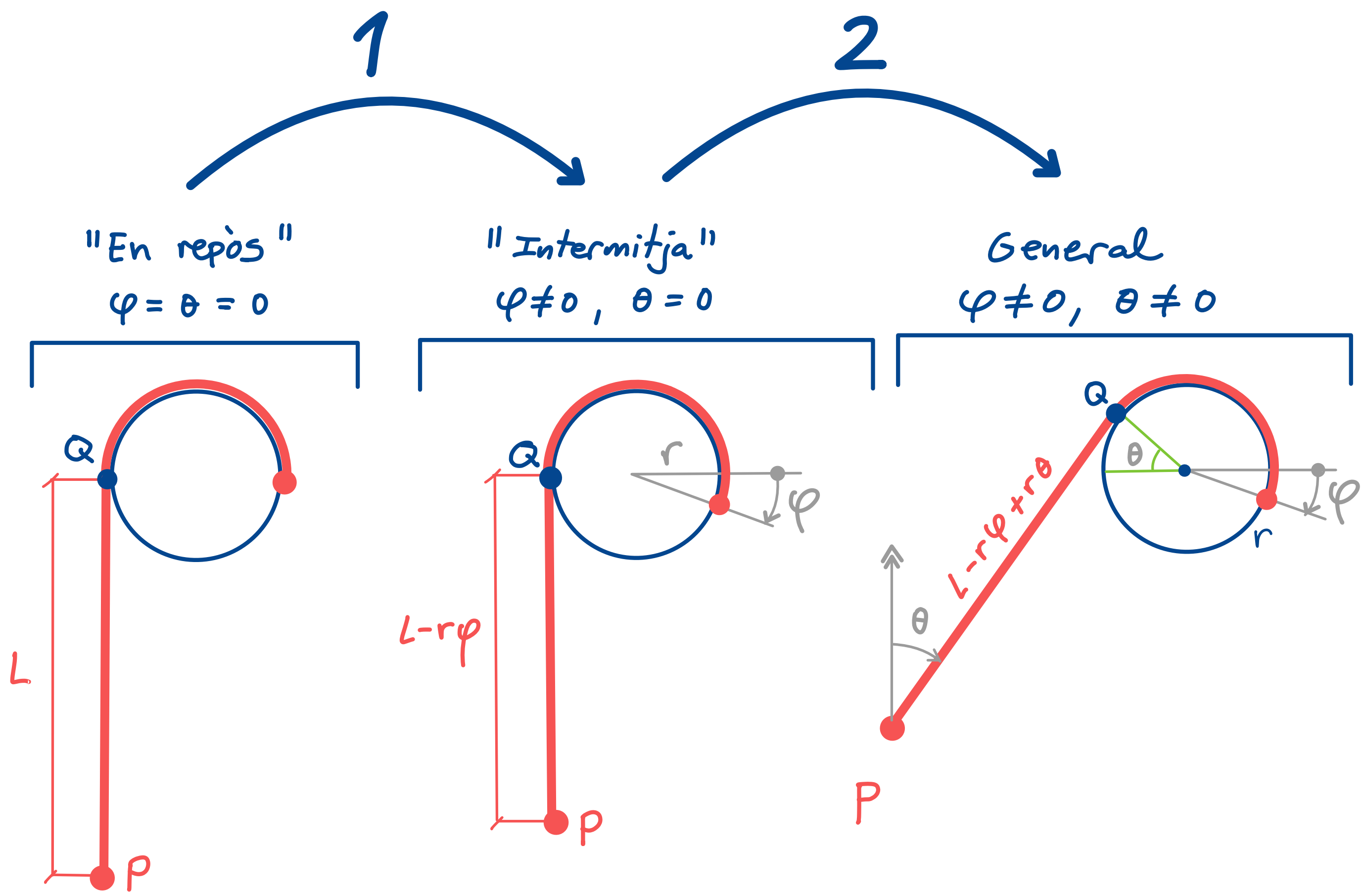
La volem per a una configuració general (per valors genèrics de φ i θ).



