9P

Versió 1.2

Problemes de dinàmica de partícula sobre:

Oscil·lacions i punts d'equilibri

Integració eqs. mov. senzilles
Oscil·lacions 1GL
Punts d'equilibri
Linealització

Lluís Ros

https://lluisros.github.io/mecanica

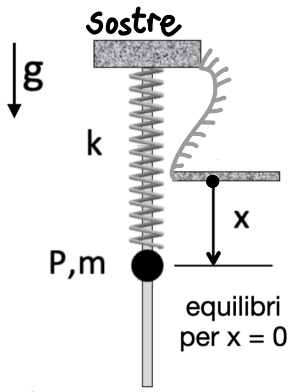
Aquest exercici prepara el terreny per a futurs exercicis!

La partícula **P** de massa m penja d'una molla lineal de constant k que té un extrem lligat a una guia llisa vertical fixa a terra (T). La guia travessa la partícula impedint el seu moviment lateral. Per a x = 0 la partícula es troba en equilibri. Determina:

- La força de la molla en funció de x.
- L'equació del moviment per la coordenada x.
- La força de la guia sobre **P**.
- L'evolució de x en funció del temps.

És x = 0 una posició d'equilibri estable?

Quina és la freqüència de les oscil·lacions al voltant d'aquesta posició?



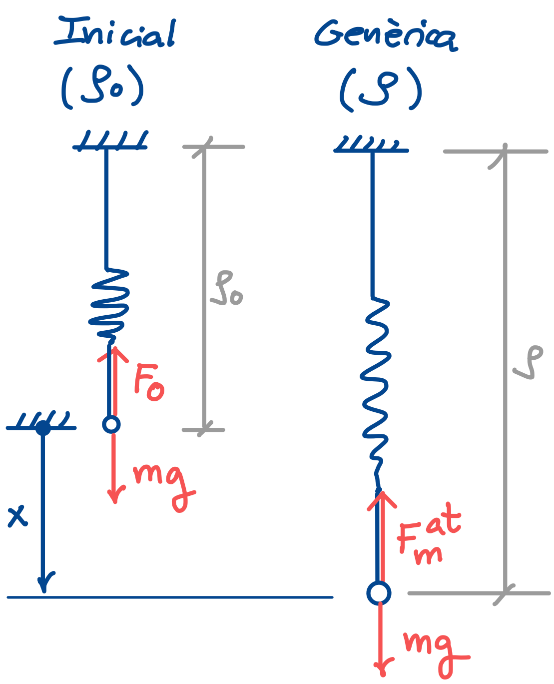
Força molla (F_m) en funció d'x

S'ha definit x com al dibuix, i no des del sostre, perquè convé que l'origen de coordenades correspongui a una configuració dinàmicament interessant ($x=0 \Rightarrow$ equilibri en aq. cas)

Quin criteri utilitzem per formular F_m?

— No ens donen F_0 però per $x=0$, P és en equilibri! Ergo triem com a config. inicial de la molla (ρ_0) la que tenim per $x=0$ i calculem F_0 imposant la condició d'equilibri:

$$(\uparrow F_0)+(\downarrow mg)=\bar{0}$$
$$F_0 = mg$$



— Com que en l'equilibri F_0 és atractiva, farem servir el crit. d'atracció:

$$F_m^{at} = F_0 + K\Delta\rho$$

$$\Big\downarrow \; F_0 = mg, \quad \Delta\rho = x$$

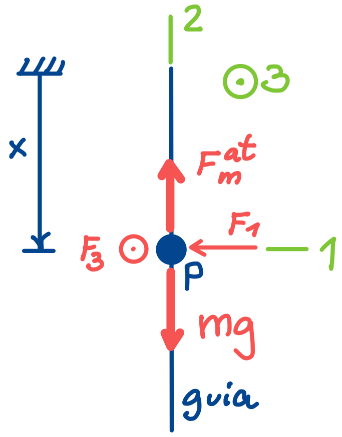
$$\boxed{F_m^{at} = mg + kx} \quad (1)$$

Eq. del mov. per x i força guia → P

Forces sobre P

- Pes $\downarrow mg$
- $\uparrow F_m^{at}$
- $\vec{F}^{\,enllaç}_{guia \to P} = \underbrace{(\leftarrow F_1) + (\odot F_3)}^{\text{Força d'enllaç guia → P}}$

  Només té components en dirs. 1 i 3 (F_1, F_3) ja que en dir. 2 P es pot moure lliurement sobre la guia.



2ª LN en dirs. 1 i 3 ← Ens determinen la força guia → P

$$\left.\begin{array}{l}(\leftarrow F_1) = \bar{0} \\ (\odot F_3) = \bar{0}\end{array}\right\} \Rightarrow F_1 = F_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{F}^{\,enllaç}_{guia \to P} = \bar{0}}$$

2ª LN en dir. 2 (vertical) ← Ens dóna l'eq. mov. per x

$$(\downarrow mg) + \left[\uparrow (mg + Kx)\right] = (\downarrow m\ddot{x})$$

$$mg - (mg + Kx) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \qquad (2)$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \qquad (2')$$

$$\ddot{x} = -\underbrace{\frac{K}{m}}_{\mathbb{K}}x \qquad (2'')$$

Equació del moviment per la coordenada x

Sovint s'escriu en una d'aquestes tres formes equivalents

Com veiem, l'Eq. (2), o les formes equivalents (2') i (3') són EDOs lineals a coefs. constants. És important destacar que, en aquest exemple, $\mathbb{K} = \frac{K}{m} > 0$.

Evolució $x(t)$?

Cal mirar-se (2") com una EDO on x és una funció del temps que volem determinar:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{K}{m}\, x(t) \qquad (3)$$

$K = ct$

(3), (4), (5) defineixen un problema de valor inicial (PVI)

$x(t)$ és la incògnita de l'EDO. Sovint, però, la dependència de x amb t s'omet!

Volem trobar una $x(t)$ que verifiqui (3) i les $\underbrace{\text{condicions inicials}}_{\text{c.i.}}$:

$$x(0) = x_0 \qquad (4)$$
$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \qquad (5)$$

Valors de x i $\dot{x}$ per $t=0$

Com ho fem? Fàcil! L'eq. (3) demana que $\ddot{x}(t)$ sigui proporcional a $x(t)$. Si se'ns acut alguna funció que satisfaci això [i (4) i (5)] per algun valor dels seus paràmetres, ja està! Ja haurem resolt el PVI. I... les següents funcions ho satisfan!

