

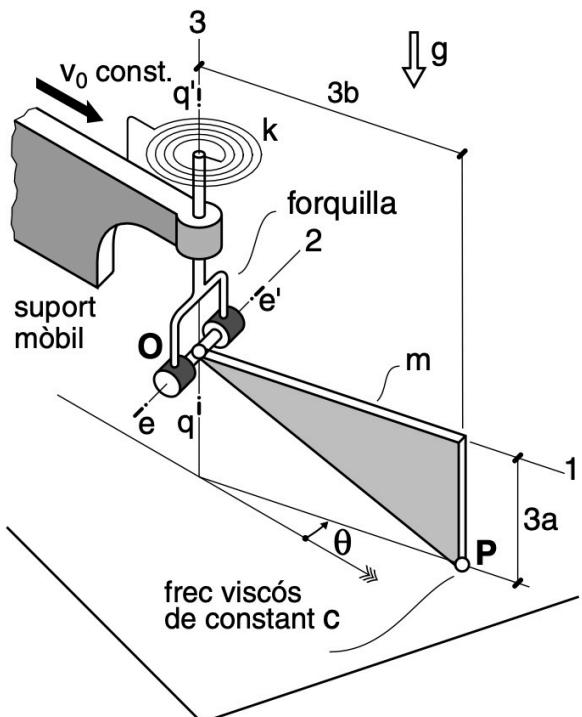
11P

Teoremes vectorials

Exemples 3D

“Sistema en marxa enrere”

(ex. 8.19 MPSR)



8.19 La placa del sistema de la figura, en forma de triangle rectangle, homogènia i de massa m , està unida pel vèrtex O al suport mòbil per mitjà de les articulacions d'eixos $e-e'$ i $q-q'$. La forquilla és de massa negligible i entre ella i el suport actua una molla torsional de constant k que per a $\theta=0$ està distesa. Les resistències passives a les articulacions són negligibles. El vèrtex P llisca sobre el pla horitzontal i entre ell i el pla hi ha un freq viscós de constant c independent de la força normal. El suport té moviment de translació rectilínia amb celeritat constant v_0 . Determineu:

1. L'expressió de les components de la força de fricció que actua sobre la placa a P .
2. L'equació del moviment per a l'angle θ .
3. L'expressió, en funció de θ i $\dot{\theta}$, de la força normal d'enllaç que la placa rep del terra a P . (*)
4. El valor de v_0 a partir del qual la posició d'equilibri $\theta_e=0$ passa a ser inestable.

Interès del problema: si interpretem el suport mòbil com el xassís d'un vehicle que es mou marxa enrere amb $\bar{v}_0 = ct$, i veiem la placa com un model simple de remolc, l'objectiu és que el remolc es mantingui alineat amb el vehicle. Per aconseguir-ho possem una molla torsional entre suport i forquilla, que tendeixi a reduir les petites desviacions de θ , retornant-les cap a $\theta_{eq}=0$ quan n'hi hagi. És a dir, fent que $\theta=0$ sigui una posició d'equilibri ESTABLE del sistema. Veurem que el valor de K necessari per garantir aquesta estabilitat depèn de v_0 . A major v_0 caldrà major K .

(*) A classe no ho farem. Quedarà com a deures.

El sistema té 2 GL

v_0 (forçat perquè algun actuator el manté ct)	$\dot{\theta}$ (llibre)
No dibuixat	

(1) Força de fricció sobre la placa a P

Ens diuen que és un freq viscós. Per tant serà una força de mateixa direcció que $\bar{v}_T(P)$ però de sentit contrari, amb constant de proporcionalitat c:

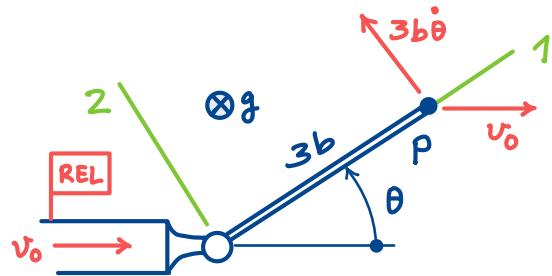
$$\bar{F}_{fv} = -c \bar{v}_T(P) \quad (\text{força formulable})$$

dada

Calculem $\bar{v}_T(P)$:

Fem composició
de moviments
amb $|AB = T$
 $REL = \text{Suport}$

$$B = (1, 2, 3)$$



$$\bar{v}_T(P) = \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P) =$$

$$= (-v_0) + (3b\dot{\theta}) = \left\{ \begin{array}{l} v_0 \cos \theta \\ -v_0 \sin \theta + 3b\dot{\theta} \end{array} \right\}_B$$

Ergo.

$$\bar{F}_{fv} = -c \bar{v}_T(P) = \left\{ \begin{array}{l} -cv_0 \cos \theta \\ cv_0 \sin \theta - 3cb\dot{\theta} \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} F_{fv1} \\ F_{fv2} \end{array} \right\} \quad (0)$$

+ endavant ens caldrà F_{fv2} per formular l'eq. del moviment.

(2) Eq. mov. per la coord. θ

L'orientació de la placa respecte T ve donada per θ . El nostre objectiu serà trobar l'eq. del moviment per a θ que tindrà la forma ^(*)

$$\ddot{\theta}(t) = f(\theta(t), \dot{\theta}(t), \underbrace{\text{pars}}_{\substack{\text{paràmetres} \\ \text{constants}}}) \quad (1)$$

paràmetres	geomètrics (a, b)
constants	dinàmics (m, g, c, k)

Per què volem l'eq. del mov.?

Cal veure l'equació (1) com una EDO. La seva incògnita és la funció $\theta(t)$ que descriu com es mourà la placa. Si ens donessin les condicions inicials de la placa

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

podriem determinar $\theta(t)$ amb mètodes numèrics (Euler, Runge-Kutta, ...), però això, en aquest curs, no ho farem. El que sí farem és buscar les configuracions d'equilibri de (1). És a dir, els valors $\theta = \theta_{\text{eq}}$ tals que, si deixem la placa en l'angle θ_{eq} , amb velocitat zero ($\dot{\theta}_{\text{eq}} = 0$), la placa es manté a θ_{eq} ($\ddot{\theta}_{\text{eq}} = 0$). Veurem que $\theta = 0$ és una config. d'equilibri, però n'hi pot haver d'altres. Voldrem que $\theta_{\text{eq}} = 0$ sigui d'equilibri estable. És a dir, que si alguna pertorbació ens desvia de $\theta_{\text{eq}} = 0$, el sistema torni a $\theta_{\text{eq}} = 0$ espontàniament.

(*) Sovint aquesta EDO l'escriuen sense expressar la dependència de t : $\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}, \text{pars})$

Si se n'allunyés, l'equilibri seria **inestable**. Veurem que la constant K de molla que garanteix l'estabilitat és funció de ω_0 .

Per obtenir (1) aplicarem els teoremes vectorials. Com que a (1) no hi pot haver incògn. d'enllaç (en una EDO eq. del mov. mai n'hi ha !) l'estrategia consistirà en aplicar els teoremes vectorials de manera que interinquin com menys incògnites d'enllaç millor, i ... si pot ser, cap ! Si n'hi apareixen, les haurrem d'eliminar per arribar a (1). El **diagrama general d'interaccions** (DGI) és de gran ajut per trobar un **full de ruta** que ens permeti arribar a (1) el més ràpidament possible.

Diagrama general d'interaccions

És una representació gràfica del sistema mecànic, útil per a l'aplicació dels teoremes vectorials.

