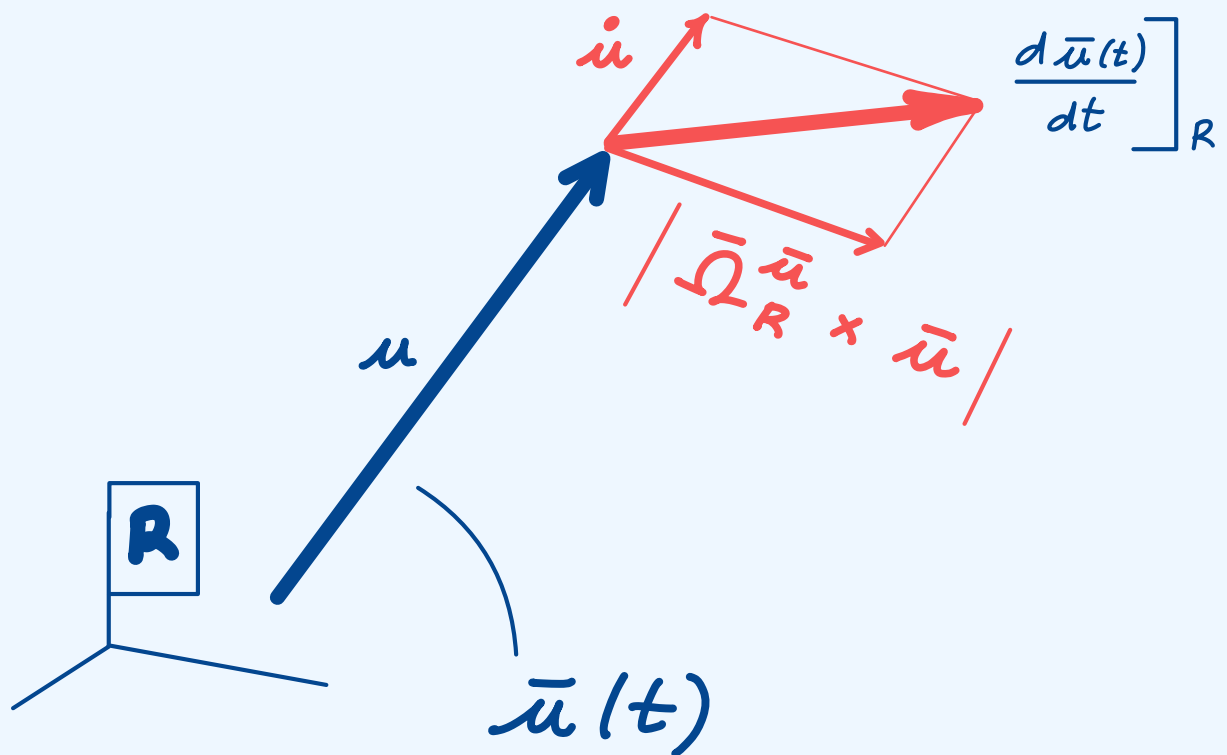


# 1P

derivació  
geomètrica

Recordem derivació geomètrica

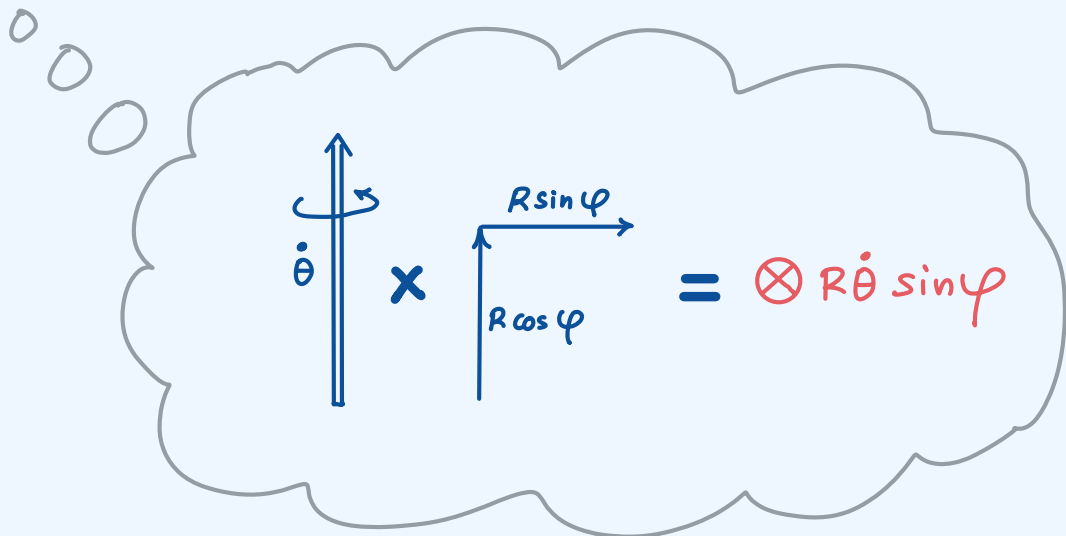
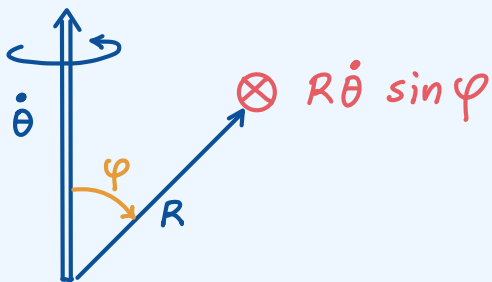
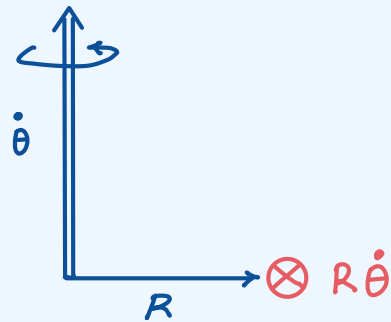
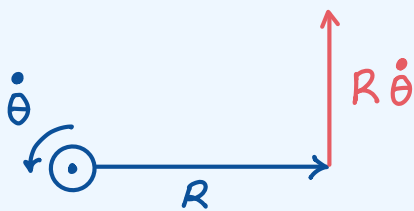
$$\left[ \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} \right]_R = \left[ \begin{array}{c} \text{canvi de} \\ \text{valor} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{canvi