

11P

Versió 1.0

Teoremes vectorials I

Exercicis de càlcul del moment cinètic

Problema 3D

Lluís Ros

<https://lluisros.github.io/mecanica>

Recordatori de teoria

RGal = Referència Galileana des de la que estudiem el moviment del sistema (típicament és el terra T).

Teorema de la Quantitat de Moviment (TQM):

$$\sum_{\text{sist}} \bar{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = m_{\text{sist}} \bar{\mathbf{a}}_{\text{RGal}} (\mathbf{G}_{\text{sist}}) = \sum_i m_i \bar{\mathbf{a}}_{\text{RGal}} (\mathbf{G}_i)$$

Suma per a tots els sòlids

Sumatori de totes les forces exteriorment aplicades sobre el sistema

Massa del sistema

Acceleració del centre d'inèrcia del sistema resp. RGal

Massa de cada sòlid

Acceleració del centre d'inèrcia del sòlid

Teorema del Moment Cinètic (TMC):

$$\sum_{\text{sist}} \bar{\mathbf{M}}_{\text{ext}} (\mathbf{Q}) - \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{G}_{\text{sist}} \times m_{\text{sist}} \bar{\mathbf{a}}_{\text{RGal}} (\mathbf{Q}) = \dot{\bar{\mathbf{H}}}_{\text{RTQ}} (\mathbf{Q})$$

Sumatori de tots els moments respecte de \mathbf{Q} exteriorment aplicats sobre el sistema

Vector des de \mathbf{Q} al centre d'inèrcia del sistema (\mathbf{G}_{sist})

Acceleració de \mathbf{Q} respecte de la RGal

Derivada temporal del moment cinètic del sistema al punt \mathbf{Q} (o "respecte de \mathbf{Q} "). És una derivada feta des de RGal.

Càcul del moment cinètic del sistema

Moment cinètic:

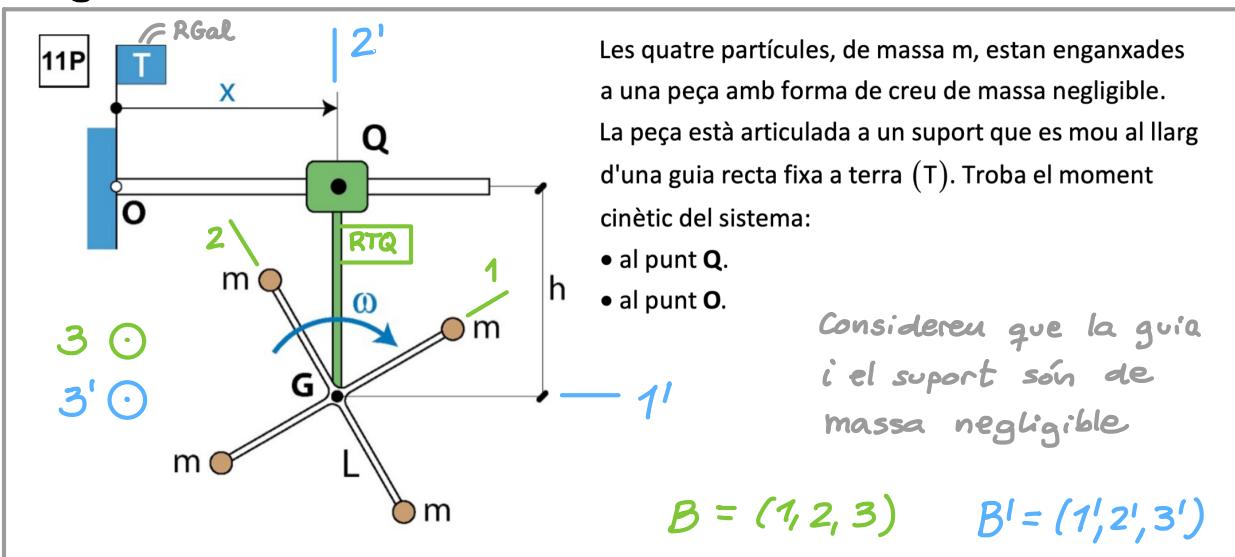
- d'una partícula:

$$\bar{\mathbf{H}}_{RTQ}^P(\mathbf{Q}) = \bar{\mathbf{QP}} \times m_P \bar{\mathbf{v}}_{RTQ}(\mathbf{P})$$
- d'un sòlid rígid S:

$$\begin{cases} \text{Si } \mathbf{Q} \in \text{sòlid } S: \bar{\mathbf{H}}_{RTQ}^S(\mathbf{Q}) = II(\mathbf{Q}) \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{RTQ}^S = II(\mathbf{Q}) \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{RGal}^S \\ \text{Si } \mathbf{Q} \notin \text{sòlid } S: \bar{\mathbf{H}}_{RTQ}^S(\mathbf{Q}) = \bar{\mathbf{H}}_{RTG}^S(\mathbf{G}) + \bar{\mathbf{H}}_{RTQ}^\oplus(\mathbf{Q}) = \\ = \bar{\mathbf{H}}_{RTG}^S(\mathbf{G}) + \bar{\mathbf{QG}} \times m \bar{\mathbf{v}}_{RTQ}(\mathbf{G}) \end{cases}$$
- d'un sistema de sòlids rígids:

$$\bar{\mathbf{H}}_{RTQ}^{sist}(\mathbf{Q}) = \sum_i \bar{\mathbf{H}}_{RTQ}^i(\mathbf{Q})$$

Q5 gener 2024



Guia i suport són de massa neglorable \Rightarrow L'única contribució al moment cinètic del sistema és la de les partícules de massa m de la creu. Tractem aquesta creu com un sòlid rígid S .

Com que $Q \notin S$ i O tampoc, usarem la descomp. baricèntrica en ambdós casos

$$\bar{H}_{RTQ}(Q)$$

Moment cinètic al punt Q de tota la massa concentrada a G

$$\bar{H}_{RTQ}(Q) = \bar{H}_{RTG}(G) + \underbrace{\bar{Q}G \times 4m \cdot \bar{v}_{RTQ}(G)}_{\bar{o}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4mL^2\omega \end{Bmatrix} = (\otimes 4mL^2\omega)$$

$$\bar{H}_{RTG}(G) = \bar{I}(G) \cdot \bar{\omega}_{RTG}^{creu}$$

$$\left\{ \bar{H}_{RTG}(G) \right\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4mL^2\omega \end{Bmatrix}$$

En base B' surt igual pq el sòlid és rotar simètric a G pel pla (1,2).

