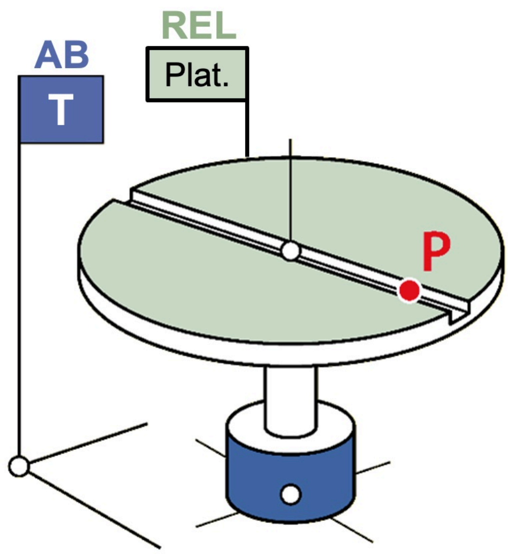
4P

Composició de moviments

Relació entre vel. i accel. en 2 refs.



$$\overline{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P}) + \overline{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P})$$

$$\text{amb} \quad \overline{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P} \in \mathrm{REL})$$

$$\overline{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{a}}_{REL}(\mathbf{P}) + \overline{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) + \overline{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P})$$

$$\text{amb} \quad \begin{cases} \overline{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P} \in \mathrm{REL}) \\ \overline{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P}) = 2\overline{\Omega}_{AB}^{REL} \times \overline{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P}) \end{cases}$$

Recordeu:

Sempre cal declarar les referències.

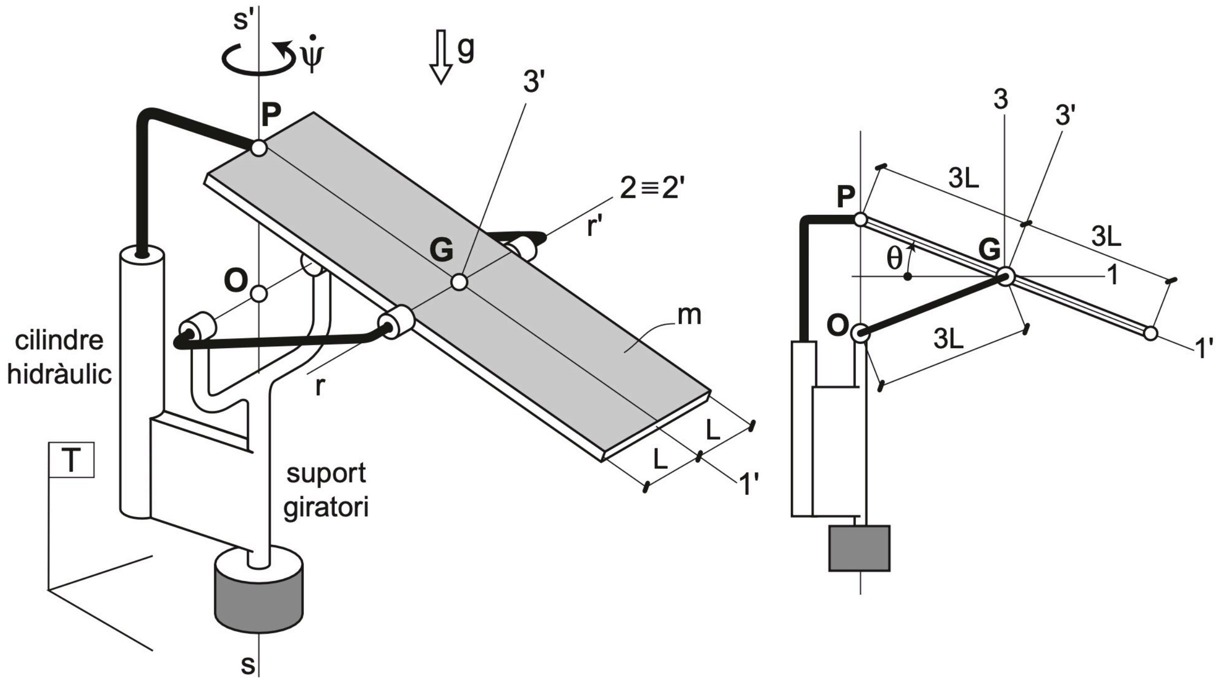
Quan feu composició de moviments, cal declarar què feu servir com a referències absoluta i relativa (AB i REL)

Si expresseu els resultats en alguna base, indiqueu a què són fixes les direccions d’aquesta base.

Problema 1, gener 2007 (variació del C3-E.2 de la Wikimec)

