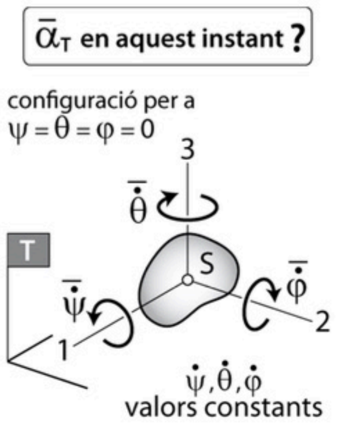
3P - Extra

Exercicis addicionals als de la col·lecció de classe, relacionats amb angles d'Euler

Versió 1.0

Us deixo un exercici semblant al final per a que el feu vosaltres



2 Per a la configuració $\psi=\theta=\varphi=0$, les tres velocitats angulars d'un sòlid S a l'espai (associades a tres angles d'Euler) tenen valor constant i l'orientació indicada a la figura. Quina és l'acceleració angular del sòlid en aquest instant?

A $\{0 \quad \dot\psi\dot\theta \quad -\dot\psi\dot\varphi\}^T$

B $\{\dot\theta\dot\varphi \quad \dot\psi\dot\theta \quad \dot\psi\dot\varphi\}^T$

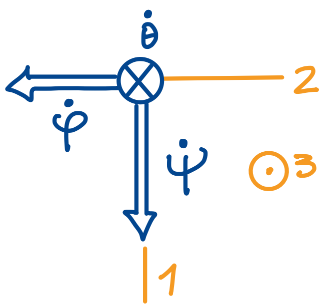
C $\{\dot\theta\dot\varphi \quad -\dot\psi\dot\theta \quad -\dot\psi\dot\varphi\}^T$

D $\{-\dot\theta\dot\varphi \quad \dot\psi\dot\theta \quad -\dot\psi\dot\varphi\}^T$

E $\{\dot\theta\dot\varphi \quad -\dot\psi\dot\theta \quad \dot\psi\dot\varphi\}^T$

Ens fem un dibuix 2D (alerta amb els sentits de gir!)

dibuix mirant "des de $\bar{\dot\theta}$" (*)



Cap vec. canvia de valor perquè ens diuen que $\dot\psi, \dot\theta, \dot\varphi$ són ct.

Només hi ha canvis de direcció:

- $\bar{\dot\psi}$ no canvia de dir
- $\bar{\dot\theta}$ canvia de dir. amb $\bar{\dot\psi}$
- $\bar{\dot\varphi}$ " " " " $\bar{\dot\psi}+\bar{\dot\theta}$

Ho sabem de teoria d'angles d'Euler

$$\bar{\alpha}^S_T = \overbrace{\underbrace{(\Downarrow\dot\psi)\times(\otimes\dot\theta)}_{(\Rightarrow\dot\psi\dot\theta)}}^{\text{Canvi dir. de } \bar{\dot\theta}} + \overbrace{\underbrace{\left[(\Downarrow\dot\psi)+(\otimes\dot\theta)\right]\times(\Leftarrow\dot\varphi)}}^{\text{Canvi dir. de } \bar{\dot\varphi}} =$$

$\parallel \leftarrow$ Distributiva del producte vectorial

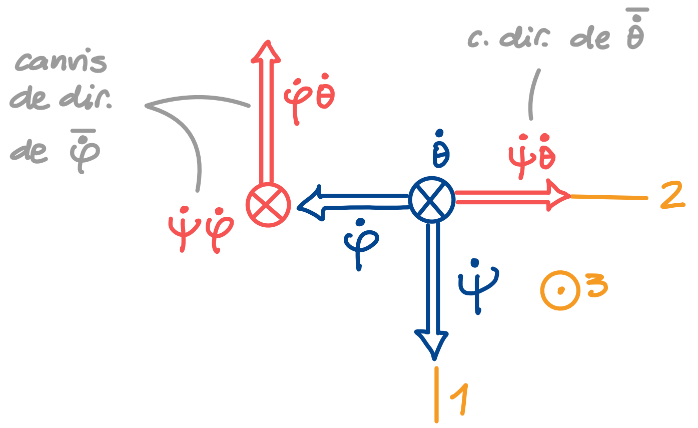
$$\overbrace{\underbrace{(\Downarrow\dot\psi)\times(\Leftarrow\dot\varphi)}_{(\otimes\dot\psi\dot\varphi)} + \underbrace{(\otimes\dot\theta)\times(\Leftarrow\dot\varphi)}_{(\Uparrow\dot\theta\dot\varphi)}}$$

$$= (\Rightarrow\dot\psi\dot\theta) + (\otimes\dot\psi\dot\varphi) + (\Uparrow\dot\varphi\dot\theta) = \boxed{\begin{Bmatrix} -\dot\varphi\dot\theta \\ \dot\psi\dot\theta \\ -\dot\psi\dot\varphi \end{Bmatrix}_B} \qquad (1)$$

(*) Com és habitual en angles d'Euler fem el dibuix mirant des de $\bar{\dot\theta}$, tot i que aquí no és estrictament necessari.

