11P

Versió 1.1

Teoremes vectorials I

Exercicis de càlcul del moment cinètic

Problema 3D

Lluís Ros

https://lluisros.github.io/mecanica

Recordatori de teoria

RGal = Referència Galileana des de la que estudiem el moviment del sistema (típicament és el terra T).

Teorema de la Quantitat de Moviment (TQM):

Suma per a tots els sòlids

$$\sum_{\text{sist}} \overline{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = m_{\text{sist}} \overline{\mathbf{a}}_{\text{RGal}}(\mathbf{G}_{\text{sist}}) = \sum_{i} m_i \overline{\mathbf{a}}_{\text{RGal}}(\mathbf{G}_i)$$

Sumatori de totes les forces exteriorment aplicades sobre el sistema

Massa del sistema

Acceleració del centre d'inèrcia del sistema resp. RGal

Massa de cada sòlid

Acceleració del centre d'inèrcia del sòlid

Teorema del Moment Cinètic (TMC):

$$\sum_{\text{sist}} \overline{\mathbf{M}}_{\text{ext}}(\mathbf{Q}) - \overline{\mathbf{QG}}_{\text{sist}} \times m_{\text{sist}} \overline{\mathbf{a}}_{\text{RGal}}(\mathbf{Q}) = \dot{\overline{\mathbf{H}}}_{\text{RTQ}}(\mathbf{Q})$$

Sumatori de tots els moments respecte de **Q** exteriorment aplicats sobre el sistema

Vector des de **Q** al centre d'inèrcia del sistema (**G**sist)

Acceleració de **Q** respecte de la RGal

Derivada temporal del moment cinètic del sistema al punt **Q** (o "respecte de **Q**"). És una derivada feta des de RGal.

Càlcul del moment cinètic del sistema

Moment cinètic:

- **d'una partícula:**

$$\overline{\mathbf{H}}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{RTQ}}(\mathbf{Q}) = \overline{\mathbf{QP}} \times m_{\mathrm{P}} \overline{\mathbf{v}}_{\mathrm{RTQ}}(\mathbf{P})$$

- **d'un sòlid rígid S:**

$$\begin{cases} \text{Si } \mathbf{Q} \in \text{sòlid S:} & \overline{\mathbf{H}}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{RTQ}}(\mathbf{Q}) = \mathrm{II}(\mathbf{Q})\overline{\Omega}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{RTQ}} = \mathrm{II}(\mathbf{Q})\overline{\Omega}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{RGal}} \\ \text{Si } \mathbf{Q} \notin \text{sòlid S:} & \overline{\mathbf{H}}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{RTQ}}(\mathbf{Q}) = \overline{\mathbf{H}}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{RTG}}(\mathbf{G}) + \overline{\mathbf{H}}^{\oplus}_{\mathrm{RTQ}}(\mathbf{Q}) = \\ & = \overline{\mathbf{H}}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{RTG}}(\mathbf{G}) + \overline{\mathbf{QG}} \times m\overline{\mathbf{v}}_{\mathrm{RTQ}}(\mathbf{G}) \end{cases}$$

- **d'un sistema de sòlids rígids:**

$$\overline{\mathbf{H}}^{\mathrm{sist}}_{\mathrm{RTQ}}(\mathbf{Q}) = \sum_{i} \overline{\mathbf{H}}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{RTQ}}(\mathbf{Q})$$

<u>Observació</u>: La descomposició baricèntrica

$$\overline{H}^{S}_{RTQ} = \overline{H}^{S}_{RTG}(G) + \underbrace{\overline{H}^{\oplus}_{RTQ}(Q)}_{\overline{QG} \times m\, \overline{v}_{RTQ}(G)}$$

és <u>SEMPRE</u> aplicable quan volem calcular el moment cinètic d'un sòlid S resp. un punt Q, tant si $Q \in S$, com si no! Per tant, si no tenim clar si $Q \in S$, o $Q \notin S$, aplicarem aquesta descomposició per calcular $\overline{H}^{S}_{RTQ}(Q)$.

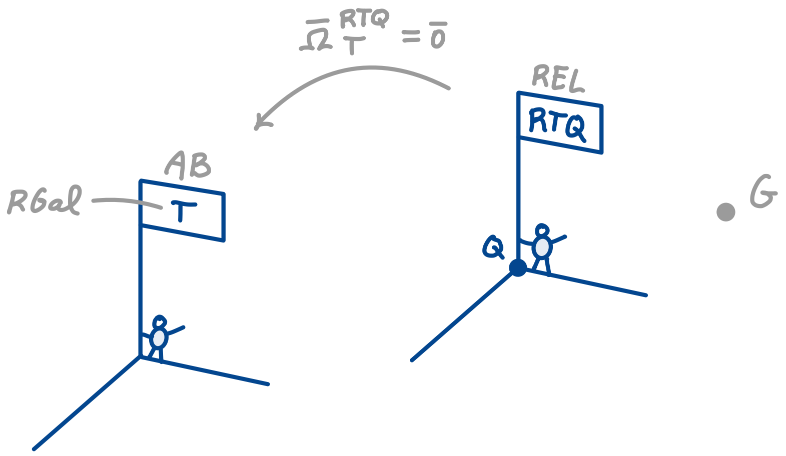
La pàg. seg. mostra com podem calcular $\overline{v}_{RTQ}(G)$.

Tècnica important!

Càlcul de $\overline{v}_{RTQ}(G)$

Quan $\overline{v}_{RTQ}(G)$ no sigui evident, podem obtenir-la via composició de moviments, amb $AB = RGal$, $REL = RTQ$.

Com que típicament $RGal = T$, ho fem per aquest cas:

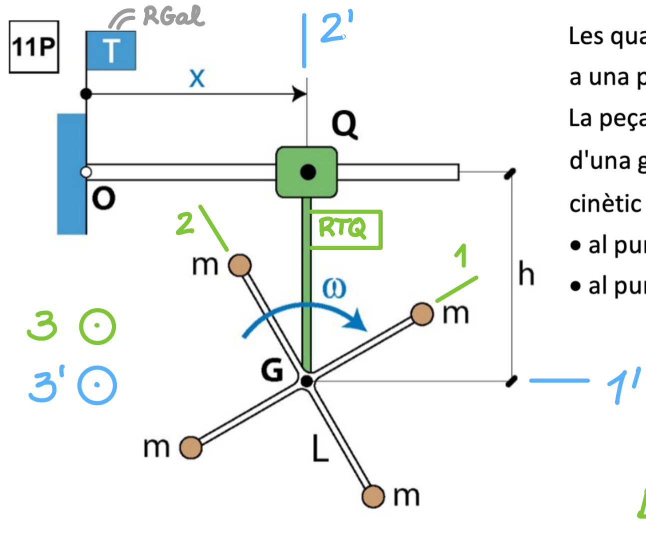


$$\boxed{\overbrace{\overline{v}_{RTQ}(G)}^{\text{vel. relativa}}} = \overbrace{\overline{v}_{T}(G)}^{\text{vel. absoluta}} - \overbrace{\overline{v}_{ar}(G)}^{\text{vel. arrossegament}} =$$

$$= \boxed{\overline{v}_{T}(G) - \overline{v}_{T}(Q)}$$

Fixem-nos que $\overline{v}_{ar}(G) = \overline{v}_{T}(Q)$ ja que tots els punts solidaris a RTQ tenen la mateixa velocitat respecte de T (perquè $\overline{\Omega}^{RTQ}_{T} = \overline{0}$ per definició).