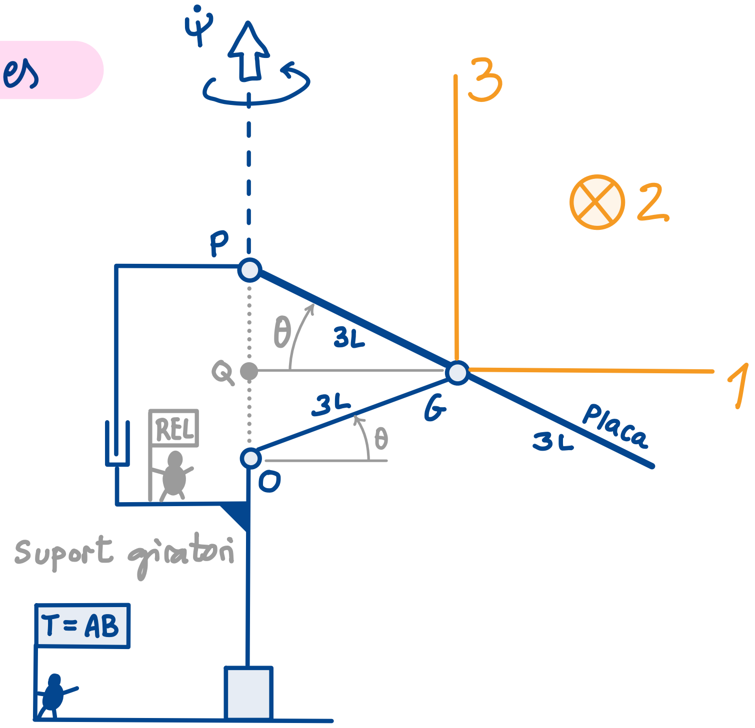
Placa articulada giratòria

La placa rectangular està unida a un suport giratori a través de dues barres amb articulacions als extrems. Una tercera barra està unida a la placa a través d'una **ròtula esfèrica** (a $\mathbf{P}$) i al suport a través d'un **enllaç cilíndric**. El suport gira amb velocitat angular $\overline{\dot{\psi}}$ de valor variable respecte del terra (T).



Determineu les components, en la base d'eixos (1,2,3), de l'acceleració del centre d'inèrcia **G** de la placa respecte al terra <u>per composició de moviments</u>, prenent com a ref. REL. la solidària al suport giratori **[3 p]**

Pistes



→ velocitats
→ accel.

Dir. QG   Dir vertical

$\underbrace{B = (1, 2, 3)}_{\text{fixa al suport giratori}}$

$\bar v_T(G)$ via comp. vel.

REL = suport giratori
AB = T

Dibuixo vecs. vermells a la fig. i els projecto

$$\bar v_{AB}(G) = \underbrace{(\uparrow\ \ )}_{\bar v_{REL}(G)} + \underbrace{(\otimes\ \ )}_{\bar v_{ar}(G)\ \text{(la que té G si G ∈ REL)}} = \left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}_B$$

No es demana, però ho fem x practicar

És un vec. "pel·lícula" perquè l'hem obtingut per a una configuració genèrica del mecanisme. Si volem, el podem derivar respecte t per obtenir $\bar a_{AB}(G)$ però, aquí buscarem $\bar a_{AB}(G)$ per composició d'acceleracions

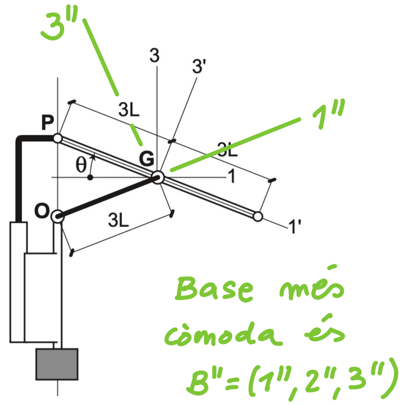
$\bar a_T(G)$ via comp. accel.

$$\bar a_{AB}(G) = \underbrace{(\ \ ) + (\ \ )}_{\bar a_{REL}(G)} + \underbrace{(\otimes\ \ ) + (\leftarrow\ \ )}_{\bar a_{ar}(G)} +$$

$$\underbrace{+\ 2\overbrace{(\ \ )}^{\bar\Omega_T^{REL}} \times \overbrace{(\ \ )}^{\bar v_{REL}(G)}}_{\bar a_{cor}(G) =} = \left\{\begin{matrix} -3L\ddot\theta\sin\theta - 3L\dot\theta^2\cos\theta - 3L\dot\psi^2\cos\theta \\ 3L\ddot\psi\cos\theta - 6L\dot\theta\dot\psi\sin\theta \\ 3L\ddot\theta\cos\theta - 3L\dot\theta^2\sin\theta \end{matrix}\right\}_B \quad (A)$$

Dibuixo vecs blaus a la figura i els projecto

Nota: La base + còmoda per expressar els resultats, de fet, és la solidària a les barres laterals, xq només requereix descompondre $\leftarrow \dot{\psi}^2 3L\cos\theta$. Deures: projecten $\bar{v}_{AB}(G)$ i $\bar{a}_{AB}(G)$ en aq. base



Base més còmoda és $B''=(1'',2'',3'')$

Sol. alternativa, derivant un vec. pos. (No la farem)

També és una bona opció!

$$\overline{OG} = \begin{Bmatrix} 3L\cos\theta \\ 0 \\ 3L\sin\theta \end{Bmatrix}_B = 3L \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{Bmatrix}_B \leftarrow$$

com que és un vec. de posició totalment genèric, és un vector "pel·lícula" i el podem derivar!

Derivem dues vegades en base B, que gira amb $\bar{\Omega}^B_T = (\Uparrow\dot{\psi})$

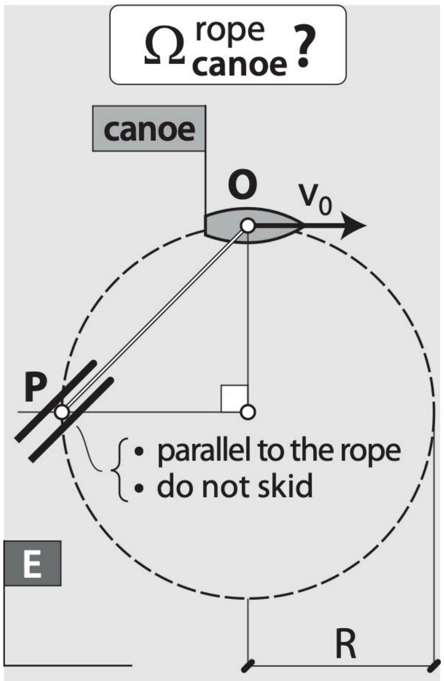
$$\bar{v}_T(G) = \left.\frac{d\overline{OG}}{dt}\right]_T = 3L\left[\begin{Bmatrix} \dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\overbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}}^{\{\bar{\Omega}^B_T\}_B} \times \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}\right] = 3L\begin{Bmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix}_B$$

$$\bar{a}_T(G) = 3L\left[\begin{Bmatrix} -\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -\dot{\psi}^2\cos\theta \\ -\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}\right] =$$

$$= 3L\begin{Bmatrix} -\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta - \dot{\psi}^2\cos\theta \\ \ddot{\psi}\cos\theta - 2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta \end{Bmatrix}_B \quad (B)$$

(B) = (A)
Com esperàvem!

