

## Timing 7P

Intro 20'

Anella giratoria 30'

Descans 10'

Fil sobre polifia 30'

Antena telescópica 30'

# 1P

Versió 1.0

Definició de coordenades  
lineals i angulares

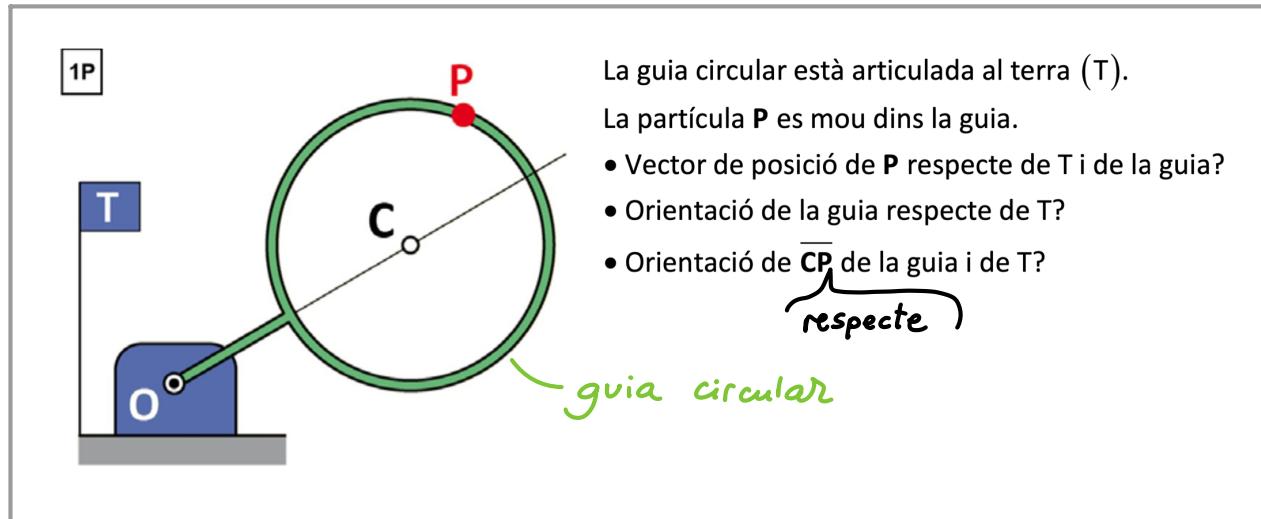
Rotacions simples

Diagrama de moviments relatius (DMR)

Graus de llibertat (GL)

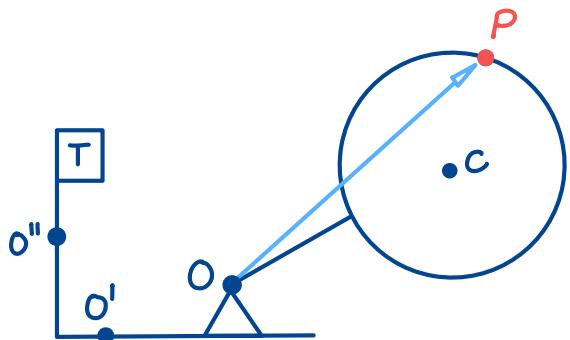
Lluís Ros  
<https://lluisros.github.io/mecanica>

## Anella giratòria (2D)



Cal pensar  $P$  com una calixa petita movent-se dins la guia.

Vec. pos. de  $P$  resp.  $T$



Cal triar un origen  $O$   
per al vector, que sigui  
un punt fix a  $T$

El més natural és  $O$ .

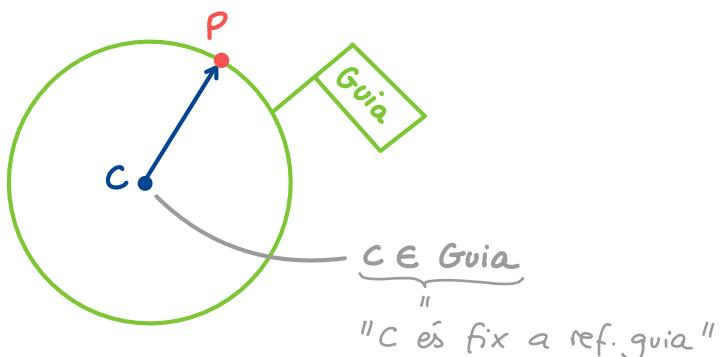
Triant  $O$ , el vec. pos. demandat és  $\overline{OP}$ .

Vec. pos. de  $P$  resp. guia

Ens cal un punt fix a la guia com a origen.

El més natural és  $C$  (centre de la guia).

Triant  $C$ , el vec.  
pos. demandat és  $\overline{CP}$

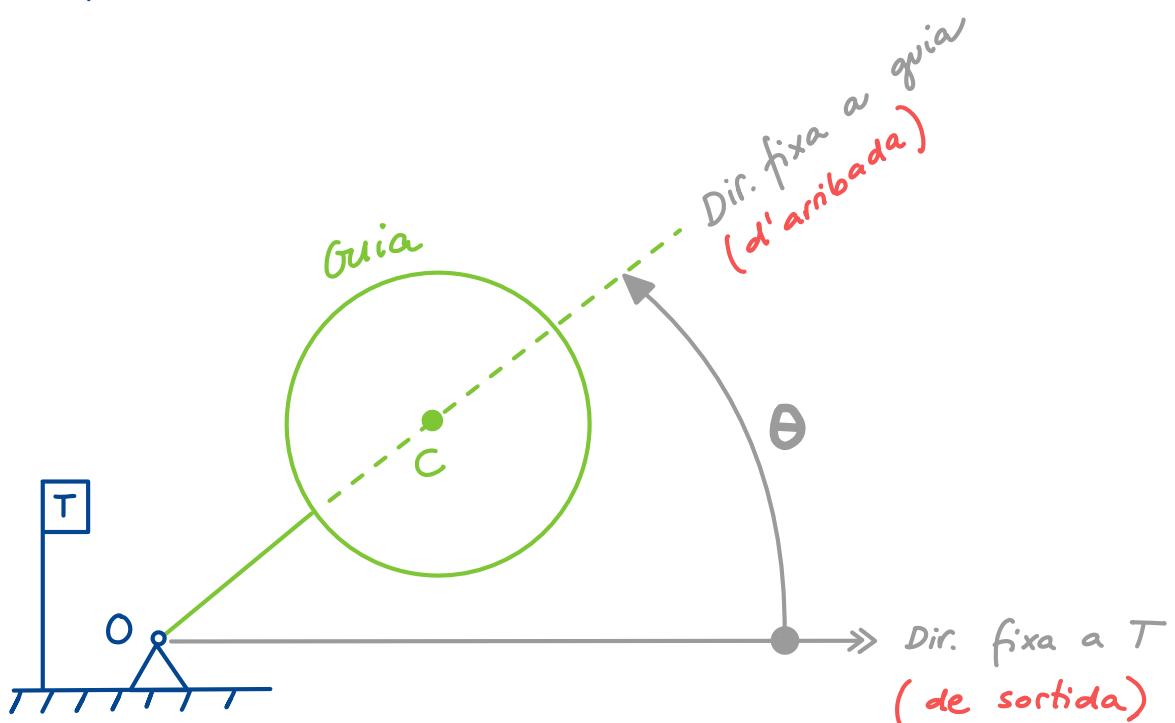


## Orientació de la guia respecte de T

La guia té un moviment de rotació simple respecte de T, al voltant d'un eix que passa per O i és perpendicular al pla del dibuix.

