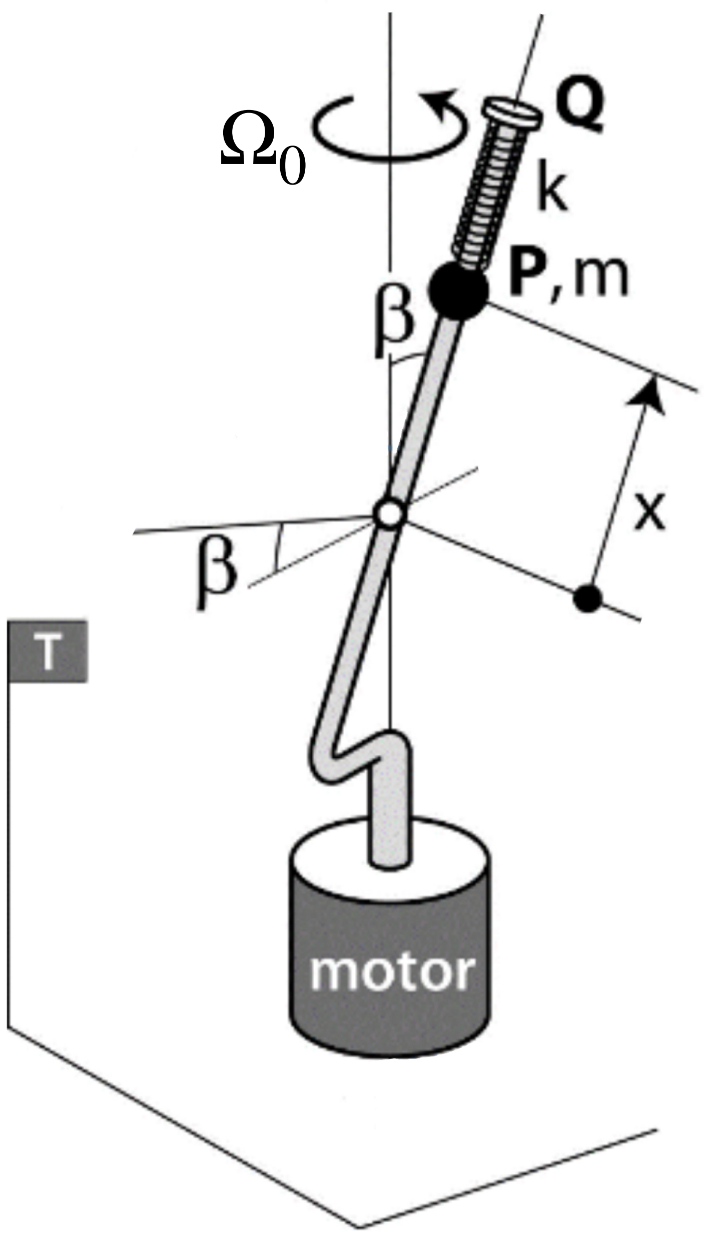
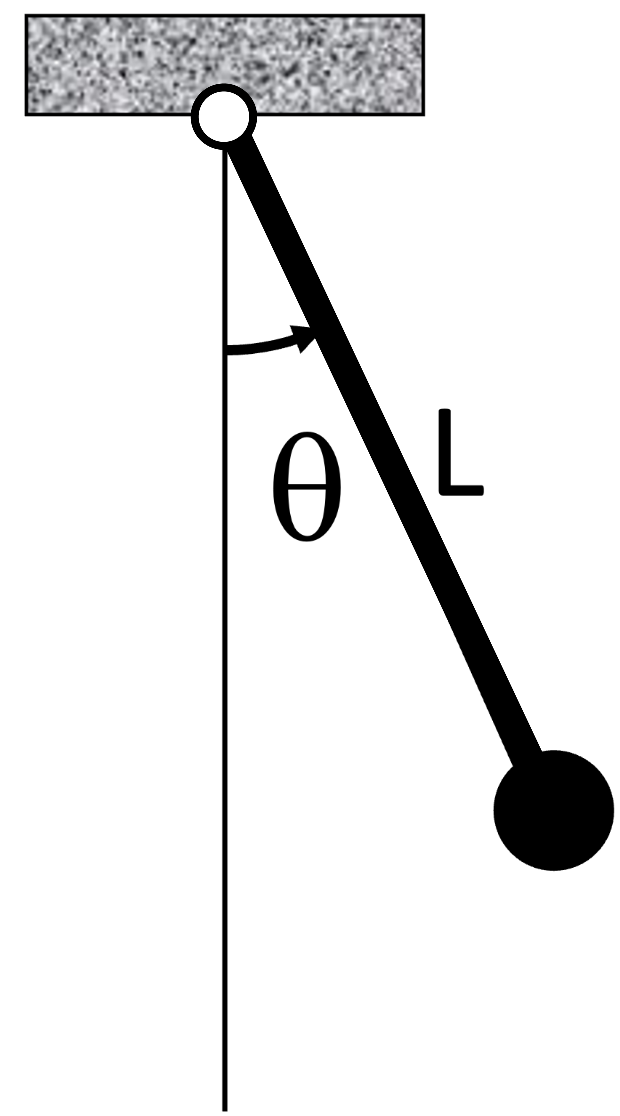
10P

