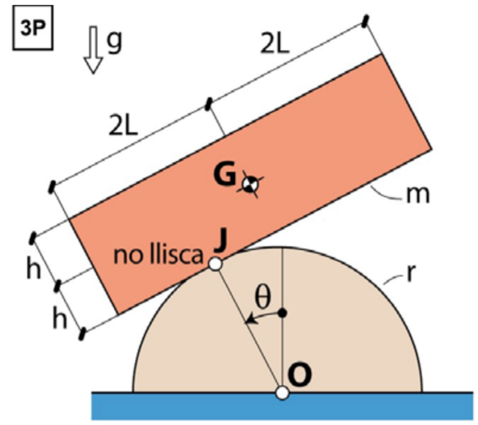
3P

Versió 0.9 (preliminar)

Exercicis de derivació geomètrica i analítica
+
Angles d'Euler

Lluís Ros
https://lluisros.github.io/mecanica

Exercicis de derivació geomètrica i analítica



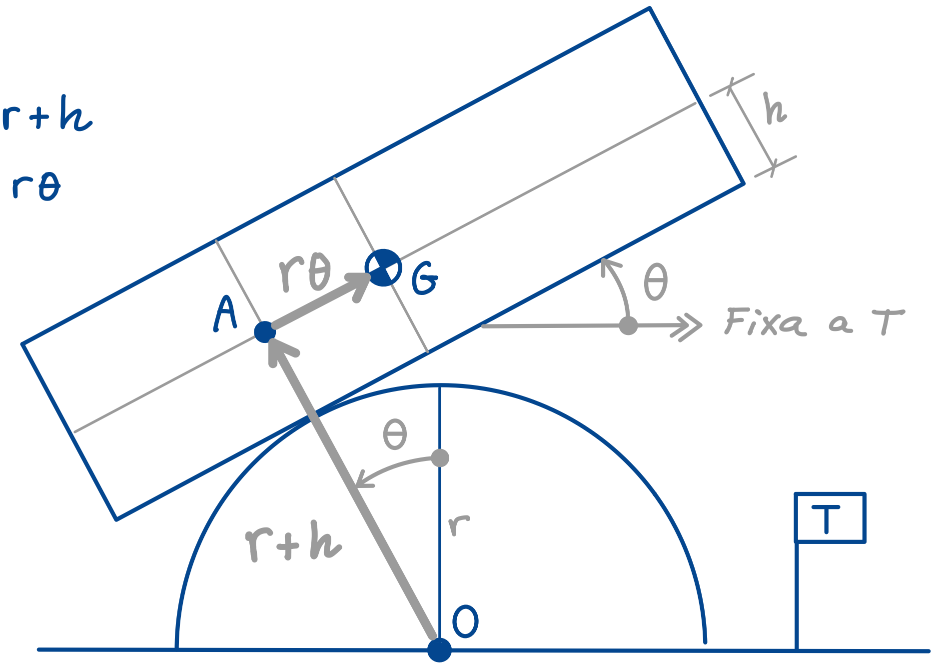
El bloc es mou sense lliscar al damunt d'una superfície cilíndrica fixa al terra (T). Per a $\theta = 0$, **G** es troba a la vertical del punt **O**.
Mitjançant la derivada geomètrica, calcula $\bar{v}_T(\mathbf{G})$, $\bar{a}_T(\mathbf{G})$.

$v_T(G)$

Triem $\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{AG}$ com a vec. pos. de G

Claramant :

$$|\overline{OA}| = r+h$$
$$|\overline{AG}| = r\theta$$



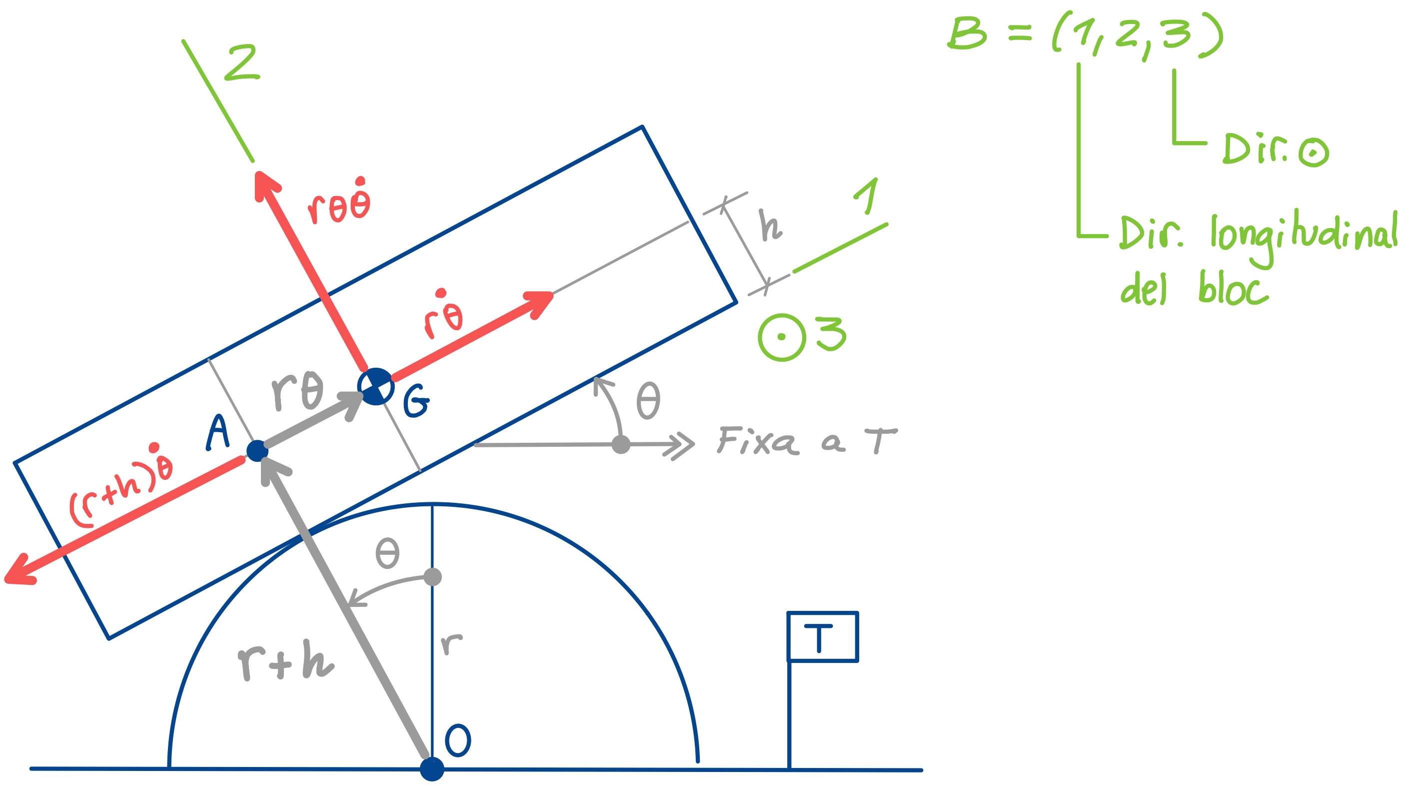
L'orient. de $\overline{OA}$ resp. T ve donada per θ

L'orient. del bloc i de $\overline{AG}$, també !

$\overline{OA}$ no canvia de valor, però sí de dir. (amb $\odot\,\dot{\theta}$)

$\overline{AG}$ canvia de valor (θ varia), i tb. de dir. (amb $\odot\,\dot{\theta}$)

Ergo, les deivades de $\overline{OA}$ i $\overline{AG}$ són els vecs. vermells:



Ergo :

$$\boxed{\overline{v}_T(P)} = (\nearrow r\dot{\theta}) + \overbrace{\left[\swarrow (r+h)\dot{\theta}\right]}^{(\swarrow r\dot{\theta}) + (\swarrow h\dot{\theta})} + (\nwarrow r\theta\dot{\theta}) =$$

$$= \boxed{(\swarrow h\dot{\theta}) + (\nwarrow r\theta\dot{\theta})} \quad (1)$$

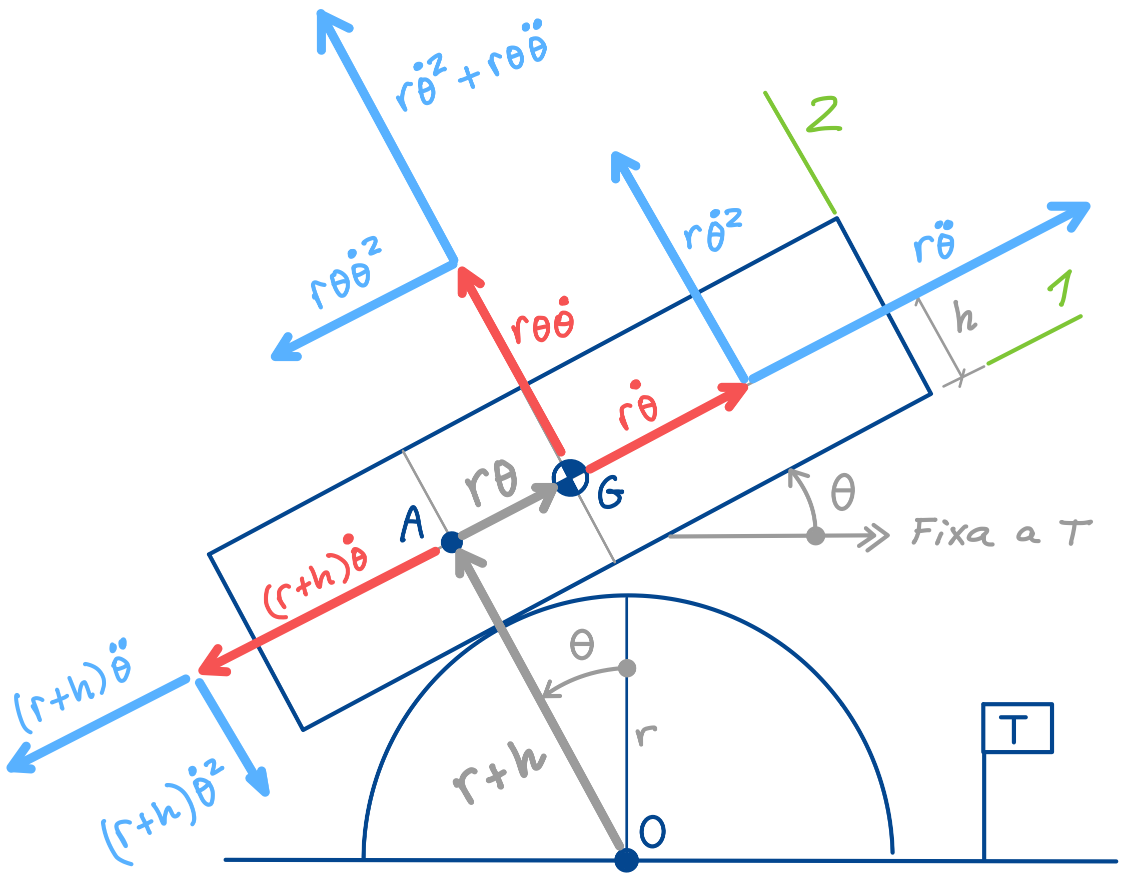
Si volem, podem expressar $\overline{v}_T(P)$ vectorialment mitjançant alguna base. $B = (1,2,3)$ va molt bé, ja que té els versors en les dirs. que surten a l'Eq. (1):

$$\left\{\overline{v}_T(P)\right\}_B = \begin{Bmatrix} -h\dot{\theta} \\ r\theta\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

L'Eq. (2) ens anirà bé per comprovar els resultats obtinguts per derivació analítica (seg. exercici).