Hi representem :

- Cada un dels sòlids que integren el sistema mecànic

sòlid

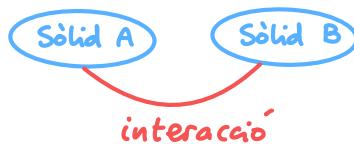
- Cadascuna de les interaccions entre parelles de sòlids :

- enllaços

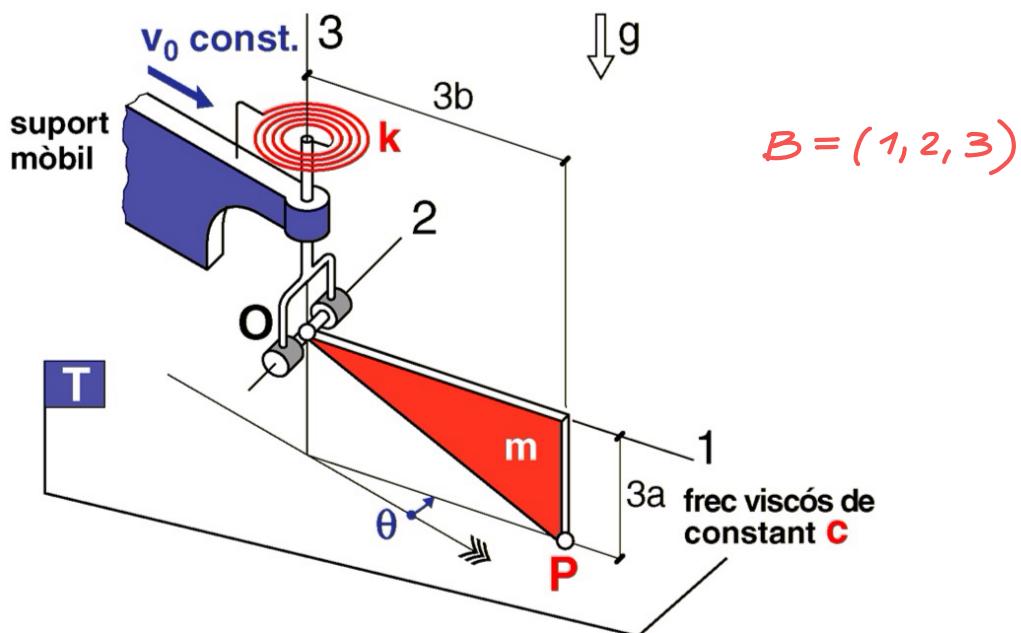
- forces formulables

Pes
Molles
Amortidors
Fricció

- forces d'actuadors



Dibuixem-lo pel cas d'aquest exercici.



"art" = articulació

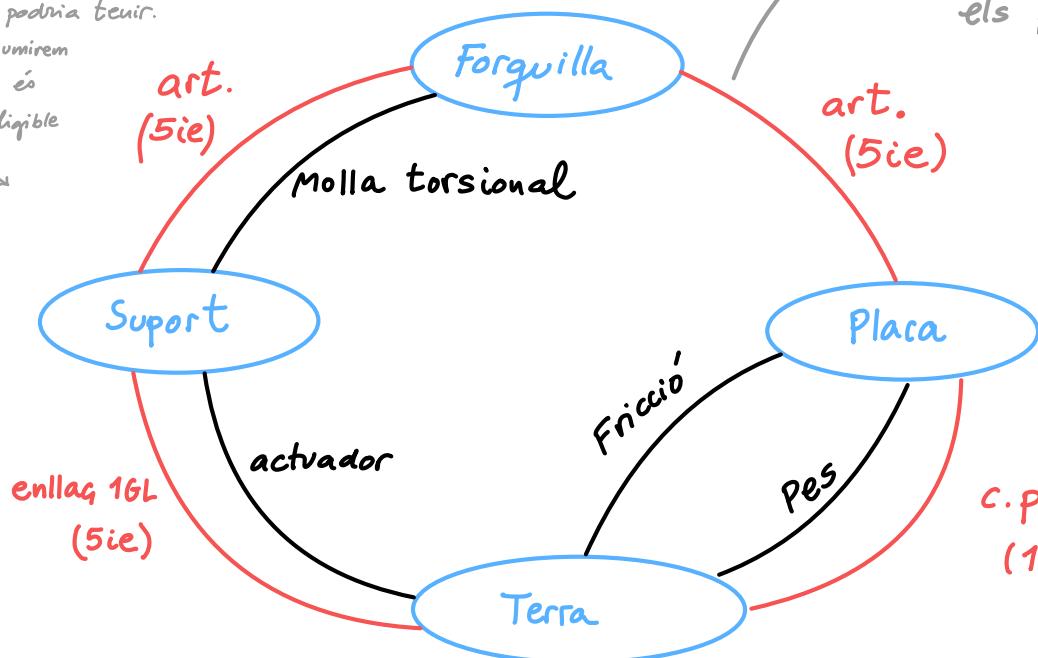
"c.p.a.ll." = "contacte puntual amb lliscament"

"5ie" = "5 incògnites d'eullag"

No hem pintat el pes del suport però en podríem tenir.

Assumirem que és negligible

Els arcs corresponents a incògnites d'eullag els pintem en vermell



L'eullag terra-suport no sabem ben bé què és^(*), però té 1 GL ($\bar{v}_0 = \text{constant}$). Per tant, té 5ie. El podem

(*) Serà irrelevat en la resolució del problema

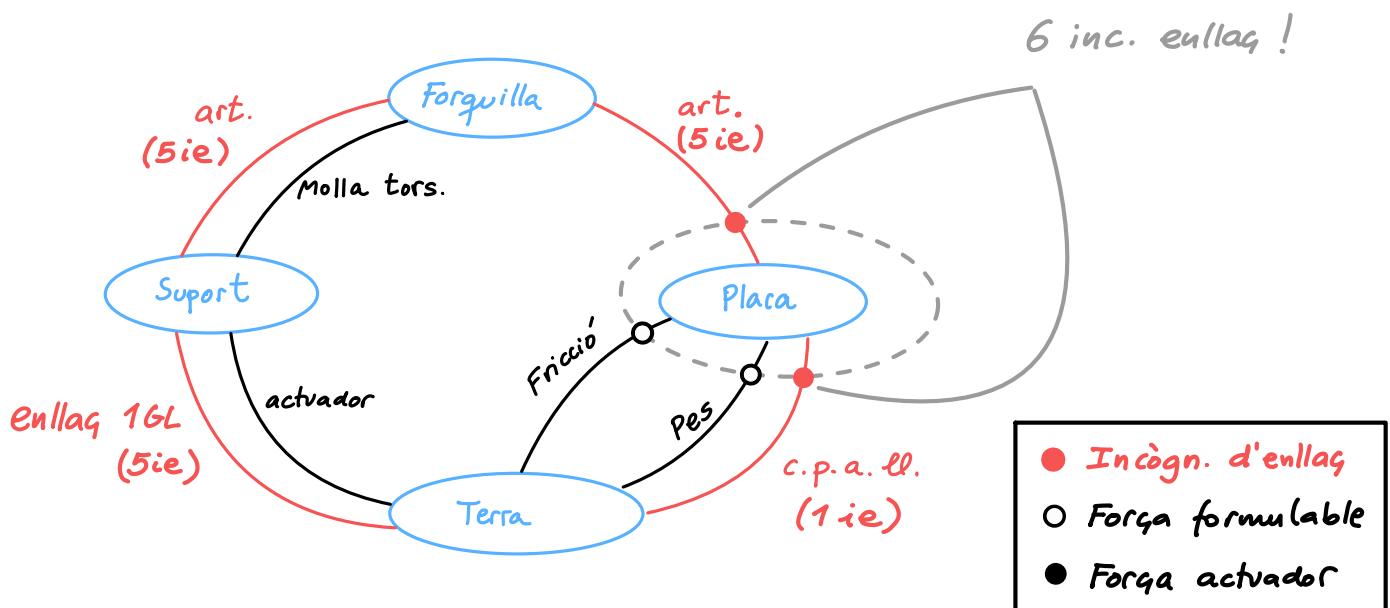
pensar com un vehicle que empreny, fent marxa enrere.
 Com que el xassís d'aquest vehicle té una velocitat \vec{v}_0 constant resp. el terra, ha de tenir un actuador (pintat al DGI) que garanteix aquesta \vec{v}_0 .

Full de ruta per obtenir l'eq. del mov.