Canoa i esquiador (qüestió 2.42 RBK, pàg. 96)



2.42 Point **O** of the canoe has a uniform circular motion relative to the ground (E). The canoe drags a skier **P** (modeled as a particle) through a taut rope. What is the rope angular velocity relative to the canoe $\left(\Omega^{\text{rope}}_{\text{canoe}}\right)$ at this particular configuration?

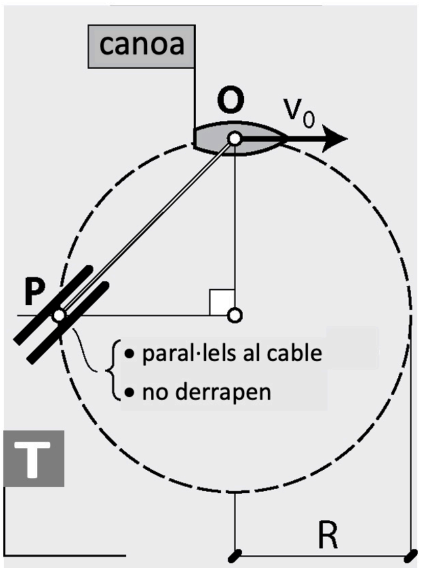
A 0

B $v_0/(\sqrt{2}R)$, clockwise direction

C $v_0/(\sqrt{2}R)$, counterclockwise direction

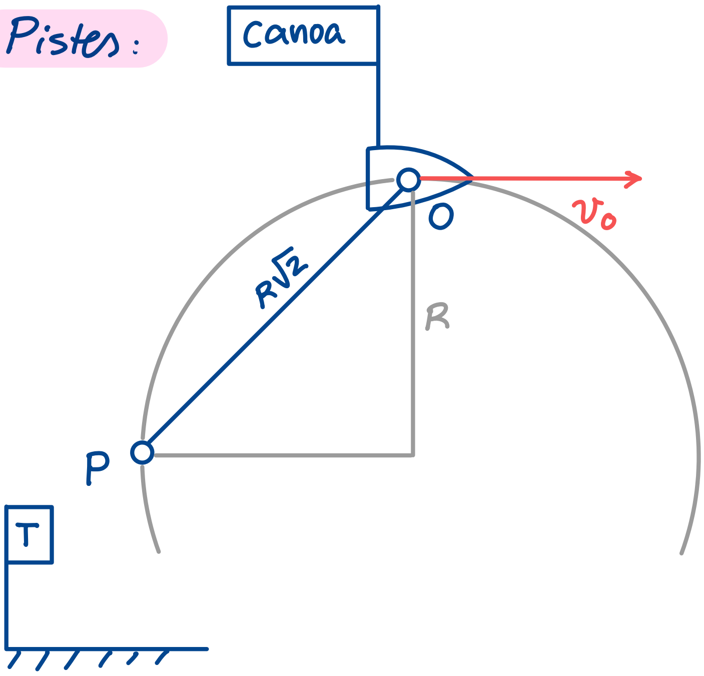
D $v_0/(2R)$, clockwise direction

E $v_0/(2R)$, counterclockwise direction



$\bar{\Omega}^{\text{cable}}_{\text{canoa}}$?

Pistes:



Farem comp. velocitats amb

$AB = T$

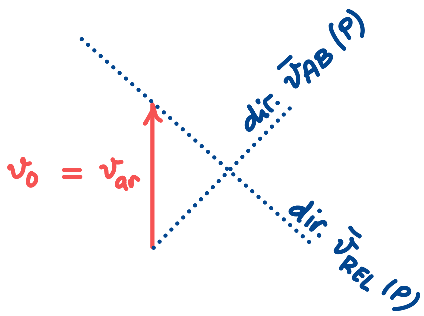
$REL = \text{Canoa}$

$$\bar{v}_{AB}(P) = \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P)$$

sentit indeterminat

$$\underbrace{\nearrow\!\!\!\swarrow\, v_{AB}}_{\text{Ja que esquís no derapen}} = \underbrace{\searrow\, v_{REL}}_{\text{Ja que mov. rel. és circular}} + \underbrace{\uparrow \quad\quad}_{\text{Ja que canoa fa movim. circular}} \quad (A)$$

De (A) deduim la següent geometria de velocitats:



pinteu el triangle de velocitats AB, REL, ar

Com que des de la canoa veiem que

$$\bar{v}_{REL}(P) = \left(\quad\quad \right) \qquad (B)$$

la vel. ang. del cable respecte la canoa ha de tenir la forma $\bar{\Omega}^{\text{cable}}_{\text{canoa}} = \odot\,\omega$. Això implica que

$$\bar{v}_{REL}(P) = \left(\underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{Ja que P té movim. circular vist des de la canoa}} \right) \quad (C)$$

igualant (B) i (C):

