

# 12P

Teoremes vectorials

Exemples 2D

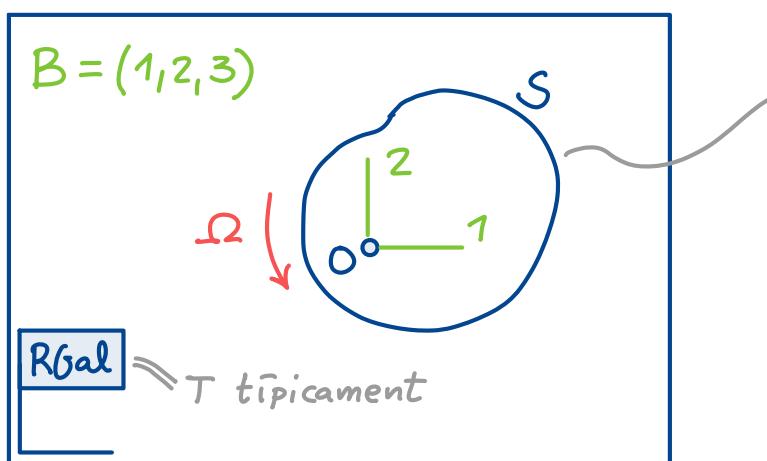
En els problemes d'avui, els sistemes mecànics seran plans i el seu moviment també. En aquesta situació, els teoremes vectorials

$$(TQM) \quad \sum \bar{F}_{ext} = m_{sist} \cdot \bar{\alpha}_{RGal}(G)$$

$$(TMC) \quad \sum \bar{M}_{ext}(o) - \bar{OG} \times m_{sist} \bar{\alpha}_{RGal}(o) = \dot{\bar{H}}_{RTO}(o)$$

proporcionen **3 egs** i més 6 (**2 del TQM i 1 del TMC**)  
 En 2 direccions del pla      En la dir.  $\perp$  al pla

A més, el càlcul d'  $\dot{\bar{H}}_{RTO}(o)$  es simplifica molt perqüè, en ser plans els sòlids, la dir.  $\perp$  al pla del sòlid és DPL, i tenim el següent:



Sòlid  $S$ , pla, amb moviment en el pla dibuixat

$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTO}^S(o) \right\}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}}_{[\bar{I}(o)]_B} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{Bmatrix}}_{\dot{\bar{\Omega}}_{RTO}^S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33} \Omega \end{Bmatrix} = \odot I_{33} \Omega$$

$$\dot{\bar{\Omega}}_{RTO}^S = \dot{\bar{\Omega}}_{RGal}^S$$

$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(o) = \odot I_{33} \dot{\bar{\Omega}} = I_{33} \underbrace{(\odot \dot{\bar{\Omega}})}_{\text{Accel. angular d'S resp. T} / \dot{\bar{\alpha}}_T^S} = I_{33} \cdot \bar{\alpha}_T^S$$

Accel. angular  
d'S resp. T /  $\dot{\bar{\alpha}}_T^S$

En el cas 2D també es simplifiquen els torsors d'eullag.

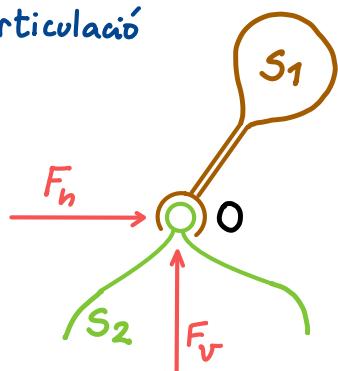
Mentre que en el cas 3D tenen 6 components (3 de força i 3 de moment<sup>(\*)</sup>) en el cas 2D només tenen 3 components:

- 2 de força en el pla del moviment
- 1 de moment en dir.  $\perp$  al pla de moviment

La següent taula ho il·lustra, indicant el torsor d'eullag de  $S_2$  sobre  $S_1$  referit al punt O, per a un eullag de revolució (o "articulació") i un eullag prismàtic:

Eullag	$\bar{F}_{S_2 \rightarrow S_1}$	$\bar{M}_{S_2 \rightarrow S_1}(O)$
--------	---------------------------------	------------------------------------

#### Articulació



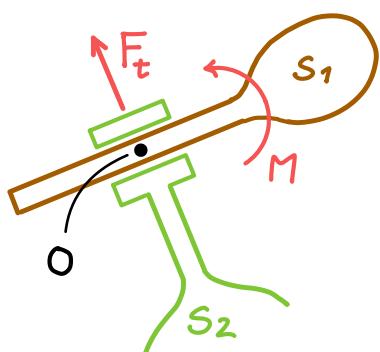
$$(\rightarrow F_h) + (\uparrow F_v)$$

$\overline{O}$

$h = \text{"horizontal"}$

$v = \text{"vertical"}$

#### Prismàtic



$$(\uparrow F_t)$$

$\overset{\curvearrowleft}{\circ} M$

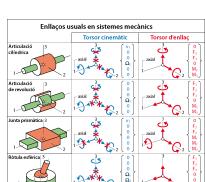
$t = \text{"transversal"}$

Ah! I en el cas 2D tindrem:

$$\# \text{incogn. eullag} \text{ independents} + \# \text{GL de } S_1 \text{ resp. } S_2 = 3$$

en 3D  
era 6

(\*)



← Recordeu  
Fig. D3.11  
de Wikimec

## APLICACIÓ DEL TMC A CONTACTES PUNTUALS

### IMPORTANT

Tot i que es pot, en aquest curs mai aplicarem el TMC a un punt que sigui de contacte puntual entre dos sòlids (amb o sense lliscament)

