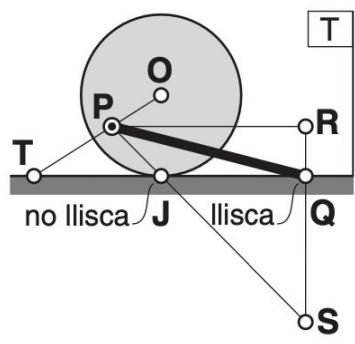


6P

Cinemàtica del
sòlid rígid 2D

(inclou cinemàtica de vehicles)

CIR_T(barra) ?

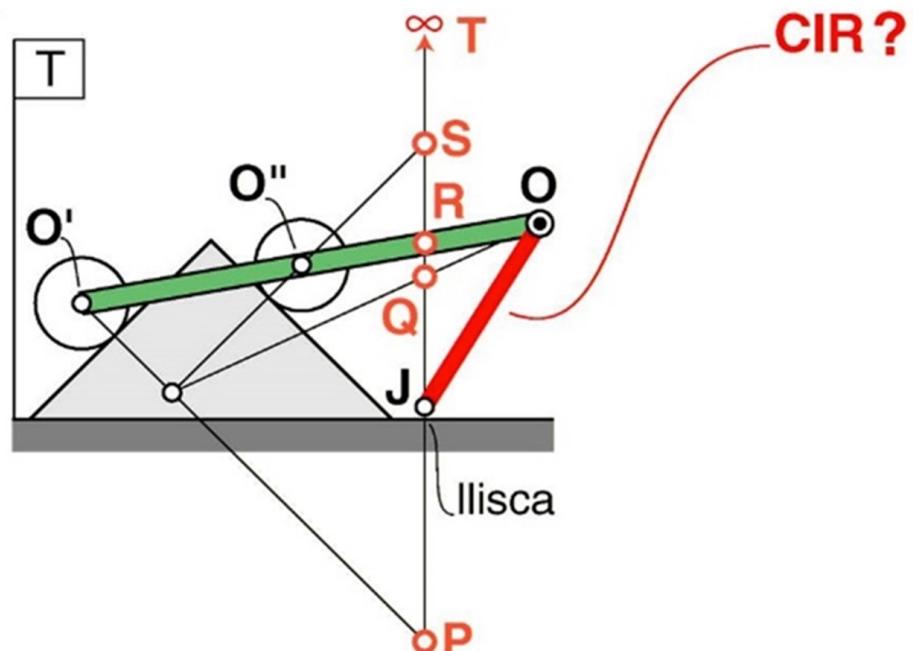


10 La roda es mou sense lliscar sobre el terra. La barra està articulada a la roda en el punt **P** i el seu extrem **Q** llisca sobre el terra. Quin és el Centre Instantani de Rotació de la barra PQ respecte al terra?

- A R
- B O
- C T
- D J
- E S

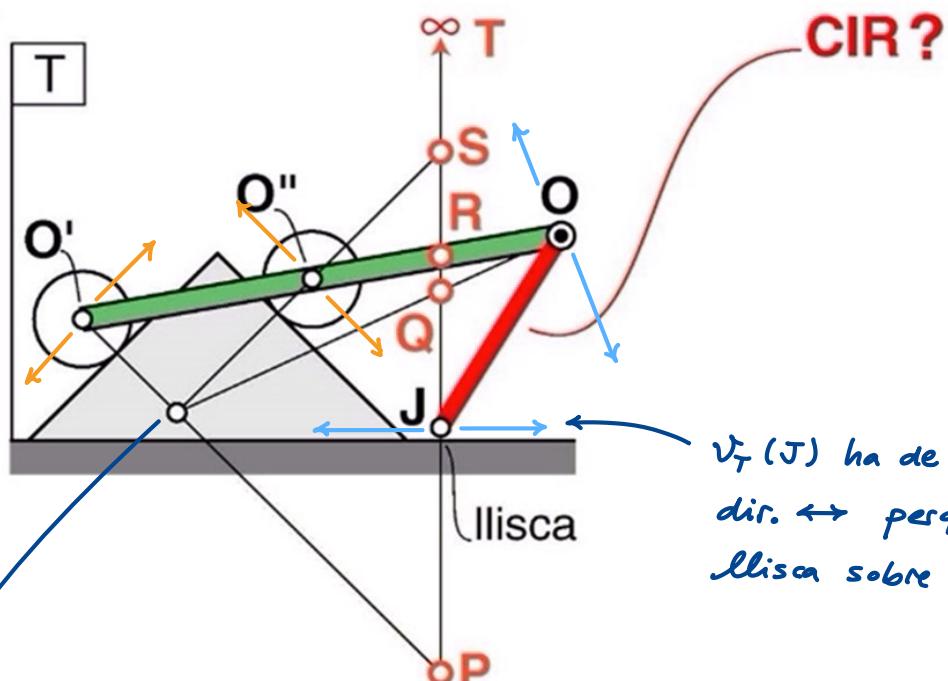
CIR barra vermella

Quin és el CIR de la barra vermella respecte T?



6P'

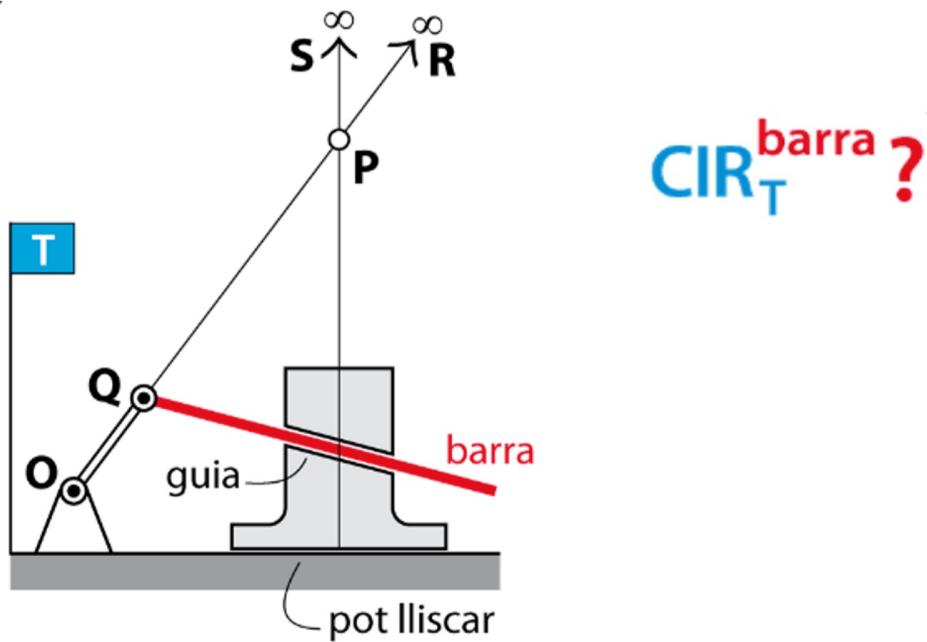
Sol.