Disposem de :

$$\left. \begin{array}{l} \text{TQM (3 eqs)} \\ \text{TMC (3 eqs)} \end{array} \right\} 6 \text{ eqs} \leftarrow \text{Però... A quin } \underline{\text{sistema}} \text{ les apliquem?}$$

Com que volem l'eq. mov. per a θ , el sist. ha d'incloure la placa o bé la forquilla^(*). Mirant el DGI veiem que si sist = placa, apareixerien 6 inc. enllaç



L'acceleració $\ddot{\theta}$ seria una incògnita addicional.
 ↳ determina l'eq. del moviment

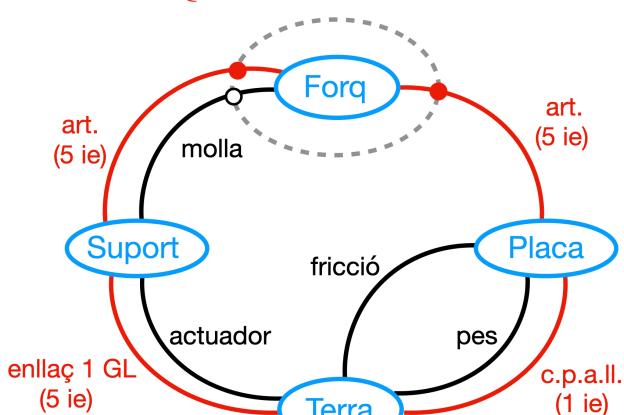
Per tant trobarem 7 incògnites (6 d'enllaç i $\ddot{\theta}$) i només 6 eqs.
 No sembla viable trobar $\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}, \text{pars})$ per aquesta via.

Mirem altres opcions encerclant solids del DGI :

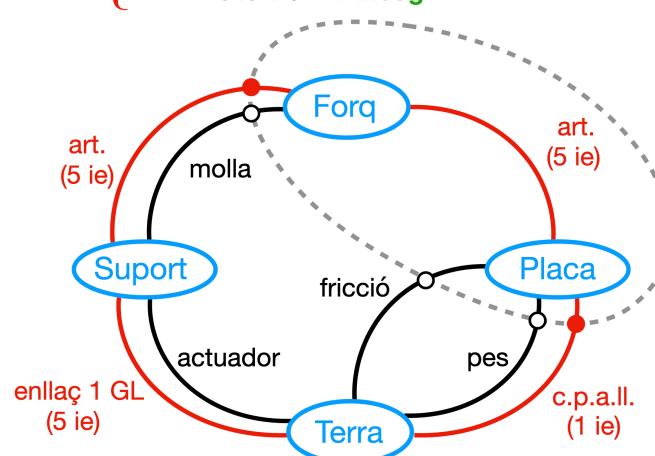
(*) Només aquests dos solids involucren l'angle θ

INDET

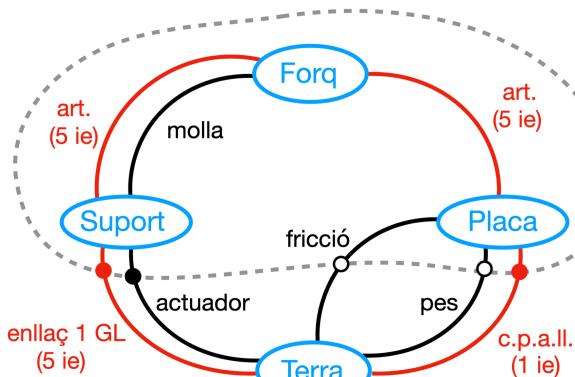
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sist} = \text{Forq} \\ 10 \text{ ie} + \ddot{\theta} = 11 \text{ incòg} \end{array} \right.$$

**INDET**

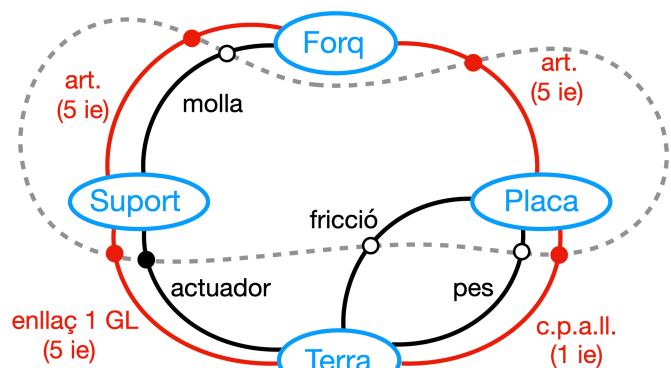
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sist} = \text{Placa} + \text{Forq} \\ 6 \text{ ie} + \ddot{\theta} = 7 \text{ incòg} \end{array} \right.$$

**INDET**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sist} = \text{Placa} + \text{Forq} + \text{Sup} \\ 6 \text{ ie} + \text{força actuador} + \ddot{\theta} = 8 \text{ incòg} \end{array} \right.$$

**INDET**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sist} = \text{Placa} + \text{Sup} \\ 16 \text{ ie} + \text{força actuador} + \ddot{\theta} = 18 \text{ incòg} \end{array} \right.$$



Com que TQM i TQC només proporcionen 6 equacions en total, i sempre tenim més de 6 incògnites, en tots els casos sortirà un sistema d'equacions indeterminat!

Sistema	Incògnites	#incagn. total	
Placa	6 ie, $\ddot{\theta}$	7	
Forq.	10 ie, $\ddot{\theta}$	11	
Placa + forq	6 ie, $\ddot{\theta}$	7	
Placa + forq + suport	6 ie, força actuador, $\ddot{\theta}$	8	
Placa + suport	16 ie, força actuador, $\ddot{\theta}$	18	

{ Sempre
indet.

Sembla que no queda més remei que considerar més d'un sistema per obtenir més equacions... Però... un moment! Que un sistema d'eqs. surti indeterminat no impedeix que, per casualitat, pugui contenir una equació amb 1 sola incògnita (o, més en general, un subsistema d'eqs. determinat). Ums... I si passa això en algun dels sistemes que hem analitzat? Mirem-nos-en algun amb més calma. Com que en principi θ hauria de dependre de K i m , hauria d'ésser forç i placa dius el sistema. I si donem una oportunitat al $sist = placa + forç$? Analitzem aquest sistema amb més cura:

El tensor d'eullag suport \rightarrow forç, a 0, és:

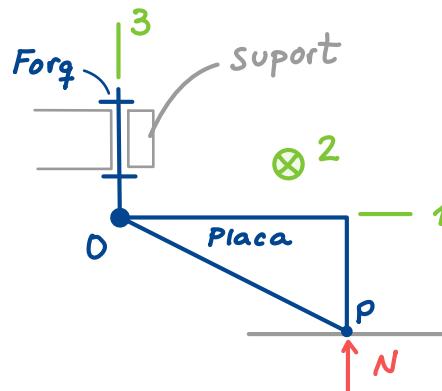
$$\{\bar{F}_{\text{sup} \rightarrow \text{forç}}\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad \{\bar{M}_{\text{sup} \rightarrow \text{forç}}(0)\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Que bé!
Aquí hi
ha un zero

Aplicant TMC a 0, F_1 , F_2 i F_3 no apareixeran, i només hi haurà moments d'eullag en dir. 1 i 2. En dir 3 no n'hi haurà!

A més la normal del terra

sobre P només creará moment en dir. 2! Vol dir que la component 3 del TMC a 0 ens donarà l'eq. del mov. per a θ ! Ja ho tenim! El full de ruta és:



El fric viscos i el pes no els he pintat, però són formulables, i no introdueixen incògnites d'enllaç!

**FULL
RUTA**

$Sist = Placa + forç$

$TMC \text{ a } 0]_3 \leftarrow \text{"En dir. 3"}$

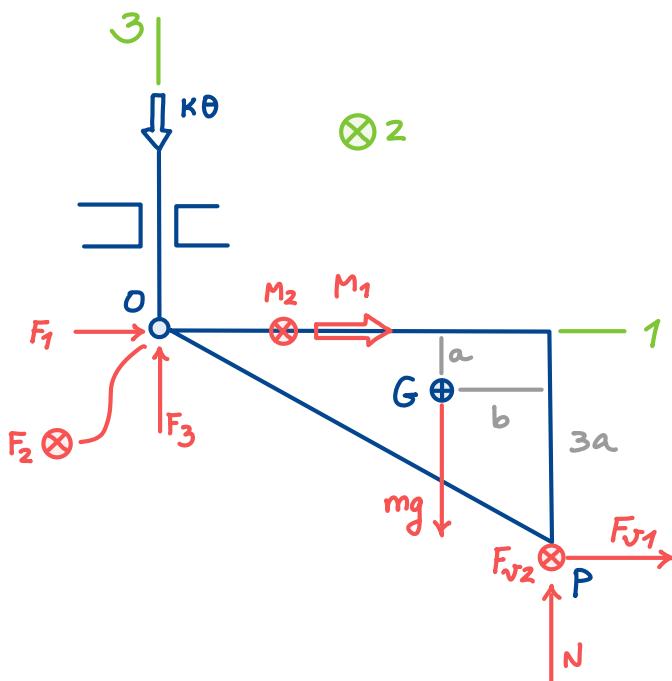
$TMC(0)]_3$

perquè $\bar{v}_T(0) = \bar{v}_0 = ct$

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) + \bar{OG} \times m \underbrace{\bar{a}_T(0)}_{\text{ }} = \dot{\bar{H}}_{RTO}(0)$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) = \dot{\bar{H}}_{RTO}(0)$$