$\bar{a}_T(G)$

Només cal derivar els vecs. vermells per obtenir els blaus:

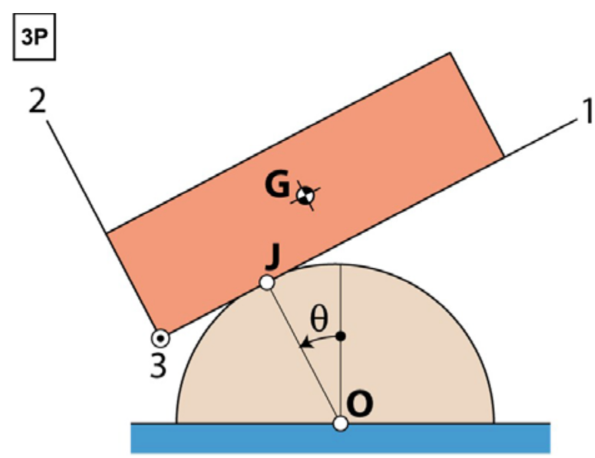


Sumant els vecs. blaus obtenim:

$$\bar{a}_T(G) = \left[\swarrow\left(h\ddot{\theta} + r\theta\dot{\theta}^2\right)\right] + \left[\nwarrow\left(r\dot{\theta}^2 - h\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta}\right)\right],$$

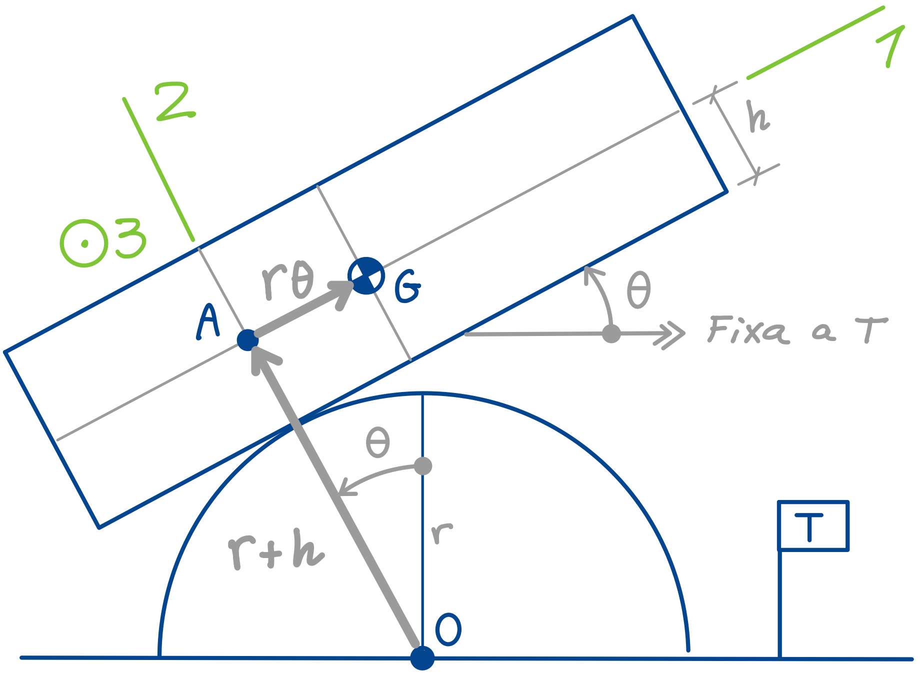
que expressat en base $B = (1,2,3)$ és

$$\left\{\bar{a}_T(G)\right\}_B = \left\{\begin{matrix} -h\ddot{\theta} - r\theta\dot{\theta}^2 \\ r\dot{\theta}^2 - h\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{matrix}\right\} \quad (3)$$



El bloc es mou sense lliscar al damunt d'una superfície cilíndrica fixa al terra (T).
Per a $\theta = 0$, **G** es troba a la vertical del punt **O**.
Mitjançant la derivada analítica, calcula $\bar{v}_T(\mathbf{G})$, $\bar{a}_T(\mathbf{G})$.

$\overline{v}_T(G)$



$B = (1, 2, 3)$

Dir. longitudinal del bloc

Dir ⊙

$$\left\{\overline{OG}\right\}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ r+h \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\overline{OA}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} r\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\overline{AG}} = \begin{Bmatrix} r\theta \\ r+h \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\overline{v}_T(G)\right\}_B = \begin{Bmatrix} r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r\theta \\ r+h \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -r\dot{\theta} - h\dot{\theta} \\ r\theta\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} -h\dot{\theta} \\ r\theta\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Mateix resultat que a Eq. (2) de l'ex. ant.!

$\bar{a}_T(G)$

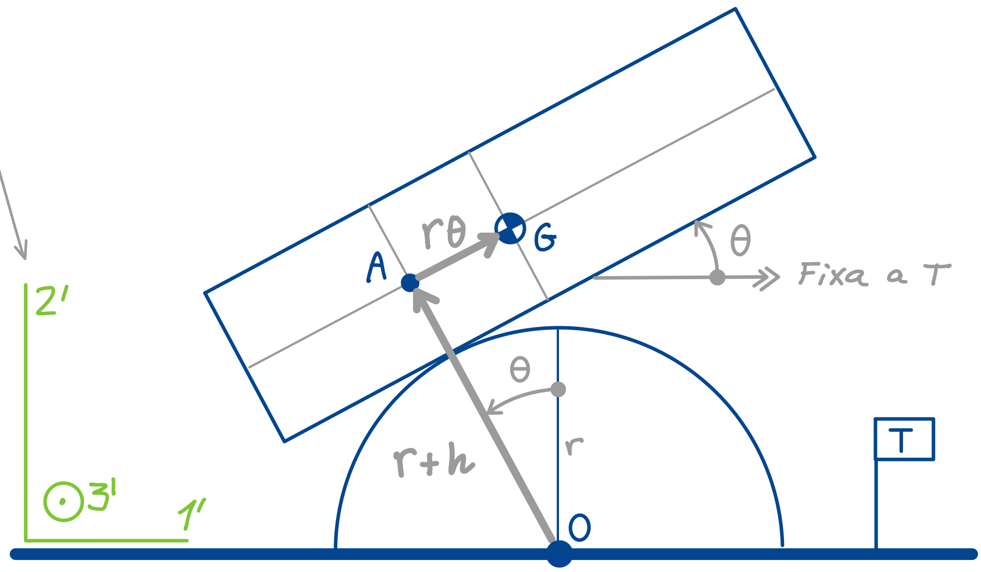
Derivem $\bar{v}_T(G)$ respecte del temps:

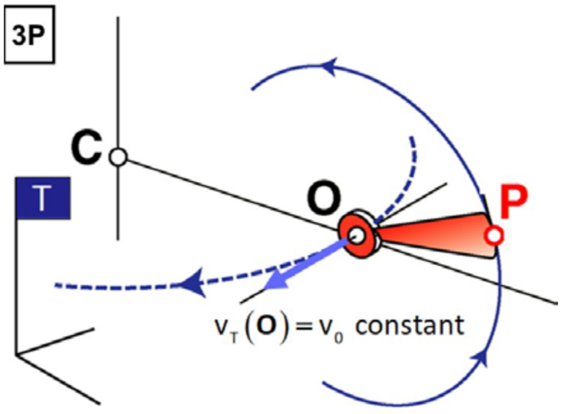
$$\{\bar{a}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} \\ r\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -h\dot{\theta} \\ r\theta\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -r\theta\dot{\theta}^2 \\ -h\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} - r\theta\dot{\theta}^2 \\ r\dot{\theta}^2 - h\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Mateix resultat que a l'Eq. (3) de l'ex. anterior!

Obs.: tb hauríem pogut utilitzar aquesta base $B' = (1', 2', 3')$ fixa a T però l'expressió de $\overline{OG}$ seria més complexa, i la de $\bar{v}_T(G)$ i $\bar{a}_T(G)$ també perquè B' no té els versors apuntant en les dirs. dels canvis de valor i dir. de $\overline{OA}$ i $\overline{AG}$.

