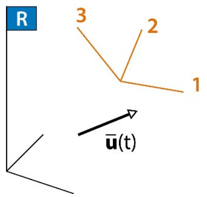
Formulari de Mecànica 2025 - 2026 QT

Als exàmens, aquest formulari no pot contenir més informació que la que hi figura a la versió d'Atenea.

Derivació temporal de vectors:

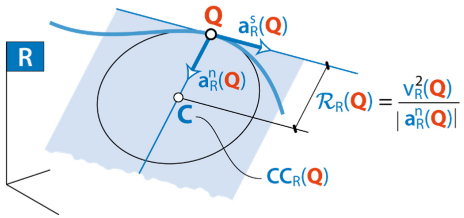
- geomètrica: $\left.\dfrac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt}\right]_R = \left[\begin{matrix}\text{canvi de}\\ \text{valor}\end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix}\text{canvi de}\\ \text{direcció}\end{matrix}\right]_R = \dot{u}\dfrac{\bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}|} + \bar{\Omega}_R^{\bar{\mathbf{u}}} \times \bar{\mathbf{u}}$
- analítica: $\left\{\left.\dfrac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt}\right]_R\right\}_B = \dfrac{d}{dt}\{\bar{\mathbf{u}}\}_B + \{\bar{\Omega}_R^B\}_B \times \{\bar{\mathbf{u}}\}_B$



Components intrínseques de l'acceleració:

$$a^s \equiv a_R^s(\mathbf{P}) = \dot{v} = \frac{d|\bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{P})|}{dt}$$

$$a^n \equiv a_R^n(\mathbf{P}) = \frac{v^2}{\mathcal{R}} = \frac{|\bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{P})|^2}{\mathcal{R}_R(\mathbf{P})}$$

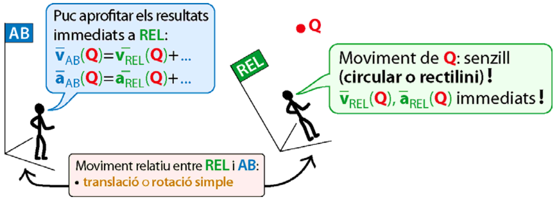


Composició de moviments:

$\bar{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P}) + \bar{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P})$, amb $\bar{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P} \in \text{REL})$

$\bar{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{a}}_{REL}(\mathbf{P}) + \bar{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) + \bar{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P})$,

amb $\begin{cases}\bar{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P} \in \text{REL}) \\ \bar{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P}) = 2\bar{\Omega}_{AB}^{REL} \times \bar{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P})\end{cases}$



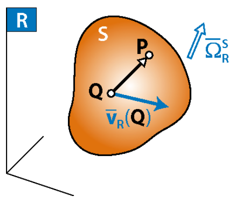
Cinemàtica del sòlid rígid:

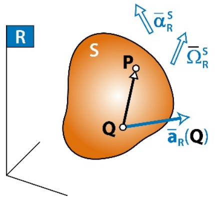
(les següents expressions són vàlides a qualsevol referència, per això s'omet el subíndex R)

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{Q}) + \bar{\Omega}^S \times \overline{\mathbf{QP}}$$

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{Q}) + \bar{\Omega}^S \times \left(\bar{\Omega}^S \times \overline{\mathbf{QP}}\right) + \bar{\alpha}^S \times \overline{\mathbf{QP}} ,$$

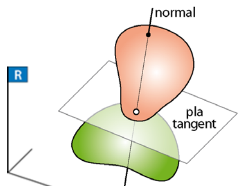
amb $\bar{\alpha}^S = \dfrac{d\bar{\Omega}^S}{dt}$





Condicions bàsiques d'enllaç:

- Contacte puntual amb lliscament: $\bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{J}_1)\big|_{normal} = \bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{J}_2)\big|_{normal}$
- Contacte puntual sense lliscament: $\bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{J}_1) = \bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{J}_2)$



Lleis de Newton:

- 1a llei (llei de la inèrcia): $\bar{\mathbf{a}}_{RGal}(\mathbf{P}_{lliure}) = \bar{\mathbf{0}}$
- 2a llei (llei fonamental): $\sum \bar{\mathbf{F}}_{\rightarrow \mathbf{P}} = m_{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{a}}_{RGal}(\mathbf{P})$
- 3a llei (principi acció-reacció): $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}} = -\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}}$ (atracció o repulsió)