Només calcularem la comp. 3 d'aquesta equació



Només generen moment en dir. 3 el parell de la molla $\Downarrow K\theta$ i la força de freqüència viscosa \mathbf{P}

$\sum \bar{M}_{ext}(0)$

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) = (\Rightarrow M_1) + (\otimes M_2) +$$

$$+ \underbrace{(\Downarrow K\theta)}_{\text{Només aquests tenen comp. en dir. 3}} + \bar{OG} \times (\downarrow mg) + \bar{OP} \times \bar{F}_{fv} + \bar{OP} \times \bar{N} = \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ -K\theta + 3bF_{fv2} \end{array} \right\}_B \quad (1)$$

$$\bar{OP} \times \bar{F}_{fv} = \begin{Bmatrix} 3b \\ 0 \\ -3a \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} F_{fv1} \\ F_{fv2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ 3bF_{fv2} \end{array} \right\}$$

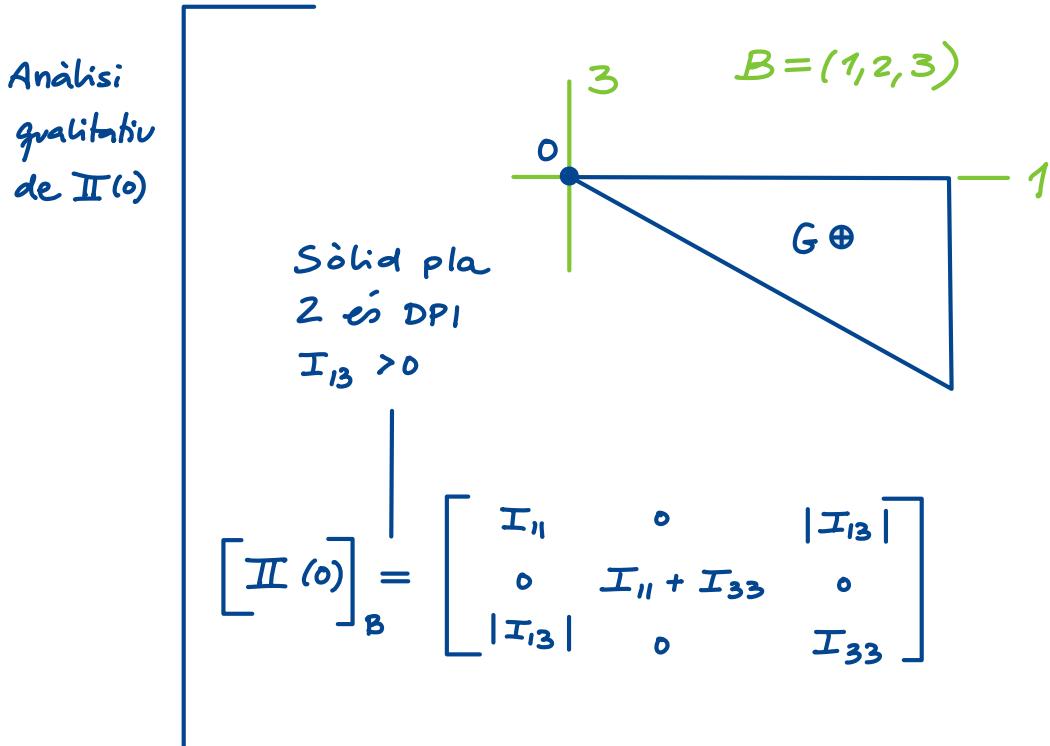
$$(\Downarrow K\theta) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -K\theta \end{Bmatrix}_B$$

$$\bar{H}_{RTO}(0)]_3$$

- Un únic sòlid amb massa : placa (*)
- O ∈ Placa ? Sí ! Llavors podem aplicar (**):

$$\bar{H}_{RTO}(0) = \underbrace{\mathbb{I}(0)}_{\text{El de la placa}} \underbrace{\bar{\Omega}_{RTO}^{\text{Placa}}}_{\bar{\Omega}_T} \quad \begin{matrix} \text{RTQ no gira resp T} \\ \bar{\Omega}_T = \bar{\Omega}_{RTO}^{\text{Placa}} + \bar{\Omega}_T^{\text{RTQ}} \end{matrix}$$

$$\bar{\Omega}_T = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Millor treballar amb el tensor qualitatiu i retardar el càlcul precís dels I_{ii} , I_{ij} perquè poter alguns no caldran !

- (*) Si hi haguéssim més sòlids, $\bar{H}_{RTO}(0)$ total seria la suma dels $\bar{H}_{RTO}(0)$ dels sòlids individuals.
- (**) Si O no fos de la placa caldrà aplicar la descomposició baricèntrica. Ja la veurem.

$$\left\{ \bar{H}_{RTO}(0) \right\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & |I_{13}| \\ 0 & I_{11} + I_{33} & 0 \\ |I_{13}| & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{13} \dot{\theta} \\ 0 \\ I_{33} \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

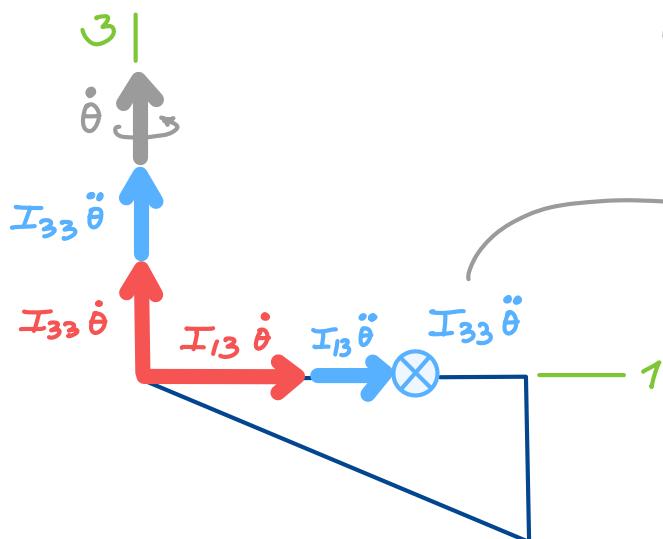
Aquest vec. l'hem de calcular senzillament

És de $\bar{H}_{RTO}(0)$ que només ens caldrà la comp. 3

$$\left[\dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \right]_3 :$$

Deriv. analítica en base B

$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \stackrel{\text{DEF}}{=} \frac{d}{dt} \bar{H}_{RTO}(0) \Big|_{RTO} = \begin{Bmatrix} I_{13} \ddot{\theta} \\ 0 \\ I_{33} \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{13} \dot{\theta} \\ 0 \\ I_{33} \dot{\theta} \end{Bmatrix}}_{\text{La component 3 és zero}} = \begin{Bmatrix} : \\ : \\ I_{33} \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (2)$$



$$\bar{\Omega}_{RTO}^B = \bar{\Omega}_T^B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

RTO no gira resp. T

quadra amb
la derivada
geomètrica

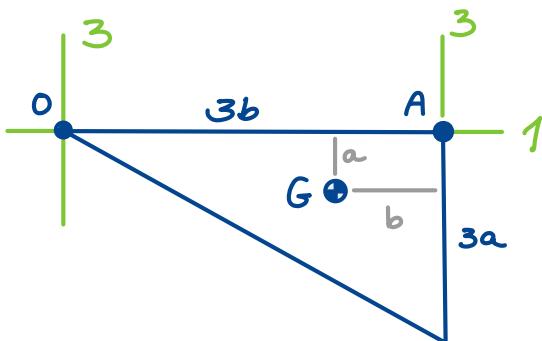
Imposant (1) = (2) en dir. 3 :

$$-k\theta + 3b F_{fuz} = I_{33} \ddot{\theta} \quad (3)$$

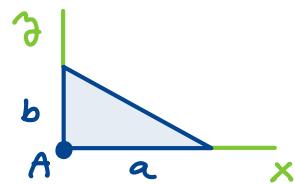
$$\text{De (0)} \quad = cv_0 \sin \theta - 3cb\dot{\theta}$$

Fixem-nos que només ens cal I_{33} ! No tot el tensor $\bar{H}(0)$.
Hem economitzat càlculs!