Fig. plana \Rightarrow 3 és DPI

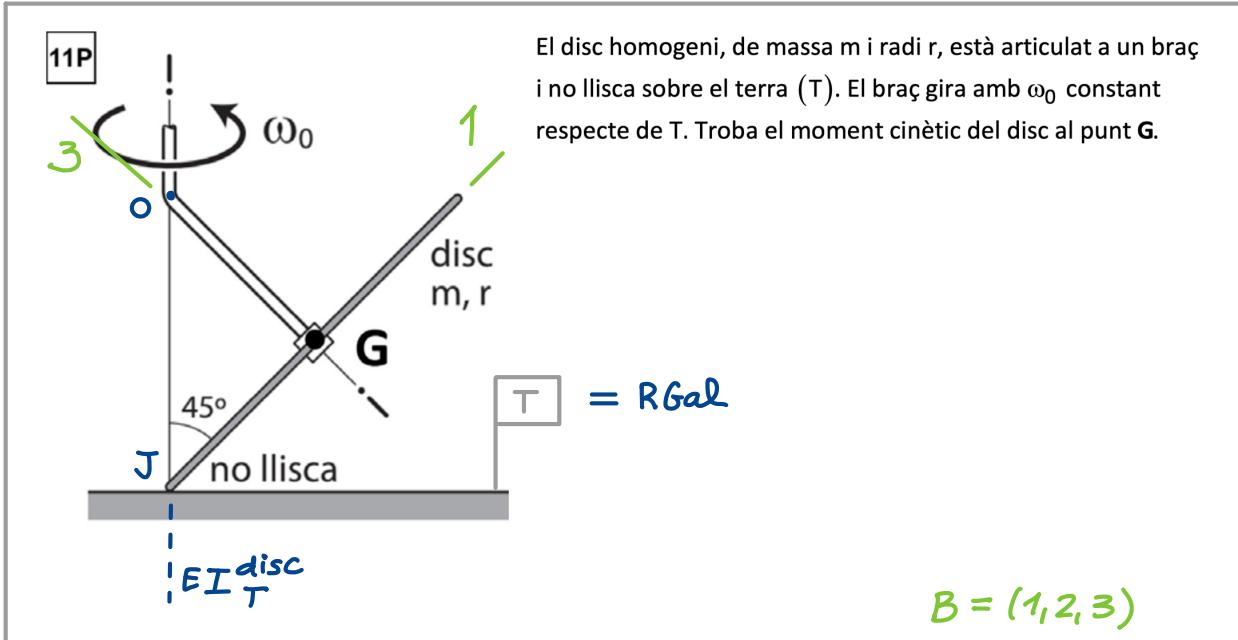
$I_{12} = 0$ perquè les masses són

sobre els eixos (tenen o bé $x_1 = 0$, o bé $x_2 = 0$)

$$\bar{H}_{RTO}(0)$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{\bar{H}_{RTO}(0)} &= \bar{H}_{RTG}(G) + \underbrace{\overline{\partial G} \times 4m \cdot \bar{\vartheta}_{RTO}(G)}_{\parallel T} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -4mL^2\omega \end{array} \right\} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} x \\ -h \\ 0 \end{array} \right\}}_{\text{En base } B^1} \times 4m \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -4m(L^2\omega - h\dot{x}) \end{array} \right\} = \\
 &= \boxed{\otimes 4m(L^2\omega - h\dot{x})}
 \end{aligned}$$

Vegen solució alternativa d'aquest exercici a
 Wikimec → Exemple D.4.9 (també
 utilitza la descomp. baricèntrica, però el
 càlcul de $\bar{H}_{RTG}(G)$ es fa sumant partícula
 a partícula, en lloc de via $\mathbb{II}(G) \cdot \bar{\Omega}_{RTG}^{\text{creu}}$)



$$\bar{H}_{RTG}^{disc}(G) = \boxed{\bar{\Omega}_T^{disc}(G) \cdot \bar{\Omega}_T^{disc}}$$

$\bar{\Omega}_T^{disc} = \bar{\Omega}_{braç}^{disc} + \bar{\Omega}_T^{braç} = \underbrace{(\nabla\dot{\varphi})}_{\bar{\alpha}} + (\uparrow\omega_0) = (\uparrow\omega_0)$

$\boxed{[\bar{\Omega}_T^{disc}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 2I \\ 0 & I_{33} \end{bmatrix}}$

$I_{33} = 2I = \frac{1}{2}mr^2$

$I = \frac{1}{4}mr^2$

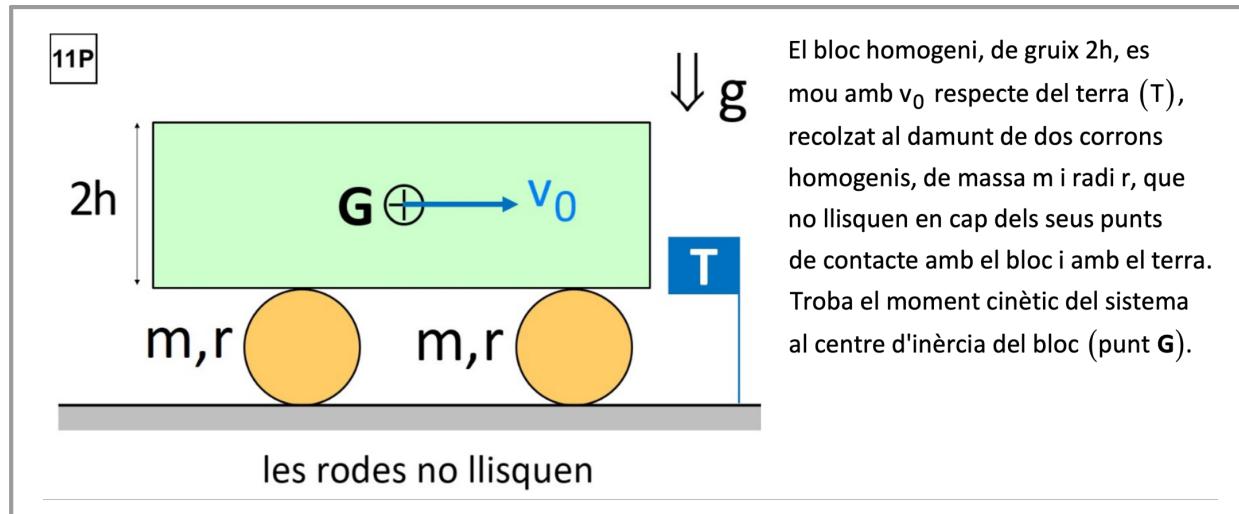
$\text{taules (disc = cilindre)}$

$I_{zz} = \frac{1}{2}mR^2$

$$\boxed{\left\{ \bar{H}_{RTG}^{disc}(G) \right\}_B = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & zI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{I\omega_0}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{2I\omega_0}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} =}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{mr^2\omega_0}{4\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{mr^2\omega_0}{2\sqrt{2}} \end{Bmatrix} = \boxed{\left(\rightarrow \frac{mr^2\omega_0}{4\sqrt{2}} \right) + \left(\leftarrow \frac{mr^2\omega_0}{2\sqrt{2}} \right)}$$