Q5 gener 2024



Les quatre partícules, de massa m, estan enganxades a una peça amb forma de creu de massa negligible. La peça està articulada a un suport que es mou al llarg d'una guia recta fixa a terra (T). Troba el moment cinètic del sistema:

- al punt **Q**.
- al punt **O**.

Considereu que la guia i el suport són de massa negligible

$B = (1, 2, 3)$ $B' = (1', 2', 3')$

Guia i suport són de massa negligible ⇒ L'única contribució al moment cinètic del sistema és la de les partícules de massa m de la creu. Tractem aquesta creu com un sòlid rígid S.

Com que $Q \notin S$ i O tampoc, usarem la descomp. baricèntrica en ambdós casos

$\overline{H}_{RTQ}(Q)$

Moment cinètic al punt Q de tota la massa concentrada a G

$$\boxed{\overline{H}_{RTQ}(Q)} = \overline{H}_{RTG}(G) + \overbrace{\overline{QG} \times 4m \cdot \underbrace{\overline{v}_{RTQ}(G)}_{\overline{0}}}^{\overline{H}^{\oplus}_{RTQ}(Q)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4mL^2\omega \end{Bmatrix} = \boxed{(\otimes 4mL^2\omega)}$$

$$\overline{H}_{RTG}(G) = \mathbb{II}(G) \cdot \overline{\Omega}^{\,creu}_{RTG}$$

$$\left\{\overline{H}_{RTG}(G)\right\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4mL^2\omega \end{Bmatrix}$$

$2I = 4mL^2$

En base B' surt igual pq el sòlid és rotor simètric a G pel pla (1,2).

Fig. plana ⇒ 3 és DPI

$I_{12} = 0$ perquè les masses són sobre els eixos (tenen o bé $x_1 = 0$, o bé $x_2 = 0$)

$\overline{H}_{RTO}(O)$

$$\boxed{\overline{H}_{RTO}(O)} = \overline{H}_{RTG}(G) + \overbrace{\overline{OG} \times 4m \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{T}}{\overline{v}_{RTO}(G)}}^{\overline{H}^{\oplus}_{RTO}(O)} =$$

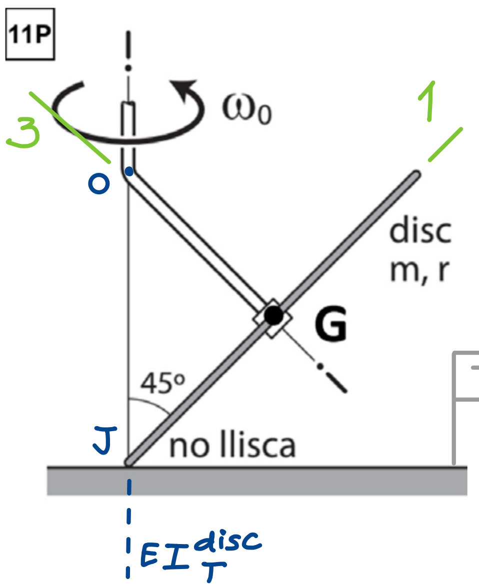
$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4mL^2\omega \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} x \\ -h \\ 0 \end{Bmatrix} \times 4m \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{4m \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ h\dot{x} \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4m\left(L^2\omega - h\dot{x}\right) \end{Bmatrix} =$$

En base B'

$$= \boxed{\otimes\ 4m\left(L^2\omega - h\dot{x}\right)}$$

Vegeu solució alternativa d'aquest exercici a Wikimec $\longrightarrow$ Exemple D.4.9 (també utilitza la descomp. baricèntrica, però el càlcul de $\overline{H}_{RTG}(G)$ es fa sumant partícula a partícula, en lloc de via $\mathbb{II}(G) \cdot \overline{\Omega}^{\text{creu}}_{RTG}$)

Q7, examen final juny 2017



El disc homogeni, de massa m i radi r, està articulat a un braç i no llisca sobre el terra (T). El braç gira amb ω_0 constant respecte de T. Troba el moment cinètic del disc al punt **G**.

T = RGal

$B = (1, 2, 3)$

$$\bar{H}_{RTG}^{disc}(G) \overset{G \in disc}{=} \mathbb{I}^{disc}(G) \cdot \underbrace{\bar{\Omega}_T^{disc}}_{\bar{\Omega}_{RGal}^{disc} = \bar{\Omega}_{RTG}^{disc}}$$

$\bar{\Omega}_T^{disc}$ només pot tenir comp. vertical ja que EI_T^{disc} = recta JO

$$\bar{\Omega}_T^{disc} = \bar{\Omega}_{braç}^{disc} + \bar{\Omega}_T^{braç} = \underbrace{(\nwarrow \dot{\varphi})}_{\bar{0}} + (\Uparrow \omega_0) = (\Uparrow \omega_0)$$

rotor simètric a G

$$\left[\mathbb{I}^{disc}(G)\right]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

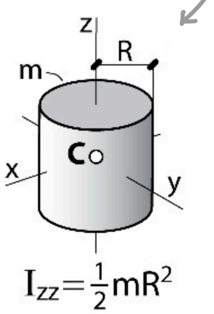
I_{33}

taules (disc = cilindre)

$$I_{33} = 2I = \frac{1}{2} m r^2$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{1}{4} m r^2$$

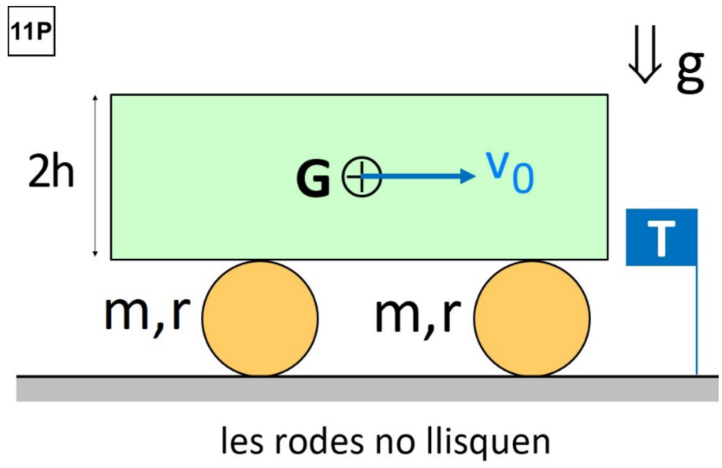


Triem la base $B = (1, 2, 3)$ perquè genera un tensor senzill i constant

$$\boxed{\left\{\bar{H}_{RTG}^{disc}(G)\right\}_B} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{I\omega_0}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{2I\omega_0}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{mr^2\omega_0}{4\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{mr^2\omega_0}{2\sqrt{2}} \end{Bmatrix} = \boxed{\left(\nearrow \frac{mr^2\omega_0}{4\sqrt{2}}\right) + \left(\nwarrow \frac{mr^2\omega_0}{2\sqrt{2}}\right)}$$

