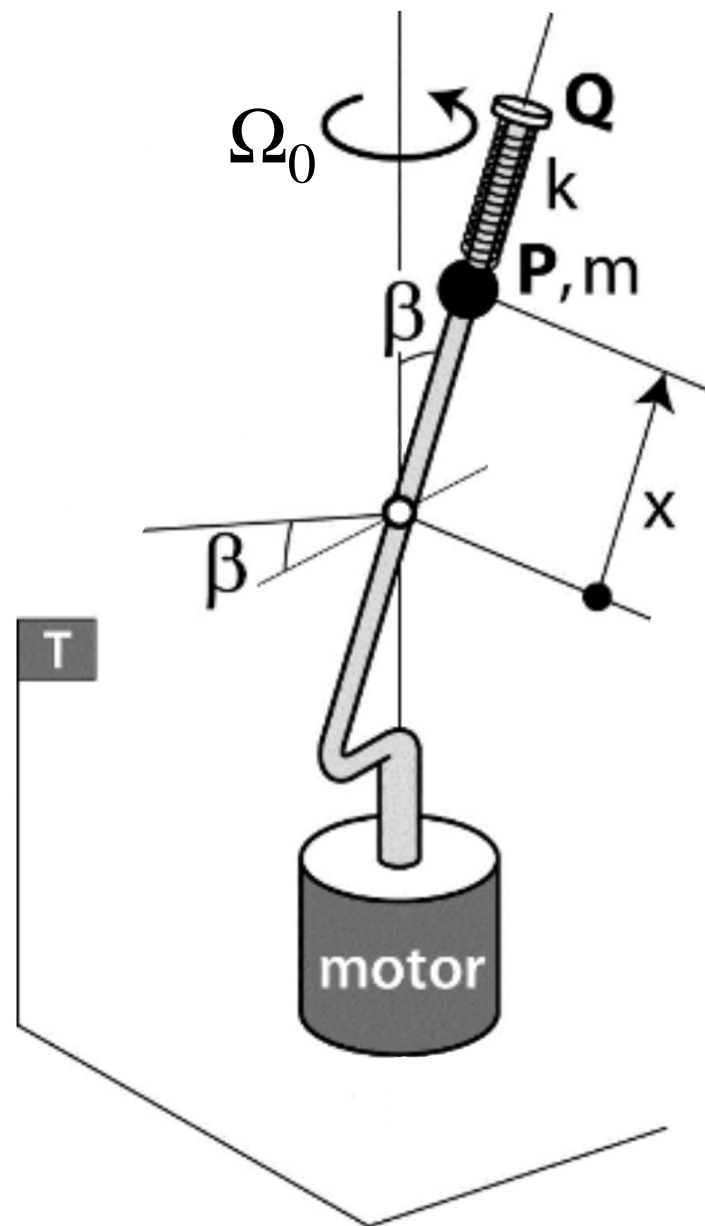


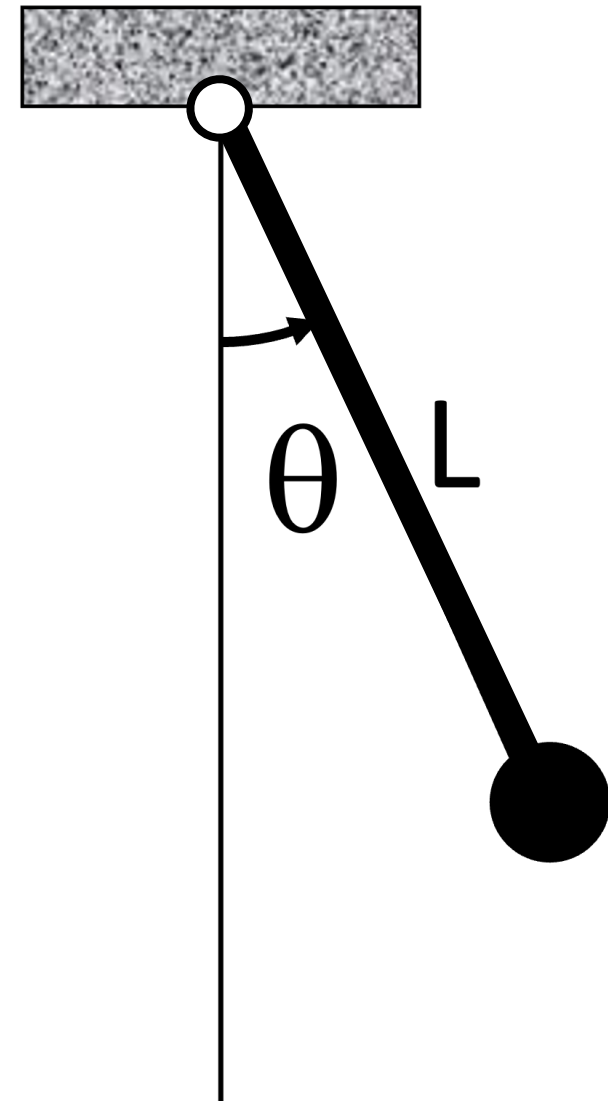
# 10P

Geometria de massas

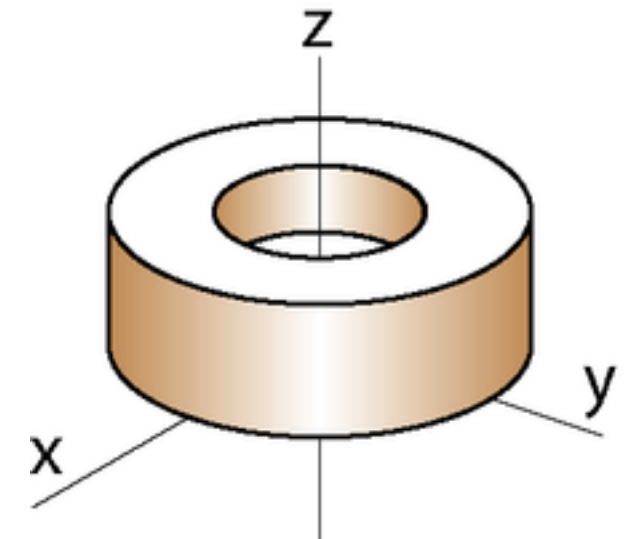
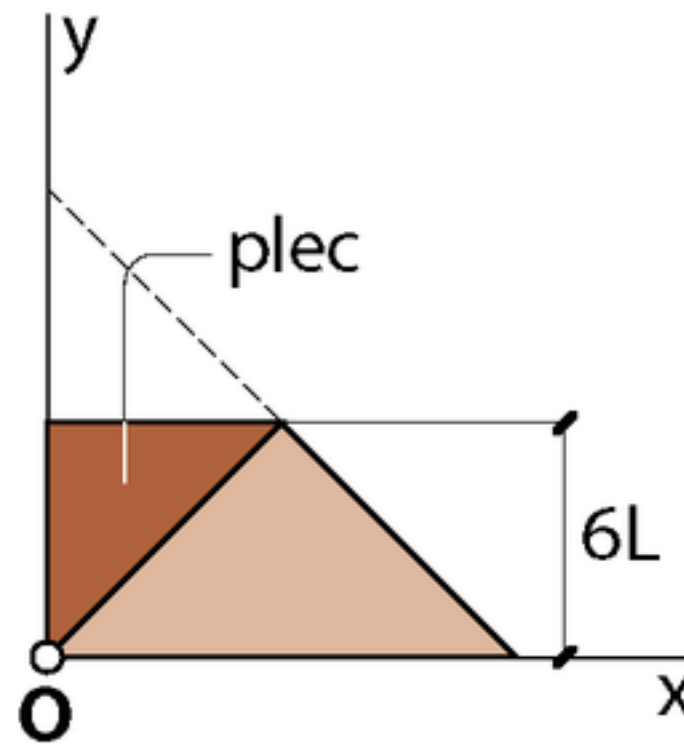
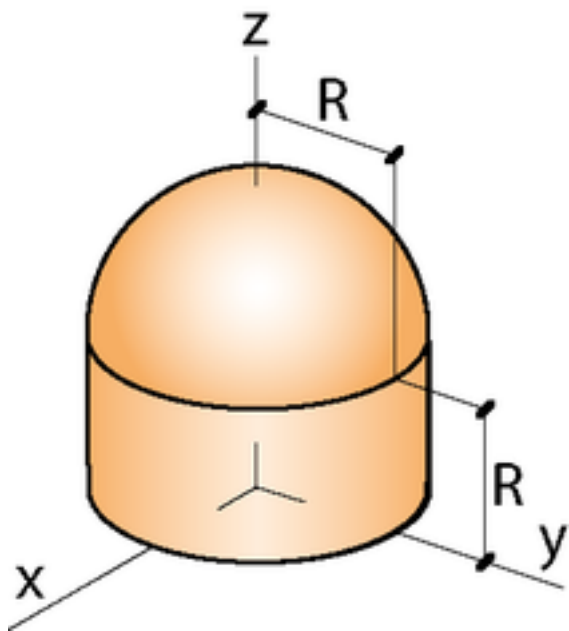
Massa-molla-guia



Pèndol simple



## Exm: D5.1 - D5.2 - D5.3 (Wikimec)



# Tensor d'inèrcia de S a Q

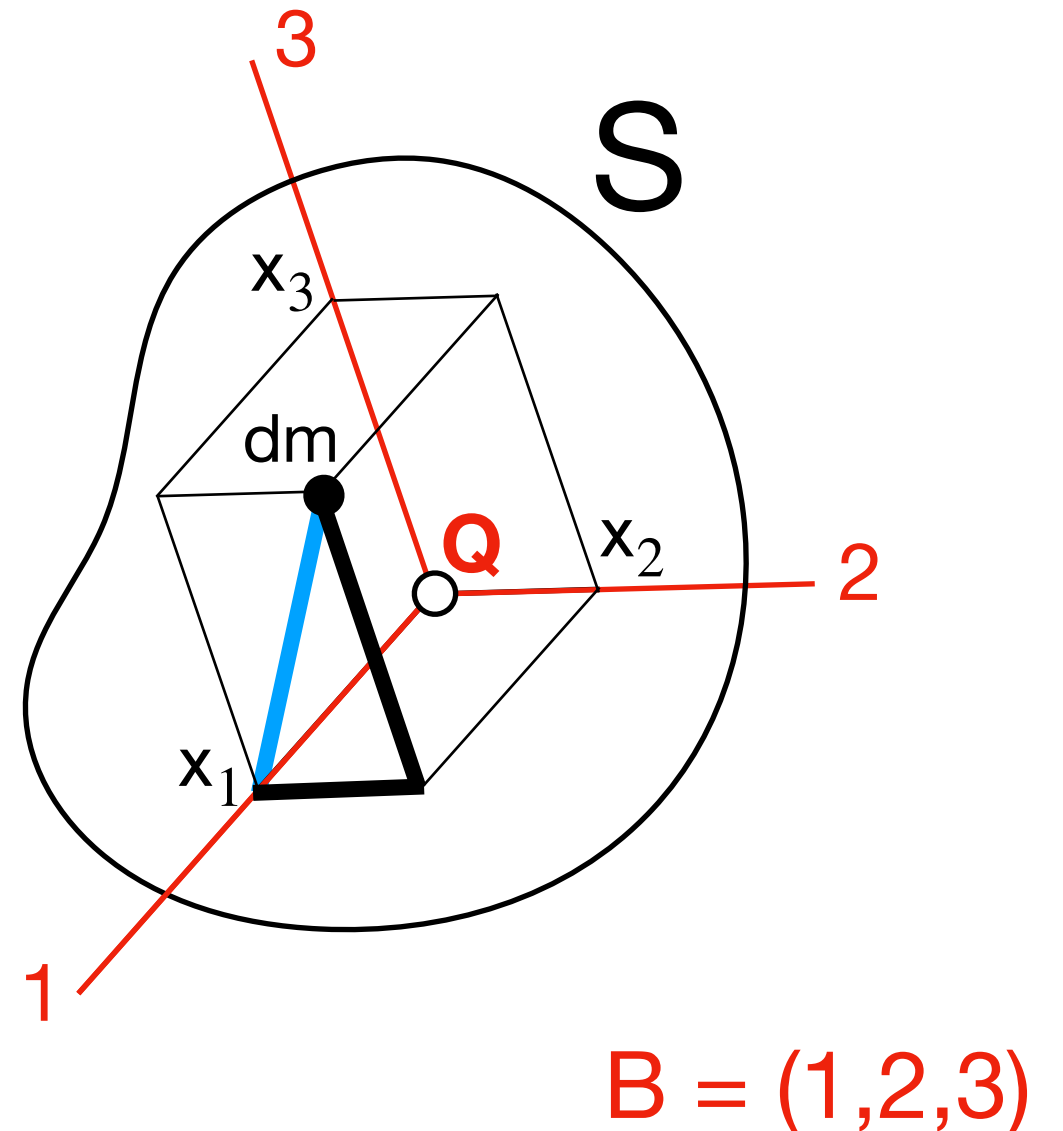
$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

## Moments d'inèrcia

$$I_{ii} = \int_S \underbrace{(x_j^2 + x_k^2)}_{(\text{dist a eix } i)^2} dm \geq 0$$

Exm:

$$I_{11} = \int_S \underbrace{(x_2^2 + x_3^2)}_{(\text{dist a eix } 1)^2} dm$$



# Tensor d'inèrcia de S a Q

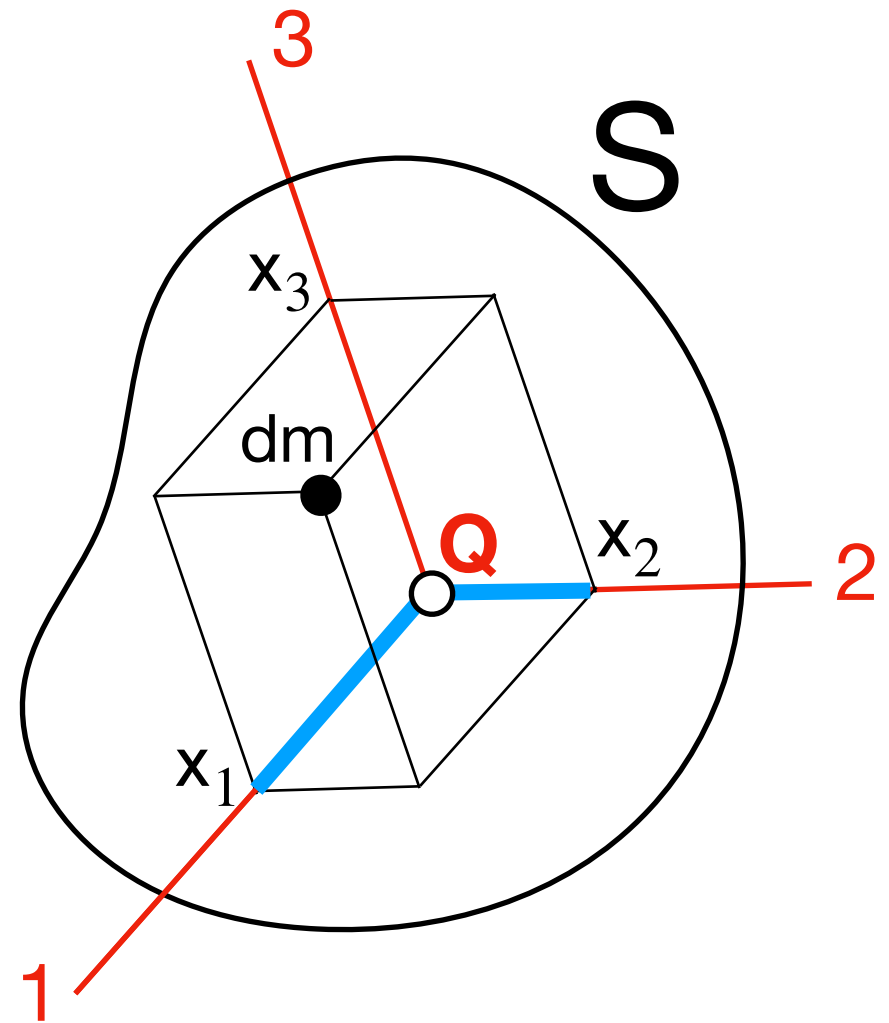
$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Productes d'inèrcia