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \qquad (6)$$
$$x(t) = D\cdot\sin(\omega t + \varphi) \qquad (7)$$

Comprovem, per exemple, que (6) satisfà el PVI per a certs valors de A, B i ω:

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \qquad (8)$$
$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t) \qquad (9)$$
$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t) \qquad (10)$$

Comparant (10) amb (3) veiem que

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

⋮

⋮

A i B es determinen imposant les c.i. (4) i (5) via (8) i (9):

$$x_0 = A\sin(\omega\cdot 0) + B\cos(\omega\cdot 0) = B \quad\rightarrow\quad \boxed{B = x_0}$$

$$\dot{x}_0 = A\omega\cos(\omega\cdot 0) - B\omega\sin(\omega\cdot 0) = A\omega \quad\rightarrow\quad \boxed{A = \frac{\dot{x}_0}{\omega}}$$

Ergo $x(t)$ definida com a (6), amb els valors de A, B i ω que hem trobat, és la solució del PVI!

Exercici pel lector: Proveu que (7) també és una solució del PVI amb els valors

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}} \qquad \boxed{D = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}} \qquad \boxed{\tan\varphi = \frac{\omega\, x_0}{\dot{x}_0}}$$

Igual q. abans!

La solució (6) i la (7) són iguals! Són dues maneres equivalents d'escriure la mateixa oscil·lació sinusoïdal.

Significat de D, φ, ω:

D = Amplitud de l'oscil·lació [m]

φ = Fase de l'oscil·lació [rad]

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ = freqüència natural de l'oscil·lació [rad/s]

Observ: ω és un paràmetre intrínsec del sistema: no depèn de les c.i., només de m i K.

D i φ són pars. extrínsecs (depenen de les c.i.)

En els exercicis, típicament preguntem $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, no D i φ. Ja ho veureu...

Detecció i anàlisi d'estabilitat de les configuracions d'equilibri

Utilitzant l'eq. del moviment

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x \qquad (6)$$

hem de ser capaços de trobar les posicions d'equilibri del sistema.

Definició

> Una config. d'equilibri x_{eq} és aquella en la que, si hi deixem el sistema aturat ($\dot{x}=0$), s'hi queda ($\ddot{x}=0$).

Clarament, si imposem

$x = x_{eq}$,
$\dot{x} = 0$
$\ddot{x} = 0$

sempre imposarem això per obtenir les posicions d'equilibri

a (6), obtenim

$$0 = -\frac{k}{m} x_{eq} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{eq} = 0}$$

Hem trobat la config. d'equilibri de l'enunciat, com era d'esperar!

Anem a veure si $x_{eq} = 0$ és d'equilibri estable o inestable:

- Estable vol dir que si x s'allunya de x_{eq} una mica, la dinàmica provoca el retorn de x cap a x_{eq}.

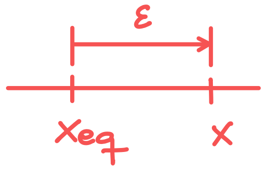
- Inestable és el comportament contrari: tota pertorbació que ens desviï x de x_{eq}, allunyarà x de x_{eq} encara més.

La molla és un <u>element recuperador</u>: si ens allunyem de x_{eq} ($=0$) una mica, ens hi retorna. Per tant és d'esperar que l'equilibri serà estable. Però cal demostrar-ho matemàticament. Sempre es fa analitzant l'EDO de l'error ε (la desviació $\varepsilon = x - x_{eq}$). Busquem-la:

Si a (6) hi substituïm

$$\left.\begin{aligned} x &= \overset{0}{x_{eq}} + \varepsilon \\ \dot{x} &= \dot{\varepsilon} \\ \ddot{x} &= \ddot{\varepsilon} \end{aligned}\right]$$

ε = "error" o desviació de x respecte x_{eq} (*)



queda

$$\left.\ddot{\varepsilon} = -\frac{k}{m}\varepsilon\right]$$

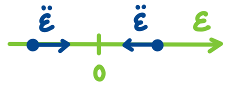
EDO de l'error ε

[determina l'evolució $\varepsilon(t)$]

i, clarament, com que k i m són > 0 al nostre sistema:

$$\ddot{\varepsilon} = -\underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\mathbb{K} > 0}\varepsilon \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{si } \varepsilon > 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} < 0 \Rightarrow \varepsilon \text{ torna cap a } 0 \\ \text{si } \varepsilon < 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \varepsilon \text{ torna cap a } 0 \end{array}\right]$$

x_{eq} és d'equilibri ESTABLE

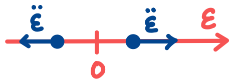


Què passaria si $\mathbb{K}$ fos < 0?

(a l'exercici no es el cas però suposem-ho)

$$\ddot{\varepsilon} = -\underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\mathbb{K} < 0}\varepsilon \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{si } \varepsilon > 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \varepsilon \text{ s'allunya de } 0 \\ \text{si } \varepsilon < 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} < 0 \Rightarrow \varepsilon \text{ s'allunya de } 0 \end{array}\right]$$

x_{eq} seria d'equilibri INESTABLE



Important entendre-ho !

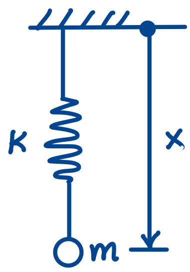
Cal dir que en aquest exercici:

- L'EDO de l'error queda formalment igual a l'eq. del moviment perquè $x_{eq} = 0$, i per tant $\varepsilon = x$. Però en altres exercicis no serà així necessàriament

- k i m són positives, i per tant $\mathbb{K} > 0$, però més endavant veurem altres casos on $\ddot{\varepsilon} = -\mathbb{K}\varepsilon$ amb $\mathbb{K} < 0$.

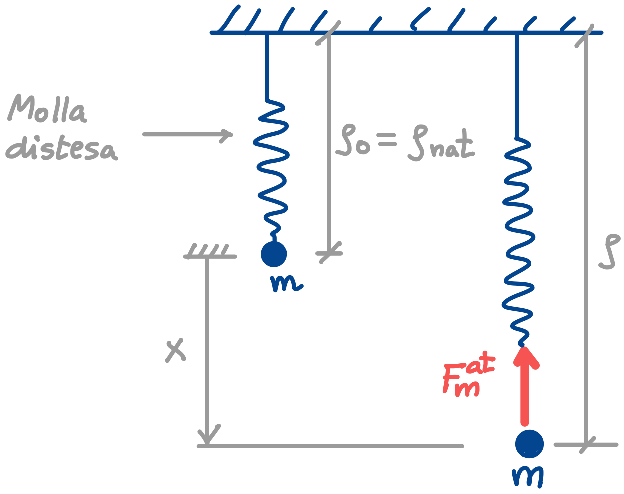
Què passaria si s'hagués triat un origen $x=0$ diferent ?

Com a origen $x=0$ per a x, a l'exercici hem triat la posició d'equilibri. Això ens ha permès calcular F_0 ràpidament. No hem triat com a origen el sostre perquè és antinatural. La posició $x=0$ no correspon a cap configuració dinàmicament especial. A més, té poc sentit perquè per $x=0$ la molla tindria llargària nul·la, cosa que a la pràctica no passa.



