

13P

Teoremes vectorials

Més exemples 3D

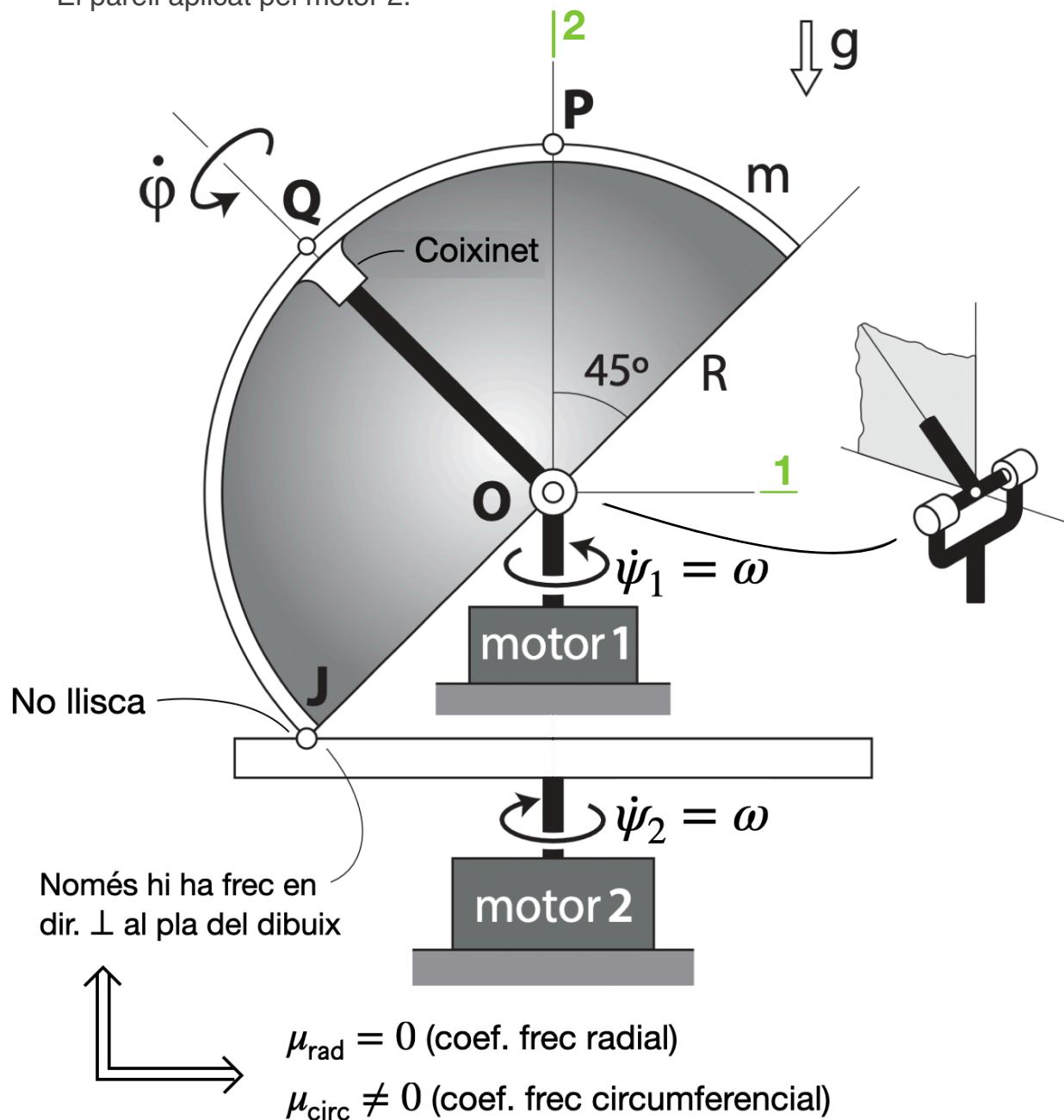
Closca semiesfèrica

(RBD 4.29)

La closca semiesfèrica és impulsada pel motor 1 per mitjà de la forquilla que gira amb ω de valor variable respecte al terra al voltant de l'eix vertical. A J manté contacte sense lliscar damunt d'una plataforma, impulsada pel motor 2, que gira amb la mateixa ω respecte al terra però de sentit oposat al de la forquilla. A J només hi ha freqüència en la direcció circumferencial (normal al pla de la figura). Tots els elements, tret de la closca, tenen massa negligible.

Determineu:

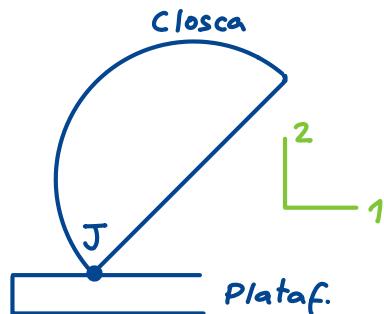
- Les forces normal i tangencial sobre la closca, a J.
- El parell aplicat pel motor 1.
- El parell aplicat pel motor 2.



Torsor d'enllaç plataf \rightarrow closca a J

A J hi ha un contacte puntual sense lliscament. Com és el torsor d'enllaç plataf \rightarrow closca a J? En ser un contacte puntual, la rotació de la closca relativa a la plataforma és permesa en totes les direccions. Per tant

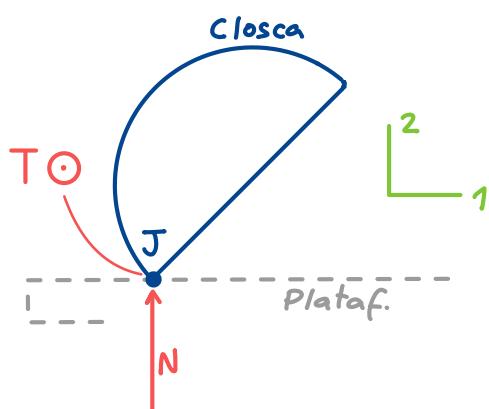
$$\left\{ \overline{M}_{\text{plataf} \rightarrow \text{closca}}(J) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



En el contacte a J hi ha rugositats (frec) que s'oposen al lliscament. Ara bé, ens diuen que només hi ha freq en dir. circumferencial, no en la radial. Per tant, a banda de la normal $\uparrow N$, la plataforma aplica una força d'enllaç $\odot T$ sobre Jclosca, i el torsor d'enllaç plataf \rightarrow closca tendrà la forma^(*):

$$\left\{ \overline{F}_{\text{plataf} \rightarrow \text{closca}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ N \\ T \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \overline{M}_{\text{plataf} \rightarrow \text{closca}}(J) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



- Es mantindrà el contacte sii $N > 0$
- J no lliscarà sii $T < M_{\text{rad}} \cdot N$

(*) N ha de ser > 0 , però T pot tenir qualsevol signe

Interès del problema

Per causa de la rotació, la closca podria perdre el contacte a J. **Intereix trobar el valor de N per veure si això pot passar, o no.**

També volem saber si és cert que a J no hi ha lliscament. **Cal trobar el valor de T i verificar en quina situació es $T < \mu_{\text{circ}} \cdot N$**

Graus de llibertat del sistema?

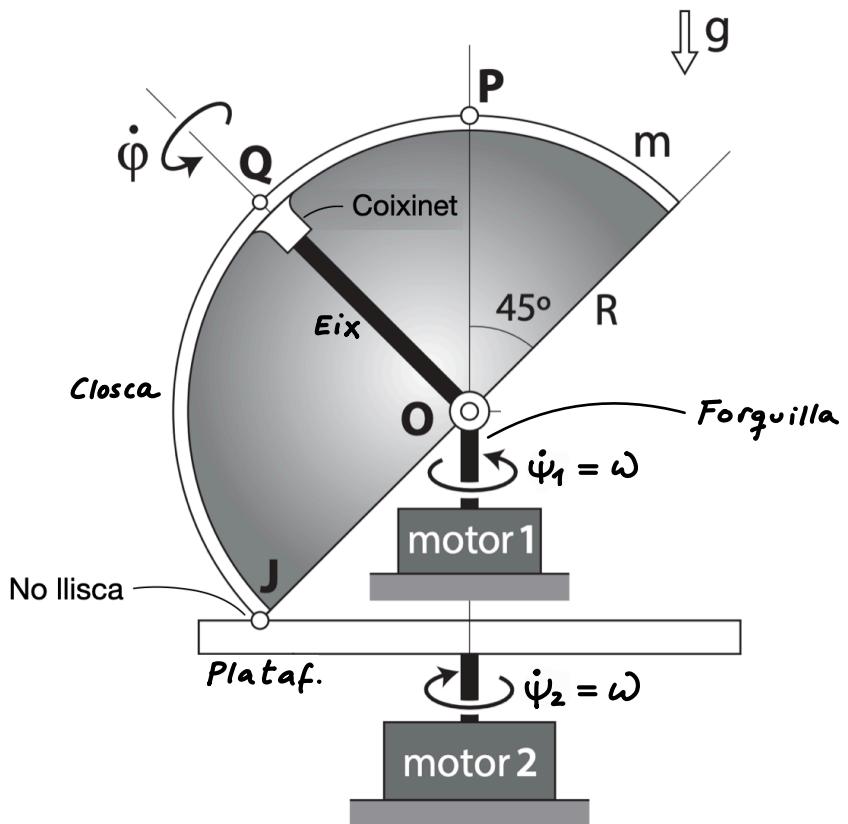
Si atarem $\dot{\psi}_1$ i $\dot{\psi}_2$, tot queda aturat \Rightarrow El sist. té 2 GL.