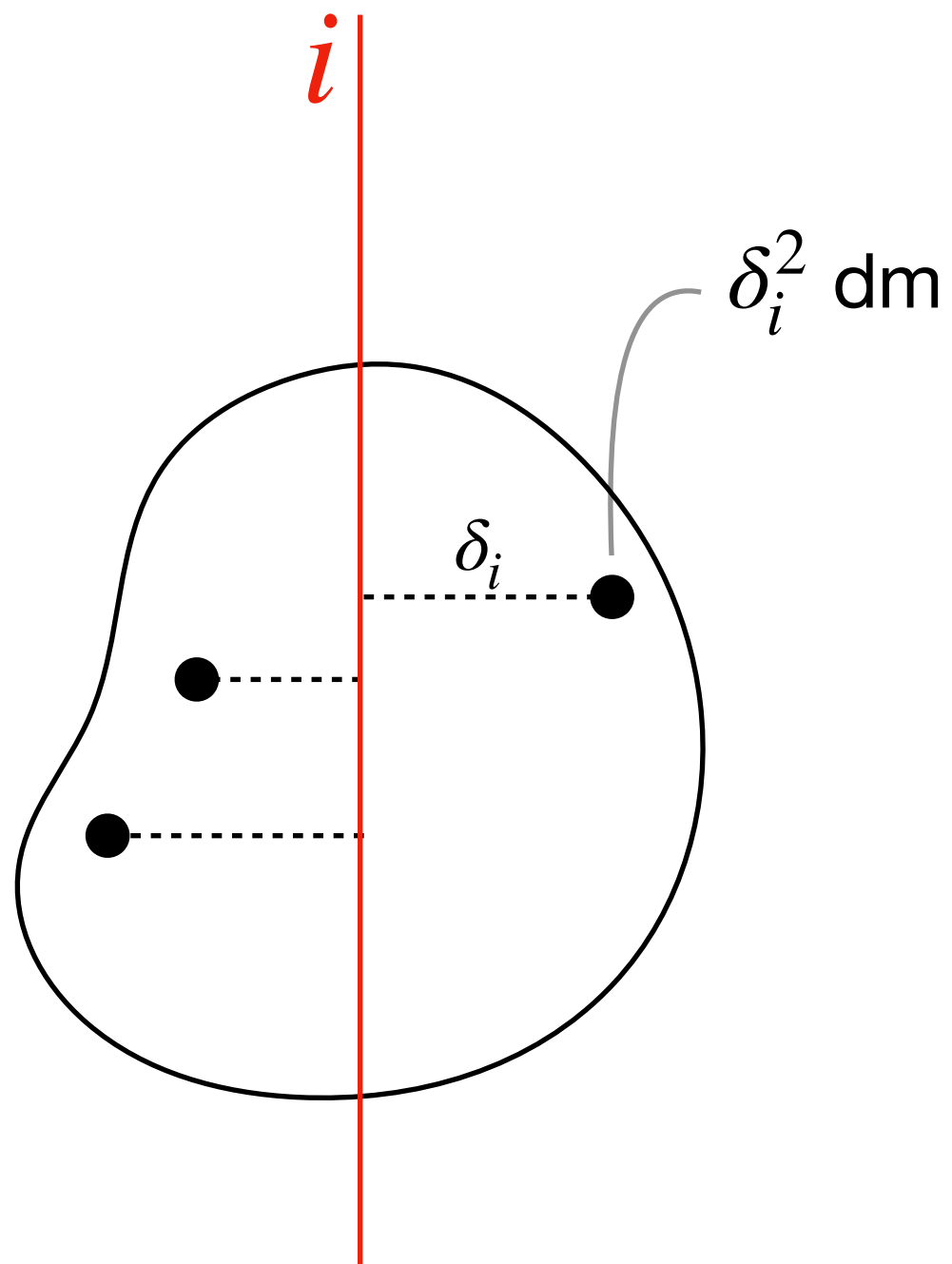
$$I_{ij} = - \int_S x_i x_j \, dm \quad (>0, <0, =0)$$

Exm:

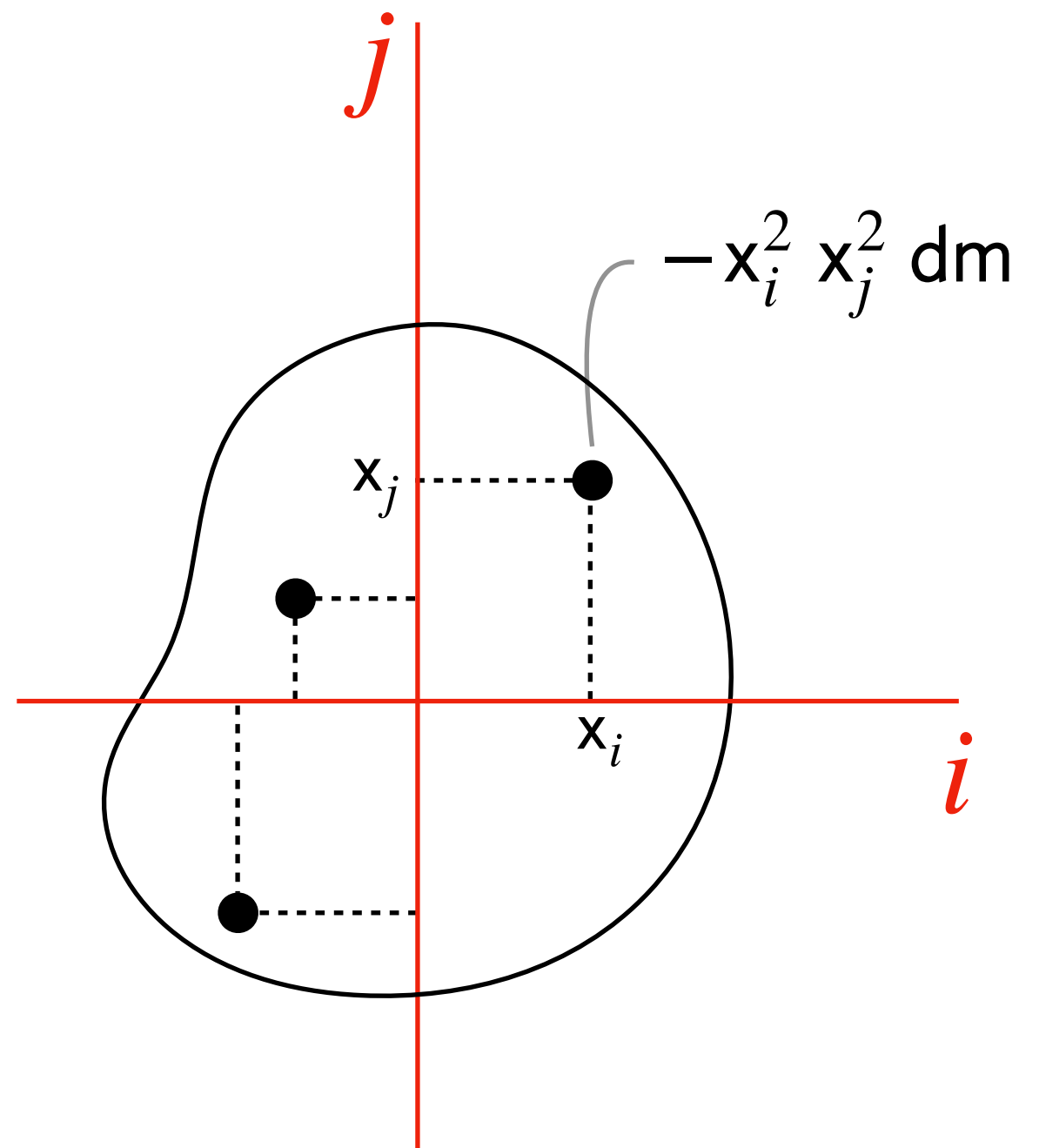
$$I_{12} = - \int_S x_1 x_2 \, dm$$



Mom. inèrcia  $I_{ii}$




Prod. inèrcia  $I_{ij}$



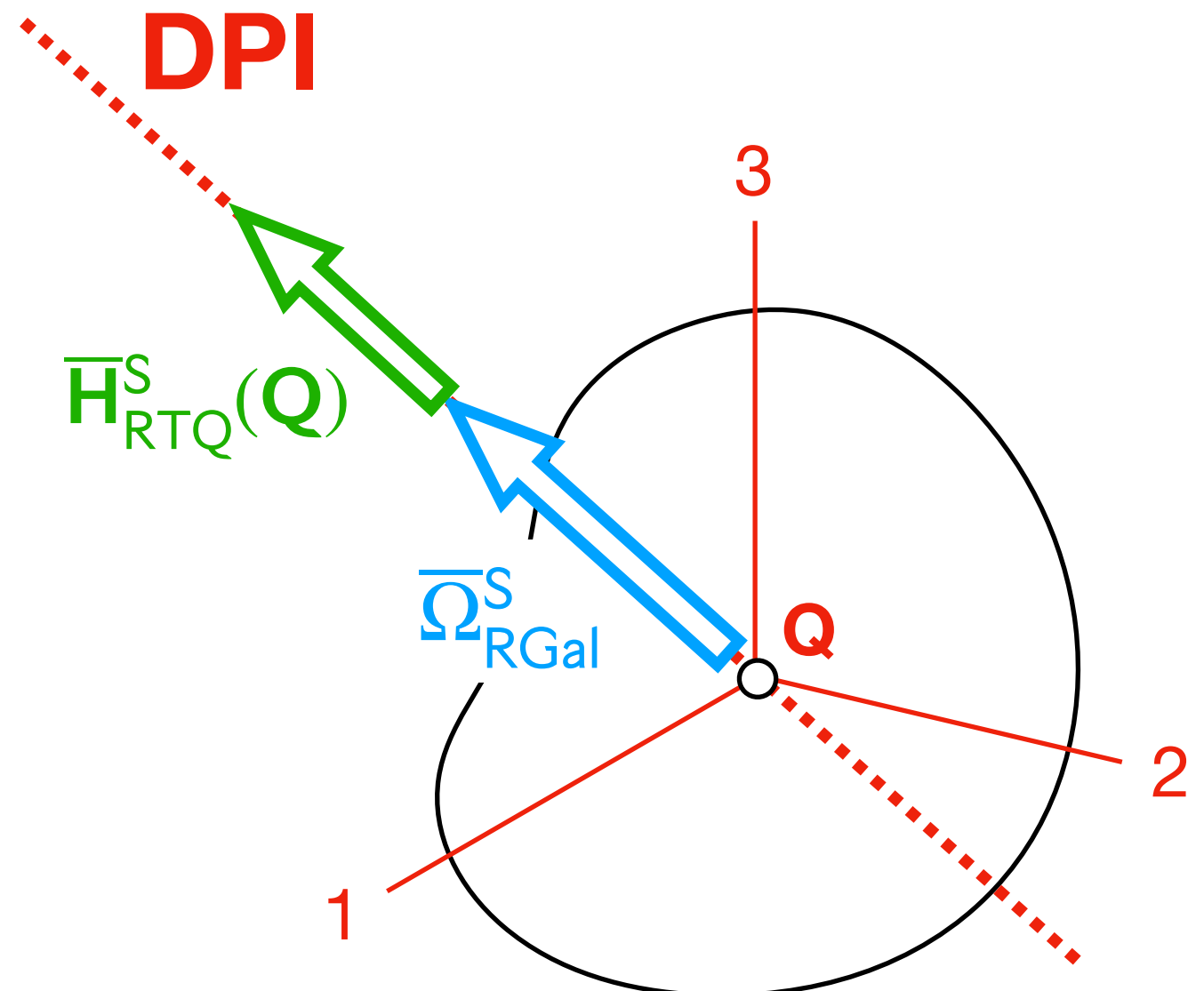
# Direccions principals d'inèrcia (**DPI**)

Són les dels  
**vectors propis**  
de  $\mathbb{I}(\mathbf{Q})$

$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{H}}_{\text{RTQ}}^{\text{S}}(\mathbf{Q}) = \mathbb{I}(\mathbf{Q}) \overline{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{RGal}}^{\text{S}}$$


