10P

Geometria de masses

Introducció

Estem utilitzant lleis dinàmica x obtenir
- eqs. mov.
- forces d'enllaç
- forces o parells motor

2 tipus problemes:

▶ Din. partícula P

Massa concentrada en 1 partíc.


Pèndol simple


Pèndol sobre cilindre

No cal info distribució massa

$$\sum \overline{F}_{\to P} = m_P \, \overline{a}_{RGal}(P) \qquad (3 \text{ eqs})$$

▶ Din. sòlid rígid

Cal info distribució massa

TQM (3 eqs) ← centre d'inèrcia G
(x trobar $\overline{a}_{RGal}(G)$)

Ja sabeu calcular-lo

Exercicis: D5.1, .2, .3

TMC (3 eqs) ← Tensor d'inèrcia
(x calcular moment cinètic sist.)

Exercicis centres inèrcia: D5.1, .2, .3

Moment cinètic d'un sòlid rígid S

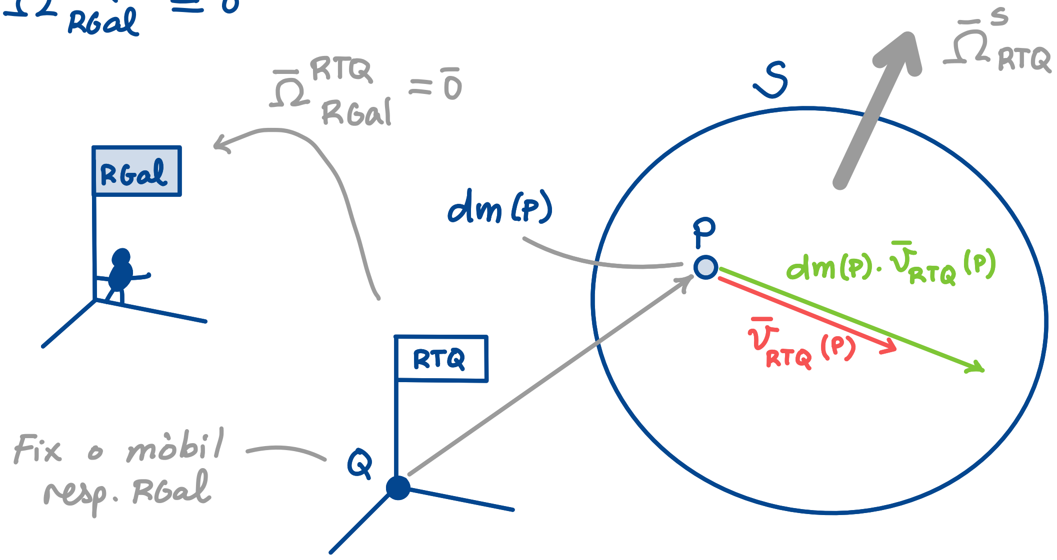
Sòlid rígid S ← Volem estudiar seu movim. des de RGal

Q un punt (fix o mòbil a RGal)

RTQ = Ref. que es trasllada amb Q resp. RGal.

$\bar{\Omega}^{RTQ}_{RGal} = 0$

Dibuixo en aq. ordre



S fet de partic

Cada partic té

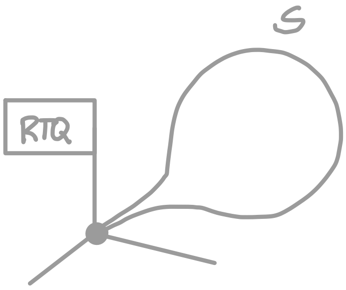
- vec. pos $\overline{QP}$ a RTQ
- $\bar{v}_{RTQ}(P)$

DEF.- Moment cinètic d'S resp. Q, a ref. RTQ:

$$\bar{H}^{S}_{RTQ}(Q) \overset{DEF}{=} \int_S \overline{QP} \times \overbrace{\left[dm(P) \cdot \bar{v}_{RTQ}(P) \right]}^{\text{QDM de P a RTQ}} \qquad (\square)$$

$\sum$ PES

Malgrat complexitat de $(\square)$ ... Si $Q \in S$:



$$\bar{H}^{S}_{RTQ}(Q) = \underbrace{\mathbb{I}(Q)}_{\substack{3\times 3 \\ \text{Simètrica}}} \cdot \underbrace{\bar{\Omega}^{S}_{RTQ}}_{\substack{\parallel \\ \bar{\Omega}^{S}_{RGal}}} \qquad \left(\text{pq } \bar{\Omega}^{RTQ}_{RGal} = \bar{0}\right)$$

Info potent com distribuïda la massa.

Avui practicarem com construir-la

Si $Q \notin S$ no aplicarem $(\square)$, sinó descomp. baricèntrica

Tensor d'inèrcia de S a Q

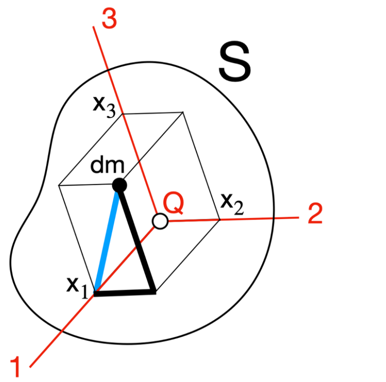
$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{11} & \mathrm{I}_{12} & \mathrm{I}_{13} \\ \mathrm{I}_{12} & \mathrm{I}_{22} & \mathrm{I}_{23} \\ \mathrm{I}_{13} & \mathrm{I}_{23} & \mathrm{I}_{33} \end{bmatrix}$$

Moments d'inèrcia

$$\mathrm{I}_{ii} = \int_S \underbrace{\left(x_j^2 + x_k^2\right)}_{(\text{ dist a } \textbf{eix i})^2} \, \mathrm{dm} \; \boxed{\geq 0}$$