$v_T(J)$ ha de ser en
dir. \leftrightarrow perquè J
llisca sobre el terra

$$CIR_T(\text{Barra vermella}) \Rightarrow \frac{\bar{v}_T(o)}{\bar{v}_T(J)} \text{ és } \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\} \Rightarrow CIR_T(\text{Barra vermella}) = Q$$

Barra amb eixos de revolució i prismàtics



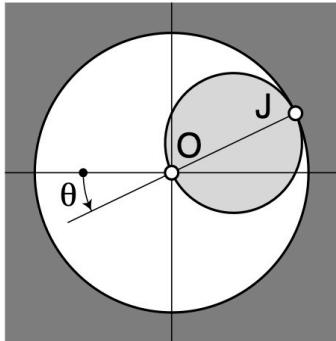
6P1

Sol.

La barra vermella només es pot transladar. No pot girar, perquè els 2 eixos prismàtics no li ho permeten.

Vol dir que $\bar{\omega}_T^{\text{barra}} = 0$. Això implica que el seu CIR es a l'oo (sobre un punt de la recta de l'oo). Per altra banda CIR_T^{barra} ha de ser sobre la recta OQ perquè Q té velocitat \perp a aquesta recta. Per tant, CIR_T^{barra} ha de ser el punt de l'oo de la recta OQ.

Disc en circumferència - Qüestions 3.3 i 3.4 MPSR



3.3 El disc de radi r rodola sense lliscar per l'interior de la circumferència fixa de radi $2r$. Quina és la celeritat del punt O del disc?

- A 0
- B $r \dot{\theta}$
- C $r \dot{\theta} / 2$
- D $2r \dot{\theta}$
- E $4r \dot{\theta}$

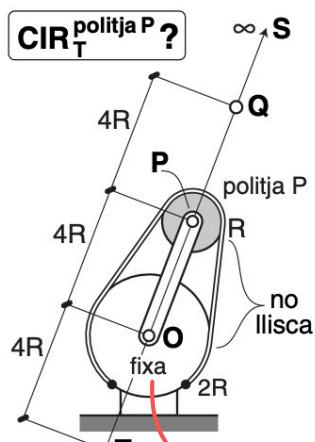
3.4 Per al sistema de la qüestió anterior i per a la configuració de la figura, quin és el mòdul de l'acceleració del punt J del disc?

- A 0
- B ∞
- C $r \dot{\theta}^2$
- D $2r \dot{\theta}^2$
- E $r \dot{\theta}^2 \sqrt{2}$

Pista:

Clarament, el centre del disc descriu un mov. circular amb centre a O i radi R , de vel. angular $\odot \dot{\theta}$

CIR Politja - Qüestió 4, oct 2012

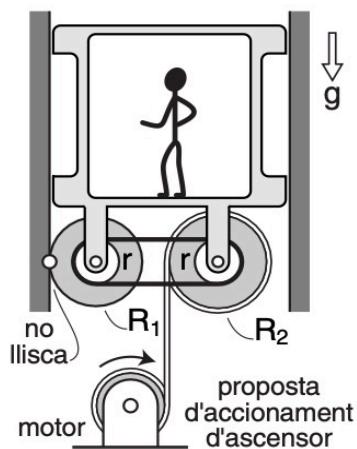


4 Quin és el Centre Instantani de Rotació del moviment de la politja P respecte al terra?

- A O
- B P
- C Q
- D S
- E T

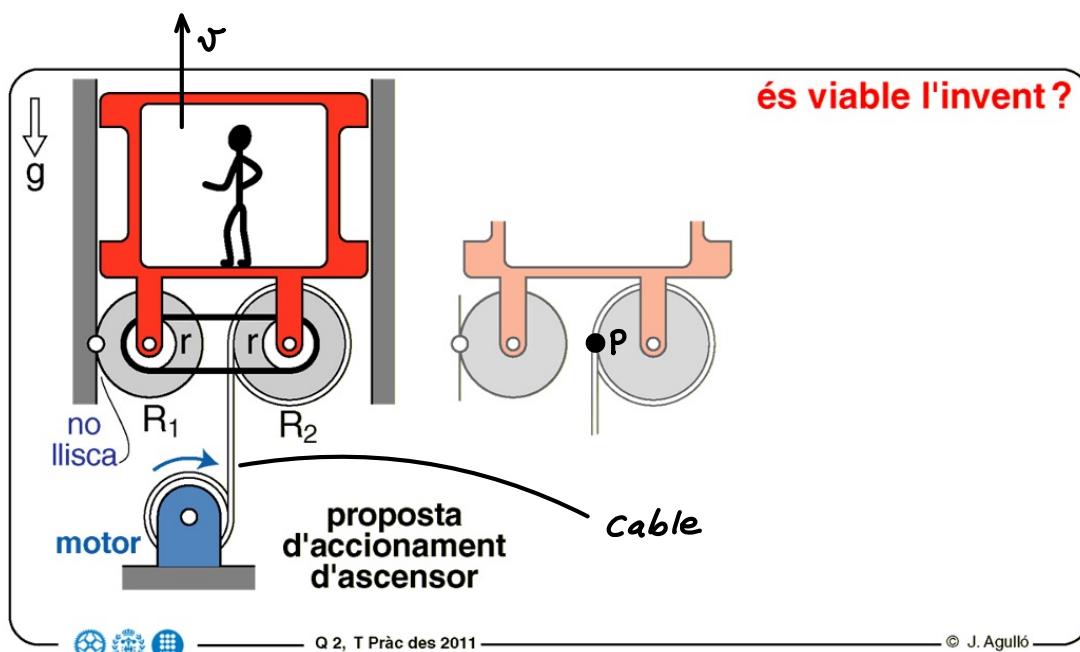
Politja fixa a T

és viable l'invent?