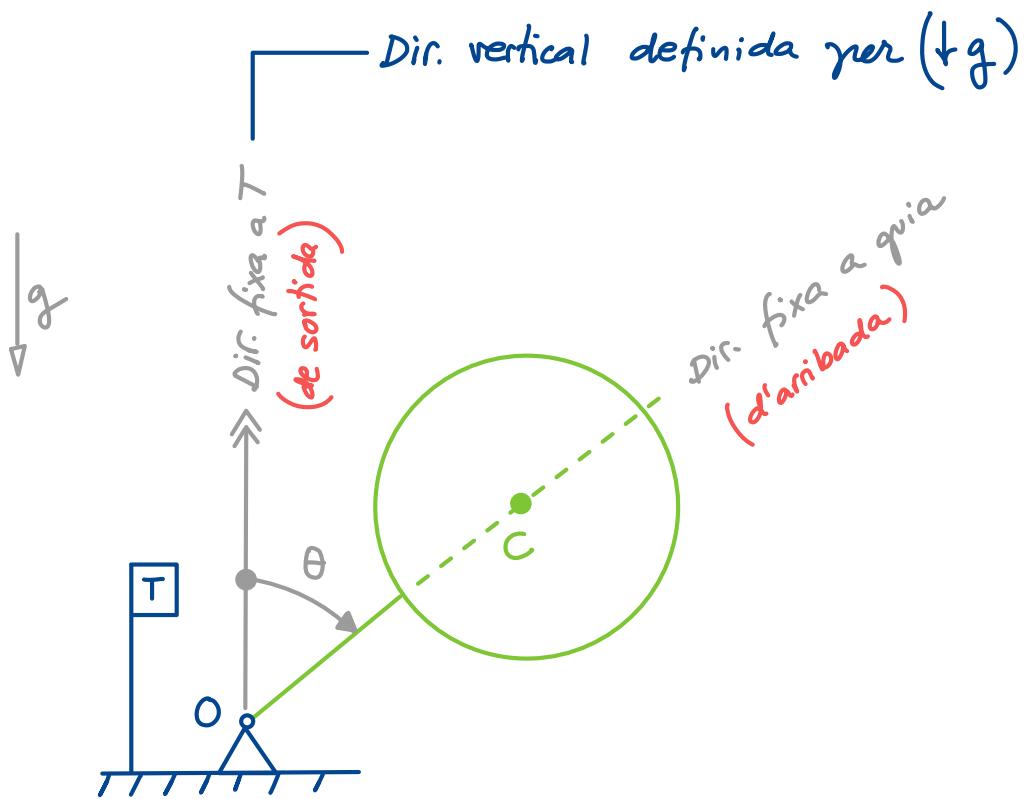
En una rotació simple, l'orientació del sólid respecte d'una referència (en aquest cas la guia respecte T) ve donada per l'angle entre una direcció fixa a la referència (dir. de sortida) i una altra fixa al sólid (dir. d'arribada).

Triant les direccions següents, l'orient. de la guia resp. T queda descrita per  $\theta$ :



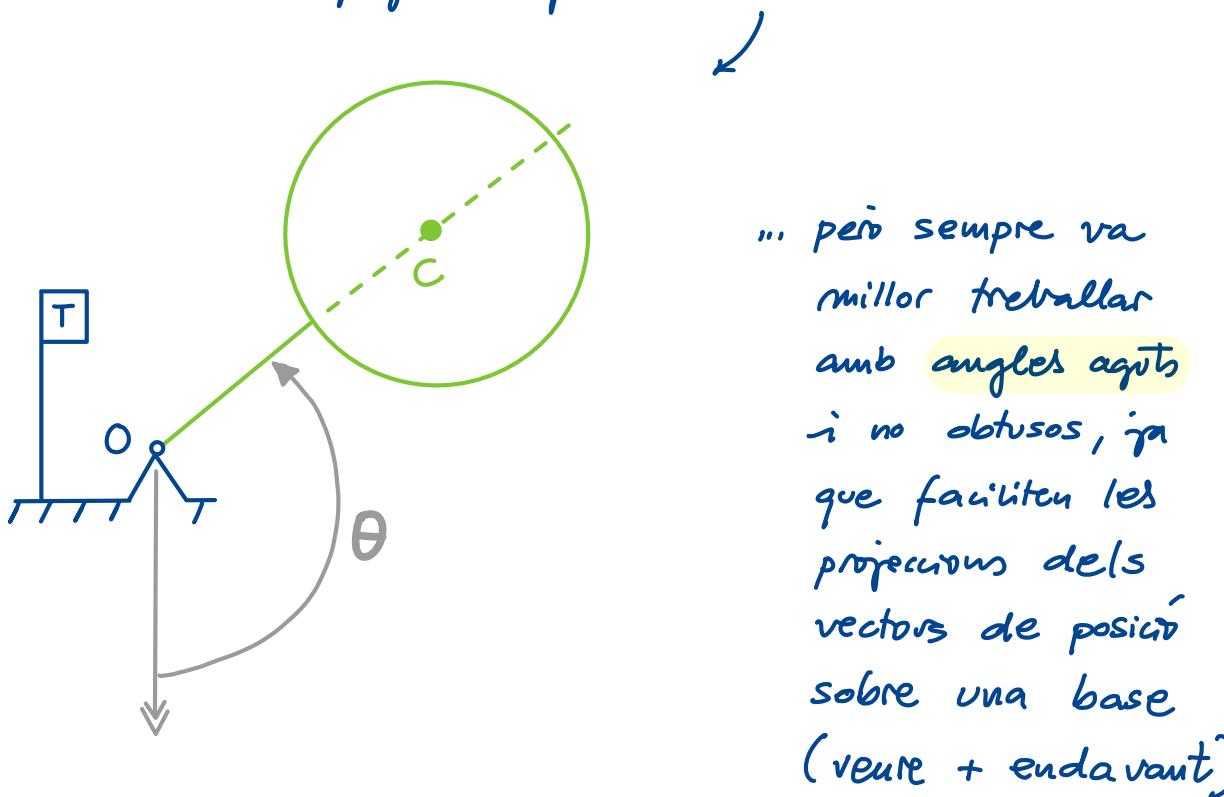
### Altres opcions:

L'elecció de les direccions "fixa a la referència" i "fixa al sólid" és arbitrària. Sempre hi ha múltiples opcions. Per exemple hauríem pogut triar

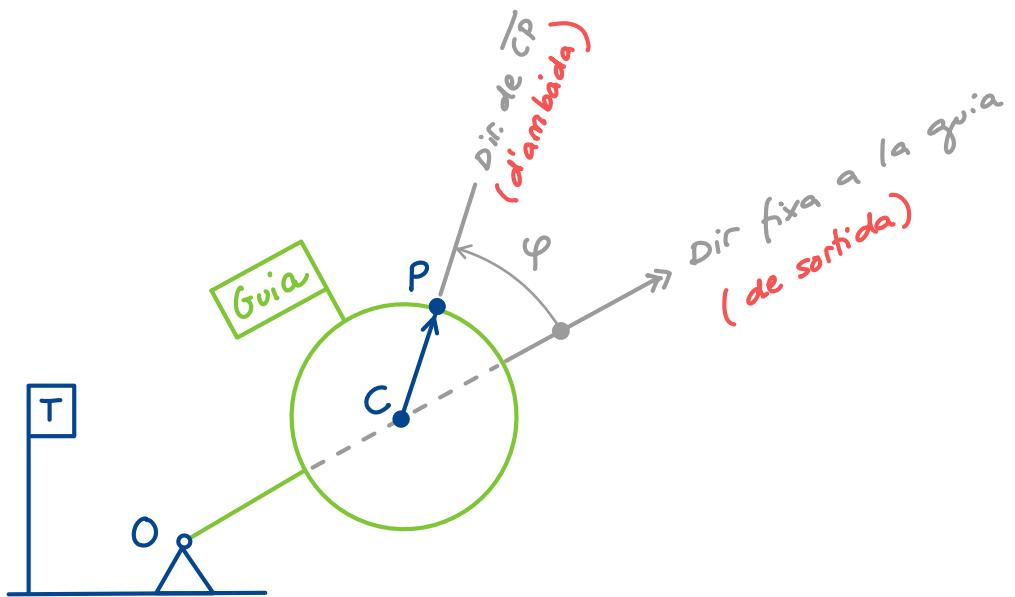


resultant-ne un angle  $\theta$  diferent (tant en valor com en orientació perquè ara ha quedat definit en sentit horari).

També hauríem pogut definir  $\theta$  així ...