Exm:

$$\mathrm{I}_{11} = \int_S \underbrace{\left(x_2^2 + x_3^2\right)}_{(\text{ dist a } \textbf{eix 1})^2} \, \mathrm{dm}$$



B = (1,2,3)

$\mathbb{I}(Q)$ té a veure amb | Com distribuïda la massa avd sist. coordenades amb
- Origen a Q
- Eixos orientats amb B

Cada dm | Té unes coords x_1, x_2, x_3 que s'usen x definir els elements de $\mathbb{I}(Q)$

Els elem. diag. s'anom MOM. INÈRCIA i es defineixen així:

Si (i, j, k) fan ref. als eixos de la base

Llegeixo fórmula genèrica

Tot es veu + clar amb 1 exm:

Descric exm

Per tant, això és dist. del dm a l'eix 1

En la fórmula gral. és dist. dm a eix i

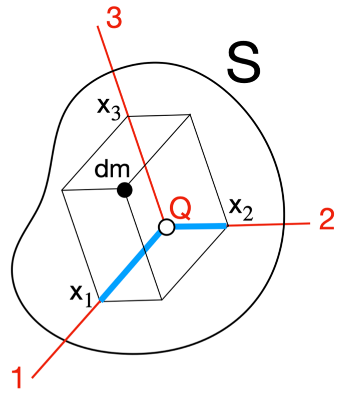
Són ≥ 0 !

Tensor d'inèrcia de S a Q

$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Productes d'inèrcia

$$I_{ij} = -\int_S x_i\, x_j\, dm$$ (>0, <0, =0)



Exm:

$$I_{12} = -\int_S x_1\, x_2\, dm$$

Ara els elements de fora la diagonal

S'anomenen productes d'inèrcia (no moments d'inèrcia)

Com que el tensor és simètric $I_{21} = I_{12}$, ...

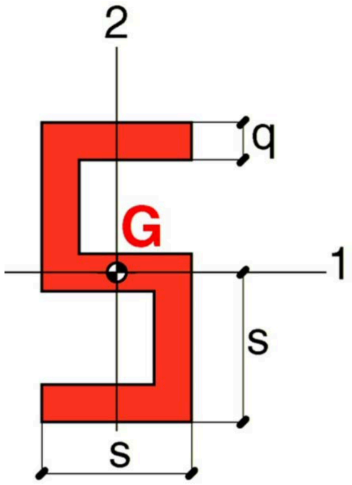
El producte d'inèrcia ij és $-\int x_i\, x_j\, dm$

Tot + clar en un exemple

Si vull calcular I_{12} tinc $I_{12} = -\int_S x_1 x_2\, dm$

Ead: cada dm te unes coords $x_1\, x_2$. Pex, per aquest dm, x_1 és aquesta, x_2 aquesta, i la contribució del dm a I_{12} és $x_1 x_2\, dm$.

Poden ser >0, <0, $=0$!



La peça plana és homogènia. Fes l'avaluació qualitativa de $\mathrm{II}(\mathbf{G})$.

— Suposarem $q \simeq 0$

— Anàlisi fàcil de generalitzar per a $q > 0$

$x_3 = 0 \;\; \forall \, dm(P) \;\Rightarrow$

$$\underbrace{\left[\mathrm{II}(G)\right]_B = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -\int x_1 \underset{0}{x_3}\, dm = 0 \\ -\int x_2 \underset{0}{x_3}\, dm = 0 \end{array}}_{\text{Indep. del pt on refeim el tensor}}$$

Dir. 3 és DPI, ja que:

$$\bar{H}^S_{RTG}(G) = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3 \Omega \end{Bmatrix}$$

MPI d'aquesta DPI

paral·lels

En gral., si a la col. i els prod. inèrcia són zero:

- Dir. i és <u>DPI per al punt on calculem el tensor</u>
- I_{ii} és el <u>MPI associat</u>

En una fig. plana dir $\perp$ a la fig. és DPI indep. del punt on calculem el tensor.

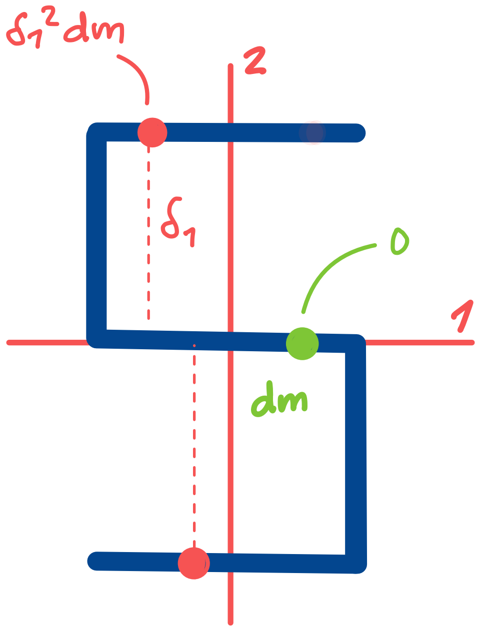
I_{ii} ? $(>0, =0?)$

Veiem que

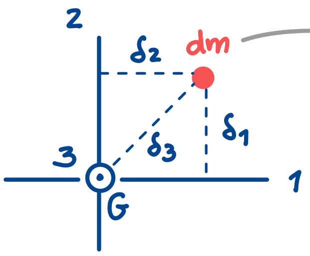
$$I_{11} = \int_S \delta_1^2 \, dm \neq 0$$

$$I_{22} = \int_S \delta_2^2 \, dm \neq 0$$

$$I_{33} = \int_S \delta_3^2 \, dm \neq 0$$



Per un dm qualsevol :