Q4.46 RBD

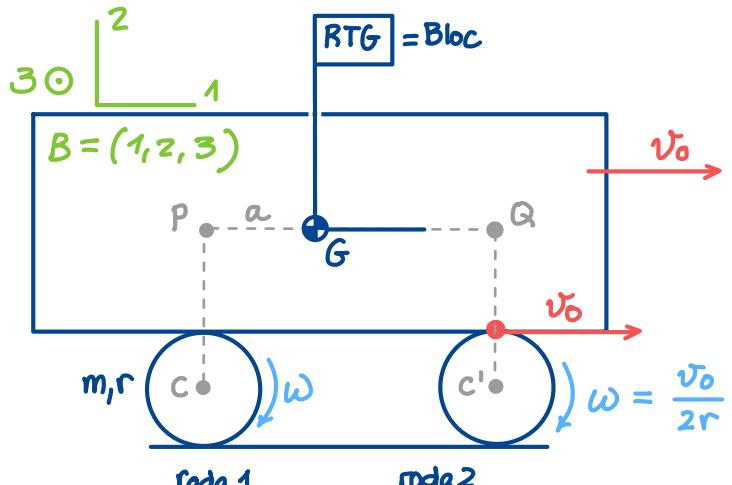


Vel. angulars dels sòlids:

$$\bar{\Omega}_T^{\text{rodal1}} = \bar{\Omega}_T^{\text{rodal2}} = \otimes \frac{J_0}{2r} \omega$$

$$\bar{\Omega}_T^{\text{bloc}} = \bar{\Omega}$$

El moment cinètic total és suma dels dels sòlids:



$$\bar{H}_{RTG}^{\text{sist}}(G) = \bar{H}_{RTG}^{\text{rodal1}}(G) + \bar{H}_{RTG}^{\text{rodal2}}(G) + \bar{H}_{RTG}^{\text{bloc}}(G) \quad (\text{I})$$

$$\underline{\bar{H}_{RTG}^{\text{rodal1}}(G)}$$

$G \notin$ rodal1 \Rightarrow fem descomp. baricèntrica

$$\bar{H}_{RTG}^{\text{rodal1}}(G) = \bar{H}_{RTC}^{\text{rodal1}}(C) + \underbrace{\bar{H}_{RTG}^{\oplus}(G)}_{GC \times m \bar{v}_{RTG}(C)} \quad (\text{II})$$

$$\left\{ \bar{H}_{RTC}^{\text{rodal1}}(C) \right\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & zI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2I\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega mr^2}{2} \end{Bmatrix} =$$

$$2I = \frac{mr^2}{z} \quad = \left(\otimes \frac{\omega mr^2}{2} \right) = \left(\otimes \frac{v_0 mr}{4} \right) \quad (\text{III})$$

$$\omega = \frac{v_0}{2r}$$

$$\bar{H}_{RTG}^{\oplus}(G) = \underbrace{\bar{GC}}_{GP + PC} \times m \bar{v}_{RTG}(c) = \left(\left(\leftarrow a \right) + \left[\downarrow (h+r) \right] \right) \times \left(\leftarrow \frac{mv_0}{2} \right) = \left(\otimes \frac{h+r}{2} \cdot mv_0 \right) \quad (\text{IV})$$

Per trobar $\bar{v}_{RTG}(c)$ fem comp. mov. $\begin{cases} AB = T \\ REL = BLOC = RTG \end{cases}$

$$\underbrace{\bar{v}_{RTG}(c)}_{REL} = \underbrace{\bar{v}_T(c)}_{AB} - \underbrace{\bar{v}_{ar}(c)}_{\bar{v}_T(G)} = \left(\rightarrow \frac{v_0}{2} \right) - \left(\rightarrow v_0 \right) = \left(\leftarrow \frac{v_0}{2} \right)$$

Tècnica molt habitual per trobar \bar{v}_{RTG} (punt qualsevol) !

Substituint III i IV a II:

$$\bar{H}_{RTG}^{roda1}(G) = \left(\otimes \frac{v_0 mr}{4} \right) + \left(\otimes \frac{h+r}{2} \cdot mv_0 \right) = \left[\otimes \frac{v_0 m}{2} \left(\frac{3r}{2} + h \right) \right] \quad (\text{V})$$

$$\bar{H}_{RTG}^{roda2}(G)$$

El moment cinètic de la roda2 a G és el mateix que el de la roda1 (faríem les mateixes operacions, canviant \bar{GC} per $\bar{GC}' = \bar{GQ} + \bar{QC}'$, i sortiria el mateix):

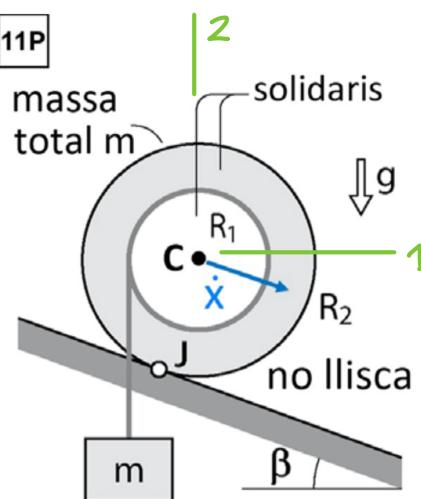
$$\bar{H}_{RTG}^{roda2}(G) = \bar{H}_{RTG}^{roda1}(G) \quad (\text{VI})$$

$$\bar{H}_{RTG}^{sist}(G)$$

Utilitzant (VI) a (I) obtenim:

$$\bar{H}_{RTG}^{sist}(G) = 2 \bar{H}_{RTG}^{roda1}(G) = \left[\otimes v_0 m \left(\frac{3r}{2} + h \right) \right]$$

11P



Les rodes homogènies, de massa total m i radis R_1 i R_2 , són solidàries, i no llisquen sobre el terra (T). El bloc, de massa m , penja d'un fil inextensible que s'enrotlla sobre la roda de radi R_1 . El centre de les rodes (punt C) baixa amb velocitat \dot{x} respecte de T . Troba el moment cinètic del sistema a C .

