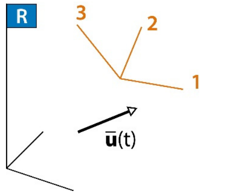
Formulari de Mecànica 2024 - 2025 QP

Als exàmens, aquest formulari no pot contenir més informació que la que hi figura a la versió d'Atenea.

Derivació de vectors:

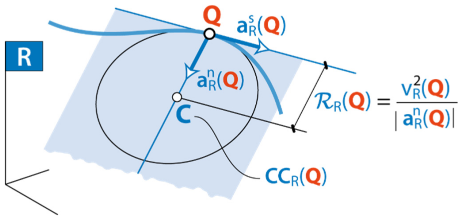
- geomètrica: $\left.\dfrac{d\bar{u}}{dt}\right]_R = \left[\begin{matrix}\text{canvi de}\\ \text{valor}\end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix}\text{canvi de}\\ \text{direcció}\end{matrix}\right]_R = \dot{u}\dfrac{\bar{u}}{|\bar{u}|} + \bar{\Omega}_R^{\bar{u}} \times \bar{u}$
- analítica: $\left\{\left.\dfrac{d\bar{u}}{dt}\right]_R\right\}_B = \dfrac{d}{dt}\{\bar{u}\}_B + \left\{\bar{\Omega}_R^B\right\}_B \times \{\bar{u}\}_B$



Components intrínseques de l'acceleració:

$$a^s \equiv a_R^s(P) = \dot{v} = \frac{d|\bar{v}_R(P)|}{dt}$$

$$a^n \equiv a_R^n(P) = \frac{v^2}{\mathcal{R}} = \frac{|\bar{v}_R(P)|^2}{\mathcal{R}_R(P)}$$

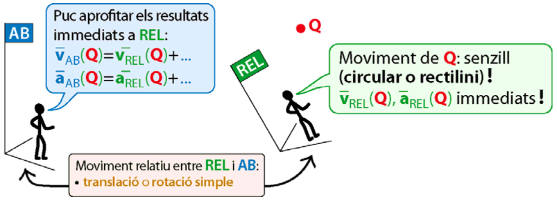


Composició de moviments:

$$\bar{v}_{AB}(P) = \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P) \;,\quad \text{amb}\;\; \bar{v}_{ar}(P) = \bar{v}_{AB}(P \in REL)$$

$$\bar{a}_{AB}(P) = \bar{a}_{REL}(P) + \bar{a}_{ar}(P) + \bar{a}_{Cor}(P) \;,$$

$$\text{amb} \begin{cases} \bar{a}_{ar}(P) = \bar{a}_{AB}(P \in REL) \\ \bar{a}_{Cor}(P) = 2\bar{\Omega}_{AB}^{REL} \times \bar{v}_{REL}(P) \end{cases}$$



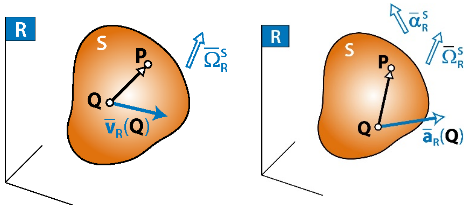
Cinemàtica del sòlid rígid:

(les següents expressions són vàlides a qualsevol referència, per això s'omet el subíndex R)

$$\bar{v}(P) = \bar{v}(Q) + \bar{\Omega}^S \times \overline{QP}$$

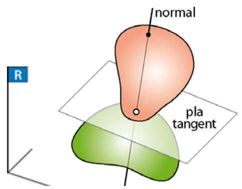
$$\bar{a}(P) = \bar{a}(Q) + \bar{\Omega}^S \times \left(\bar{\Omega}^S \times \overline{QP}\right) + \bar{\alpha}^S \times \overline{QP} \;,$$

$$\text{amb}\;\; \bar{\alpha}^S = \frac{d\bar{\Omega}^S}{dt}$$



Condicions bàsiques d'enllaç:

- Contacte puntual amb lliscament: $\bar{v}_R(J_1)\big|_{normal} = \bar{v}_R(J_2)\big|_{normal}$
- Contacte puntual sense lliscament: $\bar{v}_R(J_1) = \bar{v}_R(J_2)$



Lleis de Newton:

- 1a llei (llei de la inèrcia): $\bar{a}_{RGal}(P_{lliure}) = \bar{0}$
- 2a llei (llei fonamental): $\sum \bar{F}_{\to P} = m_P \bar{a}_{RGal}(P)$
- 3a llei (principi acció-reacció): $\bar{F}_{Q\to P} = -\bar{F}_{P\to Q}$ (atracció o repulsió)

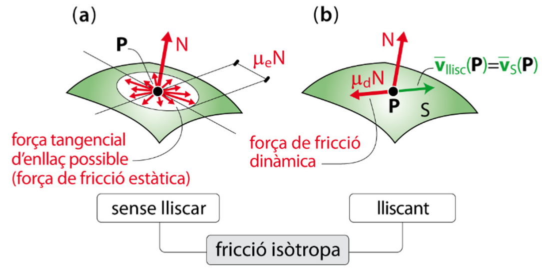
Dinàmica de partícula en referència no galileana:

$$\sum \bar{F}_{\to P} + \bar{\mathscr{F}}^{\,ar}_{NGal\to P} + \bar{\mathscr{F}}^{\,Cor}_{NGal\to P} = m_P \bar{a}_{NGal}(P)$$

amb $\bar{\mathscr{F}}^{\,ar}_{NGal\to P} = -m_P \bar{a}_{ar}(P)$, $\bar{\mathscr{F}}^{\,Cor}_{NGal\to P} = -m_P \bar{a}_{Cor}(P)$

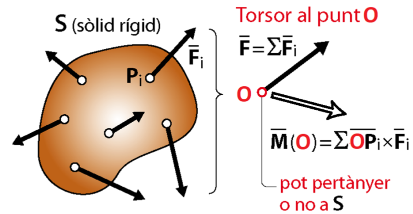
Formulació d'interaccions:

- Atracció gravitatòria: $F_{P\leftrightarrow Q} = G\dfrac{m_P m_Q}{|\overline{PQ}|^2}$ (atracció)
- Molles lineals: $\begin{cases} F_{molla}^{atracció} = F_0^{at.} + k\Delta\rho \;, \quad F_{molla}^{repulsió} = F_0^{rep.} - k\Delta\rho \;, \\ \text{amb } \rho \equiv \text{llargària} \;,\; \Delta\rho = \rho - \rho_0 \quad (\dot{\rho} > 0 \text{ quan s'allarga}) \end{cases}$
- Amortidors lineals: $F_{amortidor}^{atracció} = +c\dot{\rho}$, $F_{amortidor}^{repulsió} = -c\dot{\rho}$
- Molles torsionals: $M_{molla} = M_0 \pm k_t \Delta\theta$, amb $\theta \equiv$ rotació relativa
- Amortidors torsionals: $M_{amortidor} = \pm c_t \dot{\theta}$
- Frec viscós: $F_{fricció} = c v_{lliscament}$, oposada a $v_{lliscament}$
- Frec sec de Coulomb: $\begin{cases} F_{frec} \text{ (f. tangencial d'enllaç)} \le \mu_e N \;, \quad \text{si no hi ha lliscament} \\ F_{fricció} = \mu_d N \;, \quad \text{oposada a } v_{lliscament} \end{cases}$



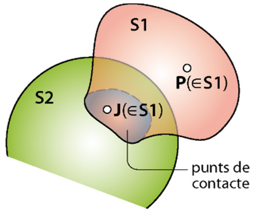
Torsor associat a un sistema de forces sobre un sòlid rígid:

- torsor a **O**: $\bar{F} = \sum \bar{F}_i$, $\bar{M}(O) = \sum \overline{OP}_i \times \bar{F}_i$
- torsor a **Q**: $\begin{cases} \bar{F} = \sum \bar{F}_i \;,\; \bar{M}(Q) = \sum \overline{QP}_i \times \bar{F}_i \\ \text{o bé, a partir del torsor a } O\text{:} \\ \bar{F} = \sum \bar{F}_i \;,\; \bar{M}(Q) = \bar{M}(O) + \overline{OQ} \times \bar{F} \end{cases}$



Caracterització del torsor d'enllaç de S2 sobre S1 al punt P de S1:

$\bar{F}_E \cdot \bar{v}_{S2}(P_{S1}) + \bar{M}_E(P_{S1}) \cdot \bar{\Omega}^{S1}_{S2} = 0$