Geometria de masses

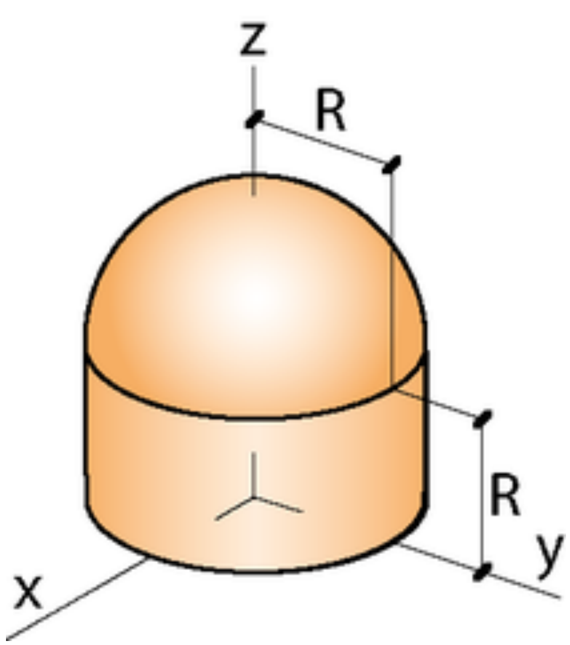
Massa-molla-guia

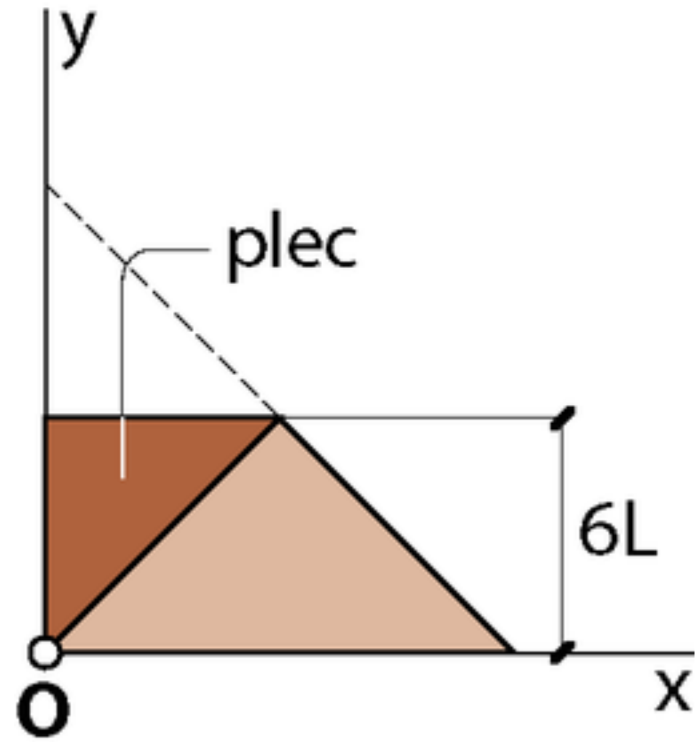


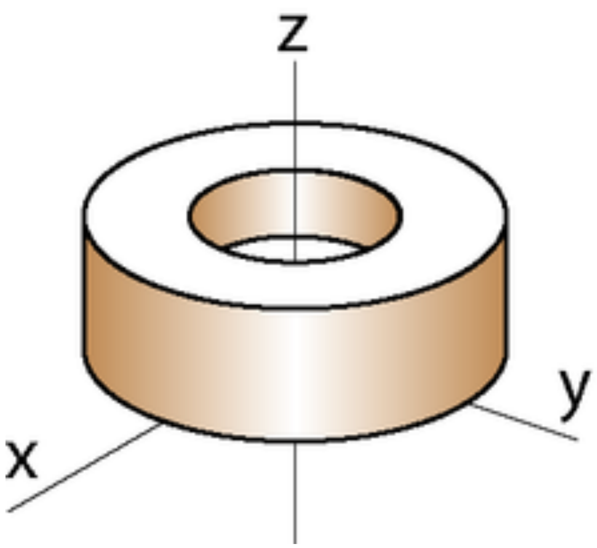
Pèndol simple



Exm: D5.1 - D5.2 - D5.3   (Wikimec)







Tensor d'inèrcia de S a **Q**

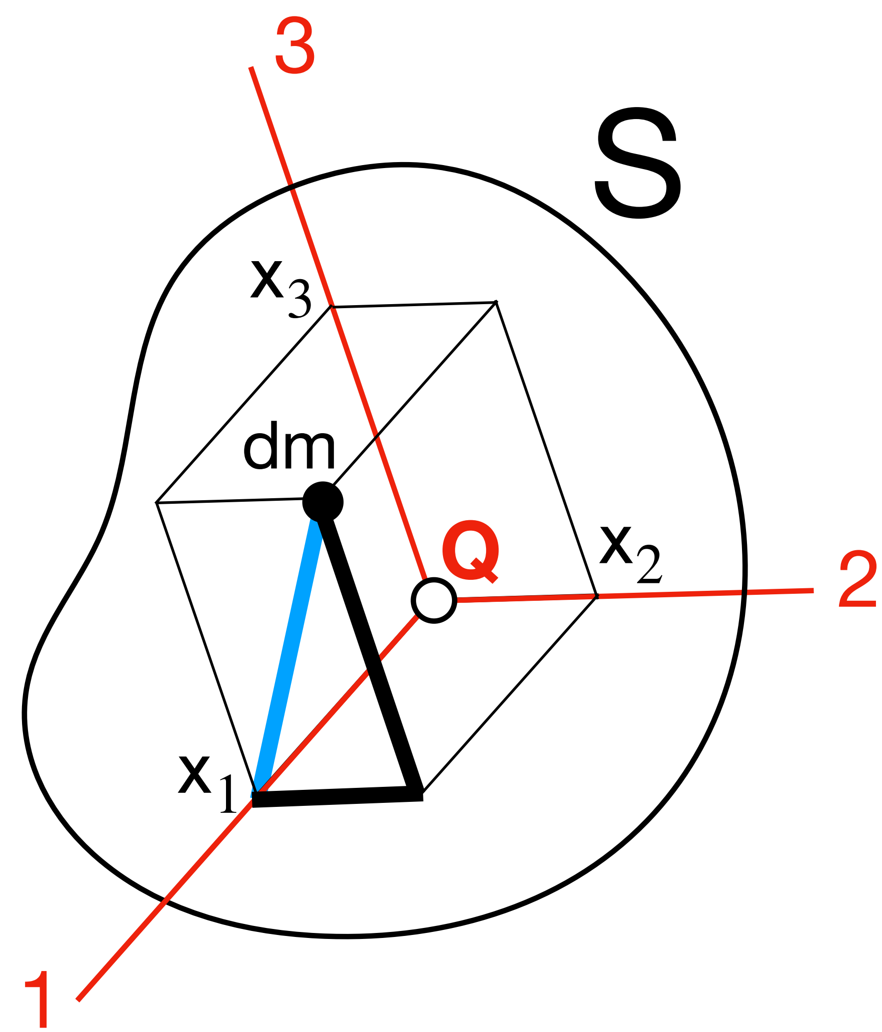
$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Moments d'inèrcia

$$I_{ii} = \int_S \underbrace{\left(x_j^2 + x_k^2\right)}_{(\text{ dist a } \textbf{eix i})^2} \, dm \; \boxed{\geq 0}$$

Exm:

$$I_{11} = \int_S \underbrace{\left(x_2^2 + x_3^2\right)}_{(\text{ dist a } \textbf{eix 1})^2} \, dm$$