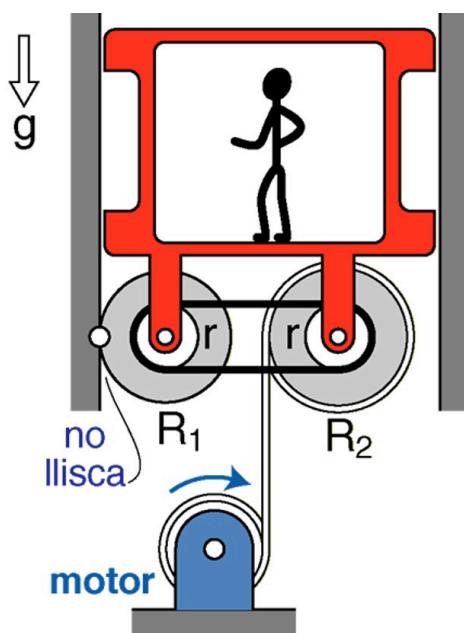
2 Es proposa el mecanisme d'accionament d'un ascensor descrit a la figura. La roda de radi R_1 no llisca sobre la paret i és impulsada per la rotació de la roda de radi R_2 per mitjà de les politges de radi r , que són solidàries a les rodes. La roda de radi R_2 és impulsada pel motor per mitjà d'un cable enrotllat a la roda i al tambor del motor. És viable l'invent?

- A** No és viable.
- B** És viable si $R_1 = R_2$.
- C** És viable si $R_1 > R_2$.
- D** És viable si $R_1 < R_2$.
- E** És viable per a qualsevol relació de radis.



Pista: Per a que sigui viable, quan la cabina puja amb vel. $\uparrow v$, el punt P ha de tenir vel. \downarrow , ja que el cable només pot estirar cap avall, no empujar cap amunt.

Sol:



Per a que funcioni, quan la cabina puja amb $\uparrow v$, la vel. de P ha de ser \downarrow (el cable només pot estirar, no empènyer).

$$\text{Suposem } \bar{v}_T(\text{cabina}) = \uparrow v$$

Calcularem $\bar{v}_T(P)$ i mirarem si pot ser cap \downarrow

$$AB = T, \quad REL = Cab$$

$$\bar{v}_{AB}(P) = \underbrace{\bar{v}_{REL}(P)}_{\downarrow \frac{v}{R_1} \cdot R_2} + \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)}_{\uparrow v} =$$

$$\bar{\Omega}_T^{Roda 1} = \odot \frac{v}{R_1} \quad (Q = CIR \bar{\Omega}_T^{Roda 1})$$

$$\begin{matrix} \text{cabina} \\ \text{no gira} \\ \text{resp. T} \end{matrix} \rightarrow \parallel \quad \bar{\Omega}_{Roda 1 \text{ Cab}}^{Roda 1}$$

$$\text{Rel. transmissió} \rightarrow \parallel \quad 1:1$$

$$\bar{\Omega}_{Roda 2 \text{ Cab}}^{Roda 2}$$

Ha de ser > 0

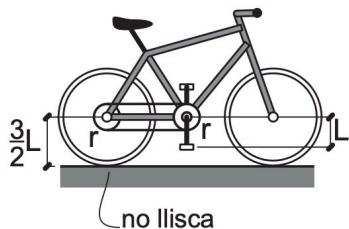
$$= \left(\frac{v}{R_1} \cdot R_2 \downarrow \right) + \left(v \uparrow \right) = v \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \downarrow =$$

$$\frac{R_2}{R_1} - 1 > 0 \Rightarrow \text{Cal } R_2 > R_1 \text{ per a que funcioni}$$

$$RESP = D$$

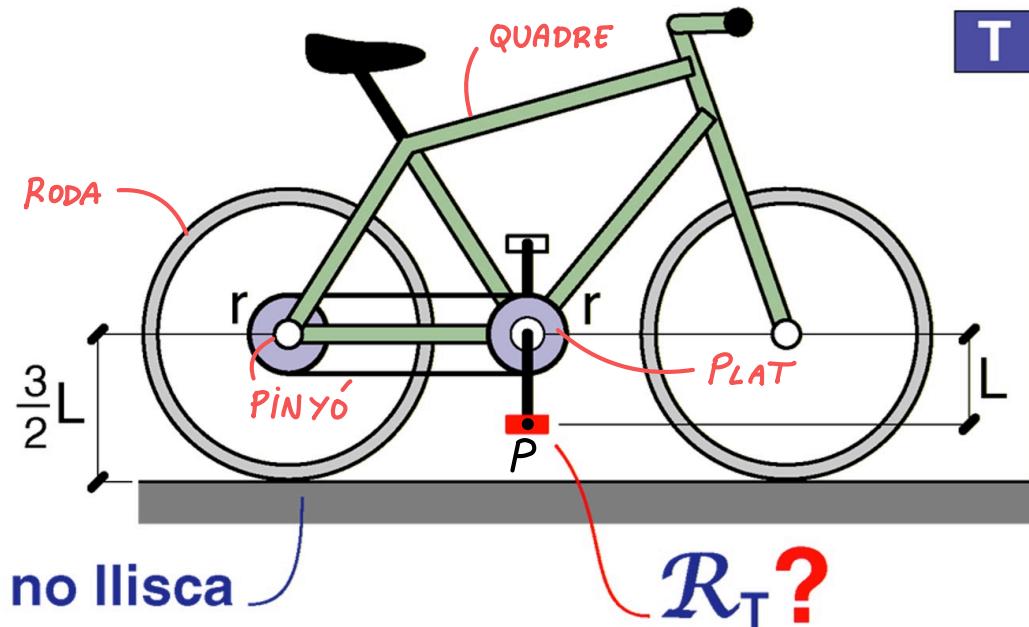
Si $R_2 < R_1$, quan cabina puja la $\bar{v}_T(P)$ és \uparrow . Ergo el cable hauria d'empènyer, i no pot.