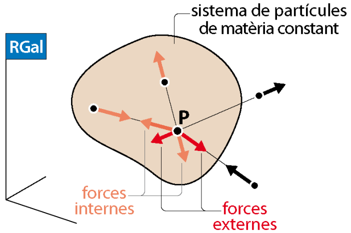
Teoremes vectorials per a sistemes de massa constant:

- Teorema de la Quantitat de Moviment (TQM):

$$\sum_{sist} \bar{F}_{ext} = \dot{\bar{D}}^{sist}_{RGal} = m_{sist}\,\bar{a}_{RGal}(G_{sist}) = \sum_i m_i\,\bar{a}_{RGal}(G_i)$$

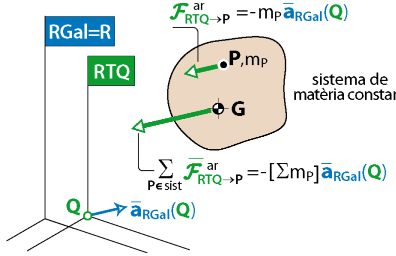
Quantitat de moviment:

- d'una partícula: $\bar{D}^P_R = m_P\,\bar{v}_R(P)$
- d'un sòlid rígid: $\bar{D}^S_R = m_S\,\bar{v}_R(G)$
- d'un sistema de sòlids rígids: $\bar{D}^{sist}_R = \sum_i \bar{D}^i_R = m_{sist}\,\bar{v}_R(G_{sist})$



- Teorema del Moment Cinètic (TMC):

$$\sum_{sist} \bar{M}_{ext}(Q) - \overline{QG}_{sist} \times m_{sist}\,\bar{a}_{RGal}(Q) = \dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$$



Moment cinètic:

- d'una partícula:

  $\bar{H}^P_{RTQ}(Q) = \overline{QP} \times m_P\,\bar{v}_{RTQ}(P)$

- d'un sòlid rígid S:

  Si $Q \in$ sòlid S: $\bar{H}^S_{RTQ}(Q) = \mathrm{II}(Q)\,\bar{\Omega}^S_{RTQ} = \mathrm{II}(Q)\,\bar{\Omega}^S_{RGal}$

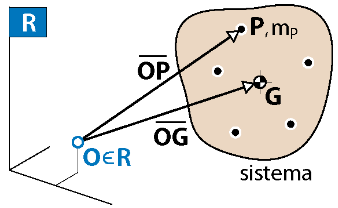
  Si $Q \notin$ sòlid S: $\bar{H}^S_{RTQ}(Q) = \bar{H}^S_{RTG}(G) + \bar{H}^{\oplus}_{RTQ}(Q) = \bar{H}^S_{RTG}(G) + \overline{QG} \times m\,\bar{v}_{RTQ}(G)$

- d'un sistema de sòlids rígids:

  $\bar{H}^{sist}_{RTQ}(Q) = \sum_i \bar{H}^i_{RTQ}(Q)$

Centre d'inèrcia:

- d'un sistema de partícules: $\overline{OG} = \sum_{P_i} m_{P_i}\overline{OP}_i \Big/ \sum_{P_i} m_{P_i}$
- d'un sòlid rígid S: $\overline{OG}_S = \dfrac{1}{m_S}\displaystyle\int_S \overline{OP}\,dm(P)$
- d'un sistema de sòlids rígids: $\overline{OG} = \sum_i m_i\overline{OG}_i \Big/ \sum_i m_i$

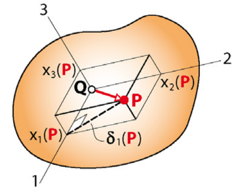


Tensor d'inèrcia $\mathrm{II}(Q)$:

- moments i productes d'inèrcia:

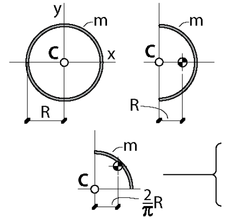
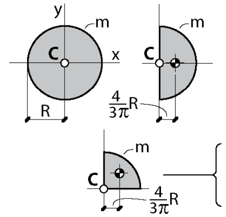
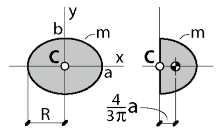
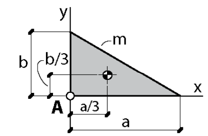
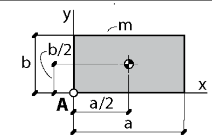
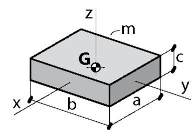
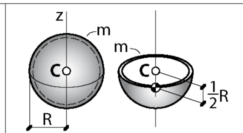
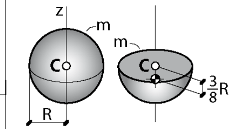
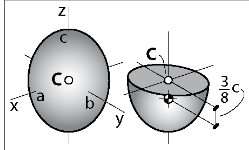
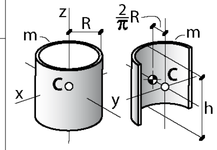
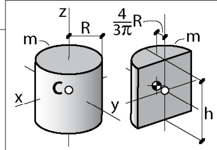
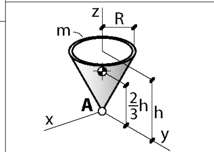
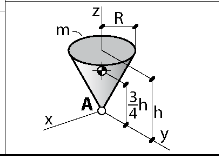
  $I_{ii}(Q) = \int_S (x_j^2 + x_k^2)\,dm = \int_S \delta_i^2\,dm$, $I_{ij}(Q) = -\int_S x_i x_j\,dm$

- canvi de base: $[\mathrm{II}(Q)]_{B'} = [\bar{e}'_1\ \ \bar{e}'_2\ \ \bar{e}'_3]_B^{-1}\,[\mathrm{II}(Q)]_B\,[\bar{e}'_1\ \ \bar{e}'_2\ \ \bar{e}'_3]_B$
- moment d'inèrcia en la direcció $\bar{v}$: $I_{vv}(Q) = \{\bar{v}\}^T[\mathrm{II}(Q)]\{\bar{v}\}$, on $\bar{v} \equiv$ versor
- teorema de Steiner: $\mathrm{II}(Q) = \mathrm{II}(G) + \mathrm{II}^{\oplus}(Q)$, on $\mathrm{II}^{\oplus}(Q) \equiv \mathrm{II}(Q)$, massa concentrada a **G**



Taules de centres d'inèrcia, i moments i productes d'inèrcia:

TAULA DE CENTRES DE MASSES I TENSORS D'INÈRCIA DE SÒLIDS RÍGIDS HOMOGENIS

	**II(C)** $I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mR^2$; $I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}mR^2$, $I_{xy}=\frac{-1}{\pi}mR^2$
	**II(C)** $I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{4}mR^2$; $I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{4}mR^2$, $I_{xy}=\frac{-1}{2\pi}mR^2$
	**II(C)** $I_{xx}=\frac{1}{4}mb^2$, $I_{yy}=\frac{1}{4}ma^2$
	**II(A)** $I_{xx}=\frac{1}{6}mb^2$, $I_{xy}=\frac{-1}{12}mab$
	**II(A)** $I_{xx}=\frac{1}{3}mb^2$, $I_{xy}=\frac{-1}{4}mab$
	**II(G)** $I_{xx}=\frac{1}{12}m(b^2+c^2)$
	**II(C)** $I_{zz}=\frac{3}{8}mR^2$, rotor esfèric a **C**
	**II(C)** $I_{zz}=\frac{2}{5}mR^2$, rotor esfèric a **C**
	**II(C)** $I_{xx}=\frac{1}{5}m(b^2+c^2)$, $I_{yy}=\frac{1}{5}m(a^2+c^2)$, $I_{zz}=\frac{1}{5}m(a^2+b^2)$
	**II(C)** $I_{xx}=m(\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{12}h^2)$, $I_{zz}=mR^2$, rotor simètric a **C**
	**II(C)** $I_{xx}=m(\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{12}h^2)$, $I_{zz}=\frac{1}{2}mR^2$, rotor simètric a **C**
	**II(A)** $I_{xx}=m(\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{2}h^2)$, $I_{zz}=\frac{1}{2}mR^2$, rotor simètric a **A**
	**II(A)** $I_{xx}=m(\frac{3}{20}R^2+\frac{3}{5}h^2)$, $I_{zz}=\frac{3}{10}mR^2$, rotor simètric a **A**