$$\begin{array}{l} \text{2 GL} \\ \text{forçats} \end{array} \left[\begin{array}{l} \bar{\Omega}_T^{\text{forq}} = (\uparrow \dot{\psi}_1) \text{ forçat pel motor 1 a valdre } (\uparrow \omega) \\ \bar{\Omega}_T^{\text{plat}} = (\uparrow \dot{\psi}_2) \quad " \quad " \quad " \quad 2 \quad " \quad " \quad (\uparrow \omega) \end{array} \right]$$

El GL $\dot{\varphi}$ depèn necessàriament de $\dot{\psi}_1$ i $\dot{\psi}_2$. És un GL indirectament forçat. Veurem que la relació

$$\dot{\varphi} = f(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$$

és lineal.



$$\dot{\varphi} = f(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2)$$

Busquem $\dot{\varphi}$ equivalent $\bar{v}_T(J_{plat}) = \bar{v}_T(J_{closca})$

$$\bar{v}_T(J_{plat}) = \otimes \dot{\psi}_2 \frac{R}{\sqrt{2}} \quad (\text{I})$$

$$\bar{v}_T(J_{closca}) = \cancel{\bar{v}_T(0)} + \bar{\Omega}_T^{closca} \times \bar{J} =$$

$$= [(\Downarrow \dot{\varphi}) + (\Uparrow \dot{\psi}_1)] \times (\leftarrow R) =$$

$$= [(\Downarrow \dot{\varphi}) \times (\leftarrow R)] + [(\Uparrow \dot{\psi}_1) \times (\leftarrow R)] =$$

$$= (\otimes \dot{\varphi}_R) + (\odot \dot{\psi}_1 \frac{R}{\sqrt{2}}) = [\otimes (\dot{\varphi}_R - \dot{\psi}_1 \frac{R}{\sqrt{2}})] \quad (\text{II})$$

(I) = (II) :

$$\dot{\psi}_2 \frac{R}{\sqrt{2}} = \dot{\varphi}_R - \dot{\psi}_1 \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2}{\sqrt{2}}} \quad (\text{III})$$

Clarament, $\dot{\varphi}$ és indirectament forçat per $\dot{\psi}_1$ i $\dot{\psi}_2$.

$\dot{\varphi}$ i $\bar{\Omega}_T^{closca}$ en funció d' ω

Substituint $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \omega$ a III :

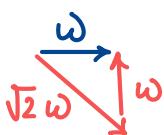
$$\dot{\varphi} = \sqrt{2} \omega$$

Amb això ja podem calcular $\bar{\Omega}_T^{closca}$:

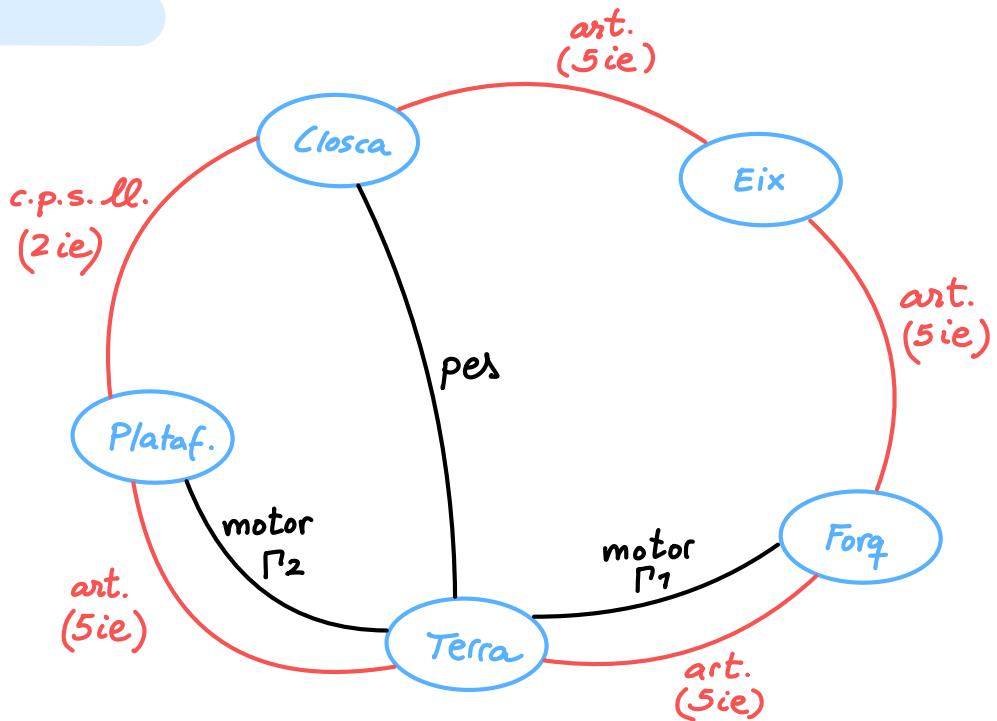
$$\boxed{\bar{\Omega}_T^{closca}} = \bar{\Omega}_{eix}^{closca} + \cancel{\bar{\Omega}_{forq}^{eix}} + \bar{\Omega}_T^{forq} =$$

$$= (\Downarrow \dot{\varphi}) + (\Uparrow \omega) =$$

$$= (\Downarrow \sqrt{2} \omega) + (\Uparrow \omega) = \boxed{(\Rightarrow \omega)} \quad (\text{IV})$$



DG1



Si apliquessim els teor. vectorials a cada sólid per separat, hauríem un megasistema d'equacions amb:

$$\begin{aligned} \# \text{ incògnites} &= 24 \quad (22 \text{ ie}, P_1, P_2) \\ \# \text{ eqs} &= 24 \quad (4 \text{ sólids} \cdot \frac{\text{eqs}}{\text{sòlid}}) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Problema DET} \\ \text{Segur que } N \text{ i } T \\ \text{queden determinades} \end{array}$$

Però 24 eqs. són moltes!

Intentem trobar sistemes que permetin trobar N i T més directament.

Comencem per N .

Full de ruta per trobar N

Els sistemes per als que N és externa són

Sistema	Incògnites	# Incogn.	Problema
Closca	7 ie	7	INDET
Closca + eix	7 ie	7	INDET
Closca + eix + forq	7 ie, P_1	8	INDET
Plataforma	7 ie, P_2	8	INDET

Tots indeterminats! Quina ràbia! Tot i això, algun sist. podrà generar 1 eq. que determinés N directament. Explorem els que tenen menys incògnites (closca + eix, closca) i a veure... Tant si triem un com l'altre, hem d'intentar minimitzar el nombre d'incògnites que apareixeran als teor. vectorials. Això ens conduceix a aplicar el TMC perquè permet filtrar part de les incògnites (les forces que passin pel punt d'aplicació).

Tria d'un punt per aplicar el TMC en qualsevol dels dos sistemes:

Punts "singulars" que veiem: O, Q, G, J :

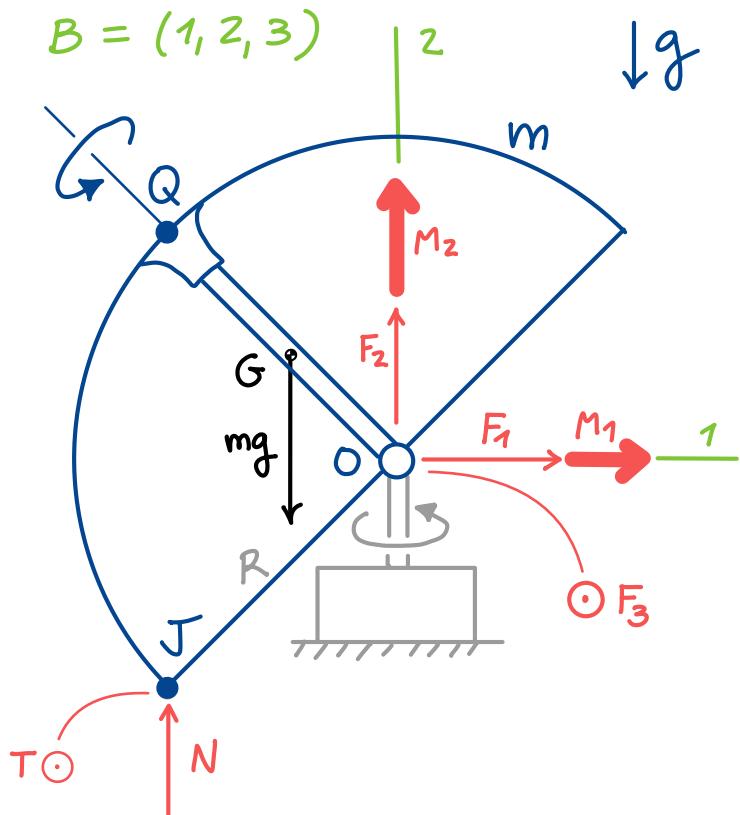
- J : Evitar-lo! És de contacte puntual. A més, N no apareixeria
- Q : N no apareixeria (té moment nul resp. Q)
- G : No és un bon filtre: apareixerien les tres components de força del torsor $\text{forq} \rightarrow \text{eix}$ a O (en el sist = closca + eix) o del eix \rightarrow closca (en el sist = closca).