$$B = (1, z, 3) \text{ d'orientació fixa a } T \\ (\text{Però si fos fixa a rodes surt } =)$$

$$\bar{H}_{RTC}^{sist}(C) = \bar{H}_{RTC}^{rodes}(C) + \bar{H}_{RTC}^{bloc}(C) \quad (I)$$

$$\left\{ \bar{H}_{RTC}^{rodes}(C) \right\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}}{R_2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\frac{mR_2^2}{2} \cdot \frac{\dot{x}}{R_2} \end{array} \right\} = \left(\otimes \frac{mR_2 \dot{x}}{2} \right) \quad (II)$$

$I_{33} = \frac{mR_2^2}{2}$

Taules (I_{zz} cilindre)

- $C \in$ rodes

- rodes són cilíndriques (rotor simètric a C , pla (1,2))

$$\bar{H}_{RTC}^{bloc}(C) = \underbrace{\bar{H}_{RTC}^{bloc}(G)}_{\bar{o}, P \neq \bar{\Omega}_{RTG}^{bloc} = \bar{0}} + \bar{H}_{RTC}^{\oplus}(C) =$$

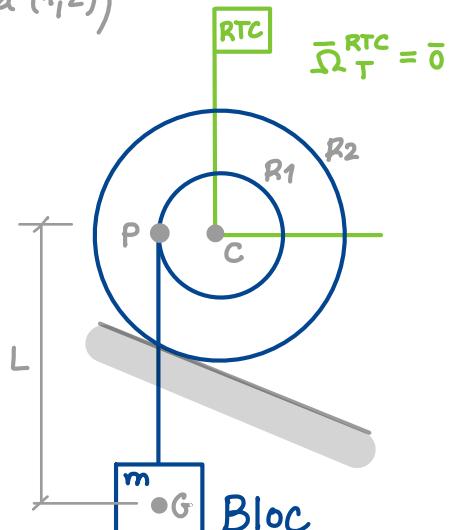
Centre d'inèrcia del bloc

$$= \bar{CG} \times m \cdot \bar{v}_{RTC}(G) =$$

$$= \left[(-R_1) + (L) \right] \times \left[\uparrow \left(m \frac{R_1}{R_2} \dot{x} \right) \right]$$

$$= \left(\otimes \frac{R_1^2}{R_2} m \dot{x} \right) \quad (III)$$

U. deducció a baix



Deducció de $\bar{U}_{RTC}(G)$

(v. deducció alternativa a pàg. seg., molt instructiva!)

Com que $\bar{\Omega}_{T}^{RTC} = \bar{\Omega}$, tenim:

$$\bar{\Omega}_{RTC}^{\text{rodes}} = \bar{\Omega}_T^{\text{rodes}} = \left(\otimes \frac{\dot{x}}{R_2} \right)$$

Ara, com que el tram GP del fil no gira resp. RTC, és:

$$\bar{U}_{RTC}(G) = \bar{U}_{RTC}(P) = \left(\uparrow \frac{\dot{x}}{R_2} \cdot R_1 \right) = \left(\uparrow \frac{R_1}{R_2} \dot{x} \right)$$

Vista des de RTC, la roda R_1 gira amb

$$\bar{\Omega}_{RTC}^{\text{rodes}} = \left(\otimes \frac{\dot{x}}{R_2} \right), \text{ com hem dit a dalt}$$

Sumant (II) i (III) obtenim el mom. cinètic total:

$$\boxed{\bar{H}_{RTC}^{\text{sist}}(C) = \left(\otimes \frac{m R_2 \dot{x}}{2} \right) + \left(\otimes \frac{R_1^2}{R_2} m \dot{x} \right) =}$$

$$= \boxed{\otimes m \dot{x} \left(\frac{R_2}{2} + \frac{R_1^2}{R_2} \right)}$$

IMPORTANT!

Deducció alternativa de $\bar{v}_{RTC}(G)$

Fent comp. mov. amb $\begin{cases} AB = T \\ REL = RTC \end{cases}$ tenim:

Tècnica molt útil quan no veiem la velocitat d'un punt en una RTQ fàcilment.

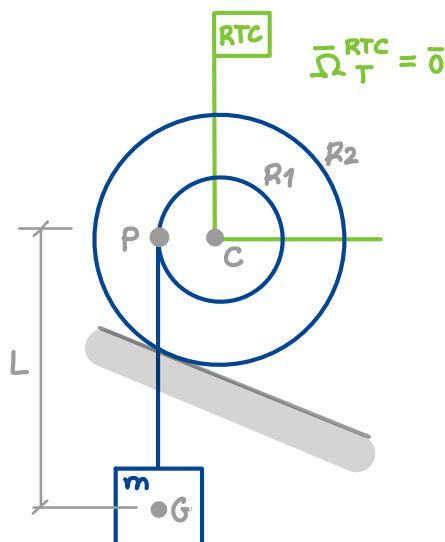
$$\underbrace{\bar{v}_{RTC}(G)}_{REL} = \underbrace{\bar{v}_T(G)}_{AB} - \underbrace{\bar{v}_T(C)}_{\bar{v}_{ar}(G)} = \bar{v}_T(P) - \bar{v}_T(C) =$$

$\bar{v}_{ar}(G) = \bar{v}_T(C)$ pq tots els punts de RTC tenen la mateixa velocitat resp. T , ja que $\bar{\Omega}_T^{RTC} = \bar{0}$

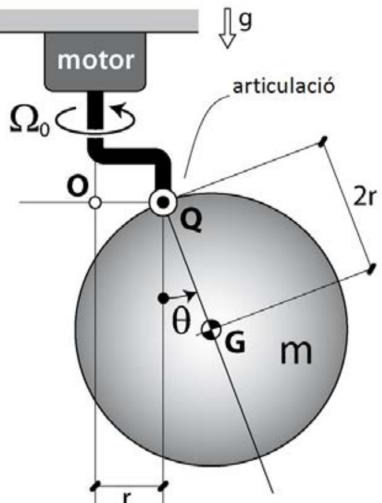
$\bar{v}_T(G) = \bar{v}_T(P)$ ja que el tram GP de fil no gira resp. T

$$= \underbrace{\bar{v}_T(C) + \bar{\Omega}_T^{rodes} \times \bar{CP}}_{CSR \ C \rightarrow P} - \bar{v}_T(C) =$$

$$= \bar{\Omega}_T^{rodes} \times \bar{CP} = \left(\otimes \frac{\dot{x}}{R_2} \right) \times \left(\leftarrow R_1 \right) = \left(\uparrow \frac{R_1}{R_2} \dot{x} \right)$$



11P



La bola homogènia, de massa m i radi $2r$, està articulada a un braç que gira amb Ω_0 constant respecte del terra (T) sota l'acció d'un motor. Troba:

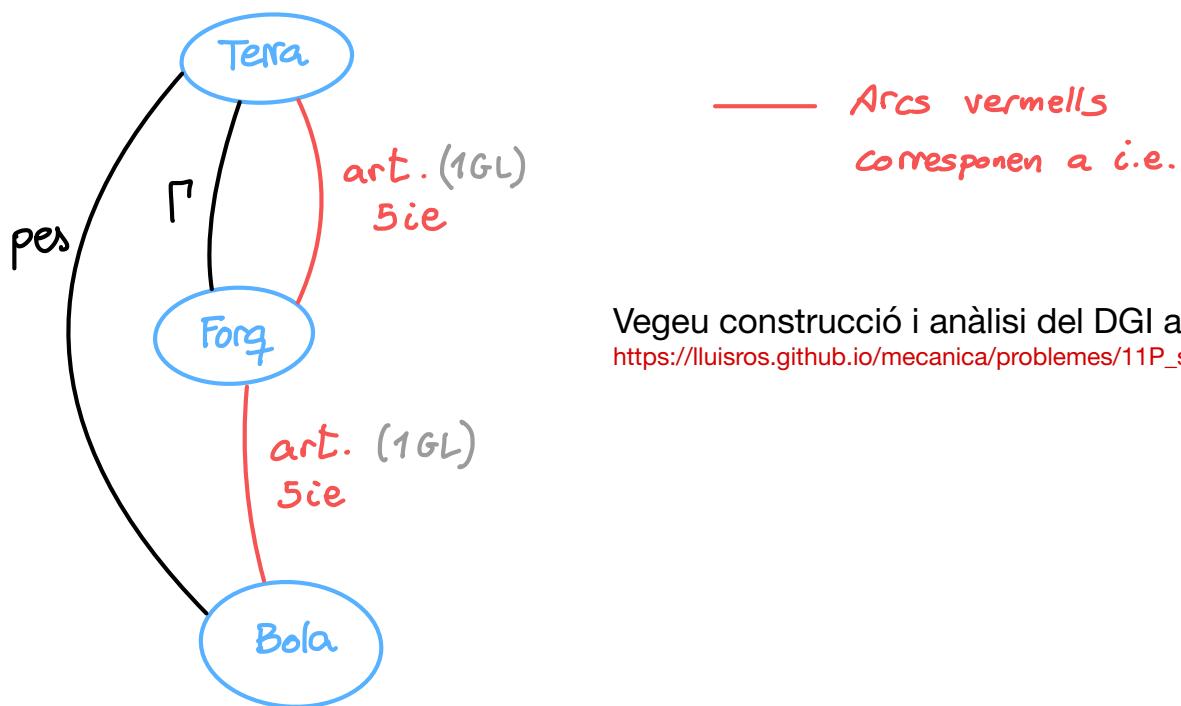
- l'equació de moviment per a la coordenada θ .
- el parell motor.

Obs: La forq. és de massa ≈ 0

GL sist

$$2 \quad \begin{array}{l} \dot{\psi} = \Omega_0 = \text{constant} \text{ (actuat i forçat)} \\ \dot{\theta} \text{ (lliure)} \end{array}$$

Diagrama general d'interaccions (DGI)



Vegeu construcció i anàlisi del DGI a
https://luisros.github.io/mecanica/problemes/11P_slides.pdf

Sist.	Incòg.	#incòg. total	Problema
bola	5ie, $\ddot{\theta}$	6	DET ✓
bola+forq	5ie, $\ddot{\theta}$, Γ	7	INDET ✗
forq	10ie, Γ	11	INDET ✗

Eq. mov. coord. θ

Volem $\ddot{\theta} \Rightarrow$ Apliquem teor. vectorials a Sist = bola (pq surt DET)

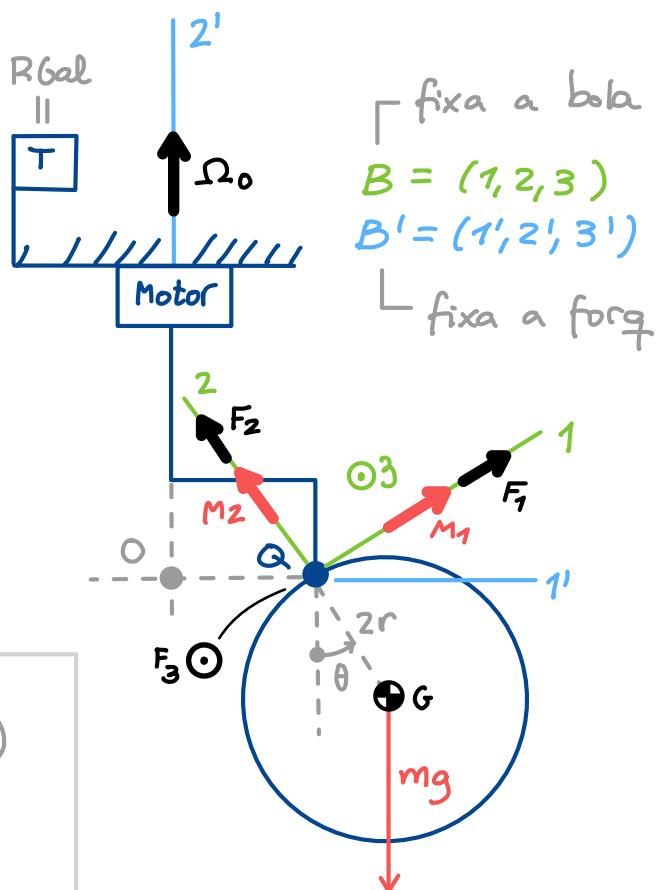
Forces sobre bola

- Pes: $\downarrow mg$
(només crea moment en dir. 3)
- Torsor forq \rightarrow bola a Q

$$\{ \bar{F}_{\text{forq} \rightarrow \text{bola}} \}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{ \bar{M}_{\text{forq} \rightarrow \text{bola}}(Q) \}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(en B' tindria mateixa forma)



Full rta per l'eq. mov.

SIST = bola

$TMC(Q)]_3 \leftarrow$ Ja que en dir. 3 no hi ha moments d'enllaç sobre bola

$TMC(Q)$

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(Q) - \bar{QG} \times m \bar{a}_T(Q) = \dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$$

Anem calculant-ne els termes (sols ens calen en dir. 3):

$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(Q)$

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(Q) = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ -mg2rsin\theta \end{Bmatrix}$$

Però \bar{H}_{RTQ} cal tot per poder-lo derivar i quedar-nos amb comp. 3.

$$\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$$

$B = (1, 2, 3)$
fixa a bola

$$\bar{H}_{RTQ}(Q) = \mathbb{I}(Q) \cdot \bar{\Omega}_T^{\text{Bola}}$$

$\square Q \in \text{Bola}$

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = (\odot \dot{\theta}) + (1 \cdot \Omega_0) = \left\{ \begin{array}{l} \Omega_0 \sin \theta \\ \Omega_0 \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{array} \right\}_B$$

$$\mathbb{I}(Q) = \mathbb{I}(G) + \mathbb{I}^\oplus(Q)$$

Si triem B fixa a bola per tal que $\mathbb{I}^\oplus(Q)$ surti constant. En base a $B' = (1', 2', 3')$ no ho seria.