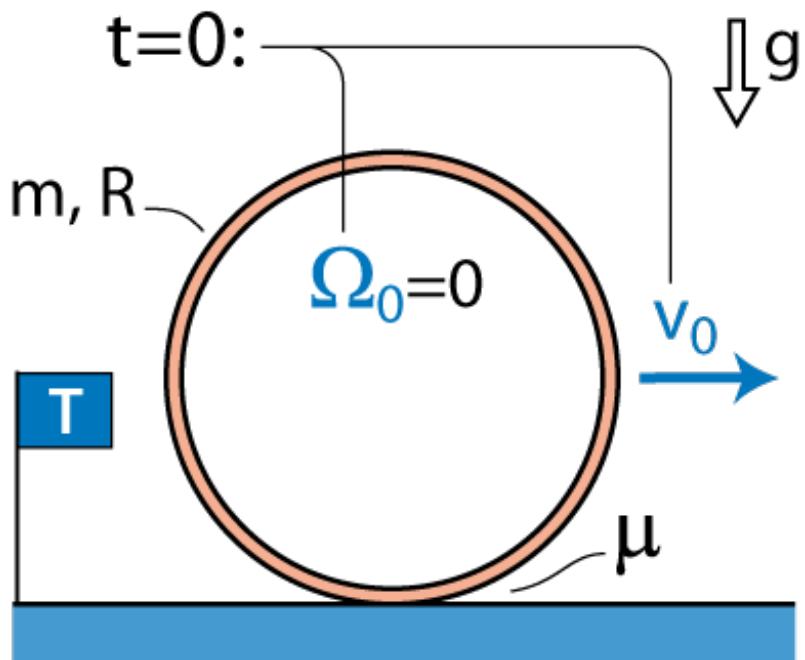
( Per a més detalls, vegeu Wikimec, apartat D4.5 )

En els exercicis següents apareixen contactes puntuals amb o sense lliscament i veureu que mai aplicarem el TMC en els punts de contacte implicats.

## Anell llenguat tangencialment

(Ex. 8.47 (libre MPSR))

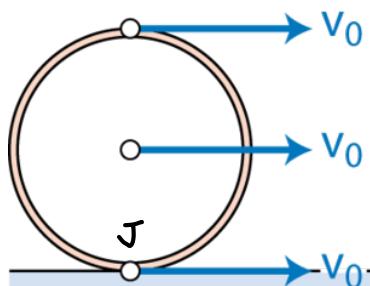
L'anell homogeni, de massa  $m$  i radi  $R$ , té inicialment un moviment de translació respecte del terra rugós. Quant de temps trigarà a deixar de lliscar respecte el terra?



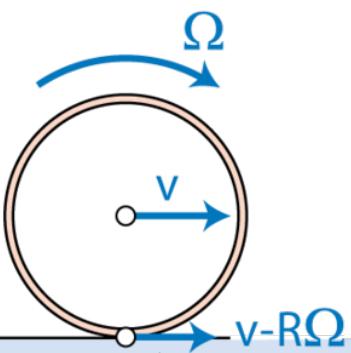
Llísca

No llísca

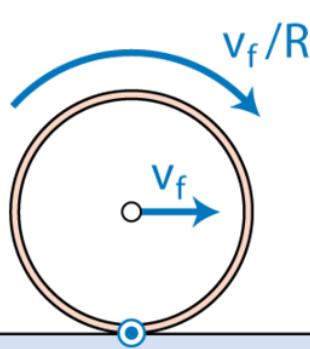
$t=0$



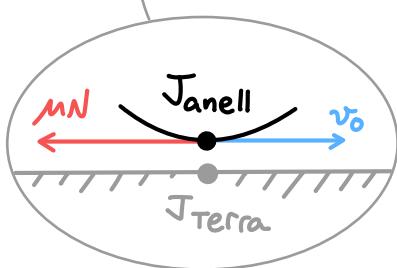
$t=t$



$t=t_f$



CIR<sub>T</sub>

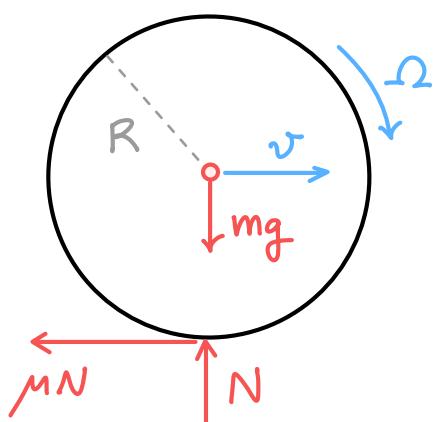


$$\begin{aligned} \mathbf{v}_T(\text{Janell}) &= (\vec{v}) + (\vec{\Omega}) \times (\downarrow R) \\ &= (\vec{v}) + (\cancel{\vec{\Omega}R}) = \\ &= (\underline{\vec{v} - \vec{\Omega}R}) \end{aligned}$$

$t$  tal que  $v(t) - \vec{\Omega}(t)R = 0$  ?  $\leftarrow$  és el  $t_f$  buscat!

Ens calen  $v(t)$ ,  $\vec{\Omega}(t)$   $\Rightarrow$  Busquem egs mov per a  $v$  i  $\vec{\Omega}$

via  $\underbrace{TQM + TMC}_{\text{Per } t=t}$



Sist = Anell:

- incògn:  $N, \dot{v}, \dot{\vec{\Omega}}$
- # incògn = 3
- # egs = 3  $\begin{cases} 2 \text{ TQM} \\ 1 \text{ TMC} \end{cases}$

Problema  
DET

FULL RUTA

SIST = Anell  
TQM  
TMC(G)

No a J! Mai aplicarem TMC en un punt on hi hagi | c.p.a.ll.  
c.p.s.ll. !