Q4.46 RBD

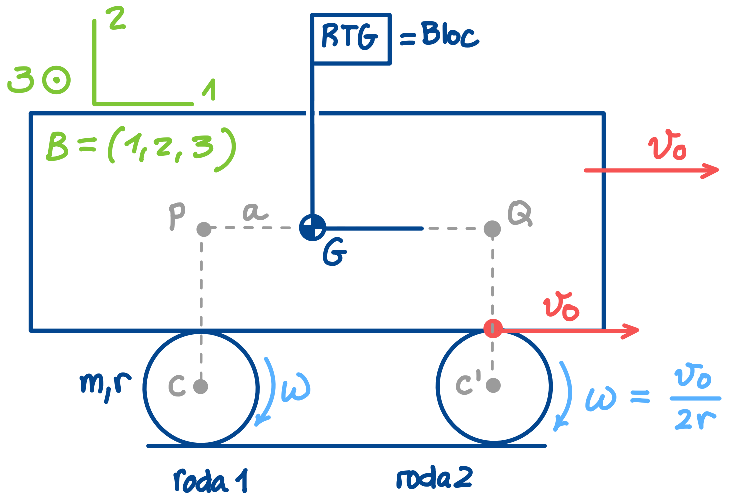


El bloc homogeni, de gruix 2h, es mou amb v_0 respecte del terra (T), recolzat al damunt de dos corrons homogenis, de massa m i radi r, que no llisquen en cap dels seus punts de contacte amb el bloc i amb el terra. Troba el moment cinètic del sistema al centre d'inèrcia del bloc (punt **G**).

Vel. angulars dels sòlids:

$$\bar{\Omega}^{roda1}_{T} = \bar{\Omega}^{roda2}_{T} = \left(\otimes \frac{v_0}{2r}\right) \quad \text{``}\omega\text{''}$$

$$\bar{\Omega}^{bloc}_{T} = \bar{0}$$



El moment cinètic total és suma del dels tres sòlids:

$$\bar{H}^{sist}_{RTG}(G) = \bar{H}^{roda1}_{RTG}(G) + \bar{H}^{roda2}_{RTG}(G) + \cancel{\bar{H}^{Bloc}_{RTG}(G)} \qquad \text{(I)}$$

$\bar{0}$ pq $\bar{\Omega}^{Bloc}_{RTG} = \bar{0}$

Mom. cinètic de la roda 1

G ∉ roda1 ⇒ fem descomp. baricèntrica

$$\bar{H}^{roda1}_{RTG}(G) = \bar{H}^{roda1}_{RTC}(C) + \underbrace{\bar{H}^{\oplus}_{RTG}(G)}_{\bar{GC} \times m\,\bar{v}_{RTG}(C)} \qquad \text{(II)}$$

$$\left\{\bar{H}^{roda1}_{RTC}(C)\right\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & \underbrace{2I}_{\frac{mr^2}{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v_0}{2r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v_0 mr}{4} \end{Bmatrix} = \left(\otimes \frac{v_0 mr}{4}\right) \qquad \text{(III)}$$

$$\bar H^{\oplus}_{RTG}(G) = \overbrace{\overline{GC}}^{\overline{GP}+\overline{PC}} \times m\,\bar v_{RTG}(C) = \Big(\left(\leftarrow a\right) + \left[\downarrow (h+r)\right]\Big) \times \left(\leftarrow \frac{m v_0}{2}\right) = \left(\otimes\ \frac{h+r}{2}\cdot m v_0\right) \qquad (IV)$$

Per trobar $\bar v_{RTG}(C)$ fem comp. mov. $\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = Bloc = RTG \end{array} \right.$

$$\underbrace{\bar v_{RTG}}_{REL}(C) = \underbrace{\bar v_{T}}_{AB}(C) - \underbrace{\bar v_{ar}(C)}_{\bar v_T(G)} = \left(\to \frac{v_0}{2}\right) - \left(\to v_0\right) = \left(\leftarrow \frac{v_0}{2}\right)$$

Tècnica molt habitual per trobar $\bar v_{RTQ}$ (punt qualsevol)!

Substituint III i IV a II:

$$\bar H^{roda\,1}_{RTG}(G) = \left(\otimes\ \frac{v_0 m r}{4}\right) + \left(\otimes\ \frac{h+r}{2}\cdot m v_0\right) = \left[\otimes\ \frac{v_0 m}{2}\left(\frac{3r}{2}+h\right)\right] \qquad (V)$$

Moment cinètic de la roda 2

El moment cinètic de la roda 2 a G és el mateix que el de la roda 1 (faríem les mateixes operacions, canviant $\overline{GC}$ per $\overline{GC'} = \overline{GQ} + \overline{QC'}$, i sortiria el mateix):

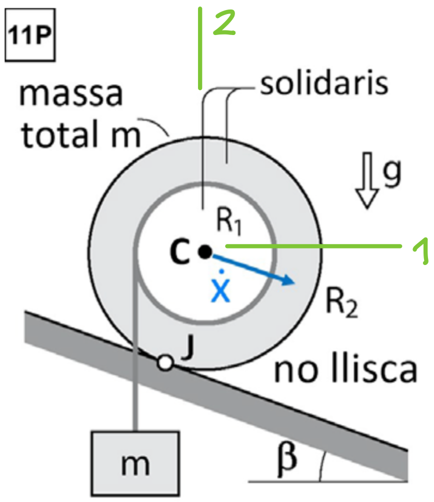
$$\bar H^{roda\,2}_{RTG}(G) = \bar H^{roda\,1}_{RTG}(G) \qquad (VI)$$

Mom. cinètic total del sistema

Utilitzant (VI) a (I) obtenim:

$$\boxed{\bar H^{sist}_{RTG}(G) = 2\,\bar H^{roda\,1}_{RTG}(G) = \left[\otimes\ v_0 m \left(\frac{3r}{2}+h\right)\right]}$$

11P



Les rodes homogènies, de massa total m i radis R_1 i R_2, són solidàries, i no llisquen sobre el terra (T). El bloc, de massa m, penja d'un fil inextensible que s'enrotlla sobre la roda de radi R_1. El centre de les rodes (punt **C**) baixa amb velocitat $\dot{x}$ respecte de T. Troba el moment cinètic del sistema a **C**.

B = (1, 2, 3) d'orientació fixa a T

(Però si fos fixa a rodes surt =)

$$\bar{H}^{sist}_{RTC}(C) = \bar{H}^{rodes}_{RTC}(C) + \bar{H}^{bloc}_{RTC}(C) \qquad (\mathrm{I})$$

$$\left\{\bar{H}^{rodes}_{RTC}(C)\right\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}}{R_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{mR_2^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{\dot{x}}{\cancel{R_2}} \end{Bmatrix} = \left(\otimes\ \frac{mR_2\dot{x}}{2}\right) \qquad (\mathrm{II})$$

$I_{33} = \frac{mR_2^2}{2}$

Taules (I_{zz} cilindre)

- C ∈ rodes
- rodes són cilíndriques (rotor simètric a C, pla (1,2))