Radi curvatura pedal - Qüestió 5, octubre 2004

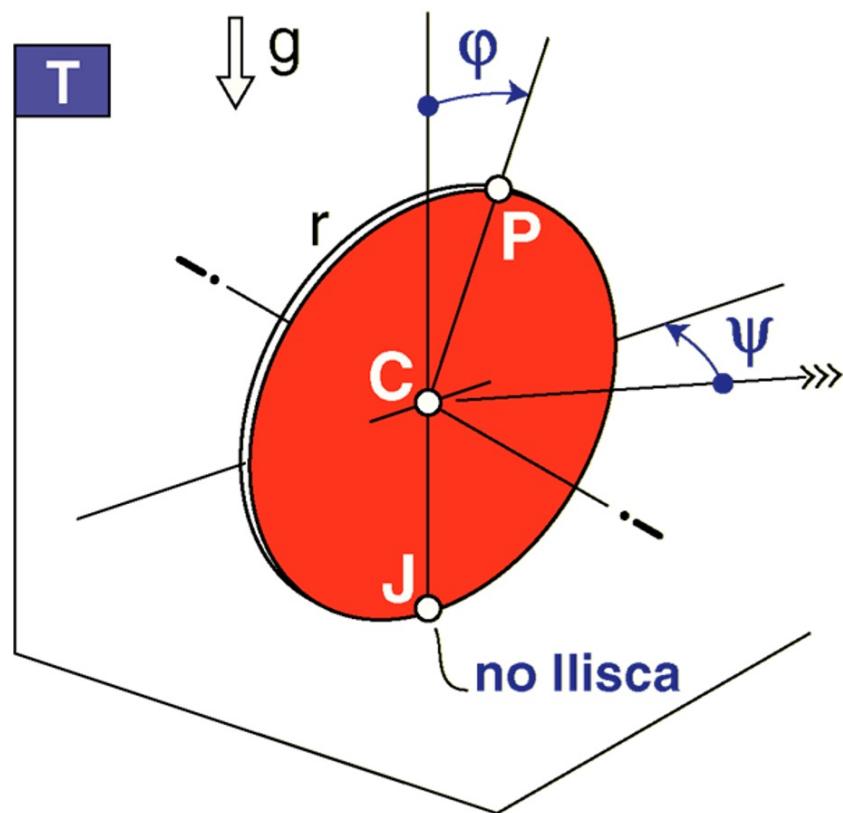


5 En una bicicleta es fa servir un pinyó del mateix radi que el plat. El radi de la roda és $3/2$ de la longitud de la manovella del pedal. Quin és el radi de curvatura de la trajectòria del pedal quan aquest passa per la posició més baixa?

- A L
- B $(1/2)L$
- C $(1/4)L$
- D $(2/3)L$
- E $(1/3)L$

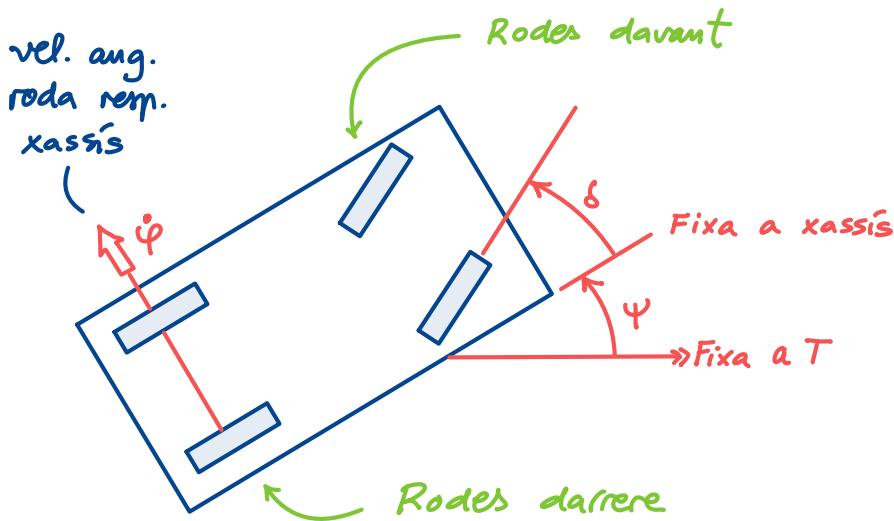


Introducció a cinemàtica de vehicles



Començarem buscant la velocitat de C, que és un punt de la roda i també del xassís, partint de les velocitats angulars psipunt i phipunt de la roda. Veurem que l'expressió d'aquesta velocitat queda molt simple, només en funció de phipunt. Això ens permetrà fer anàlisis cinemàtiques ràpides de vehicles!

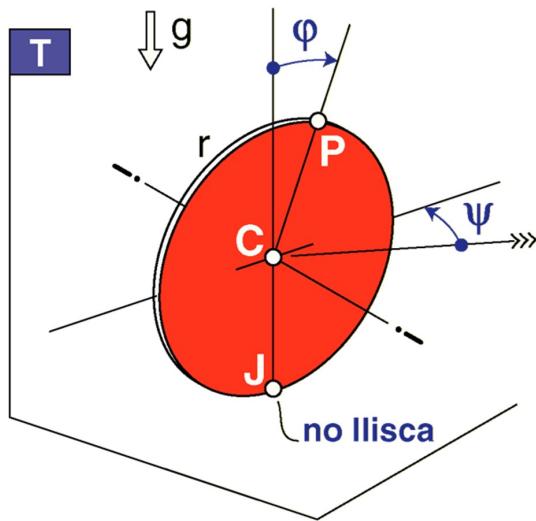
Cinemàtica de vehicles



3 hipòtesis
simplificadores

- Vehicle es mou en terra pla
- Veh. no té suspensions \Rightarrow Roda es mantiene en un pla vertical i només cal orientar-la amb 2 angles.

Per la roda darrere serien ψ i φ :

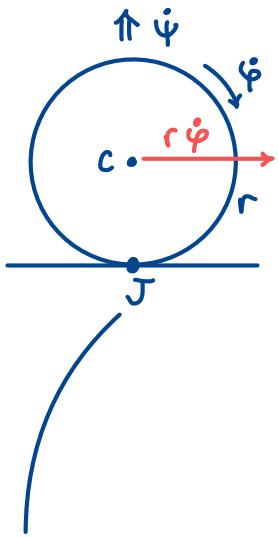


Per la del davant serien $\psi + \delta$, φ

- Rodes primes \Rightarrow contacte puntual amb el terra. Permet introduir hipòtesi de no lliscament a J. Si el contacte fos en un segment de recta seguir que existiria lliscament en alguns punts.

Anàlisi cinemàtica roda del darrere:

Per la roda del davant surt el mateix!



Aplicant CSR a roda:

$$\bar{v}_T(C) = \bar{v}_T(J) + (\underbrace{\psi\hat{i} + \dot{\phi}\hat{\theta}}_0 \times \hat{r}) = (\rightarrow r\dot{\phi})$$

Que simple!