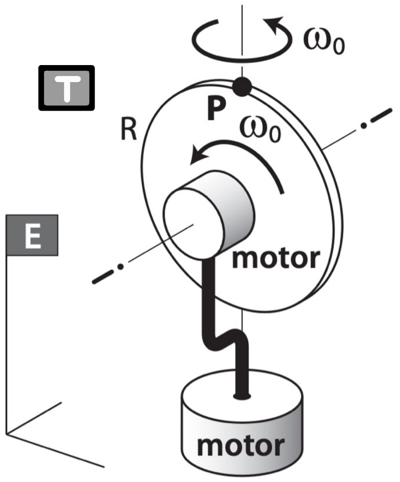
$$\quad\quad \Rightarrow \quad \omega = \quad$$

Per tant:

$$\boxed{\bar{\Omega}^{\text{cable}}_{\text{canoa}} = \quad\quad}$$

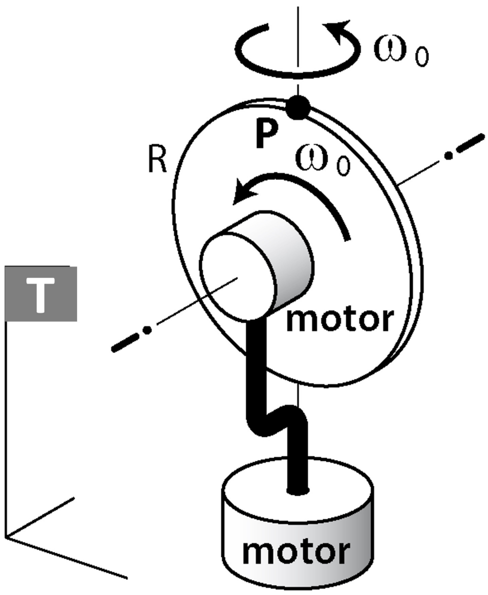
Disc de 2 GL (qüestió 2.18 RBK)

$\Re_T(\mathbf{P})$?



2.18 What is the value of the radius of curvature $\Re_T(\mathbf{P})$ when point **P** of the disk goes through the highest position?

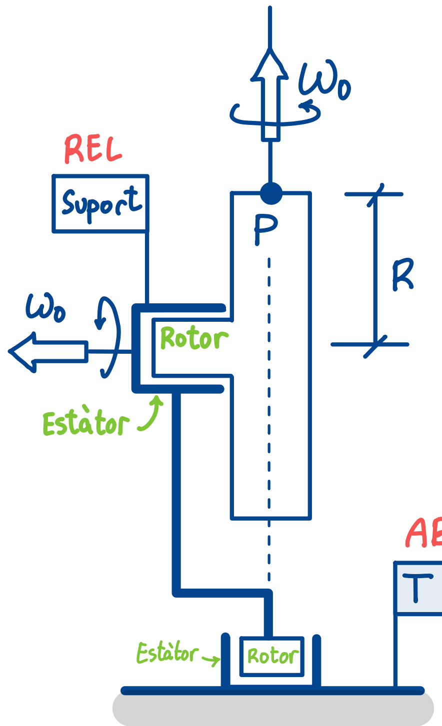
A 0
B R
C R/2
D $R/\sqrt{2}$
E $R/\sqrt{5}$



$\Re_T(\mathbf{P})$?

Pistes: (Sol. a pàg. seg.)

Comp. mov. | AB = T
| REL = Suport

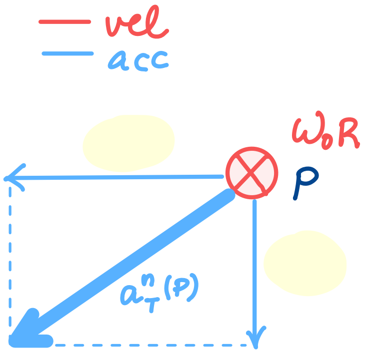


$$\bar{v}_{AB}(P) = \underbrace{\bar{v}_{REL}(P)}_{\otimes\ \omega_0 R} + \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)}_{0} = \qquad$$

$$\bar{a}_{AB}(P) = \bar{a}_{REL}(P) + \bar{a}_{ar}(P) + \underbrace{\bar{a}_{cor}(P)}_{2\,\bar{\Omega}^{REL}_{AB} \times \bar{v}_{REL}(P)} =$$

$$= \underbrace{(\downarrow \qquad)}_{REL} + \underbrace{(\qquad)}_{ar} + \underbrace{2\left[(\qquad) \times (\qquad)\right]}_{cor} = (\downarrow \omega_0^2 R) + (\leftarrow 2\omega_0^2 R)$$

Dibuixem vel. i acc. de P per esbrinar quina part és $\bar{a}_T^n(P)$:



Tota l'accel. és normal!

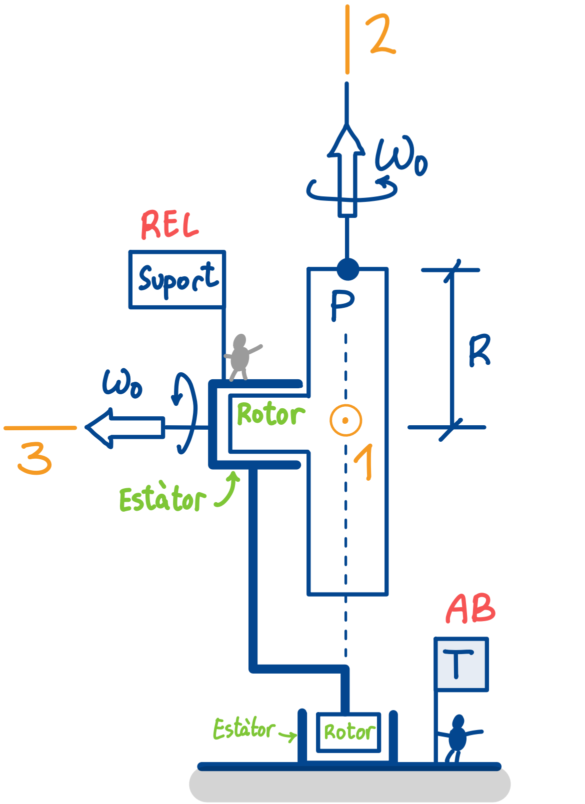
$$a_T^n(P) = \sqrt{(\qquad)^2 + (\qquad)^2} =$$

$$\boxed{R_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|} = \frac{\omega_0^2 R^2}{\qquad} = \qquad}$$

$$\boxed{\text{Resp} = \qquad}$$

Solució ràpida

Introdueixo una base, però només és per poder comparar resultats amb els de la pàg. següent. Per resoldre la qüestió, no cal.