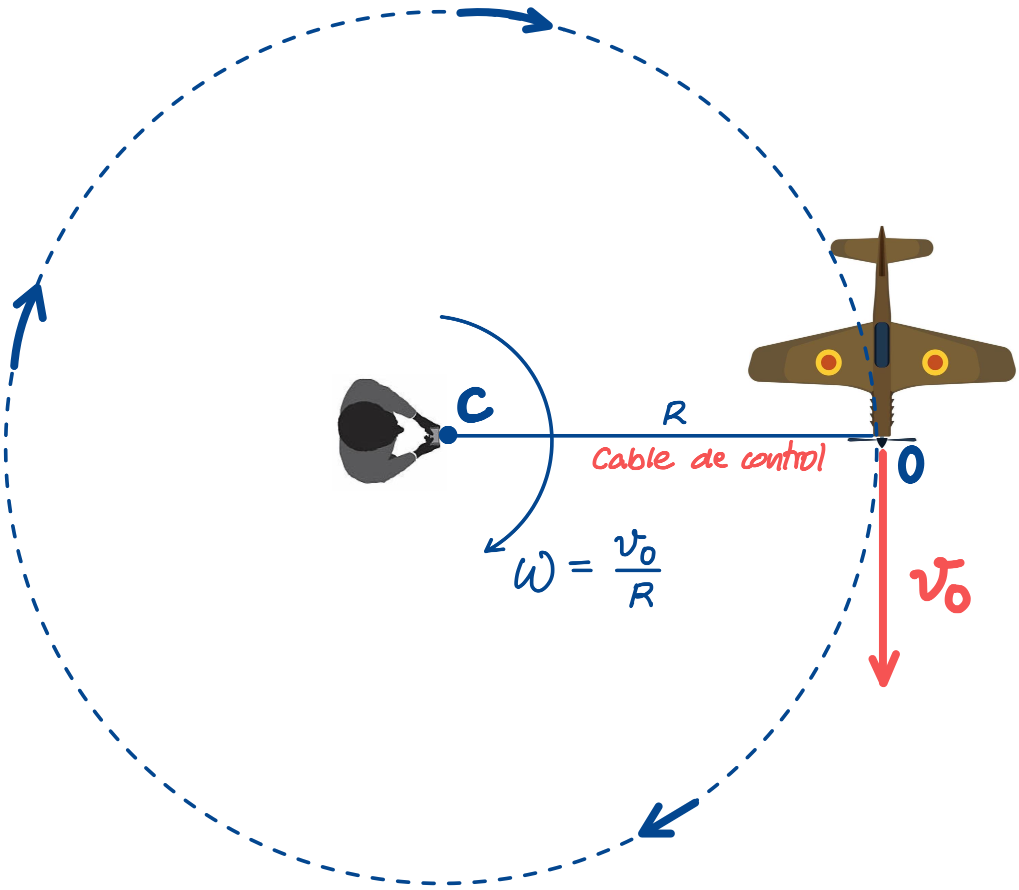




Un avió gira respecte del terra de manera que la punta de la cabina (**O**) descriu una trajectòria circular respecte del terra (T) amb celeritat constant v_0. L'hèlix està articulada a **O**. Mitjançant la derivada analítica, calcula $\bar{v}_T(\mathbf{P})$, $\bar{a}_T(\mathbf{P})$, $\bar{\alpha}_T^{\text{hèlix}}$.

Exercici inspirat en el pilotatge d'aeromodels amb línia de control ("control line flying"):

https://youtu.be/wZavLFRsMHg?si=wueZ1sArJ49wwCWp&t=179



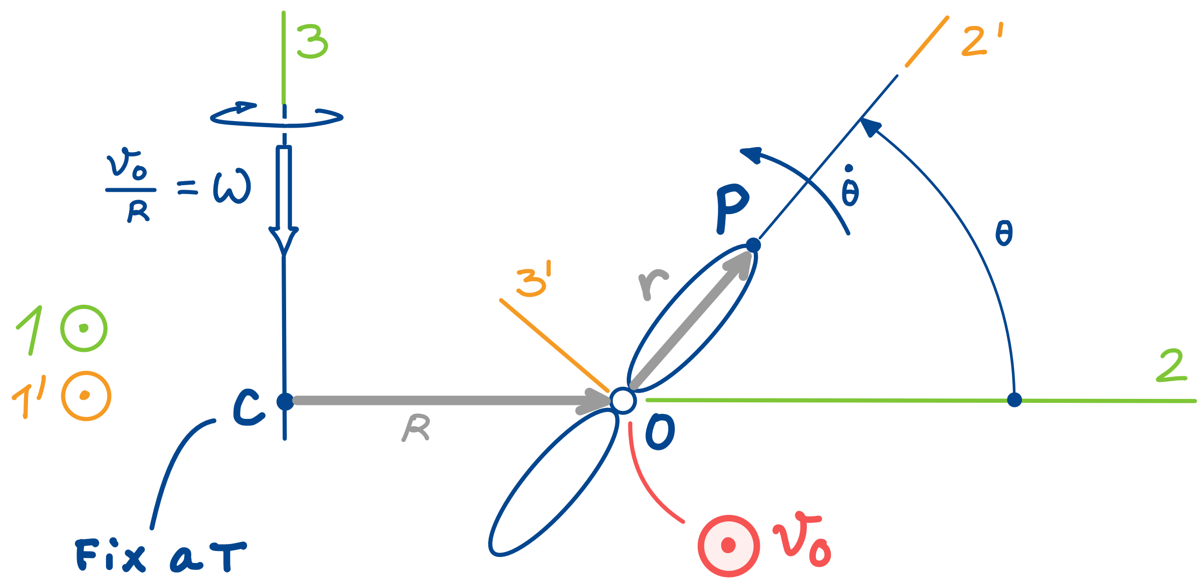
Definim:

$$R = |\overline{CO}|$$

$$r = |\overline{OP}|$$

$$\omega = \Omega_T^{\overline{CO}} = \underbrace{\frac{v_0}{R}}_{\text{valor de la vel. angular de } \overline{CO} \text{ resp. } T} \leftarrow \text{CONSTANT!}$$

Derivarem $\overline{CP} = \overline{CO} + \overline{OP}$ analíticament.



Cal triar una base per fer els càlculs.

Ens adonem que aquestes dues bases van bé:

$B = (1, 2, 3)$ ← facilita la projecció de $\overline{CO}$

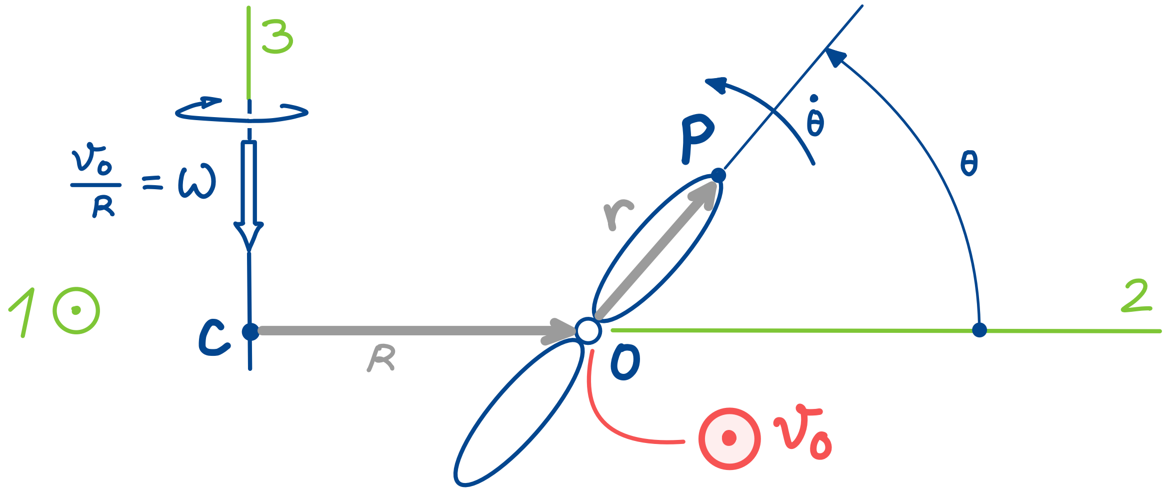
- 2: Dir $\overline{CO}$
- 1: Dir. ⊙

$B' = (1', 2', 3')$ ← facilita la proj. de $\overline{OP}$

- 2': Dir. $\overline{OP}$
- 1': Dir. ⊙

Farem els càlculs en ambdues bases, per practicar.

En base $B = (1,2,3)$



$\bar{v}_T(P)$

$$\{\overline{CP}\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R + r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -r\dot\theta\sin\theta \\ r\dot\theta\cos\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}_T^B} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ R + r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega R + \omega r\cos\theta \\ -r\dot\theta\sin\theta \\ r\dot\theta\cos\theta \end{Bmatrix}}$$

Comprovacions

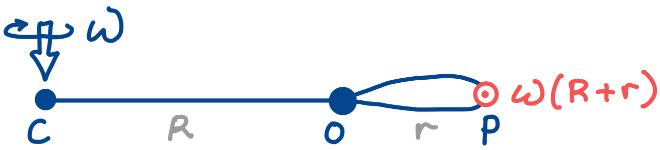
Anàlisi dimensional:

- Tot surt em m/s ✓

Anàlisi de casos particulars:

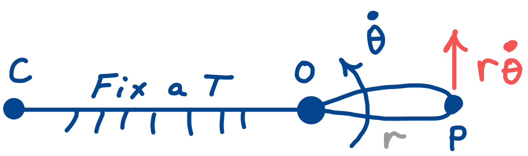
- Si aturem el motor de l'hèlix, però no la cabina:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dot\theta = 0 \ \forall t & (\text{aturem } \dot\theta) \\ \theta = 0 & (\text{suposem } \theta = 0) \end{array}} \Rightarrow \{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} \omega(R+r) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \checkmark$$



- Si aturem la cabina, però no l'hèlix:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \omega = 0 \ \forall t & (\text{aturem } \omega) \\ \theta = 0 & (\text{suposem } \theta = 0) \end{array}} \Rightarrow \{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r\dot\theta \end{Bmatrix} \checkmark$$



$\bar{a}_T(P)$

Recordem que $\omega = ct$

$$\boxed{\left\{\bar{a}_T(P)\right\}_B} = \begin{Bmatrix} -\omega r\dot{\theta}\sin\theta \\ -r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \\ r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \omega R + \omega r\cos\theta \\ -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -\omega r\dot{\theta}\sin\theta \\ -\omega^2 R - r\omega^2\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}} =$$

$$= \boxed{\begin{Bmatrix} -2\omega r\dot{\theta}\sin\theta \\ -r\ddot{\theta}\sin\theta - \omega^2 R - r\left(\dot{\theta}^2+\omega^2\right)\cos\theta \\ r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \end{Bmatrix}}$$