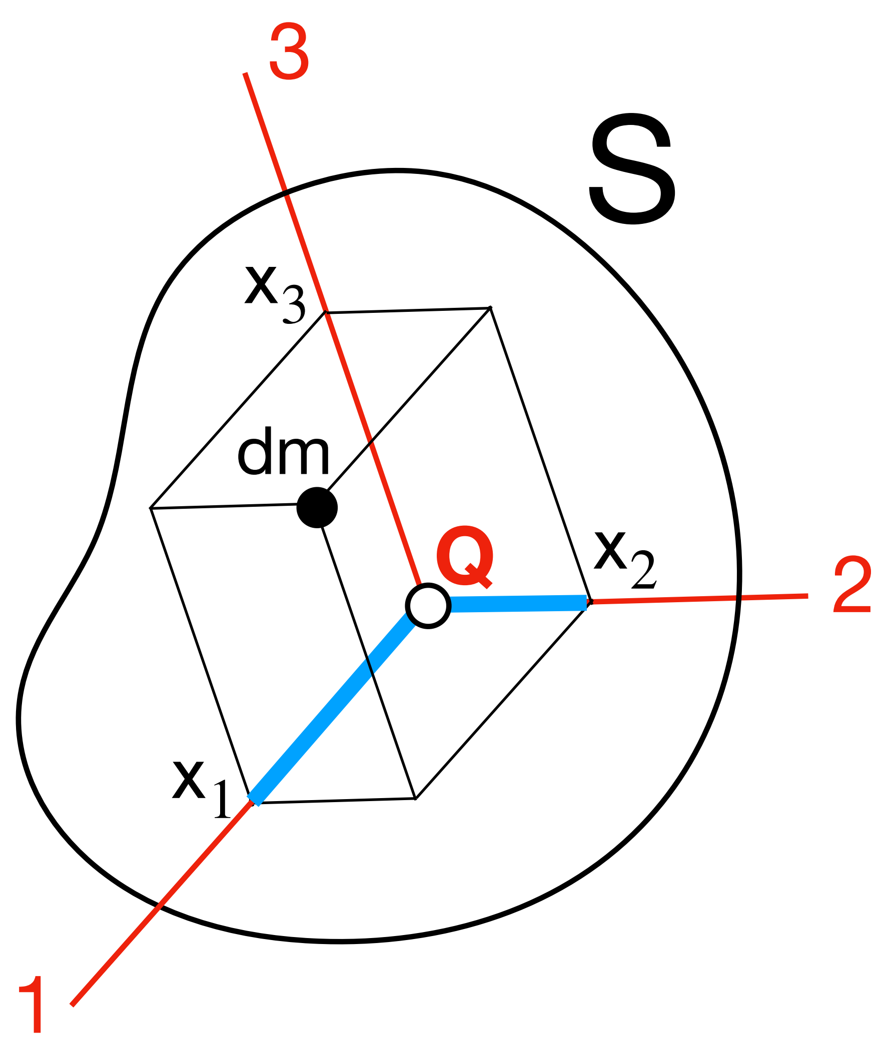
B = (1,2,3)

Tensor d'inèrcia de S a **Q**

$$\left[\mathbb{I}(\mathbf{Q})\right]_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Productes d'inèrcia

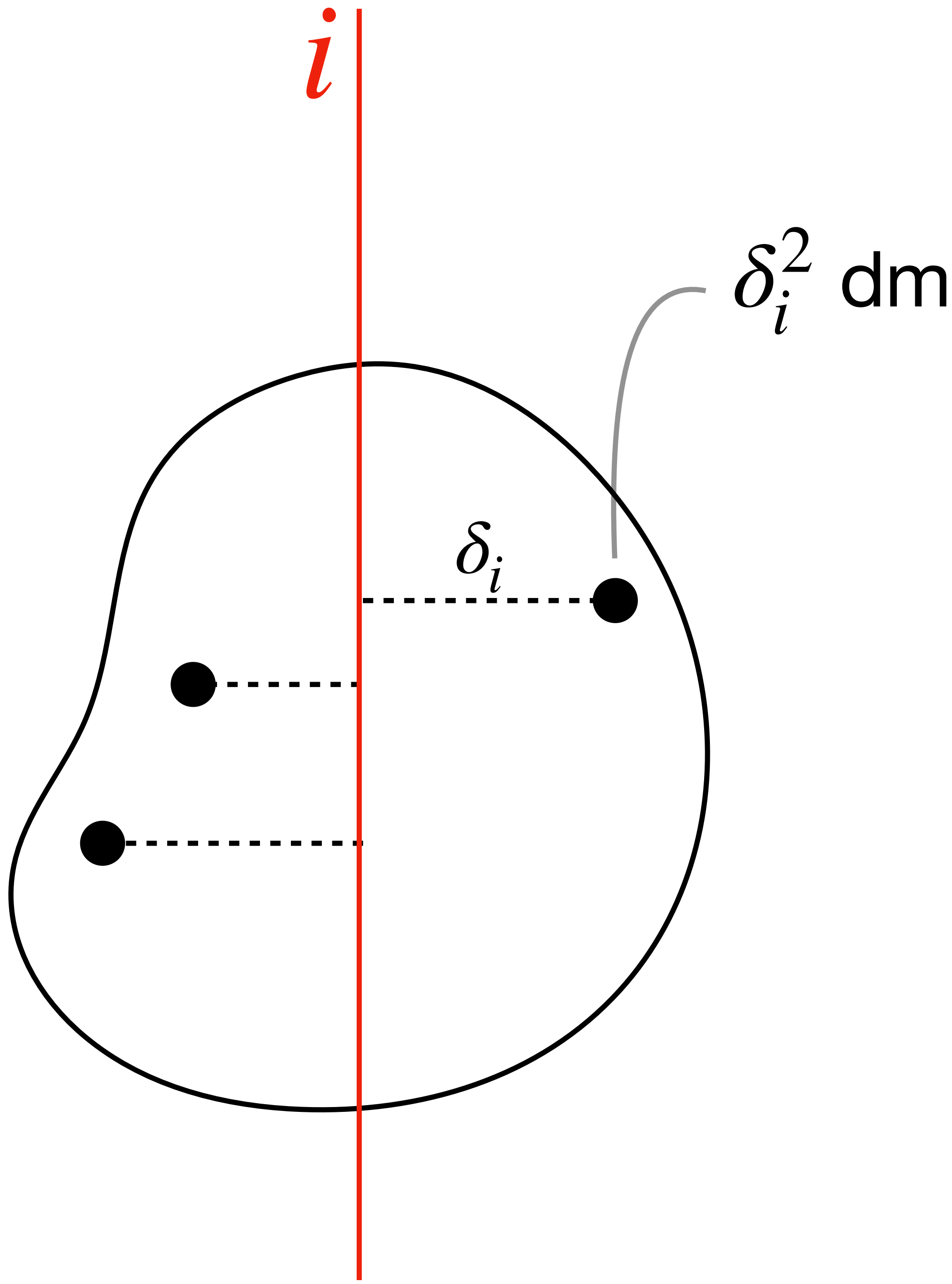
$$I_{ij} = -\int_S x_i\, x_j\, dm \qquad (>0,\ <0,\ =0)$$