Tot conduceix a un TMC a O . Ja que O és de caracterització immediata per a l'eina $\text{forq} \rightarrow \text{eix}$, provem

$$\text{SIST} = \text{closca} + \text{eix}$$

$$\text{TMC}(O)$$

Refinem-ho més! Per aquest sistema, les forces externes són ($\uparrow N$), ($\odot T$), ($\downarrow mg$) i les del torsor $\text{forq} \rightarrow \text{eix}$ a O :



$(\uparrow N)$ és l'única que crea moment resp. 0 en dir. 3!

Ja ho tenim!

Full nota:

$$\begin{aligned} \text{Sist} &= \text{Closca} + \text{forg} \\ \text{TMC}(o) &]_3 \end{aligned}$$

$\text{TMC}(o)]_3$

G és el punt mig entre Q i O (veure taules: closca)

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(o)]_3 = \dot{\bar{H}}_{RTO}(o)]_3$$

$$\left(\otimes N \frac{R}{\sqrt{2}} \right) + \left(\odot mg \frac{R}{2\sqrt{2}} \right) = \left[\odot \frac{R}{\sqrt{2}} \left(\frac{mg}{2} - N \right) \right] \quad (v)$$

Usem $B = (1, 2, 3)$

$$\bar{H}_{RTO}(o) = \bar{I}(o) \bar{\omega}_{RTO}^{\text{closca}} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} I\omega \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_B = (\Rightarrow I\omega)$$

$$\bar{\omega}_{RTO}^{\text{closca}} = (\Rightarrow \omega)$$

De (iv)

De les taules veiem que la closca és rotar esfèric a O i per tant

$$\bar{I}(o) = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada!

$$\text{Veiem també que } I = \frac{2}{3}mR^2$$

Derivada analítica:

$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \right\}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} I\ddot{\omega} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Deriv. Components}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}_T^B} \times \underbrace{\begin{Bmatrix} I\omega \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Vec. sense derivar}} = \begin{Bmatrix} I\ddot{\omega} \\ 0 \\ -I\omega^2 \end{Bmatrix}$$

← Només ens cal la dir. 3

Compte! No és $\bar{\Omega}_T$ closca!

quadra!

Deriv. geomètrica:

$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(0) = (\Rightarrow I\ddot{\omega}) + (\otimes I\omega^2)$$

Per tant:

$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \Big|_3 = \otimes I\omega^2 \quad \text{(VI)}$$

$\frac{2}{3}mR^2$

(V) = (VI):

$$\odot \frac{R}{\sqrt{2}} \left(\frac{mg}{2} - N \right) = \odot (-I\omega^2)$$

$$\frac{mg}{2} - N = - \frac{I\omega^2 \sqrt{2}}{R}$$

$$N = \frac{mg}{2} + I \cdot \frac{\omega^2 \sqrt{2}}{R} =$$

$$= \frac{mg}{2} + \frac{2}{3} mR^2 \cancel{\frac{\omega^2 \sqrt{2}}{R}} =$$

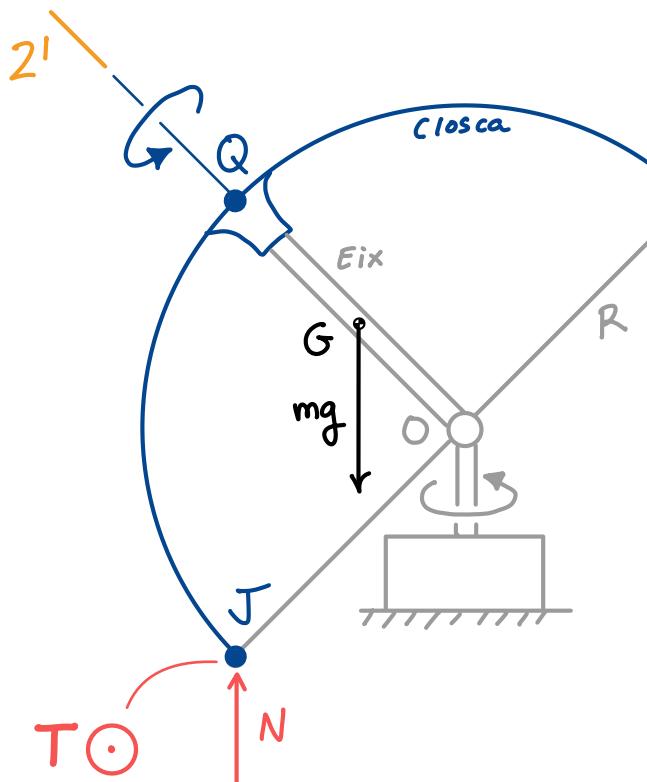
$$= \frac{mg}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} mR\omega^2$$

Veiem que N és sempre positiva.

Per tant, a T mai es perdrà el contacte, independentment de ω !

Full de ruta per trobar T

Si triem SIST = closca tenim les següents forces externes aplicades: $(\odot T)$, $(\uparrow N)$, $(\downarrow mg)$, i el torsor eix \rightarrow closca.



Ara la base que va bé és $B' = (1', 2', 3')$ que permet la caracterització immediata d'aquest torsor i l'aparició d'aquest zero!

Torsor eix \rightarrow closca (no dibuixat)

$$\{ \bar{F}_{eix \rightarrow \text{closca}} \}_{B'} = \begin{Bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{Bmatrix}$$

$$\{ \bar{M}_{eix \rightarrow \text{closca}}(O) \}_{B'} = \begin{Bmatrix} M_1' \\ 0 \\ M_3' \end{Bmatrix}$$

L'única força que crea moment en dir. $2'$ és T !

Ja ho tenim

Full ruta per trobar T

SIST = Closca
 $TMC(O) \text{ dir } 2'$

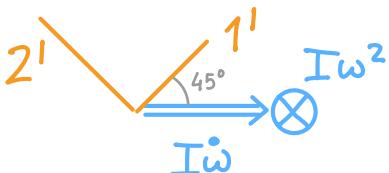
Càlcul de T

$$\sum M_{ext}(O) \Big|_{2'} = \dot{H}_{RTO}(O) \Big|_{2'}$$

$$(\nwarrow TR) = (\Rightarrow \frac{I\dot{\omega}}{\sqrt{2}})$$

$$T = - \frac{I\dot{\omega}}{R\sqrt{2}}$$

$$T = - \frac{2}{3}mR^2 \frac{\dot{\omega}}{R\sqrt{2}} = - \frac{\sqrt{2}}{3}mR\dot{\omega}$$



(VII)

Realment, J no llisca?

$$\text{No llisca} \Leftrightarrow T < \mu N \quad (\mu = \mu_{\text{circ}})$$

Quan tindrem $T < \mu N$?

$$\underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{3} m R \dot{\omega}}_T \stackrel{?}{<} \underbrace{\mu \left(\frac{mg}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} m R \omega^2 \right)}_N$$

Si $\dot{\omega} \geq 0$, la desigualtat es compleix sempre

Si $\dot{\omega} < 0$, la desigualtat es compleix quan

$$|\dot{\omega}| < \underbrace{\frac{3}{\sqrt{2} m R} \cdot \mu \left(\frac{mg}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} m R \omega^2 \right)}_{\dot{\omega}_{\text{frenada crítica}}}$$

Per tant: si els motors frenen ($\dot{\omega} < 0$) amb deceleració angular superior a $\dot{\omega}_{\text{frenada crítica}}$ es produirà lliscament a J.