$B = (1, 2, 3)$

Dir. vertical — Dir. eix motor superior

Farem comp. movim. amb | $AB = T$, $REL = \text{Suport}$

$$\bar{v}_{AB}(P) = \underbrace{\bar{v}_{REL}(P)}_{\otimes\, \omega_0 R} + \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)}_{\bar{0}} = \otimes\, \omega_0 R = \begin{Bmatrix} -\omega_0 R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_B \quad (\blacksquare)$$

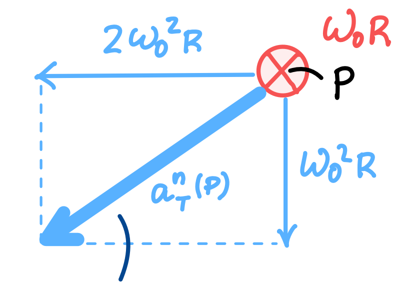
No és un vector "pel·lícula", perquè la configuració amb la que l'hem obtingut (la del dibuix) no és genèrica. Vol dir que no el podem derivar per obtenir $\bar{a}_T(P)$. Caldrà fer composició d'acceleracions.

$$\bar{a}_{AB}(P) = \bar{a}_{REL}(P) + \bar{a}_{ar}(P) + \underbrace{\bar{a}_{cor}(P)}_{2\,\bar{\Omega}^{REL}_{AB} \times \bar{v}_{REL}(P)} =$$

$$= (\downarrow \omega_0^2 R) + \bar{0} + \underbrace{2\left[(\Uparrow \omega_0) \times (\otimes\, \omega_0 R)\right]}_{\leftarrow 2\omega_0^2 R} = \underbrace{(\downarrow \omega_0^2 R) + (\leftarrow 2\omega_0^2 R)}_{= \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_0^2 R \\ 2\omega_0^2 R \end{Bmatrix}_B} \quad (\bullet)$$

Dibuixem vel. i accel. per deduir $\bar{a}^n_T(P)$:

— vel
— acc



Tota l'accel. és normal a $\otimes\, \omega_0 R$! (*)

$$a^n_T(P) = \sqrt{(2\omega_0^2 R)^2 + (\omega_0^2 R)^2} = \omega_0^2 R \sqrt{5}$$

$$\boxed{\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a^n_T(P)|} = \frac{(\omega_0 R)^2}{\omega_0^2 R \sqrt{5}} = \frac{R}{\sqrt{5}}}$$