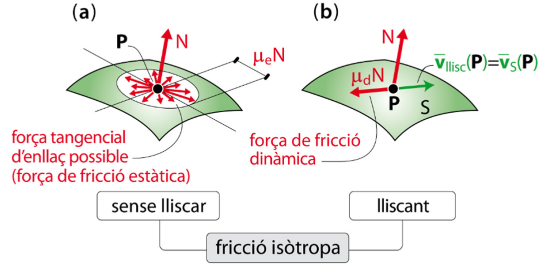
Dinàmica de partícula en referència no galileana:

$$\sum \bar{\mathbf{F}}_{\rightarrow\mathbf{P}} + \bar{\mathscr{F}}^{\,ar}_{NGal\rightarrow\mathbf{P}} + \bar{\mathscr{F}}^{\,Cor}_{NGal\rightarrow\mathbf{P}} = m_{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{a}}_{NGal}(\mathbf{P})$$

amb $\bar{\mathscr{F}}^{\,ar}_{NGal\rightarrow\mathbf{P}} = -m_{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P})$, $\bar{\mathscr{F}}^{\,Cor}_{NGal\rightarrow\mathbf{P}} = -m_{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P})$

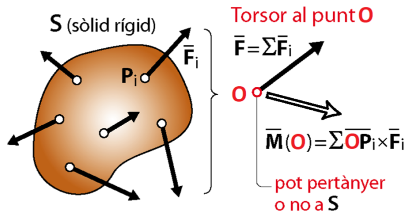
Formulació d'interaccions:

- Atracció gravitatòria: $F_{P\leftrightarrow Q} = G\dfrac{m_P m_Q}{|\overline{\mathbf{PQ}}|^2}$ (atracció)
- Molles lineals: $\begin{cases} F^{atracció}_{molla} = F_0^{at.} + k\Delta\rho , \quad F^{repulsió}_{molla} = F_0^{rep.} - k\Delta\rho , \\ \text{amb } \rho \equiv \text{llargària} , \ \Delta\rho = \rho - \rho_0 \quad (\dot{\rho} > 0 \text{ quan s'allarga}) \end{cases}$
- Amortidors lineals: $F^{atracció}_{amortidor} = +c\dot{\rho}$, $F^{repulsió}_{amortidor} = -c\dot{\rho}$
- Molles torsionals: $M_{molla} = M_0 \pm k_t \Delta\theta$, amb $\theta \equiv$ rotació relativa
- Amortidors torsionals: $M_{amortidor} = \pm c_t \dot{\theta}$
- Frec viscós: $F_{fricció} = cv_{lliscament}$, oposada a $v_{lliscament}$
- Frec sec de Coulomb: $\begin{cases} F_{frec} \text{ (f. tangencial d'enllaç)} \leq \mu_e N , \ \text{si no hi ha lliscament} \\ F_{fricció} = \mu_d N , \ \text{oposada a } v_{lliscament} \end{cases}$



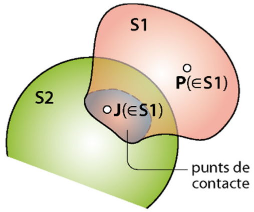
Torsor associat a un sistema de forces sobre un sòlid rígid:

- torsor a **O**: $\bar{\mathbf{F}} = \sum \bar{\mathbf{F}}_i$, $\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{O}) = \sum \overline{\mathbf{OP}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i$
- torsor a **Q**: $\begin{cases} \bar{\mathbf{F}} = \sum \bar{\mathbf{F}}_i , \ \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{Q}) = \sum \overline{\mathbf{QP}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i \\ \text{o bé, a partir del torsor a } \mathbf{O}: \\ \bar{\mathbf{F}} = \sum \bar{\mathbf{F}}_i , \ \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{Q}) = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{O}) + \overline{\mathbf{QO}} \times \bar{\mathbf{F}} \end{cases}$



Caracterització del torsor d'enllaç de S2 sobre S1 al punt P de S1 :

$$\bar{F}_E\cdot\bar{v}_{S2}(P_{S1})+\bar{M}_E(P_{S1})\cdot\bar{\Omega}^{S1}_{S2}=0$$