Per la roda davant surt el mateix perquè en lloc de $\uparrow\dot{\psi}$ tenim $\uparrow(\dot{\psi} + \dot{\delta})$

J no és el CIR! Ho seria si el movim. roda fos pla. Però aquí és 3D!

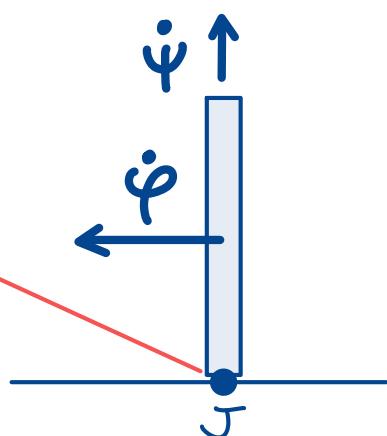
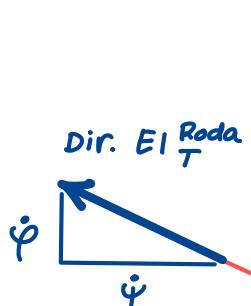
Ergo $\rightarrow r\dot{\phi}$ no és distància al CIR $\times R$, sinó el resultat d'aplicar CSR!

En fer anàlisi cinemàtica de veh. pensem sempre en això de roda

és a dir, que el punt C del xassís té vel. $(\rightarrow r\dot{\phi})$

Això ens permetrà fer anàlisis cinemàtiques ràpides.

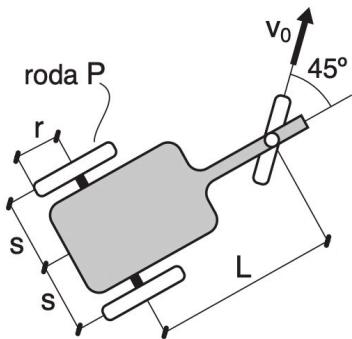
L'EI_T^{roda} passa per J, però roda té 2 GDL. La dir. de l'EI és $\dot{\psi} + \dot{\phi}$, ergo EI_T^{roda} és indeterminat. Ni hi pensem!



Ni hi pensem!

Apliquem la teoria anterior al següent exemple :

Tricicle - Q5, març 2007

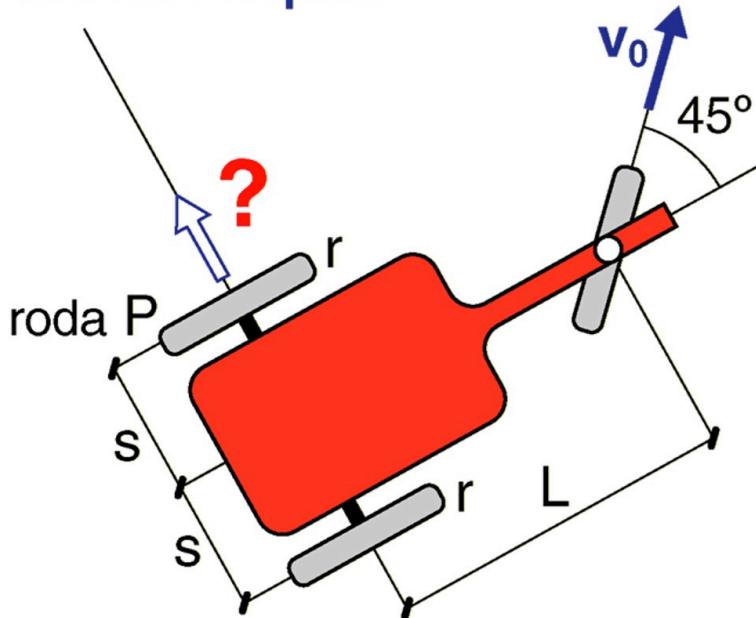


5 En el tricicle de la figura, les rodes no llisquen damunt del terra. La roda directriu, de radi r , forma un angle de 45° amb l'eix longitudinal i el seu centre avança amb celeritat v_0 . Quina és la velocitat de rotació de la roda P al voltant del seu eix?

- A $\frac{v_0}{r}$
B $\frac{v_0}{r\sqrt{2}}$
C $\frac{L-s}{L} \frac{v_0}{r\sqrt{2}}$

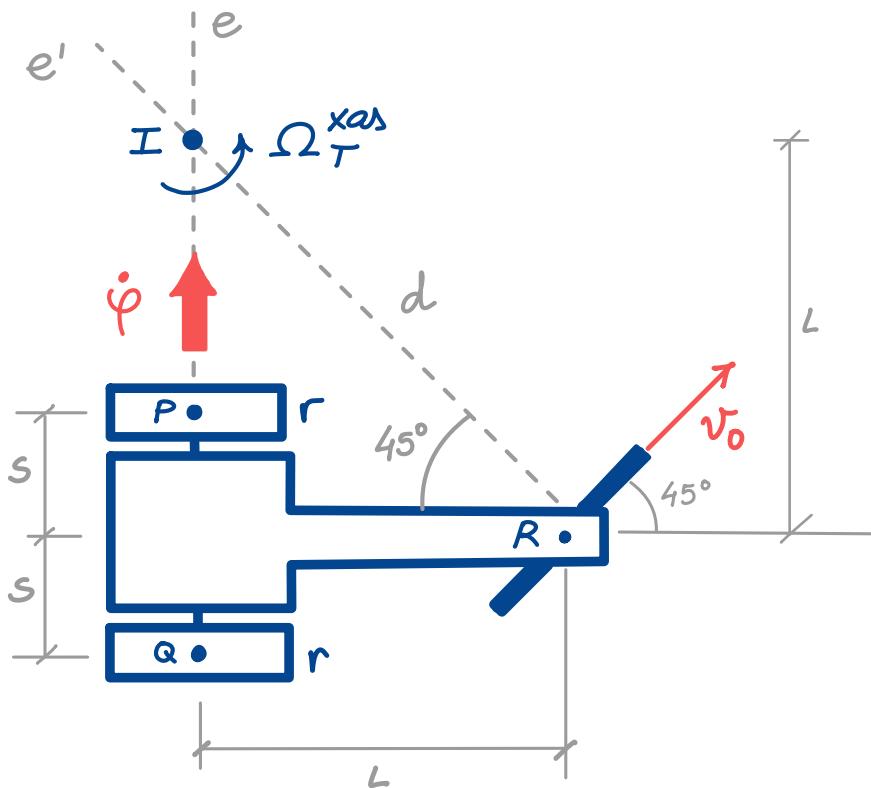
D $\frac{L-s}{L} \frac{v_0}{r}$
E $\frac{L+s\sqrt{2}}{L} \frac{v_0}{r}$

les rodes no llisquen



Solució:

$$\dot{\varphi} ?$$



P, Q, R són punts de les respectives rodes, però també del xassís.