Si són paral·lels,  
la seva dir. és **DPI**

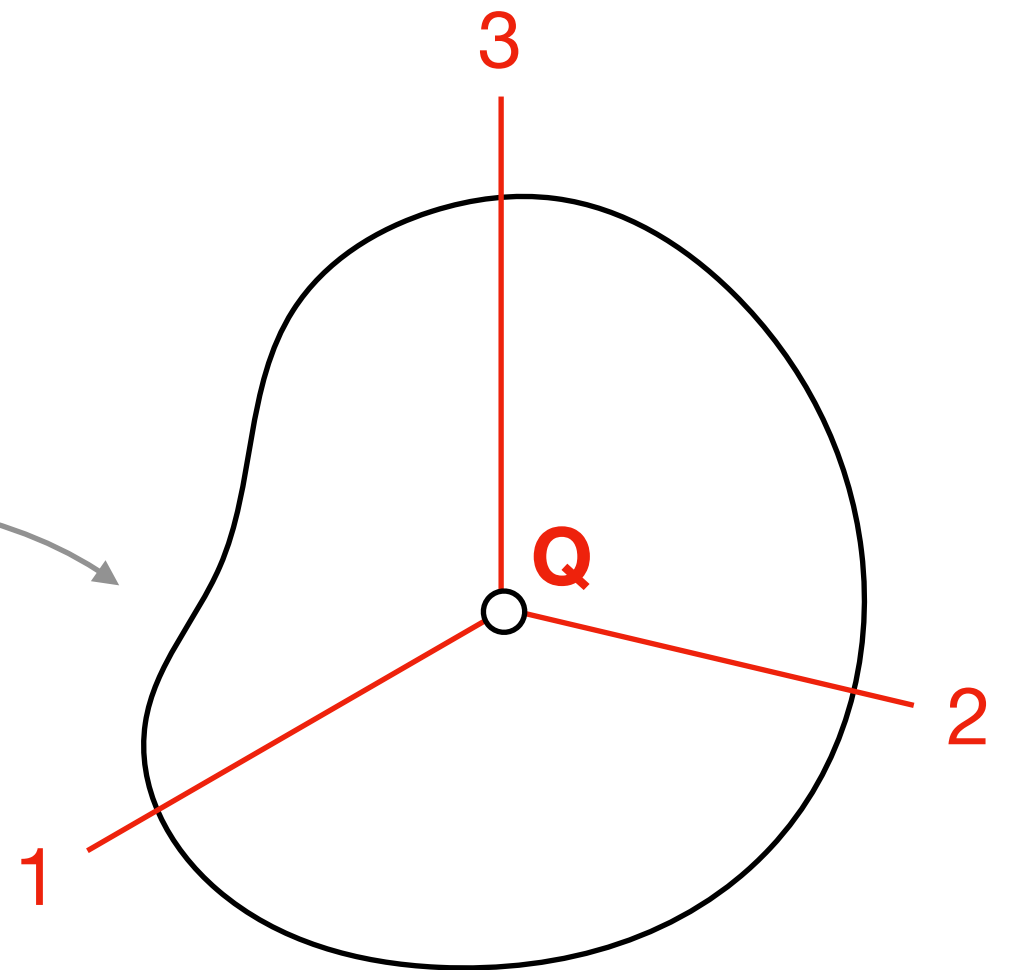


# Bases adients?

$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Farem servir bases  $\mathbf{B}$   
en les que el tensor sigui **constant**

Per exemple:  
 $\mathbf{B}$  fixa al sòlid



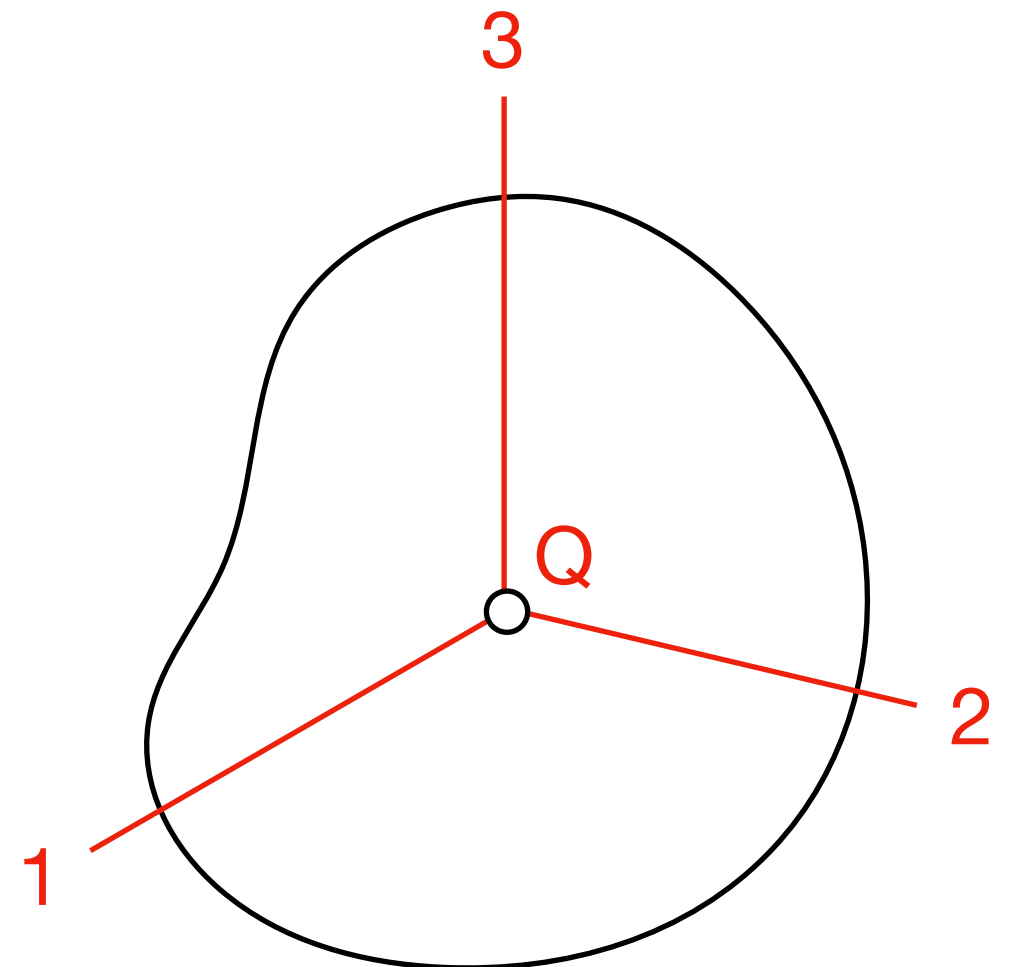


$$[\mathbf{I}(\mathbf{Q})]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11} & \mathbf{I}_{12} & \mathbf{I}_{13} \\ \mathbf{I}_{12} & \mathbf{I}_{22} & \mathbf{I}_{23} \\ \mathbf{I}_{13} & \mathbf{I}_{23} & \mathbf{I}_{33} \end{bmatrix}$$

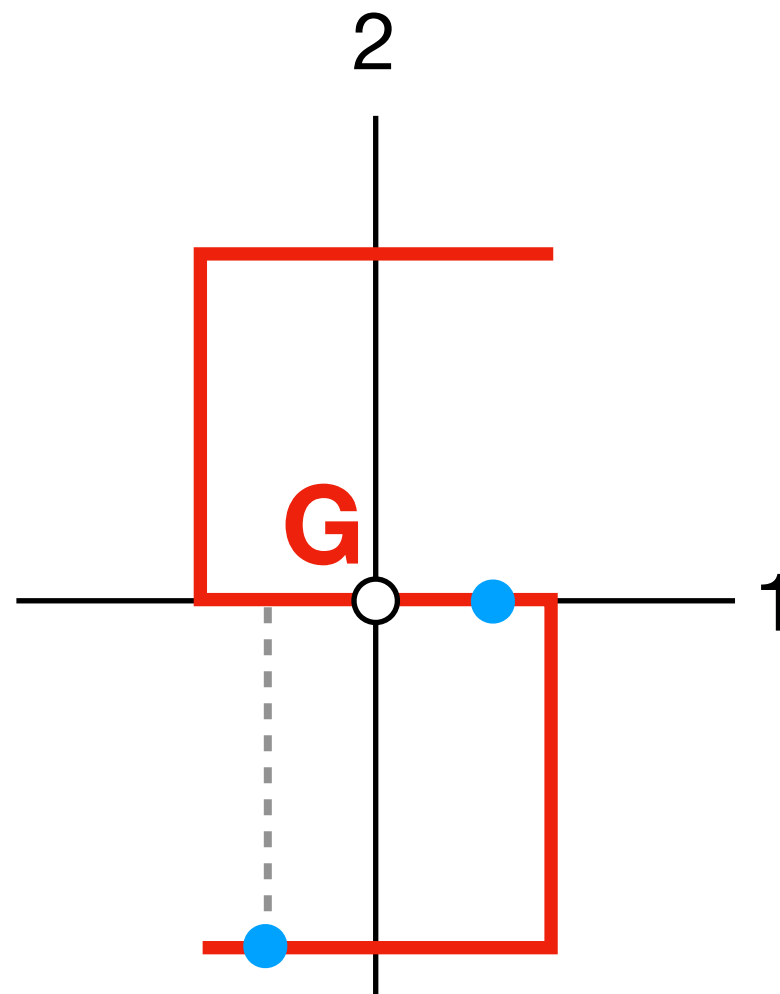
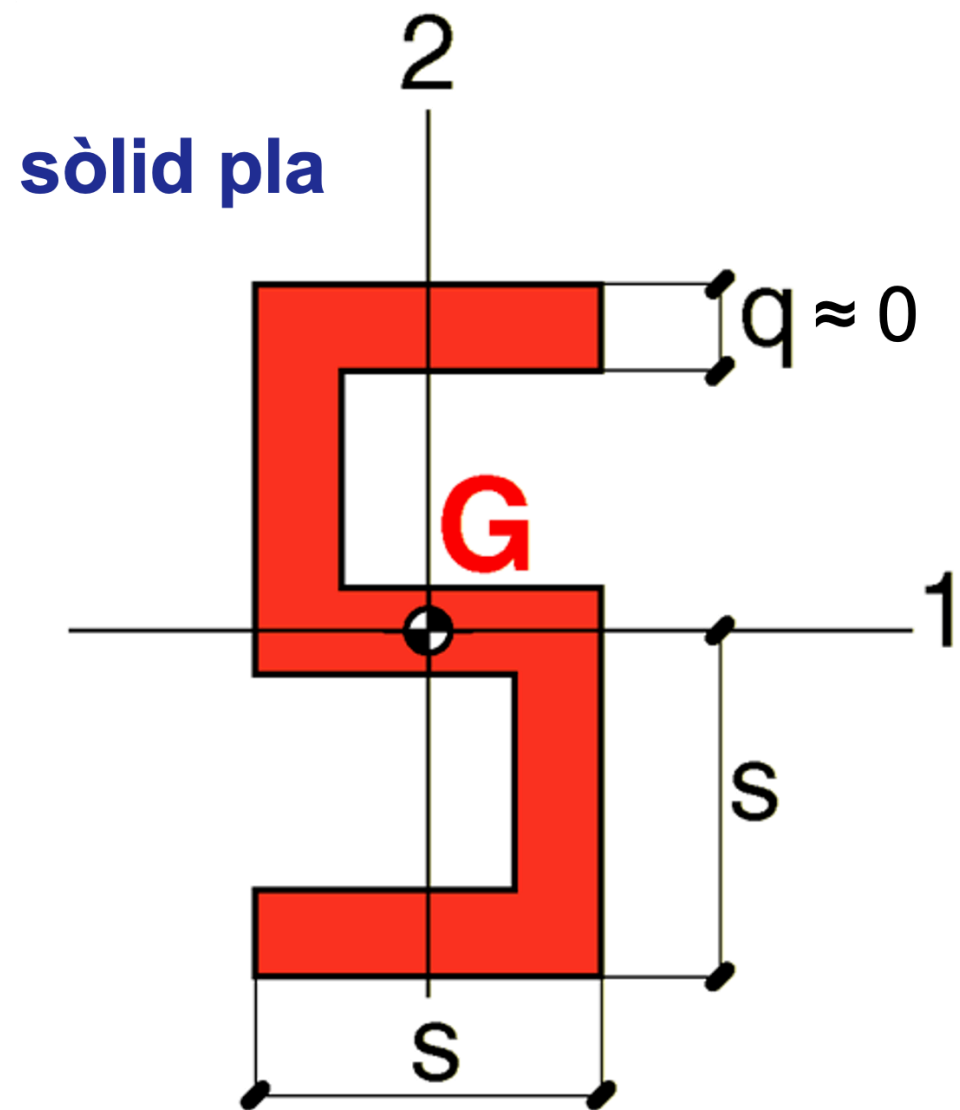
# Objectiu d'avui:

Aprendre a **avaluar-lo**

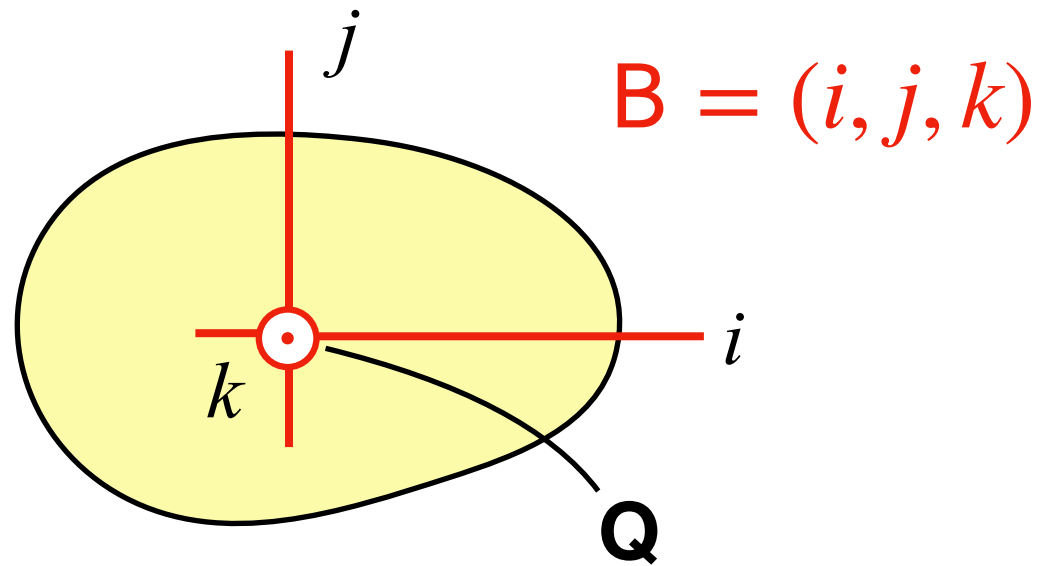
- Qualitativament
- Quantitativament



$$[\mathbf{I}(\mathbf{G})]_B ?$$



Per un sòlid pla



es compleix

1

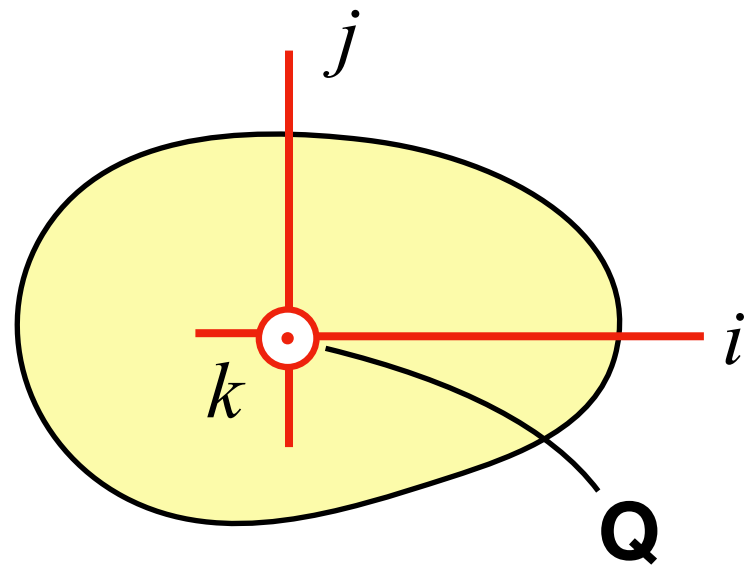
$\forall Q \in \text{sòlid}$ , la **dir.**  $\perp$  al sòlid és **DPI**