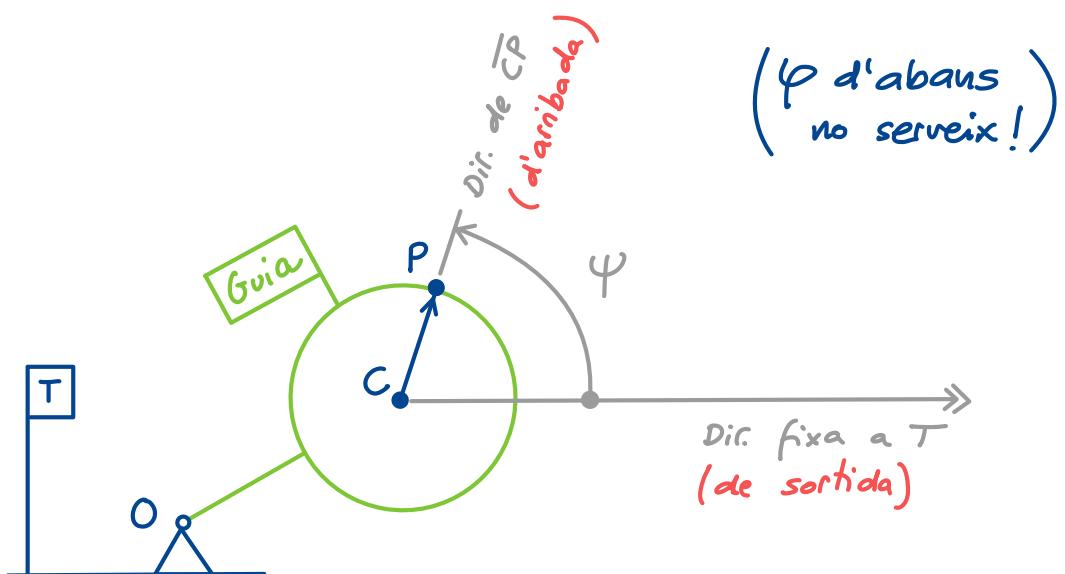


Orient. de  $\overline{CP}$  resp. la guia



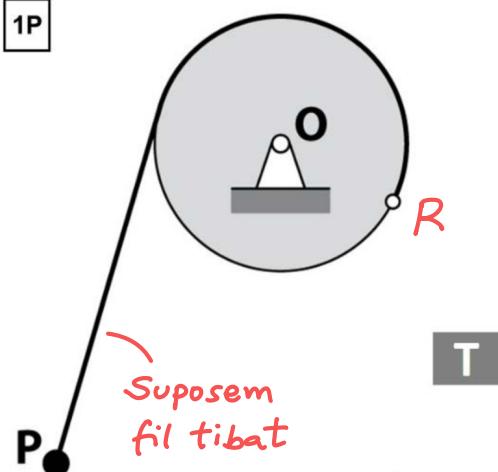
Amb la tria indicada, l'orient. de  $\overline{CP}$  resp. de la guia  
ve donada per  $\varphi$

Orient. de  $\overline{CP}$  resp. T



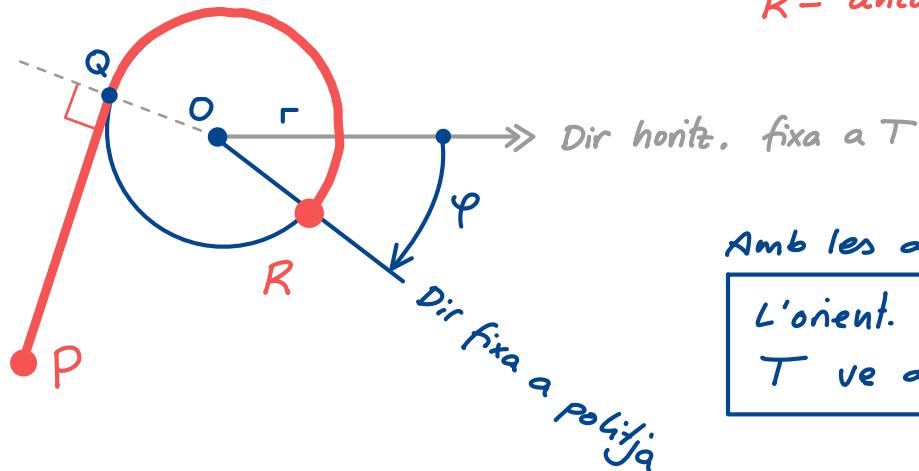
Amb la tria indicada, l'orient. de  $\overline{CP}$  resp. de T  
ve donada per  $\varphi$ .

## Fil sobre politja



- La politja està articulada al terra (T).
- El fil inextensible recolza al damunt de la politja.
- Orientació de la politja respecte de T?
  - Orientació del fil respecte de T?
  - Vector de posició de P respecte de T?
  - Orientació del fil respecte de la politja?
  - Vector de posició de P respecte de la politja?
  - Longitud lliure del fil, en una configuració general, en funció de la longitud en repòs i dels angles?

### Orient. de la politja resp. T



Amb les dir. triades:

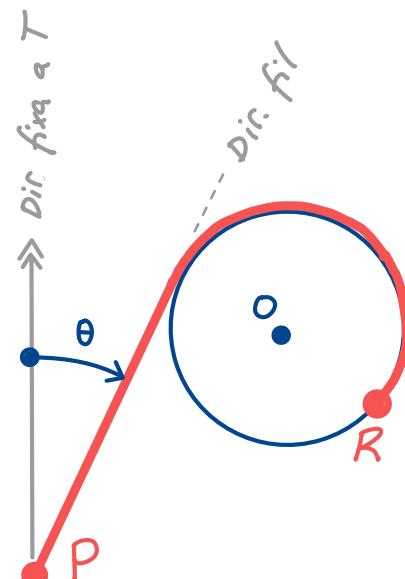
L'orient. de la politja resp.  
T ve donada per  $\varphi$

⚠ Compte: la dir. OQ és fixa al fil (\*) però no a la politja!

### Orient. del fil resp. T

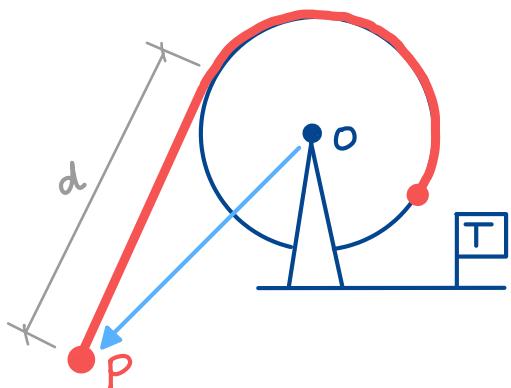
Amb les dir. triades al dibuix:

L'orientació del fil resp.  
T ve donada per  $\theta$



(\*)  $\overline{OQ}$  sempre es manté  $\perp$  al fil.

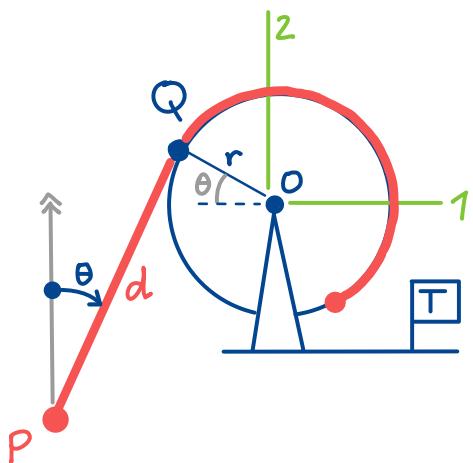
## Vector de posició de P resp. T



Com a origen del vector cal triar un punt fix a T. El més natural és O.

Triem  $\overline{OP}$  com a vec. pos. de P resp. T

Extra (\*): Si volem, podem expressar  $\overline{OP}$  en funció de  $\varphi$ ,  $\theta$  i la longitud lliure del fil ( $d = |\overline{QP}|$ ), utilitzant una base vectorial; p. ex. la base



$$B = (1, 2, 3)$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$   
 Dir. vertical de T  
 Dir. horitz. de T

$$\{\overline{OP}\}_B = \{\overline{OQ}\}_B + \{\overline{QP}\}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} -r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\overline{OQ}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -d \sin \theta \\ -d \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\overline{QP}}$$

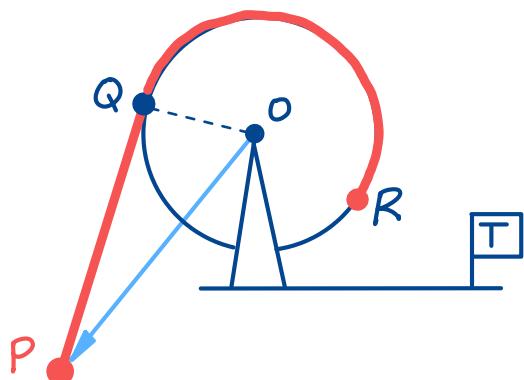
Més avall veurem que d es pot expressar en funció de  $\varphi$ ,  $\theta$ , i L (la longitud "en repòs" del fil).

---

(\*) Salteu-vos-ho per ara (cal saber bases vectorials  $\Rightarrow$  setmana vinent)

## Vector de posició de P resp. polifja

Com origen del vector podem triar O novament ja que O també és fix a la polifja.



amb aquesta tria, el vector demandat és  $\overline{OP}$ .