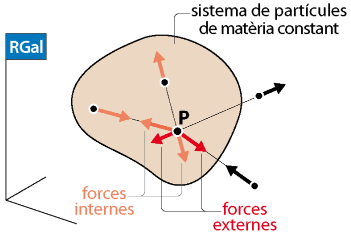
Teoremes vectorials per a sistemes de matèria constant :

- Teorema de la Quantitat de Moviment (TQM):

$$\sum_{sist}\bar{F}_{ext}=\dot{\bar{D}}^{sist}_{RGal}=m_{sist}\bar{a}_{RGal}(G_{sist})=\sum_i m_i\bar{a}_{RGal}(G_i)$$

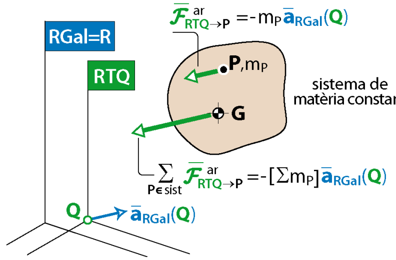
Quantitat de moviment:

- d'una partícula: $\bar{D}^P_R=m_P\bar{v}_R(P)$
- d'un sòlid rígid: $\bar{D}^S_R=m_S\bar{v}_R(G)$
- d'un sistema de sòlids rígids: $\bar{D}^{sist}_R=\sum_i\bar{D}^i_R=m_{sist}\bar{v}_R(G_{sist})$



- Teorema del Moment Cinètic (TMC):

$$\sum_{sist}\bar{M}_{ext}(Q)-\overline{QG}_{sist}\times m_{sist}\bar{a}_{RGal}(Q)=\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$$



Moment cinètic:

- d'una partícula:

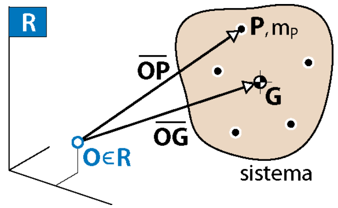
$$\bar{H}^P_{RTQ}(Q)=\overline{QP}\times m_P\bar{v}_{RTQ}(P)$$

- d'un sòlid rígid S:
  - Si $Q\in$ sòlid S: $\bar{H}^S_{RTQ}(Q)=\mathrm{II}(Q)\bar{\Omega}^S_{RTQ}=\mathrm{II}(Q)\bar{\Omega}^S_{RGal}$
  - Si $Q\notin$ sòlid S: $\bar{H}^S_{RTQ}(Q)=\bar{H}^S_{RTG}(G)+\bar{H}^{\oplus}_{RTQ}(Q)=$
    $=\bar{H}^S_{RTG}(G)+\overline{QG}\times m\bar{v}_{RTQ}(G)$
- d'un sistema de sòlids rígids:

$$\bar{H}^{sist}_{RTQ}(Q)=\sum_i\bar{H}^i_{RTQ}(Q)$$

Centre d'inèrcia :

- d'un sistema de partícules: $\overline{OG}=\sum_{P_i}m_{P_i}\overline{OP_i}\Big/\sum_{P_i}m_{P_i}$
- d'un sòlid rígid S: $\overline{OG}_S=\dfrac{1}{m_S}\int_S\overline{OP}\,dm(P)$
- d'un sistema de sòlids rígids: $\overline{OG}=\sum_i m_i\overline{OG_i}\Big/\sum_i m_i$

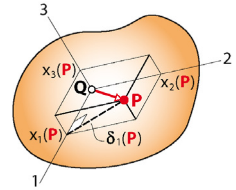


Tensor d'inèrcia $\mathrm{II}(Q)$:

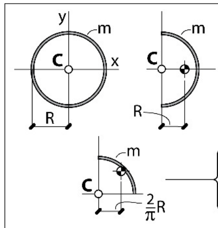
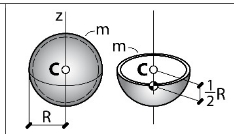
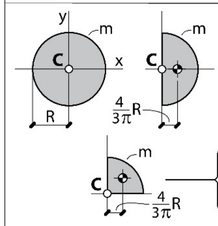
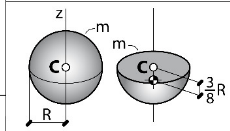
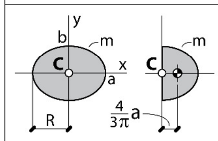
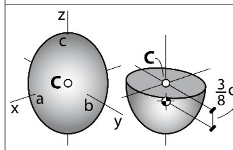
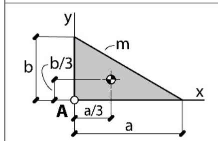
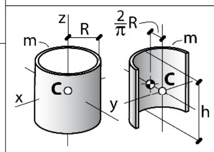
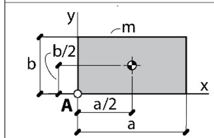
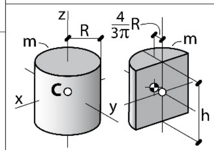
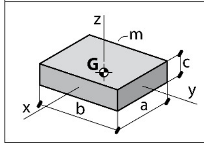
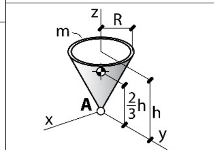
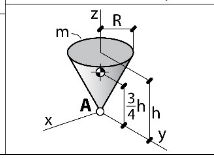
- moments i productes d'inèrcia:

$$I_{ii}(Q)=\int_S(x_j^2+x_k^2)\,dm=\int_S\delta_i^2\,dm\ ,\quad I_{ij}(Q)=-\int_S x_ix_j\,dm$$

- canvi de base: $[\mathrm{II}(Q)]_{B'}=[\bar{e}'_1\ \ \bar{e}'_2\ \ \bar{e}'_3]_B^{-1}[\mathrm{II}(Q)]_B[\bar{e}'_1\ \ \bar{e}'_2\ \ \bar{e}'_3]_B$
- moment d'inèrcia en la direcció $\bar{v}$: $I_{vv}(Q)=\{\bar{v}\}^T[\mathrm{II}(Q)]\{\bar{v}\}$, on $\bar{v}\equiv$ versor
- teorema de Steiner: $\mathrm{II}(Q)=\mathrm{II}(G)+\mathrm{II}^{\oplus}(Q)$, on $\mathrm{II}^{\oplus}(Q)\equiv\mathrm{II}(Q)$, massa concentrada a **G**



Taules de centres d'inèrcia, i moments i productes d'inèrcia de sòlids homogenis :

 $\mathrm{II}(C)$: $I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mR^2$; $I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mR^2$, $I_{xy}=\frac{-1}{\pi}mR^2$	 $\mathrm{II}(C)$: $I_{zz}=\frac{2}{3}mR^2$, rotor esfèric a C
 $\mathrm{II}(C)$: $I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{4}mR^2$; $I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{4}mR^2$, $I_{xy}=\frac{-1}{2\pi}mR^2$	 $\mathrm{II}(C)$: $I_{zz}=\frac{2}{5}mR^2$, rotor esfèric a C
 $\mathrm{II}(C)$: $I_{xx}=\frac{1}{4}mb^2$, $I_{yy}=\frac{1}{4}ma^2$	 $\mathrm{II}(C)$: $I_{xx}=\frac{1}{5}m(b^2+c^2)$, $I_{yy}=\frac{1}{5}m(a^2+c^2)$, $I_{zz}=\frac{1}{5}m(a^2+b^2)$
 $\mathrm{II}(A)$: $I_{xx}=\frac{1}{6}mb^2$, $I_{xy}=\frac{-1}{12}mab$	 $\mathrm{II}(C)$: $I_{xx}=m(\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{12}h^2)$, $I_{zz}=mR^2$, rotor simètric a C
 $\mathrm{II}(A)$: $I_{xx}=\frac{1}{3}mb^2$, $I_{xy}=\frac{-1}{4}mab$	 $\mathrm{II}(C)$: $I_{xx}=m(\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{12}h^2)$, $I_{zz}=\frac{1}{2}mR^2$, rotor simètric a C
 $\mathrm{II}(G)$: $I_{xx}=\frac{1}{12}m(b^2+c^2)$	 $\mathrm{II}(A)$: $I_{xx}=m(\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{2}h^2)$, $I_{zz}=\frac{1}{2}mR^2$, rotor simètric a A
	 $\mathrm{II}(A)$: $I_{xx}=m(\frac{3}{20}R^2+\frac{3}{5}h^2)$, $I_{zz}=\frac{3}{10}mR^2$, rotor simètric a A