Contrib. a I_{11} : $\delta_1^2 \cdot dm$

" " I_{22} : $\delta_2^2 \cdot dm$

" " I_{33} : $\delta_3^2 \cdot dm = (\delta_1^2 + \delta_2^2) \cdot dm \quad (\square)$

Pitàgores

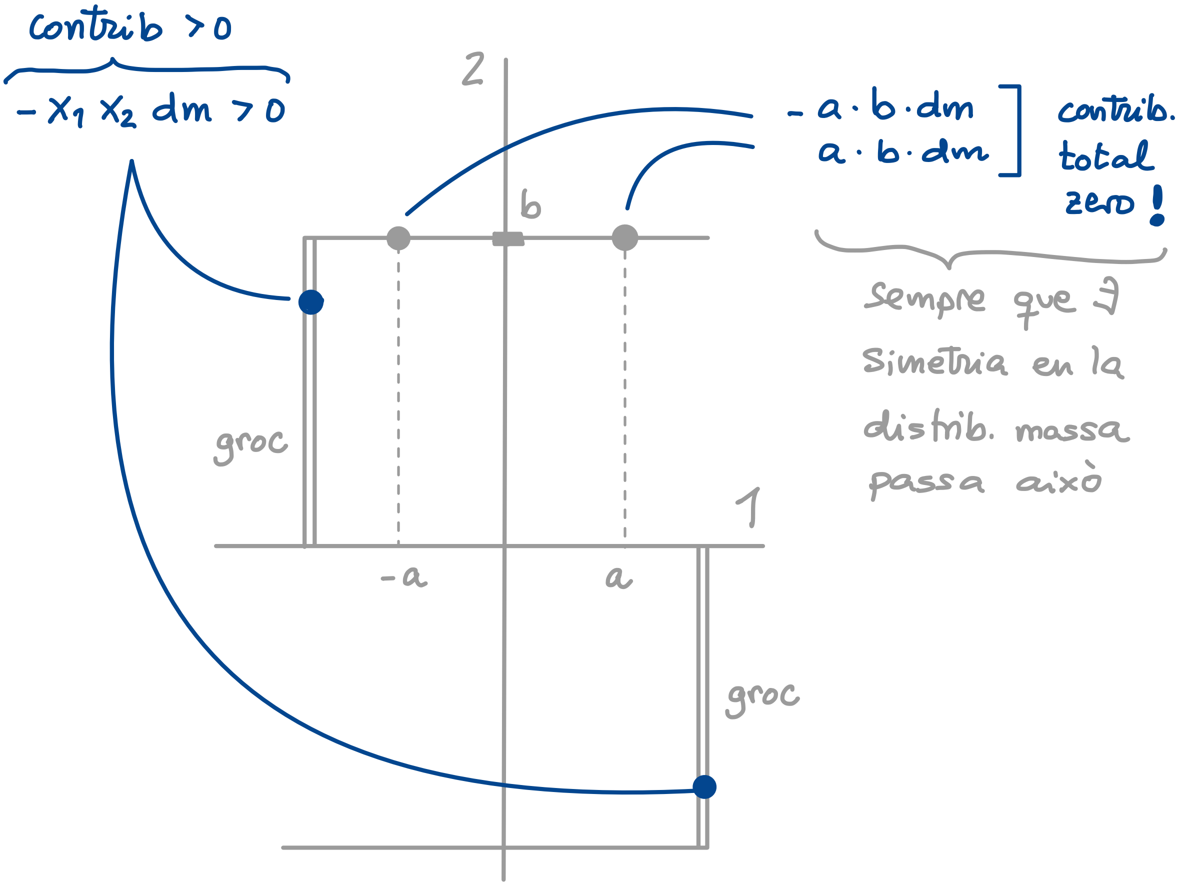
Integrant $(\square)$ $\forall dm$:

$$\boxed{I_{33} = I_{11} + I_{22}}$$

Per ara :

$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

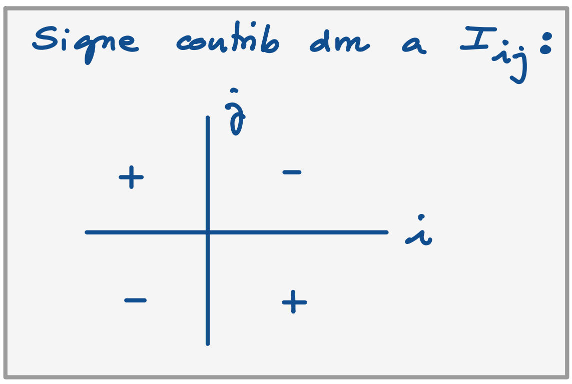
Signe de $I_{12} = -\int_S x_1 x_2 \, dm$?



Només trossos grocs contribueixen a I_{12} (amb signe > 0)

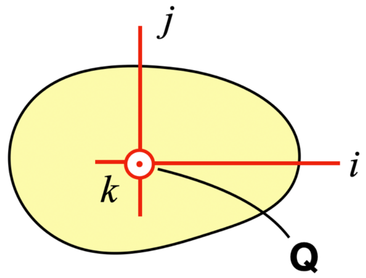
Ergo :

$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & |I_{12}| & 0 \\ |I_{12}| & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$



Al cap!