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}} + \begin{bmatrix} m4r^2 & & \\ & 0 & \\ & & m4r^2 \end{bmatrix} =$$

rot. esfèric a G , amb $I = \frac{2}{5}m(2r)^2 = \frac{8}{5}mr^2$

$$= 4mr^2 \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 4mr^2 \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4mr^2}{5} \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & z & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix}$$

Utilitzaré les variables I_{11}, I_{22}, I_{33} una estona per escriure menys.

on

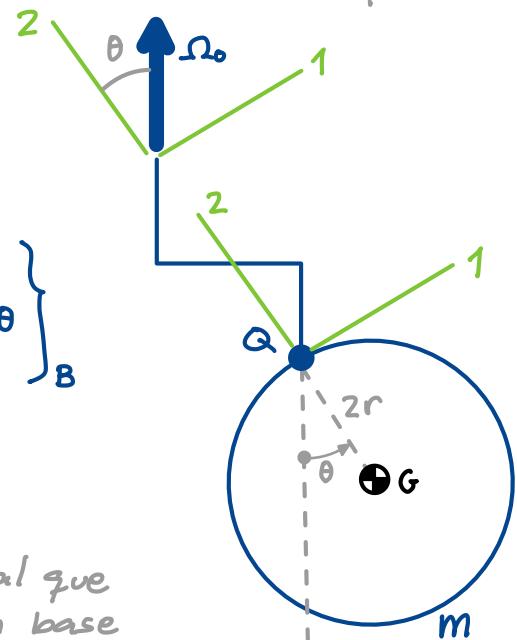
$$I_{11} = I_{33} = \frac{28}{5}mr^2 \quad I_{22} = \frac{8}{5}mr^2$$

$$\{\bar{H}_{RTQ}(Q)\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Omega_0 \sin \theta \\ \Omega_0 \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} I_{11} \Omega_0 \sin \theta \\ I_{22} \Omega_0 \cos \theta \\ I_{33} \dot{\theta} \end{array} \right\}$$

$$\{\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ I_{33} \ddot{\theta} \end{array} \right\} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \Omega_0 \sin \theta \\ \Omega_0 \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{array} \right\}}_{\bar{\Omega}_T^B} \times \left\{ \begin{array}{l} I_{11} \Omega_0 \sin \theta \\ I_{22} \Omega_0 \cos \theta \\ I_{33} \dot{\theta} \end{array} \right\} =$$

Sols cal la comp. 3

$$\therefore \bar{\Omega}_{RTQ}^B = \bar{\Omega}_{RGal}^B = \bar{\Omega}_T^B$$



$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ I_{33} \ddot{\theta} + I_{22} \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta - I_{11} \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ I_{33} \ddot{\theta} + (I_{22} - I_{11}) \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta \end{array} \right\} = \boxed{\text{Ara si, substitui:}} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{28}{5} mr^2 \ddot{\theta} - 4mr^2 \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} I_{33} &= \frac{28}{5} mr^2 \\ I_{22} - I_{11} &= -4mr^2 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Terme complementari del TMC:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \bar{QG} \times m \bar{a}_T(Q) \right\}_B &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -m\Omega_0^2 r \cos \theta \\ m\Omega_0^2 r \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2m\Omega_0^2 r^2 \cos \theta \end{Bmatrix} \\
 &\quad \boxed{(\downarrow zr) \times (\leftarrow m\Omega_0^2 r)}
 \end{aligned}$$

TMC(Q)]₃:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\sum \bar{M}_{ext}(Q)}_3 &+ \underbrace{-\bar{QG} \times m \bar{a}_T(Q)}_3 = \underbrace{\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)}_3 \\
 -2mr g \sin \theta &+ 2mr^2 \Omega_0^2 \cos \theta = \frac{28}{5} mr^2 \ddot{\theta} - 4mr^2 \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta \\
 &\quad \text{dividim per } 2mr^2 \\
 \frac{14}{5} \ddot{\theta} - 2\Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta - \Omega_0^2 \cos \theta + \frac{g}{r} \sin \theta &= 0 \\
 &\quad \text{Eq. mov. per a } \theta \\
 \boxed{\frac{14}{5} \ddot{\theta} - \Omega_0^2 \cos \theta (1 + 2 \sin \theta) + \frac{g}{r} \sin \theta = 0} &\quad (\square)
 \end{aligned}$$

Si volem, podem escriure (\square) aillant $\ddot{\theta}$, fent palès que l'acceleració ($\ddot{\theta}$) és funció de variables d'estat mecànic exclusivament (Ω_0, θ)

$$\ddot{\theta} = \frac{5}{14} \left[-\Omega_0^2 \cos \theta (1 + 2 \sin \theta) - \frac{g}{r} \sin \theta \right]$$

funció de les variables d'estat mecànic del sistema

Configuracions d'equilibri ?

← No les demanen però investiguem-les una mica ...

Substituïm a (\square)

$\theta = \theta_{eq}$
$\dot{\theta} = 0$
$\ddot{\theta} = 0$

$$-\Omega_0^2 \cos \theta_{eq} (1 + 2 \sin \theta_{eq}) + \frac{g}{r} \sin \theta_{eq} = 0 \quad (\text{eq. transcendental})$$

$\theta_{eq} = 0$ la satisfa, però només quan $\Omega_0 = 0$. La intuició diu que per $\Omega_0 = 0$, $\theta_{eq} = 0$ ha de ser ESTABLE. Veiem-ho:

Substituint a (\square)

queda	$\begin{cases} \Omega_0 = 0 \\ \theta = \theta_{eq} + \varepsilon = \varepsilon \\ \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \\ \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon} \end{cases}$
-------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$\frac{14}{5} \ddot{\varepsilon} + \frac{g}{r} \sin \varepsilon = 0$$

↓ linealitzem

$$\frac{14}{5} \ddot{\varepsilon} + \frac{g}{r} \varepsilon = 0$$

↓

$$\ddot{\varepsilon} = - \frac{5r}{14g} \cdot \varepsilon$$

← $R > 0 \Rightarrow$ Per $\Omega_0 = 0$ $\theta_{eq} = 0$ és d'equilibri estable ✓