de} \\ \text{direcció} \end{array} \right]_R = \dot{u} \frac{\bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}|} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}_R \times \bar{\mathbf{u}}$$



Exemplos de produto vetorial  $\underbrace{\vec{\Omega}} \times \underbrace{\vec{u}}$

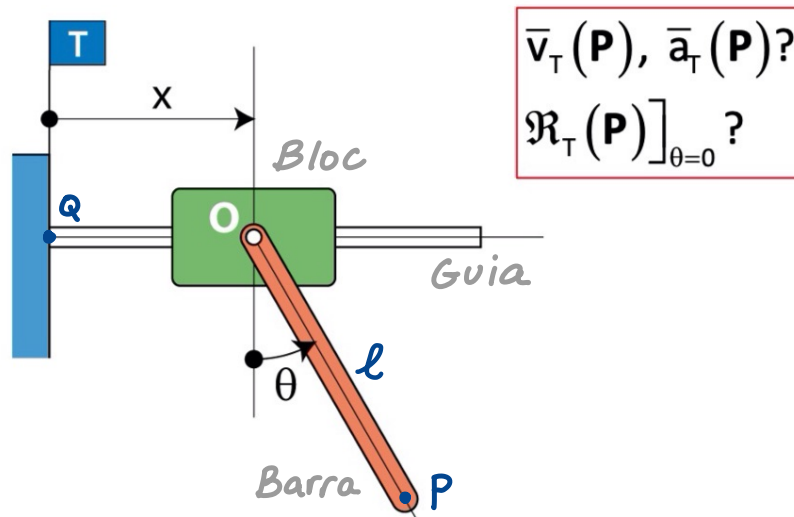
Suposem |  $\underbrace{\dot{\theta}}_{\text{valor}}$   $\underbrace{R}_{\text{valor}}$

1ª foto, 2ª foto ...