Però... podríem haver suposat que $x=0$ quan la molla està distesa? Sí! Fem-ho, i veurem que els resultats són els mateixos.

Formulació de F_m



En la situació inicial (ρ_0) la molla no fa força ($F_0 = 0$)

En la genèrica (ρ) fa una força de valor

$$\boxed{F_m^{at} = \underbrace{F_0}_{0} + K\underbrace{\Delta\rho}_{x} = Kx}$$

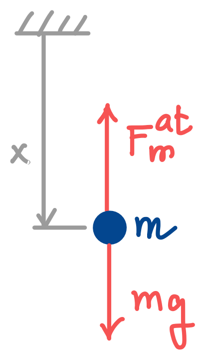
Eq. mov. per la coord. x

$2^a LN]_{\text{vertical}}$:

$$(\uparrow Kx) + (\downarrow mg) = m(\downarrow \ddot{x})$$

$$Kx - mg = -m\ddot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + Kx = mg} \quad (\square)$$



Ara surt una EDO lineal a coefs ct no homogènia (hi ha mg al membre dret)

Posicions d'equilibri

Imposem $x = x_{eq}$, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$ a (□) i queda:

$$K\, x_{eq} = mg \Rightarrow \boxed{x_{eq} = \frac{mg}{K}} \quad (□□)$$

Estabilitat de x_{eq}

Busquem EDO de l'error substituint
a l'eq. del mov. (□):

$$\left[\begin{array}{l} x = x_{eq} + \varepsilon \\ \dot{x} = \dot{\varepsilon} \\ \ddot{x} = \ddot{\varepsilon} \end{array}\right.$$

$$m\ddot{\varepsilon} + K(x_{eq} + \varepsilon) = mg$$

$$\Big\downarrow \text{ De } (□□),\ mg = K \cdot x_{eq}$$

$$m\ddot{\varepsilon} + K x_{eq} + K\varepsilon = K x_{eq}$$

$$\downarrow$$

$$m\ddot{\varepsilon} + K\varepsilon = 0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} = -\frac{K}{m}\varepsilon} \quad \text{EDO de l'error}$$

Surt la mateixa EDO de l'error que abans $\Rightarrow$ ERGO arribem a les mateixes conclusions, com era d'esperar. Com que $\bar{K} = \frac{K}{m} > 0$, $x_{eq} = \frac{mg}{K}$ és d'equilibri estable. Ho ha de ser, perquè és la mateixa posició d'equilibri que la d'abans! Només li hem donat una coordenada diferent!

Aquest exercici aplica els resultats de l’exercici anterior a un cas més complex.

Versió simplificada del prob. 1.7 de RBD, pàg 66

Partícula sobre guia inclinada amb molla

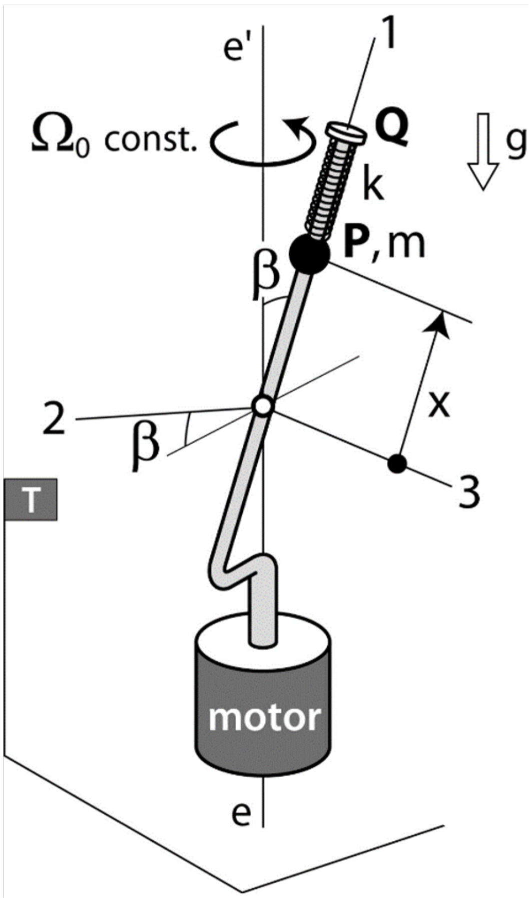
Una partícula P de massa m llisca al llarg d'una guia recta inclinada i llisa que gira amb velocitat angular constant Ω_0 al voltant de l'eix vertical e-e' relatiu a terra (T). La partícula està unida a una molla que té el seu extrem superior unit al punt Q de la guia. La coordenada x descriu la posició de la partícula relativa a la guia. Quan $\Omega_0 = 0$, la posició $x = 0$ correspon a una posició d'equilibri. Determina:

(a) Quants graus de llibertat té el sistema? Són lliures o forçats?

(b) L'equació del moviment per a la coordenada x. A quin tipus de moviment correspon?

(c) La naturalesa de $x = 0$ (equilibri estable o inestable).

(d) Les components de la força d'enllaç sobre P.



Farem (a), (b), i (c) i deixarem (d) com a deures

(a) Anàlisi dels GL

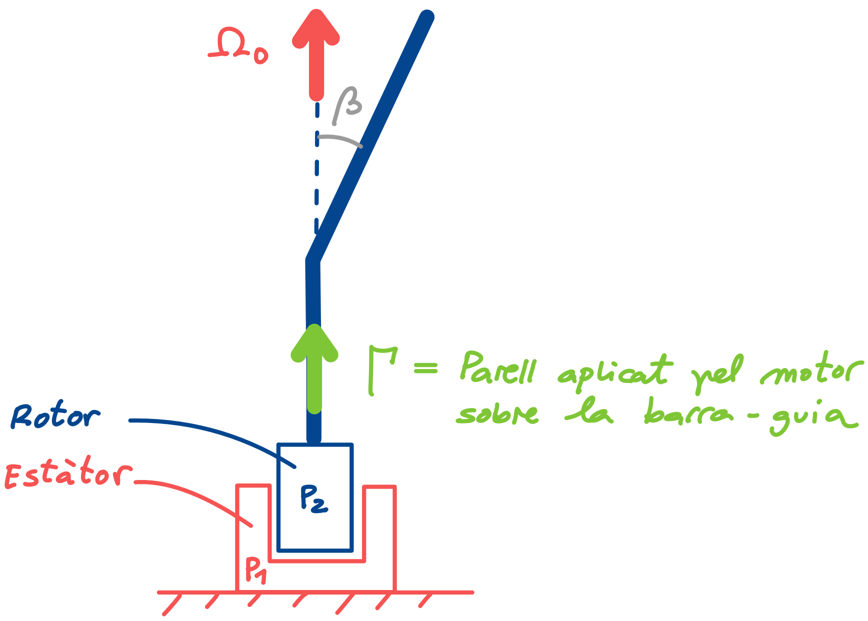
Sigui ψ = angle girat per l'eix del motor resp. una dir. fixa a T.