Definim la longitud "en repòs" com:

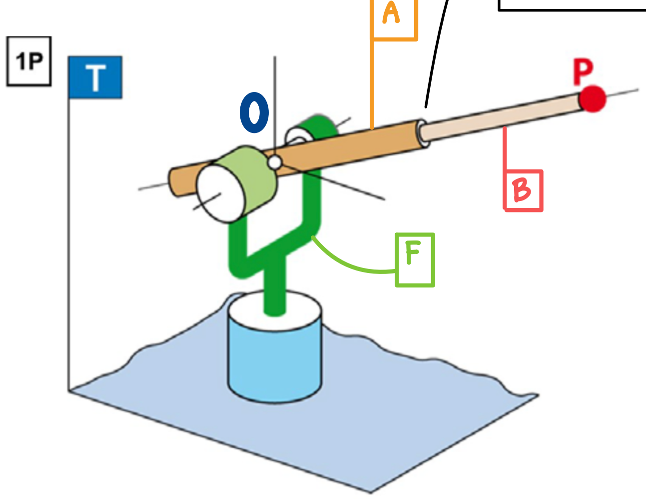
$$L = \left.|\overline{QP}|\right]_{\varphi=\theta=0}$$

Podem passar de la config. "en repòs" ($\varphi=\theta=0$) a una de general (φ, θ genèrics) en 2 passos:

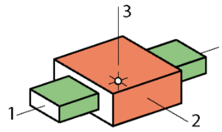


Per tant: $\boxed{d = L - r\varphi + r\theta}$

Antena telescòpica



Suposarem que és un enllaç prismàtic

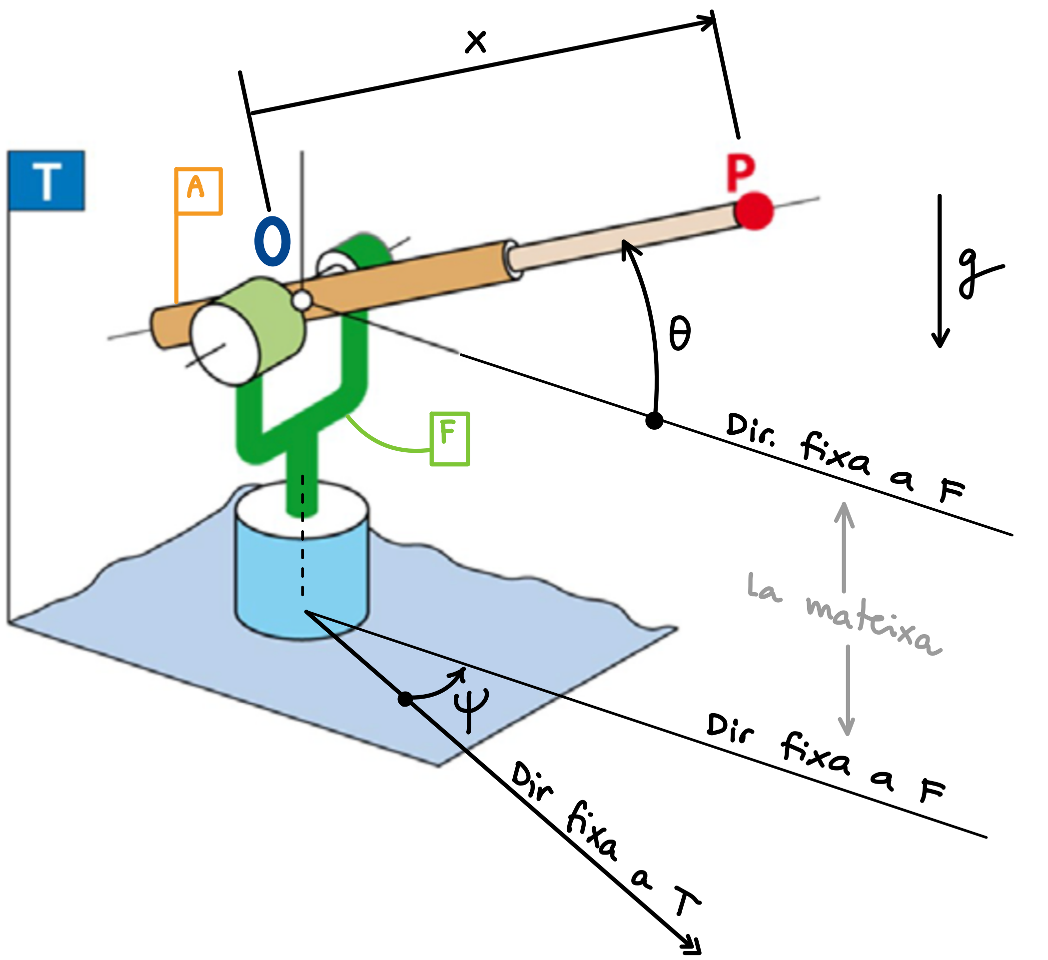


La forquilla (F) gira respecte del terra (T). L'antena telescòpica està articulada a la forquilla.

- Vector de posició de **P** respecte de la primera part de l'antena (A), de F i de T?
- Diagrama de Moviments Relatius?
- Graus de Llibertat?
- Orientació de l'antena respecte de F, T?
- Orientació de la forquilla respecte de T?

El sistema està format pel terra (T) i 3 sòlids (F, A, B) amb moviments relatius entre ells (els permesos pels enllaços). Podem descriure aquests moviments mitjançant les següents coordenades ψ, θ, x :

S'anomenen coordenades generalitzades



ψ = angle entre una dir. horitzontal (*) fixa a T i la perpendicular al pla de la forquilla F.

Orienta F resp. T

θ = angle entre la dir. perpendicular al pla de F i la dir. de l'antena A.

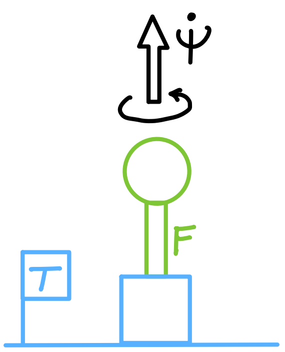
Orienta A resp. F

x = distància entre O i P

Posiciona la 2ª part de l'antena resp. la 1ª.

Aquestes coordenades ens permeten descriure els moviments relatius entre parelles de sòlids. Ho farem amb dibuixos 2D perquè són més clars:

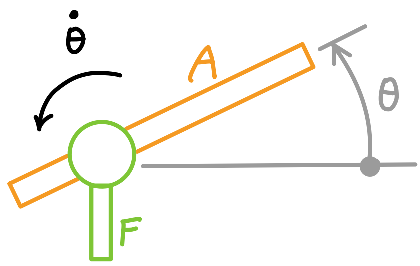
F resp T



La forq. F gira resp. T amb vel. angular

$$\bar{\Omega}^F_T = (\Uparrow \dot{\psi})$$

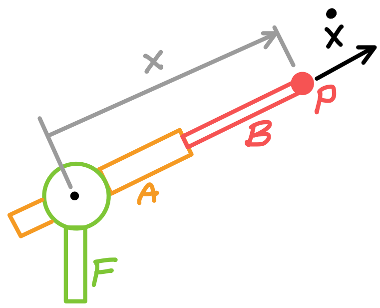
A resp. F



El tram A d'antena gira resp. F amb vel. angular

$$\bar{\Omega}^A_F = (\odot \dot{\theta})$$

B resp. A



El tram B es trasllada resp. de A amb velocitat

$$\bar{v}_A(P) = (\nearrow \dot{x})$$

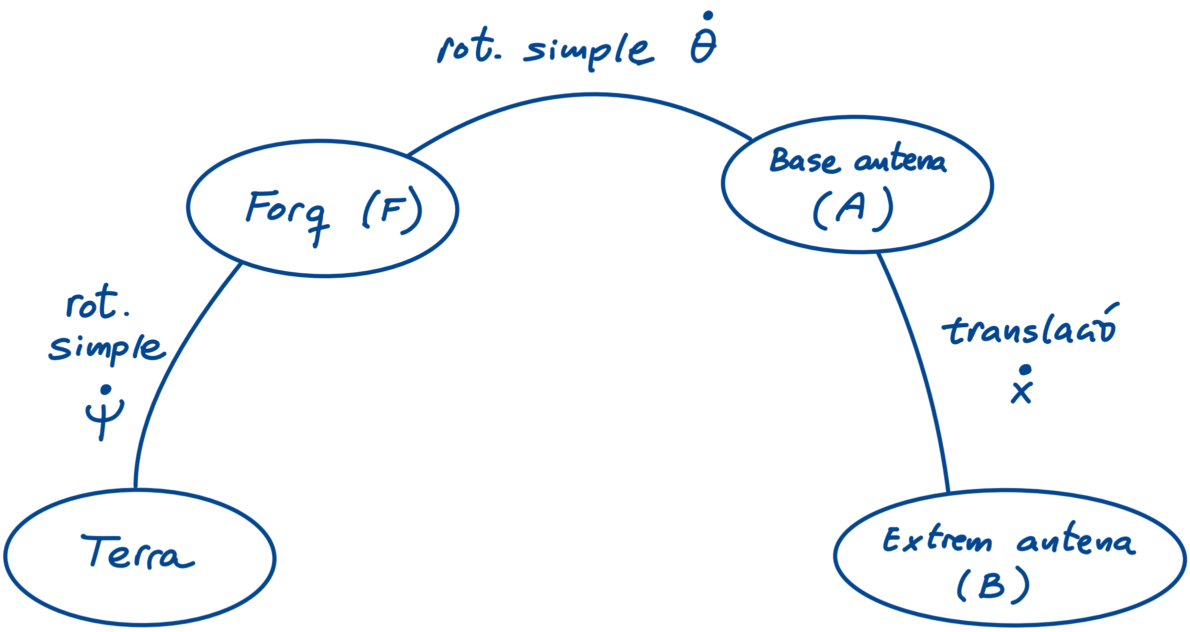
Es llegeix així: "vel. angular d'F resp. de T"

(*) Una dir. horitzontal és qualsevol direcció perpendicular al vector gravetat ($\bar{g}$).

Quan diem "moviment relatiu" volem dir "velocitat relativa" (d'un sòlid o referència, respecte d'un altre sòlid o referència). És a dir, els vectors $(\Uparrow \dot{\psi})$, $(\odot\, \dot{\theta})$ i $(\nearrow \dot{x})$ abans indicats.

Diagrama de moviments relatius (DMR)

És una representació gràfica dels sòlids del sistema i dels moviments relatius permesos per cadascun dels seus enllaços. Per al sistema d'aquest exercici seria:



Graus de llibertat del sistema

El conjunt <u>mínim</u> de variables escalars de velocitat que calen per descriure el <u>moviment</u> del sistema (les velocitats de tots els seus punts) constitueix el conjunt de <u>graus de llibertat</u> (GL) del sistema.

En aquest exercici, el sistema té 3 GL ja que el seu moviment queda descrit per

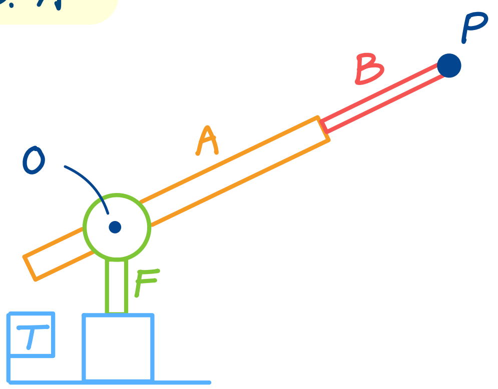
$$\underbrace{\dot{\psi},\ \dot{\theta},\ \dot{x}}_{3\ GL}$$

Una manera eficaç de comptar GL és anar bloquejant moviments relatius, un rere l'altre, fins que el sistema quedi <u>aturat</u> resp. T. El nombre de moviments relatius que hagi calgut bloquejar coincideix amb el nombre de GL del sistema.