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{ii} & I_{ij} & 0 \\ I_{ij} & I_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{I_{ii} + I_{jj}}$

$I_{kk}$  és el **MPI** d'aquesta **DPI**

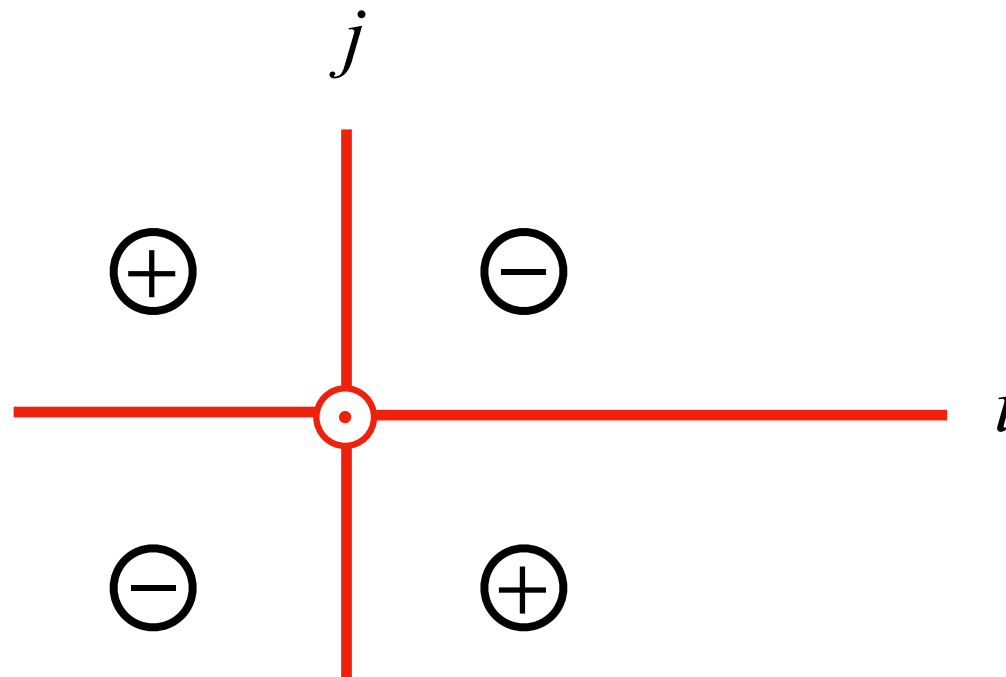
Per un sòlid pla



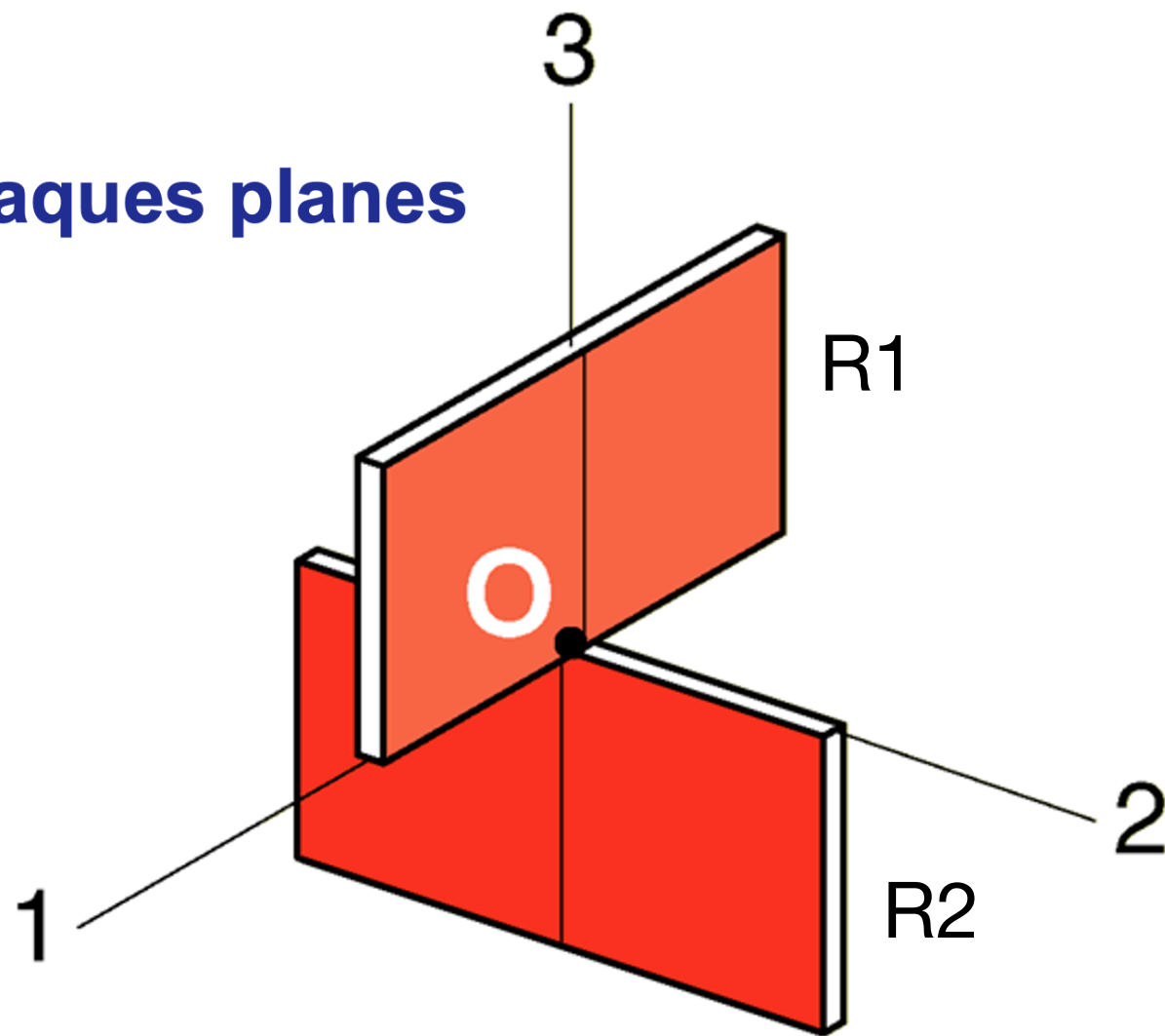
es compleix

2

Signe de la contribució dels  $dm$  a  $I_{ij}$

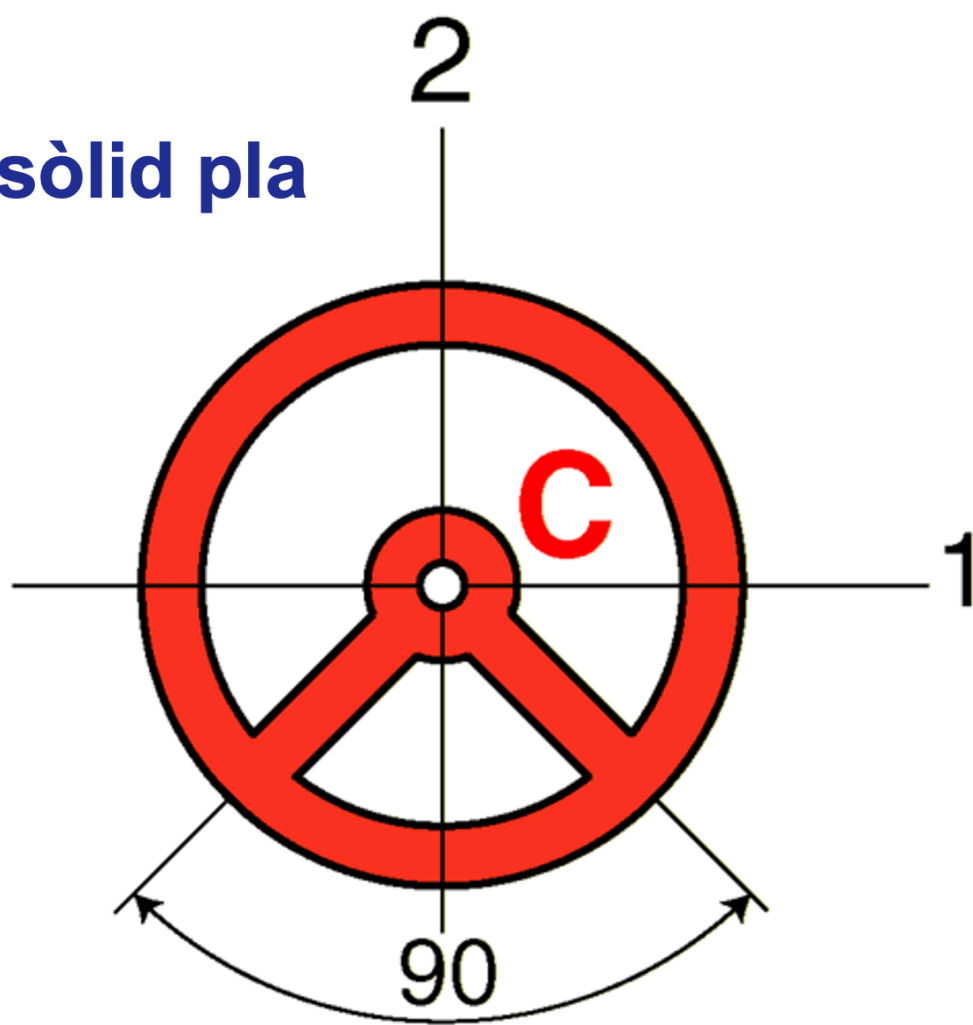


plaques planes



**[II(O)] ?**  
qualitatiu

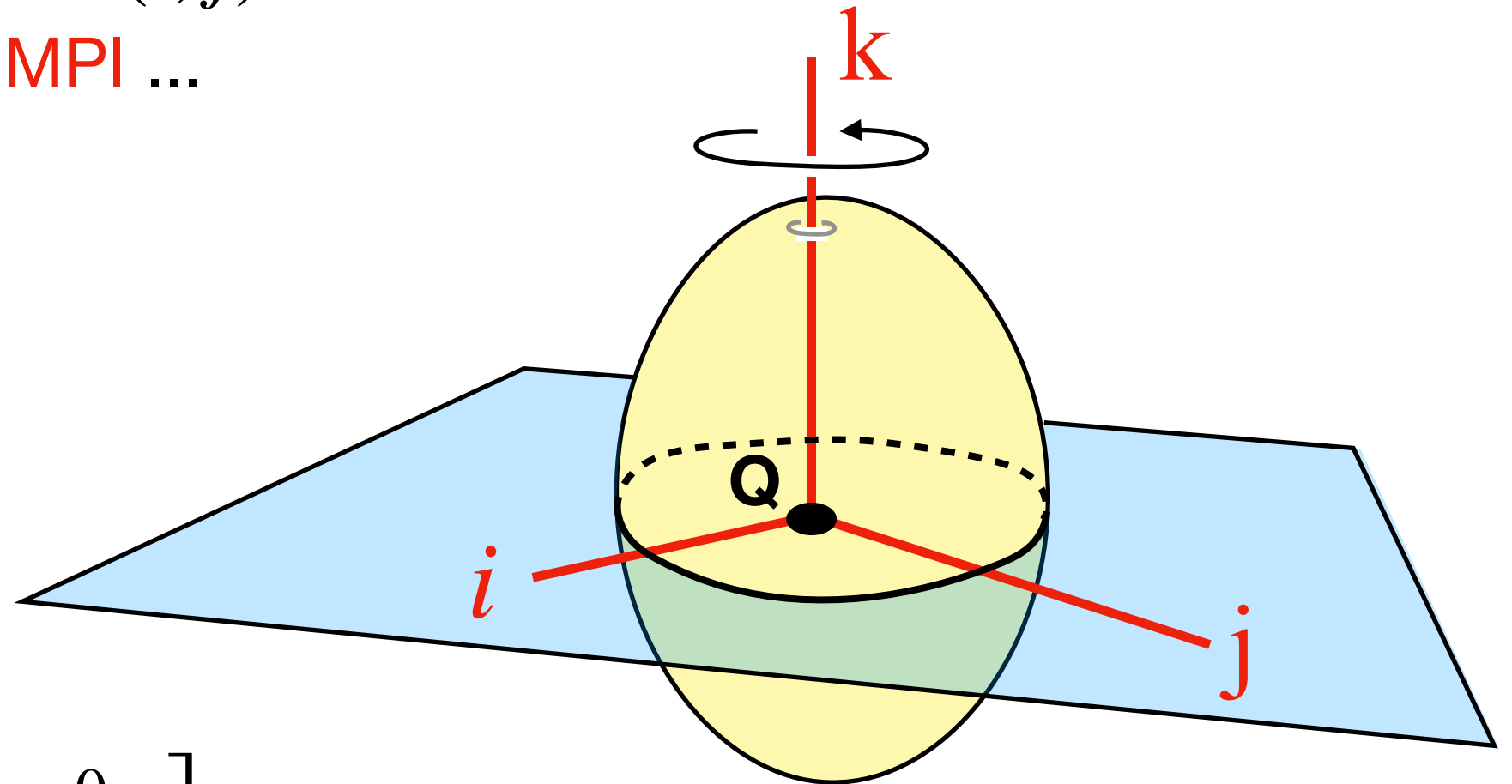
sòlid pla



**[II(C)] ?**  
qualitatiu

# "Rotor simètric per **Q**" en el pla $(i, j)$

Si per al punt **Q** les dirs.  $(i, j)$   
són DPI amb **mateix MPI** ...