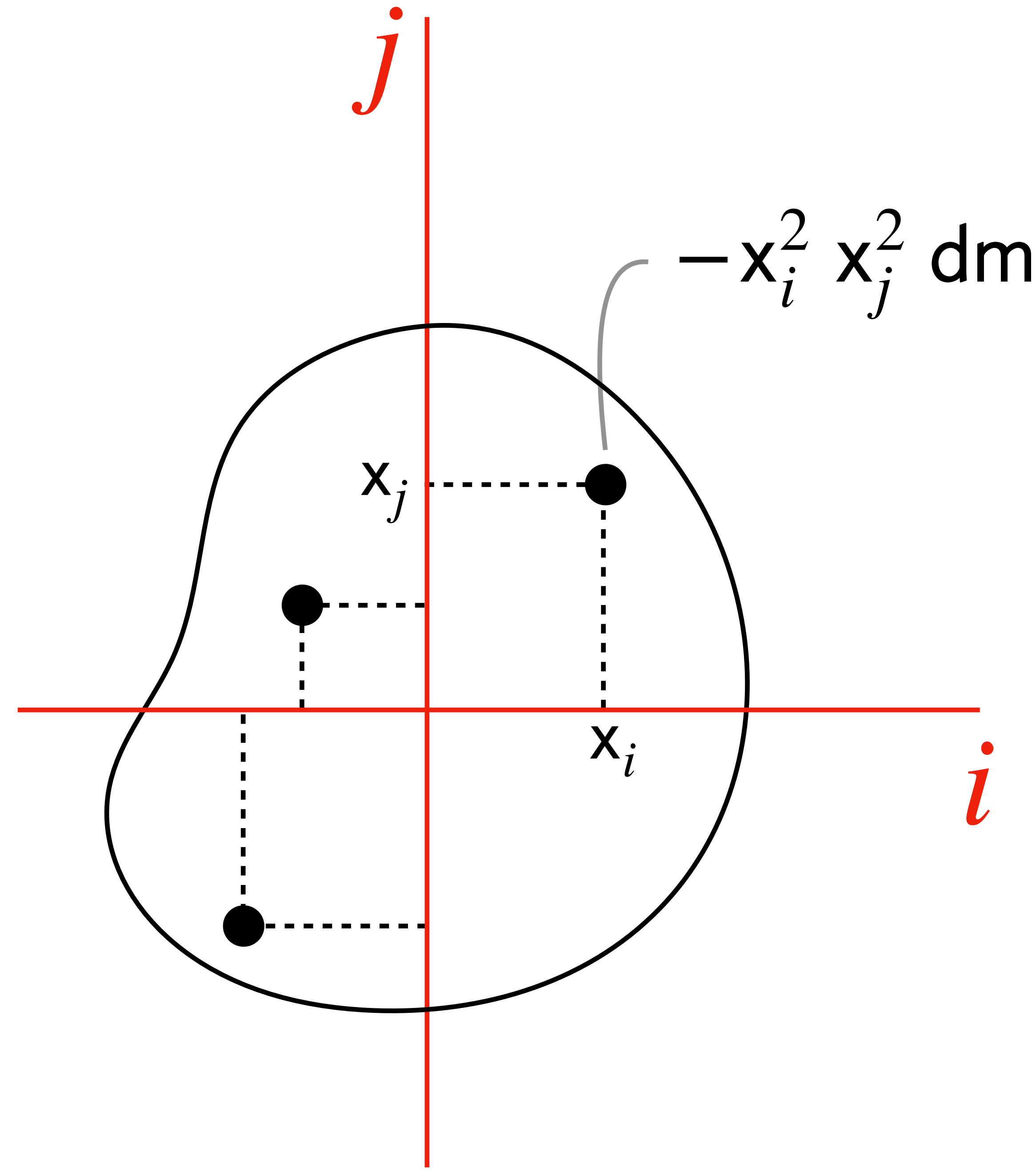
Exm:

$$I_{12} = -\int_S x_1\, x_2\, dm$$

Mom. inèrcia I_{ii}



Prod. inèrcia I_{ij}



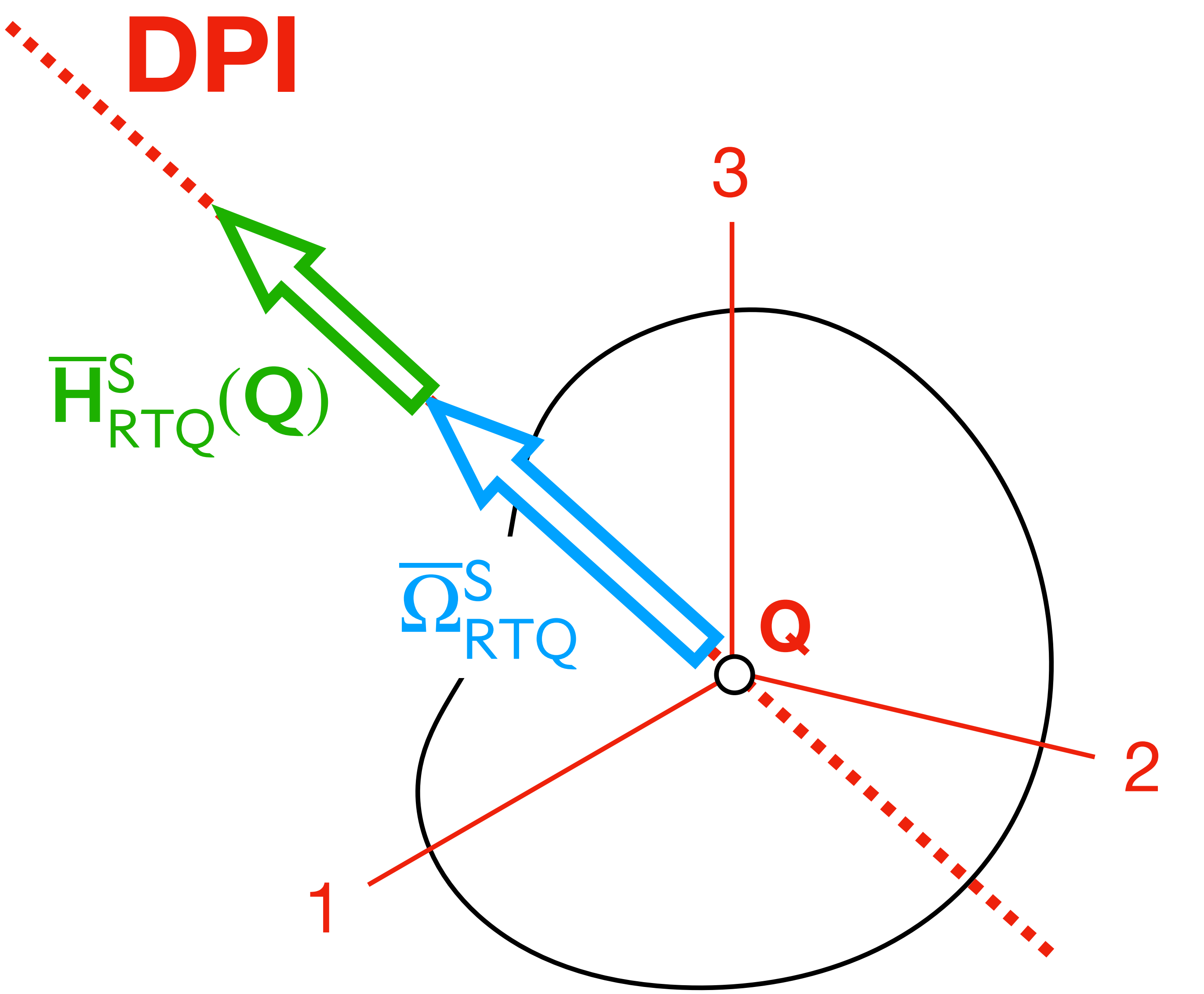
Direccions principals d'inèrcia (DPI)