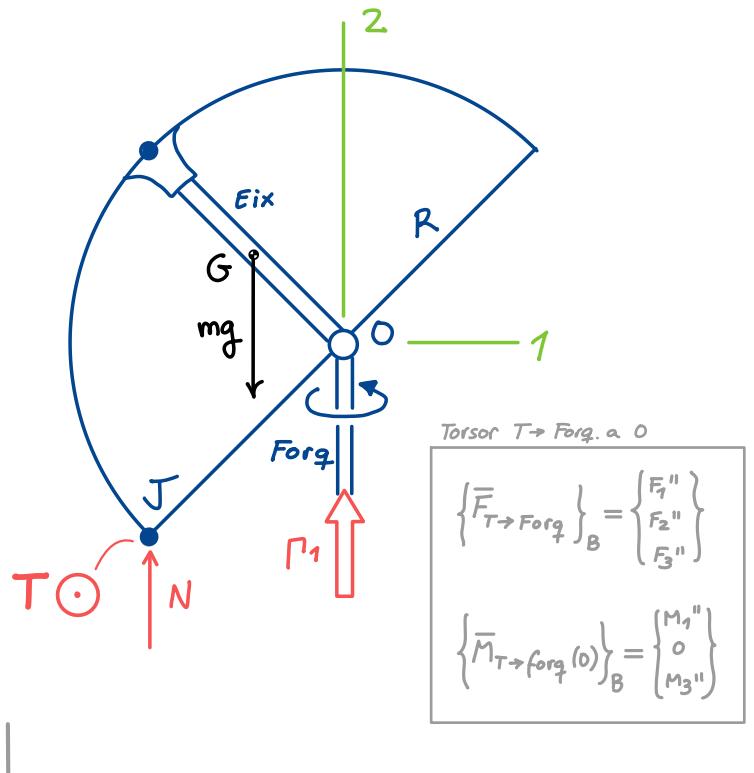
Parell motor Γ_1

Full rúta per Γ_1

$$\text{SIST} = \text{Closca} + \text{eix} + \text{forg}$$

$$TMC(0) \Big|_2$$

Per què va bé aquest full rúta?
 Perquè en el TMC(0) només Γ_1 i T creen moment en dir. 2, i ja sabem T d'abans!



$$\sum \bar{M}_{ext}(0) \Big|_2 = \dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \Big|_2$$

Torsor $T \rightarrow \text{forg. a } O$ no pintat
 (però no crea moment en dir. 2, resp. 0)

$$\sum M_{ext}(0) \Big|_2 = (\uparrow T \frac{R}{\sqrt{2}}) + (\uparrow \Gamma_1) = \left[\uparrow \left(\frac{TR}{\sqrt{2}} + \Gamma_1 \right) \right] \quad (\text{VII})$$

$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \Big|_2 = \bar{0} \quad (\text{IX})$$

D'abans sabem que

$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(0) = (\Rightarrow I \dot{\omega}) + (\otimes I \omega^2)$$

($\bar{H}_{RTO}(0)$ és el mateix q. abans pq forg. no té massa)

Igualant (VII) = (IX) :

$$\frac{TR}{\sqrt{2}} + \Gamma_1 = 0 \Rightarrow \Gamma_1 = -T \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\Gamma_1 = - \underbrace{\left[-\frac{\sqrt{2}}{3} m R \dot{\omega} \right]}_T \frac{R}{\sqrt{2}} = m \frac{R^2 \dot{\omega}}{3}$$

$$\bar{\Gamma}_1 = \left(\uparrow \frac{m R^2 \dot{\omega}}{3} \right)$$

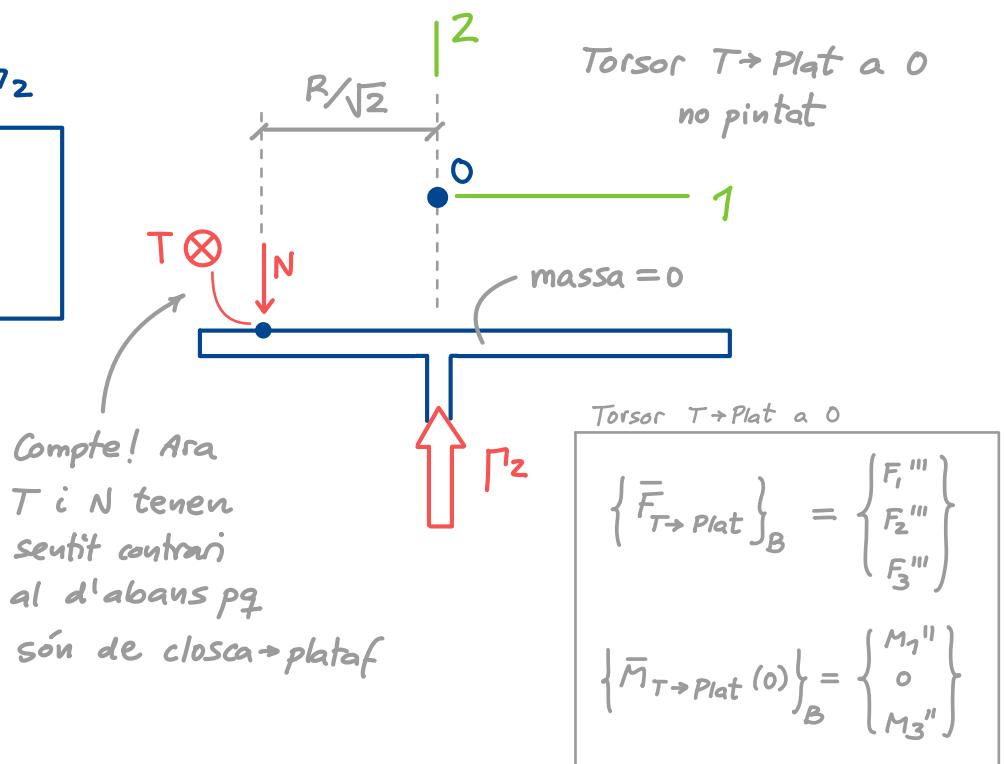
(XII)

Parell motor Γ_2

Full rata per Γ_2

$$SIST = \text{Plataf.}$$

$$TMC(0) \Big|_2$$



El full de rata és adequat pq només T i Γ_2 creen moment en dir. 2, i ja tenim T d'abans!

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) \Big|_2 = \dot{\bar{H}}_{RTD}(0) \Big|_2$$

$\underbrace{\dot{\bar{H}}_{RTD}(0) = 0 \text{ per } SIST = \text{Plataf.}}_{\text{pq massa (plataf)} = 0} \quad \text{D}$

$$\left(\downarrow T \frac{R}{\sqrt{2}}\right) + \left(\uparrow \Gamma_2\right) = \bar{0}$$

$$\Gamma_2 = T \frac{R}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3} m R \dot{\omega} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = -\frac{m R^2 \dot{\omega}}{3}$$

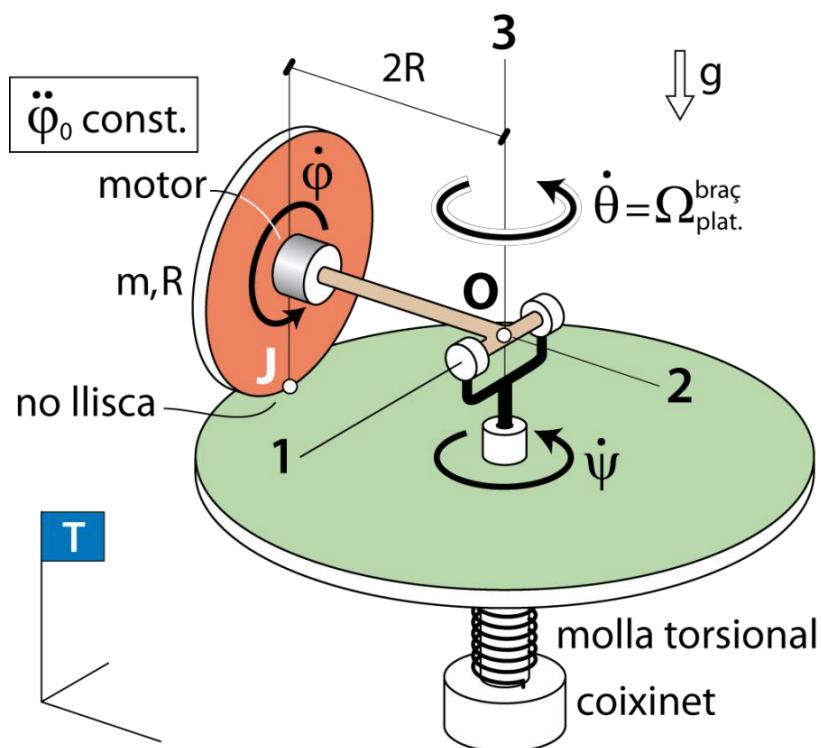
$$\boxed{\Gamma_2 = \left(\downarrow \frac{m R^2 \dot{\omega}}{3}\right)}$$

Disc rodant sobre plataforma

Versió adaptada del problema global de l'examen final de juny 2024

El disc, de massa m i radi R , roda sense lliscar sobre una plataforma, impulsat per un motor que actua entre braç i disc i controla la rotació pròpia $\dot{\phi}(t)$ de manera que el valor de l'acceleració angular associada és constant ($\ddot{\phi} = \ddot{\phi}_0 = \text{const.}$) El braç està articulat a una forquilla que pot girar lliurement **respecte de la plataforma** amb velocitat angular $\dot{\theta}$. La plataforma gira amb velocitat angular $\dot{\psi}$ respecte del terra. Entre ella i el terra hi ha una molla torsional de constant k que, per a $\psi = 0$, està distesa.