$$P \text{ i } Q \text{ tenen vel. } \perp \text{ eix } e \quad | \Rightarrow CIR_T^{\text{xassís}} = I \\ R \text{ té vel. } \perp \text{ eix } e'$$

Busquem $\Omega_T^{\text{xassís}}$:

$$\Omega_T^{\text{xassís}} \cdot d = v_0 \Rightarrow \Omega_T^{\text{xassís}} = \frac{v_0}{d} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}}$$

Ara, veient C com a punt de la roda:

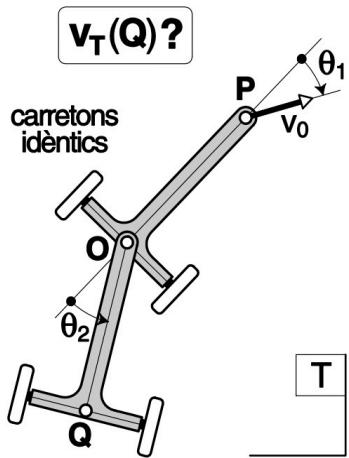
$$v_T(C) = r \cdot \dot{\varphi} \quad (\text{I})$$

I veient C com del xassís:

$$v_T(C) = \Omega_T^{\text{xassís}} \cdot \underbrace{(L-s)}_{\text{dist. al CIR}} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} \cdot (L-s) \quad (\text{II})$$

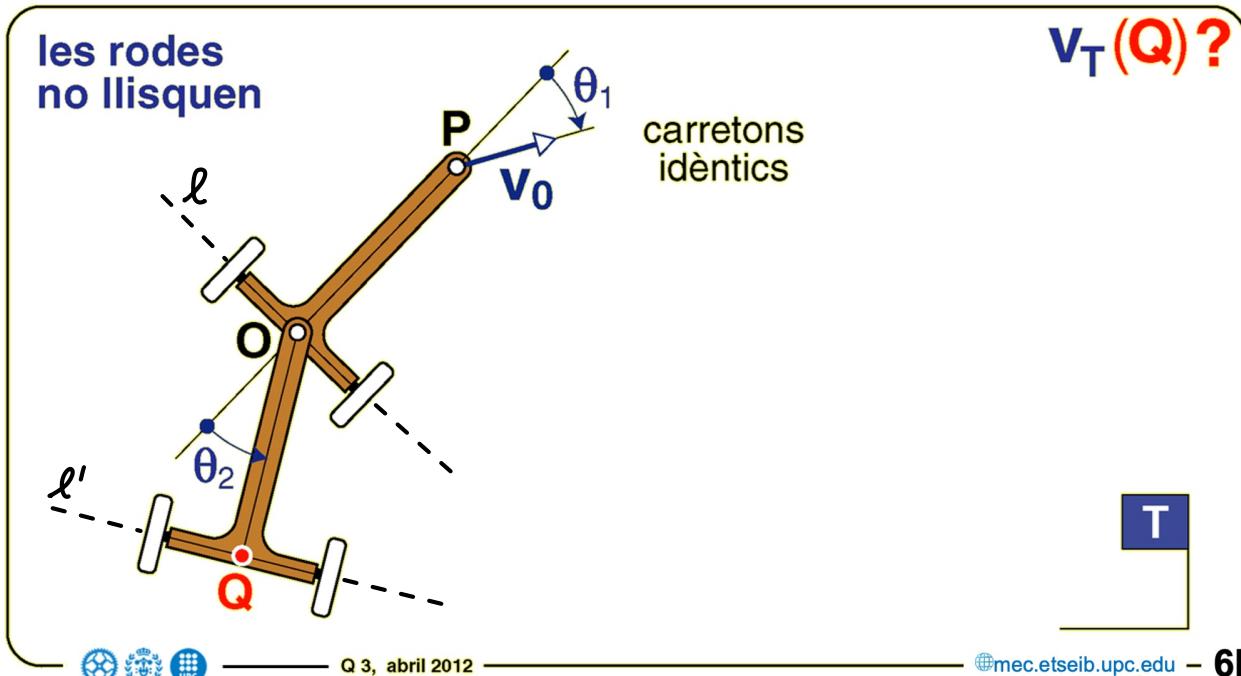
$\text{I} = \text{II}$:

$$r \dot{\varphi} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} (L-s) \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{v_0}{rL\sqrt{2}} (L-s)$$



3 Els dos carretons articulats a **O** són idèntics. Si el punt **P** es mou amb la velocitat v_0 indicada, amb quina celeritat es mou el punt **Q**?

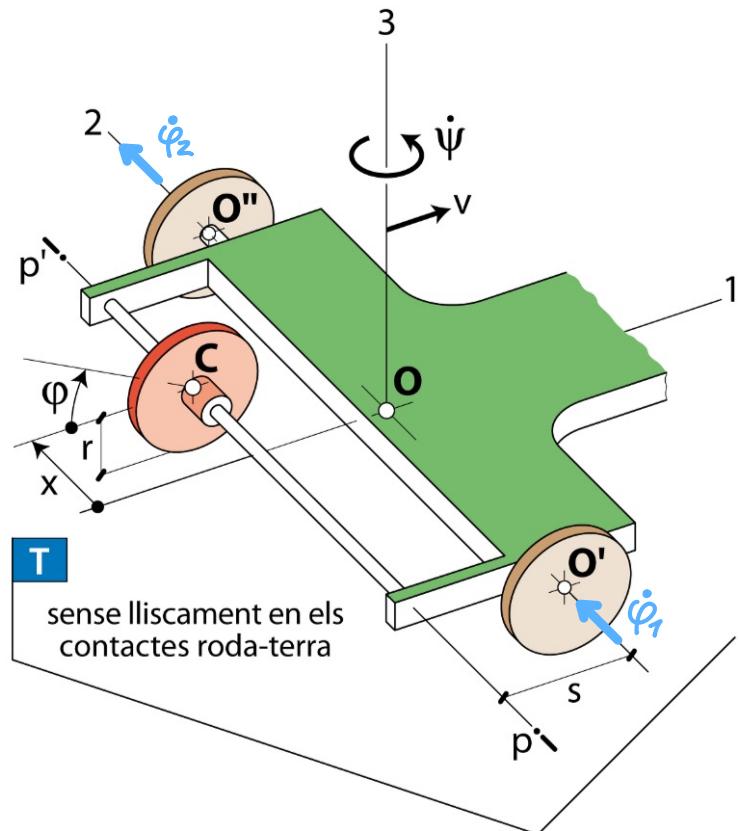
- A v_0
- B $v_0 \cos \theta_1$
- C $v_0 \cos \theta_1 \cos \theta_2$
- D $v_0 \cos \theta_1 / \cos \theta_2$
- E $v_0 \cos \theta_2 / \cos \theta_1$