A l'exemple cal bloquejar $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{x} \Rightarrow$ El sist. té <u>3 GL</u>.

Vec. pos. de P resp. A, F, T

Resp. A



Cal un punt fix a A com a origen $\Rightarrow$ triem el punt O (intersecció dels eixos vertical i horitz. de la forquilla)

$\Downarrow$

El vector serà $\overline{OP}$

Resp. F

El punt O també és fix a F $\Rightarrow$ serveix com a origen del vec. pos. de P resp. F $\Rightarrow$ $\overline{OP}$ és un vec. pos. de P resp. F <u>adient</u>!

Resp. T

Novament, $\overline{OP}$ serveix com a vec. pos. de P resp. T perquè O també és fix a T.

Orient. de A resp. F

Ve donada per θ] A només té una <u>rotació simple</u> resp. F

Orient. de A resp. T

Ve donada per ψ i θ.] A té una <u>rotació de 2GL</u> resp. T

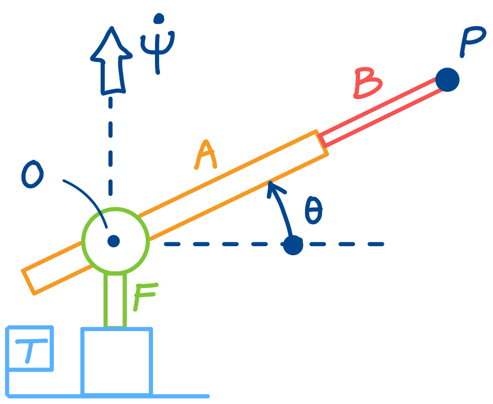
Orient. de F resp. T

Ve donada per ψ] F té una <u>rotació simple</u> resp. T

Això no ho demanen però ho fem per escalfar motors:

Velocitats angulars $\overline{\Omega}^F_T$, $\overline{\Omega}^A_F$, $\overline{\Omega}^A_T$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Omega}^F_T &= (\Uparrow \dot{\psi}) \\ \overline{\Omega}^A_T &= (\odot\, \dot{\theta}) \end{aligned}\right\} \text{Les tenim d'abans}$$



$$\overline{\Omega}^A_T \overset{(*)}{=} \overline{\Omega}^A_F + \overline{\Omega}^F_T = $$

$$= (\Uparrow \dot{\psi}) + (\odot\, \dot{\theta})$$

(*) sempre es pot fer:

$$\overline{\Omega}^{\text{sòlid 1}}_{\text{Ref}} = \overline{\Omega}^{\text{sòlid 1}}_{\text{sòlid 2}} + \overline{\Omega}^{\text{sòlid 2}}_{\text{ref}}$$

D'aquest càlcul en diem "fer composició de velocitats angulars"

Composició de velocitats angulars (en general)

Per a calcular la velocitat angular d'un sòlid S respecte d'una ref. R,

$$\bar{\Omega}^{S}_{R}$$

sempre podem aplicar una composició de velocitats angulars utilitzant el nombre de "sòlids intermedis" que vulguem:

El subíndex d'un terme ($\bar{\Omega}^{S}_{S_1}$) ha de ser igual al superíndex del terme següent ($\bar{\Omega}^{S_1}_{S_2}$)

$$\bar{\Omega}^{S}_{R} = \underbrace{\bar{\Omega}^{S}_{S_1} + \bar{\Omega}^{S_1}_{S_2}} + \Omega^{S_2}_{S_3} + \ldots + \bar{\Omega}^{S_n}_{R}$$

Demostració: No la farem, perquè és feixuga i, d'altra banda, aquest resultat és força intuïtiu.