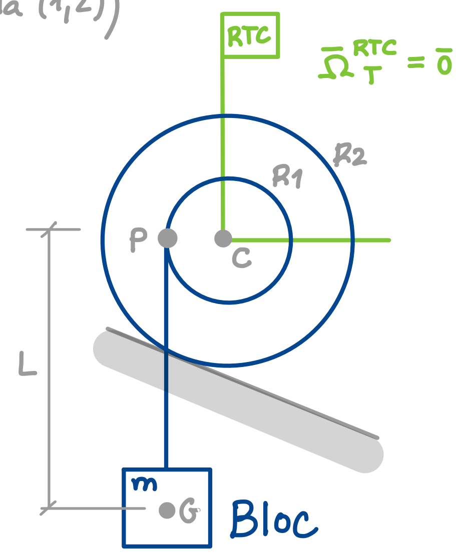
$$\bar{H}^{bloc}_{RTC}(C) = \underbrace{\bar{H}^{bloc}_{RTC}(G)}_{\bar{0},\ \text{pq}\ \bar{\Omega}^{Bloc}_{RTG} = \bar{0}} + \bar{H}^{\oplus}_{RTC}(C) =$$

Centre d'inèrcia del bloc

$$= \overline{CG} \times m \cdot \bar{v}_{RTC}(G) =$$

$$= \left[(\leftarrow R_1) + (\downarrow L)\right] \times \underbrace{\left[\uparrow\left(m\frac{R_1}{R_2}\dot{x}\right)\right]}_{v:\ \text{deducció a baix}}$$

$$= \left(\otimes\ \frac{R_1^2}{R_2} m\dot{x}\right) \qquad (\mathrm{III})$$



Deducció ràpida de $\bar{v}_T(C)$

(v. deducció per la via estàndard a la pàg. següent).

Com que $\bar{\Omega}^{RTC}_{T} = \bar{0}$, tenim:

$$\bar{\Omega}^{rodes}_{RTC} = \bar{\Omega}^{rodes}_{T} = \left(\otimes \frac{\dot{x}}{R_2}\right)$$

Ara, com que el tram $\overline{GP}$ del fil no gira resp. RTC, és:

$$\bar{v}_{RTC}(G) = \bar{v}_{RTC}(P) = \left(\uparrow \frac{\dot{x}}{R_2} \cdot R_1\right) = \left(\uparrow \frac{R_1}{R_2}\dot{x}\right)$$

Vista des de RTC, la roda R_1 gira amb $\bar{\Omega}^{rodes}_{RTC} = \left(\otimes \frac{\dot{x}}{R_2}\right)$, com hem dit a dalt

Sumant (II) i (III) obtenim el mom. cinètic total:

$$\bar{H}^{sist}_{RTC}(C) = \left(\otimes \frac{mR_2\dot{x}}{2}\right) + \left(\otimes \frac{R_1^2}{R_2} m\dot{x}\right) =$$

$$= \otimes\, m\dot{x}\left(\frac{R_2}{2} + \frac{R_1^2}{R_2}\right)$$

Deducció de $\bar{v}_{RTC}(G)$ aplicant la tècnica de la pàg. 4.

Fent comp. mov. amb $\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = RTC \end{array} \right.$ tenim:

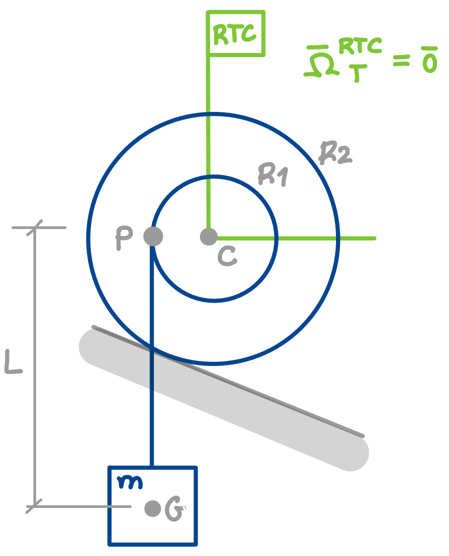
$$\underbrace{\bar{v}_{RTC}}_{REL}(G) = \underbrace{\bar{v}_{T}}_{AB}(G) - \underbrace{\bar{v}_{T}(C)}_{\bar{v}_{ar}(G)} = \bar{v}_T(P) - \bar{v}_T(C) =$$

$\bar{v}_{ar}(G) = \bar{v}_T(C)$ pq tots els punts de RTC tenen la mateixa velocitat resp. T, ja que $\bar{\Omega}^{RTC}_{T} = \bar{0}$

$\bar{v}_T(G) = \bar{v}_T(P)$ ja que el tram $\overline{GP}$ de fil no gira resp. T

$$= \underbrace{\bar{v}_T(C) + \bar{\Omega}^{rodes}_{T} \times \overline{CP}}_{CSR \quad C \to P} - \bar{v}_T(C) =$$

$$= \bar{\Omega}^{rodes}_{T} \times \overline{CP} = \left(\otimes \frac{\dot{x}}{R_2}\right) \times \left(\leftarrow R_1\right) = \left(\uparrow \frac{R_1}{R_2}\dot{x}\right)$$



Torsors d’enllaç habituals

Vegeu apartat D3.4 de Wikimec per a més detalls

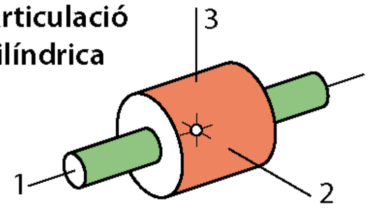
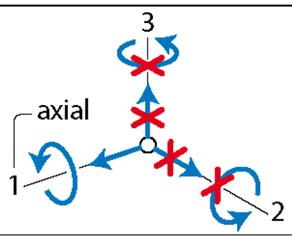
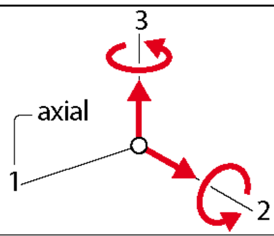
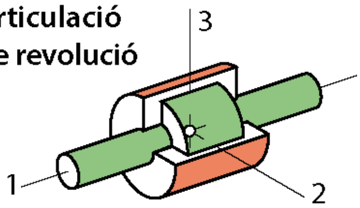
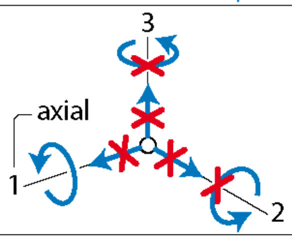
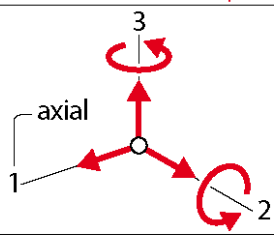
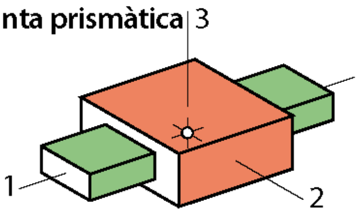
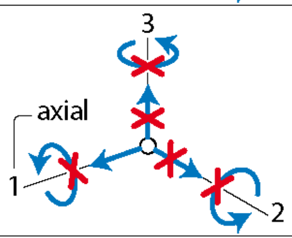
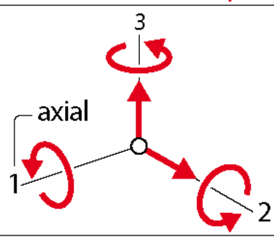
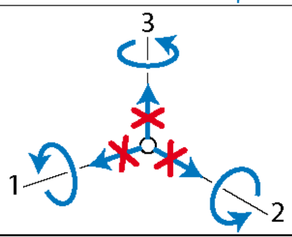
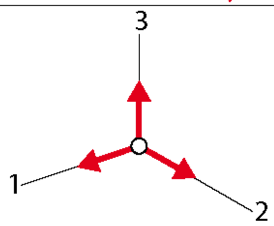
Per resoldre problemes de dinàmica com el que farem ara, cal tenir present com es caracteritzen els torsors d’enllaç en un punt (expressats en una certa base).