Comprovacions

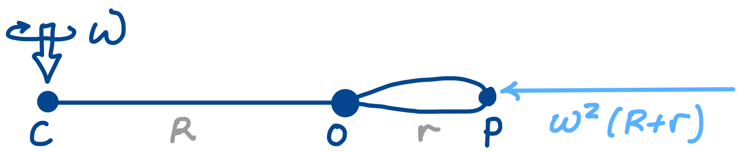
Anàlisi dimensional:

- Tot surt en m/s^2 ✓

Anàlisi de casos particulars:

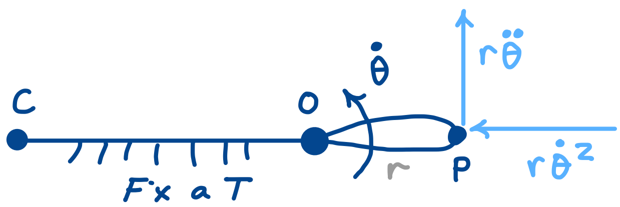
- Si aturem motor de l'hèlix, però no la cabina:

$$\boxed{\begin{matrix} \dot{\theta} = 0 \;\; \forall t & (\text{aturem } \dot{\theta}) \\ \theta = 0 & (\text{suposem } \theta = 0) \end{matrix}} \Rightarrow \left\{\bar{a}_T(P)\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega^2(R+r) \\ 0 \end{Bmatrix} \checkmark$$



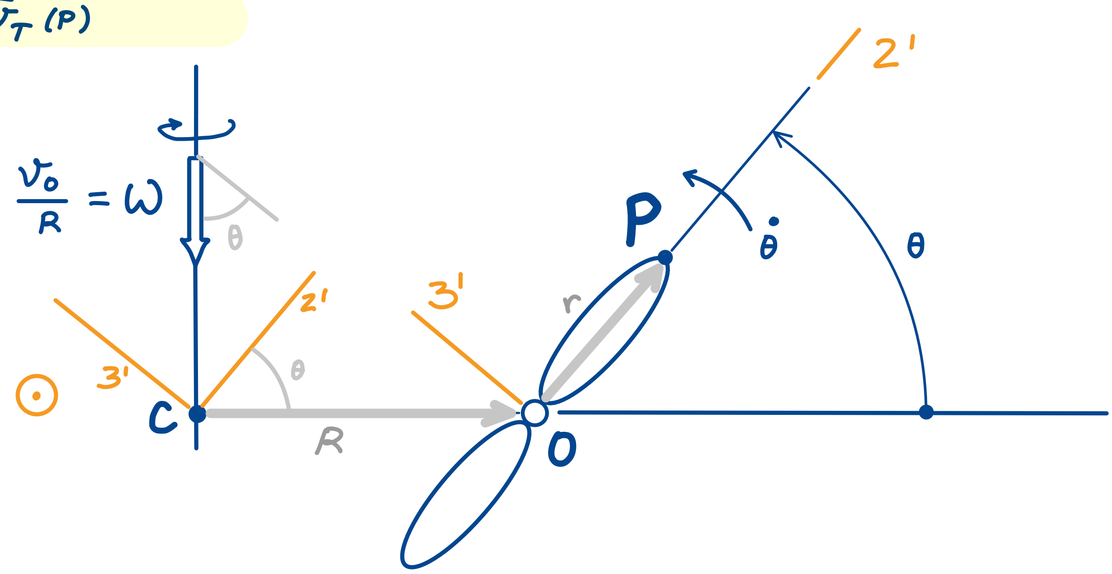
- Si aturem la cabina però no l'hèlix:

$$\boxed{\begin{matrix} \omega = 0 \;\; \forall t & (\text{aturem } \omega) \\ \theta = 0 & (\text{suposem } \theta = 0) \end{matrix}} \Rightarrow \left\{\bar{a}_T(P)\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \checkmark$$



En base B'

$\bar{v}_T(P)$



$$\{\overline{CP}\}_{B'} = \overline{CO} + \overline{OP} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R\cos\theta \\ -R\sin\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R\cos\theta + r \\ -R\sin\theta \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{\bar{v}_T(P)\}_{B'}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R\dot\theta\sin\theta \\ -R\dot\theta\cos\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot\theta \\ -\omega\sin\theta \\ -\omega\cos\theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ R\cos\theta + r \\ -R\sin\theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -R\dot\theta s \\ -R\dot\theta c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \overbrace{\omega R s^2 + \omega R c^2}^{\omega R} + \omega r c \\ R\dot\theta s \\ R\dot\theta c + \dot\theta r \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} \omega R + \omega r\cos\theta \\ 0 \\ \dot\theta r \end{Bmatrix}}$$

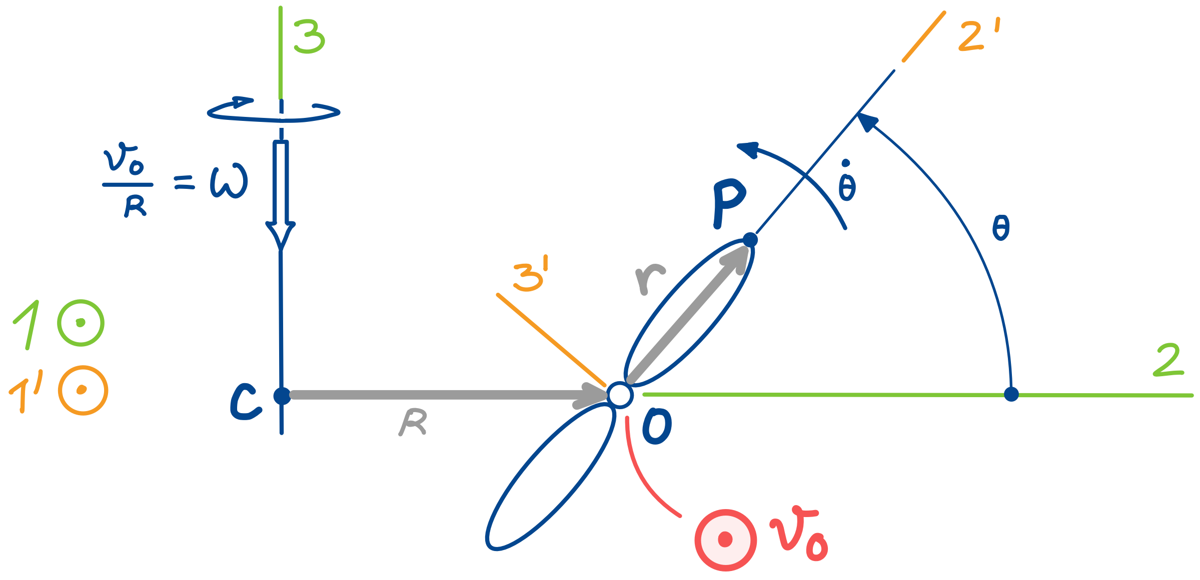
$s = \sin\theta$
$c = \cos\theta$ ← Per abreujar

$\bar{a}_T(P)$

$$\boxed{\{\bar{a}_T(P)\}_{B'}} = \begin{Bmatrix} -\omega r\dot\theta\sin\theta \\ 0 \\ \ddot\theta r \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot\theta \\ -\omega\sin\theta \\ -\omega\cos\theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \omega R + \omega r\cos\theta \\ 0 \\ \dot\theta r \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -\omega r\dot\theta\sin\theta \\ -\omega^2 R\cos\theta - \omega^2 r\cos^2\theta - \dot\theta^2 r \\ \omega^2 R\sin\theta + \omega^2 r\sin\theta\cos\theta \end{Bmatrix}} =$$

$$= \boxed{\begin{Bmatrix} -2\omega r\dot\theta\sin\theta \\ -\omega^2\cos\theta\,(R + r\cos\theta) - \dot\theta^2 r \\ \ddot\theta r + \omega^2\sin\theta\,(R + r\cos\theta) \end{Bmatrix}}$$

$\bar{\alpha}^{\text{hèlix}}_{T}$



$$\bar{\Omega}^{\text{hèlix}}_{T} = \bar{\Omega}^{\text{hèlix}}_{\text{cabina}} + \bar{\Omega}^{\text{cabina}}_{T} = \left(\odot\ \dot\theta\right) + \left(\Downarrow \omega\right)$$

En base B

$$\left\{\bar{\Omega}^{\text{hèlix}}_{T}\right\}_B = \begin{Bmatrix}\dot\theta\\0\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\0\\-\omega\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\dot\theta\\0\\-\omega\end{Bmatrix}\begin{matrix}\text{variable, en ppi.}\\ \\ \text{ct}\end{matrix}$$

$$\left\{\bar{\alpha}^{\text{hèlix}}_{T}\right\}_B = \begin{Bmatrix}\ddot\theta\\0\\0\end{Bmatrix} + \overbrace{\begin{Bmatrix}0\\0\\-\omega\end{Bmatrix}}^{\bar{\Omega}^{B}_{T}} \times \begin{Bmatrix}\dot\theta\\0\\-\omega\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\ddot\theta\\-\omega\dot\theta\\0\end{Bmatrix}$$

En base B'

$$\left\{\bar{\Omega}^{\text{hèlix}}_{T}\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix}\dot\theta\\-\omega\sin\theta\\-\omega\cos\theta\end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{\alpha}^{\text{hèlix}}_{T}\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix}\ddot\theta\\-\omega\dot\theta\cos\theta\\\omega\dot\theta\sin\theta\end{Bmatrix} + \cancelto{0}{\left\{\bar{\Omega}^{\text{hèlix}}_{T}\right\}_{B'} \times \left\{\bar{\Omega}^{\text{hèlix}}_{T}\right\}_{B'}}$$

Angles d’Euler

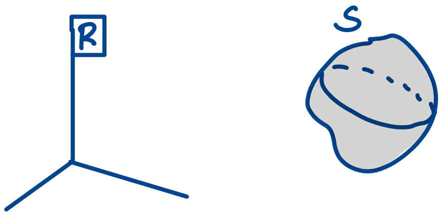
Repàs de teoria

\+

Exercicis

Repàs d'angles d'Euler

Permeten orientar un sòlid resp. una ref. i expressar la vel. angular del sòlid respecte aquesta ref.