Es negligeixen les fricions associades als enllaços i la massa de tots els elements (tret del disc).



1. Quants graus de llibertat té el sistema? Justifica la resposta.
2. Determina la velocitat angular del braç $\dot{\theta}$ respecte de la plataforma en funció de $\dot{\psi}$ i $\dot{\phi}$.
3. Determina la velocitat angular del disc respecte del terra en funció de $\dot{\psi}$ i $\dot{\phi}$.
4. Fes el diagrama general d'interaccions (DGI) del sistema. En les interaccions d'enllaç, indica quantes incògnites introduceixen.
5. De quantes equacions independents podem disposar per resoldre el problema dinàmic? Es tracta d'un problema determinat o indeterminat?

6. Caracteritza tots els enllaços del sistema.
7. Un full de ruta adequat per obtenir l'equació del moviment per a la coordenada ψ consisteix en l'aplicació dels teoremes vectorials al sistema "Disc + Plataforma + Braç + Forquilla". Justifica per què.
8. Determina aquesta equació del moviment.
9. Determina la posició d'equilibri de la coordenada ψ . És estable? Com és l'evolució temporal de ψ ?
10. Proposa un full de ruta per calcular el parell motor Γ .
11. Calcula Γ .

Nota:

En la versió no adaptada d'aquest problema (disponible a Atenea) s'utilitza el concepte de sòlid auxiliar d'enllaç (SAE). En aquesta versió adaptada evitem l'ús d'aquest concepte.

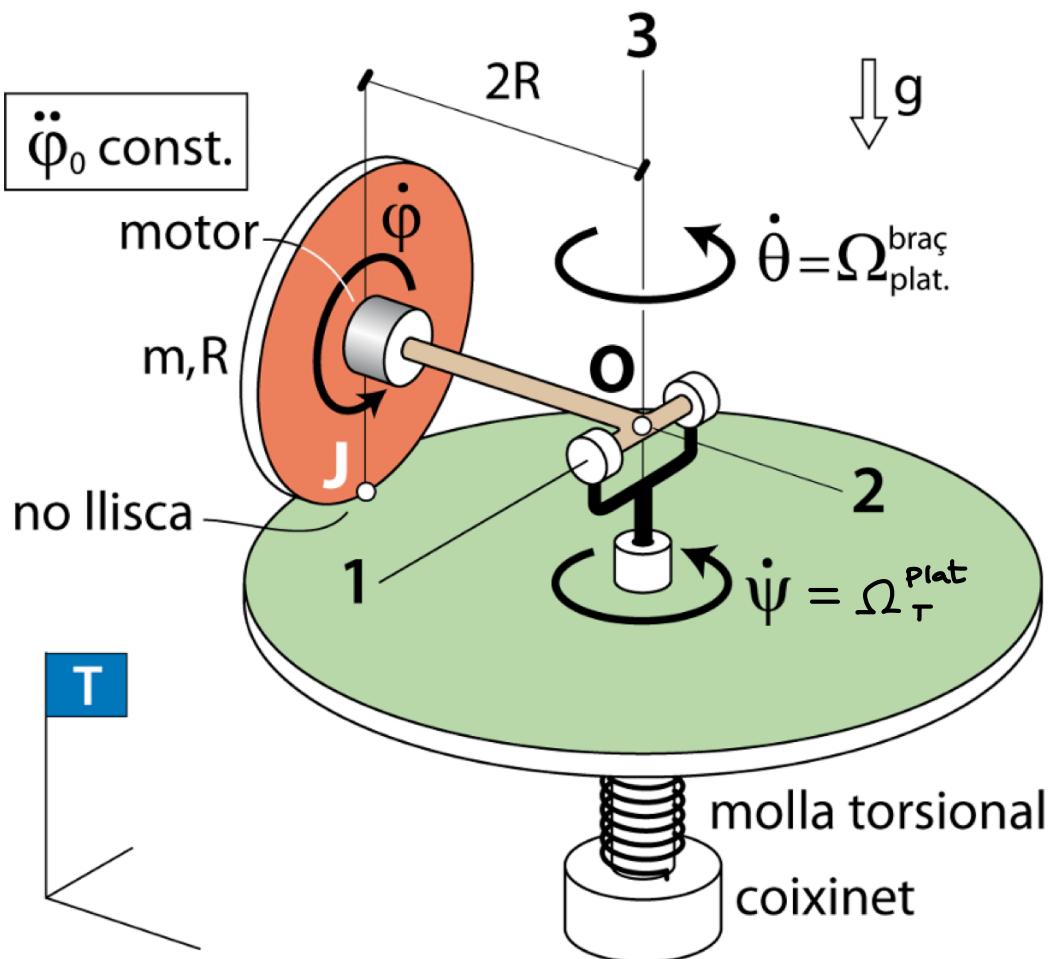
(1) Quants GL té el sistema?

Si aturem $\dot{\varphi}$, el disc encara pot rodar. Si, a més, aturem $\dot{\theta}$, ja tot queda en repòs.

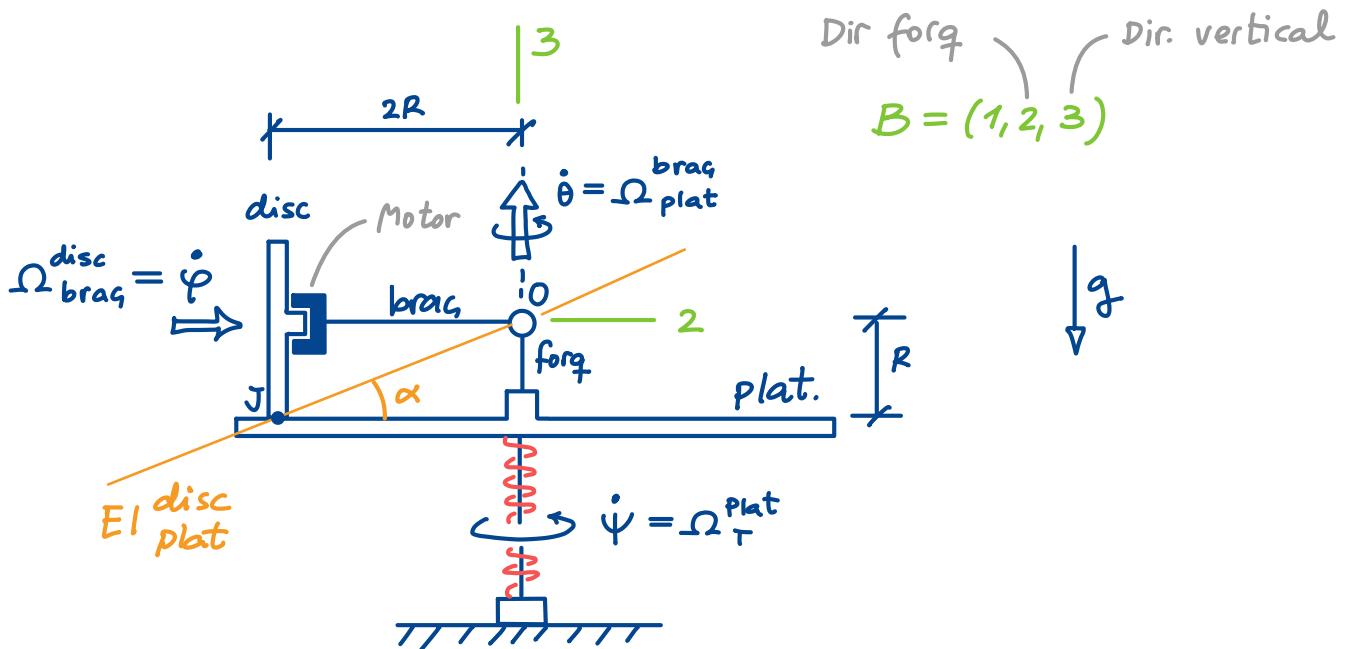
Per tant, el sist. té 2 GL, que es poden descriure així:

- Rotació $\dot{\varphi}$ de la plataf. respecte el terra (GL lliure)
- Rotació $\dot{\theta}$ del disc respecte el braç (GL forçat)

També podríem descriure els 2 GL mitjançant les rotacions $\dot{\varphi}$ i $\dot{\theta}$, que també són independents l'una de l'altra, però no mitjançant $\dot{\varphi}$ i $\dot{\theta}$, ja que aquestes són dependents entre elles: si aturem $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ queda aturada! Tot seguit veurem que $\dot{\theta}$ depèn linealment de $\dot{\varphi}$.