## TQM

$$\sum \bar{F}_{ext} = m \bar{a}_T(G)$$

$$\left. \begin{array}{l} (\uparrow N) + (\downarrow mg) = 0 \\ (\leftarrow \mu N) = m (\rightarrow \dot{v}) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N = mg \\ \mu N = -m\dot{v} \end{array} \right.$$

$v$  minvarà a ritme  $mg$

$$\boxed{\dot{v} = -\frac{\mu N}{m} = -\frac{\mu mg}{m} = \boxed{-\mu g}}$$

Eq. mov. per a  $v$   
(EDO 1er ordre lineal)  
i trivial

Integrem  $\dot{v} = -\mu g$   
 $\int_0^t \dot{v} dt = \int_0^t -\mu g dt$

$v(t) = v_0 - \mu gt$

Evolució de  $v$  (un MRUA)

Dada

## TMC (G)

$$\sum \bar{M}_{ext} = I(G) \bar{\alpha}_T^{\text{anell}}$$

$$(\cancel{\otimes \mu NR}) = mR^2 (\cancel{\otimes \dot{\Omega}})$$

$\Omega$  augmentarà a ritme  $\frac{mg}{R}$

$$\boxed{\dot{\Omega} = \frac{M}{mR} N = \frac{M}{mR} \cdot mg = \boxed{\frac{mg}{R}}}$$

Eq. mov. per  $\Omega$

Integrem  $\dot{\Omega} = \frac{mg}{R}$

$\Omega(t) = \Omega_0 + \frac{mg}{R} t$

Evolució de  $\Omega$

$\Omega_0 = 0$  perquè per  $t=0$ , anell es trasllada !

$$\underline{\text{Imosem } v(t) - \Omega(t)R = 0}$$

$$v_0 - \mu gt - \left( \frac{mg}{R} t \right) R = 0 \rightarrow \boxed{t = \frac{v_0}{2\mu g}}$$

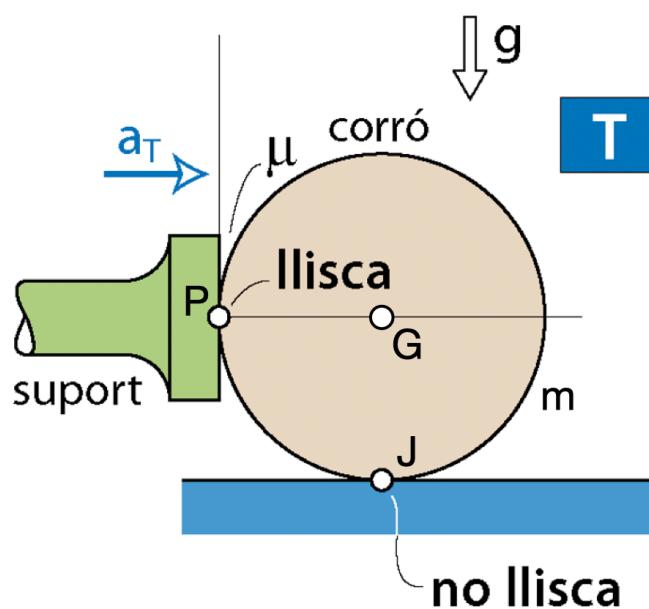
És  $t_f$  !

(\*)  $\Omega_0 = \Omega(t) \Big|_{t=0} = \Omega(0) = 0$  [Per  $t=0$  es trasllada (no gira)]

## Corró empès per suport

(Problema breu, examen final gener 2024)

I [3p] El corró homogeni de massa  $m$  es mou sense lliscar sobre un terra horitzontal empès per un suport que té una acceleració  $a_T$  respecte del terra. Quin és el valor de la força normal del suport sobre el corró?



"Sup" = "suport"

Sigui  $v_T$  = vel. del sup. resp. T

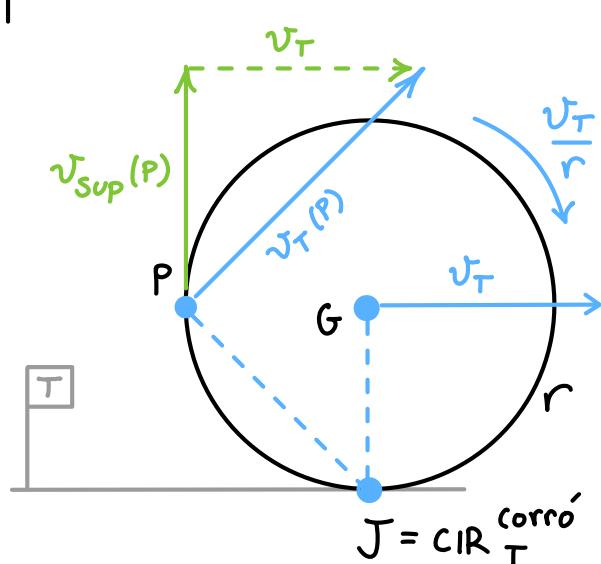
Llavors,  $\dot{v}_T$  = accel. del sup. resp. T =  $\frac{a_T}{r}$   
Dada

Tots els punts del suport tenen igual vel. i accel.

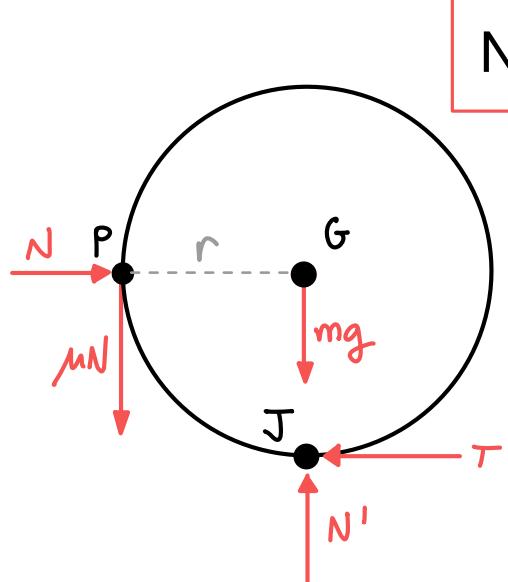
Clarament, la velocitat de G és ( $\rightarrow v_T$ )

Frec sec a P apunta en dir contrària a  $\vec{v}_{\text{Sup}}(P)$  (\*)

Descripció cinemàtica



Descripció dinàmica



N?