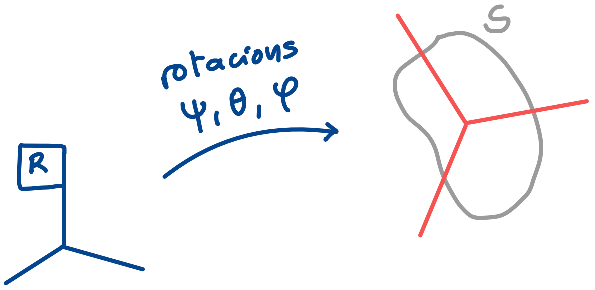
- Com està orientat ?
- $\underbrace{\text{Com gira S respecte R ?}}_{\text{Quina és } \bar{\Omega}^S_R \text{ ?}}$

Recordem els angles

ψ	θ	φ
psi	theta	phi
precessió	nutació	spin

Sempre en aquest ordre! →

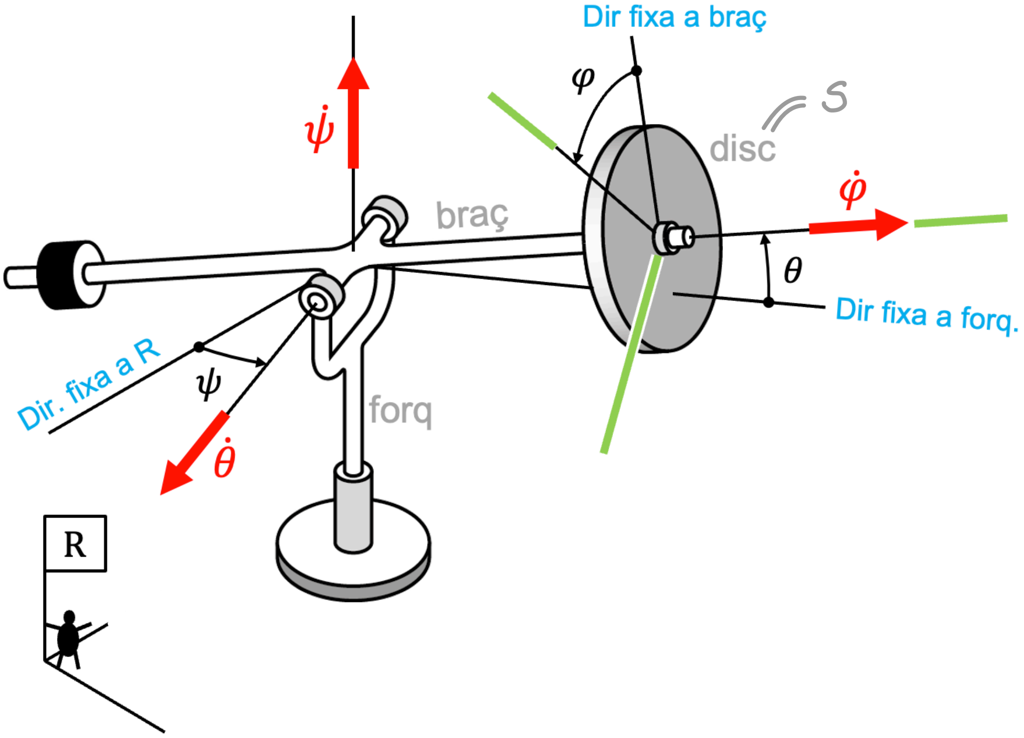
Sigui un sòlid S amb un triedre fix a ell. Les rotacions d'Euler són 3 rotacions encadenades (en sèrie), al voltant de 3 eixos, que permeten definir l'orientació del triedre fix a S relativa a un triedre fix a R:



A teoria heu vist com són aquestes rotacions en el cas del giroscopi. Vegeu apartat C1.4 de $\underbrace{\text{mec.etseib.edu}}_{\text{wikimec}}$

Però una cosa és com queda orientat aquest triedre fix al sòlid, i una altra és com queden els eixos de rotació després de cada gir.

Tot això es veu clar al giroscopi, on S = disc:



- Triedre fix a R? $\longrightarrow$ Les dirs. $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$ per $\psi = \theta = \varphi = 0$
- Triedre fix a S? $\longrightarrow$ El verd!
- Eixos d'Euler? $\longrightarrow$ Els dels vecs. vermells! $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$

Recordeu sempre això:

Eix	Com queda?	Gira amb vel. angular
$\bar{\psi}$	Fix a R	Res!
$\bar{\theta}$	$\perp$ a $\bar{\psi}$ i $\bar{\varphi}$	$\bar{\psi}$
$\bar{\varphi}$	Fix a S	$\bar{\psi} + \bar{\theta}$

A 90°

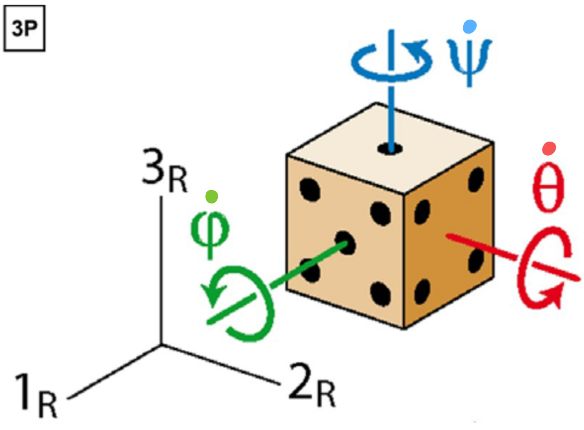
A 90°

$$\text{Eix } \bar{\theta} = (\text{Pla} \perp \bar{\psi}) \cap (\text{Pla} \perp \bar{\varphi})$$

Especificació rigorosa de la posició del 2n eix

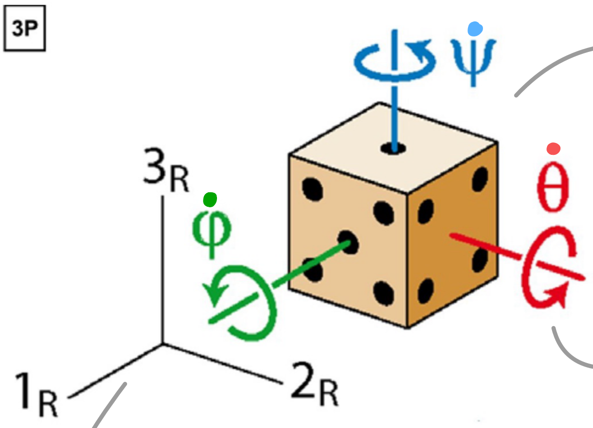
L'angle entre $\bar{\psi}$ i $\bar{\varphi}$ pot ser qualsevol!

3P



El dau s'orienta mitjançant tres angles d'Euler respecte del terra (R).
Per a la configuració $\psi=\theta=\varphi=0$, els eixos d'Euler són els indicats.
$1_R 2_R 3_R$ són tres direccions fixes a terra.
Determina l'orientació del dau i la direcció de les rotacions d'Euler si s'introdueixen $\Delta\psi=\Delta\theta=\Delta\varphi=90^o$.

3P



Configuració inicial del dau (per $\psi=\theta=\varphi=0$)

Fixeu-vos bé en els sentits de gir!

Triedre fix a $R=T$ (terra)

Per resoldre l'exercici:

- Dibuixarem com queden els eixos $\bar{\dot{\psi}}, \bar{\dot{\theta}}, \bar{\dot{\varphi}}$ després de cada rotació
- Deduirem com queden les cares tenint en compte que les oposades sumen 7.
- Comprovarem que:
  - $\bar{\dot{\psi}}$ roman fix a la ref.
  - $\bar{\dot{\theta}}$ " en el pla $\perp$ a $\bar{\dot{\psi}}$
  - $\bar{\dot{\varphi}}$ " fix a $\underbrace{\text{la cara original del dau}}$

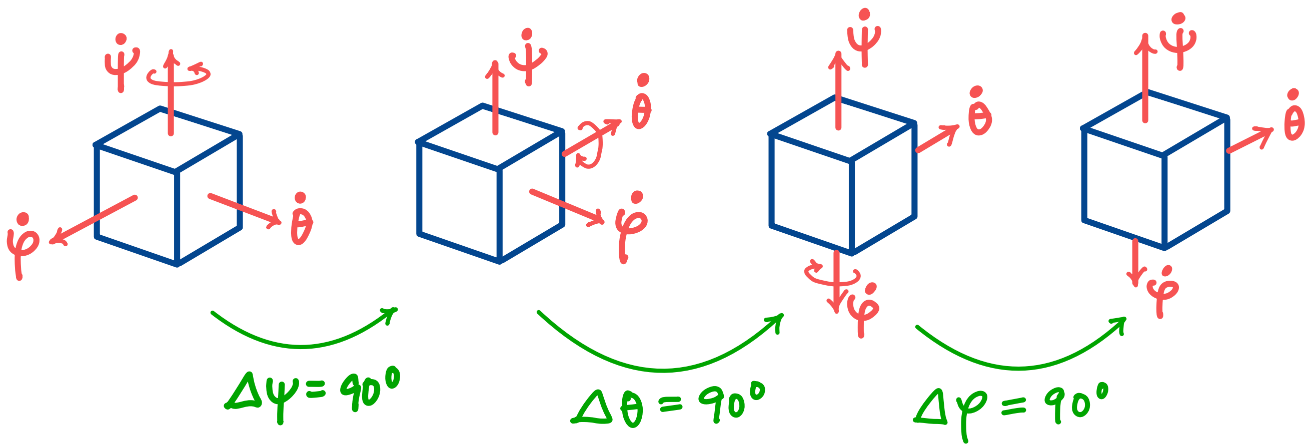
A 90°

A 90°

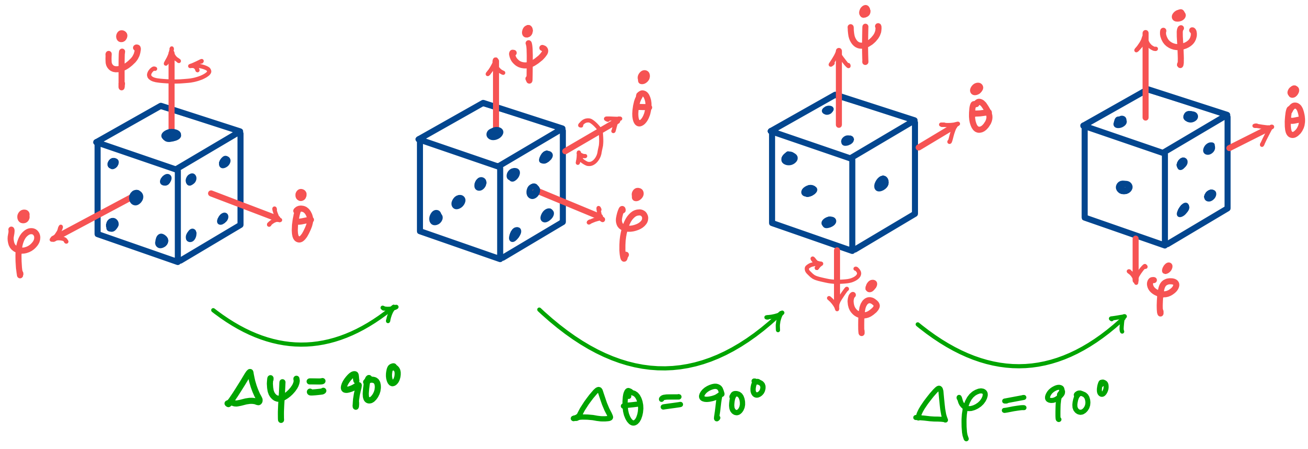
Angle entre $\bar{\dot{\psi}}$ i $\bar{\dot{\varphi}}$ pot ser qualsevol

 en aq. cas

Com queden $\bar{\dot{\psi}}, \dot{\theta}, \bar{\dot{\varphi}}$:



Com queden les cares:

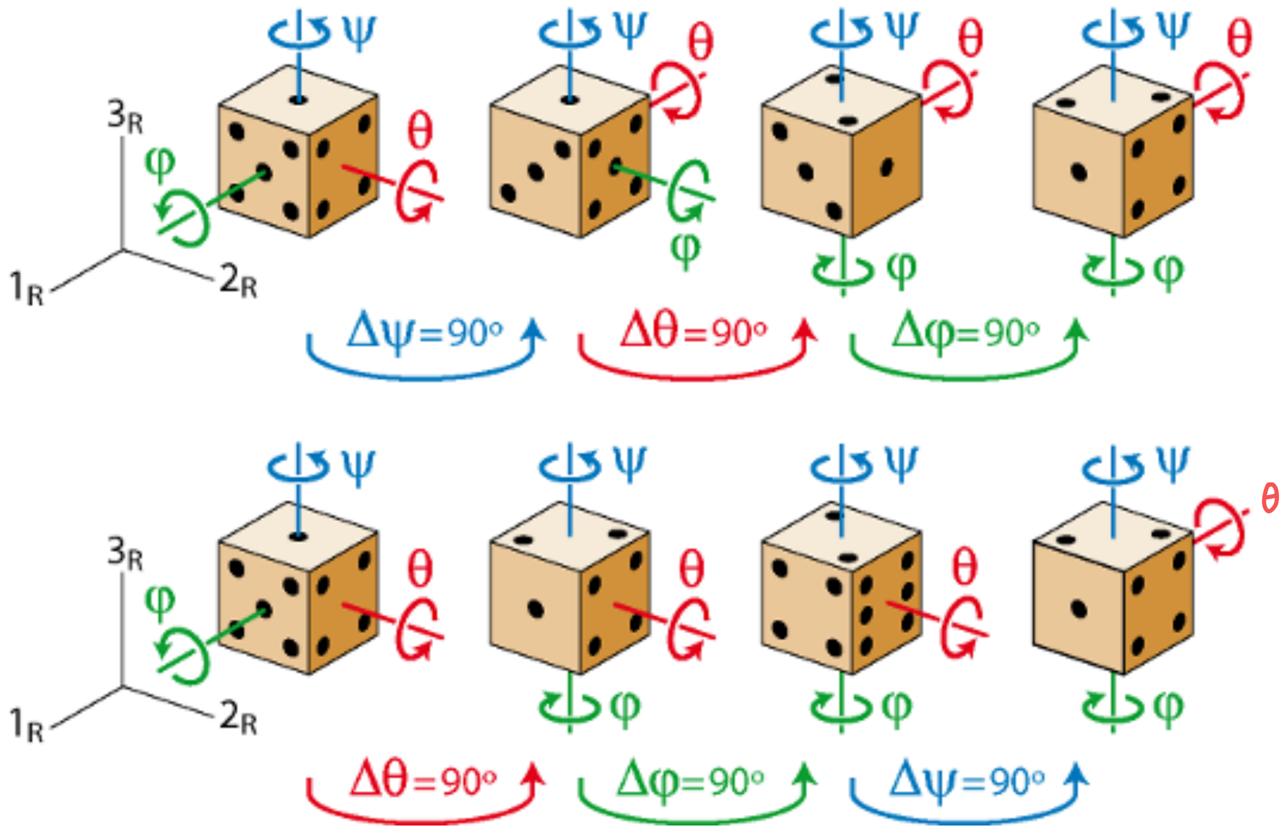


Comprovacions :

- $\bar{\dot{\psi}}$ roman fix a ref ? Sí !
- $\dot{\theta}$ roman al pla $\perp$ a $\bar{\dot{\psi}}$? Sí !
- $\dot{\varphi}$ roman $\perp$ a cara  ? Sí !

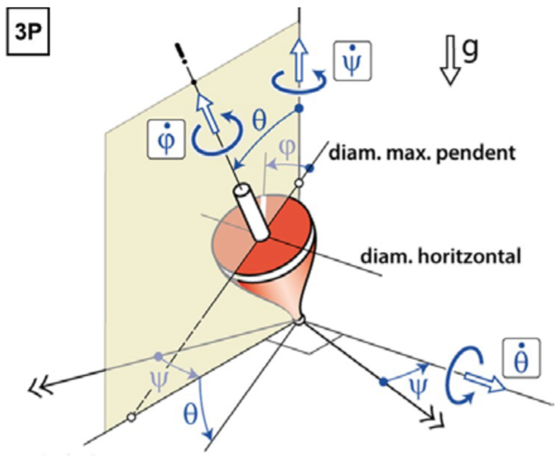
Deures: Introduïu les rotacions en l'ordre $\Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta\psi$ i comproveu que surt el mateix!

Solució en els dos ordres:



Ha de donar el mateix, ja que l'orientació per mitjà d'angles d'Euler és invariant a l'ordre en que s'introdueixen les rotacions.

3P

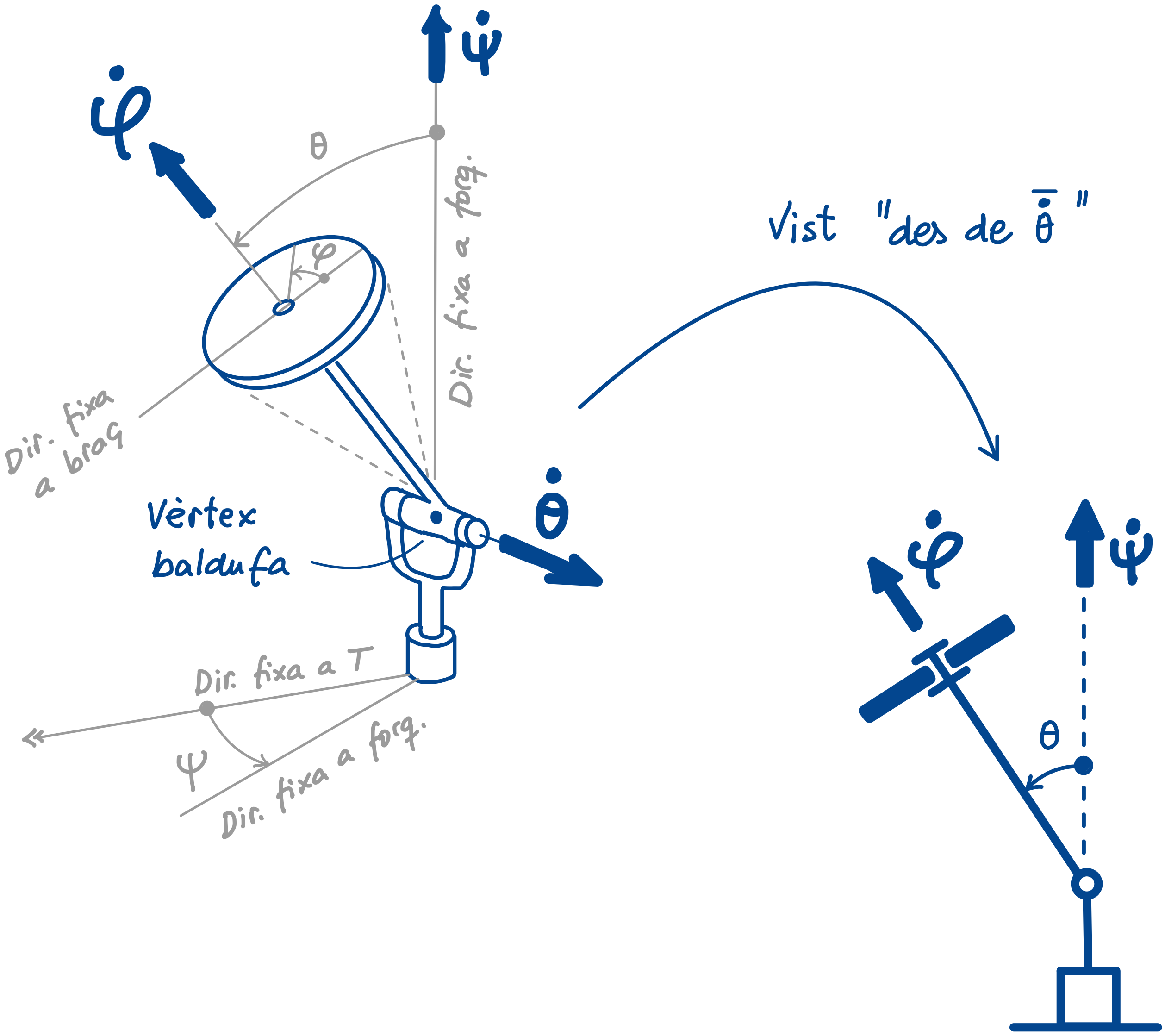


La rotació de la baldufa respecte del terra (T) es descriu mitjançant tres rotacions d'Euler. Mitjançant la derivada geomètrica, calcula $\overline{\alpha}_T^{\text{bald}}$.