$I_{33}(0)$



Info taula



$$I_{xx}(A) = \frac{1}{6}mb^2$$

$$I_{xy}(A) = -\frac{1}{12}mab$$

De la taula podem saber $I_{33}(A)$, però ens cal $I_{33}(0)$.

Apliquem un "doble Steiner":

$$(a) \quad I_{33}(0) = I_{33}(G) + I_{33}^\oplus(0)$$

$$(b) \quad I_{33}(A) = I_{33}(G) + I_{33}^\oplus(A)$$

$$(a-b) \quad I_{33}(0) = I_{33}(A) + I_{33}^\oplus(0) - I_{33}^\oplus(A)$$

$$\boxed{I_{33}(0) = \frac{1}{6}m(3b^2) + m(2b)^2 - mb^2 = \\ = \frac{3}{2}mb^2 + 3mb^2 = \frac{9}{2}mb^2} \quad (4)$$

Expressió final de l'eq. del moviment:

$$-K\theta + 3b \left(cv_0 \sin \theta - 3cb\dot{\theta} \right) = \underbrace{\frac{9}{2}mb^2\ddot{\theta}}_{I_{33}}$$

F_{fv2}

$$\boxed{\frac{9}{2}mb^2\ddot{\theta} + 9b^2c\dot{\theta} + K\theta - 3bcv_0 \sin \theta = 0} \quad (5)$$

L'Eq. (5) proporciona l'EDO $\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}, \text{pars})$ que dàiem al principi (si aïllem $\ddot{\theta}$). Aquesta EDO és no lineal degut

al terme que conté $\sin \theta \Rightarrow$ només es pot resoldre numèricament. Però en podem estudiar els punts d'equilibri.

Determinació dels punts d'equilibri

Un valor $\theta = \theta_{eq}$ és d'equilibri si deixant-hi el sistema amb $\dot{\theta} = 0$, s'hi queda ($\ddot{\theta} = 0$). Per trobar aquests valors substituim $\theta = \theta_{eq}$, $\dot{\theta} = 0$ i $\ddot{\theta} = 0$ a (5) i resolem l'equació algebraica resultant:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{9}{2}mb^2\ddot{\theta} + 9b^2c\dot{\theta} + K\theta - 3bcv_0\sin\theta = 0 \\ \theta = \theta_{eq} \\ \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{array} \right] \text{EDO}$$

$$\downarrow$$

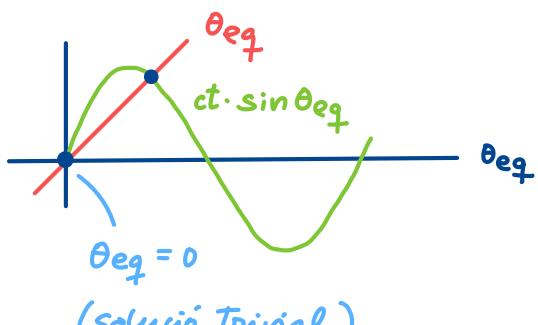
$$K\theta_{eq} - 3bcv_0\sin\theta_{eq} = 0 \quad (6) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Eq. algebraica} \\ (\text{no EDO!}) \end{array} \right]$$

$$\downarrow$$

$$\theta_{eq} = \underbrace{\frac{3bcv_0}{K}\sin\theta_{eq}}_{ct} \quad (6')$$

L'Eq. (6') és transcendent i només es pot resoldre numèricament, però té la solució trivial $\theta_{eq} = 0$ anticipada a l'enunciat.

Les solucions de (6') són la intersecció de les corbes vermella i verda



Estudiarem l'estabilitat de les petites oscil·lacions al voltant de $\theta_{eq} = 0$.

(4) Estabilitat de $\theta_{eq}=0$ (Per a quins valors v_0 , $\theta_{eq}=0$ és estable?)

Mateixos 3 passos que en el pèndol simple de la lligó 10P:

1 Obtenim EDO de l'error

Com que estudiem petites oscil·lacions al voltant de θ_{eq} , aplicarem la substitució $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$ a l'eq. (5), on ε és un valor molt petit, amb $|\varepsilon| \ll 1$ (això implica fer també les substitucions $\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}$, $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$):

$$\frac{9}{2}mb^2\ddot{\varepsilon} + 9b^2c\dot{\varepsilon} + K\varepsilon - 3bcv_0\sin\theta = 0 \quad (7)$$

Eq. mov.
per a θ

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_{eq} + \varepsilon = 0 + \varepsilon = \varepsilon \\ \dot{\theta} &= \dot{\varepsilon} \\ \ddot{\theta} &= \ddot{\varepsilon}\end{aligned}$$

$$\frac{9}{2}mb^2\ddot{\varepsilon} + 9b^2c\dot{\varepsilon} + K\varepsilon - 3bcv_0\sin\varepsilon = 0 \quad (8)$$

EDO de
l'error ε

2 La linearitzem

$\sin\varepsilon \approx \varepsilon$ (quan $|\varepsilon| \ll 1$):

$$\underbrace{\frac{9}{2}mb^2\ddot{\varepsilon}}_M + \underbrace{9b^2c\dot{\varepsilon}}_A + \underbrace{(K - 3bcv_0)\varepsilon}_B = 0 \quad (9)$$

EDO error
linearitzada

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{B}{M}\varepsilon - \frac{A}{M}\dot{\varepsilon}$$

Només K determina
l'estabilitat (veure
sessió anterior)

3 Mirem quan és $K > 0$

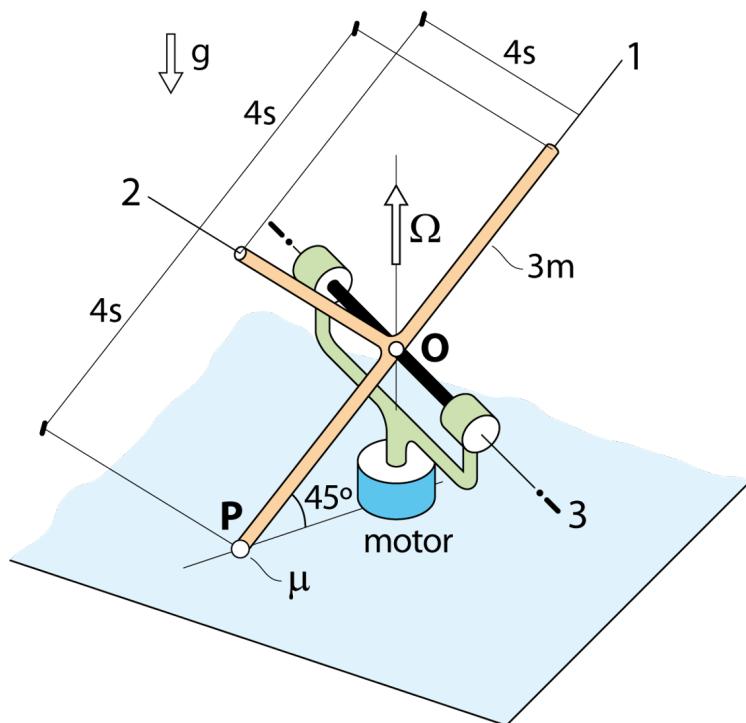
$$K = \frac{B}{M} = \frac{K - 3bcv_0}{M} > 0 \Leftrightarrow K - 3bcv_0 > 0 \Leftrightarrow v_0 < \frac{K}{3bc}$$

Ergo tenim oscil·lacions estables quan $v_0 < \frac{K}{3bc}$

A major v_0 , cal una K més gran per mantenir l'estabilitat.

Sòlid en contacte amb el terra

Problema I, examen final 1997-98



El sòlid de la figura està format per tres barres idèntiques, primes i homogènies, unides en la forma indicada.