3.25 The vehicle moves on a horizontal ground. The three wheels do not slide on the ground. The wheel with center C rotates around the axis $p-p'$ parallel to $O'-O''$. The speed $v_E(O)$ and the change of orientation $\dot{\psi}$ are variable.

Determineu :

- El nombre de GL del sistema.
- $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ en funció de v i $\dot{\psi}$?
- \dot{x} i $\dot{\varphi}$ en funció de v i $\dot{\psi}$?



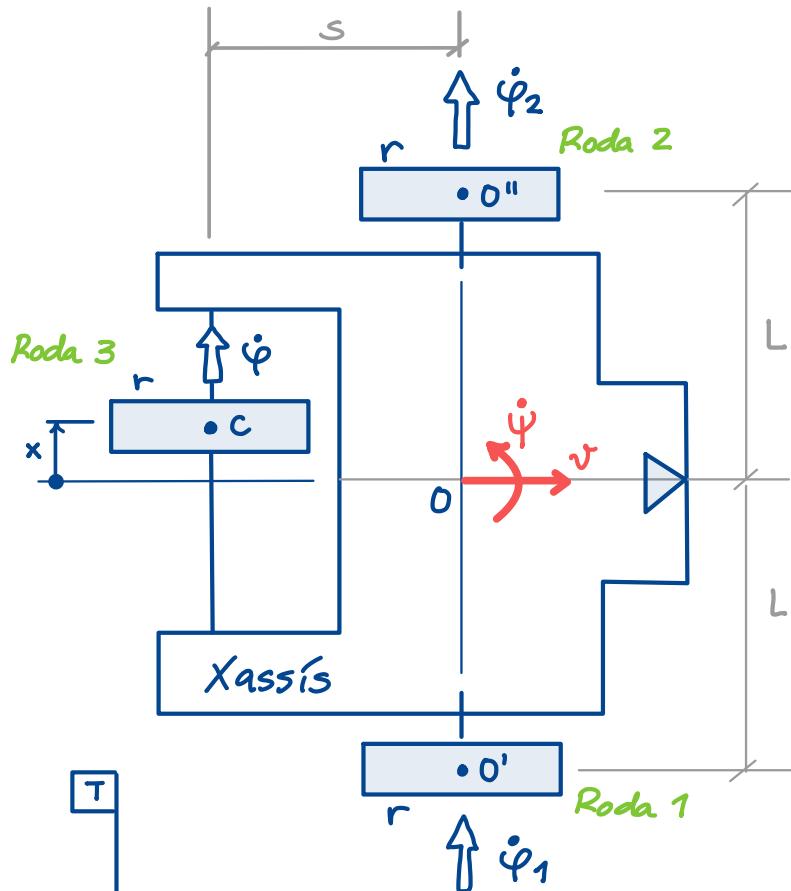
Motivació : Aplicació a pilotatge del vehicle

El vehicle es pot motoritzar de dues maneres

- Amb 2 motors que actuen $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ ← La més típica
- Amb 2 motors que actuen \dot{x} i $\dot{\varphi}$

Si suposem que v i $\dot{\psi}$ són corriugades de velocitat donades per un joystick, per exemple, les funcions que ens demanen de trobar ens permeten convertir les comandes v i $\dot{\psi}$ introduïdes al joystick en comandes de velocitat que han de satisfer els motors.

GL sistema



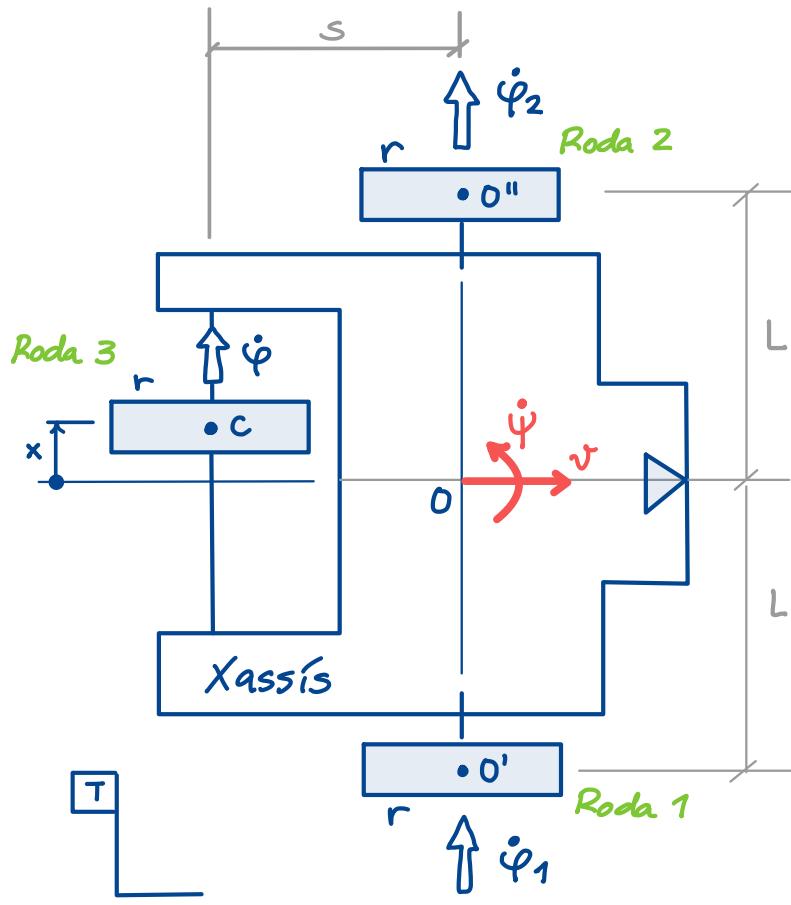
Manera 1

Si bloquejo $\dot{\psi}$, xassís no pot girar però sí transladar-se ↔ (amb les rodes rodant sense lliscar). Si a més bloquejo v , ja res es pot moure. Per tant, el vehicle té 2 GL.