Sist. amb 2 GL $\left[\begin{array}{l} \dot{\psi} \ (= \Omega_0 = ct \text{ en aquest exercici}) \\ \dot{x} \end{array} \right.$

ψ és un GL forçat : està actuat per un motor que aplica el parell Γ que calgui sobre la guia per garantir $\dot{\psi} = \Omega_0 = ct.$

Cal pensar el motor com dues peces P_1 i P_2, l'estàtor i el rotor, unides al terra i la guia respectivament.

Aquesta manera de veure un motor és important de cara a futurs exercicis



L'equació del mov. per a ψ és trivial. Com que $\dot{\psi} = \Omega_0 = ct$, clarament

$$\boxed{\ddot{\psi} = 0} \leftarrow \text{Eq. del mov. per a } \psi.$$

x és un GL lliure : $x(t)$ evoluciona d'acord amb les lleis de la dinàmica, sense que el motor pugui forçar $x(t)$ de manera directa ($x(t)$ dependrà de m, k, Ω_0, β)

(b) Eq. del movim. per a la coord. x

Volem trobar l'eq. del movim. per x, que tindrà la forma:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \text{pars}) \qquad (1)$$

└ Busquem aquesta f

Pars = paràmetres dinàmics / geomètrics

Es un problema de dinàmica de partícula. En tindrem prou amb aplicar la 2a llei de Newton sobre P.

Coses que sabem a priori de (1):

- Si $\beta = 0$, ha de coincidir amb la de l'exemple anterior:

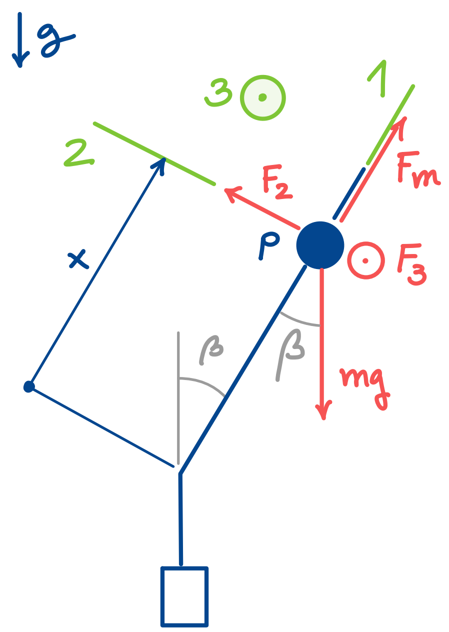
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

- Si $\Omega_0 = 0$, $x = 0$ ha de ser d'equilibri (per l'enunciat) i hauria de sortir reflectida a (1).

Diferències amb el problema anterior:

- Ara el problema és 3D!
- P està sotmesa a forces d'enllaç (guia → P)

Forces sobre P



- Només hi ha forces d'enllaç en dirs. 2 i 3 (F_2, F_3) perquè en dir. 1 el moviment és permès.

- F_2 i F_3 poden tenir qualsevol signe (enllaç bilateral). Per això, cap es diu N!

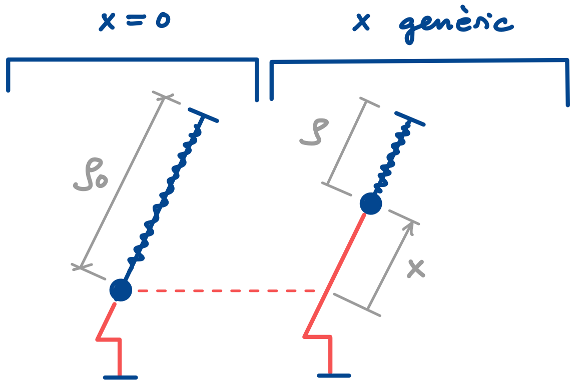
Formulació de F_m

La força de la molla és atractiva en la situació d'equilibri $x=0$ $\Rightarrow$ fem servir el criteri d'atracció:

$$F_m^{at} = F_0 + k\,\Delta\rho$$

No és dada! Cal deduir F_0 aplicant condicions d'equilibri

$\rho - \rho_0 = -x$ Molla s'escurça!

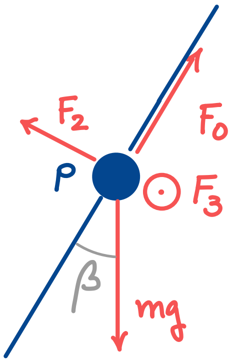


Per $x=0$, $F_m = F_0$, i P en equilibri:

$$\sum \bar{F}_{\to P} = 0 \Big]_{Dir.\ guia} :$$

$$(\nearrow F_0) + (\swarrow mg\cos\beta) = 0$$

$$F_0 = mg\cos\beta$$



Problema d'estàtica

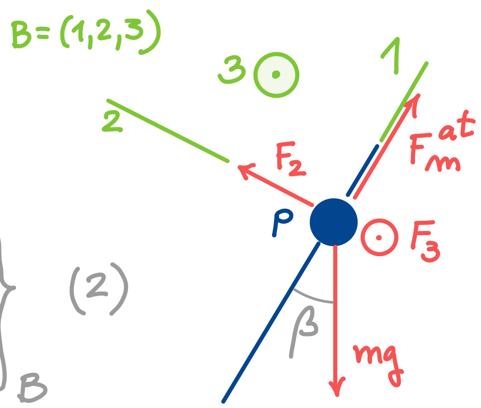
Per tant:

$$\boxed{F_m^{at} = mg\cos\beta - kx}$$

2a LN sobre P

$$\sum \bar{F}_{\to P} = m\,\bar{a}_T(P)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{mg\cos\beta} - kx - \cancel{mg\cos\beta} \\ F_2 - mg\sin\beta \\ F_3 \end{array} \right\}_B \quad (2)$$