Per un sòlid pla



es compleix

1

$\forall \mathbf{Q} \in$ sòlid, la direcció k és DPI

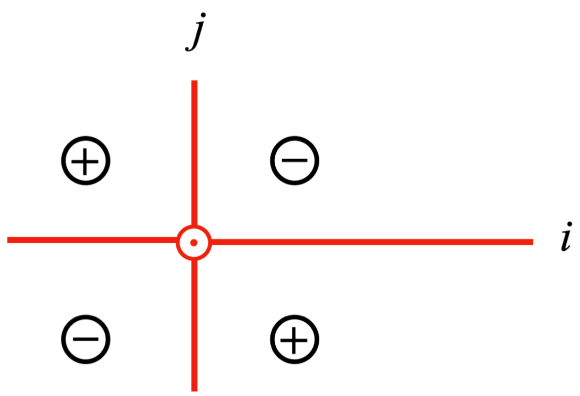
$$\left[\mathbb{I}(\mathbf{Q})\right]_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{ii} & \mathrm{I}_{ij} & 0 \\ \mathrm{I}_{ij} & \mathrm{I}_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{kk} \end{bmatrix}$$

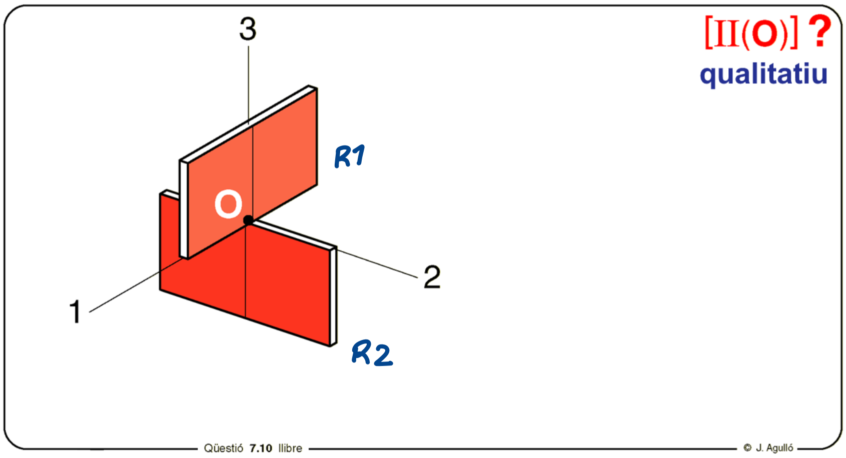
$\mathrm{I}_{kk} = \mathrm{I}_{ii} + \mathrm{I}_{jj}$

I_{kk} és el MPI d'aquesta DPI

2

Signe de la contribució dels dm a I_{ij}





$$\mathrm{II}(O) = \mathrm{II}_{R1}(O) + \mathrm{II}_{R2}(O)$$

Tensor de R1

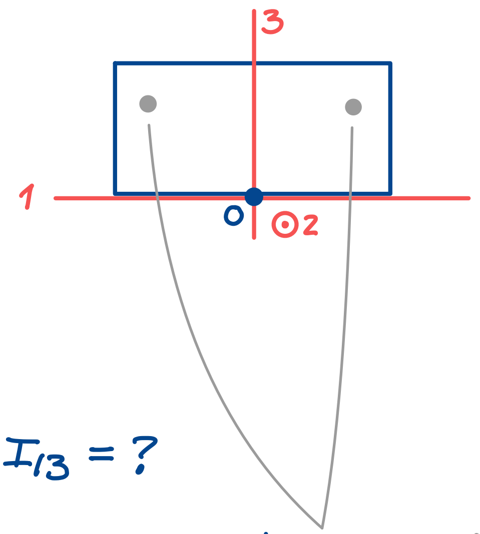


Fig. plana ⇒ | 2 és DPI
$I_{22} = I_{11} + I_{33}$

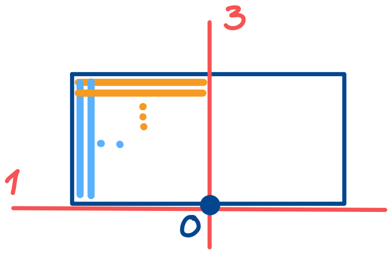
↓

$$\mathrm{II}_{R1}(O) = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & \boxed{} \\ 0 & I_{11} + I_{33} & 0 \\ \boxed{} & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

$I_{13} = ?$

$I_{13} = 0!$ dm simètrics → contrib. neta zero a I_{13}

$I_{11} \gtrless I_{33}$?

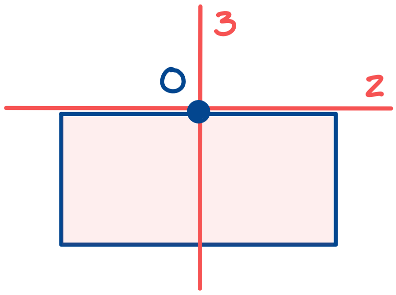


dm horitz. i vert. contribueixen = a I_{11} i I_{33}

$$I_{11} = I_{33} = I$$

$$\left[\mathrm{II}(O)_{R1}\right]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 2I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Tensor de R2



Anàlogament a l'ant:

Ja no els poso

$$\left[\mathbb{I}(O)_{R2}\right]_B = \begin{bmatrix} 2I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Tensor total

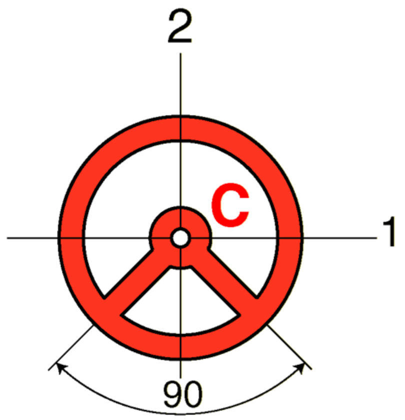
$$\left[\mathbb{I}(O)\right]_B = \left[\mathbb{I}_{R1}(O)\right]_B + \left[\mathbb{I}_{R2}(O)\right]_B = \begin{bmatrix} 3I & & \\ & 3I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