## El pèndol d'Euler

En el sistema de la figura, el bloc es trasllada horitzontalment damunt la guia i el pèndol està unit al bloc mitjançant una articulació a O. Utilitzant les coordenades indicades, calculeu la velocitat i acceleració de P respecte del terra, i el radi de curvatura de P (també respecte el terra) quan l'angle theta és zero.



$$\bar{v}_T(P)$$

Pista: Deriveu el vector  $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP}$ . Penseu quins són el canvi de valor i el canvi de direcció de  $\overrightarrow{QO}$  i  $\overrightarrow{OP}$  per separat. Feu-vos una figura dibuixant aquests canvis.

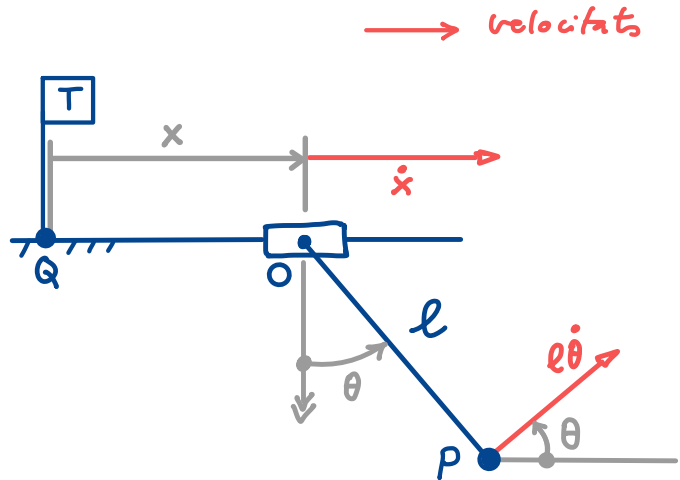
La solució és a la pàg. reg. i amb tot detall a la Wikimec. Intenteu-ho per vosaltres!

$$\vec{v}_T(P)$$

$$Ref = T$$

$Q = \text{origen vec. pos. de } P$   
 $\perp$  Fix a  $T$ !

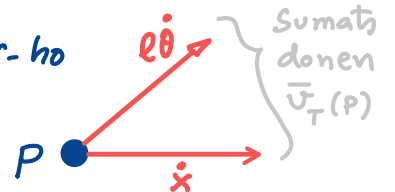
$$\vec{QP} = \vec{QO} + \vec{OP}$$



$$\vec{v}_T(P) = \underbrace{\frac{d\vec{QO}}{dt}}_{\text{sols té c. val.}} \bigg|_T + \underbrace{\frac{d\vec{OP}}{dt}}_{\text{sols té c. dir.}} \bigg|_T = (\rightarrow \dot{x}) + (\nearrow l \dot{\theta})$$