Són les dels
vectors propis
de $\mathbb{I}(\mathbf{Q})$

$$\left[\mathbb{I}(\mathbf{Q})\right]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{H}}^S_{RTQ}(\mathbf{Q}) = \mathbb{I}(\mathbf{Q})\ \overline{\Omega}^S_{RGal}$$

Si són paral·lels,
la seva dir. és DPI

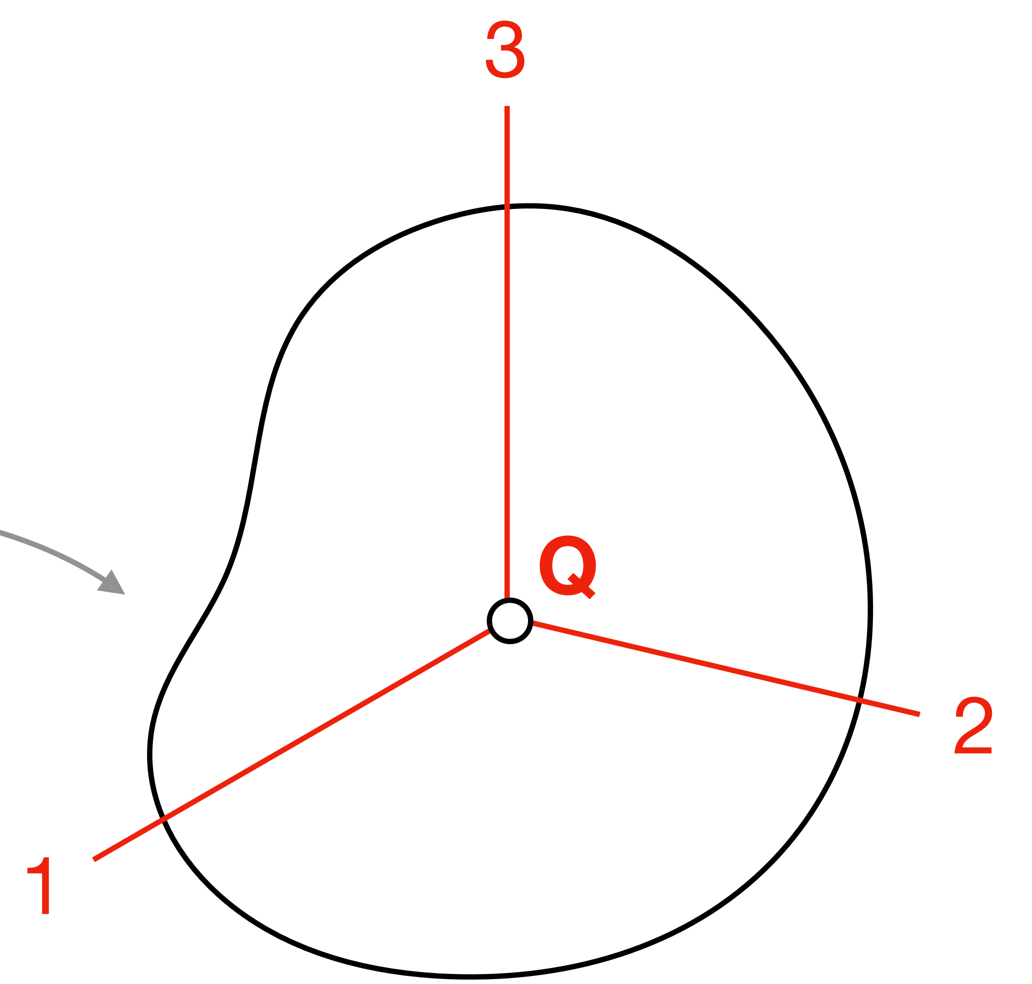


Bases adients?

$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Farem servir bases B
en les que el tensor sigui **constant**