Volem N.

Aplicarem TQM + TMC a SIST = Corró (\*\*)

Incògn.:  $N, N', T \Rightarrow 3$  incògn.

Eqs.: TQM, TMC  $\Rightarrow 3$  eqs.

PROBLEMA

DET

On apliquem TMC?

- Mai a P o J (són de contacte puntual)
- Només queda G  $\rightarrow$  l'apliquem a G

(\*)  $\vec{v}_{\text{Sup}}(P)$  té dir.  $\uparrow$ . Es veu per composició de vel. amb  $AB=T$ , REL=Sup. (representada al dibuix)

(\*\*) SIST = Suport  
SIST = Suport + corró | Donarien un problema INDET. Vegeu anàlisi DGI en apèndix ✓.

2 eqs.  
2 incòg.

$SIST = \text{Corró}$

$TQM \Big]_{\text{horitz}}$ ,  $TMC(G) \Big]_{\perp \text{ pla}}$

incòg:  $N$  i  $T$

}



$TQM \Big]_{\text{horitz}}$

$a_T$  no és incògn.  
perquè és dada

$$(\rightarrow N) + (\leftarrow T) = m (\rightarrow a_T)$$

$$N = T + m a_T \quad (\text{I})$$

$TMC \Big]_{\perp \text{ pla}}$

$$\sum \bar{M}_{ext}(G) = \dot{\bar{H}}_{RTG}(G) = I(G) \cdot \bar{\alpha}_T^{\text{corró}}$$

$$(\odot \mu N r) + (\otimes T r) = \frac{mr^2}{2} \cdot \left( \otimes \frac{\dot{v}_T}{r} \right)$$

$$\mu N - T = - \frac{m}{2} a_T$$

$$T = \mu N + \frac{m a_T}{2} \quad (\text{II})$$

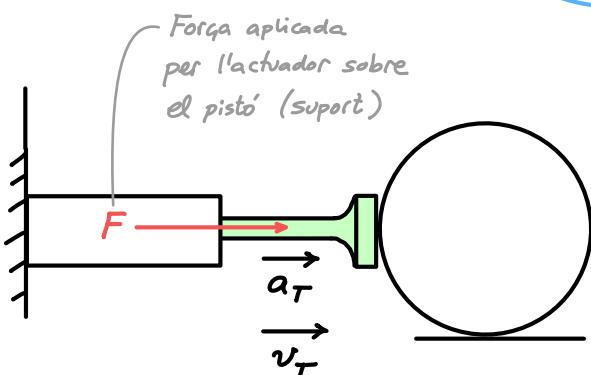
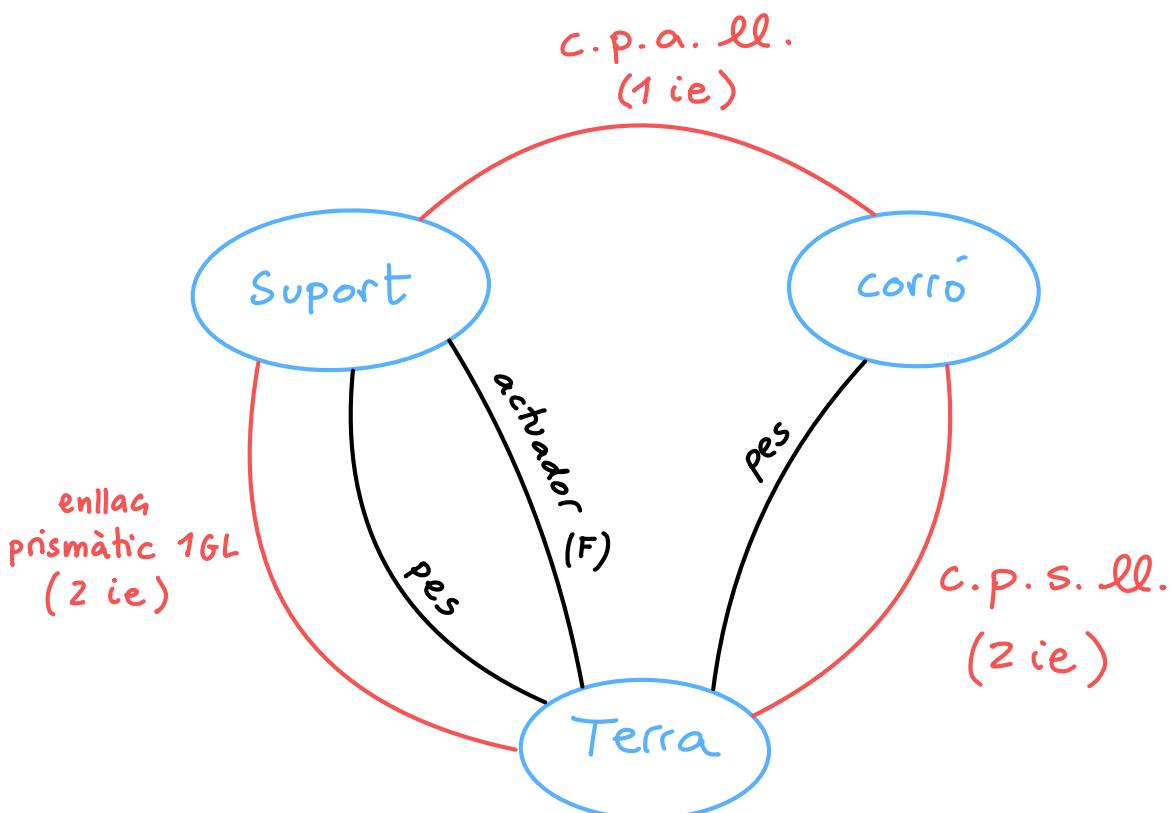
Subst (II) a (I):