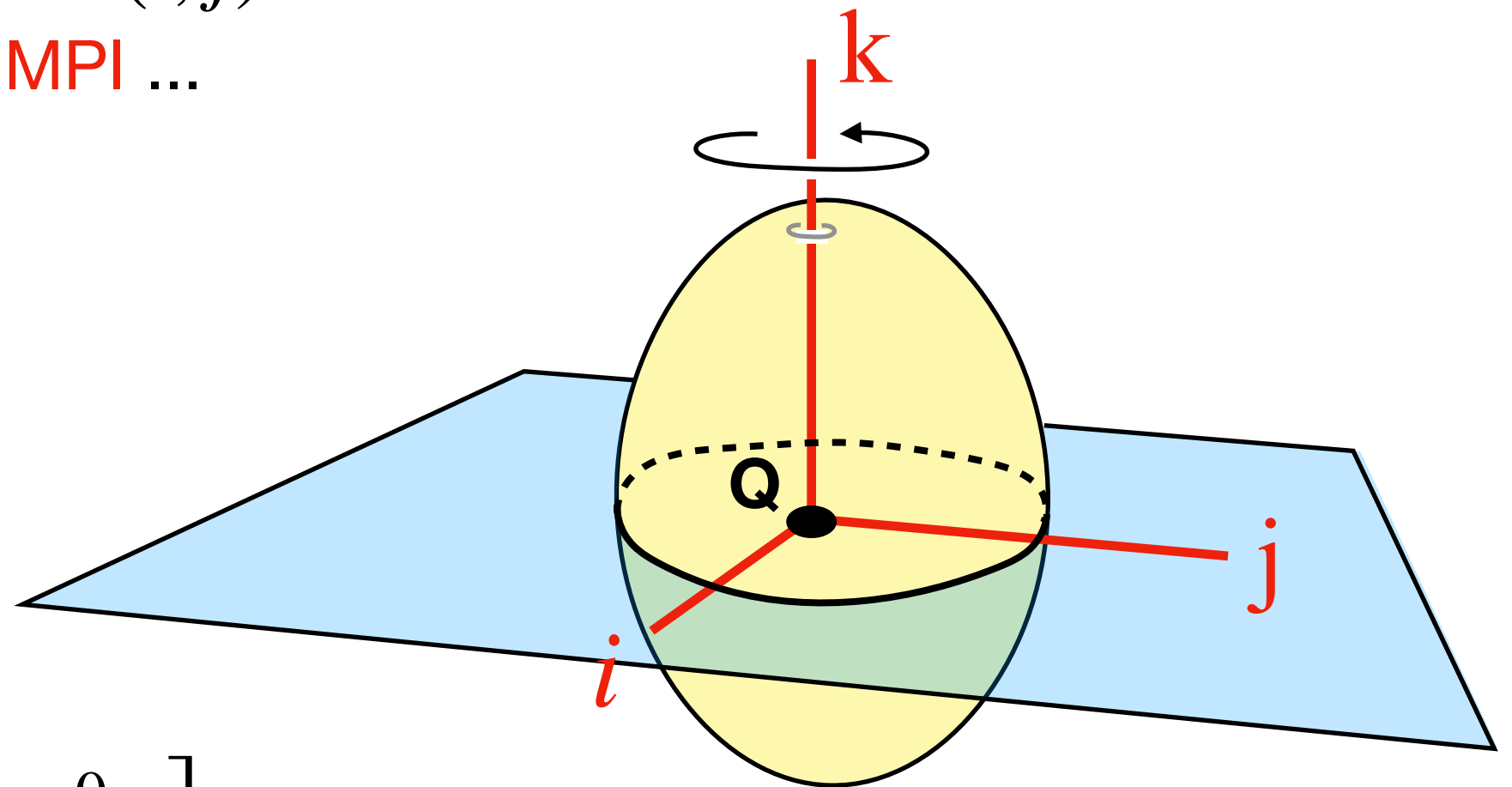


$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{kk} \end{bmatrix}}$$

no canvia si girem B avd dir. k

# "Rotor simètric per **Q**" en el pla $(i, j)$

Si per al punt **Q** les dirs.  $(i, j)$   
són DPI amb **mateix MPI** ...



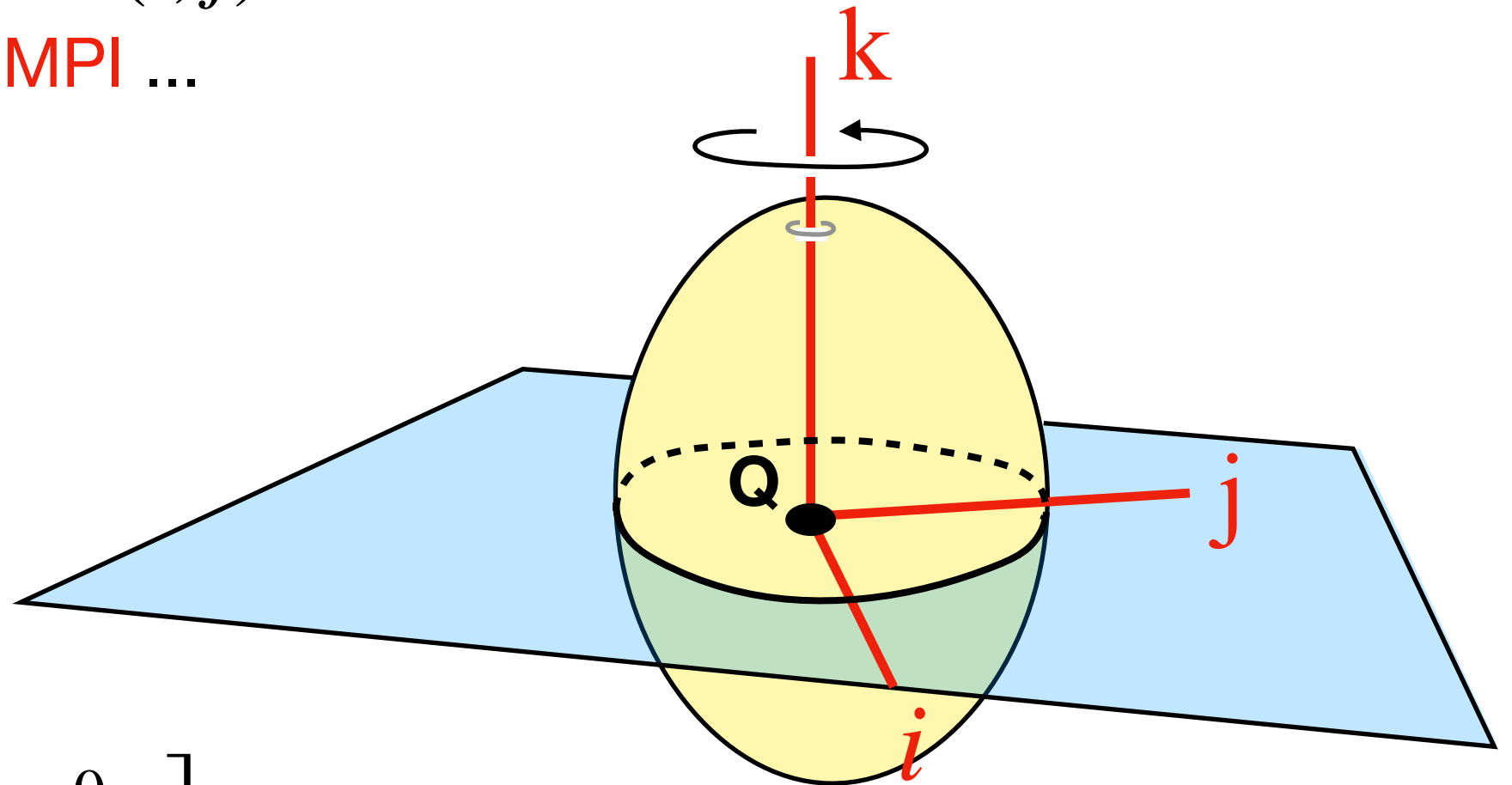
$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{kk} \end{bmatrix}}$$

no canvia si girem B avd dir. k



# "Rotor simètric per **Q**" en el pla $(i, j)$

Si per al punt **Q** les dirs.  $(i, j)$   
són DPI amb **mateix MPI** ...

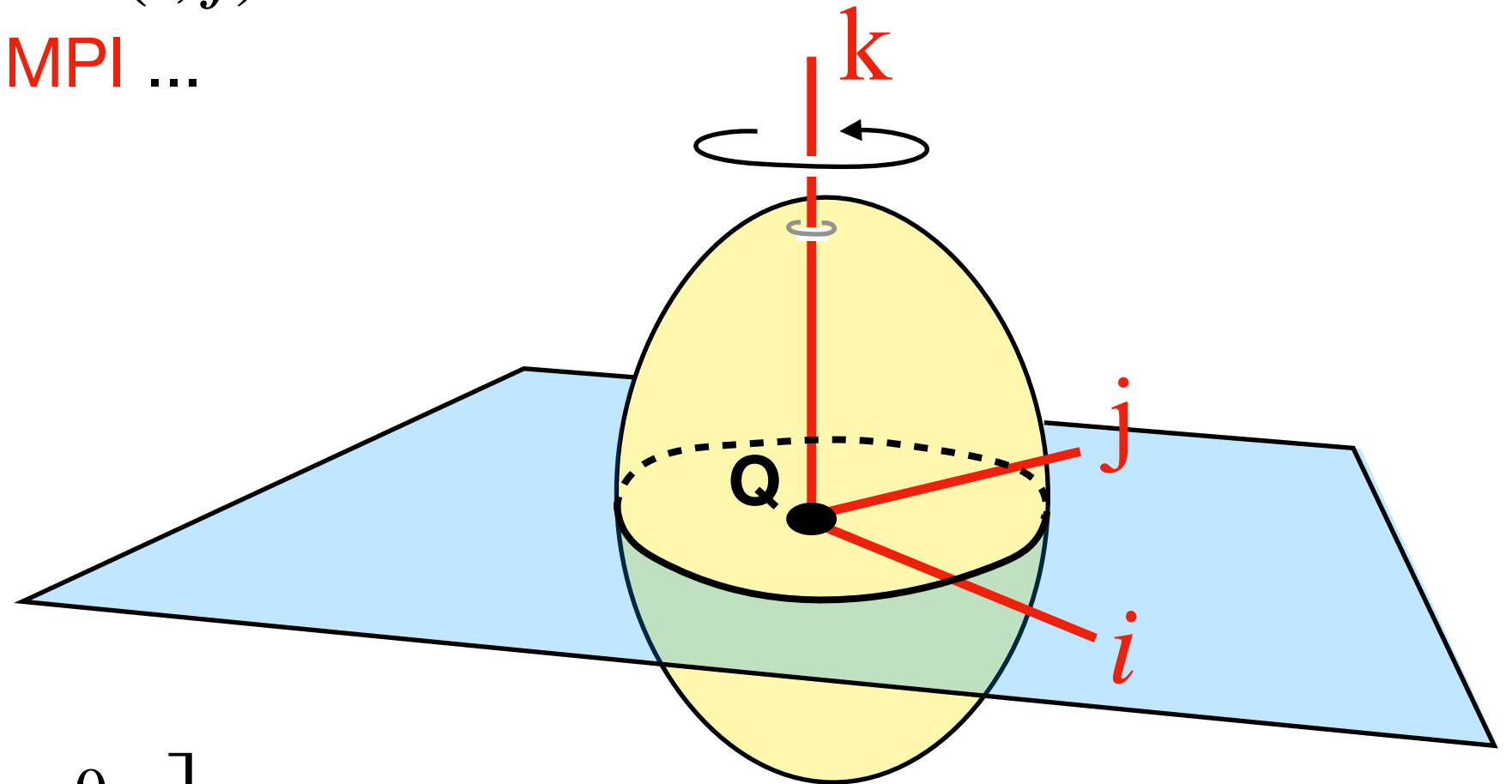


$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{kk} \end{bmatrix}}$$

no canvia si girem B avd dir. k

# "Rotor simètric per **Q**" en el pla $(i, j)$

Si per al punt **Q** les dirs.  $(i, j)$   
són DPI amb **mateix MPI** ...

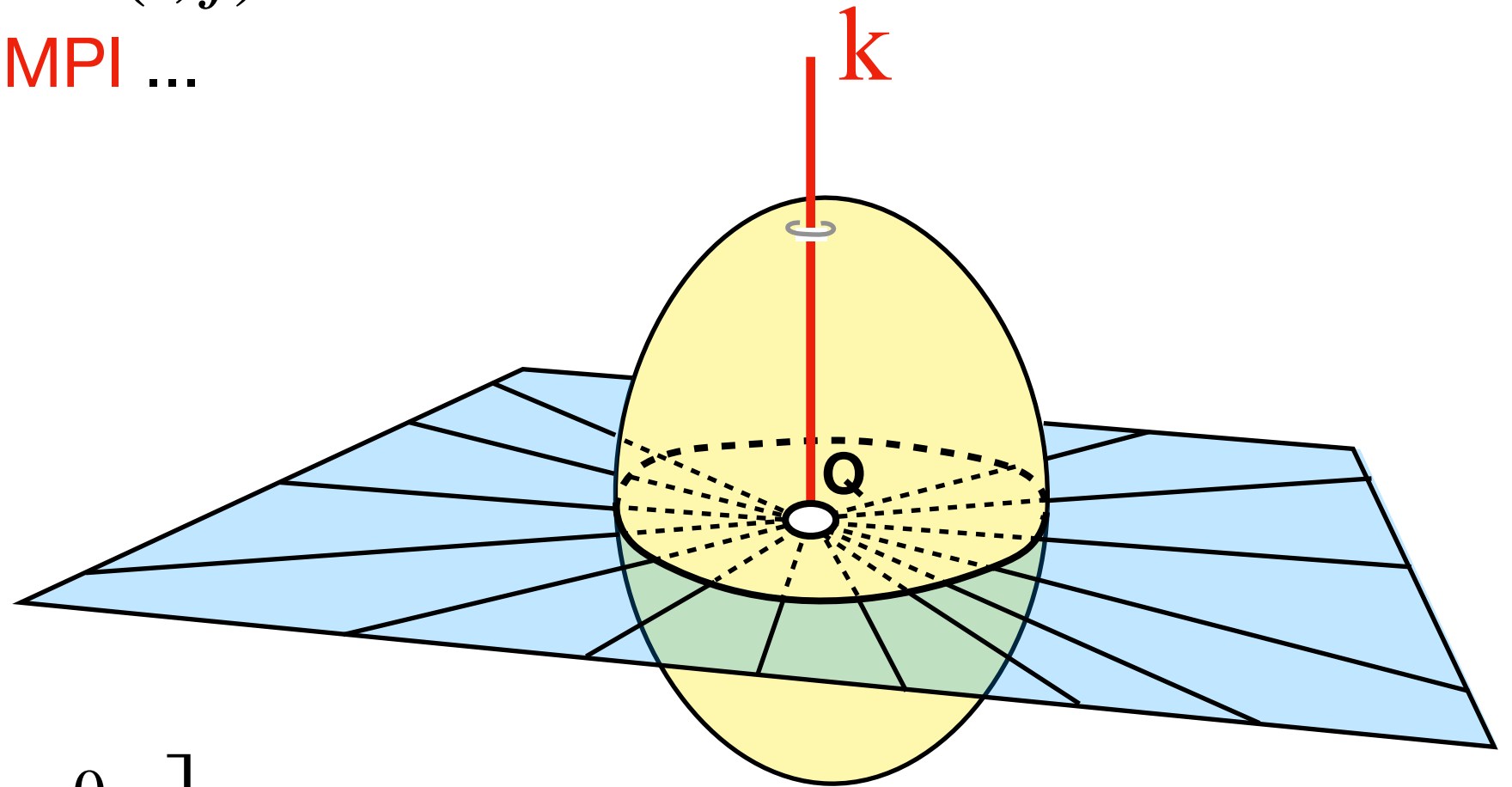


$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{kk} \end{bmatrix}}$$

no canvia si girem B avd dir. k

# "Rotor simètric per **Q**" en el pla $(i, j)$

Si per al punt **Q** les dirs.  $(i, j)$   
són DPI amb **mateix MPI** ...