$$(\rightarrow \dot{x}) \quad (\nwarrow \dot{\theta}) \times (\searrow l)$$

Cal pensar-ho així  $\rightarrow$



$$\vec{a}_T(P)$$

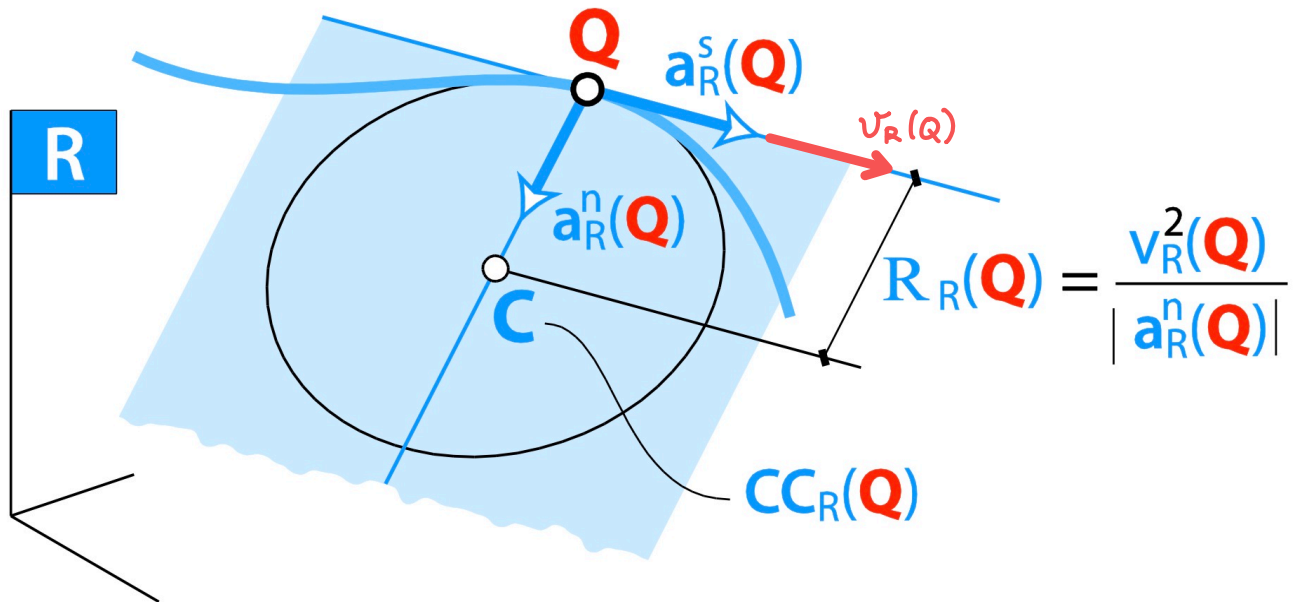
Es fa igual, però derivant els vecs. vermells

Sol:

$$\vec{a}_T(P) = \left[ \nearrow (l \ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta) \right] + \left[ \nwarrow (l \dot{\theta}^2 - \ddot{x} \sin \theta) \right]$$

$$\mathcal{R}_T(P) \Big|_{\theta=0}$$

Recordem:



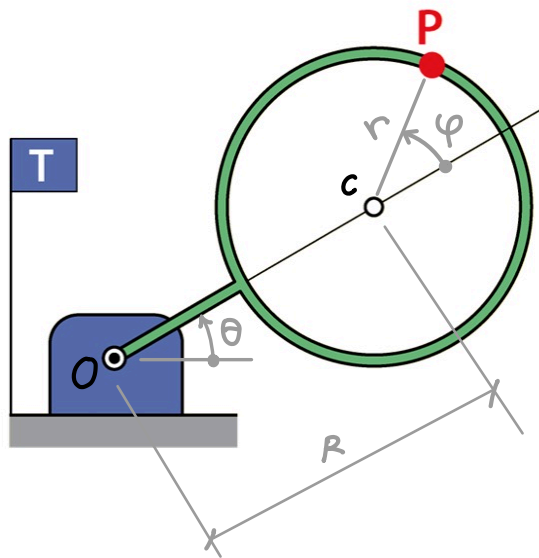
Recomanació: Dibuixen la configuració del sistema per a  $\theta=0$ , amb els vectors  $\vec{v}_T(P)$ ,  $\vec{a}_T^n(P)$ , i  $\vec{a}_T^s(P)$  pintats.