Només caldria I ! 1 valor

Mom. inèrcia placa rectangular

$I_{xx} = \frac{1}{3} m b^2$

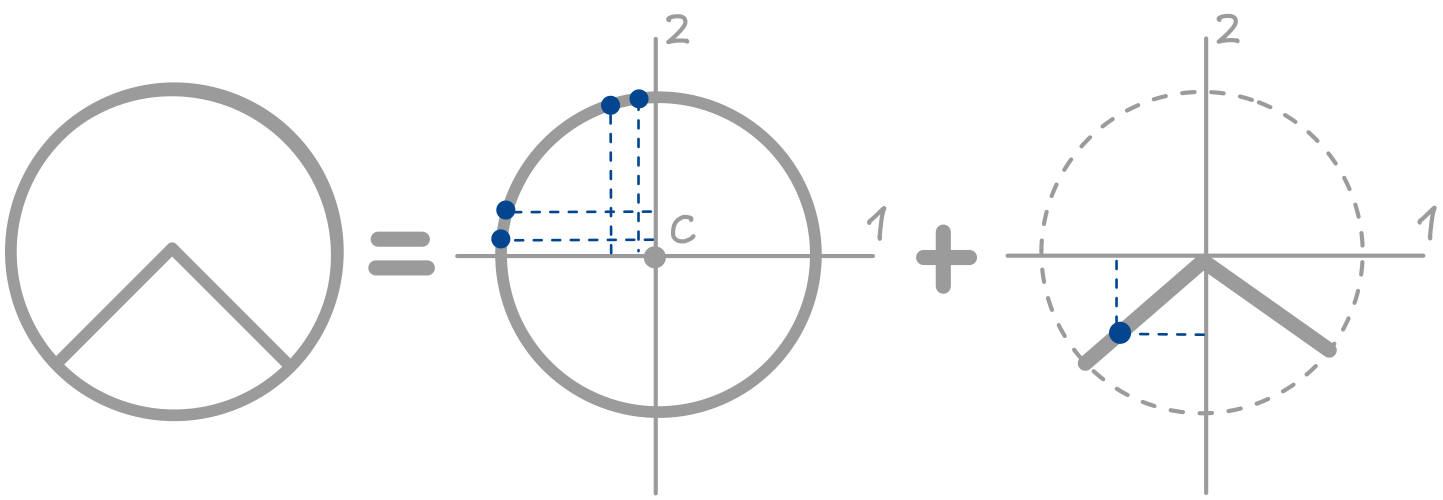
$[\mathrm{II}(\mathbf{C})]$?
qualitatiu



Aquest exm. permet il·lustrar

- Canvis de base
- Concepte de rotor simètric

Q 7.12 llibre



en les 2 subfigures

Fig. planes $\Rightarrow$ 3 és DPI

$I_{11} = I_{22}$ clarament

$I_{12} = 0$ per simetria

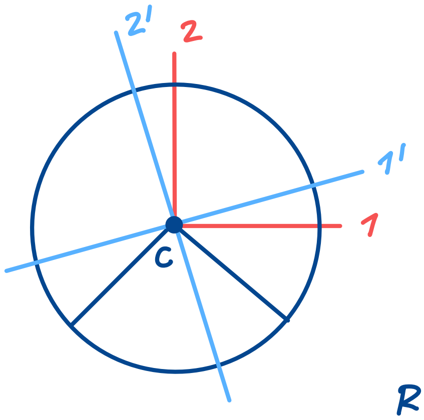
$$[\mathrm{II}_{anella}(C)]_B = \begin{bmatrix} I' & & \\ & I' & \\ & & 2I' \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{II}_{radis}(C)]_B = \begin{bmatrix} I'' & & \\ & I'' & \\ & & 2I'' \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [\mathrm{II}(C)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

$I = I' + I''$

$\left[\mathbb{I}(C)\right]_{B'}$?



(Invocant diapo)

Dir 1 i 2 són DPI
amb $I_{11} = I_{22} = I$

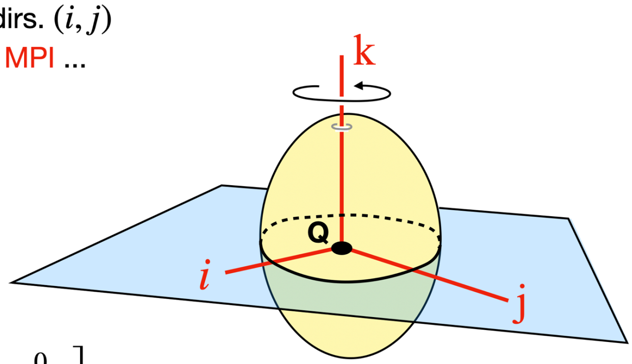
$$\Downarrow$$

$$\left[\mathbb{I}(C)\right]_{B'} = \left[\mathbb{I}(C)\right]_{B} \;!$$

Rotor simètric per C, en el pla (1,2)

"Rotor simètric per **Q**" en el pla (i, j)

Si per al punt **Q** les dirs. (i, j)
són DPI amb mateix MPI ...