La següent taula mostra la forma d’aquest torsor per als enllaços més habituals. En tots els casos, el torsor s’ha referit al punt blanc i la base B = (1,2,3) indicats a la figura de l’esquerra. Tots són de caracterització immediata.

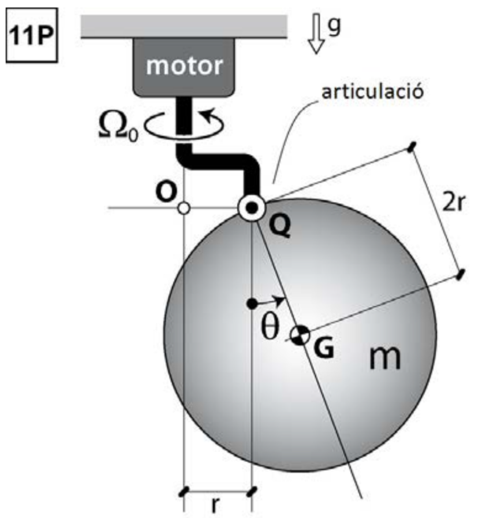
Podeu pensar que és el torsor que la peça verda aplica sobre la marrona. El torsor que la marrona aplica sobre la verda seria igual, però de signe contrari.

Les tres components de força i moment s’han agrupat en un sol vector vertical de sis components. Les tres primeres són de força i les tres segones de moment.

Enllaços usuals en sistemes mecànics

	Torsor cinemàtic		Torsor d’enllaç	
Articulació cilíndrica 		$\begin{Bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ \Omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$		$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$
Articulació de revolució 		$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$		$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$
Junta prismàtica 		$\begin{Bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$		$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$
Ròtula esfèrica 		$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{Bmatrix}$		$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

NOTA: A l’assignatura, quan diem “articulació”, volem dir “articulació de revolució” per defecte.



La bola homogènia, de massa m i radi 2r, està articulada a un braç que gira amb Ω_0 constant respecte del terra (T) sota l'acció d'un motor. Troba:

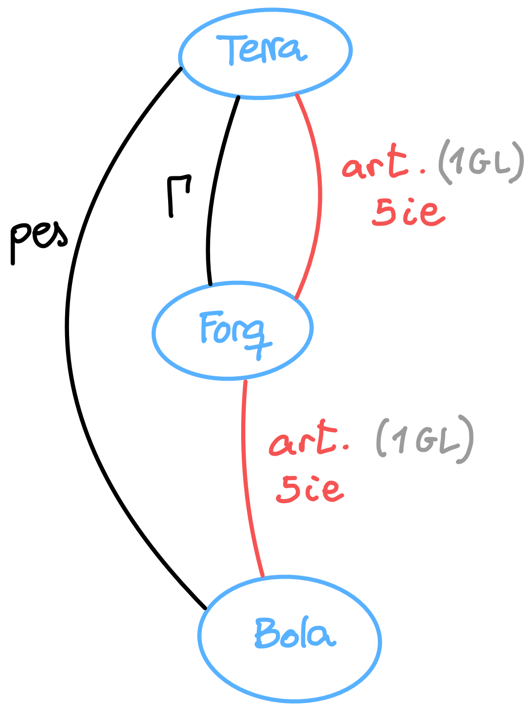
- l'equació de moviment per a la coordenada θ.
- el parell motor.

Obs: La forq. és de massa $\simeq 0$

GL sist

$$2 \left| \begin{array}{l} \dot{\psi} = \Omega_0 = \text{ctant} \quad (\text{actuat i forçat}) \\ \dot{\theta} \quad (\text{lliure}) \end{array} \right.$$

Diagrama general d'interaccions (DGI)



—— Arcs vermells corresponen a i.e.

Vegeu construcció i anàlisi del DGI a
https://lluisros.github.io/mecanica/problemes/11P_slides.pdf

Sist.	Incòg.	#incòg. total	Problema
bola	5ie, $\ddot{\theta}$	6	DET ✓
bola+forq	5ie, $\ddot{\theta}$, Γ	7	INDET ×
forq	10ie, Γ	11	INDET ×

Eq. mov. coord. θ

Volem $\ddot{\theta}$ $\Rightarrow$ Apliquem teor. vectorials a Sist = bola (pq surt DET)

Forces sobre bola

- Pes: $\downarrow mg$

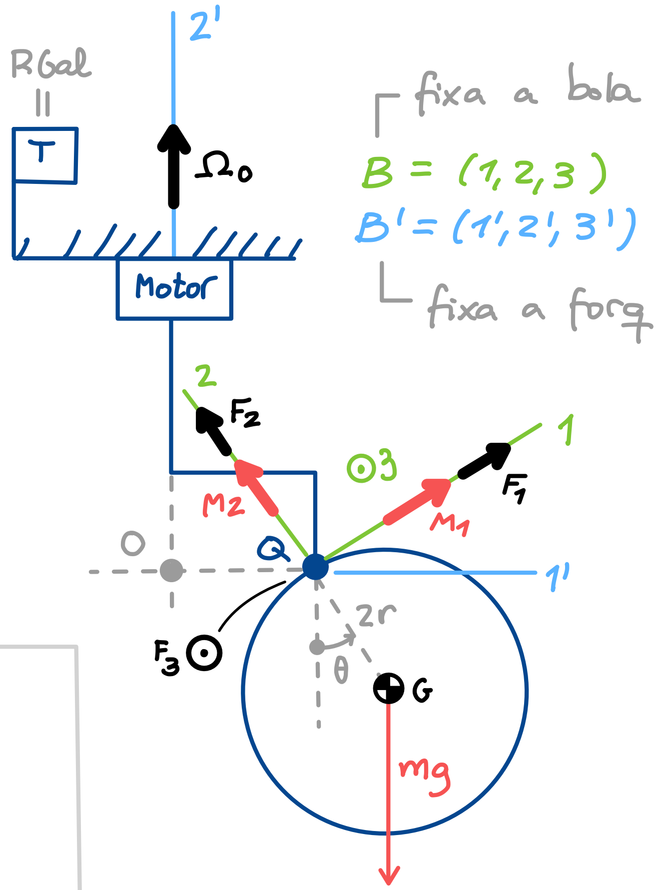
  (només crea moment en dir. 3)

- Torsor forq → bola a Q (*):

$$\left\{\bar{F}_{forq \to bola}\right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{forq \to bola}(Q)\right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(en B' tindria mateixa forma)



Full ruta per l'eq. mov.