Sol:

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{(l\dot{\theta} + \dot{x})^2}{l\dot{\theta}^2}$$

Ex. 2.7 RBK (adaptat): Partícula sobre guia circular

La massa puntual  $P$  es mou lliurement sobre el suport circular de radi  $r$ . El suport gira al voltant del punt  $O$  fix a  $T$ . Troben  $\vec{v}_T(P)$ ,  $\vec{a}_T(P)$  i  $\mathcal{R}_T(P) \Big|_{\theta=0}$  en funció de  $\theta, \dot{\theta}, \varphi$  i  $\dot{\varphi}$ .



$$\begin{aligned} \vec{v}_T(P)? \\ \vec{a}_T(P)? \\ \mathcal{R}_T(P) \Big|_{\theta=0} ? \end{aligned}$$

$$\vec{v}_T(P)$$

Pista : Deriven  $\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{PC}$

Utilitzen les coord.  $\theta$  i  $\varphi$  per expressar-ho tot.

Sol. (agrupant en les dir. indicades):

$$\vec{v}_T(P) = \left[ \nwarrow (R\dot{\theta} + r\dot{\varphi}\cos\varphi) \right] + \left[ \swarrow r\dot{\varphi}\sin\varphi \right]$$

$$(\text{on } \dot{\psi} = \dot{\theta} + \dot{\varphi})$$

$$\bar{a}_T(P)$$

Sol:

$$\bar{a}_T(P) = \left[ \nearrow (R\ddot{\theta} - r\dot{\psi}^2 \sin \varphi + r\ddot{\psi} \cos \varphi) \right] + \left[ \swarrow (R\dot{\theta}^2 + r\dot{\psi}^2 \cos \varphi + r\ddot{\psi} \sin \varphi) \right]$$

on :

$$\dot{\psi} = \dot{\theta} + \dot{\varphi}, \quad \ddot{\psi} = \ddot{\theta} + \ddot{\varphi}$$

$$\mathcal{R}_T(P) \Big|_{\varphi=0}$$

Sol:

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{(r\dot{\psi} + R\dot{\theta})^2}{R\dot{\theta}^2 + r\dot{\psi}^2}$$

$\overbrace{r\dot{\psi} + R\dot{\theta}}^{\dot{\theta} + \dot{\varphi}}$

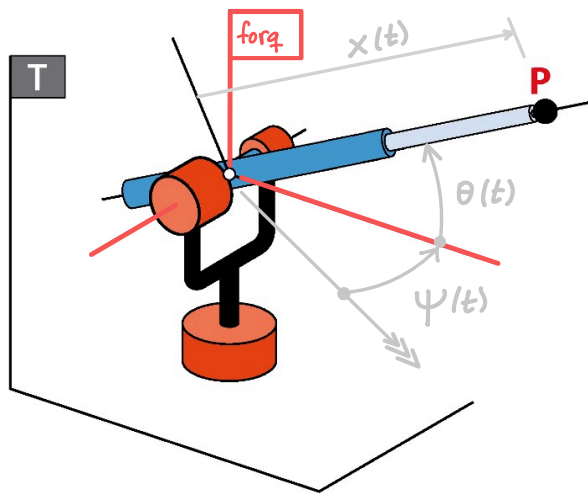


Problema 2.3 MPSR, pàg. 57 (Antena telescòpica)

Una antena telescòpica és orientada per mitjà de les rotacions motoritzades  $\psi(t)$  i  $\theta(t)$ . Un altre accionament fa variar la longitud  $x(t)$ .

Determineu :

$$\bar{v}_T(P), \bar{a}_T(P), \bar{v}_{\text{forq}}(P), \bar{a}_{\text{forq}}(P)$$



$$\bar{v}_{\text{forq}}(P), \bar{a}_{\text{forq}}(P)?$$
$$\bar{v}_T(P), \bar{a}_T(P)?$$

Aquest és llarg. A classe prioritzarem el càlcul de  $\bar{v}_T(P)$  i deixarem la resta per vosaltres.