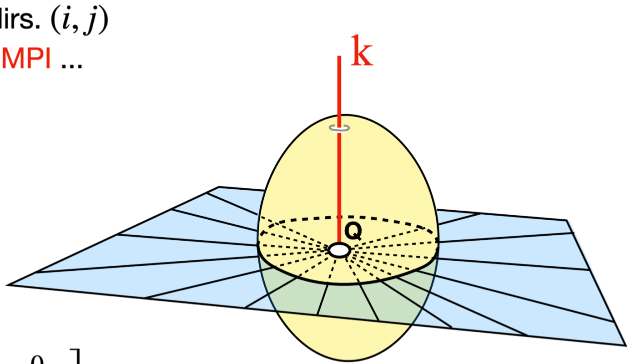


$$\left[\mathbb{I}(\mathbf{Q})\right]_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{kk} \end{bmatrix}$$

no canvia si girem B avd dir. k
(és invariant a rotacions avd dir. k)

"Rotor simètric per **Q**" en el pla (i, j)

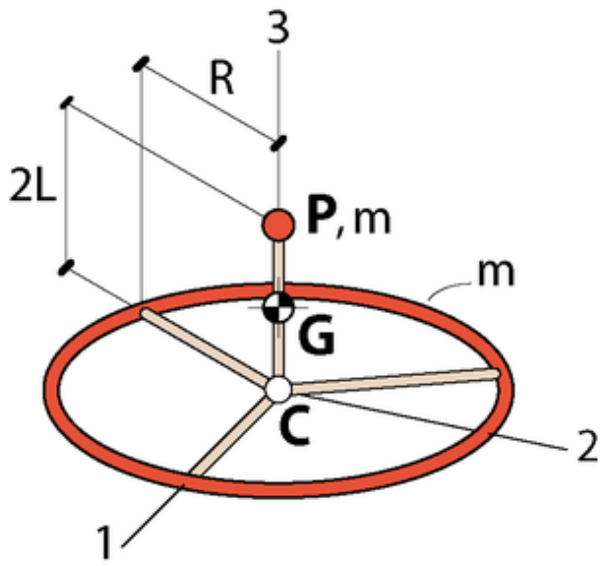
Si per al punt **Q** les dirs. (i, j)
són DPI amb mateix MPI ...



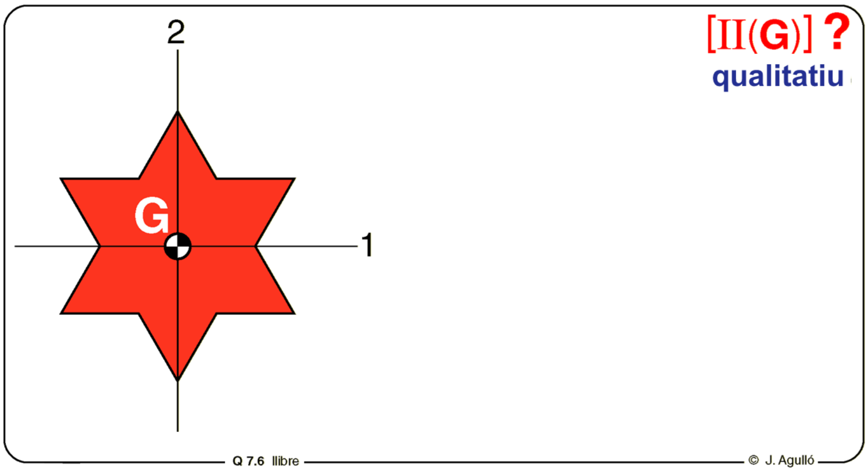
$$\left[\mathbb{I}(\mathbf{Q})\right]_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{kk} \end{bmatrix}$$

Tota recta del pla (i, j) per **Q** és DPI
(amb moment inèrcia I al seu voltant)

Exemple D5.9 Wikimec (Rotor esfèric)



No el faig. Deixat com a deures.



Sòlid pla $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ és DPI} \\ I_{33} = I_{22} + I_{11} \end{array} \right.$

Eix 2, de simetria $\Rightarrow \left\{ I_{12} = 0 \right.$

$$\left[\mathbb{I}(G) \right]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

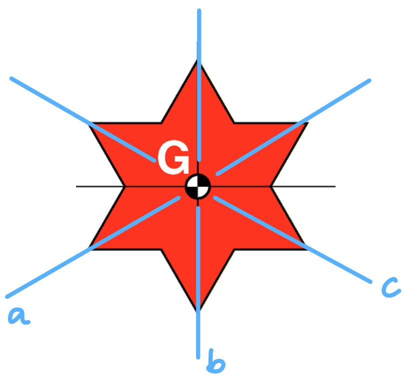
$I_{11} \gtrless I_{22}$? Difícil de saber a priori !

Invoquem — No ho demostrem

Equidistribució de massa al volt. 3 o més eixos

Si per un punt O $\left[\begin{array}{l} 3 \text{ o + mom. d'inèrcia en un mateix} \\ \text{pla } ij \text{ són iguals} \end{array} \right.$

alesh. el sòlid és rotor simètric a O



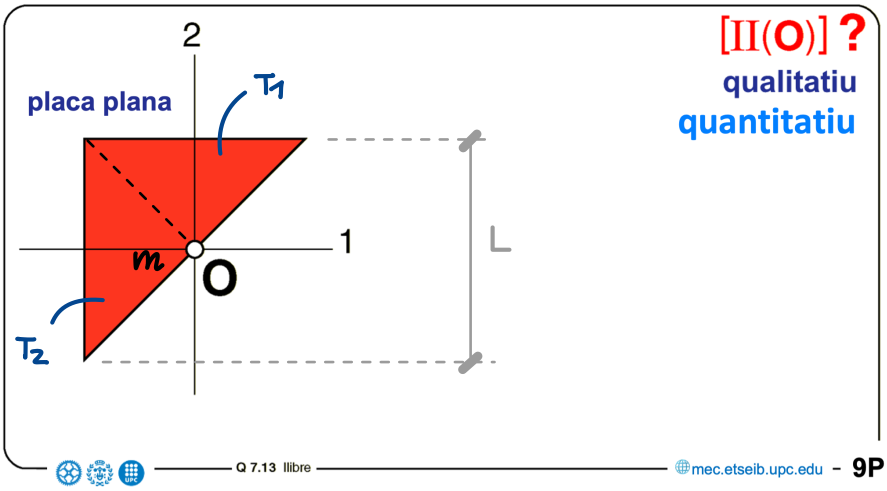
Clarament :

$$I_{aa} = I_{bb} = I_{cc} = I$$

Ergo :

$$\left[\mathbb{I}(G) \right]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