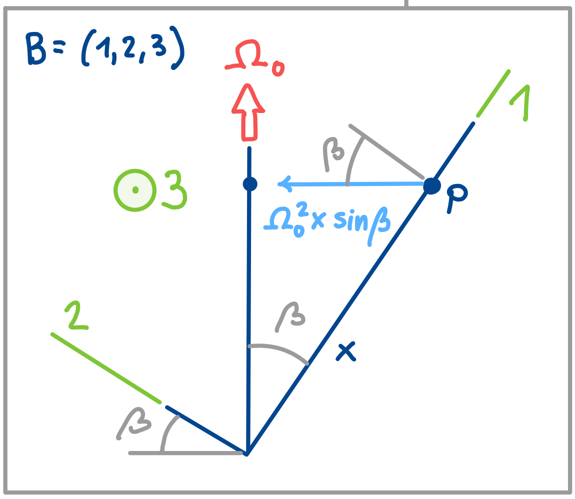


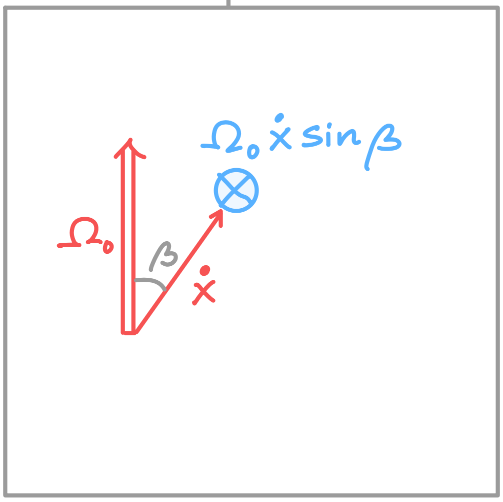
En dir. 1 no hi ha forces d'enllaç! Ergo la component 1 de la 2a LN ens donarà l'eq. del mov. que busquem.

Full de ruta per obtenir l'eq. del mov $\left\{ \left. 2^a \text{ Llei Newton} \right]_1 \right.$ $\Rightarrow$ Només ens caldrà la component 1 de $\bar{a}_T(P)$

$\bar{a}_T(P)$ via comp. d'acceleracions $(AB = T,\ REL = \text{Guia})$ (*)

$$\bar{a}_T(P) = \underbrace{\bar{a}_{Guia}(P)}_{(\nearrow \ddot{x})} + \underbrace{\bar{a}_{ar}(P)}_{(\overleftarrow{\Omega_0^2 x \sin\beta})} + \underbrace{2\,\bar{\Omega}_T^{Guia} \times \bar{v}_{Guia}(P)}_{\otimes\, 2\Omega_0 \dot{x} \sin\beta} =$$





$$= \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\Omega_0^2 x \sin^2\beta \\ \Omega_0^2 x \sin\beta\cos\beta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\Omega_0 \dot{x} \sin\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} - \Omega_0^2 x \sin^2\beta \\ \Omega_0^2 x \sin\beta\cos\beta \\ -2\Omega_0 \dot{x} \sin\beta \end{Bmatrix} \quad (3)$$

2^a LN en dir. 1

Queda:

$$-Kx = m\left(\ddot{x} - \Omega_0^2 x \sin^2\beta\right)$$

$$\boxed{m\ddot{x} + \underbrace{(K - m\Omega_0^2 \sin^2\beta)}_{K'}\,x = 0} \quad (4)$$

Eq. mov. per la coord. x

Té la forma

$$m\ddot{x} + K'x = 0 \Rightarrow \ddot{x} = -\overset{\bar{K}=}{\frac{K'}{m}}\,x \quad (5)$$

Mateixa que la de l'exercici anterior!

(*) Calculem totes les components per exercitar-nos. També, perquè calen per l'apartat (d). Però en altres situacions intenteu calcular només allò que cal.

Comprovacions del que sabíem a priori :

- Si $\beta = 0$, $K' = K$. Coincideix amb la de l'ex. anterior!
- Pel que hem vist a l'ex anterior, $x = 0$ és posició d'equilibri ($x_{eq} = 0$), de l'EDO (4). De fet serà així independentment del valor Ω_0. En particular és cert que, per $\Omega_0 = 0$, $x = 0$ és pos. d'equilibri.

Evolució $x(t)$

Serà la mateixa que a l'ex. anterior:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

amb

$$\omega = \sqrt{\frac{K'}{m}} \qquad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \qquad \tan\varphi = \frac{x_0 \omega}{\dot{x}_0}$$

Moviment oscil·latori de freqüència $\sqrt{\frac{K'}{m}}$

(c) Anàlisi de l'estabilitat d'$x_{eq} = 0$

Per la teoria que es desprèn de l'exercici anterior sabem que :

- Si $\mathbb{K} = \frac{K'}{m} > 0$, $x_{eq} = 0$ serà d'equilibri ESTABLE
- Si $\mathbb{K} = \frac{K'}{m} < 0$, $x_{eq} = 0$ serà d'equilibri INESTABLE

En el nostre cas, utilitzant el valor de K' de l'Eq. (4)

$$\mathbb{K} = \frac{K - m\Omega_0^2 \sin^2\beta}{m}$$

i tindrem $\mathbb{K} > 0$ (equilibri ESTABLE) quan

$$\frac{K - m\Omega_0^2 \sin^2\beta}{m} > 0 \iff K > m\Omega_0^2 \sin^2\beta$$

o, equivalentment, quan

$$\Omega_0 < \underbrace{\sqrt{\frac{K}{m \sin^2\beta}}}_{\Omega_{crítica}}$$

És a dir, per $\Omega_0 < \Omega_{crítica}$ l'equilibri es ESTABLE. Per $\Omega > \Omega_{crítica}$ passa a INESTABLE.

Vol dir que si deixem P a $x=0$, per $\Omega_0 < \Omega_{crítica}$ les petites pertorbacions que apartin x de 0 retornen x cap a 0. Per $\Omega_0 > \Omega_{crítica}$ això no passarà. Una petita pertorbació apartarà P cada vegada més de $x=0$.

Fixem-nos que com més rígida és la molla, major és el valor $\Omega_{crítica}$.

Components de la força d'enllaç sobre P

Es troben fàcilment formulant la 2ª LN en dirs. 2 i 3:

2ª LN]$_{dir. 2}$:

$$F_2 - mg\sin\beta = m\left(\Omega_0^2 x \sin\beta \cos\beta\right)$$

$$\boxed{F_2 = m\sin\beta\left(\Omega_0^2 x \cos\beta + g\right)} \qquad (7)$$

2ª LN]$_{dir. 3}$:

$$\boxed{F_3 = m\left(-2\Omega_0 \dot{x}\sin\beta\right) = -2m\Omega_0\dot{x}\sin\beta} \qquad (8)$$

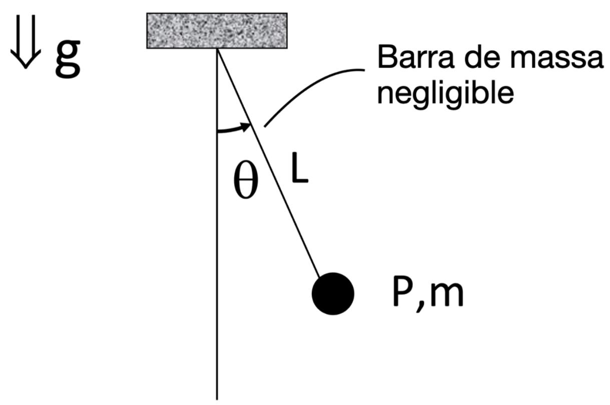
Anàlisi dimensional: tant (7) com (8) tenen unitats de $kg \cdot \frac{m}{s^2} = N \implies$ Són dimensionalment consistents.