### Alternatives

També podríem triar R com origen, però és menys natural. La tria de O permet fer la descomposició

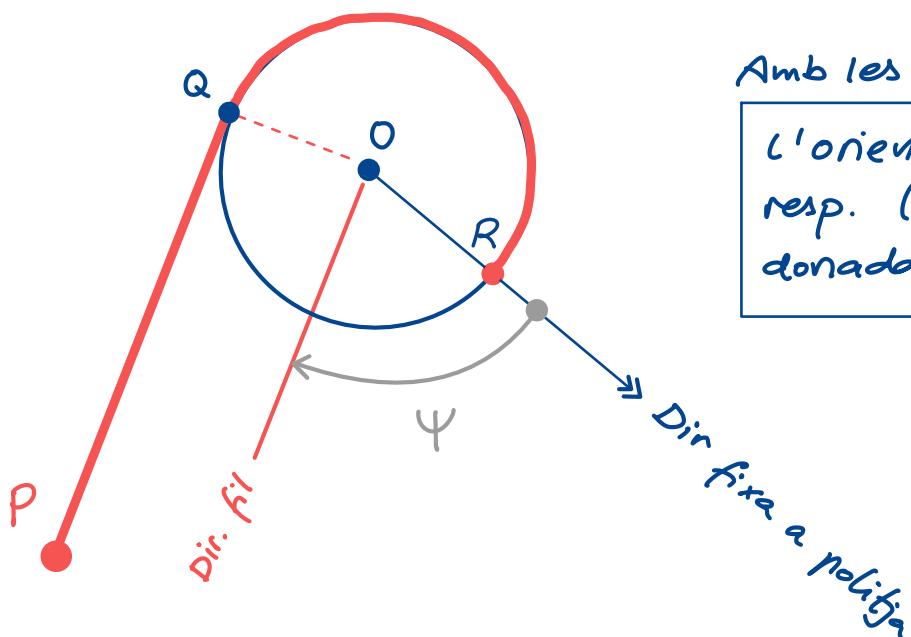
$$\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP}$$

que facilita expressar  $\overline{OP}$  en funció de  $\varphi$  i  $\theta$  si cal, mitjançant alguna base vectorial<sup>(\*)</sup>

Q no serviria com a origen perquè és el punt geomètric de contacte fil-polifja, que no és fix a la polifja.

(\*) Començarem a treballar amb bases vectorials a 2P.

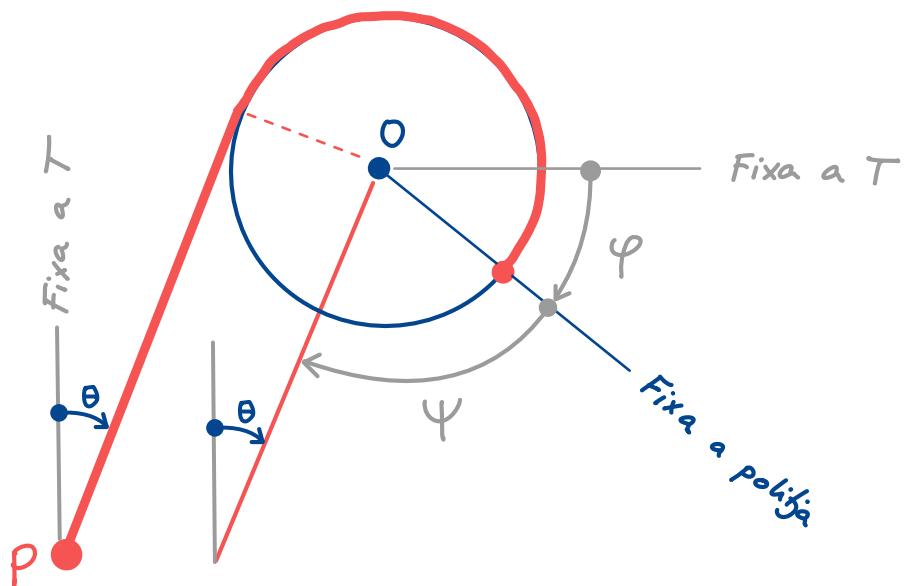
## Orientació del fil resp. la polifia



Amb les dir. triades:

L'orient. del fil  
resp. la polifia ve  
donada per  $\psi$ .

Obs:  $\psi$  es pot escriure en funció de  $\varphi$  i  $\theta$ :



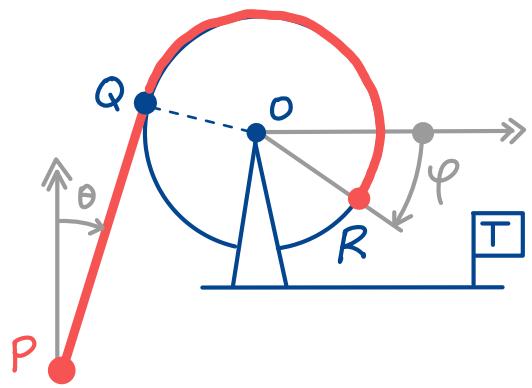
Clarament:

$$\varphi + \psi - \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\psi = \theta - \varphi + \frac{\pi}{2}}$$

## Longitud lliure del fil

És  $d = |\overline{QP}|$ .

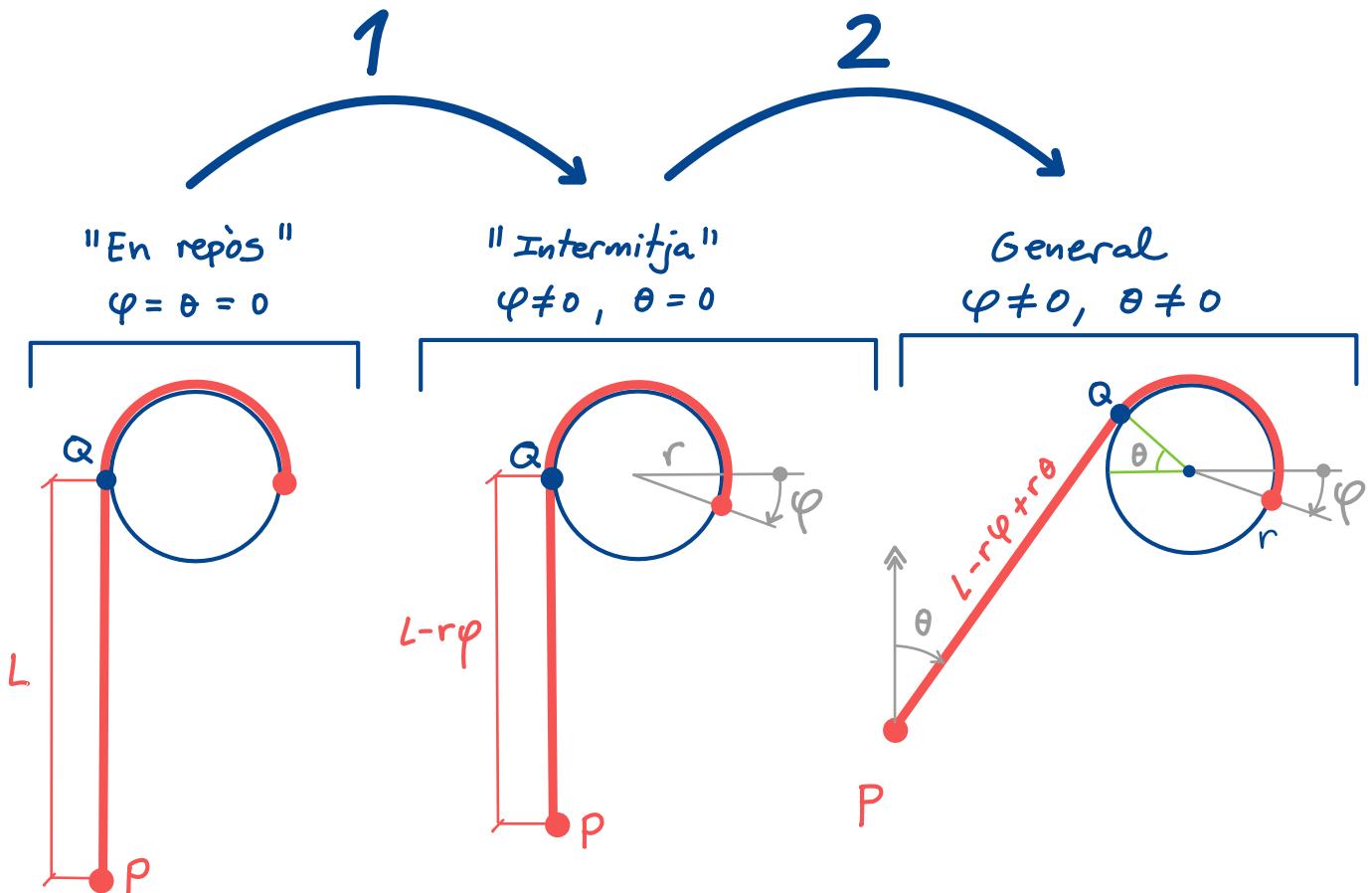
La volem per a una configuració general (per valors genèrics de  $\varphi$  i  $\theta$ ).