Rotor simètric a G



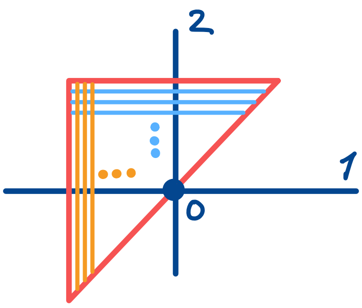
Tensor qualitatiu

Fig. plana $\Rightarrow$ 3 és DPI

Simetries T_1, T_2 $\Rightarrow$ $I_{12} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

$I_{11} \gtreqless I_{22}$?



dm blaus i grocs tenen = contrib. a I_{11}, I_{22}

$\Downarrow$

$I_{11} = I_{22} = I$

Ergo:

$$[\mathbb{I}(O)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

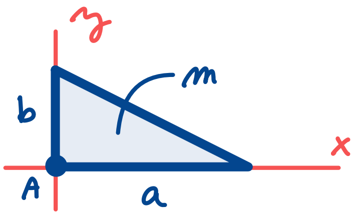
rotor simètric a O

Tensor quantitatiu

Gràcies a l'aval. qualitativa

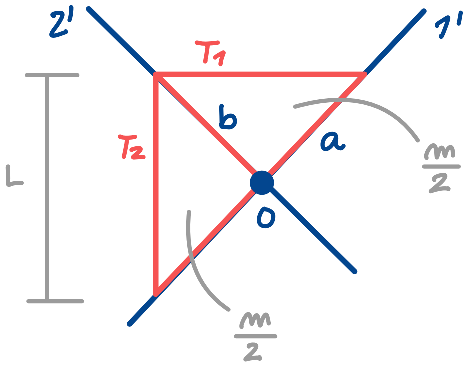
Només ens cal I $\Big(\underbrace{1 \text{ valor}}$! $\Big)$

Taula :



$$\mathbb{I}(A) = \begin{cases} I_{xx} = \frac{1}{6} m b^2 \\ I_{xy} = -\frac{1}{12} m a b \end{cases}$$

Sòlid és rotor simètric $\Rightarrow$ Puc girar la base sense alterar el tensor



$$\big[\mathbb{I}(O)\big]_{B'} = \big[\mathbb{I}(O)\big]_{B} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

$$I = 2\left[\frac{1}{6}\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{2L}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = \frac{mL^2}{3}$$

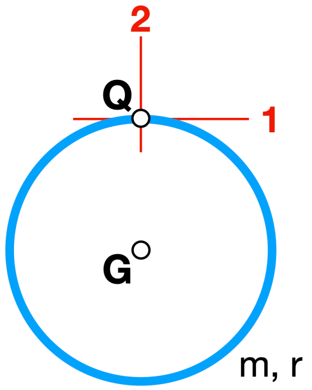
$$\big[\mathbb{I}(O)\big]_{B} = \frac{mL^2}{3}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Teorema de Steiner

No sempre tindrem tanta sort! Sovint passarà que el punt al qual referim el tensor és diferent del de la taula. Afortunadament, Steiner ens permet fer "canvis de punt":

$$\underbrace{\mathbb{I}(Q)}_{\substack{\text{Tensor}\\ \text{per al}\\ \text{punt } Q}} = \underbrace{\mathbb{I}(G)}_{\substack{\text{Tensor per}\\ \text{al centre}\\ \text{d'inèrcia } G}} + \underbrace{\mathbb{I}^{\oplus}(Q)}_{\substack{\text{Tensor per al punt}\\ Q \text{ de tota la massa}\\ \text{del sòlid concentrada a } G}}$$

Exm: anell homogeni



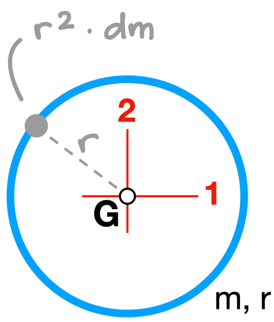
$\mathbb{I}(Q)$?

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \underbrace{[\mathbb{I}(G)]_B}_{\mathbb{I}_1} + \underbrace{[\mathbb{I}^{\oplus}(Q)]_B}_{\mathbb{I}_2}$$

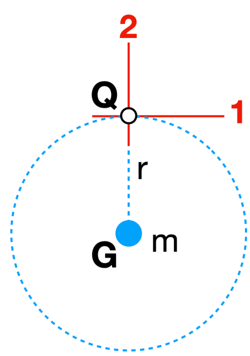
$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & & \\ & \frac{mr^2}{2} & \\ & & mr^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}_1}$$

No calen totes!

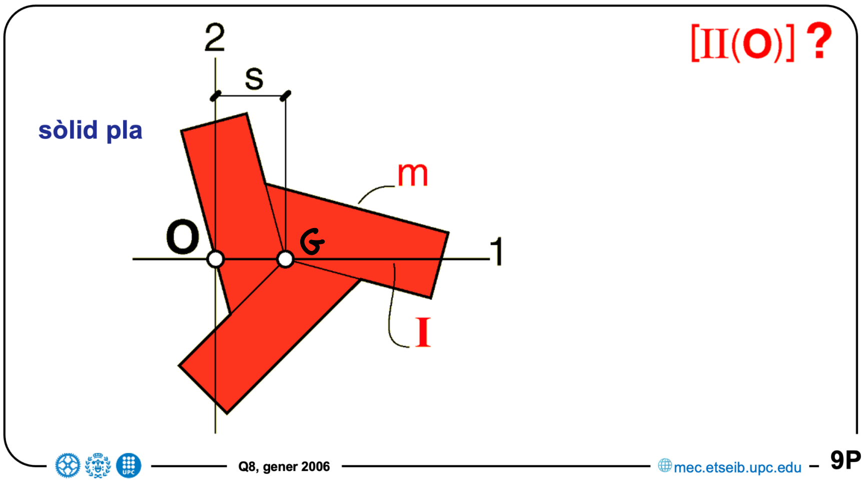
mr^2



$$[\mathbb{I}^{\oplus}(Q)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} mr^2 & & \\ & 0 & \\ & & mr^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}_2}$$