El sòlid recolza a P sobre el terra, amb inclinació de 45° , i està articulat a la forquilla giratòria per mitjà d'un enllaç de revolució d'eix horitzontal perpendicular al pla del sòlid. La forquilla gira amb velocitat angular constant Ω al voltant de l'eix vertical que passa per O impulsada per un motor.

Entre el sòlid i el terra hi ha freq sec de coeficient μ .

Determineu:

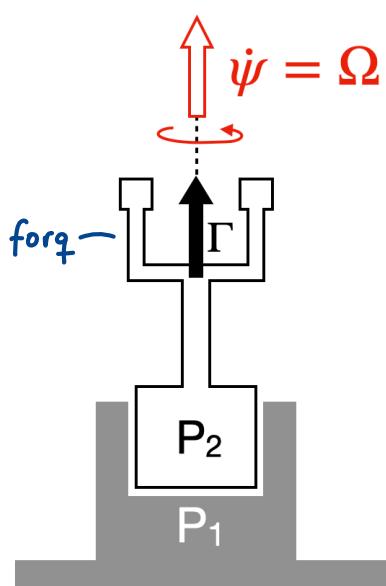
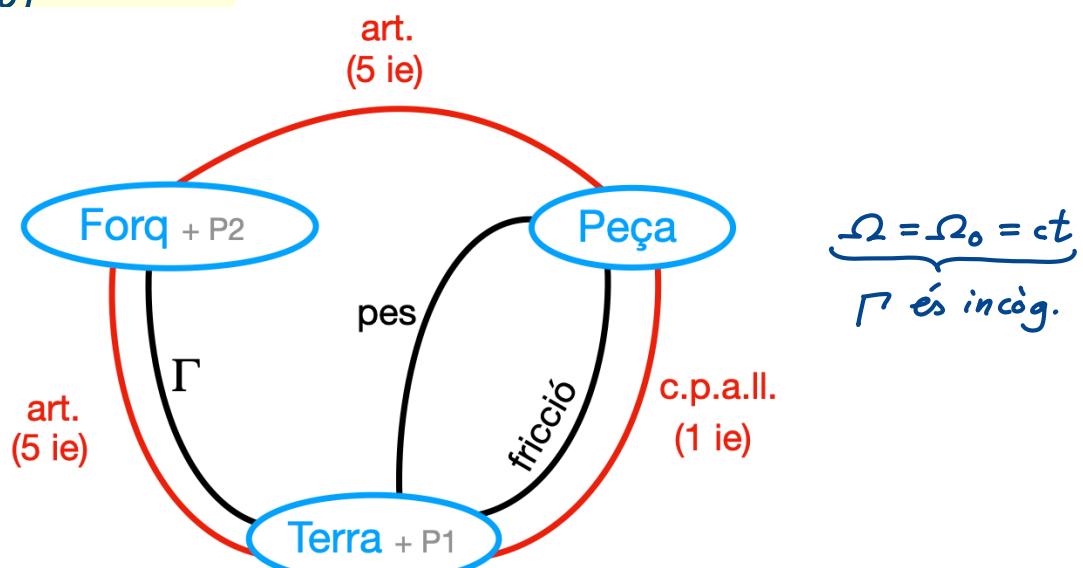
- L'expressió de la força normal N que rep el sòlid a P.
- Valor crític d' Ω a partir del qual es perd el contacte.
- El parell Γ que fa el motor per a garantir Ω constant.
- L'equació del moviment per a l'angle θ entre el sòlid i la forquilla, en la situació en la que s'ha perdut el contacte a P.

Sistema amb 1 GL forçat ($\dot{\psi} = \Omega$). El motor fa el parell Γ que calgui per garantir $\dot{\psi} = \Omega = \text{ct}$. Clarament tindrem $\ddot{\psi} = 0$, i per tant $\ddot{\psi}$ no és una incògnita. En canvi, Γ sí que ho és.

L'enllaç a P (c.p.a.ll.) és unilateral. D'entrada posarem en dubte que es mantingui. Farem la hipòtesi que es manté ($N > 0$) i si no n'és N<0 caldrà estudiar el sistema com si fos de 2 GL (Ω i la vel. angular del sòlid resp. forç.)

(a) Força normal que rep el sòlid a P + (b) Valor Ω crític

DG1

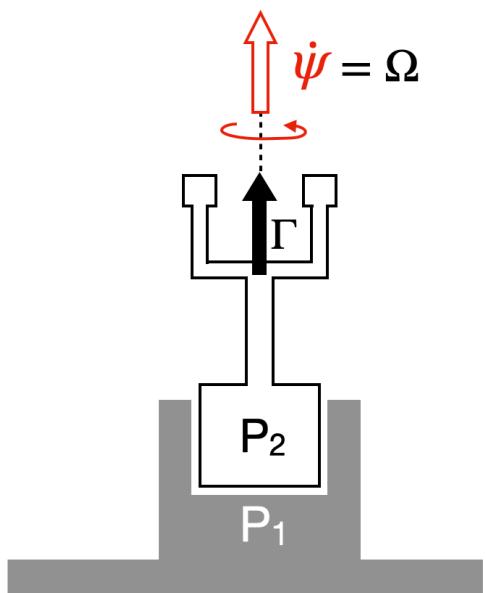


Cal pensar el motor així: com dues peces P_1 i P_2 (estator i rotor) solidàries al terra i a forq., respectivament. L'enllaç entre P_1 i P_2 és una articulació. El motor aplica un parell Γ a forq.^(*) que garanteix $\dot{\psi} = \Omega = \text{ct}$. En aq. exercici, per tant, $\ddot{\psi}$ no és incògnita (val 0), i Γ sí que ho és. En altres exercicis podria ser a l'inrevés: ens donen Γ , i $\ddot{\psi}$ seria una incògnita.

(*) No a la pega!

Important

En un motor



En general

O bé sabrem Γ , i $\dot{\psi}$ serà incògnita

O bé sabrem $\dot{\psi}$, i Γ serà incògnita

En aquest exercici

$\dot{\psi} = \Omega = ct \implies \dot{\psi} = 0$ (coneぐada)

Γ serà incògnita

Full ruta per calcular N

Volem N del terra sobre P. Ergo el sist. ha d'incloure la pega com a mínim. Analitzant el DGI veiem:

Sist.	Incògnites	# incòg. total	Problema
Pega + forq	6 ie, Γ	7	INDETERMINAT
Pega	6 ie	6	DETERMINAT!

Per tant triarem sist = Pega

O és bon punt per aplicar TMC
(filtra les forces forq \rightarrow pega)

N crea moment en dir. 3

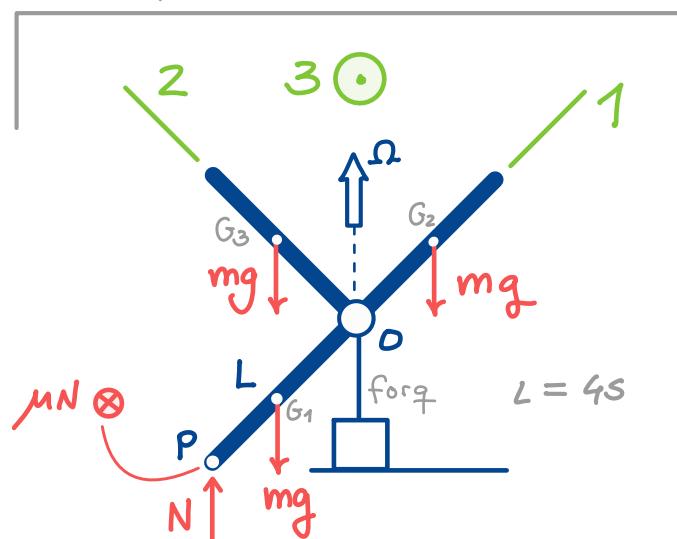
Cap altra ie crea moment
en dir. 3^(*), ja que el
torsor forq \rightarrow pega a O té,
en la part de moments:

$$\{\bar{M}_{\text{forq} \rightarrow \text{pega}}(O)\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ja ho tenim! \longrightarrow FULL RUTA

Forces sobre la pega

(per no complicar el dibuix, ometo
les del torsor forq \rightarrow pega)



SIST = Pega, TMC(O)]₃

TMC a O (fix a T)

Forces forq \rightarrow pega
no dibuixades

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(O) \Big|_3 = \dot{\bar{H}}_{\text{RTO}}(O) \Big|_3$$