Definim la longitud "en repòs" com:

$$L = |\overline{QP}| \Big|_{\varphi=\theta=0}$$

Podem passar de la config. "en repòs" ( $\varphi=\theta=0$ ) a una de general ( $\varphi, \theta$  genèrics) en 2 passos:



Per tant:

$$d = L - r\varphi + r\theta$$

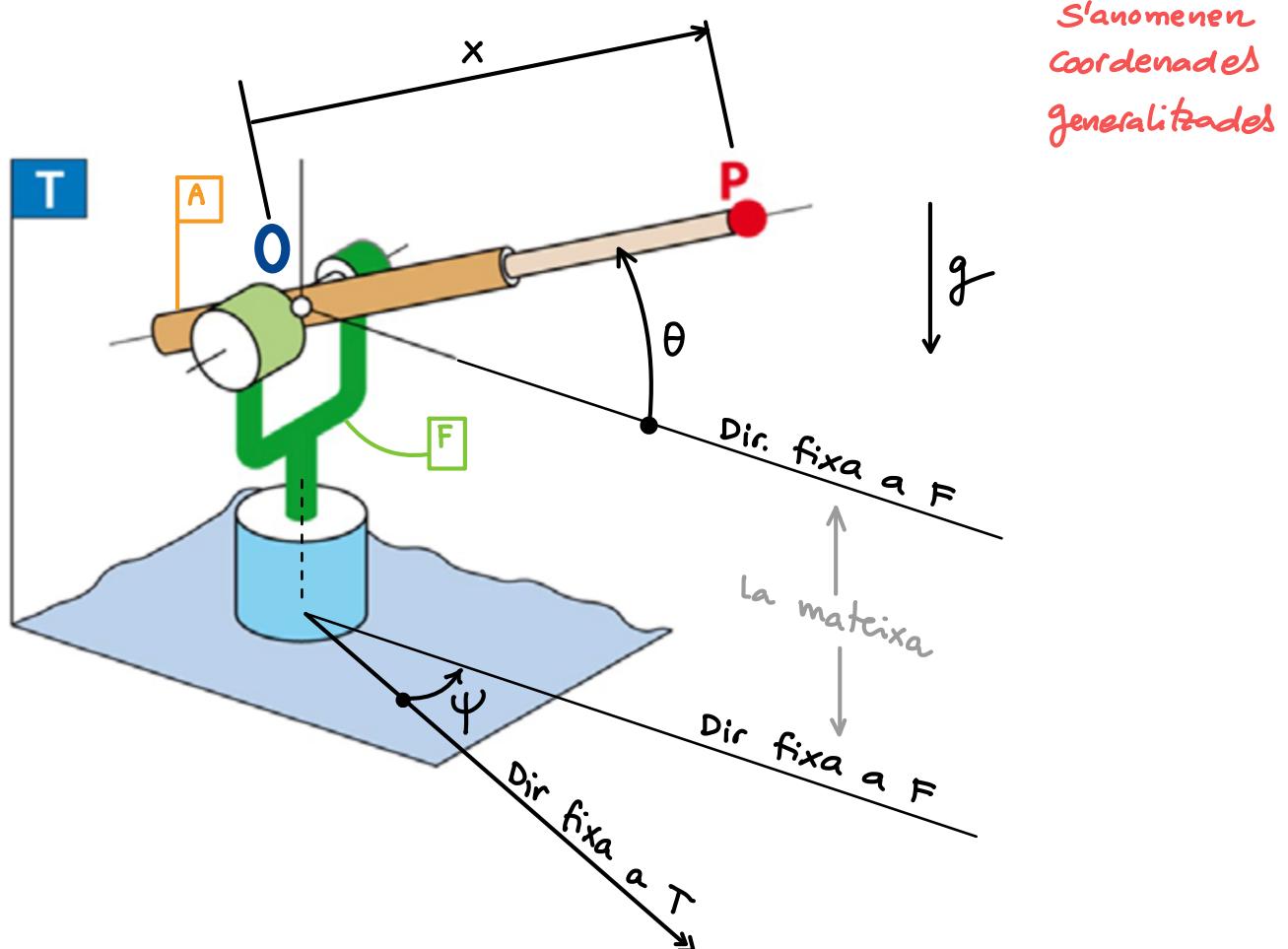
## Antena telescòpica

**Suposarem que és un enllaç prismàtic**

La forquilla (F) gira respecte del terra (T). L'antena telescòpica està articulada a la forquilla.

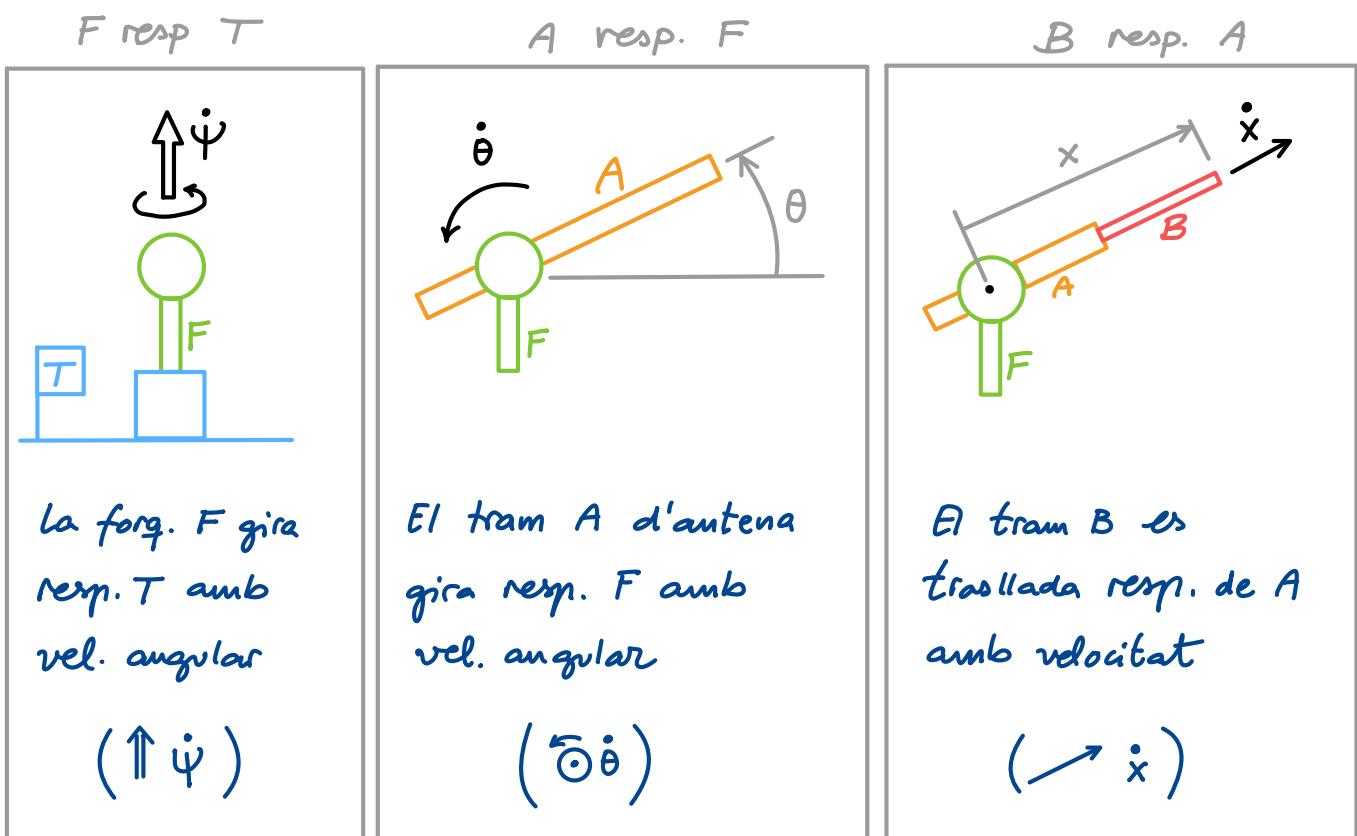
- Vector de posició de P respecte de la primera part de l'antena (A), de F i de T?
- Diagrama de Moviments Relatius?
- Graus de Llibertat?
- Orientació de l'antena respecte de F, T?
- Orientació de la forquilla respecte de T?