Per exemple:
B fixa al sòlid

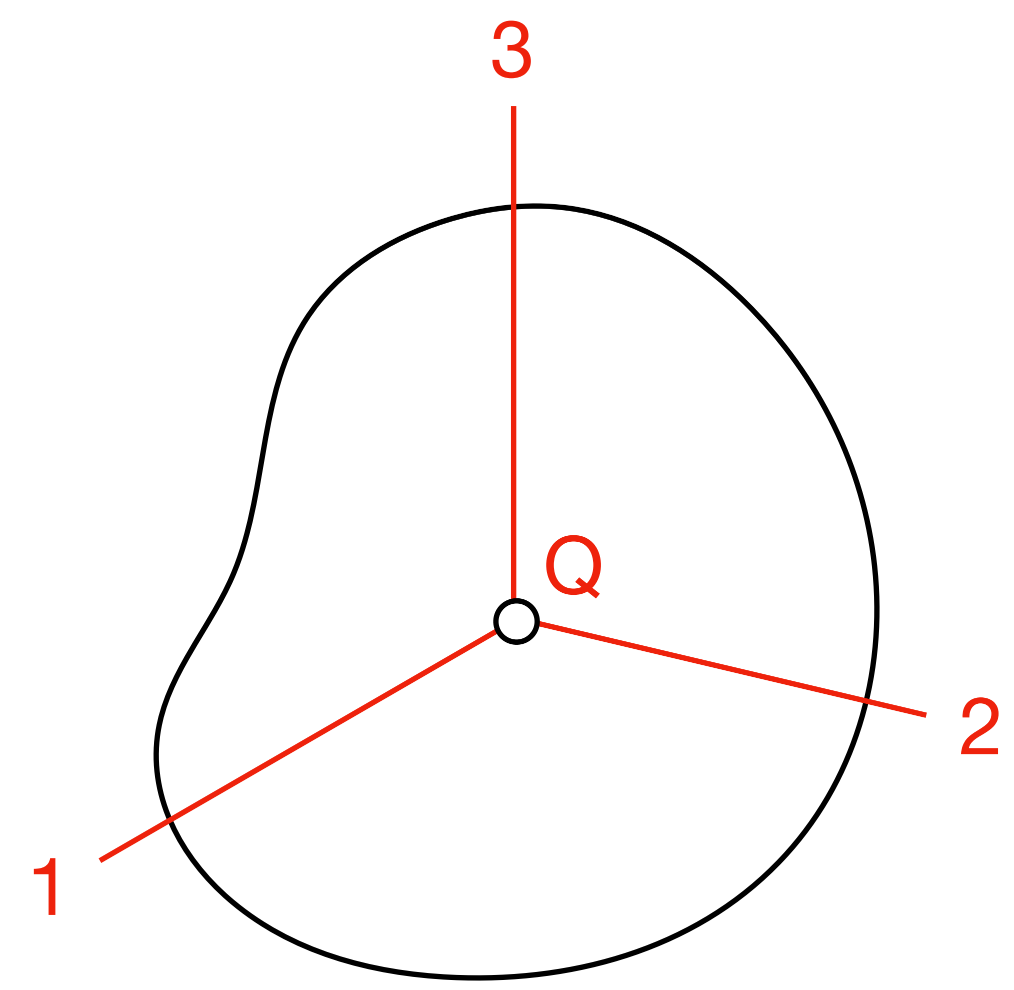


$$\left[\mathbb{I}(\mathbf{Q})\right]_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

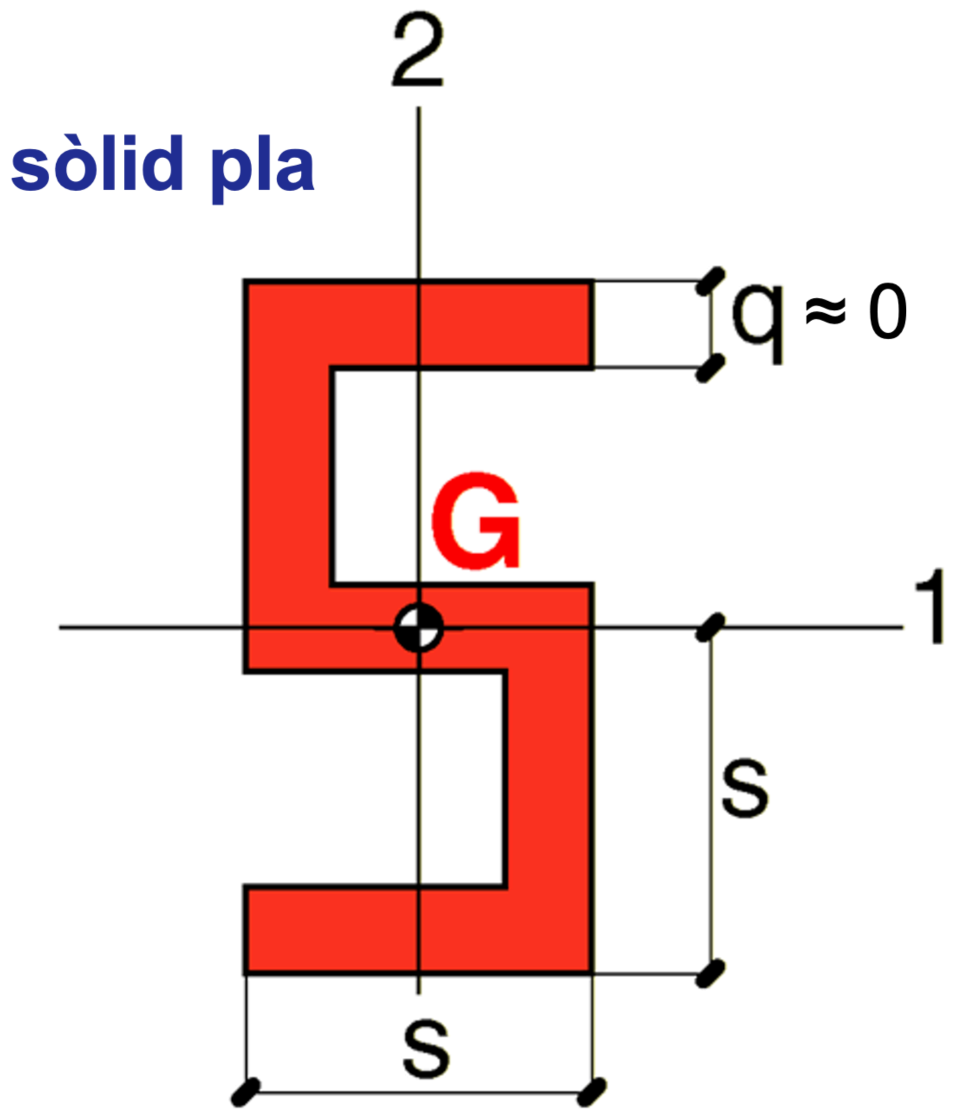
Objectiu d'avui:

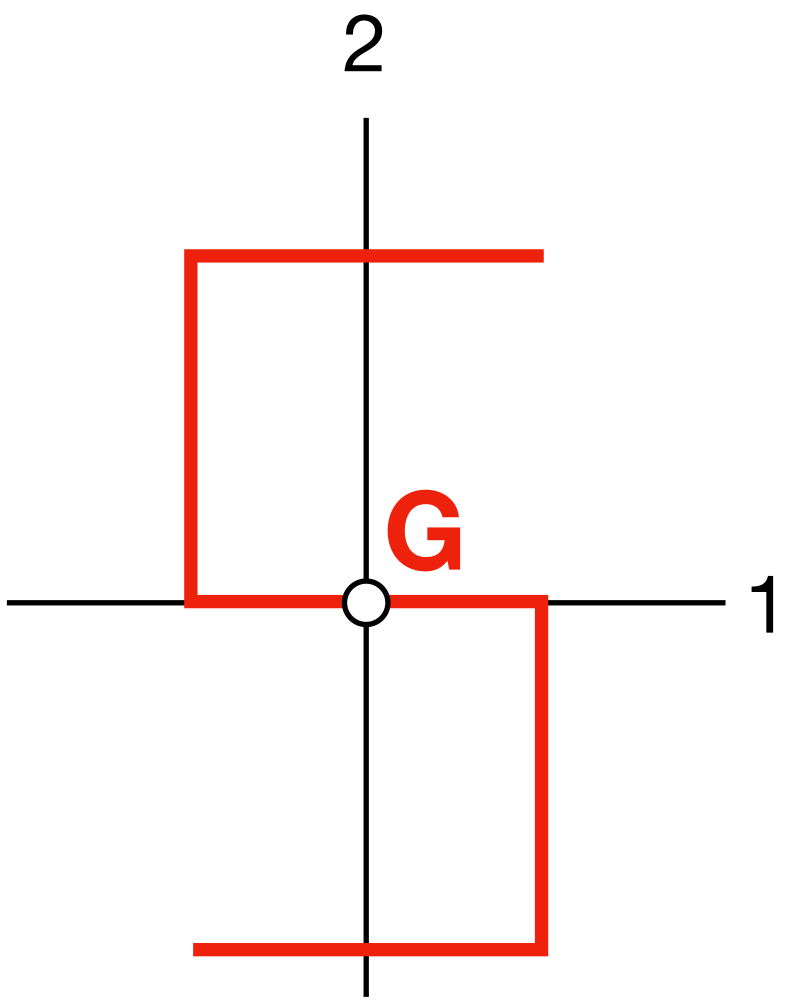
Aprendre a **avaluar-lo**

- Qualitativament
- Quantitativament

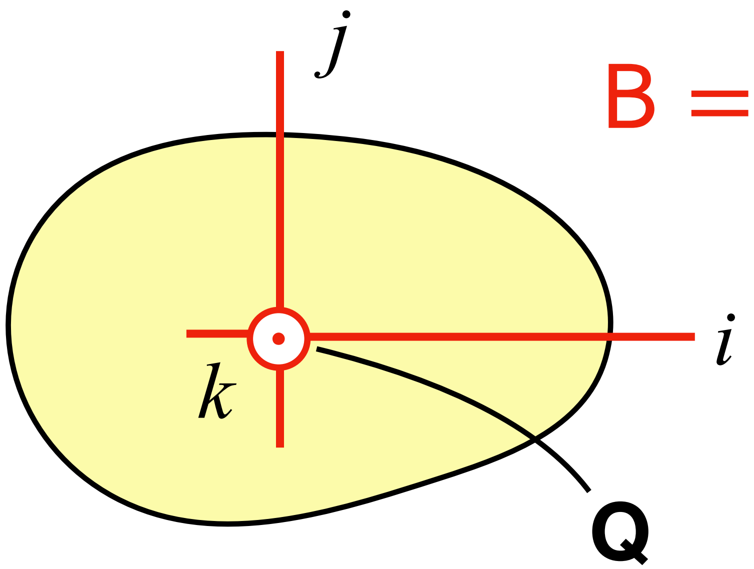


$$\left[\mathbb{I}(\mathbf{Q})\right]_{\mathrm{B}}\ ?$$





Per un sòlid pla



$\mathrm{B} = (i, j, k)$

es compleix

1

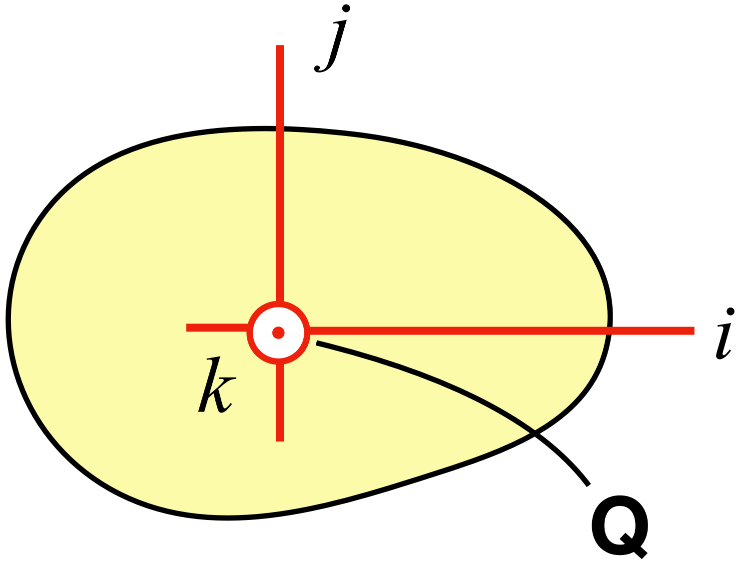
$\forall$**Q** $\in$ sòlid, la **dir. k** és **DPI**

$$\left[\mathbb{I}(\mathbf{Q})\right]_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{ii} & \mathrm{I}_{ij} & 0 \\ \mathrm{I}_{ij} & \mathrm{I}_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{I}_{ii} + \mathrm{I}_{jj}$$