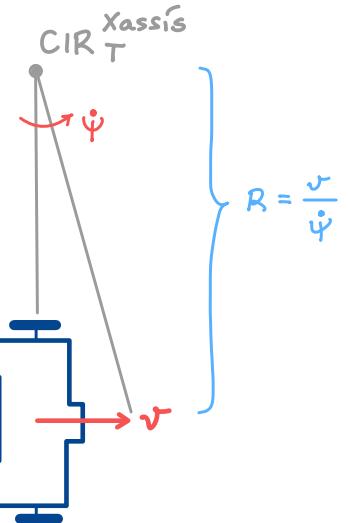
Manera 2

Alternativament : si bloquejo x , el punt C parsa a ser del xassís, amb vel. \rightarrow . Els punts O' i O'' també tenen vel. \rightarrow . Ergo el CIR $\frac{x_{\text{xassís}}}{T}$ és a l' ∞ i $\bar{\Omega}_{\frac{x_{\text{xassís}}}{T}} = \bar{0}$. El vehicle es pot moure cap a \rightarrow . Si ara aturo $\dot{\varphi}$, tot queda aturat.

$\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ en funció de $(v, \dot{\psi})$



Fixem-nos que triant $(v, \dot{\psi})$ amb un joystick, estem triant la posició del CIR del xassís :



Via
cinemàt.
de roda

$$\bar{v}_T(O') = \underline{r} \dot{\varphi}_1$$

$$\bar{v}_T(O'') = \underline{r} \dot{\varphi}_2$$

Via
CSR
xassís

$$\bar{v}_T(O') = \bar{v}(O) + \bar{\Omega}_T^{xas} \times \bar{OO'} =$$

$$= (\underline{v}) + (\odot \dot{\psi}) \times (\downarrow L) = \underline{v + L \dot{\psi}}$$

$$\bar{v}_T(O'') = (\underline{v}) + (\odot \dot{\psi}) \times (\uparrow L) = \underline{v - L \dot{\psi}}$$

Igualant

$$r \dot{\varphi}_1 = v + L \dot{\psi} \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{r} (v + L \dot{\psi})$$

$$r \dot{\varphi}_2 = v - L \dot{\psi} \Rightarrow \dot{\varphi}_2 = \frac{1}{r} (v - L \dot{\psi})$$

\dot{x} i $\dot{\varphi}$ en funció de v i $\dot{\psi}$

A la roda C :

$$\bar{v}_T(C) = (\rightarrow r\dot{\varphi}) \quad (I)$$

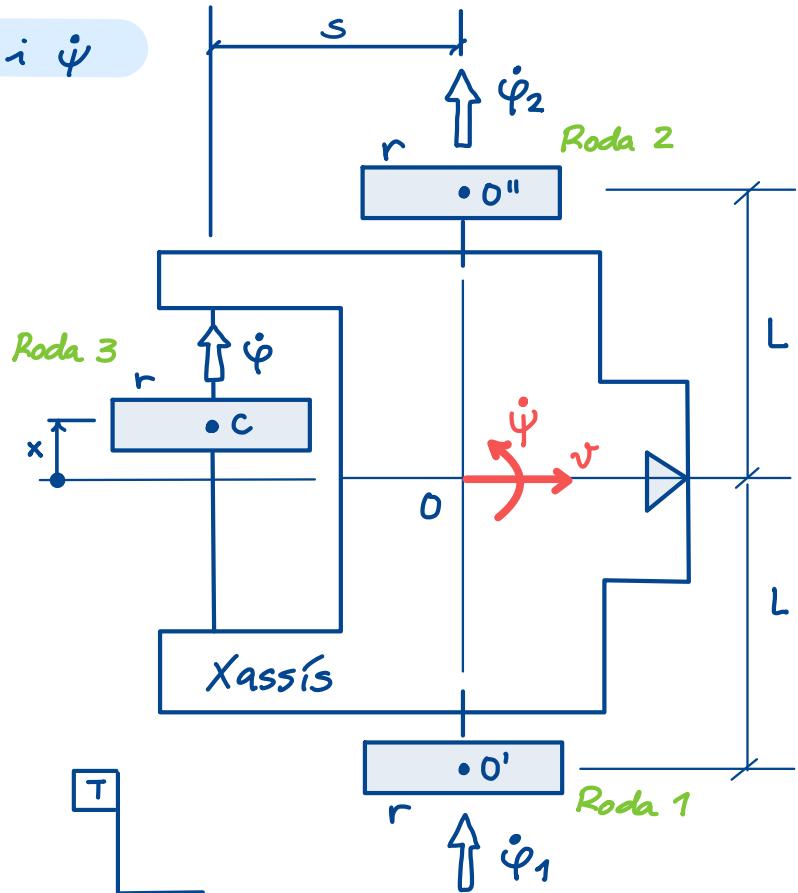
Intentem calcular $\bar{v}_T(C)$ a partir de v i $\dot{\psi}$ per igualar amb I.

Ara no podem aplicar CSR dels de O pq C ≠ xassís !

Fem comp. marim. amb :

$$REL = xassís$$

$$AB = T$$



$$\bar{v}_T(C) = \bar{v}_{REL}(C) + \bar{v}_{ar}(C) = \bar{v}_{REL}(C) + \underbrace{\bar{v}_T(O)}_{ar} + \bar{\omega}_T^{xass} \times \bar{OC} =$$

$$= (\uparrow \dot{x}) + (\rightarrow v) + (0 \dot{\varphi}) \times \underbrace{[(\leftarrow s) + (\uparrow x)]}_{(\downarrow \dot{\varphi}s) + (\leftarrow \dot{\varphi}x)} =$$

$$= [\uparrow (\dot{x} - \dot{\varphi}s)] + [\rightarrow (v - \dot{\varphi}x)] \quad (II)$$

I = II :

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x} - \dot{\varphi}s \\ r\dot{\varphi} &= v - \dot{\varphi}x \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{\varphi}s \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{r} (v - \dot{\varphi}x) \end{cases}$$

Aplicació a control

Si piloto amb joystick que dóna comandes de v i $\dot{\psi}$, puc trobar les \dot{x} i $\dot{\varphi}$ que han de fer els motors