El sistema està format pel terra (T) i 3 solids ( $F, A, B$ ) amb moviments relatius entre ells (els premesos pels enllaços). Podem descriure aquests moviments mitjançant les següents coordenades  $\psi, \theta, x$ :



- $\psi$  = angle entre una dir. horizontal <sup>(\*)</sup> fixa a T i la perpendicular al pla de la forquilla F. Orienta F resp. T
- $\theta$  = angle entre la perpendicular al pla de F i la dir. de l'antena A. Orienta A resp. F
- $x$  = distància entre O i P Posiciona la 2<sup>a</sup> part de l'antena resp. la 1<sup>a</sup>.

Aquestes coordenades ens permeten descriure els mòvements relatius entre parelles de sòlids. Ho farem amb dibujos 2D perquè són més clars:



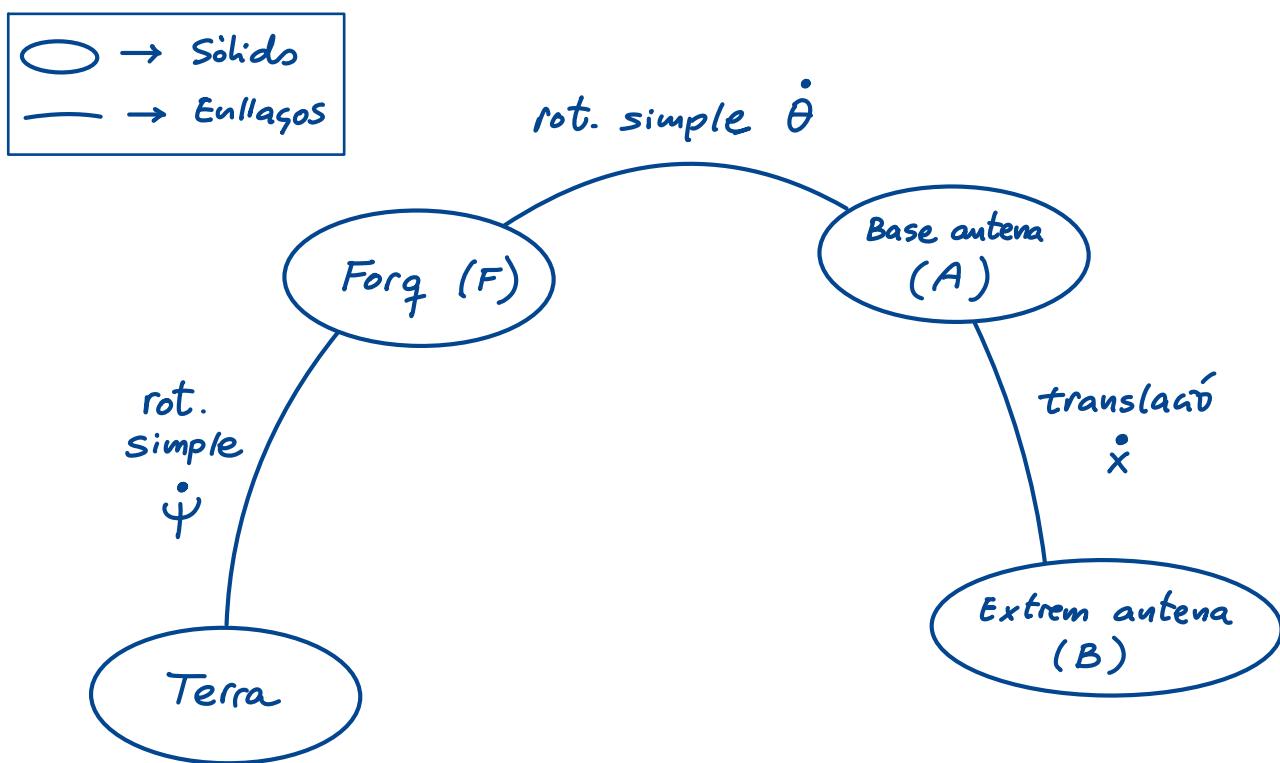

---

(\*) Una dir. horizontal és qualsevol direcció perpendicular al vector gravetat ( $\bar{g}$ ).

Quan diem "moviment relatiu" volem dir "velocitat relativa" (d'un sólid o referència, respecte d'un altre sólid o referència). És a dir, els vectors ( $\uparrow \dot{\psi}$ ), ( $\odot \dot{\theta}$ ) i ( $\rightarrow \dot{x}$ ) abans indicats.

### Diagrama de moviments relatius (DMR)

És una representació gràfica dels sòlids del sistema i dels enllaços entre ells (del moviment relatiu permès per aquests enllaços). Per al sistema d'aquest exerçiu seria:



### Graus de llibertat del sistema

El conjunt mínim de variables escalars de velocitat que cal per descriure el moviment del sistema (les velocitats de tots els seus punts) constitueix el conjunt de graus de llibertat (GL) del sistema.

En aquest exercici, el sistema té 3 GL ja que el seu moviment queda descrit per

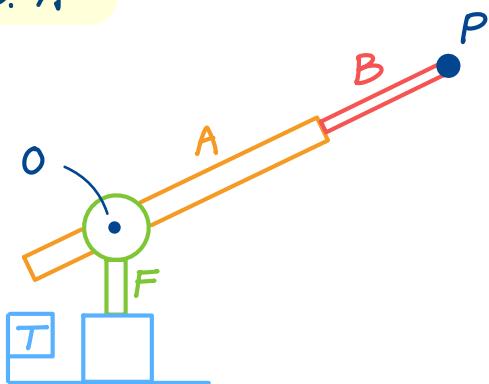
$$\underbrace{\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{x}}_{3 \text{ GL}}$$

Una manera eficaç de comptar GL és anar bloquejant moviments relatius, un rere l'altre, fins que el sistema quedi aturat resp. T. El nombre de moviments relatius que hagi calgut bloquejar coincideix amb el nombre de GL del sistema.

A l'exemple cal bloquejar  $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{x} \Rightarrow$  El sist. té 3 GL.

Vec. pos. de P resp. A, F, T

Resp. A



Cal un punt fix a A com a origen  $\Rightarrow$  triem el punt O (intersecció de l'eix entre F i T i l'eix entre A i F).



El vector serà  $\overline{OP}$

Resp. F

El punt O també és fix a F  $\Rightarrow$  serveix com a origen del vec. posició de P resp. F  $\Rightarrow \overline{OP}$  és un vec. posició de P resp. F adient!

Resp. T

Novament,  $\overline{OP}$  serveix com a vec. pos. de P resp. T perquè O també és fix a T.

## Orient. de A resp. F

Ve donada per  $\theta$  ] A només té una rotació simple resp. F

## Orient. de A resp. T

Ve donada per  $\psi$  i  $\theta$ . ] A té una rotació de 2GL resp. T

## Orient. de F resp. T

Ve donada per  $\psi$  ] F té una rotació simple resp. T

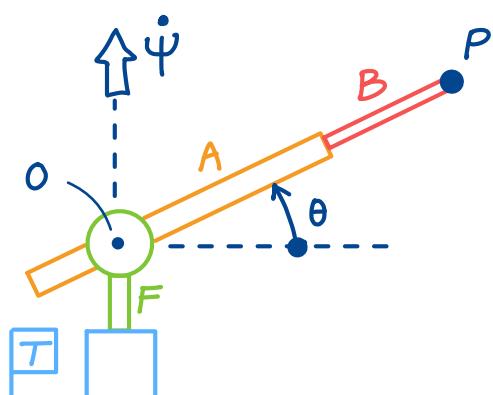
Això no ho demanen però ho fem per esclarfar motors:

Velocitats angulars  $\bar{\Omega}_T^F$ ,  $\bar{\Omega}_F^A$ ,  $\bar{\Omega}_T^A$

$$\bar{\Omega}_T^F = (\uparrow \dot{\psi})$$

$$\bar{\Omega}_T^A = (\odot \dot{\theta})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_T^A &\stackrel{(*)}{=} \bar{\Omega}_F^A + \bar{\Omega}_T^F = \\ &= (\uparrow \dot{\psi}) + (\odot \dot{\theta}) \end{aligned}$$



(\*) Sempre es pot fer:

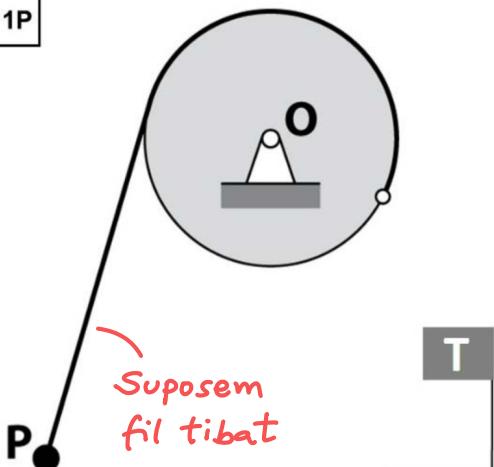
$$\bar{\Omega}_{\text{Ref}}^{\text{solid 1}} = \bar{\Omega}_{\text{solid 2}}^{\text{solid 1}} + \bar{\Omega}_{\text{ref}}^{\text{solid 2}}$$

# Annex

Solució a l'exercici de la politja amb  
definicions alternatives de  $\varphi$  i  $\theta$

(for the curious)

1P

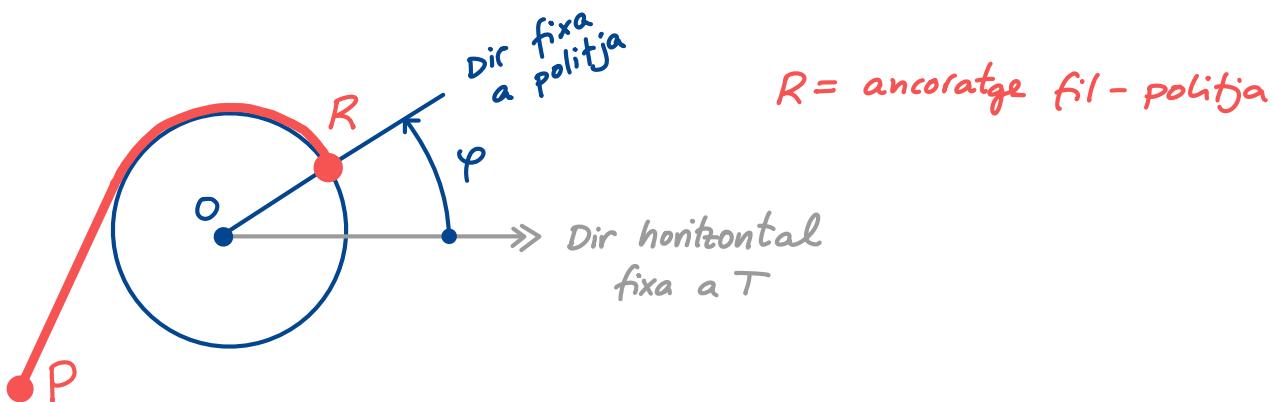


La politja està articulada al terra ( $T$ ).

El fil inextensible recolza al damunt de la politja.

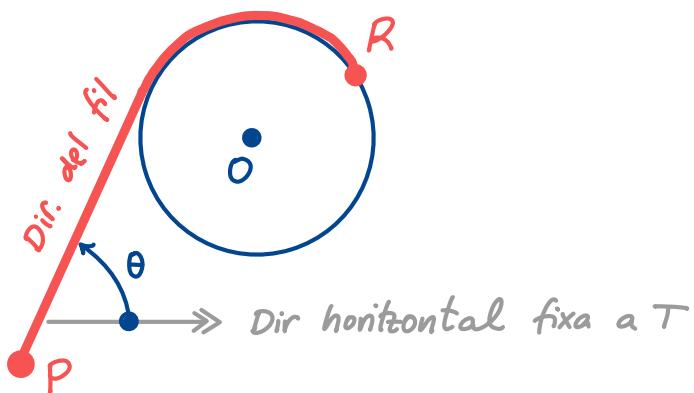
- Orientació de la politja respecte de  $T$ ?
- Orientació del fil respecte de  $T$ ?
- Vector de posició de  $P$  respecte de  $T$ ?
- Orientació del fil respecte de la politja?
- Vector de posició de  $P$  respecte de la politja?
- Longitud lliure del fil, en una configuració general, en funció de la longitud en repòs i dels angles?

### Orient. de la politja resp. $T$



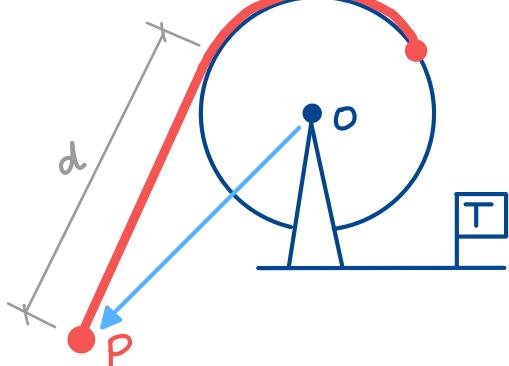
L'orient. de la politja resp.  $T$  ve donada per  $\varphi$

### Orient. fil resp. $T$



Orientació fil resp.  $T$  ve donada per  $\theta$

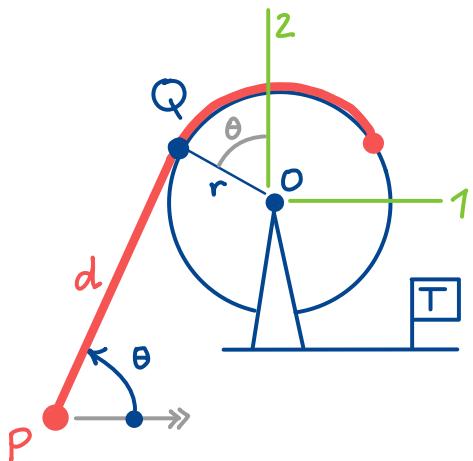
## Vector de posició de P resp. T



Com a origen del vector cal triar un punt fix a T. El més natural és O.

Triem  $\overline{OP}$  com a vec. pos. de P resp. T

Extra (\*): Si volem, podem expressar  $\overline{OP}$  en funció de  $\varphi$ ,  $\theta$  i la longitud lliure del fil ( $d$ ), utilitzant una base vectorial; p. ex. la base



$$B = (1, 2, 3)$$

Dir. vert. de T  
Dir horitz. de T

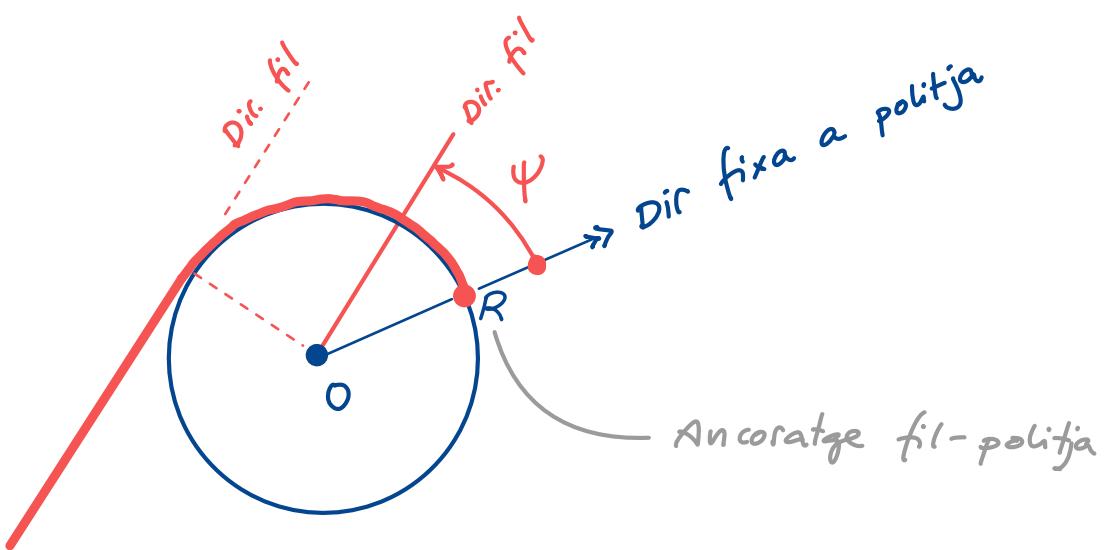
$$\{\overline{OP}\}_B = \{\overline{OQ}\}_B + \{\overline{QP}\}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overline{OQ}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -d \cos \theta \\ -d \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overline{QP}}$$

Més avall veurem que d es pot expressar en funció de  $\varphi$ ,  $\theta$ , i L (la longitud en repòs del fil)