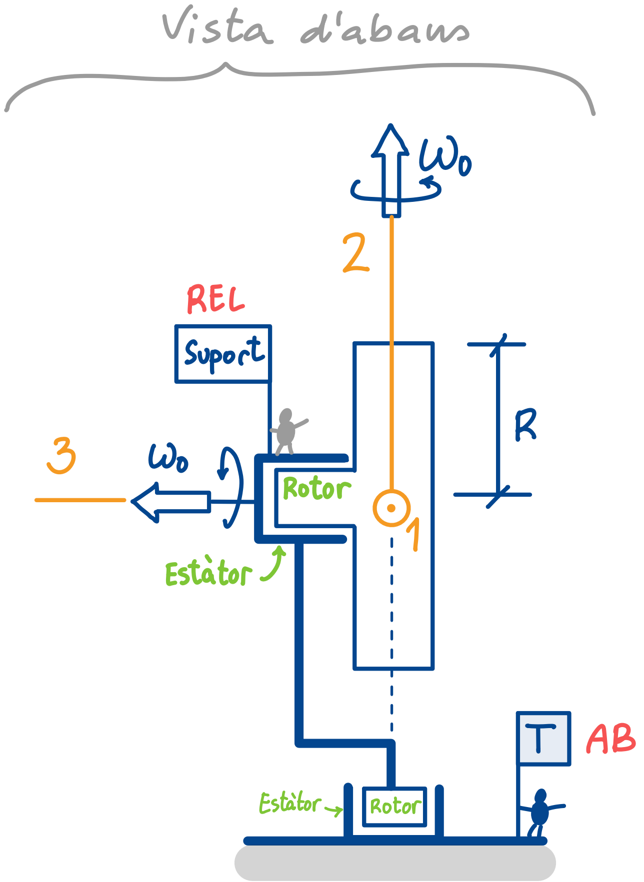
$$\boxed{\text{RESP} = E}$$

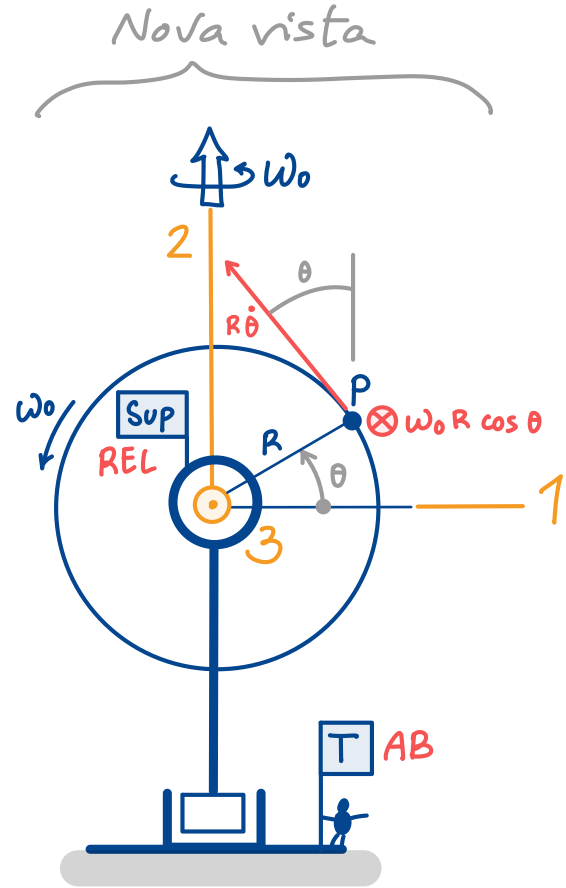
(*) Punt que a alguns estudiants els costa de veure.

La faig perquè es vegi la superioritat de la compos. de moviments en aquest problema

Solució + feixuga via l'obtenció d'un vec. pel·li per $\bar{v}_{AB}(P)$, i derivant-lo

Cal obtenir-lo sobre una config. genèrica. Això obliga a treballar sobre una altra vista del sistema, i a posar P en posició general, introduint la coordenada θ:





Treballant amb la nova vista:

$$\dot{\theta}=\omega_0$$

$$\bar{v}_{AB}(P)=\underbrace{(\nwarrow R\dot{\theta})}_{\bar{v}_{REL}(P)}+\underbrace{(\otimes\,\omega_0 R\cos\theta)}_{\bar{v}_{ar}(P)}=\begin{Bmatrix}-R\dot{\theta}\sin\theta\\ R\dot{\theta}\cos\theta\\ -\omega_0 R\cos\theta\end{Bmatrix}_B \overset{\dot{\theta}=\omega_0}{=} \begin{Bmatrix}-R\omega_0\sin\theta\\ R\omega_0\cos\theta\\ -\omega_0 R\cos\theta\end{Bmatrix}_B$$

Ara $\bar{v}_{AB}(P)$ sí que és un vec. pel·lícula i el podem derivar!
Abans de fer-ho, fixem-nos que si el particularitzem per a $\theta=90^\circ$, obtenim la velocitat de P quan passa pel punt més alt. És a dir, la de (■) a la pàgina anterior:

$$\left.\bar{v}_{AB}(P)\right]_{\theta=90^\circ}=\begin{Bmatrix}-R\omega_0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}_B \leftarrow$$ Coincideix amb (■)! (com esperàvem)

Doncs va! Ara derivem el $\bar{v}_{AB}(P)$ genèric per obtenir $\bar{a}_{AB}(P)$ genèrica. Fem-ho analíticament:

$$\left\{\bar{v}_{AB}(P)\right\}_B = \begin{Bmatrix} -R\omega_0 \sin\theta \\ R\omega_0 \cos\theta \\ -R\omega_0 \cos\theta \end{Bmatrix}_B$$

$$\dot{\theta} = \omega_0$$

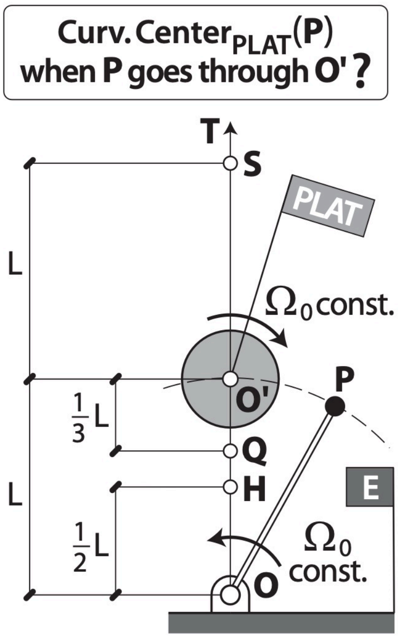
$$\left\{\bar{a}_{AB}(P)\right\}_B = \begin{Bmatrix} -R\omega_0 \overset{\text{És } \omega_0}{\dot{\theta}} \cos\theta \\ -R\omega_0 \dot{\theta} \sin\theta \\ R\omega_0 \dot{\theta} \sin\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -R\omega_0 \sin\theta \\ R\omega_0 \cos\theta \\ -R\omega_0 \cos\theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -R\omega_0^2 \cos\theta \\ 0 \\ R\omega_0^2 \sin\theta \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} -2R\omega_0^2 \cos\theta \\ -R\omega_0^2 \sin\theta \\ 2R\omega_0^2 \sin\theta \end{Bmatrix}_B \quad (*)$$

Si ara particularitzem $(*)$ per $\theta = 90°$ obtenim l'acceleració de P quan passa pel punt més alt (la de (●), al principi):

$$\left.\left\{\bar{a}_{AB}(P)\right\}_B\right]_{\theta = 90°} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R\omega_0^2 \\ 2R\omega_0^2 \end{Bmatrix}_B$$