Aquest exercici ensenya com estudiar les posicions d'equilibri quan l'equació del moviment és no lineal (⇒ L'EDO de l'error surt no lineal ⇒ cal linealitzar-la). És important entendre'l bé.

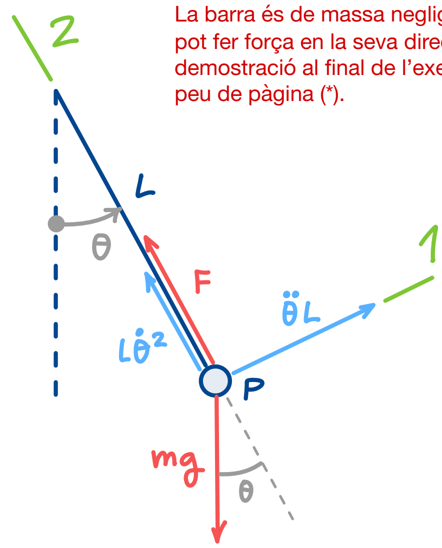
El pèndol simple de la figura té la massa m concentrada a P.

Trobeu-ne:

1. L'equació del moviment per a la coordenada θ.
2. Les configuracions d'equilibri, determinant si són estables o inestables.



(1) Eq. mov. coord. θ



La barra és de massa negligible ⇒ sols pot fer força en la seva direcció. Vegeu demostració al final de l'exercici i nota a peu de pàgina (*).

En dir. 1 no hi ha forces d'enllaç sobre P. Per tant, l'eq. del mov. serà la comp. en dir. 1 de

$$\Sigma \bar{F}_{\to P} = m\,\bar{a}_T(P)$$

$$(\swarrow mg\sin\theta) = m\,(\nearrow \ddot\theta L)$$

$$-\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}\ddot\theta L$$

$$\boxed{\ddot\theta = -\frac{g}{L}\sin\theta} \quad (\mathrm{I})$$

EDO no lineal!

$\ddot\theta(t)$ no és proporcional a $\theta(t)$

(2) Configs. d'equilibri

Config. equilibri (θ_{eq}) = aquella en la que si hi deixo el sistema amb vel. nul·la ($\dot\theta = 0$), s'hi queda ($\ddot\theta = 0$).

Substituïm $\boxed{\begin{array}{l}\theta = \theta_{eq}\\ \dot\theta = 0\\ \ddot\theta = 0\end{array}}$ a (I) per trobar-les:

(*) Aquesta hipòtesi permet resoldre el problema aplicant només la 2a LN a P. Sense aquesta hipòtesi, barra i P formarien un sòlid amb massa distribuida ⇒ caldrien els teoremes vectorials per obtenir l'equació del moviment (els veurem + endavant).

$$0 = -\frac{g}{L}\sin\theta_{eq} \Rightarrow \sin\theta_{eq} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_{eq} = n\pi,\ n = 0,1,2,\dots}$$

Ergo les posicions inferior i superior del pèndol són d'equilibri. Són estables? La inferior sí, la superior no! Però com ho demostrem matemàticament? Analitzant com són les petites oscil·lacions al seu voltant! En 3 passos:

1 Obtenim EDO de l'error:

Valor molt petit ($|\varepsilon| \ll 1$)

Substituïm $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$ a (I)

(Implica substituir-hi $\dot\theta = \dot\varepsilon$, $\ddot\theta = \ddot\varepsilon$ també)

Queda:

$$\ddot\varepsilon = -\frac{g}{L}\sin(\theta_{eq} + \varepsilon)$$

$$\ddot\varepsilon = -\frac{g}{L}\left[\underbrace{\sin\theta_{eq}}_{0}\cdot\cos\varepsilon + \cos\theta_{eq}\sin\varepsilon\right]$$

$$\ddot\varepsilon = -\frac{g\cos\theta_{eq}}{L}\sin\varepsilon$$

EDO de l'error ε (No lineal)

2 La linealitzem:

Com que ε és molt petit ($|\varepsilon| \ll 1$, $\varepsilon^2 \simeq 0$, $\varepsilon^3 \simeq 0$, ...) aproximem les funcions no lineals que queden pel seu desenvolupament en sèrie de Taylor fins a 1er ordre (termes lineals):

$$\left(\begin{aligned} \sin\varepsilon &= \varepsilon - \cancel{\frac{\varepsilon^3}{3!}}^{\simeq 0} + \dots \simeq \varepsilon \\ \cos\varepsilon &= 1 - \cancel{\frac{\varepsilon^2}{2}}^{\simeq 0} + \dots \simeq 1 \end{aligned}\right)$$

$$\ddot\varepsilon = -\frac{g\cos\theta_{eq}}{L}\cdot\overbrace{\sin\varepsilon}^{\simeq\varepsilon}$$

$$\ddot\varepsilon = -\underbrace{\frac{g\cos\theta_{eq}}{L}}_{K}\cdot\varepsilon$$

EDO lineal!

$\boxed{3}$ Mirem si $\mathbb{K} > 0$:

Com que surt una EDO lineal com la de la molla vertical, l'equilibri serà estable quan $\mathbb{K} > 0$:

Per $\theta_{eq} = 0$, $\mathbb{K} = \frac{g}{L} > 0 \Rightarrow$ Equilibri estable

Per $\theta_{eq} = \pi$, $\mathbb{K} = -\frac{g}{L} < 0 \Rightarrow$ Equilibri inestable

Important:

- En el pas $\boxed{2}$ podria caldre la linealització d'altres termes, apart de $\sin\varepsilon \simeq \varepsilon$. Resumim les linealitzacions més habituals, on q és la coordenada de treball:

  - si apareixen polinomis de grau superior a 1:

$$q = q_{eq} + \varepsilon$$

$$q^2 = (q_{eq}+\varepsilon)^2 = \varepsilon^2 + 2q_{eq}\varepsilon + q_{eq}^2 \approx +2q_{eq}\varepsilon + q_{eq}^2$$

$$q^3 = (q_{eq}+\varepsilon)^3 = \varepsilon^3 + 3q_{eq}\varepsilon^2 + 3q_{eq}^2\varepsilon + q_{eq}^3 \approx 3q_{eq}^2\varepsilon + q_{eq}^3$$