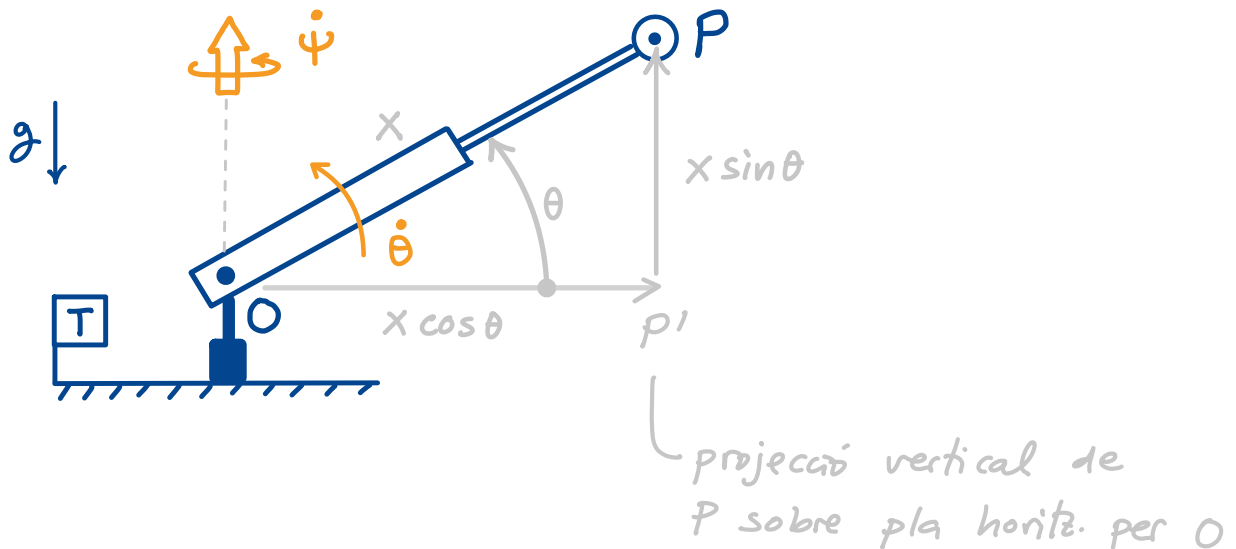
## $\vec{v}_T(P)$

Aquí podem descompondre  $\vec{OP}$  en suma de les seves components horitzontal i vertical:

$$\vec{OP} = \vec{OP'} + \vec{P'P}$$

Així,  $\vec{OP'}$  només queda afectat per  $\dot{\psi}$  (ens mantenim en el terreny de les rotacions riangles) i  $\vec{P'P}$  només canvia de valor.

Dibuixeu-li les  $d/dt$  de  $\vec{OP'}$  i  $\vec{P'P}$

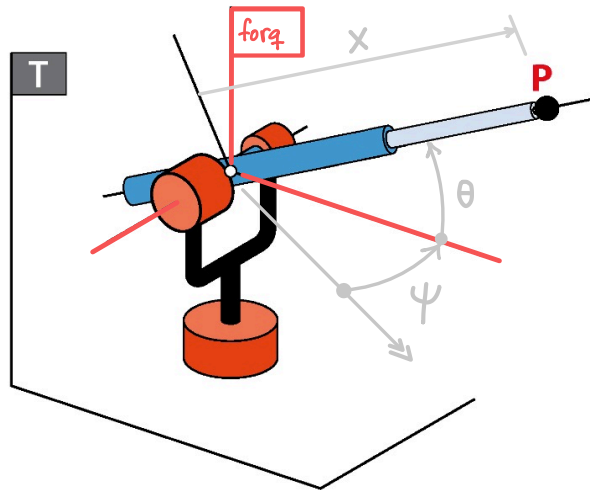


Us ha de sortir:

$$\begin{aligned} \vec{v}_T(P) = \left. \frac{d\vec{OP}}{dt} \right|_T = \dots = & \left[ \uparrow (\dot{x} \sin \theta + x \dot{\theta} \cos \theta) \right] + \\ & \left[ \rightarrow (\dot{x} \cos \theta - x \dot{\theta} \sin \theta) \right] + \\ & \left[ \otimes x \dot{\psi} \cos \theta \right] \end{aligned}$$