$$N = \mu N + \frac{m a_T}{2} + m a_T$$

$$N(1-\mu) = \frac{3 m a_T}{2}$$

$$N = \frac{3 m a_T}{2(1-\mu)}$$

## Appendix : Anàlisi del DGI



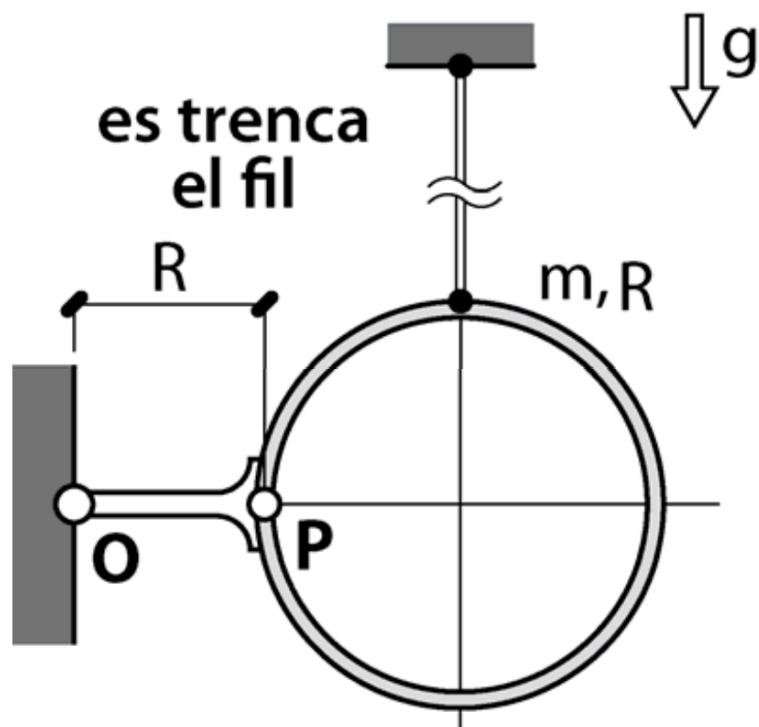
Com que  $a_T$  és coneguda, cal pensar que hi ha un activador lineal (pistó hidràulic) que la imposa. És a dir,  $v_T$  és un grau de llibertat forçat per l'activador, i això vol dir que  $v_T(t)$  és coneguda, i per tant  $a_T(t) = \dot{v}_T(t)$  també. Vol dir que  $F$  serà incògnita.

Sistema	incògn.	#incogn.	problema
corró	3 ie	3	DET
corró + sup.	4 ie, F	5	INDET
sup.	3 ie, F	4	INDET

Trenquem el fil !

Problema breu Examen final 6 juny 2023

I [3p] L'anell de radi  $R$  i massa  $m$  és solidari a la barra **OP** de massa negligible articulada a terra a **O**. Quina és l'acceleració angular de l'anell respecte del terra just quan es trenca el fil? Quant val la força vertical d'enllaç a **O** en aquest mateix instant?

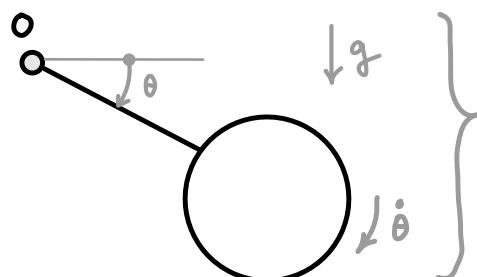


Quan tenim 1 sol sólid, triem aquest com a sistema

Triem sist = anell + barra  
"pega"

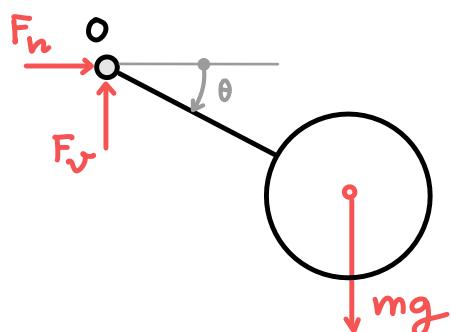
Quan tallen fil  $\rightarrow$  Sist. binarà 1 GL

Introduim rotd  $\theta$  per descriure 'l':

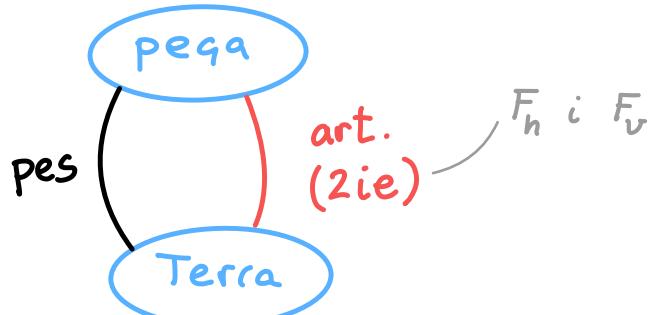


Situació genèrica  
[estat mecànic genèric  $(\theta, \dot{\theta})$ ]

Forces sobre pega:



DG1:



Si per a la situació genèrica volguéssim l'eq. del mov.  $\dot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}, \text{pars})$  i  $F_h$  i  $F_v$  en funció de  $\theta, \dot{\theta}$ , el full de ruta seria:

SIST = Pega (3 incòg:  $F_h, F_v, \ddot{\theta}$ )

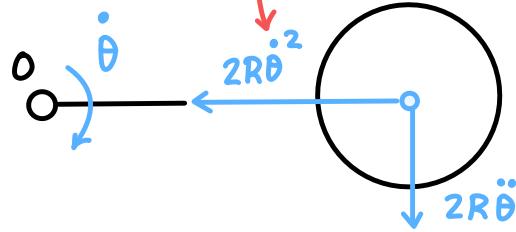
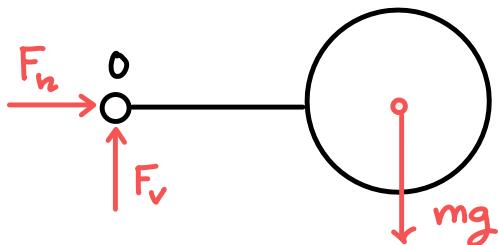
TQM  
TMC (o) } (3 eqs)

PROBLEMA

DET

Però només volen  $F_v$  i  $\ddot{\theta}$   
per  $\dot{\theta} = 0$  i  $\ddot{\theta} = 0$ :  
condicions inicials

$\dot{\theta} = 0$  perquè  
partim del repòs  
(tallem el fil)



Formulant

Apareixen les incogn.

TQM]vert

TMC(0)

$F_v, \ddot{\theta}$

$\ddot{\theta}$

} 2 incòg!  
Probl. DET

Full rta : Sist = pega, TQM]vert, TMC(0)

TQM]vert

$$(\uparrow F_v) + (\downarrow mg) = m (\downarrow 2R\ddot{\theta}) \quad \left| \Rightarrow F_v = mg - 2mR\ddot{\theta} \quad (I) \right.$$

TMC(0)

$$(\vec{\otimes} 2Rmg) = I(0) \cdot (\vec{\otimes} \ddot{\theta})$$

Steiner  $mR^2 + m(2R)^2 = 5mR^2$

$$2Rmg = 5mR^2 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2g}{5R}$$

(II)

Subst. II a I :

$$F_v = mg - 2mR \left( \frac{2g}{5R} \right) = mg - \frac{4}{5}mg = \frac{1}{5}mg$$

Avís: fixeu-nos que no ens ha calgut aplicar les condicions inicials  $\theta=0$ ,  $\dot{\theta}=0$  per calcular  $F_r$ , perquè  $\theta$  i  $\dot{\theta}$  no han intervingut. Si l'haguessin intervingut, caldrà haver substituït aquests valors en l'expressió de  $F_r$ .

Com a exemple, fixeu-vos que en el càlcul de  $F_h$  (si l'haguessin demanat) hi apareix  $\dot{\theta}$  i per tant cal imposar  $\dot{\theta}=0$ :

TQM]<sub>horitz</sub>

---

$$(\rightarrow F_h) = m (\leftarrow 2R\dot{\theta}^2)$$

$$F_h = -m 2R\dot{\theta}^2 = 0$$

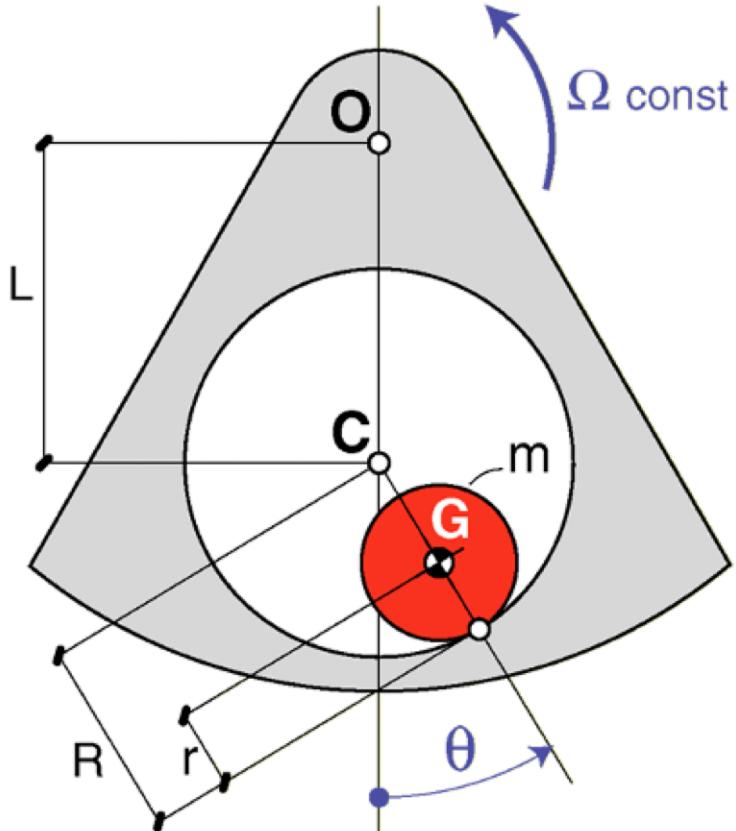
$\dot{\theta}=0!$

## Pèndol de Salomon

Prob. 8.7 (Llibre MPSR)

En el sistema de la figura, que s'anomena *pèndol de Salomon*, el corró és massís i homogeni, i rodola sense lliscar sobre la pista cilíndrica que gira amb velocitat angular  $\Omega$  constant al voltant de l'eix, perpendicular al pla de la figura, que passa per O. Es negligeix la intervenció de la gravetat.