SIST = bola

TMC(Q)$]_3$ ← Ja que en dir. 3 no hi ha moments d'enllaç sobre bola

TMC (Q)

$$\sum \bar{M}_{ext}(Q) - \underbrace{\overline{QG} \times m\bar{a}_T(Q)}_{\text{terme complementari (t.c.)}} = \dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$$

Anem calculant-ne els termes $\underbrace{\text{(sols ens calen en dir. 3)}}$:

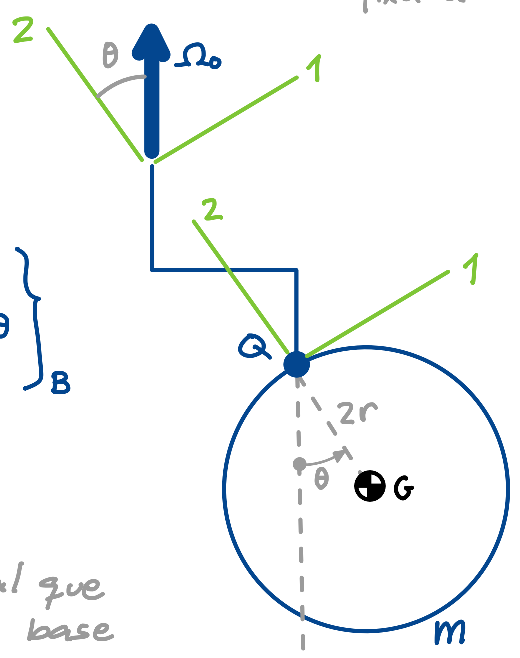
Però $\bar{H}_{RTQ}$ cal tot per poder-lo derivar i quedar-nos després amb la component 3.

$\sum \bar{M}_{ext}(Q)$

$$\left\{\sum \bar{M}_{ext}(Q)\right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ -mg\,2r\sin\theta \end{Bmatrix}$$

(*) Triem $B = (1, 2, 3)$ pq visualitza el zero de la component 3 de moment i alhora ens permetrà obtenir un tensor d'inèrcia constant per a la bola.

$B = (1, 2, 3)$ fixa a bola



$\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$

També es pot calcular $\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$ per descomposició baricèntrica, que sempre és aplicable

$$\bar{H}_{RTQ}(Q) = \mathbb{I}(Q) \cdot \bar{\Omega}^{Bola}_{T}$$

$Q \in$ Bola

$$\bar{\Omega}^{Bola}_{T} = (\odot\, \dot{\theta}) + (\Uparrow \Omega_0) = \begin{Bmatrix} \Omega_0 \sin\theta \\ \Omega_0 \cos\theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}_B$$

Steiner

$$\mathbb{I}(Q) = \mathbb{I}(G) + \mathbb{I}^{\oplus}(Q)$$

Triem B fixa a bola per tal que $\mathbb{I}^{\oplus}(Q)$ surti constant. En base $B' = (1', 2', 3')$ no ho seria.

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{\text{rot. esfèric a } G,\ \text{amb } I = \frac{2}{5}m(2r)^2 = \frac{8}{5}mr^2} + \begin{bmatrix} m4r^2 & & \\ & 0 & \\ & & m4r^2 \end{bmatrix} =$$

$$= 4mr^2 \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & & \\ & \frac{2}{5} & \\ & & \frac{2}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right) = 4mr^2 \begin{bmatrix} 7/5 & & \\ & 2/5 & \\ & & 7/5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4mr^2}{5} \begin{bmatrix} 7 & & \\ & 2 & \\ & & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix}$$

Utilitzaré les variables I_{11}, I_{22}, I_{33} una estona per escriure menys.

on

$$I_{11} = I_{33} = \frac{28}{5} mr^2 \qquad I_{22} = \frac{8}{5} mr^2$$

$$\{\bar{H}_{RTQ}(Q)\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_0 \sin\theta \\ \Omega_0 \cos\theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{11}\, \Omega_0 \sin\theta \\ I_{22}\, \Omega_0 \cos\theta \\ I_{33}\, \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\{\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)\}_B = \begin{Bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ I_{33}\, \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \Omega_0 \sin\theta \\ \Omega_0 \cos\theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}^B_{RTQ} = \bar{\Omega}^B_{RGal} = \bar{\Omega}^B_T} \times \begin{Bmatrix} I_{11}\, \Omega_0 \sin\theta \\ I_{22}\, \Omega_0 \cos\theta \\ I_{33}\, \dot{\theta} \end{Bmatrix} =$$

Sols cal la comp. 3

$$= \left\{ \begin{matrix} \vdots \\ I_{33}\ddot{\theta} + I_{22}\,\Omega_0^2 \sin\theta\cos\theta - I_{11}\,\Omega_0^2 \sin\theta\cos\theta \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \vdots \\ I_{33}\ddot{\theta} + (I_{22}-I_{11})\,\Omega_0^2 \sin\theta\cos\theta \end{matrix} \right\} =$$

Ara sí, substituïm:

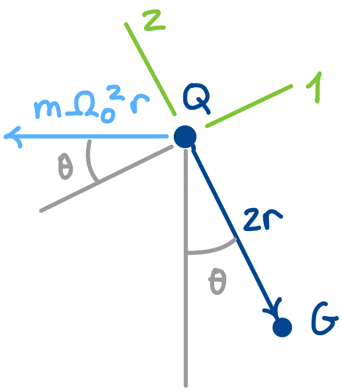
$$I_{33} = \frac{28}{5} m r^2$$

$$I_{22} - I_{11} = -4mr^2$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \vdots \\ \frac{28}{5} m r^2 \ddot{\theta} - 4 m r^2 \Omega_0^2 \sin\theta\cos\theta \end{matrix} \right\}$$

Terme complementari del TMC:

$$\left\{ \overline{QG} \times m\, \bar{a}_T(Q) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -m\Omega_0^2 r\cos\theta \\ m\,\Omega_0^2 r\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} =$$



$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2m\Omega_0^2 r^2 \cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$(\searrow 2r) \times (\leftarrow m\Omega_0^2 r)$$

TMC $(Q)]_3$:

$$\underbrace{-2mrg\sin\theta}_{\sum \bar{M}_{ext}(Q)]_3} + \underbrace{2mr^2\Omega_0^2\cos\theta}_{-\overline{QG}\times m\,\bar{a}_T(Q)]_3} = \underbrace{\frac{28}{5} m r^2 \ddot{\theta} - 4mr^2\Omega_0^2 \sin\theta\cos\theta}_{\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)]_3}$$

dividim per $2mr^2$

$$\frac{14}{5}\ddot{\theta} - 2\,\Omega_0^2 \sin\theta\cos\theta - \Omega_0^2\cos\theta + \frac{g}{r}\sin\theta = 0$$

Eq. mov. per a θ

$$\boxed{\frac{14}{5}\ddot{\theta} - \Omega_0^2\cos\theta\,(1 + 2\sin\theta) + \frac{g}{r}\sin\theta = 0} \qquad (\square)$$

Si volem, podem escriure (□) aillant $\ddot{\theta}$, fent palès que l'acceleració ($\ddot{\theta}$) és funció de variables d'estat mecànic exclusivament (Ω_0, θ)

$$\ddot{\theta} = \underbrace{\frac{5}{14}\left[\Omega_0^2 \cos\theta\,(1+2\sin\theta) - \frac{g}{r}\sin\theta\right]}_{\text{funció de les variables d'estat mecànic del sistema}}$$

Expressant així l'eq. del movim. fem palès que, a partir d'ara, $\ddot{\theta}$ ja és coneguda (és una incògnita resolta).

Configuracions d'equilibri ?

No les demanen però investiguem-les una mica ...