Observació 1: càlcul ràpid

Quan es té prou pràctica (i es té clar amb quina vel angular gira cada vector) el càlcul d'$\bar{\alpha}^S_T$ es pot fer directament sobre el dibuix. Es faria així:



$\Rightarrow$ Components de $\bar{\Omega}^S$

$\Rightarrow$ " " $\bar{\alpha}^S$

$B = (1, 2, 3)$

Dir. de $\bar{\dot{\psi}}$

Dir de $-\bar{\dot{\theta}}$

La base només l'utilitzo per expressar el resultat final

D'on deduïm que:

$$\left\{\bar{\alpha}^S_T\right\}_B = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\dot{\theta} \\ -\dot{\psi}\dot{\varphi} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

Observació 2: Inaplicabilitat de la derivada analítica

En aquest exercici ens podríem sentir temptats a derivar

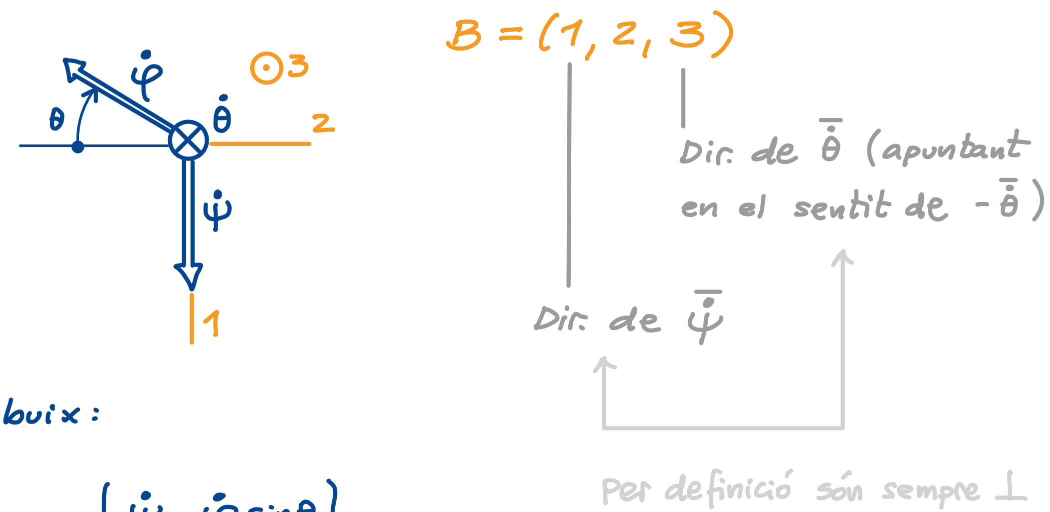
$$\left\{\bar{\Omega}^S_T\right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ -\dot{\varphi} \\ -\dot{\theta} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

analíticament, però el resultat seria incorrecte, perquè (2) no és un vector general (vec. "pel·lícula") sinó particularitzat ("foto"). És una expressió de $\bar{\Omega}^S_T$ vàlida només per a l'instant del dibuix. Per tant, (2) no es pot derivar analíticament. Geomètricament sí que podem perquè <u>sabem com gira cada vector resp. T.</u>

Pregunta: i no hi ha cap manera d'obtenir $\bar{\alpha}_T^S$ analíticament?

Sí que hi és! La manera correcta consistiria en: (a) considerar una configuració general del sòlid; (b) escriure $\bar{\Omega}_T^S$ per aquesta configuració; (c) derivar $\bar{\Omega}_T^S$ analíticament (perquè ara serà un vec. pel·lícula); i (d) particularitzar el resultat per a la configuració de l'enunciat. Fem-ho, i veureu que aquesta via és més feixuga:

(a) Sòlid en config. general:



(b) Del dibuix:

$$\left\{\bar{\Omega}_T^S\right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\psi} - \dot{\varphi}\sin\theta \\ -\dot{\varphi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

(c) Derivem analíticament:

$$\left\{\bar{\alpha}_T^S\right\}_B = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{\psi} - \dot{\varphi}\sin\theta \\ -\dot{\varphi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta} \\ -\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta \end{Bmatrix}$$

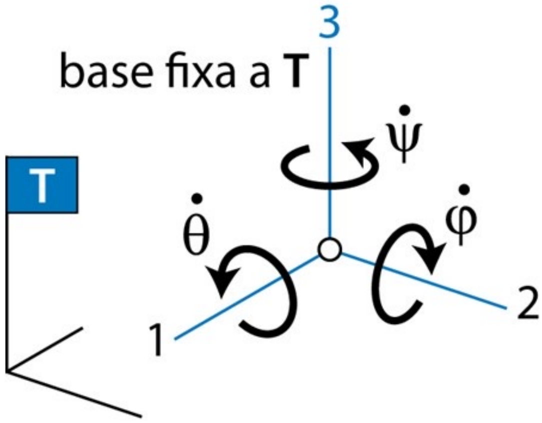
(d) Particularitzem per $\theta = 0$:

$$\left.\left\{\bar{\alpha}_T^S\right\}_B\right]_{\theta=0} = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\dot{\theta} \\ -\dot{\psi}\dot{\varphi} \end{Bmatrix} \longleftarrow$$

Coincideix amb el resultat de l'eq. (1) com era d'esperar!

Ara intenteu aquest !

$$\left\{\overline{\alpha}_{T}^{s}\right\} \; ?$$



$\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$: valors constants

A	$\left\{-\dot{\varphi}\dot{\psi} \quad +\dot{\theta}\dot{\psi} \quad +\dot{\varphi}\dot{\theta}\right\}^{T}$
B	$\left\{+\dot{\varphi}\dot{\psi} \quad +\dot{\theta}\dot{\psi} \quad +\dot{\varphi}\dot{\theta}\right\}^{T}$
C	$\left\{-\dot{\varphi}\dot{\psi} \quad -\dot{\theta}\dot{\psi} \quad +\dot{\varphi}\dot{\theta}\right\}^{T}$
D	$\left\{-\dot{\varphi}\dot{\psi} \quad +\dot{\theta}\dot{\psi} \quad -\dot{\varphi}\dot{\theta}\right\}^{T}$
E	$\left\{+\dot{\varphi}\dot{\psi} \quad +\dot{\theta}\dot{\psi} \quad -\dot{\varphi}\dot{\theta}\right\}^{T}$