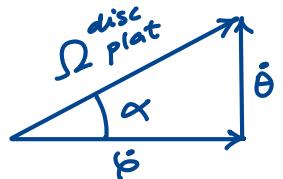


(2) $\dot{\theta}$ en funció de $\dot{\psi}$ i $\dot{\varphi}$



$$\overline{\Omega}_{\text{plat}}^{\text{disc}} = \overline{\Omega}_{\text{brag}}^{\text{disc}} + \overline{\Omega}_{\text{plat}}^{\text{brag}} = (\Rightarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \dot{\theta})$$

Ha de tenir la dir. de l' $EI_{\text{disc plat}}$



$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}} = \frac{R}{2R} \rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{\dot{\varphi}}{2}}$$

(I)

Clarament, $\dot{\theta}$ ve determinada per $\dot{\varphi}$. Ergo $\dot{\theta}$ és un GL indirectament forçat pel motor (indirectament activat).

(3) $\overline{\Omega}_T^{\text{disc}}$ en funció de $\dot{\psi}$ i $\dot{\varphi}$

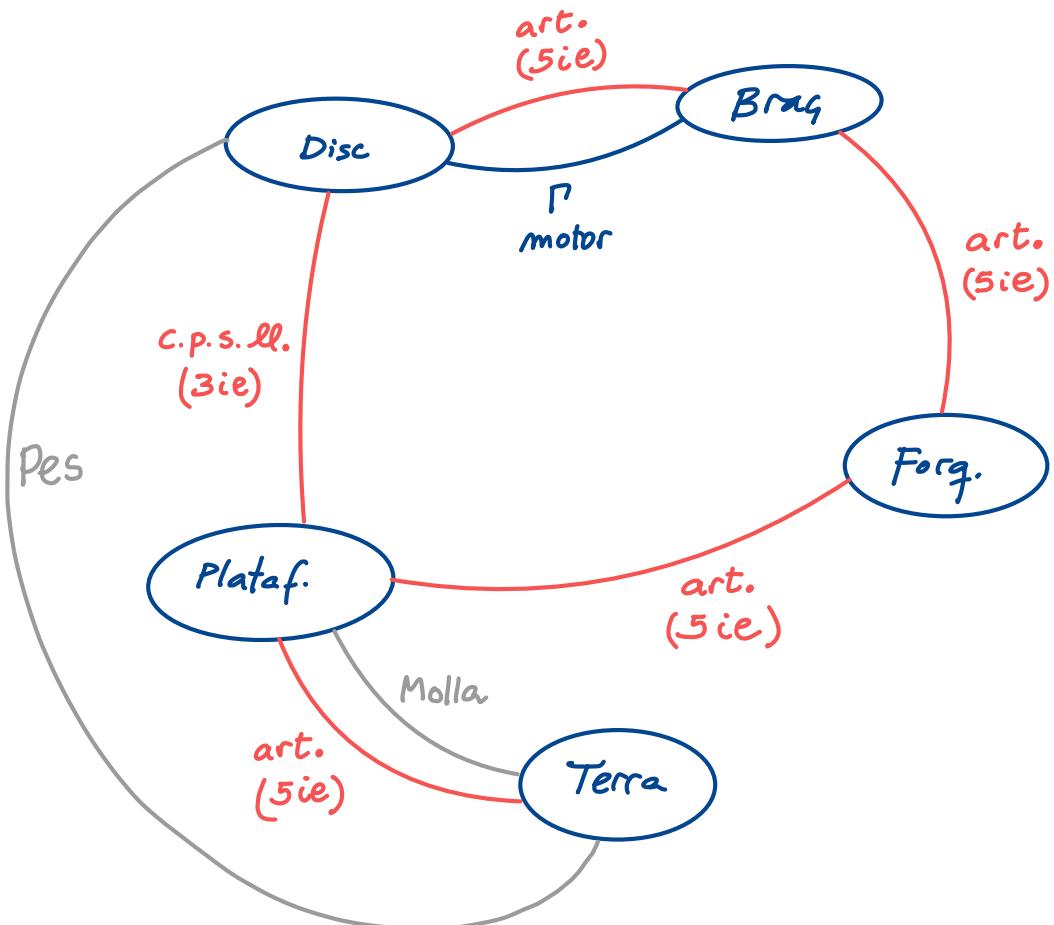
La necessitarem per al TMC. Calculem-la :

$$\overline{\Omega}_T^{\text{disc}} = \overline{\Omega}_{\text{brag}}^{\text{disc}} + \overline{\Omega}_{\text{plat}}^{\text{brag}} + \overline{\Omega}_T^{\text{plat}} =$$

$$= (\Rightarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \frac{\dot{\varphi}}{2}) + (\uparrow \dot{\psi}) = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} \\ \frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi} \end{array} \right\}$$

(II)

(4) Diagrama general d'interaccions



(5) #eqs independents per resoldre el probl. dinàmic

Si apliquem els teor. vectorials a tots els sòlids per separat tindrem :

Incògnites :	
23 ie	
$\ddot{\psi}$ ($\dot{\psi}$ és lliure)	25 incògn.
Γ ($\dot{\varphi}$ és forçat)	
Equacions :	
4 sòlids . $\frac{6 \text{ eqs}}{\text{sòlid}}$	24 eqs. (*)

Problema indeterminat

Podrem trobar $\ddot{\psi}$ (l'eq. mov.) segur, però no és segur que poguem determinar totes les ie.

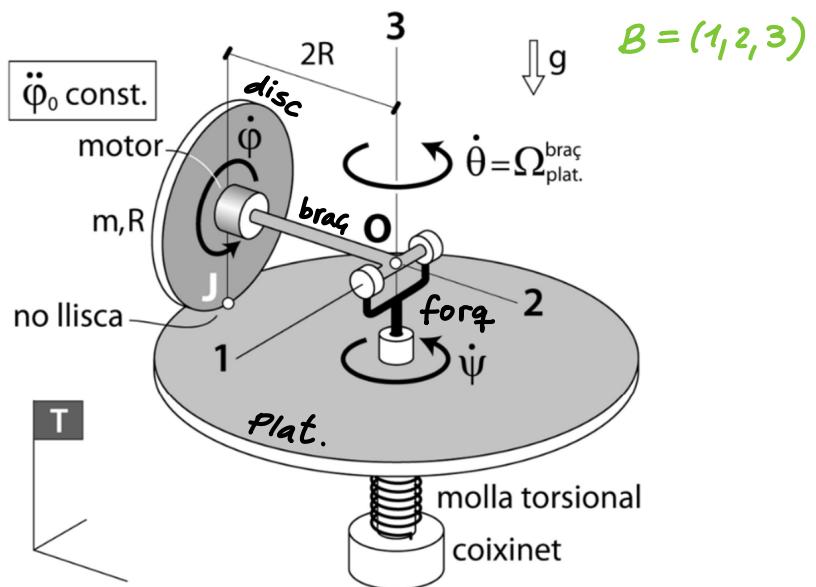
(*) El # màxim d'eqs. independents de les que podrem disposar en qualsevol problema dinàmic es sempre $\# \text{sòlids} \cdot \frac{6 \text{ eqs}}{\text{sòlid}}$

(6) Caracterització de tots els torsors d'eullaq

Tots els torsors es poden caracteritzar de manera immediata.

Tots donats en la $B = (1, 2, 3)$

Tots els torsors són de caracterització immediata a 0, tret del plat \rightarrow disc que ho és a J.



$$B = (1, 2, 3)$$

Terra \rightarrow plat, a 0:

$$\left\{ \bar{F}_{\text{Terra} \rightarrow \text{Plat}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{M}_{\text{Terra} \rightarrow \text{Plat}}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Plat \rightarrow disc, a J:

$$\left\{ \bar{F}_{\text{Plat} \rightarrow \text{Disc}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ N \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{M}_{\text{Plat} \rightarrow \text{Disc}}(J) \right\}_B = \bar{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Disc \rightarrow brag, a 0:

$$\left\{ \bar{F}_{\text{Disc} \rightarrow \text{brag}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{M}_{\text{Disc} \rightarrow \text{brag}}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1' \\ 0 \\ M_3' \end{Bmatrix}$$

Forsq \rightarrow plat a 0:

$$\left\{ \bar{F}_{\text{Forsq} \rightarrow \text{Plat}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1'' \\ F_2'' \\ F_3'' \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{M}_{\text{Forsq} \rightarrow \text{Plat}}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1'' \\ M_2'' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Brag \rightarrow forsq a 0:

$$\left\{ \bar{F}_{\text{Brag} \rightarrow \text{Forsq}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1''' \\ F_2''' \\ F_3''' \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{M}_{\text{Brag} \rightarrow \text{Forsq}}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2''' \\ M_3''' \end{Bmatrix}$$

(7) Justificació del full de ruta per trobar eq. mov. coord. ψ

Si considerem el sistema = Disc + Plataf + Brag + forq, l'únic tensor d'eullas que intervi és el del terri sobre la plataforma, que no té component de moment vertical. Com que l'equació del moviment no pot contenir incògnites d'eullas, és clar que una bona opció per obtenir-la és plantejar

$$TMC(0) \Big]_{\text{vertical}} = \text{dir. } 3$$

Com que l'acceleració angular $\ddot{\psi}$ és també vertical, sortirà en aquesta equació, cosa que volem. Quant a variables d'acceleració, aquesta equació pot contenir $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$, i $\ddot{\psi}$, però

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_0 = ct \quad (\text{per l'enunciat})$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\varphi}}{2} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{\varphi}}{2} = \frac{\ddot{\varphi}_0}{2} = ct$$

Per tant, l'única incògnita d'acceleració serà $\ddot{\psi}$, tal i com volem.