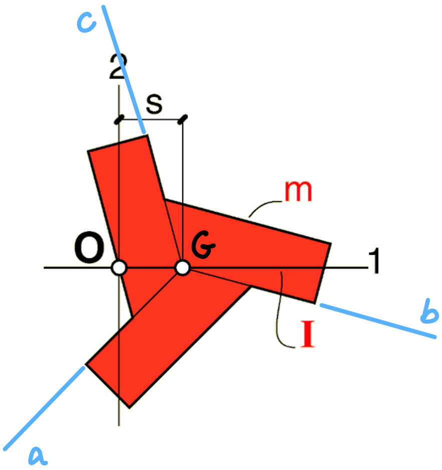


$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 = mr^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$



$G =$ centre inèrcia

Tensor a G és fàcil



- Sòlid pla $\Rightarrow$ 3 és DPI
- $\underbrace{I_{aa} = I_{bb} = I_{cc}}_{\Downarrow} = I$

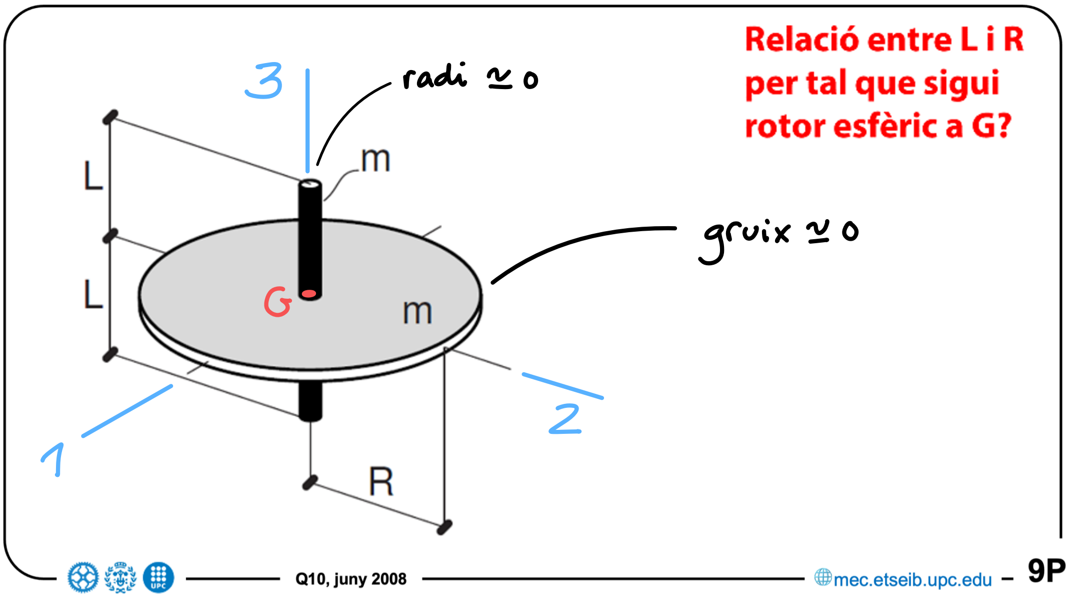
rotor simètric per a G

Ergo:

$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

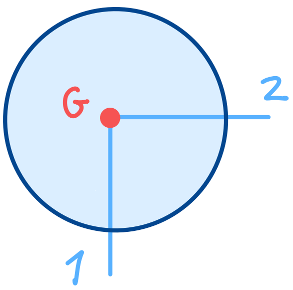
Canvi a O via Steiner

$$[\mathbb{I}(O)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}(G)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & \\ & ms^2 & \\ & & ms^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}^{\oplus}(O)} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I+ms^2 & \\ & & 2I+ms^2 \end{bmatrix}$$



$$[\mathbb{I}(G)]_B = [\mathbb{I}_{disc}(G)]_B + [\mathbb{I}_{barra}(G)]_B =$$

Disc

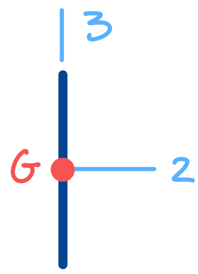


$$[\mathbb{I}_{disc}(G)]_B = \begin{bmatrix} I' & & \\ & I' & \\ & & 2I' \end{bmatrix} =$$

$I' = \frac{1}{4} m R^2$ (taules)

$$= \frac{mR^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Barra



$$[\mathbb{I}_{barra}(G)] = \begin{bmatrix} I'' & & \\ & I'' & \\ & & 0 \end{bmatrix} =$$

Taules (cilindre)

$$I'' = m\left(\frac{1}{4}0^2 + \frac{(2L)^2}{12}\right) = \frac{mL^2}{3}$$

$$= \frac{mL^2}{3}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} & & \\ & \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} & \\ & & 2\frac{mR^2}{4} \end{bmatrix}$$

Han de ser = perquè sigui rotor esfèric

Caldrà que

$$\frac{\cancel{m}R^2}{4} + \frac{\cancel{m}L^2}{3} = \frac{\cancel{m}R^2}{2}$$

$$3R^2 + 4L^2 = 6R^2$$

$$4L^2 = 3R^2$$

$$\boxed{\frac{L}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$