El torsor
forq \rightarrow pega
a O, en base B,
no té moment
en dir. 3

$$\left(\overline{OP} \times (\uparrow N) \right) + \left(\overline{OG_1} \times (\downarrow mg) \right) \quad (I)$$

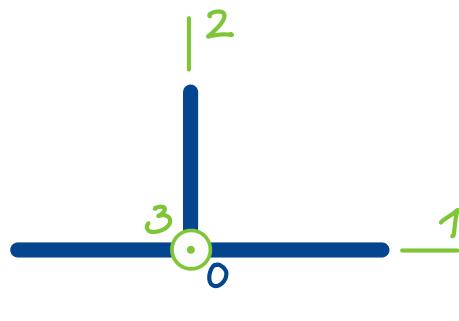
(*) El pes en crea però no és ie. És formulable!

$$O \in \text{Pega} \Rightarrow \bar{H}_{RTO}(o) = \mathbb{II}(o) \bar{\Omega}_{RTO}^{\text{Pega}} = T \text{ aquí}$$

$\mathbb{II}(o)$ qualitativ

S pla | 3 és DPI
 $I_{33} = I_{11} + I_{22}$

Clarament |
 $I_{12} = 0$
 $I_{22} > I_{11}$
 ↓ de fet
 $I_{22} = 2I_{11}$

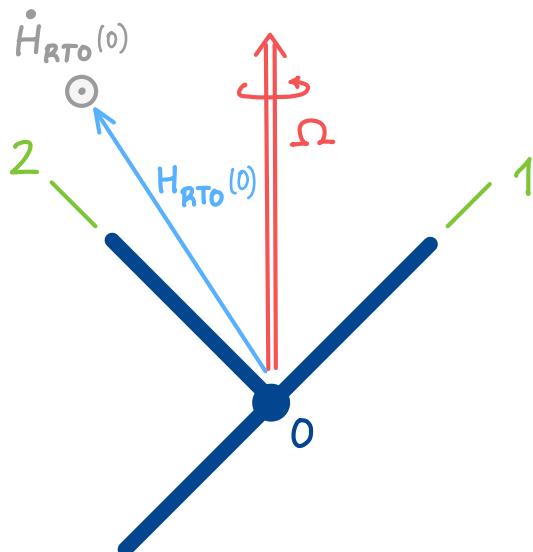


$$[\mathbb{II}(o)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & 2I & \\ & & 3I \end{bmatrix}$$

$\bar{H}_{RTO}(o)$

$$\left\{ \bar{H}_{RTO}(o) \right\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & 2I & \\ & & 3I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \\ \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} I \\ 2I \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II})$$

$\bar{H}_{RTO}(o)$ té valor ct. Sols té canvi de dir. si é en dir. 3:



$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(o) = \overleftrightarrow{\circlearrowleft} \underbrace{\dot{H}_{RTO}(o)}_{\text{valor de } \dot{H}_{RTO}(o)}$$

Progressem de moment
 sense calcular el valor
 $\dot{H}_{RTO}(o)$ explícitament, i
 a veure què podem
 deduir!

$TMC(0)]_3$ queda

$$\left(\vec{\otimes} NL \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\vec{\odot} mg \frac{L}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \vec{\odot} \dot{H}_{RTO}(0)$$

$$NL \frac{\sqrt{2}}{2} - mg \frac{L}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\dot{H}_{RTO}(0)$$

$$N = \frac{mg}{2} - \frac{\dot{H}_{RTO}(0)}{L/\sqrt{2}} \quad (\text{III})$$

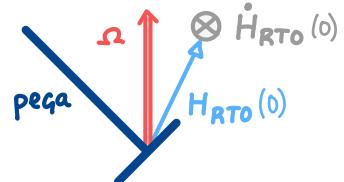
D'aquí confirmem que N tendeix a reduir-se quan Ω augmenta, ja que

$$\Omega = 0 \Rightarrow \dot{H}_{RTO}(0) = 0 \Rightarrow N = mg/2$$

$$\Omega > 0 \Rightarrow \dot{H}_{RTO}(0) > 0 \Rightarrow N < mg/2$$

Fixem-nos que si hagués estat
 $I_{22} < I_{11}$

Hauríen tingut



i N tendiria a augmentar quan augmentem Ω .

Hi ha una $\Omega_{\text{crítica}}$ per sobre de la qual $N=0$ i el contacte es perd. ($N=0$ és la cond. límit d'enllaç).

Deixat com a deures
 Derivem el vec. $\bar{H}_{RTO}(0)$ de l'eq (II) analíticament per trobar l'expressió d' $\Omega_{\text{crítica}}$:

$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \right\}_B = \underbrace{\frac{d}{dt} \text{(components)}}_{\Omega^B} + \underbrace{\frac{\Omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{vec. sense derivar}} \times \underbrace{\frac{\Omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I \\ 2I \\ 0 \end{pmatrix}}_{\dot{H}_{RTO}(0)} = \boxed{\frac{I\Omega^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

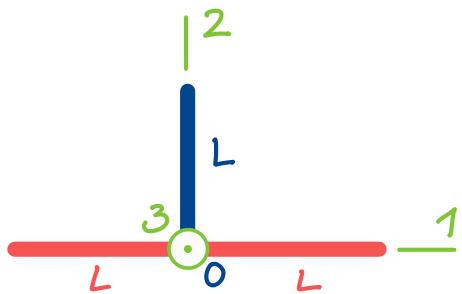
$$N = \frac{mg}{2} - \frac{\frac{I\Omega^2}{2}}{L/\sqrt{2}} = \frac{mgL}{2L} - \frac{I\Omega^2\sqrt{2}}{2L}$$

$$N > 0 \Leftrightarrow mgL - I\Omega^2\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow \Omega^2 < \frac{mgL}{I\sqrt{2}}$$

$$\Omega_{\text{crítica}} = \sqrt{\frac{mgL}{I\sqrt{2}}} \quad (\text{IV})$$

Valor de I

$$I = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \text{mom. inèrcia barra} \\ \text{vermella resp. eix 2} \end{array} \right)$$



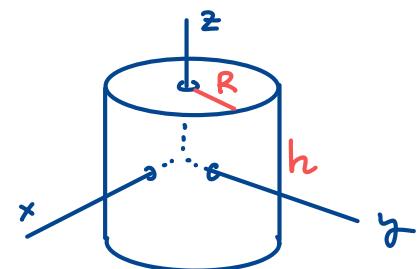
Cilindre $| R = 0$
 $h = 2L$

$$I = m \left(\frac{0^2}{4} + \frac{(2L)^2}{12} \right) = \frac{mL^2}{3}$$

$$\downarrow L = 4s$$

$$I = \frac{m(4s)^2}{3} = \frac{16}{3} ms^2$$

A taules tenim



$$I_{xx} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

$\Omega_{\text{càtica}}$ utilitzant I quantitatiu:

$$\boxed{\Omega_{\text{càtica}} = \sqrt{\frac{mgL}{\sqrt{2} I}}} = \sqrt{\frac{\cancel{mgL}}{\sqrt{2} \frac{\cancel{mL^2}}{3}}} = \sqrt{\frac{3g}{L\sqrt{2}}} \quad (\text{V})$$

N utilitzant I quantitatiu

$$\boxed{N = \frac{mg}{2} - \frac{16}{3} ms^2 \cancel{\frac{\Omega^2 \sqrt{2}}{2 \cdot (4s)}} = \frac{mg}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} ms \Omega^2} \quad (\text{VI})$$

(c) Parell motor Γ per mantenir $\Omega = \text{ct}$

Ens adonem que triant

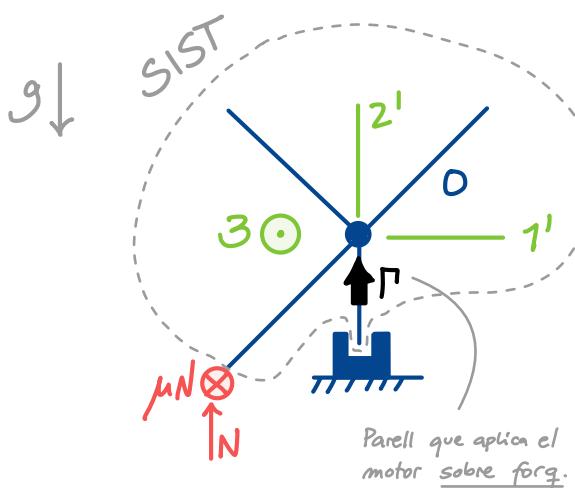
Full
de nota

$$\boxed{\text{Sist} = \text{forq} + \text{pega}, \quad TMC(0)} \quad \text{vertical}$$

obtindrem una equació on l'única incògnita és Γ , ja

que el motor no pot aplicar moments d'eixos en dir 2' sobre forq (només Γ).