En resumidas cuentas :)

Full ruta :

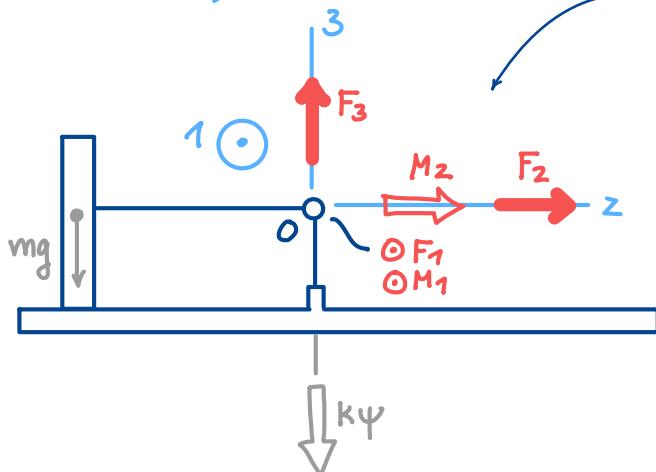
$$SIST = \text{Disc} + \text{Plataf} + \text{Brag} + \text{forq}$$

$$TMC(0) \Big]_3$$

(8) Càlcul de l'eq. mov. aplicant full rata

Les forces i moments exteriorment aplicats són:

$$B = (1, 2, 3)$$



Dibuixat en vermell

$$\{\bar{F}_{\text{terra} \rightarrow \text{plat}}\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{M}_{\text{terra} \rightarrow \text{plat}(O)}\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(O) = \dot{H}_{RTO}(O) \quad \leftarrow \begin{array}{l} RTO = T \text{ perquè } O \in T \\ \text{term complementari perquè } O \text{ fix a } T. \\ \text{Només ens cal la dir. 3} \end{array}$$

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(O) = \begin{Bmatrix} \vdots \\ -k\psi \end{Bmatrix} \quad (\text{III})$$

$$\bar{H}_{RTO}(O) = \underbrace{\mathbb{II}(O)}_{\text{del disc}} \bar{\Omega}_T^{\text{disc}} \quad (\text{només el disc té massa, i } O \in \text{disc})$$

$$I = I' + I'' = \frac{17}{4}mR^2$$

$$[\mathbb{II}(O)]_B = [\mathbb{II}(G)]_B + [\mathbb{II}^\oplus(O)]_B = \begin{bmatrix} I' & 2I' \\ 2I' & I' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I'' & 0 \\ 0 & I'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 2I' \\ 2I' & I'' \end{bmatrix}$$

2 és DPI
Rotor simètric a G

$$2I' = \frac{mR^2}{2} \Rightarrow I' = \frac{mR^2}{4}$$

$$I'' = m(2R)^2 = 4mR^2$$

$$\left\{ \bar{H}_{RTO}(0) \right\}_B = \begin{bmatrix} I & 2I' \\ 2I' & I \end{bmatrix} \overbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{Bmatrix}}^{\bar{\Omega}_T^{Disc}, \text{ de (II)}} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ 2I' \dot{\varphi} \\ I(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ 2I' \ddot{\varphi} \\ I(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} + \ddot{\theta} \end{Bmatrix}}_{\dot{\varphi}/2} \times \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ 2I' \dot{\varphi} \\ I(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\dot{\psi} + \frac{\dot{\varphi}}{2}) 2I' \dot{\varphi} \\ 2I' \ddot{\varphi} \\ I(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) \end{Bmatrix} \quad (IV)$$

Igualem comp. 3 de (III) i (IV):

$$\begin{aligned} -K\psi &= I\left(\frac{\ddot{\varphi}}{2} + \ddot{\psi}\right) & I = \frac{17}{4}mR^2 \text{ (d'abans)} \\ -K\psi &= \frac{17}{4}mR^2 \left(\frac{\ddot{\varphi}_0}{2} + \ddot{\psi}\right) & \ddot{\psi} = \ddot{\varphi}_0 \text{ (enunciat)} \\ -\frac{4K\psi}{17mR^2} &= \frac{\ddot{\varphi}_0}{2} + \ddot{\psi} \end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{\psi} + \frac{4K}{17mR^2} \psi + \frac{\ddot{\varphi}_0}{2} = 0} \quad \begin{array}{l} \text{Eq. mov. per la} \\ \text{coord. } \psi \end{array} \quad (V)$$

EDO Lineal a coefs ct.

(9) Configuració d'equilibri per a ψ

Substituim $\psi = \psi_{eq}$, $\dot{\psi} = 0$, $\ddot{\psi} = 0$ a (V) i queda

$$K \cdot \psi_{eq} + F = 0 \Rightarrow \boxed{\psi_{eq} = -\frac{F}{K} = -\frac{\frac{\ddot{\varphi}_0}{2}}{\frac{4K}{17mR^2}} = -\frac{17mR^2}{8K} \ddot{\varphi}_0}$$

Només hi ha aquesta configuració d'equilibri per a ψ .

Analitzem ara si $\Psi_{eq} = -F/K$ és estable o no:

$$\ddot{\Psi} + K \Psi + F = 0$$

Eq. movim.
per a Ψ

(VI)

$$\Psi = \Psi_{eq} + \varepsilon$$

$$\dot{\Psi} = \dot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\Psi} = \ddot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\varepsilon} + K(\Psi_{eq} + \varepsilon) + F = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + K\left(-\frac{F}{K} + \varepsilon\right) + F = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + K\varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} = -K\varepsilon$$

EDO de l'error ε
associada

(VII)

L'angle $\Psi_{eq} = -\frac{F}{K}$ serà d'equilibri estable si $K > 0$

↓ Estudiem quan $K > 0$

$$K = \frac{4K}{17mR^2} > 0 \text{ sempre!}$$

↓

$\Psi_{eq} = -\frac{F}{K}$ és d'equilibri estable sempre.

Naturalesa
de l'evolució
temporal $\Psi(t)$

La plataforma tindrà un moviment
oscil·latori al voltant de Ψ_{eq} , de
freqüència \sqrt{K} .

(10) Full ràta per calcular el parell motor Γ

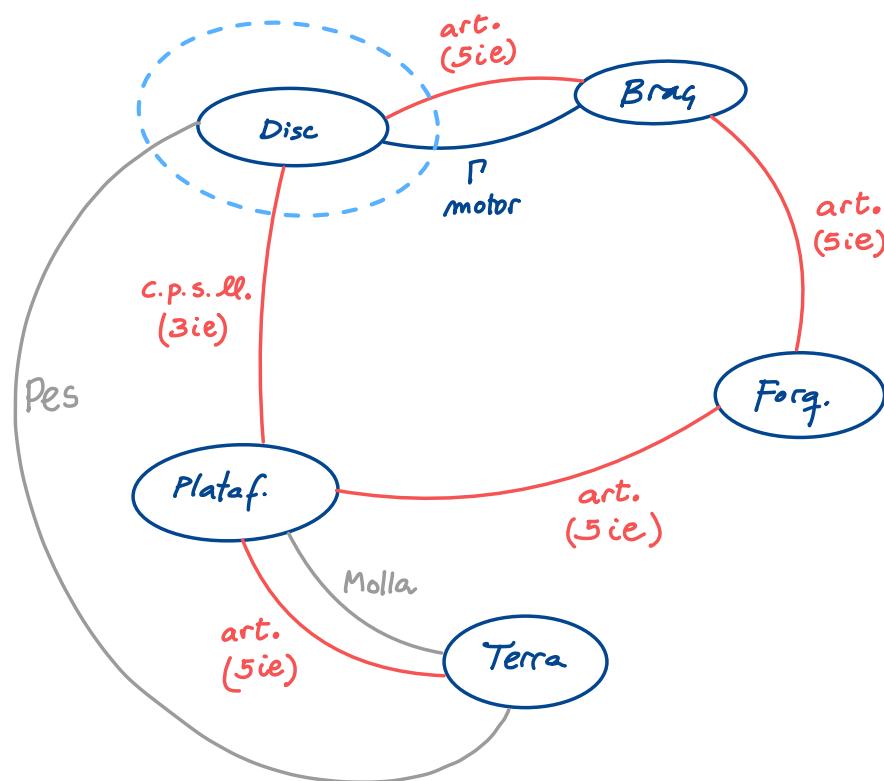
Com que hem de trobar un parell (Γ) \Rightarrow cal aplicar TMC