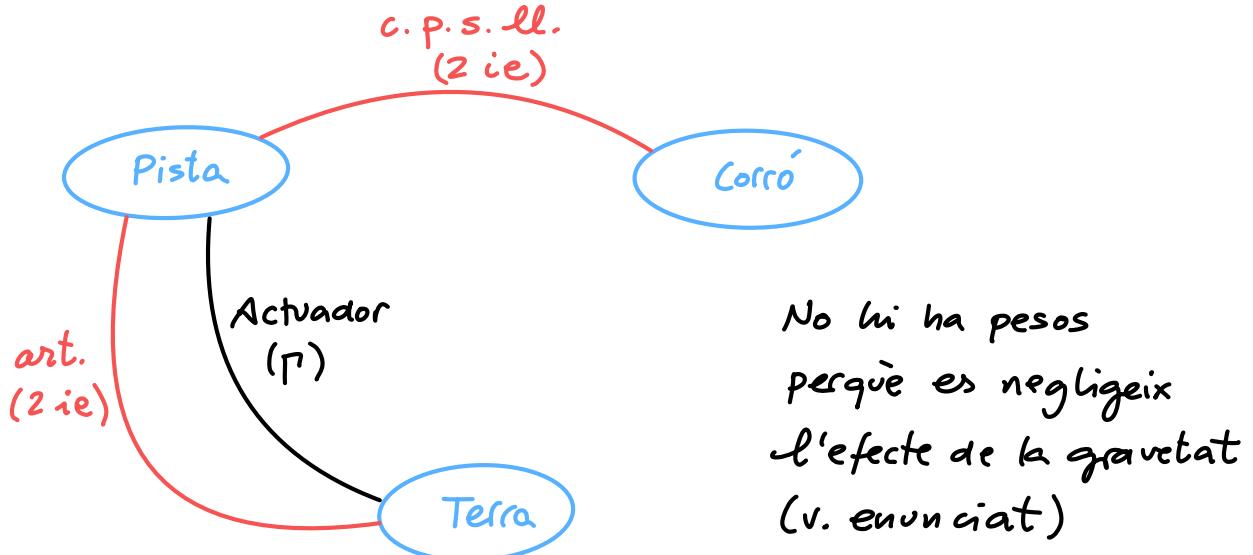
- Determineu l'equació del moviment per a la coordenada  $\theta$ .
- Demostreu que  $\theta = 0$  és una posició d'equilibri.
- Per a quins valors d'  $\Omega$  és estable aquesta posició?
- Quina és la freqüència de les petites oscil·lacions del corró al voltant de la posició  $\theta = 0$ ?



Sist amb 2 GL |  $\Omega$  forçat  
 $\ddot{\theta}$  lliure  $\leftarrow$  Volem eq. mov.  $\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta})$

### (a) Eq. mov. coord. $\theta$

DG1 :



Sist	incògn.	# incògn.	problema
Corró	2 ie, $\ddot{\theta}$	3	DET
Corró + Pista	4 ie, $\Gamma$ , $\ddot{\theta}$	6	INDET

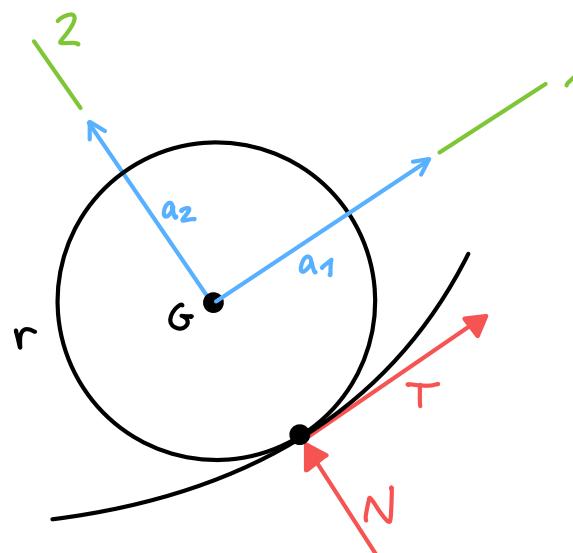
Explorem més en detall això |  $SIST = corró$   
 $TQM$   
 $TMC(G)$

Mirem forces Sobre sist

No provem  $TMC(O)$  perquè  $O \notin$  corró  $\left( \text{peri es podria, via descomp. baicèntrica} \right)$

No provem  $TMC(J)$  perquè a  $J$  hi ha un contacte puntual entre dos sòlids.

Forces sobre sist :



$$\{\bar{\alpha}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\alpha}_T^{\text{corró}}\}_B$$

Ens caldran, en funció de  $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$  i  $\Omega$ .

Full rta

SIST = Corró

$$TQM]_1, \quad TMC(G)$$

incòg.  $\ddot{\theta}, T$

incòg.  $\ddot{\theta}, T$

2 eqs. en 2 incòg.



caldrà eliminar  $T$

per obtenir

$$\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta})$$

L'eq. del mov.

$$\underline{TQM]_1}$$

$$(T) = m (\alpha_1)$$

$$T = m a_1 \quad (\text{I})$$

$$\underline{TMC(G)}$$

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(G) = I(G) \cdot \bar{\alpha}_T^{\text{corró}}$$