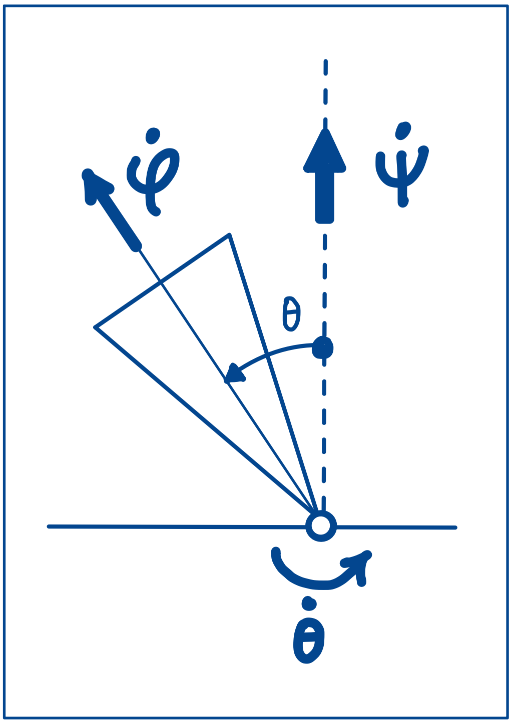
Accel. angular de la baldufa resp. T

Cal derivar $\overline{\Omega}_T^{\text{Bald}} = \overline{\dot\psi} + \overline{\dot\theta} + \overline{\dot\varphi}$ geomètricament.

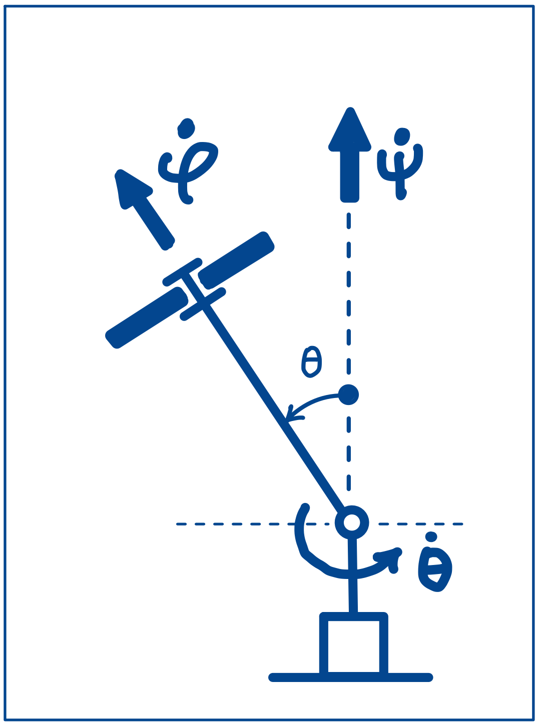
Tot i que no cal estrictament, podem pensar la baldufa com un giroscopi. Això ens ajudarà a entendre com varien $\overline{\dot\psi}$, $\overline{\dot\theta}$, $\overline{\dot\varphi}$:



Baldufa

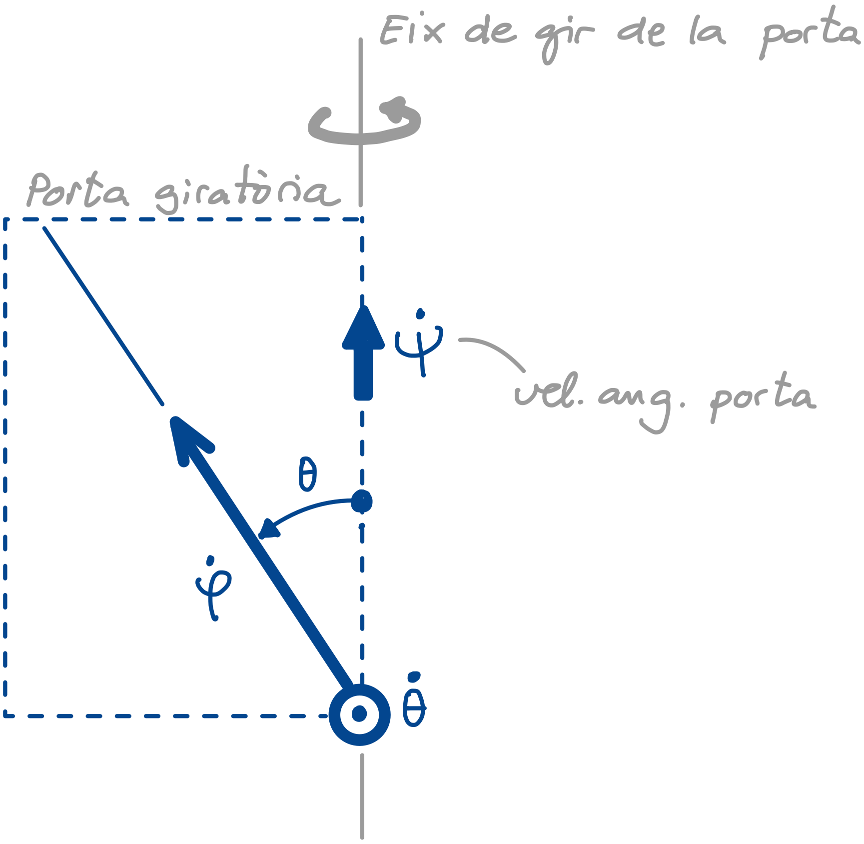


Giroscopi equivalent



Podem pensar el pla definit per $\bar{\dot\psi}$ i $\bar{\dot\varphi}$ com una "porta" que gira amb vel. angular $\Uparrow\dot\psi$

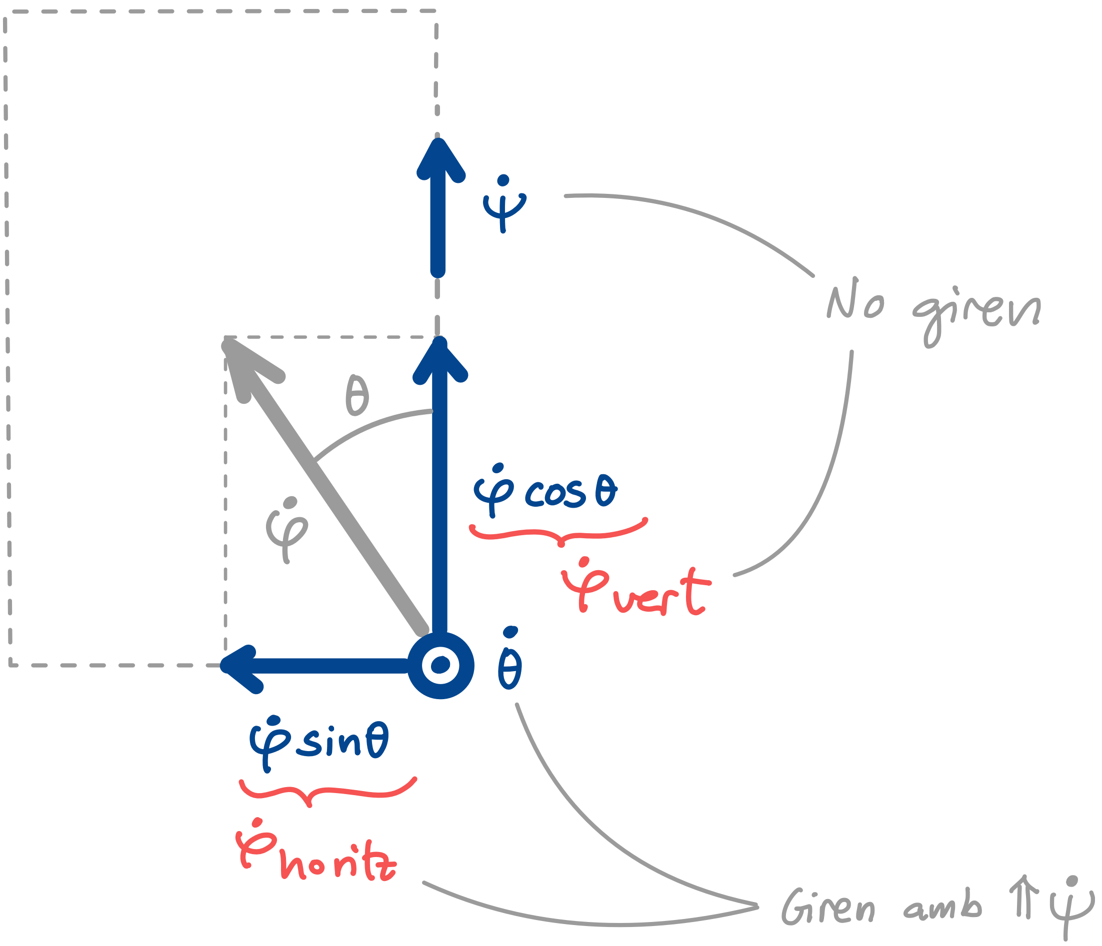
Els vectors $\bar{\dot\psi}$ i $\bar{\dot\varphi}$ són fàcils de dibuixar són sobre aquest pla, i $\bar{\theta}$ és $\perp$ al pla:



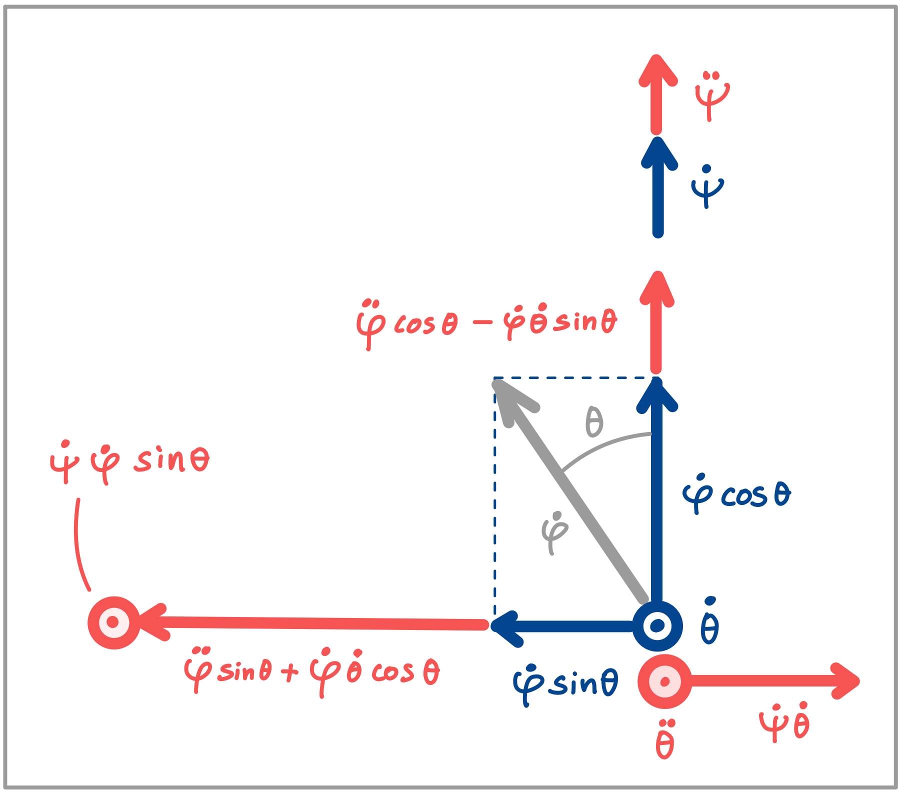
Per derivar geomètricament aquests tres vectors podem aplicar un truc: podem substituir $\bar{\dot{\varphi}}$ per

$$\underbrace{\bar{\dot{\varphi}}_{vert.}}_{\text{component vertical de } \bar{\dot{\varphi}}} + \underbrace{\bar{\dot{\varphi}}_{horitz}}_{\text{component horitzontal de } \bar{\dot{\varphi}}}$$

Això simplifica la derivació, perquè, ara, els vectors que giren ho faran amb rotació simple només:

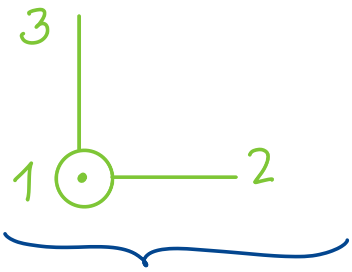


Ara derivem els vecs. blaus i obtenim els vermells :



$\bar{\alpha}_T^{Bald}$ és la suma dels vecs vermells ! Ja no la pintem!

Serà + pràctic expressar $\bar{\alpha}_T^{Bald}$ mitjançant la base :



$B = (1,\ 2,\ 3)$

Dir. de $\bar{\dot{\theta}}$ Dir. de $\bar{\dot{\psi}}$

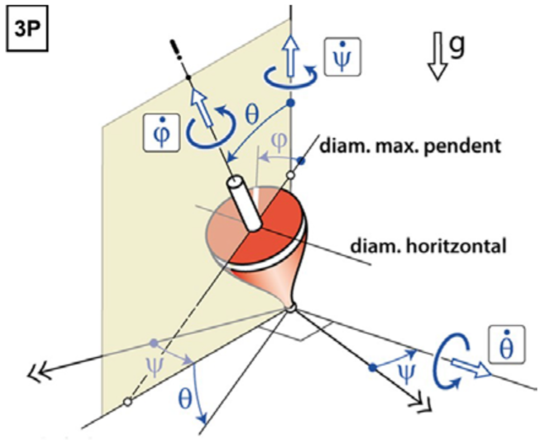
Sempre $\perp$, per construcció dels eixos d'Euler

Base fixa a porta giratòria

Queda així:

$$\left\{\bar{\alpha}_T^{bald}\right\}_B = \left\{\begin{array}{c} \ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\dot{\theta} - \ddot{\varphi}\sin\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta \end{array}\right\}_B \qquad (A)$$

3P

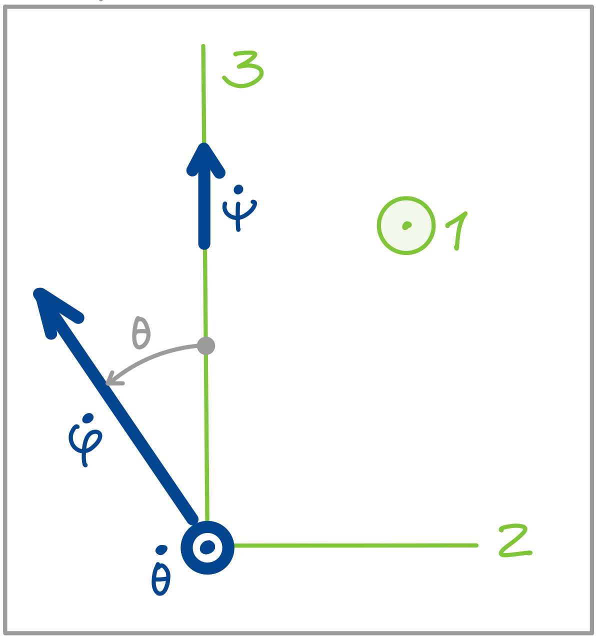


La rotació de la baldufa respecte del terra (T) es descriu mitjançant tres rotacions d'Euler. Mitjançant la derivada analítica, calcula $\bar{\alpha}_T^{\text{bald}}$.

En base B

$B = (1, 2, 3)$ — És la d'abans (gira amb $\Uparrow\bar{\dot\psi}$)

Pla "porta"



$$\left\{\bar{\Omega}_T^{\text{bald}}\right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot\theta \\ -\dot\varphi\sin\theta \\ \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\left\{\bar{\alpha}_T^{\text{bald}}\right\}_B} = \begin{Bmatrix} \ddot\theta \\ -\ddot\varphi\sin\theta - \dot\varphi\dot\theta\cos\theta \\ \ddot\psi + \ddot\varphi\cos\theta - \dot\varphi\dot\theta\sin\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot\theta \\ -\dot\varphi\sin\theta \\ \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} \dot\psi\dot\varphi\sin\theta \\ \dot\psi\dot\theta \\ 0 \end{Bmatrix}} =$$

$$= \boxed{\begin{Bmatrix} \ddot\theta + \dot\psi\dot\varphi\sin\theta \\ -\ddot\varphi\sin\theta - \dot\varphi\dot\theta\cos\theta + \dot\psi\dot\theta \\ \ddot\psi + \ddot\varphi\cos\theta - \dot\varphi\dot\theta\sin\theta \end{Bmatrix} (A'')}$$

Quadra amb (A) !

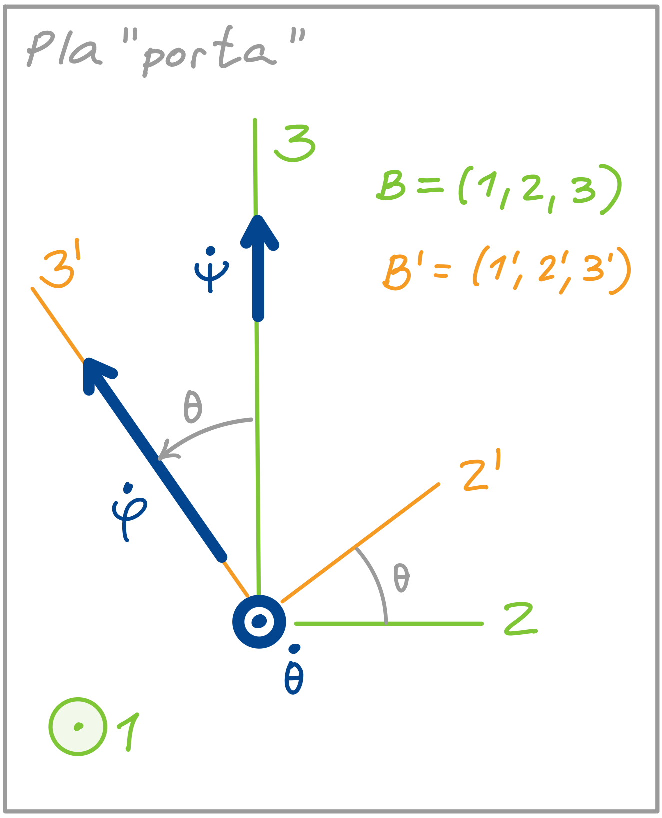
Ara en base $B' = (1', 2', 3')$ que també va bé

B' definida així:

$$B' = (1', 2', 3')$$

$1'$: Dir. de $\bar{\dot\theta}$ — $3'$: Dir. de $\bar{\dot\varphi}$

Sempre $\perp$
(per construcció eixos d'Euler)



$$\left\{\bar\Omega_T^{bald}\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \dot\theta \\ \dot\psi\sin\theta \\ \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi \end{Bmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; d/dt$$

$\bar\Omega_T^{B'} = \bar{\dot\psi} + \bar{\dot\theta}$ ← No intervé $\bar{\dot\varphi}$

$$\boxed{\left\{\bar\alpha_T^{bald}\right\}_{B'}} = \begin{Bmatrix} \ddot\theta \\ \ddot\psi\sin\theta + \dot\psi\dot\theta\cos\theta \\ \ddot\psi\cos\theta - \dot\psi\dot\theta\sin\theta + \ddot\varphi \end{Bmatrix} + \underbrace{\overbrace{\begin{Bmatrix} \dot\theta \\ \dot\psi\sin\theta \\ \dot\psi\cos\theta \end{Bmatrix}}^{\bar\Omega_T^{B'}} \times \begin{Bmatrix} \dot\theta \\ \dot\psi\sin\theta \\ \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi \end{Bmatrix}} =$$

$\bar a \times (\bar a + \bar b) = \underbrace{(\bar a \times \bar a)}_{0} + (\bar a \times \bar b)$

$$= \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot\theta \\ \dot\psi\sin\theta \\ \dot\psi\cos\theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} \dot\psi\dot\varphi\sin\theta \\ -\dot\theta\dot\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{Bmatrix} \ddot\theta + \dot\psi\dot\varphi\sin\theta \\ \ddot\psi\sin\theta + \dot\psi\dot\theta\cos\theta - \dot\theta\dot\varphi \\ \ddot\psi\cos\theta - \dot\psi\dot\theta\sin\theta + \ddot\varphi \end{Bmatrix}}$$