Substituim a (□) $\left|\begin{array}{l} \theta = \theta_{eq} \\ \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{array}\right.$

$$-\Omega_0^2 \cos\theta_{eq}\,(1+2\sin\theta_{eq}) + \frac{g}{r}\sin\theta_{eq} = 0 \quad \text{(eq. transcendental)}$$

$\theta_{eq} = 0$ la satisfà, però només quan $\Omega_0 = 0$. La intuició diu que per $\Omega_0 = 0$, $\theta_{eq} = 0$ ha de ser ESTABLE. Veiem-ho:

Substituint a (□) $\left[\begin{array}{l} \Omega_0 = 0 \\ \theta = \theta_{eq} + \varepsilon = \varepsilon \\ \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \\ \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon} \end{array}\right.$

queda

$$\frac{14}{5}\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{r}\sin\varepsilon = 0$$

linealitzem

$$\frac{14}{5}\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{r}\varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{5r}{14g}\cdot\varepsilon$$

"K" $> 0 \Rightarrow$ Per $\Omega_0 = 0$ $\theta_{eq} = 0$ és d'equilibri estable ✓

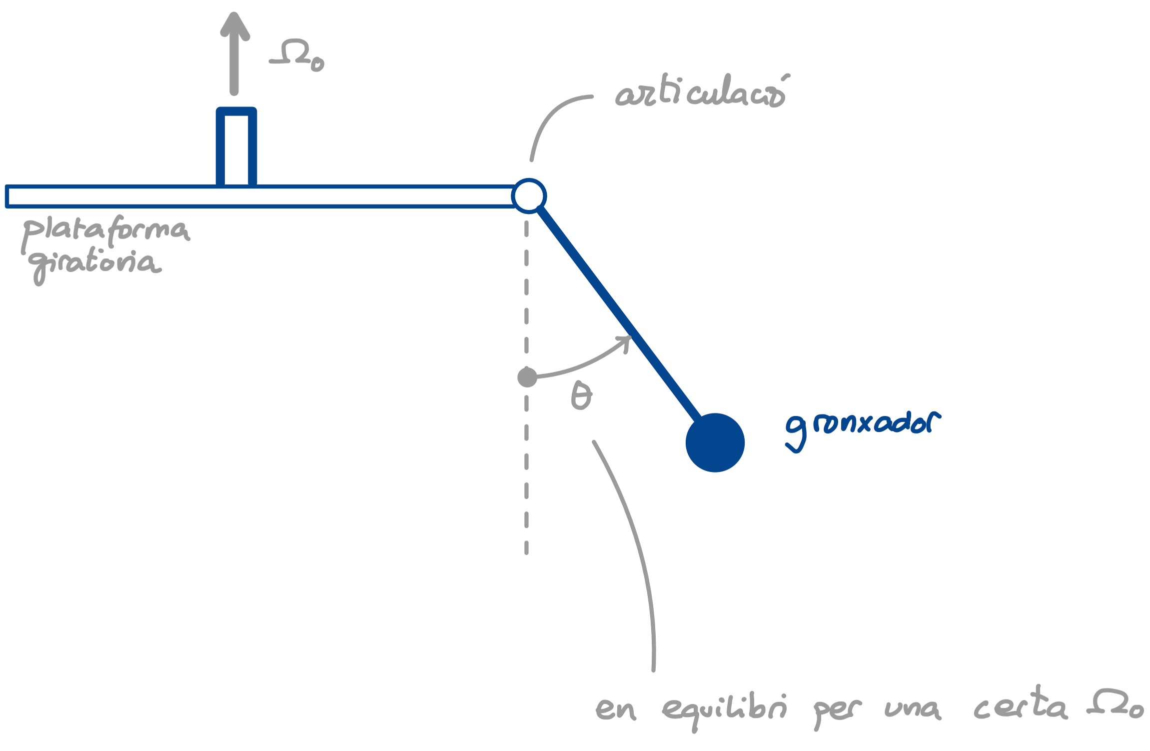
L'eq. transcendental anterior té altres solucions, que es podrien trobar numèricament. Però podem investigar si per un cert angle tindrem equilibri. Per $\theta = 30°$, per exemple, tenim

$$-\Omega_0^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[1 + 2\,\frac{1}{2}\right] + \frac{g}{r}\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$$\Omega_0^2 \sqrt{3} = \frac{g}{2r}$$

$$\Omega_0^2 = \frac{g}{2\sqrt{3}\,r} \qquad \Longrightarrow \qquad \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2r\sqrt{3}}}$$

És a dir, quan Ω_0 pren el valor $\left(g/2r\sqrt{3}\right)^{1/2}$ tindrem una posició d'equilibri. És estable? Ho deixem com a deures, però ha de sortir que sí, perquè aquest sistema és anàleg al d'uns gronxadors de fira



Tendència a girar de la bola, partint del repòs?

Suposem que, partint de la bola en repòs ($\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$) i $\Omega_0 = 0$, iniciem una rotació Ω_0 sobtada amb el motor. Què farà la bola? Mantindrà $\theta = 0°$, o tendirà a inclinar-se? Veiem-ho:

Substituint $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ a ($\square$):

$$\frac{14}{5}\ddot{\theta} - \Omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\theta} = \frac{5}{14}\Omega_0^2$$

$$\Downarrow$$

Accel. angular positiva $\Rightarrow$ la bola tendeix a girar ↻ (centrífugament)

Parell motor Γ necessari per garantir $\dot{\psi} = \Omega_0 = ct$

A quin sistema apliquem els teoremes vectorials ara? Recordem la taula inicial:

Sist.	Incòg.	#incòg. total	Problema
bola	5 ie, $\ddot{\theta}$	6	DET ✓
bola + forq	5 ie, $\ddot{\theta}$, Γ	7	INDET ×
forq	10 ie, Γ	11	INDET ×

Ara és DET!

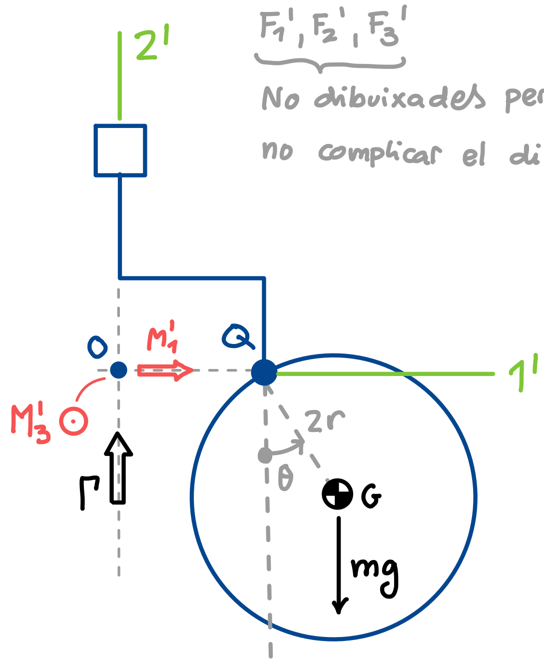
El sist = bola + forq és, dels que involucra Γ, el de menys incògnites. Com que ara ja sabem $\ddot{\theta}$ (hem trobat l'eq. del mov. que en determina el seu valor), l'aplicació de TQM + TMC a aquest sistema ara generarà un problema determinat. Dels dos teoremes, l'únic que involucrarà Γ és el TMC, per tant aplicarem aquest teorema.