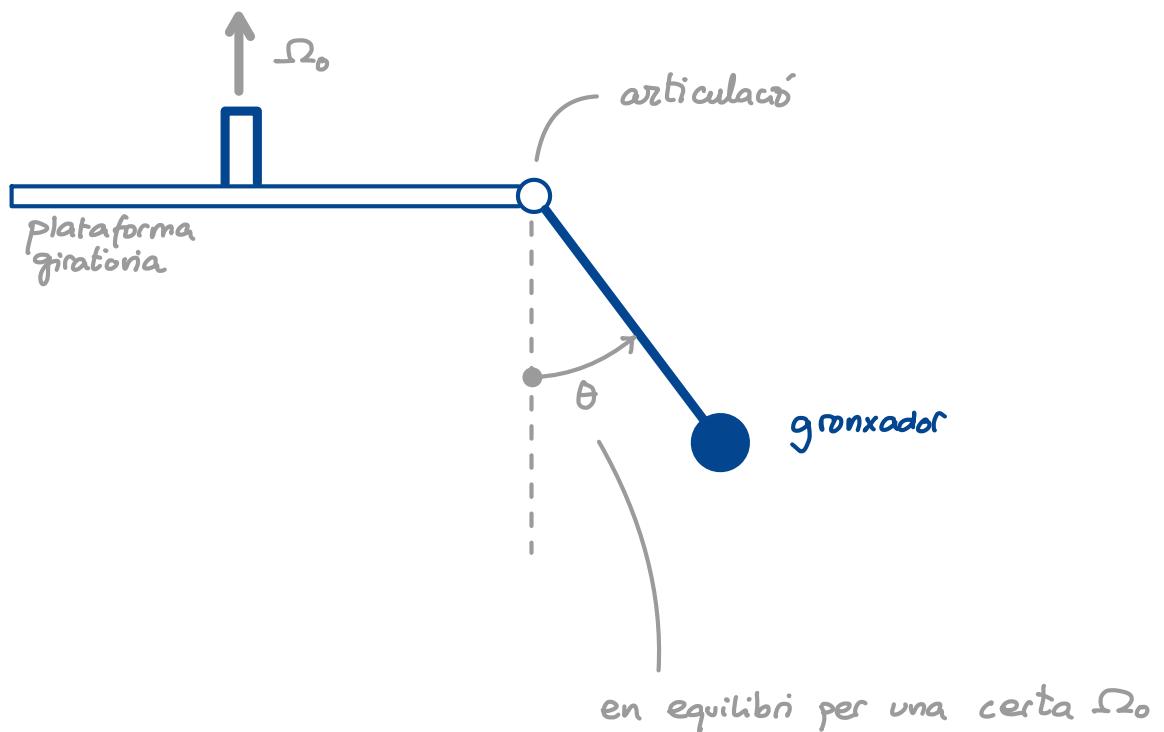
L'eq. transcendental anterior té altres solucions, que es podrien trobar numèricament. Però podem investigar si per un cert angle tindrem equilibri. Per $\theta = 30^\circ$, per exemple, tenim

$$-\Omega_0^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left[1 + 2 \frac{1}{2} \right] + \frac{g}{r} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\Omega_0^2 \sqrt{3} = \frac{g}{2r}$$

$$\Omega_0^2 = \frac{g}{2\sqrt{3}r} \quad \Rightarrow \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2r\sqrt{3}}}$$

És a dir, quan Ω_0 pren el valor $(g/2r\sqrt{3})^{1/2}$ tindrem una posició d'equilibri. És estable? Ho deixem com a deures, però ha de sortir que sí, perquè aquest sistema és anàleg al d'uns gronxadors de fira



Tendència a girar de la bola, partint del repòs?

Suposem que, partint de la bola en repòs ($\theta=0$, $\dot{\theta}=0$) i $\Omega_0=0$, iniciem una rotació Ω_0 sobtada amb el motor. Què farà la bola? Mantindrà $\theta = 0^\circ$, o tendirà a inclinar-se? Veiem-ho:

Substituint $\theta=0$, $\dot{\theta}=0$ a (\square):

$$\frac{14}{5} \ddot{\theta} - \Omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow$$



$$\ddot{\theta} = \frac{5}{14} \Omega_0^2$$



Accel. angular positiva \Rightarrow la bola tendeix a girar ↗
(centrifugament)

Parell motor Γ necessari per garantir $\dot{\psi} = \Omega_0 = \text{ct}$

A quin sistema apliquem els teoremes vectorials ara? Recordem la taula inicial:

Sist.	Incòg.	#incòg. total	Problema
bola	5 ie, $\ddot{\theta}$	6	DET ✓
bola + forq	5 ie, $\ddot{\theta}, \Gamma$	7	INDET ✗
forq	10 ie, Γ	11	INDET ✗

Ara és DET!

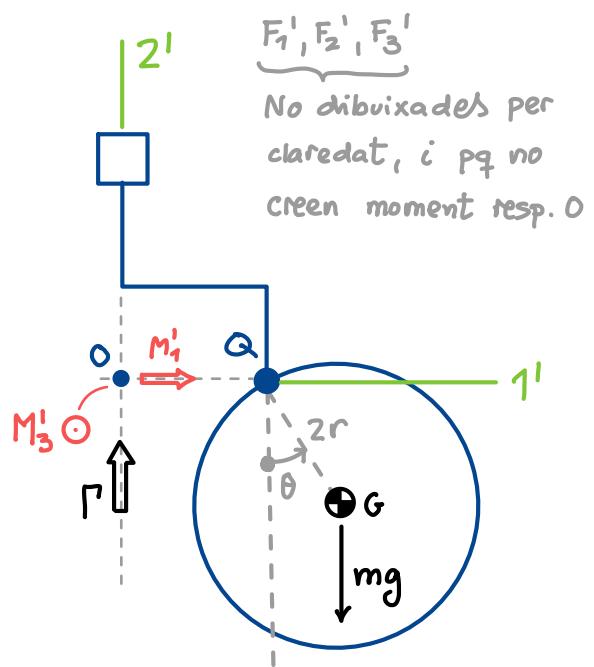
El sist = bola + forq és, dels que involucra Γ , el de menys incògnites. Com que ara ja sabem $\ddot{\theta}$ (hem trobat l'eq. del mov. que en determina el seu valor), l'aplicació de TQM + TMC a aquest sistema ara generarà un problema determinat. Dels dos teoremes, el únic que involucrará Γ és el TMC, per tant aplicarem aquest teorema.