L'única força d'eixos que crea moment en dir 2' és $\otimes \mu N$ (i ja sabem N d'abans). El pes de la pega crea mom. en dir. 3



$$\sum \overline{M}_{\text{ext}}(0)_{2'} = \dot{H}_{RTO}(0)_{2'} \quad \text{Abans hem vist que } \dot{H}_{RTO} \text{ te dir } \odot$$

$$\underbrace{\left(\downarrow MN \frac{L}{\sqrt{2}} \right) + (\uparrow \Gamma) = 0}_{\parallel} \quad \text{O}$$

$$MN \frac{L}{\sqrt{2}} - \Gamma = 0 \quad \text{Eq (VI)}$$

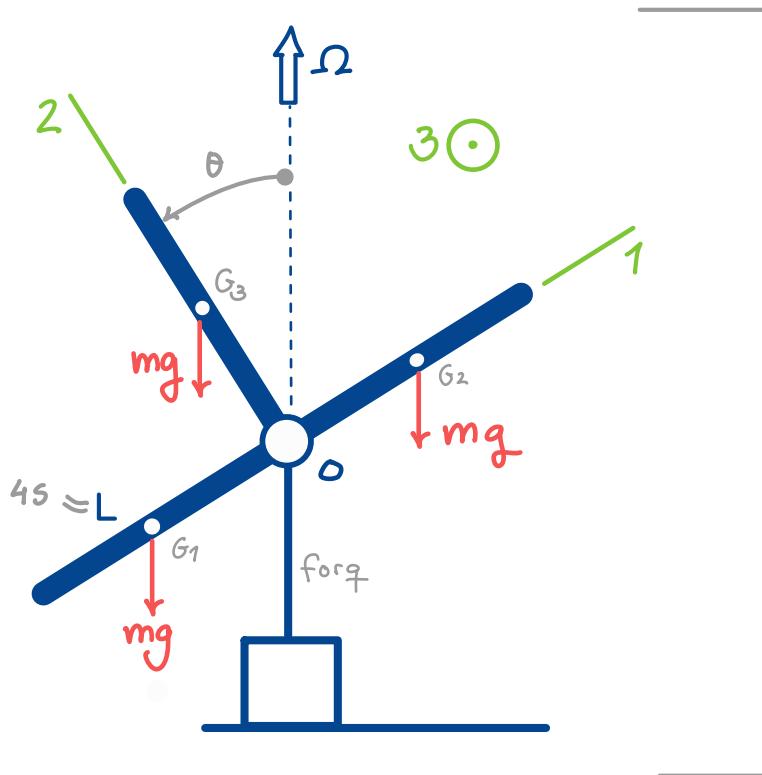
$$\boxed{\Gamma = \frac{\mu L}{\sqrt{2}} \cdot N = \frac{M s}{\sqrt{2}} N =}$$

$$= \mu s 2\sqrt{2} \left(\frac{mg}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} m s \Omega^2 \right)$$

(d) Eg. del mov. per a θ quan s'ha perdut el contacte

Ara el sist. té 2 GL. | Ω (forçat, com abans)
 θ (lliure)

Definim θ així:



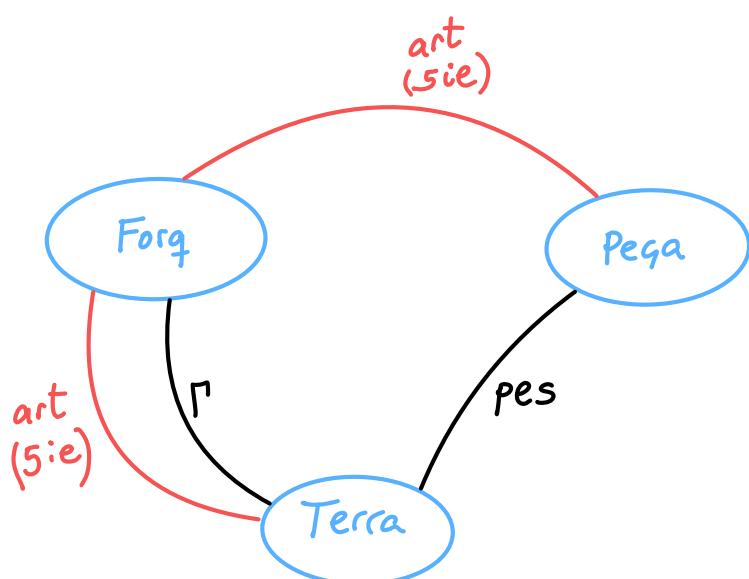
Torsor forq \rightarrow pega

[no dibuixati per no complicar-ho]

$$\{ \bar{F}_{\text{forq} \rightarrow \text{pega}} \}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{ \bar{M}_{\text{forq} \rightarrow \text{pega}(O)} \}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El DGI és:



Encerclant possibles sistemes veiem que:

Sistema	Incògnites	#incògn. total	Problema
Pega	$5ie, \ddot{\theta}$	6	DET
Forq.	$10ie, \Gamma$	11	INDET
Pega + Forq.	$5ie, \Gamma, \ddot{\theta}$	7	INDET

Pel sist = pega \rightarrow Problema determinat \Rightarrow Comencem explorant aquest sist. Tenint en compte que el tensor forq \rightarrow pega a 0 no té moment en dir. 3, i que la resta de forces sobre la pega són formulables (els pesos) ens adonem que aplicant el TMC a 0, la comp. en dir. 3 no contingrà ie! Per tant el full de ruta és:

$$SIST = \text{Pega}, TMC(0) \Big|_3$$

$$TMC(0) \Big|_3 \quad (O \text{ fix a pega})$$

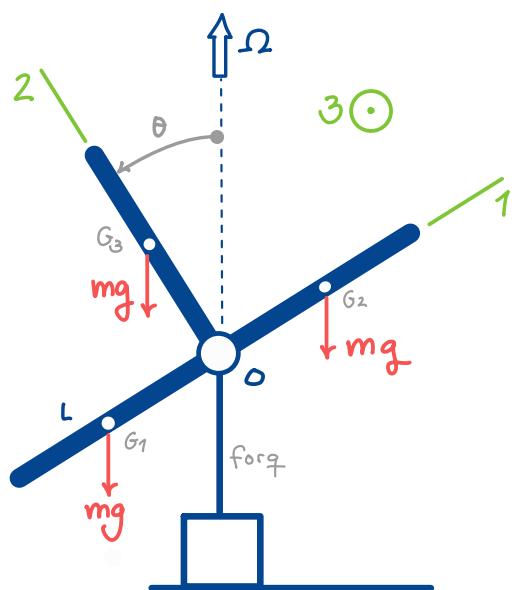
$$\sum \bar{M}_{ext}(0) = \dot{\bar{H}}_{RTO}(0)$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ mg \frac{L}{2} \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (\square)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{RTO}(0) &= \begin{bmatrix} I & 2I & 3I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega \sin \theta \\ \Omega \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} I\Omega \sin \theta \\ 2I\Omega \cos \theta \\ 3I\dot{\theta} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{\bar{F}_{\text{forq} \rightarrow \text{pega}}\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{M}_{\text{forq} \rightarrow \text{pega}}(0)\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Només cal 3^a comp.

$$\dot{H}_{RTO}(0) = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ 3I\ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Omega \sin \theta \\ \Omega \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I\Omega \sin \theta \\ 2I\Omega \cos \theta \\ 3I\dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ 3I\ddot{\theta} + I\Omega^2 \sin \theta \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (0)$$

Igualant $[0 = 0]_3$:

$$mg \frac{L}{2} \sin \theta = 3I\ddot{\theta} + I\Omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$3I\ddot{\theta} + (I\Omega^2 \cos \theta - mg \frac{L}{2}) \sin \theta = 0$$

Recordem que:

$$I = \frac{16}{3} \text{ ms}^2$$

Eq. mov. per a la coordenada θ