A quin punt l'aplicarem? Mirem com és el torsor $T \to$ forq en un punt de l'eix del motor, p. ex. O:

$$\left\{\bar{F}_{T\to forq}\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{T\to forq}\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} M_1' \\ 0 \\ M_3' \end{Bmatrix}$$

Utilitzem B' perquè aquesta base té una direcció (la 2') paral·lela a l'eix motor i permet veure aquest zero



$\underbrace{F_1', F_2', F_3'}$ No dibuixades per no complicar el dibuix

Si apliquem TMC a O tindrem, en ser O fix a T,

$$\sum \overline{M}_{ext}(O) - \cancel{\overline{OG} \times m \underbrace{\overline{a}_T(O)}_{\bar{0}}} = \dot{\overline{H}}_{RTO}(O)$$

i a més

$$\left\{ \sum \overline{M}_{ext}(O) \right\}_{B'} = \left\{ \begin{array}{c} M_1' \\ \Gamma \\ M_3' \quad -mg(r+2r\sin\theta) \end{array} \right\}$$

= incògnites

Veiem que Γ apareix a la comp. 2' sense cap altra incògnita.
Ja ho tenim! El full de ruta per trobar Γ és:

Full ruta per Γ

sistema = bola + forq
$\left.\text{TMC}(O)\right]_{2'}$

← Només en dir. 2' (ho tindrem al cap!)

Pregunta freqüent:

I per què apliquem TMC a O i no a Q, o a G?

El torsor T→ forq a Q (o a G) no és tan senzill com a O. Si passem el de O a Q (amb la fórmula del canvi de punt del formulari) veureu que F_1', F_2' i F_3' creen moments resp. Q que fan que a $\sum \overline{M}_{ext}(Q)$ hi apareguin F_1', F_2' i F_3'. Per tant, la formulació de TMC a Q obligaria a afegir les 3 eqs del TQM per poder resoldre el sistema d'equacions resultant. Es pot fer, però és més feixuc! Passaria una cosa semblant amb l'aplicació del TMC a G.

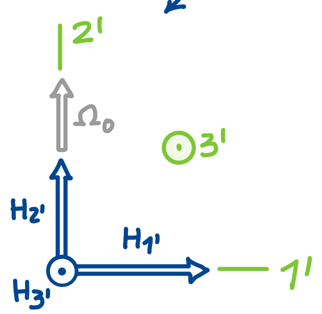
Així doncs, volem formular

$$\left[\underbrace{\sum \bar{M}_{ext}(O)}_{\Gamma}\right]_{2'} = \left[\dot{\bar{H}}_{RTO}(O)\right]_{2'}$$

Ara fixem-nos. No sabem $\bar{H}_{RTO}(O)$ encara, però en base $B' = (1', 2', 3')$ tindrà tres components

$$\left\{\bar{H}_{RTO}(O)\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} H_{1'} \\ H_{2'} \\ H_{3'} \end{Bmatrix}$$

que geomètricament podem representar així



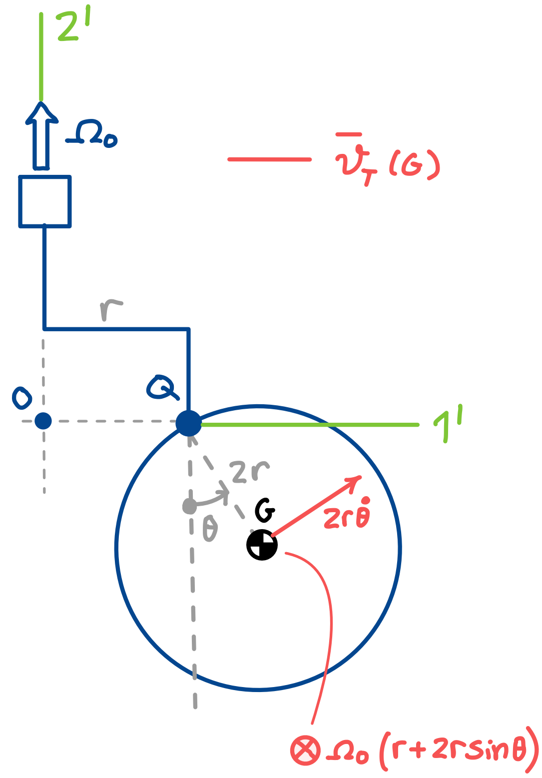
$\Rightarrow$

- $\bar{H}_{2'}$ no gira $\rightarrow$ sols té canvi de valor
- $\bar{H}_{1'}$ i $\bar{H}_{3'}$ giren amb Ω_0 $\rightarrow$ tenen canvi de valor i direcció en el pla $(1', 3')$

i d'aquí veiem que només la derivada temporal de $\bar{H}_{2'}$ té comp. en dir. 2'. Per tant, només ens cal trobar la component $H_{2'}$ de $\bar{H}_{RTO}(O)$ i trobar-ne el seu canvi de valor. Som-hi:

Com que $O \notin$ Bola, apliquem la descomp. baricèntrica:

$$\bar{H}_{RTO}(O) = \bar{H}_{RTG}(G) + \underbrace{\bar{H}^{\oplus}_{RTO}(O)}_{\bar{OG} \times m \bar{v}_T(G)}$$



$$\bar{v}_T(G) = \left(\nearrow 2r\dot{\theta}\right) + \left(\otimes\, \Omega_0 (r + 2r\sin\theta)\right)$$

Comp. movim. | AB = T
REL = forq.

el seu valor no ens cal

$$\left\{\bar{H}^{\oplus}_{RTO}(O)\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} r+2r\sin\theta \\ -2r\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} m\,2r\dot{\theta}\cos\theta \\ m\,2r\dot{\theta}\sin\theta \\ -m\Omega_0\,(r+2r\sin\theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bullet \\ m\Omega_0\,(r+2r\sin\theta)^2 \\ \bullet \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{H}_{RTG}(G)\right\}_{B'} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega_0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ I\Omega_0 \\ I\dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Per tant, sumant els termes grocs,

$$\left\{\bar{H}_{RTO}(O)\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \bullet \\ \overbrace{I\Omega_0 + m\Omega_0\,(r+2r\sin\theta)^2}^{H_{2'}} \\ \bullet \end{Bmatrix}$$

De l'anàlisi geomètric d'abans, sabem que l'únic canvi en dir. 2' és el canvi de valor de $H_{2'}$, que és $\dot{H}_{2'}$. Per tant:

$$\left\{\dot{\bar{H}}_{RTO}(O)\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \bullet \\ \overbrace{2m\Omega_0\,(r+2r\sin\theta)\,2r\dot{\theta}\cos\theta}^{\dot{H}_{2'}} \\ \bullet \end{Bmatrix}$$

I ara ja podem formular $\left.TMC(O)\right]_{2'}$:

$$\underbrace{\left.\sum \bar{M}_{ext}(O)\right]_{2'}}_{\Gamma} = \underbrace{\left.\dot{\bar{H}}_{RTO}(O)\right]_{2'}}_{\dot{H}_{2'}}$$

$$\boxed{\Gamma = 4mr^2\Omega_0\,\dot{\theta}\,(1+2\sin\theta)\cos\theta}$$

El controlador del motor ha de comandar aquest parell per garantir $\dot{\psi} = \Omega_0$