A quin punt l'aplicarem? Mirem com és el torsor $T \rightarrow \text{forq}$ en un punt de l'eix del motor, p.ex. O:

$$\left\{ \bar{F}_{T \rightarrow \text{forq}} \right\}_{B'} = \left\{ \begin{matrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \bar{M}_{T \rightarrow \text{forq}} \right\}_{B'} = \left\{ \begin{matrix} M'_1 \\ 0 \\ M'_3 \end{matrix} \right\}$$

Utilitzem B' perquè aquesta base té una direcció (la 2') paral·lela a l'eix motor i permet veure aquest zero



Si aplicuem TMC a O tindrem, en ser O fix a T,

$$\sum \bar{M}_{ext}(O) - \cancel{\overline{OG} \times m \underbrace{\ddot{a}_T(O)}_{\ddot{o}}} = \dot{H}_{RTO}(O)$$

i a més

$$\left\{ \sum \bar{M}_{ext}(O) \right\}_{B'} = \left\{ \begin{array}{l} M_1' \\ \Gamma \\ M_3' - mg_2 r \sin \theta \end{array} \right\}$$

Γ = incògnites

Veiem que Γ apareix a la comp. Z' sense cap altra incògnita.

Ja ho tenim! El full de ruta per trobar Γ és:

Full ruta
per Γ

sistema = bola + forq

$TMC(O) \Big|_{Z'}$

← Només en dir. Z'
(ho tindrem al cap!)

Pregunta freqüent:

I per què aplicuem TMC a O i no a Q, o a G?

El torsor $T \rightarrow$ forq a Q (o a G) no és tan senzill com a O. Si passem el de O a Q (amb la fórmula del canvi de punt del formulari) veurem que F_1' , F_2' i F_3' creen moments resp. Q que fan que a $\sum \bar{M}_{ext}(Q)$ no apareguin F_1' , F_2' i F_3' . Per tant, la formulació de TMC a Q obligaria a afegir les 3 eqs del TQM per poder resoldre el sistema d'equacions resultant. Es pot fer, però es més feixuc! Passaria una cosa semblant amb l'aplicació del TMC a G.

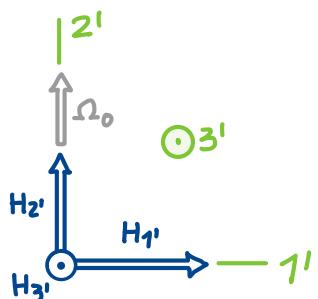
Així doncs, volem formular

$$\underbrace{\sum \bar{M}_{ext}(o)}_{\Gamma} \Big|_{Z'} = \dot{\bar{H}}_{RTD}(o) \Big|_{Z'}$$

Ara fixem-nos. No sabem $\bar{H}_{RTD}(o)$ encara, però en base $B' = (1', 2', 3')$ tindrà tres components

$$\{\bar{H}_{RTD}(o)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} H_{1'} \\ H_{2'} \\ H_{3'} \end{Bmatrix}$$

que geomètricament podem representar com



- $\bar{H}_{2'}$ no gira \rightarrow sols té canvi de valor
- $\bar{H}_{1'}$ i $\bar{H}_{3'}$ \rightarrow tenen canvi de valor i giren amb Ω_o direcció en el pla (1', 3')

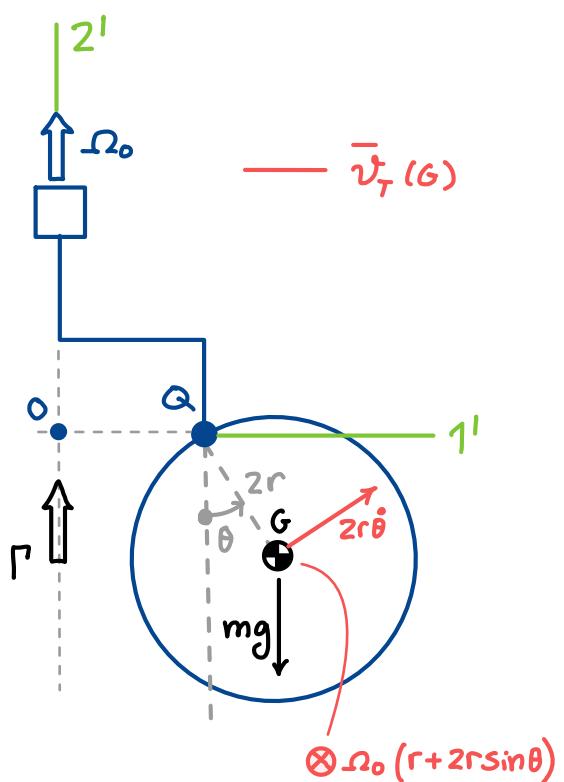
i d'aquí veiem que només la derivada temporal de $\bar{H}_{2'}$ té comp. en dir. 2'. Per tant, només ens cal trobar la component $H_{2'}$ de $\bar{H}_{RTD}(o)$ i derivar-la. Som-hi:

Com que O \notin Bola, apliquem la descomp. baricèntrica:

$$\bar{H}_{RTD}(o) = \bar{H}_{RTG}(G) + \underbrace{\bar{H}_{RTD}^{\oplus}(o)}_{\bar{G} \times m \bar{v}_T(G)}$$

$$\bar{v}_T(G) = (\rightarrow zr\dot{\theta}) + (\otimes \Omega_o(r + 2rsin\theta))$$

Comp. movim. | $AB = T$
REL = forq.



$$\left\{ \bar{H}_{RTD}^{\oplus}(0) \right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} r + 2r\sin\theta \\ -2r\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} m2r\dot{\theta}\cos\theta \\ m2r\dot{\theta}\sin\theta \\ -m\Omega_0(r + 2r\sin\theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\Omega_0(r + 2r\sin\theta)^2 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

el seu valor
no ens cal

$$\left\{ \bar{H}_{RTG}(G) \right\}_{B'} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega_0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ I\Omega_0 \\ I\dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Per tant, sumant els termes gros,

$$\left\{ \bar{H}_{RTD}(0) \right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} I\Omega_0 + m\Omega_0(r + 2r\sin\theta)^2 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$H_{2'}$

De l'anàlisi geomètric d'abans, sabem que l'únic canvi en dir. 2' és el canvi de valor de $H_{2'}$, que és $\dot{H}_{2'}$. Per tant:

$$\left\{ \dot{H}_{RTD}(0) \right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 2m\Omega_0(r + 2r\sin\theta)2r\dot{\theta}\cos\theta \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$\dot{H}_{2'}$

I ara ja podem formular $TMC(0)]_{2'}$:

$$\underbrace{\sum \bar{M}_{ext}(0)}_{\Gamma} \Big|_{2'} = \underbrace{\dot{H}_{RTD}(0)}_{\dot{H}_{2'}} \Big|_{2'}$$

$\Gamma = 4mr^2\Omega_0\dot{\theta}(1+2\sin\theta)\cos\theta$

El controlador del motor ha de comandar aquest parell per garantir $\dot{\psi} = \Omega_0$