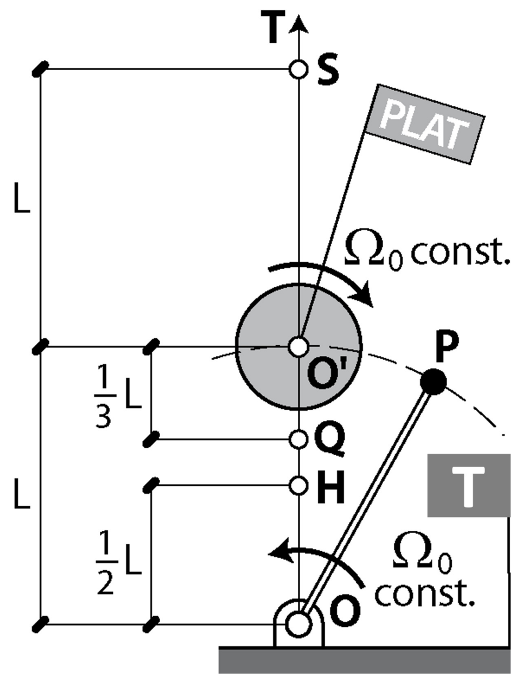
← Coincideix amb (●)!
(com esperàvem)

CC de P (Qüestió 2.21 RBK)



2.21 Where is the **P** curvature center relative to the platform (PLAT) when **P** goes through the platform center **O′** (fixed to the ground E)?

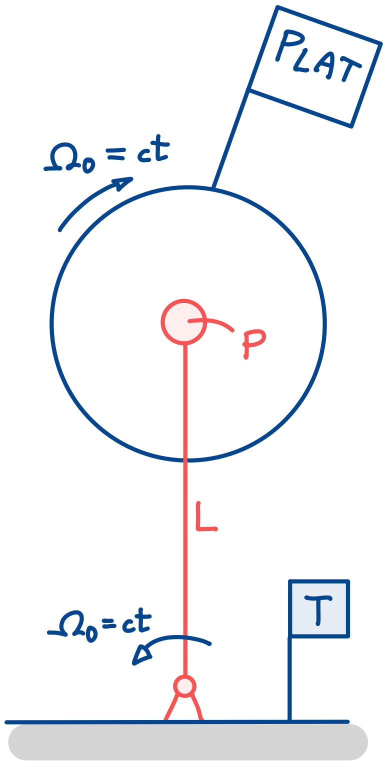
A **O**
B **H**
C **Q**
D **S**
E **T**



CC_{PLAT}(**P**) quan
P passa per **O′**?

Pistes

Comp. vel. amb | AB =
REL =



$$\boxed{\bar{v}_{REL}(P) = \underbrace{\bar{v}_{AB}(P)}_{\quad} - \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)}_{\quad} = (\leftarrow \Omega_0 L)}$$

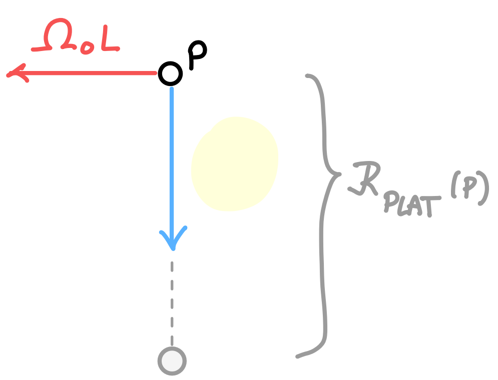
$$\bar{a}_{REL}(P) = \bar{a}_{AB}(P) - \bar{a}_{ar}(P) - \underbrace{\bar{a}_{cor}(P)}_{2\,\bar{\Omega}^{REL}_{AB} \times \bar{v}_{REL}(P)} =$$

$$= (\downarrow \quad) - 0 - \underbrace{2\left[(\curvearrowright \quad) \times (\leftarrow \quad)\right] =}_{\downarrow 2\,\Omega_0^2 L}$$

$$= (\quad)$$

Dibuix per esbrinar quina és la component $\bar{a}^n_{PLAT}(P)$

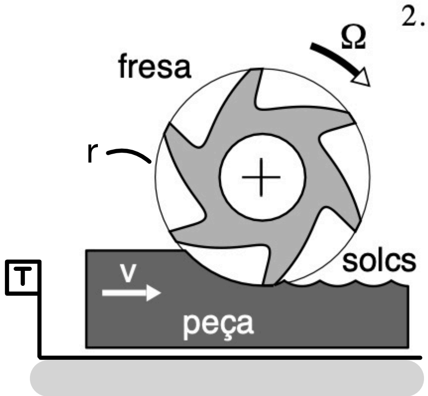
→ vel.
→ acc.



$$\mathcal{R}_{PLAT}(P) = \frac{v^2_{PLAT}(P)}{|a^n_{PLAT}(P)|} = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$CC_{PLAT}(P) =$$

RESP =



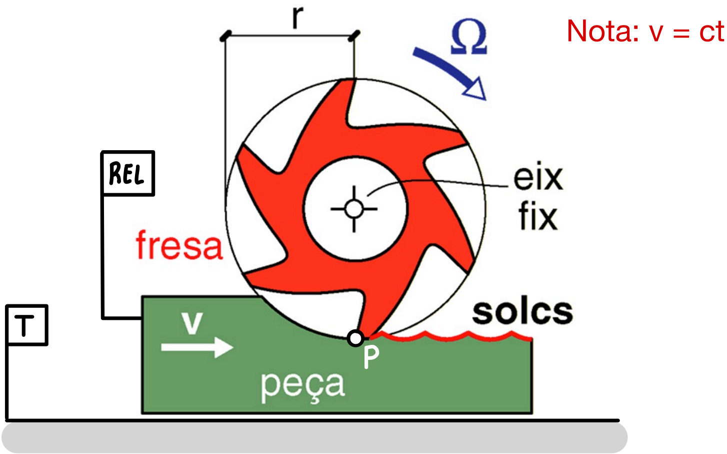
2.14 En una fresadora la fresa de radi r gira amb velocitat angular Ω constant al voltant del seu eix, que és fix, i la peça que és fresada avança amb celeritat v. Quin és el radi de curvatura del fons dels solcs que queden al damunt de la superfície fresada?