Els sistemes han d'incloure Γ com a interacció externa \Rightarrow els possibles sistemes són:

Sistema	Incògn. ^(*)	#incògn	Problema
Disc	8 ie, Γ	9	Indet
Disc + plat.	10 ie, Γ	11	"
Disc + plat + forq.	10 ie, Γ	11	"
Brag	10 ie, Γ	11	"
Brag + forq.	10 ie, Γ	11	"
Brag + forq + plat	8 ie, Γ	9	"

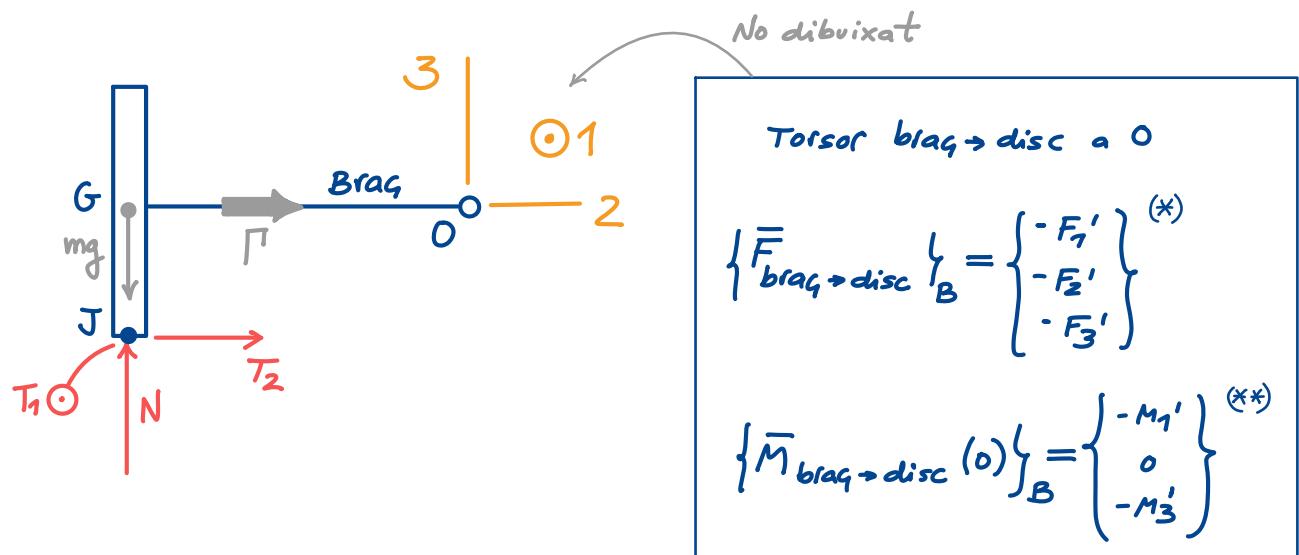
Explorem els sistemes marcats per ser els de menys incògnites.

Comencem pel sist = disc i posterior ja ens en sortim:



(*) Ara $\dot{\psi}$ ja no és una incògnita (ja en sabem el valor, donat per l'eq. del moviment (V))

Interaccions externes sobre sist = Disc



Cal aplicar $TMC(0)]_2$ per a que sorti P !

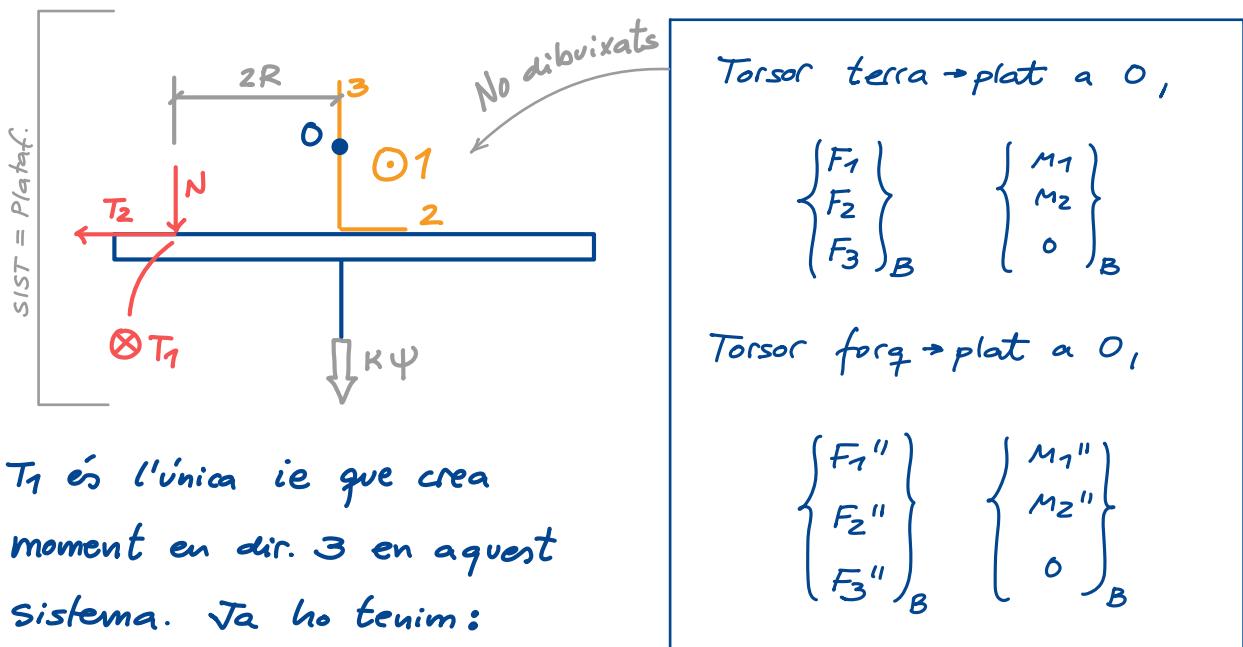
Però això fa intervenir l'ie T_1 (crea moment en dir. 2)

Les altres ie no creen moment en dir. 2

Caldria una altra equació per determinar T_1

$TQM]$, no va bé perquè introduïria F_1' (incògnita extra)

Com que T_1 intervé en sist = plataf, estudiem aquest sist:



T_1 és l'única ie que crea moment en dir. 3 en aquest sistema. Ja ho tenim:

(*) Amb signes "-" per com hem definit el torsor disc \rightarrow braq abans (apartat 6)

(**) Idem!

Full nota per
a Γ

$$sist = disc : TMC(0) \Big|_2^{(*)}$$

$$sist = plataf : TMC(0) \Big|_3$$

(10) Calculen Γ

$$\underline{TMC(0) \Big|_2, sist = disc}$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) \Big|_2 = \dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \Big|_2$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) \Big|_2 = (\Rightarrow \Gamma) + (\leftarrow T_1 R) = \left[\Rightarrow (\Gamma - T_1 R) \right] \quad (a)$$

$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \Big|_2 = (\Rightarrow 2 I' \ddot{\varphi}_o) \quad (b)$$

De (IV) i recordant que $\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_o$

Ignant (a) i (b):

$$\Gamma - T_1 R = 2 I' \ddot{\varphi}_o \quad (VIII)$$

$$\underline{TMC(0) \Big|_3, sist = plat}$$

$$(\downarrow T_1 2R) + (\downarrow K \psi) = 0$$

$$T_1 2R + K \psi = 0 \Rightarrow T_1 = -\frac{K \psi}{2R} \quad (IX)$$

Substituint (IX) a (VIII)

$$\Gamma = \frac{-K \psi}{2R} \cdot R + 2 \frac{m R^2}{I'} \cdot \ddot{\varphi}_o = -\frac{K}{2} \psi + \frac{m R^2}{2} \ddot{\varphi}_o \quad (X)$$

(*) També podríem aplicar $TMC(G) \Big|_2$ pel $sist = disc$ (utilitzant el tensor braç \rightarrow disc caracteritzat a G que és formalment igual al caracteritzat a 0) i donaria el mateix. La $\sum \bar{M}_{ext}(G)$ és la mateixa, i $\dot{\bar{H}}_{RTO}(G) \Big|_2$ també. Ex. pel lector!

Comentari final

Ens ha faltat explorar

$$SIST = braç + forq + plat$$

El càlcul de ρ hagués sigut + fàcil sobre aquest sistema?
 Ràpidament veiem que no, perquè $TMC(0)]_2$ introduceix
 T_1 i M_2 (apart de ρ) \Rightarrow aquesta ruta requeria buscar
 2 egs addicionals i no una (com a mínim):