Ex. per a vosaltres: Calculeu  $\vec{a}_T(P)$

$$\vec{v}_{\text{forq}}(P)$$



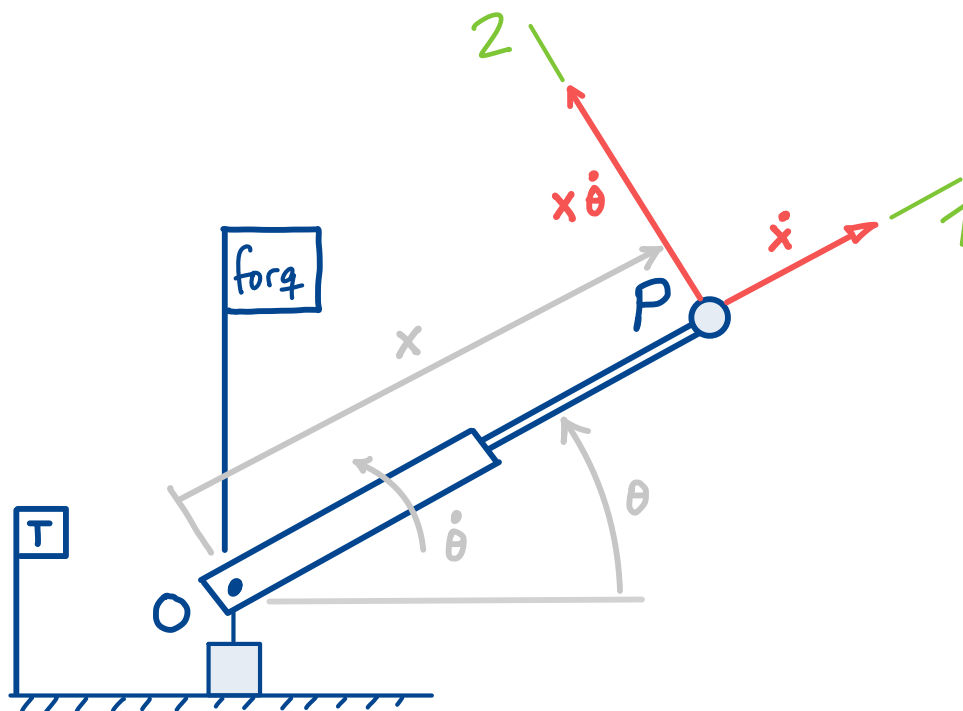
$$\vec{v}_{\text{forq}}(P), \vec{a}_{\text{forq}}(P)?$$

$$\vec{v}_T(P), \vec{a}_T(P)?$$

Des de ref. "forq" sols veiem movim. degut a  $\theta(t)$  i  $x(t)$ :

O és fix a  $\left\{ \begin{matrix} \text{forq.} \\ T \end{matrix} \right\} \Rightarrow$  Serveix com origen vecs. pos. tant a Forq. com a T

$$\vec{v}_{\text{Forq}}(P) = \left. \frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_{\text{forq}} = (\vec{e}_r \dot{x}) + (\vec{e}_\theta x \dot{\theta})$$



$$\bar{a}_{\text{forç}}(P)$$

Pista: pinten les derivades temporals dels vectors vermells sobre el dibuix anterior. Agrupant els vectors en les dirs. 1 i 2 del dibuix, ha de sortir:

$$\bar{a}_{\text{forç}}(P) = \left[ \nearrow (\ddot{x} - x\dot{\theta}^2) \right] + \left[ \nwarrow (2\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta}) \right]$$