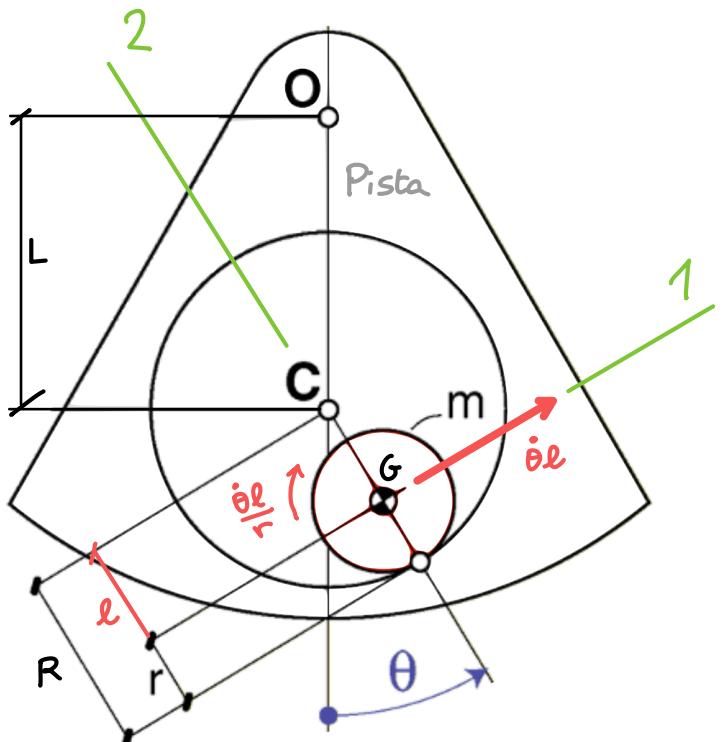
$$(\odot Tr) = \frac{mr^2}{2} \bar{\alpha}_T^{\text{corró}} \quad (\text{II})$$

Subst. (I) a (II) per eliminar  $T$

$$(\odot m a_1) = \frac{mr^2}{2} \bar{\alpha}_T^{\text{corró}} \quad (\text{III})$$

Els necessitem en funció de  $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \Omega$

# Càcul de $a_1$ i $\bar{\alpha}_T^{\text{corró}}$ en funció de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$



$$\bar{v}_{\text{pista}}(G) = (\rightarrow \dot{\theta}l)$$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_T^{\text{corró}} &= \bar{\alpha}_{\text{pista}}^{\text{corró}} + \bar{\alpha}_T^{\text{pista}} = \\ &= (\otimes \frac{\dot{\theta}l}{r}) + (\odot \Omega) = \\ &= \left[ \otimes \left( \frac{\dot{\theta}l}{r} - \Omega \right) \right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{\alpha}_T^{\text{corró}} = \left( \otimes \frac{\dot{\theta}l}{r} \right)} \quad (IV)$$

Comp. accel.  $|_{AB=T}$   
 $|_{\text{Rel}=\text{Pista}}$

$$\bar{a}_T(G) = \bar{a}_{REL}(G) + \bar{a}_{ar}(G) + \bar{a}_{cor}(G) = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta}l + \Omega^2 L \sin \theta \\ \vdots \\ B \end{array} \right.$$

Només els vecls grocs tenen comp. en dir 1

$$\bar{a}_{REL}(G) = (\rightarrow \ddot{\theta}l) + (\downarrow \dot{\theta}^2 l) \quad \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_T^{\text{pista}} = \odot \Omega$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{ar}(G) &= \bar{a}_T(C) + \cancel{\bar{\alpha}_T^{\text{pista}}} \times \overline{CG} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \overline{CG}) = \\ &= (\uparrow \Omega^2 L) + (\odot \Omega) \times \underbrace{[(\odot \Omega) \times (\downarrow l)]}_{(\downarrow \Omega^2 l)} = \\ &= (\uparrow \Omega^2 L) + (\uparrow \Omega^2 l)\end{aligned}$$

$$\bar{a}_{cor}(G) = 2 \bar{\Omega}_T^{\text{pista}} \times \bar{v}_{\text{pista}}(G) =$$

$$= 2 \bar{\Omega}_T^{\text{pista}} \times \bar{v}_{\text{pista}}(G) = 2 (\odot \Omega) \times (\rightarrow \dot{\theta}l) = (\nwarrow 2 \Omega \dot{\theta}l)$$

Subst. (IV) a (III)

$$\bullet \alpha_1 = \frac{r}{2} \left( \otimes \frac{\ddot{\theta}l}{r} \right)$$

$\alpha_T$  corró

$$2\alpha_1 + \ddot{\theta}l = 0 \quad (\text{VI})$$

Subst. (V) a (VI)

$$2 \underbrace{(\ddot{\theta}l + \Omega^2 L \sin \theta)}_{\alpha_1} + \ddot{\theta}l = 0$$

$$3l\ddot{\theta} + 2\Omega^2 L \sin \theta = 0$$

(VII)  $\leftarrow$  Eq. mov. per a  $\theta$   
( $l = R - r$ )

(b) Demostren que  $\theta = 0$  és d'equilibri

Subst.  $\theta = \theta_{eq}$ ,  $\dot{\theta} = 0$ , i  $\ddot{\theta} = 0$  a (VII) surt

$$2\Omega^2 L \sin \theta_{eq} = 0 \Leftrightarrow \theta_{eq} = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(c) Per a quins valors  $\Omega$   $\theta_{eq} = 0$  és estable?

Subst.  $\theta = \overset{\circ}{\theta_{eq}} + \varepsilon$ ,  $\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}$ ,  $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$  a (VII) :

$$3l\ddot{\varepsilon} + 2\Omega^2 L \underbrace{\sin \varepsilon}_{\varepsilon} \leftarrow \text{EDO de l'error}$$

Linearitzem:

$$3l\ddot{\varepsilon} + 2\Omega^2 L \varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} = - \frac{2\Omega^2 L}{3l} \cdot \varepsilon$$

$\Rightarrow K$

Analitzem  $K$ :

$$K > 0 \quad \forall \Omega \Rightarrow \theta_{eq} = 0 \text{ és ESTABLE } \forall \Omega$$

(4) Freqüència de les petites oscil·lacions al volt. de  $\theta = 0$

$$\omega = \sqrt{K} = \sqrt{\frac{2\Omega^2 L}{3\ell}} = \Omega \sqrt{\frac{2L}{3(R-r)}}$$

$\ell = R - r$