---

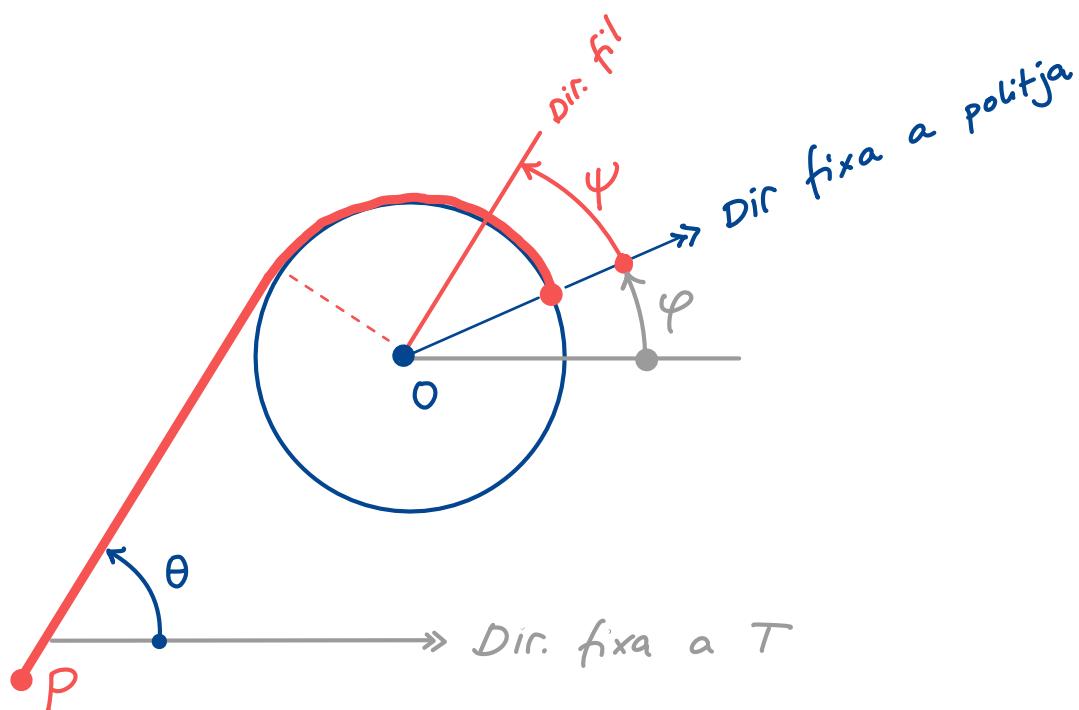
(\*) Salteu-vos-ho d'entrada (cal saber bases vectorials  $\Rightarrow$  setmana vinent)

## Orientació del fil resp. la polifja



L'orient. del fil resp. la polifja se donada per  $\psi$ .

Obs:  $\psi$  es pot escriure en funció de  $\varphi$  i  $\theta$ :



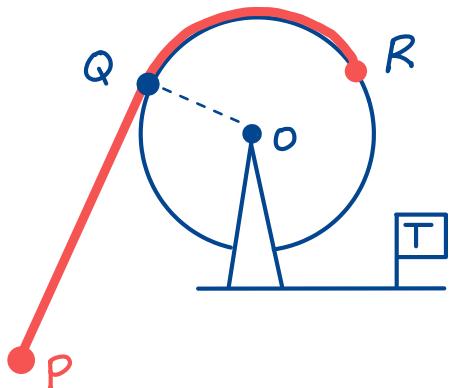
Clarament

$$\psi = \theta - \varphi$$

## Vector de posició de P resp. polifia

Com origen del vector triem O, que també és fix a la polifia

amb aquesta tria, el vector demandat és  $\overline{OP}$ .



També podríem triar R com origen, però és menys natural. La tria de O permet fer la descomposició

$$\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP}$$

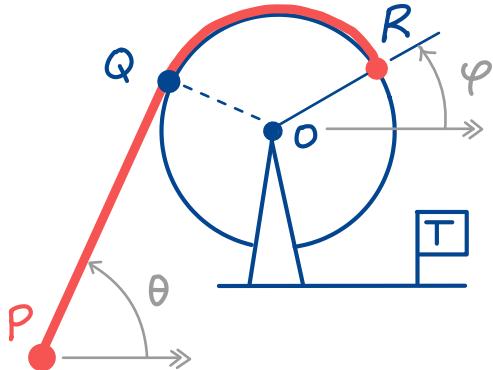
que facilita escriure  $\overline{OP}$  en funció de  $\varphi$  i  $\theta$ .

Q no serviria com a origen perquè és el punt geomètric de contacte fil-polifia, que no és fix a la polifia.

## Longitud lliure del fil

És la longitud  $d = |\overline{QP}|$

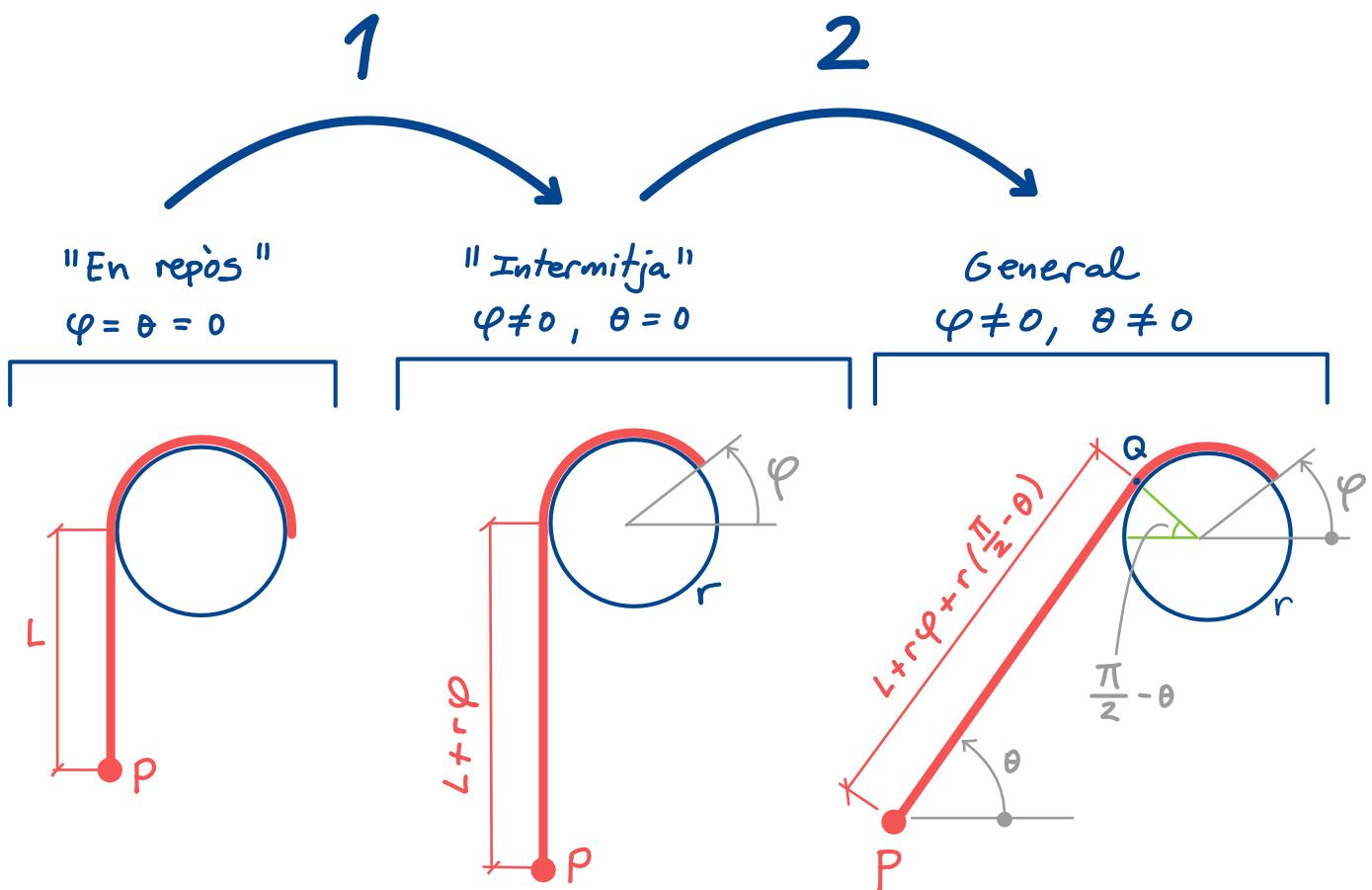
La volem per a una configuració general (per valors genèrics de  $\varphi$  i  $\theta$ )



Definim la longitud "en repòs" com:

$$L = |\overline{QP}| \quad \boxed{\varphi = \theta = 0}$$

Podem passar de la configuració "en repòs" ( $\varphi = \theta = 0$ ) a la general (valors  $\varphi, \theta$  genèrics) en 2 passos:



Per tant:

$$d = L + r\varphi + r(\frac{\pi}{2} - \theta)$$