  - si es tracta d'una coordenada angular ($q = \theta$) i apareixen funcions sinus i cosinus:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_{eq} + \varepsilon \\ \sin\theta &= \sin(\theta_{eq}+\varepsilon) = \sin\theta_{eq}\cos\varepsilon + \cos\theta_{eq}\sin\varepsilon \\ \cos\theta &= \cos(\theta_{eq}+\varepsilon) = \cos\theta_{eq}\cos\varepsilon - \sin\theta_{eq}\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon &= \varepsilon - (1/3!)\varepsilon^3 + \ldots \simeq \varepsilon \\ \cos\varepsilon &= 1 - (1/2)\varepsilon^2 + \ldots \simeq 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta_{eq}+\varepsilon) \simeq \sin\theta_{eq} + \varepsilon\cos\theta_{eq} \\ \cos(\theta_{eq}+\varepsilon) \simeq \cos\theta_{eq} - \varepsilon\sin\theta_{eq} \end{cases}$$

- L'EDO lineal obtinguda al pas 2 serà de la forma

$$\ddot{\varepsilon} = -\mathbb{K}\,\varepsilon$$

habitualment, però podria també ser (*↓)

$$\ddot{\varepsilon} = -\mathbb{K}\varepsilon - \mathbb{C}\dot{\varepsilon} \qquad (\text{on } \mathbb{C} = \text{constant} > 0)$$

Es demostra que $\mathbb{C}$ no afecta l'estabilitat i seguirà essent:

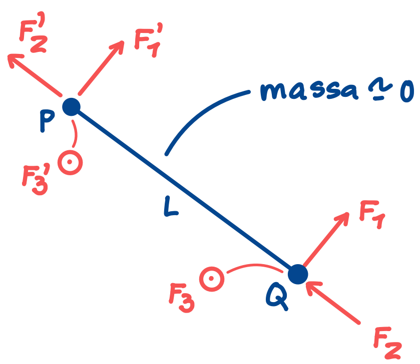
$\mathbb{K} > 0 \Rightarrow$ Equilibri estable

$\mathbb{K} < 0 \Rightarrow$ " inestable

(*) Quan hi ha frec viscós típicament

Com és que una barra de massa negligible només pot aplicar força sobre els seus extrems en dir. longitudinal ?

Mirem quines forces hi ha aplicades sobre la barra :



El teorema del moment cinètic (*) (TMC) aplicat a la barra en el punt P queda :

Massa barra ≃ 0

$$\sum \bar{M}_{ext}(P) = \bar{0}$$

$$(\odot\, F_1 L) + (\swarrow F_3 L) = \bar{0}$$

Això genera 2 eqs escalars :

$$F_1 L = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 0$$
$$F_3 L = 0 \quad \Rightarrow \quad F_3 = 0$$

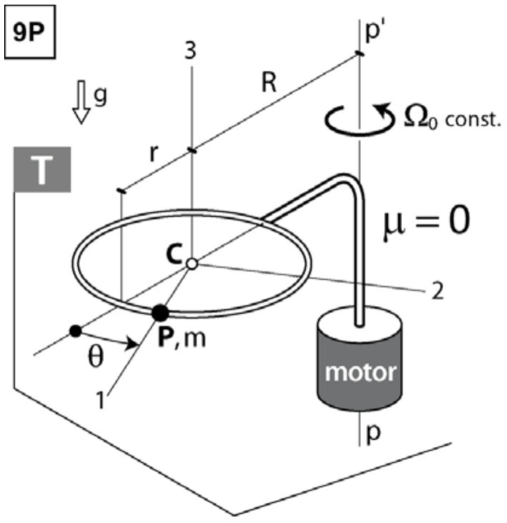
Aplicant TMC a Q surt, anàlogament :

$$F_1' = 0, \quad F_3' = 0$$

Ergo la barra només pot aplicar forces en la dir. longitudinal sobre els seus extrems.

Més endavant veurem que un sòlid intermedi de massa nul·la és un "sòlid auxiliar d'enllaç". La barra d'aquest exercici n'és un exemple.

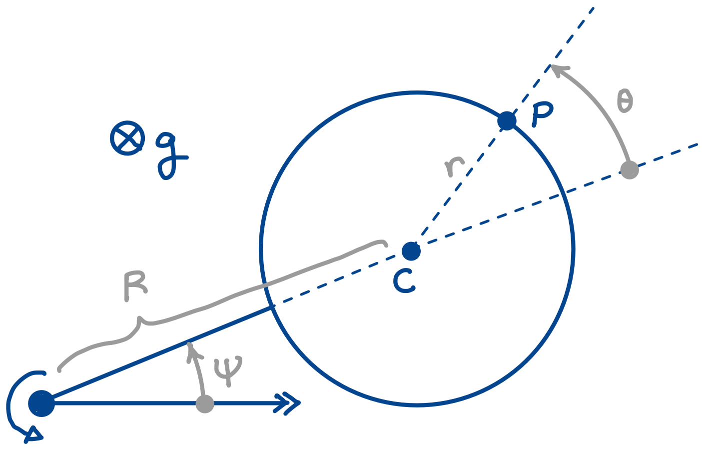
(*) El veurem aviat, però ja el coneixem de Física, i en aquest cas queda reduït a "suma de moments = 0"



La partícula **P** de massa m es mou dins una guia llisa que gira amb Ω_0 constant respecte del terra (T). Troba:

- l'equació del moviment per a la coordenada θ.
- la força de la guia sobre **P**.

A principi de curs ja vam veure aquest sistema. Vista 2D:



$\dot{\psi} = \Omega_0 = ct$

Sistema amb 2 GL $\left[\begin{array}{l} \dot{\psi} = \Omega_0 = ct \quad (\text{GL forçat pel motor}) \\ \dot{\theta} \quad (\text{GL lliure}) \end{array} \right.$

En ser $\dot{\psi}$ forçat a valdre $\Omega_0 = ct$, l'equació del moviment per a la coordenada ψ és trivial. És:

$$\ddot{\psi} = 0$$

Per això només ens pregunten l'eq. del mov. per a θ.

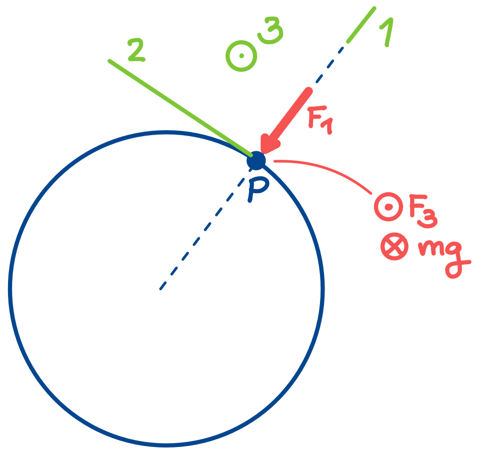
Suposarem que P està lliscant resp. la guia (altrament l'eq. mov. per a θ seria trivial: $\ddot{\theta} = 0$).