A r
B $r(1+v/r\,\Omega)$
C $r(1-v/r\,\Omega)$
D $r(1+v/r\,\Omega)^2$
E $r(1-v/r\,\Omega)^2$

Nota: v = ct

Pistes (sol. a pàg. seg.)

$\mathcal{R}$ del fons dels solcs



Punt clau

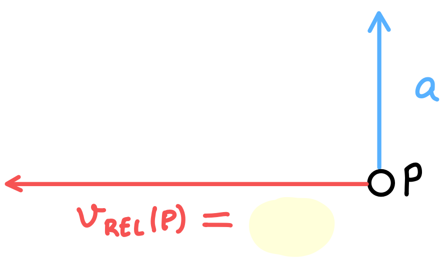
> Si definim
>
> $AB = T$
>
> $REL = \text{Peça}$
>
> el radi que ens demanen és
>
> $\mathcal{R}_{\underbrace{REL}_{\text{Peça}}}(P)$

Cal trobar la $\bar{v}_{REL}(P)$ i la $\bar{a}^n_{REL}(P)$, i $\mathcal{R}_{REL}(P) = \dfrac{|v_{REL}(P)|^2}{|a^n_{REL}(P)|}$

$$\bar{v}_{REL}(P) = \bar{v}_{AB}(P) - \bar{v}_{ar}(P) = (\qquad) - (\qquad) = \left[\leftarrow (\qquad)\right]$$

$$\bar{a}_{REL}(P) = \bar{a}_{AB}(P) - \bar{a}_{ar}(P) - 2\,\bar{\Omega}^{REL}_{AB} \times \bar{v}^{REL}_{AB}(P) =$$

$$= (\uparrow \quad) - (\quad) - 2\,(\quad \times \quad) = (\uparrow \qquad)$$



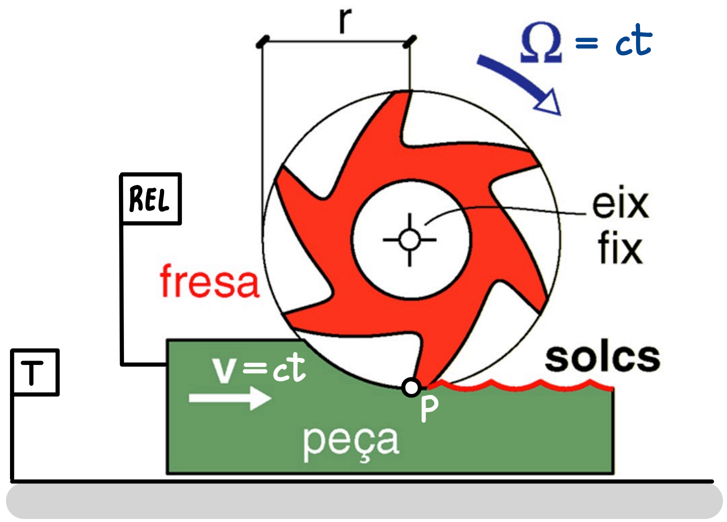
$$\mathcal{R}_{REL}(P) = \frac{(\qquad)^2}{\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = r\left(1 + \frac{v}{\Omega r}\right)^2$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2b}{a}\right) = a^2\left(1 + \frac{b}{a}\right)^2}$$

Aquest últim pas només rescriu la resposta en la forma de l'enunciat de la qüestió. Estrictament, no cal!

Sol. detallada

$\mathcal{R}$ del fons dels solcs



Si definim

$AB = T$

$REL = \text{Peça}$

el radi que ens demanen és

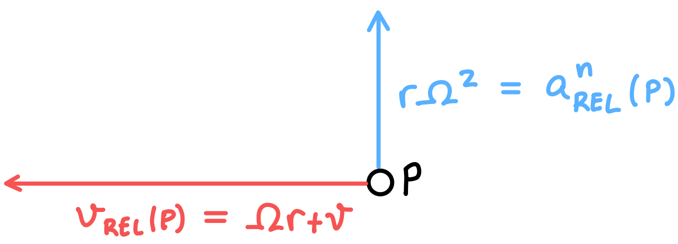
$$\mathcal{R}_{\underbrace{REL}_{\text{Peça}}}(P)$$

Cal trobar la $\bar{v}_{REL}(P)$ i la $\bar{a}^{n}_{REL}(P)$, i $\mathcal{R}_{REL}(P) = \dfrac{|v_{REL}(P)|^2}{|a^{n}_{REL}(P)|}$.

$$\bar{v}_{REL}(P) = \bar{v}_{AB}(P) - \bar{v}_{ar}(P) = (\leftarrow \Omega r) - (\rightarrow v) = \leftarrow (\Omega r + v)$$

$$\bar{a}_{REL}(P) = \underbrace{\bar{a}_{AB}(P)}_{\uparrow r\Omega^2} - \underbrace{\bar{a}_{ar}(P)}_{\bar{0}} - \cancel{2\,\underbrace{\bar{\Omega}^{REL}_{AB}}_{\bar{0}} \times \bar{v}^{REL}_{AB}(P)} = \underbrace{\uparrow r\Omega^2}_{}$$

Tota ella és centrípeta p.q. és $\perp$ a $\bar{v}_{REL}(P)$



$$\boxed{\mathcal{R}_{REL}(P) = \frac{(\Omega r + v)^2}{r\Omega^2} = \frac{(\Omega r)^2\left(1+\frac{v}{\Omega r}\right)^2}{\Omega^2 r} = r\left(1+\frac{v}{\Omega r}\right)^2}$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{2b}{a}\right) = a^2\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}$$

Aquest últim pas només reescriu la resposta en la forma de l'enunciat de la qüestió. Estrictament, no cal!