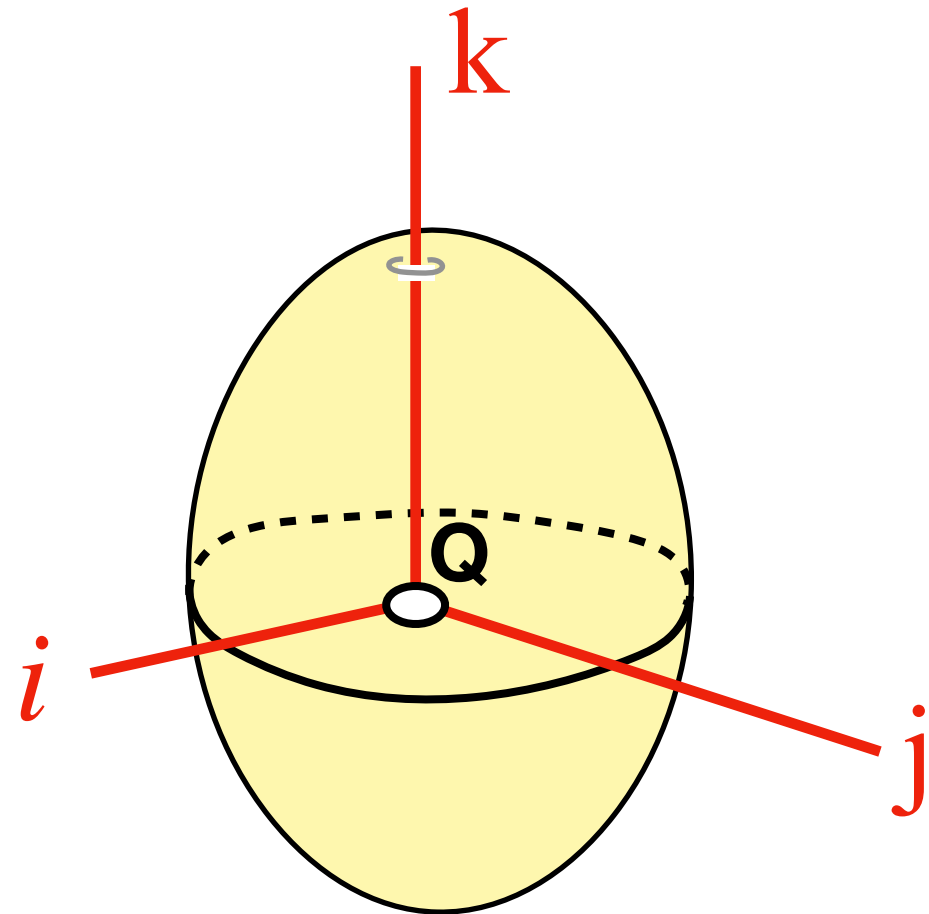


$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

Tota recta del pla  $(i, j)$  per **Q** és DPI  
(amb mom. inèrcia  $I$  al seu voltant)

# "Rotor esfèric per $\mathbf{Q}$ "

Si per al punt  $\mathbf{Q}$  les dirs.  $(i, j, k)$   
són DPI amb **mateix MPI** ...



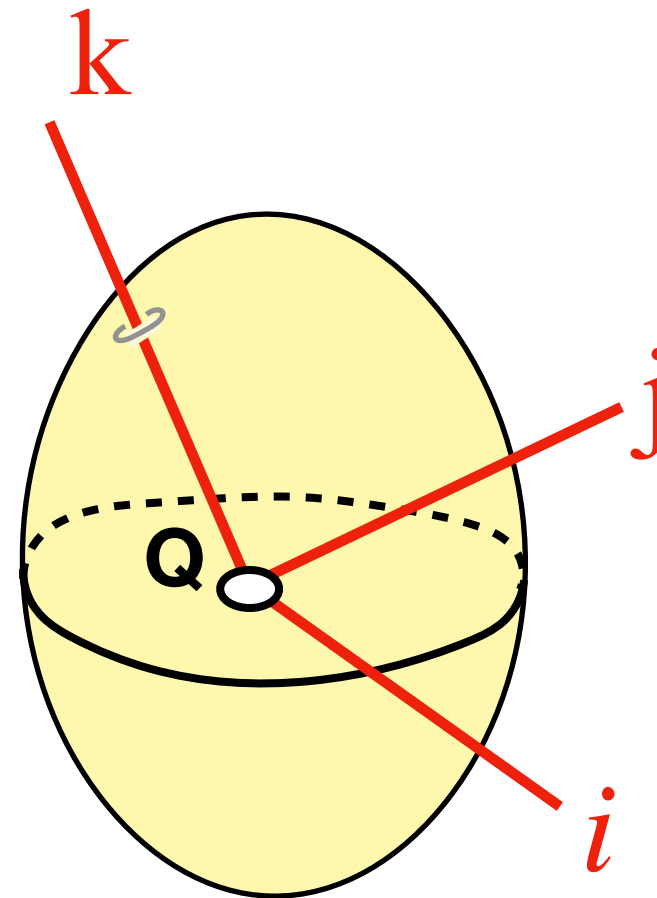
... el tensor a  $\mathbf{Q}$  té la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada

# "Rotor esfèric per $\mathbf{Q}$ "

Si per al punt  $\mathbf{Q}$  les dirs.  $(i, j, k)$   
són DPI amb **mateix MPI** ...



... el tensor a  $\mathbf{Q}$  té la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada

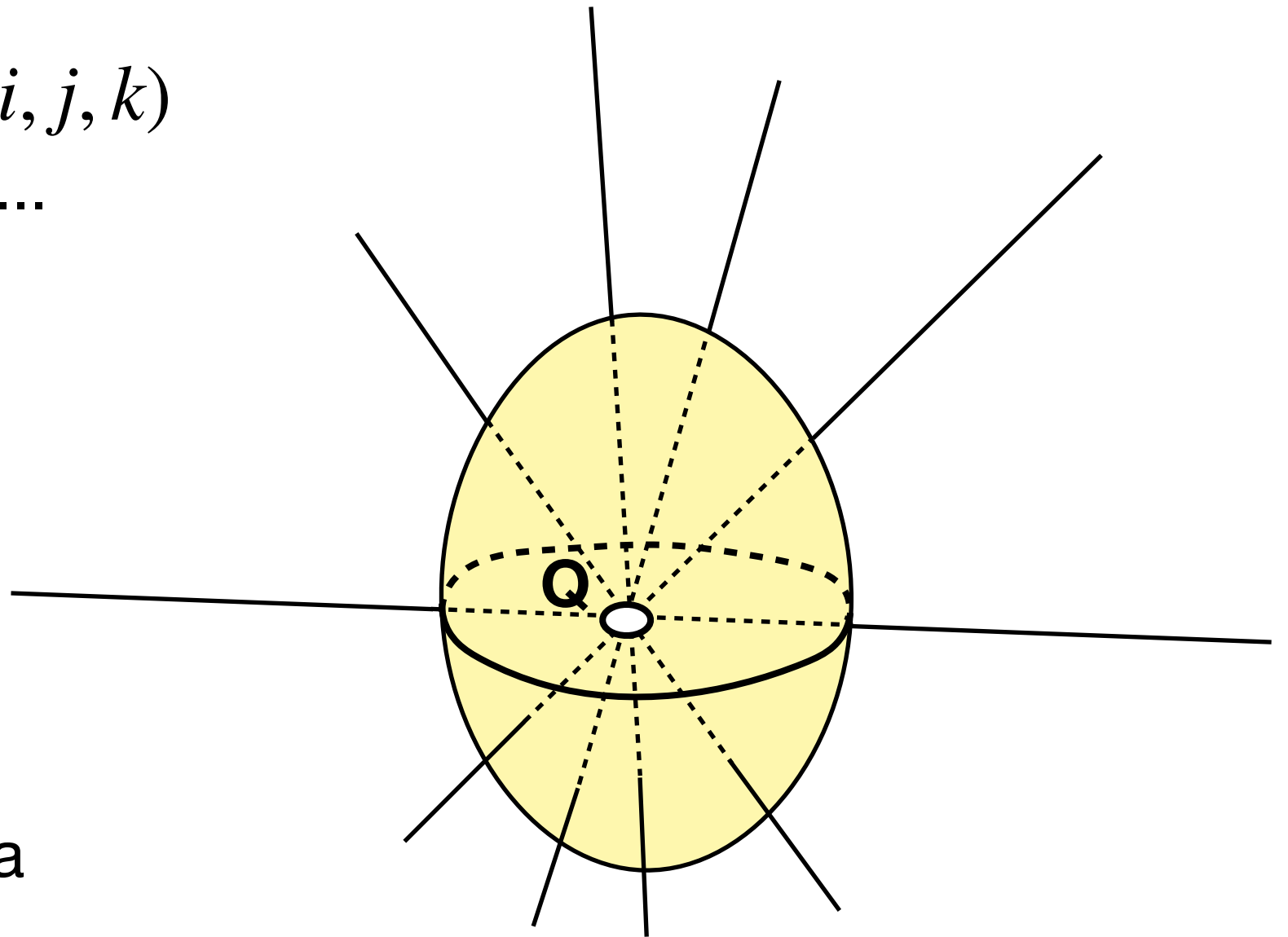
# "Rotor esfèric per $\mathbf{Q}$ "

Si per al punt  $\mathbf{Q}$  les dirs.  $(i, j, k)$   
són DPI amb **mateix MPI** ...

... el tensor a  $\mathbf{Q}$  té la forma

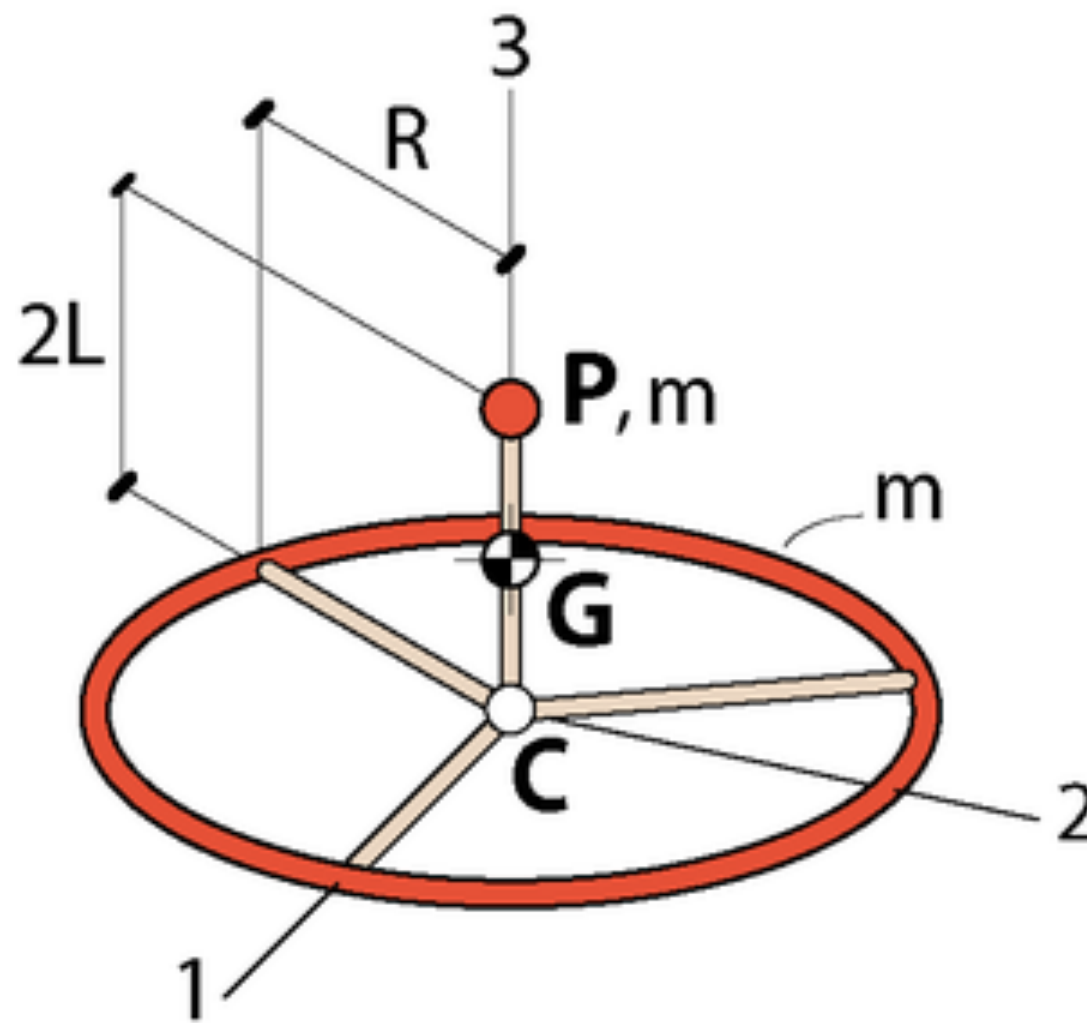
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada

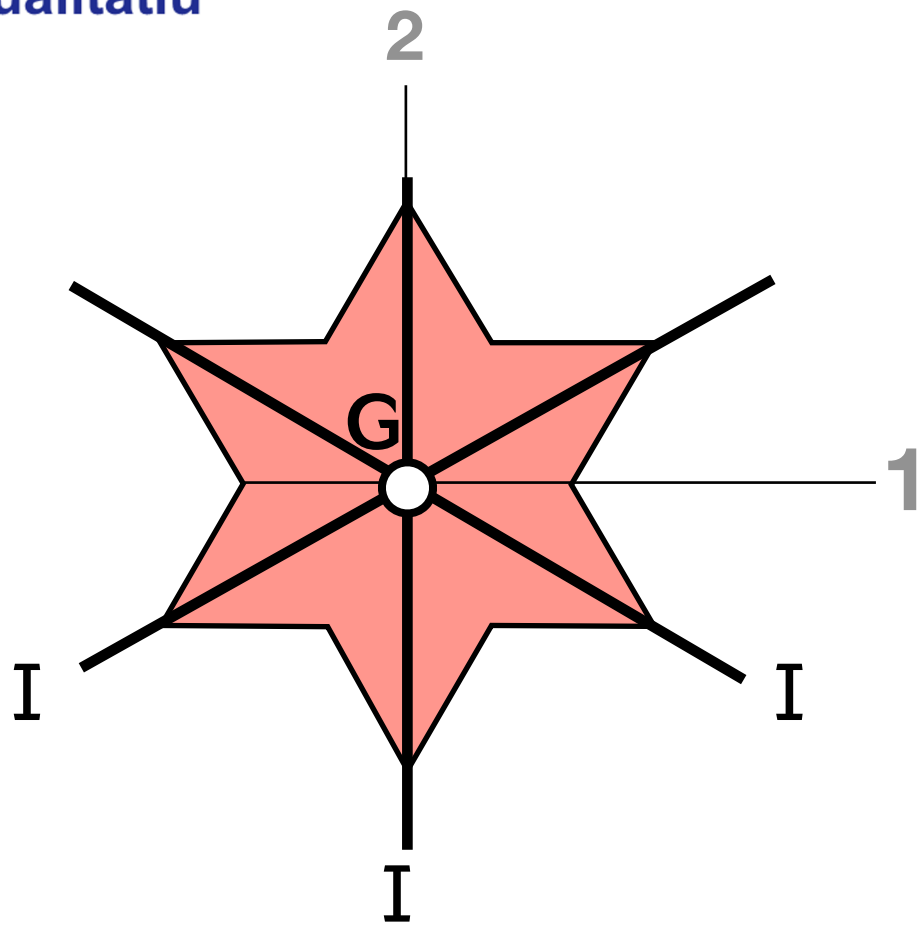


Qualsevol recta per  $\mathbf{Q}$  és DPI  
( amb moment inèrcia  $\mathbf{I}$  )

## Exemple D5.9 - Wikimec



**[I(G)] ?**  
qualitatiu



Sòlid pla i eix 2 de simetria

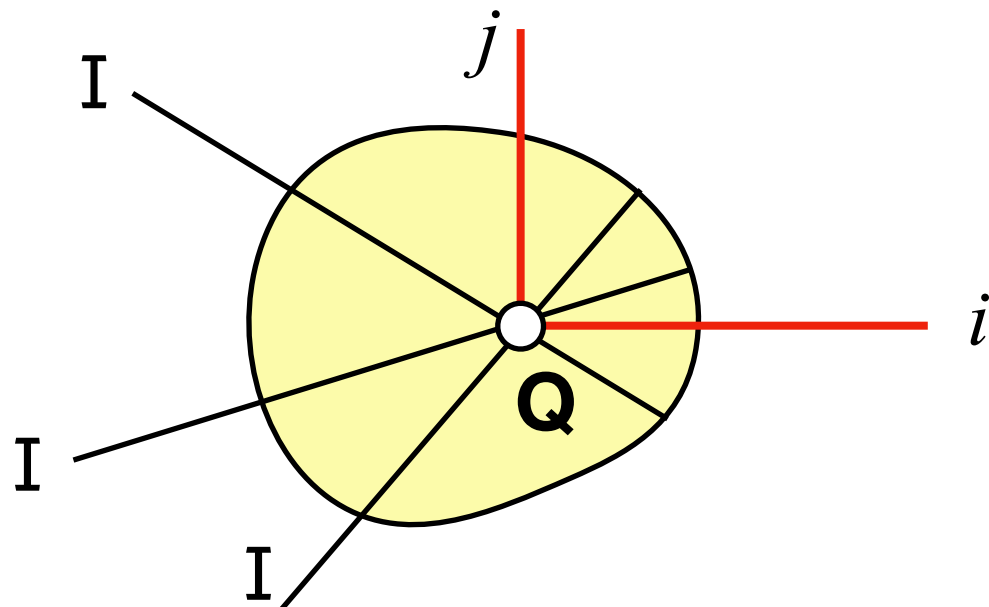
$$[I(G)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

$I_{11}, I_{22}$  ?

3 moments en pla (1,2) iguals  $\Rightarrow$  **Rotor simètric a G**  
per aquest pla!

$$[I(G)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

Si **3 o més** moments d'inèrcia resp. eixos d'un **mateix pla** (i,j) són iguals ...



... el sòlid és **rotor simètric a Q**  
per aquest pla



**$[\mathbb{I}(\mathbf{O})]$  ?**  
 qualitatiu  
 quantitativ

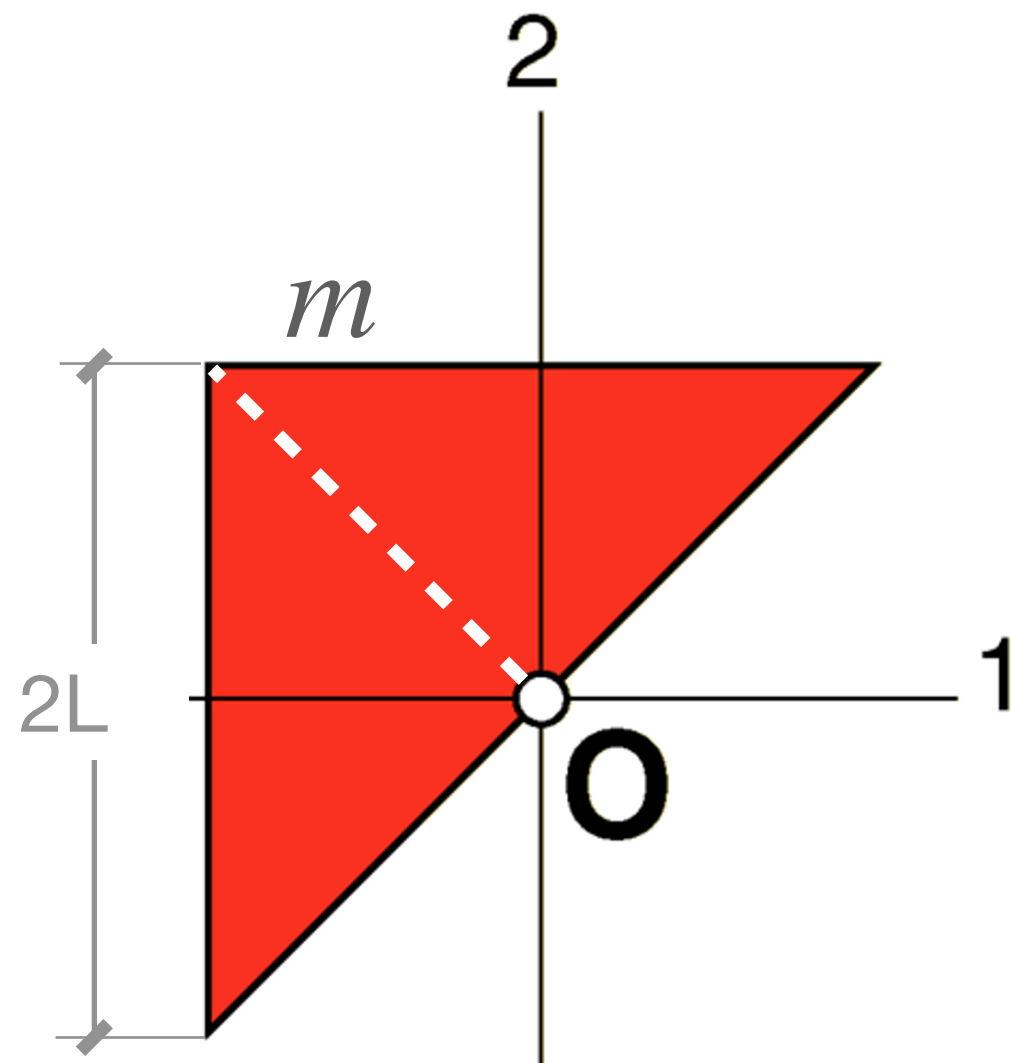


Fig. plana  $\implies$  3 és DPI

$I_{12}$ ?  $\leftarrow$  És zero!

$$[\mathbb{I}(\mathbf{O})]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

**$[\mathbb{I}(\mathbf{O})]$  ?**  
 qualitatiu  
 quantitatiu

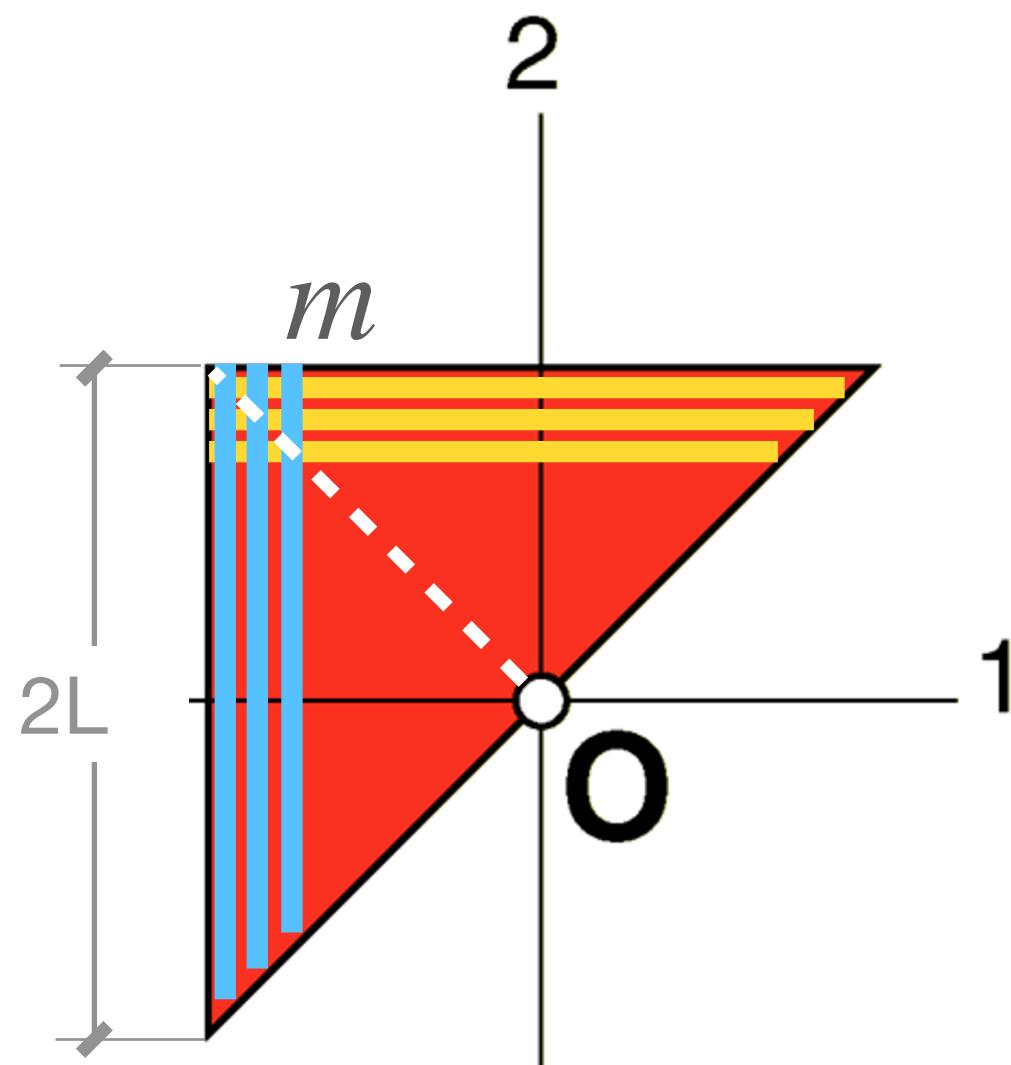


Fig. plana  $\implies$  3 és DPI

$I_{12}$  ?  $\leftarrow$  És zero!

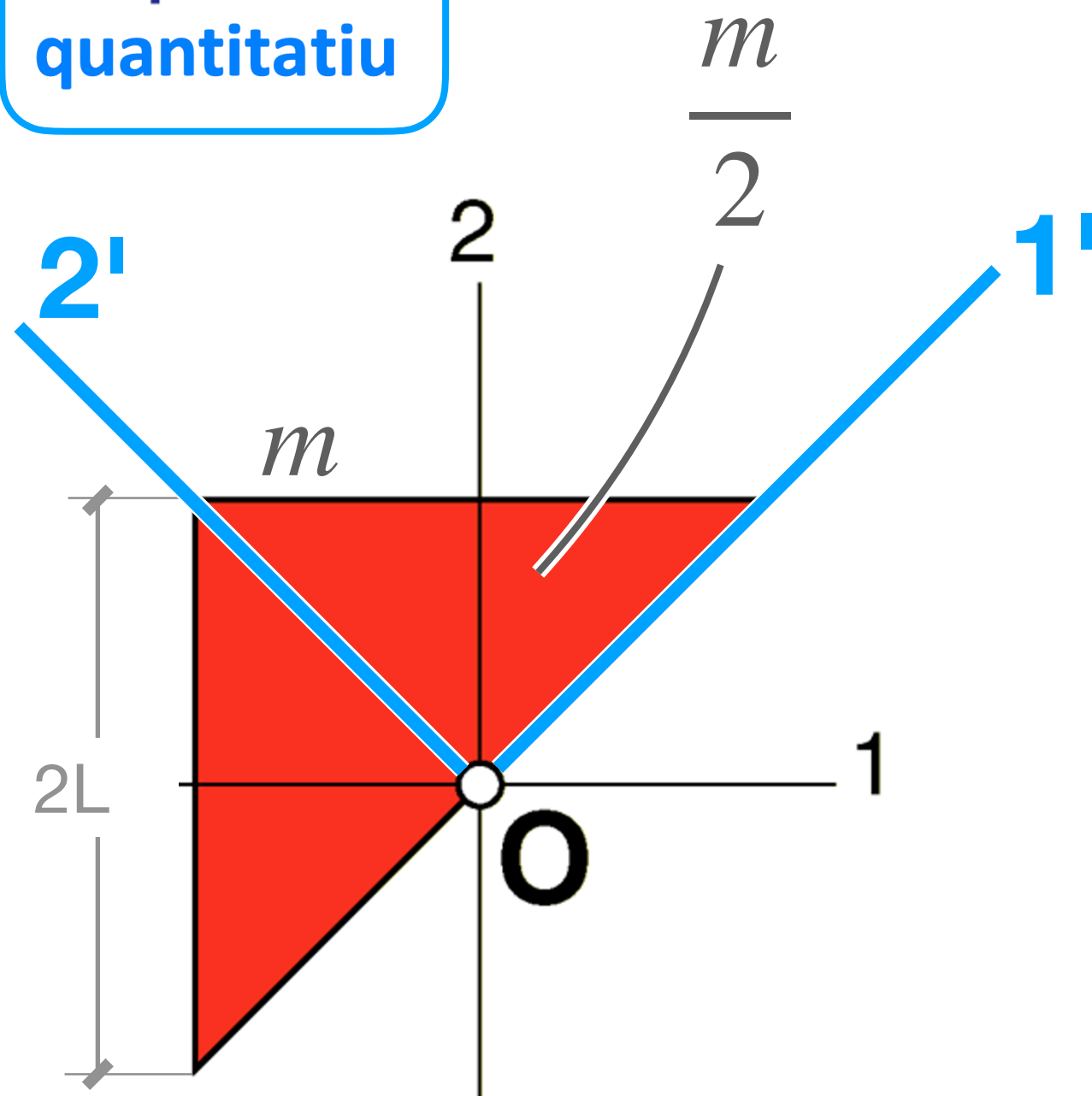
$$[\mathbb{I}(\mathbf{O})]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