Eq. del mov. per a θ

Full de ruta per trobar-la

Forces sobre P :

- Pes: $\otimes mg$
- $\bar{F}_{\substack{\text{enllaç} \\ \text{Guia} \to P}} = (\swarrow F_1) + (\odot F_3)$
- Guia llisa $\Rightarrow$ P no sotmesa a fricció



Anàlisi d'eqs. ; incògnites

- Incògnites : $\ddot{\theta}, F_1, F_3$
- Eqs: les 3 de la 2ª Llei de Newton

$\Rightarrow$ Problema determinat ✓

Veiem que en dir. 2 (tangencial) no hi ha forces d'enllaç. Per tant, la 2ª LN en dir. 2 ens proporcionarà l'eq. mov. per a θ:

Full de ruta per trobar eq. mov. coord. θ	$\Big[$ Formularem 2^a LN $\Big]_{dir. 2}$ $\left[\sum \bar{F}_{\to P}\right]_2 = m \cdot a_T(P)\Big]_2$

$\sum \bar{F}_{\to P}\Big]_2$

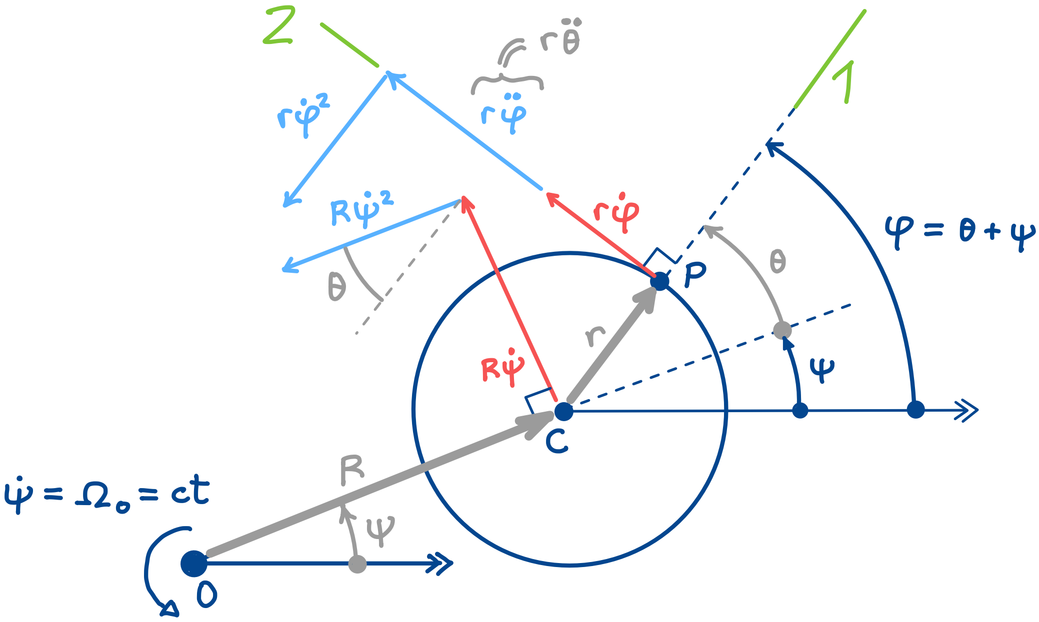
$$\sum F_{\to P}\Big]_2 = \bar{0}$$

$\bar{a}_T(P)\Big]_2$

Només ens cal $\bar{a}_T(P)$ en dir. 2 $\Longrightarrow$ Si podem, evitarem el càlcul de les altres components.

Calculem $\bar{a}_T(P)$ derivant $\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}$ geomètricament :

$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP} = (\nearrow R) + (\nearrow r)$$



$$\bar{v}_T(P) = \overbrace{\underbrace{(\uparrow R\dot{\psi})}_{\text{Sols canvia de dir., amb } \odot\dot{\psi}} + \underbrace{(\nwarrow r\dot{\varphi})}_{\text{canvia de valor i direcció (amb } \odot\dot{\varphi})}}^{\text{vecs. vermells}}$$

$$\dot{\psi} = \Omega_0 = ct$$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\theta} + \underset{0}{\underset{\|}{\ddot{\psi}}} = \ddot{\theta}$$

$$\left.\bar{a}_T(P)\right]_2 = \overbrace{(\nwarrow r\ddot{\varphi}) + (\nwarrow R\dot{\psi}^2 \sin\theta)}^{\text{vecs. blaus en dir. 2}} = \left[\nwarrow(r\ddot{\theta} + R\Omega_0^2 \sin\theta)\right]$$

2^a LN$]_2$

$$\bar{0} = m\left[\nwarrow(r\ddot{\theta} + R\Omega_0^2 \sin\theta)\right]$$

$$\downarrow$$

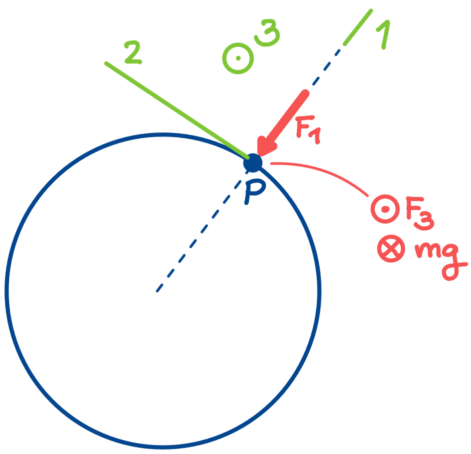
$$\boxed{0 = r\ddot{\theta} + R\Omega_0^2 \sin\theta}$$

Eq. mov. coord. θ

(EDO no lineal)

Força de la guia sobre P

$$\bar{F}^{\,\text{enllaç}}_{\text{guia}\to P} = (\swarrow F_1) + (\odot F_3)$$



La 2ª LN en dir. 1 ens donarà F_1. I en dir. 3 ens donarà F_3:

$2^a LN]_1$:

$$(\swarrow F_1) = m\,\bar{a}_T(P)]_1$$

vecs. blaus en dir. 1 ⟵ v. dibuix pàg. anterior

$$\bar{a}_T(P)]_1 = \underbrace{(\swarrow r\dot{\varphi}^2) + (\swarrow R\dot{\psi}^2\cos\theta)} = [\swarrow (r\dot{\varphi}^2 + R\Omega_0^2\cos\theta)]$$

$$\boxed{F_1 = m\,(r\dot{\varphi}^2 + R\Omega_0^2\cos\theta)} \quad (\text{on } \dot{\varphi} = \dot{\theta} + \Omega_0)$$

$2^a LN]_3$:

$$(\odot F_3) + (\otimes mg) = m\cdot\bar{0}$$

$$\boxed{F_3 = mg}$$

Obs: el sentit genèric positiu de F_1 i F_3 és l'assumit al dibuix de dalt.

Suggerències per practicar :

- Calculeu $\bar{a}_T(P)$ per comp. moviments i verifiqueu que surt el mateix resultat.

- Trobeu les configuracions d'equilibri θ_{eq} i determineu si són estables o inestables

- Si són estables, trobeu la freqüència de les oscil·lacions.