$I_{11}, I_{22}$  ?  $\leftarrow$  Són iguals!

$$[\mathbb{I}(\mathbf{O})]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

Rotor simètric a **O**

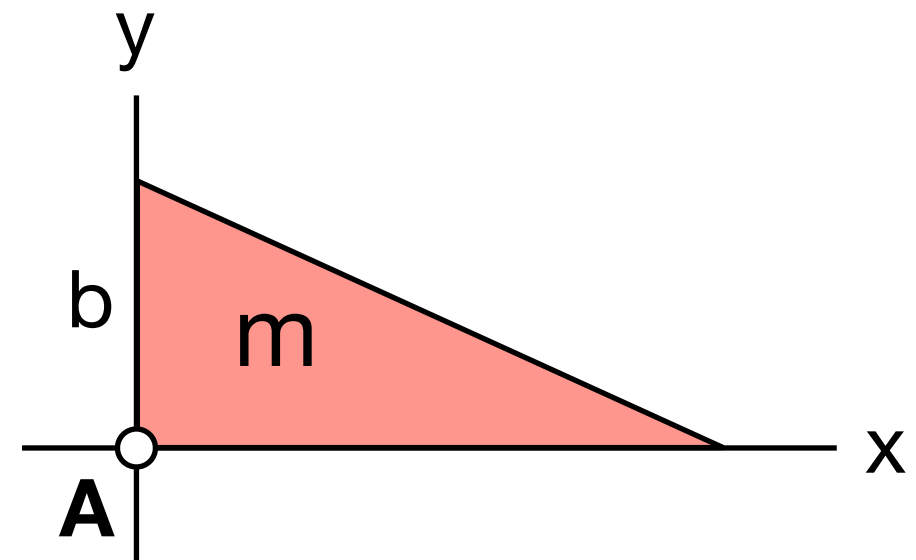
**[II(O)] ?**  
qualitativ  
quantitativ



$$[\mathbf{II}(\mathbf{O})]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

Rotor simètric a **O**

Taula



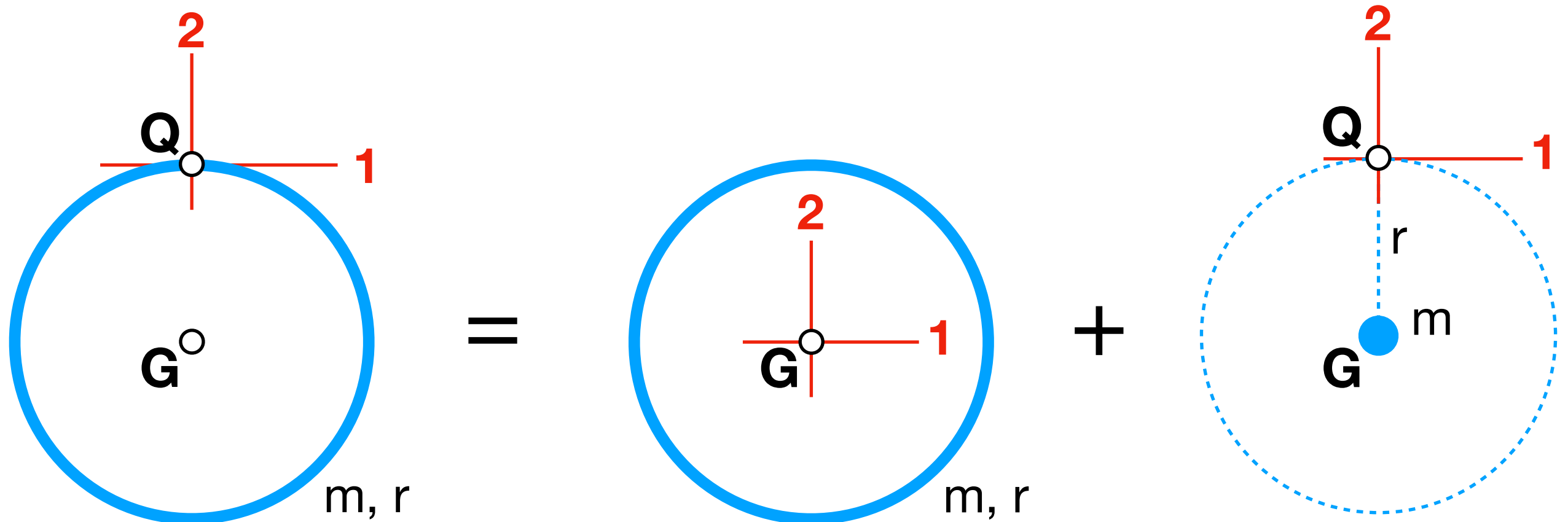
$$I_{xx}(\mathbf{A}) = \frac{1}{6}mb^2$$

$$I = 2 \left[ \frac{1}{6} \frac{m}{2} \left( \frac{2L}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \frac{mL^2}{3}$$

# Teorema de Steiner

$$\underbrace{\mathbb{I}(\mathbf{Q})}_{\text{Tensor a } \mathbf{Q}} = \underbrace{\mathbb{I}(\mathbf{G})}_{\text{Tensor a } \mathbf{G}} + \underbrace{\mathbb{I}^{\oplus}(\mathbf{Q})}_{\text{Tensor a } \mathbf{Q} \text{ de tota la massa concentrada a } \mathbf{G}}$$

Exm: anell homogeni  
 $[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_{\mathbf{B}}$  ?



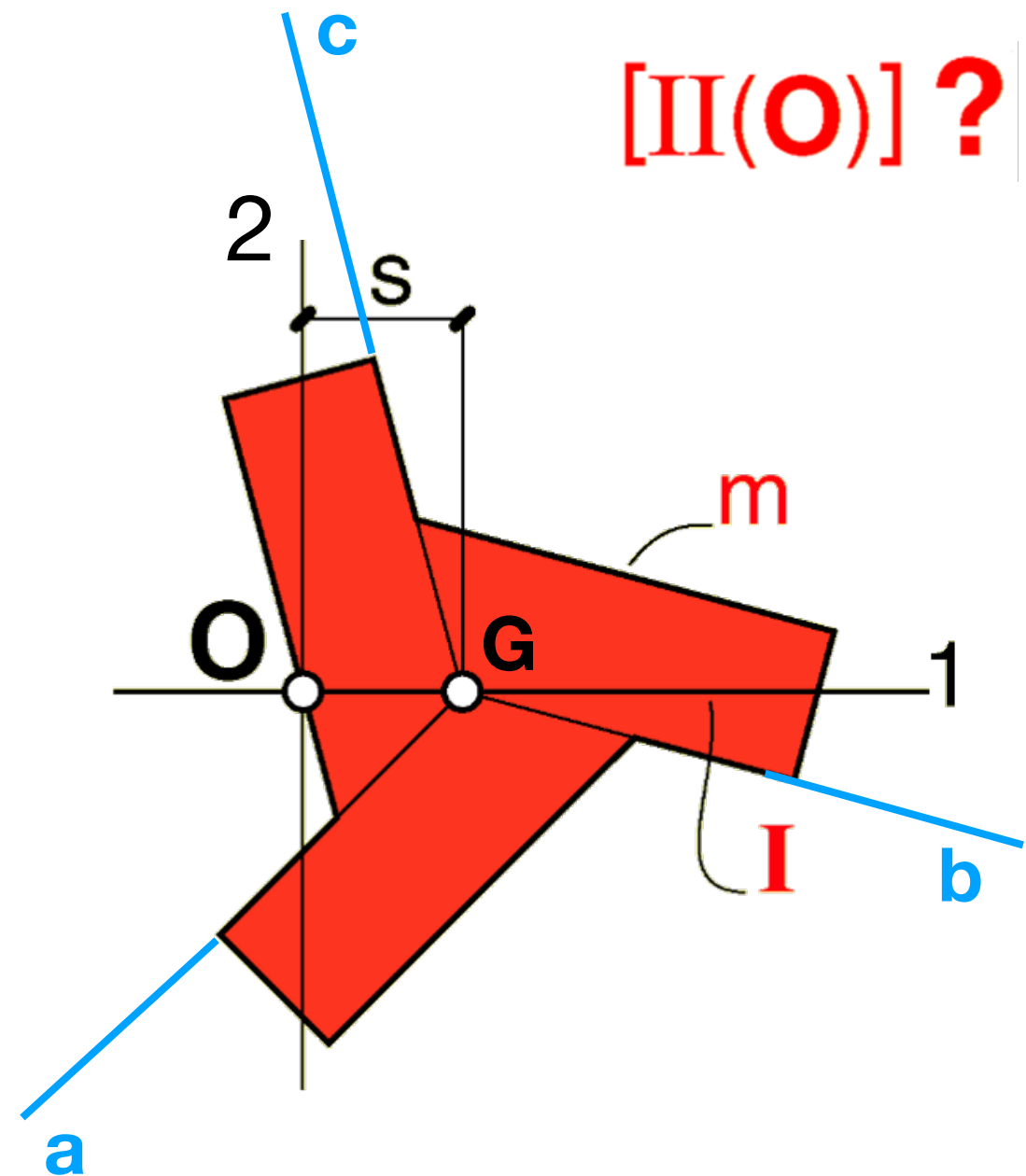
## Tensor a G és fàcil:

Sòlid pla  $\implies$  3 és DPI

$$\underline{I}_{aa} = \underline{I}_{bb} = \underline{I}_{cc} = \underline{I}$$

rotor simètric per a G

$$[\underline{I}(G)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \underline{I} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{I} & 0 \\ 0 & 0 & 2\underline{I} \end{bmatrix}$$

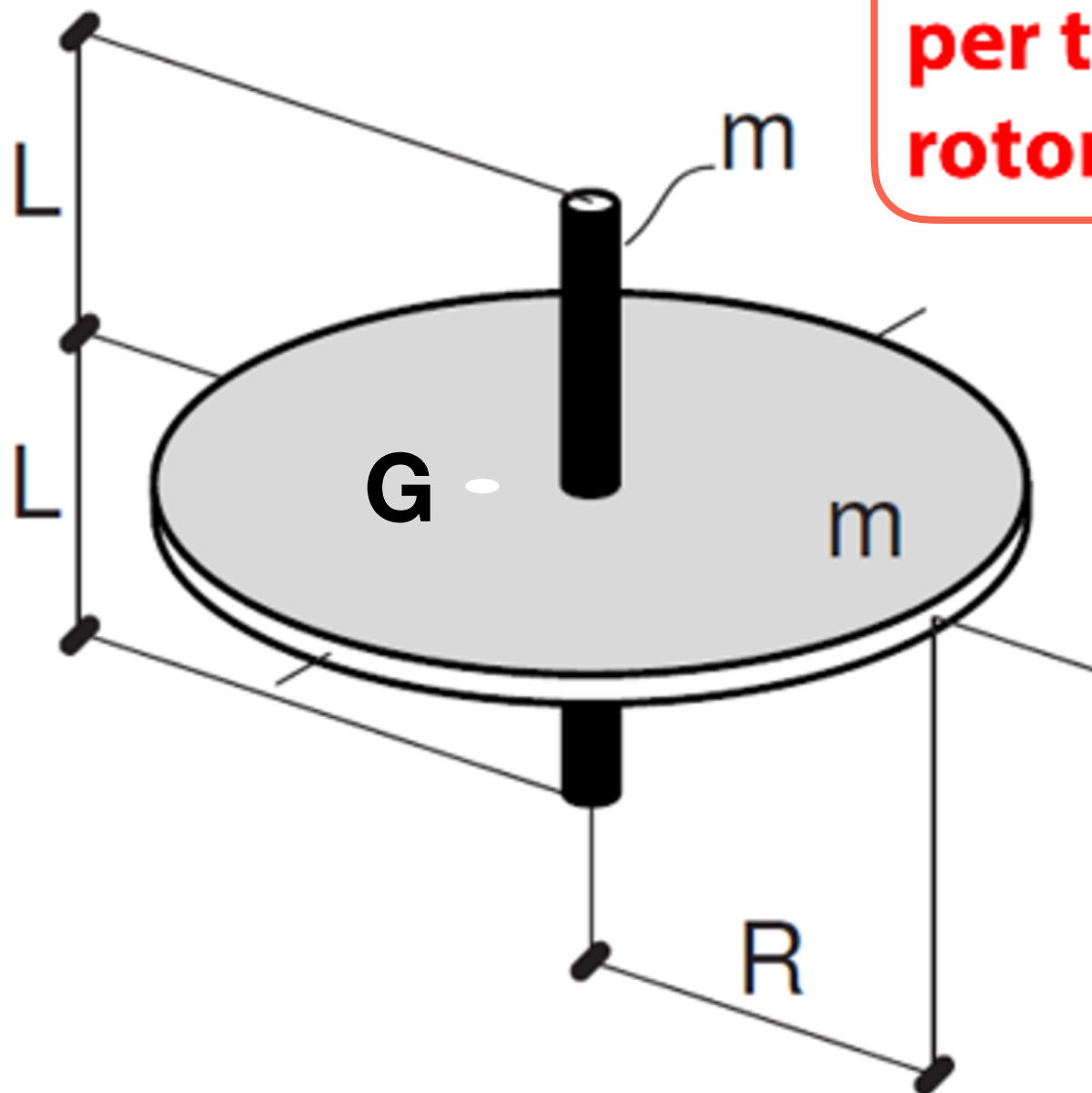


$[\underline{I}(O)]?$

## Canvi a O via Steiner:

$$[\underline{I}(O)]_{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{I} & & \\ & \underline{I} & \\ & & 2\underline{I} \end{bmatrix}}_{\underline{I}(G)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & \\ & ms^2 & \\ & & ms^2 \end{bmatrix}}_{\underline{I}^{\oplus}(O)}$$

**Relació entre  $L$  i  $R$   
per tal que sigui  
rotor esfèric a  $G$ ?**



$\mathbf{II}(\mathbf{O})?$