I_{kk} és el **MPI** d'aquesta **DPI**

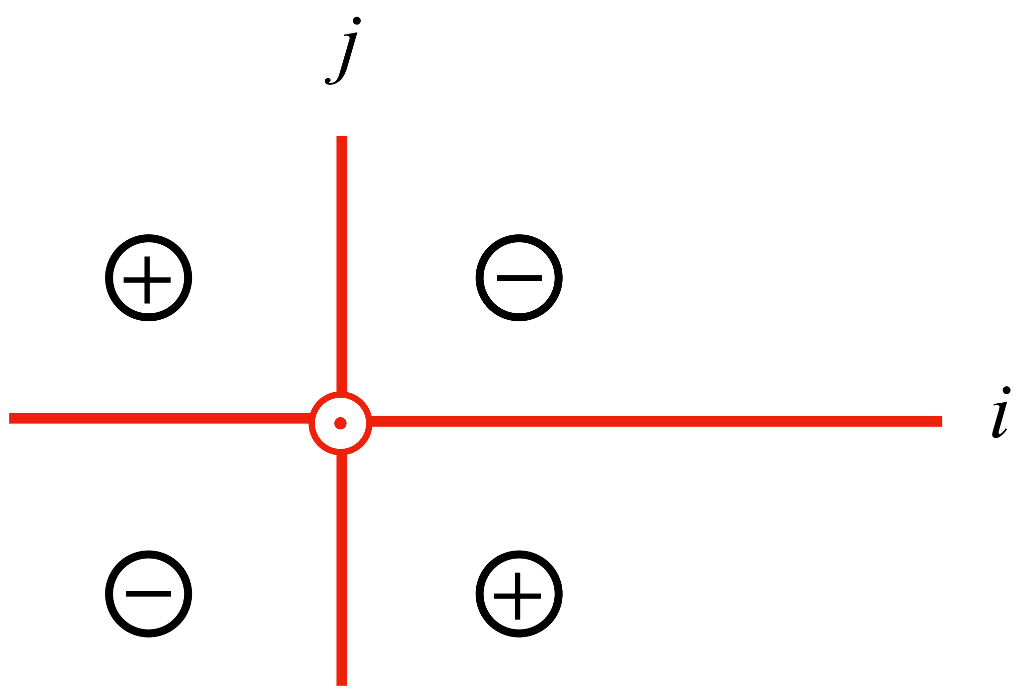
Per un sòlid pla



es compleix

2

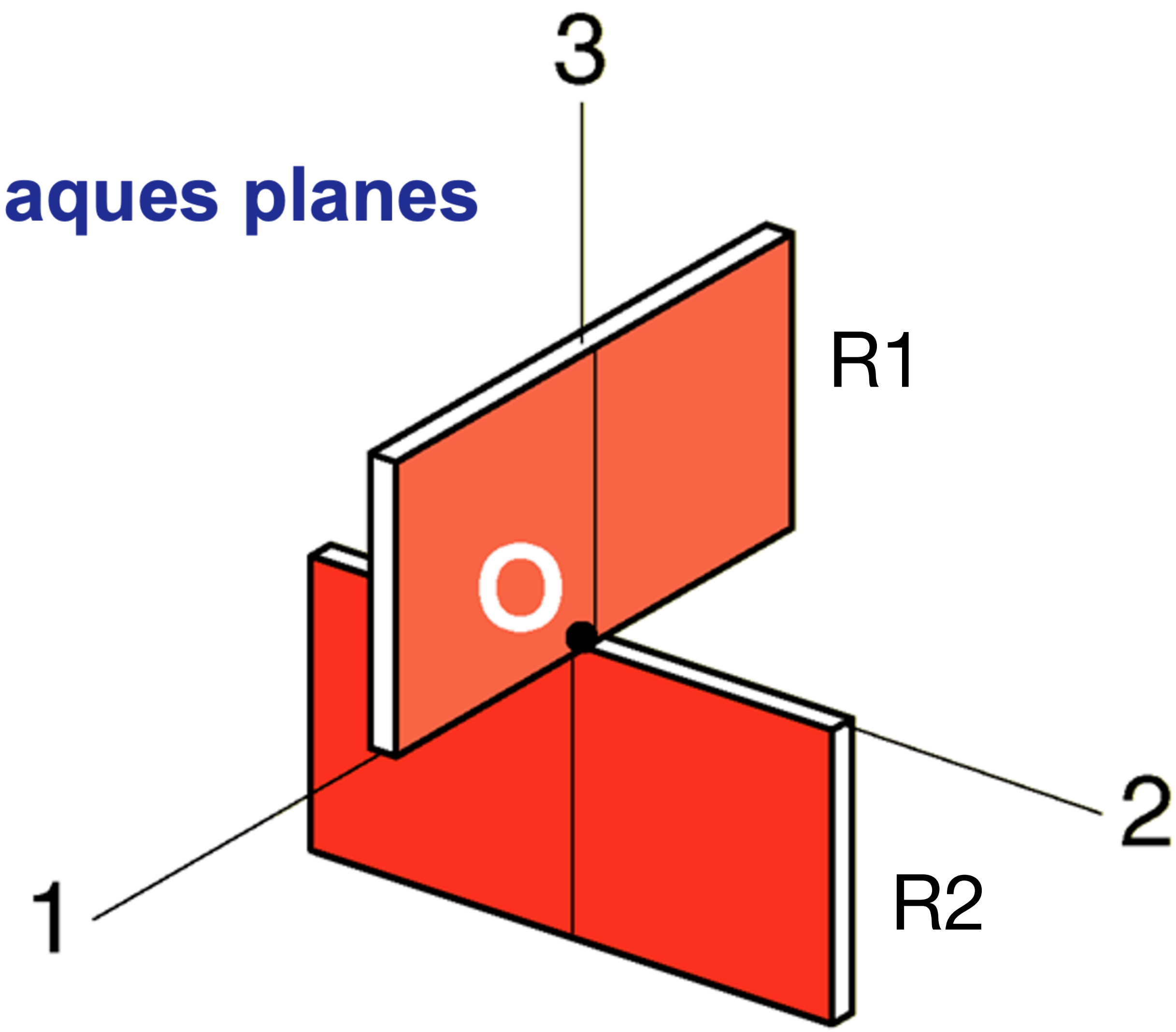
Signe de la contribució dels dm a I_{ij}



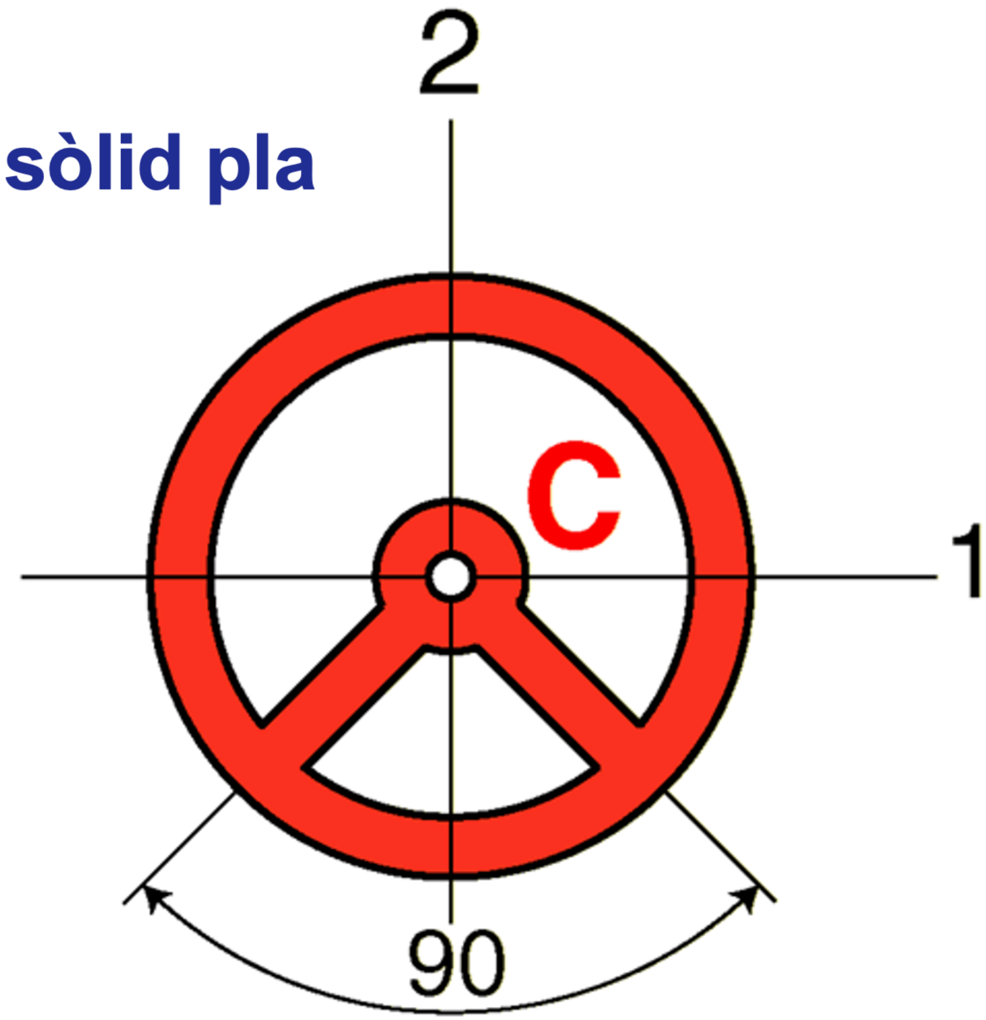
[II(O)] ?

qualitatiu

plaques planes



sòlid pla

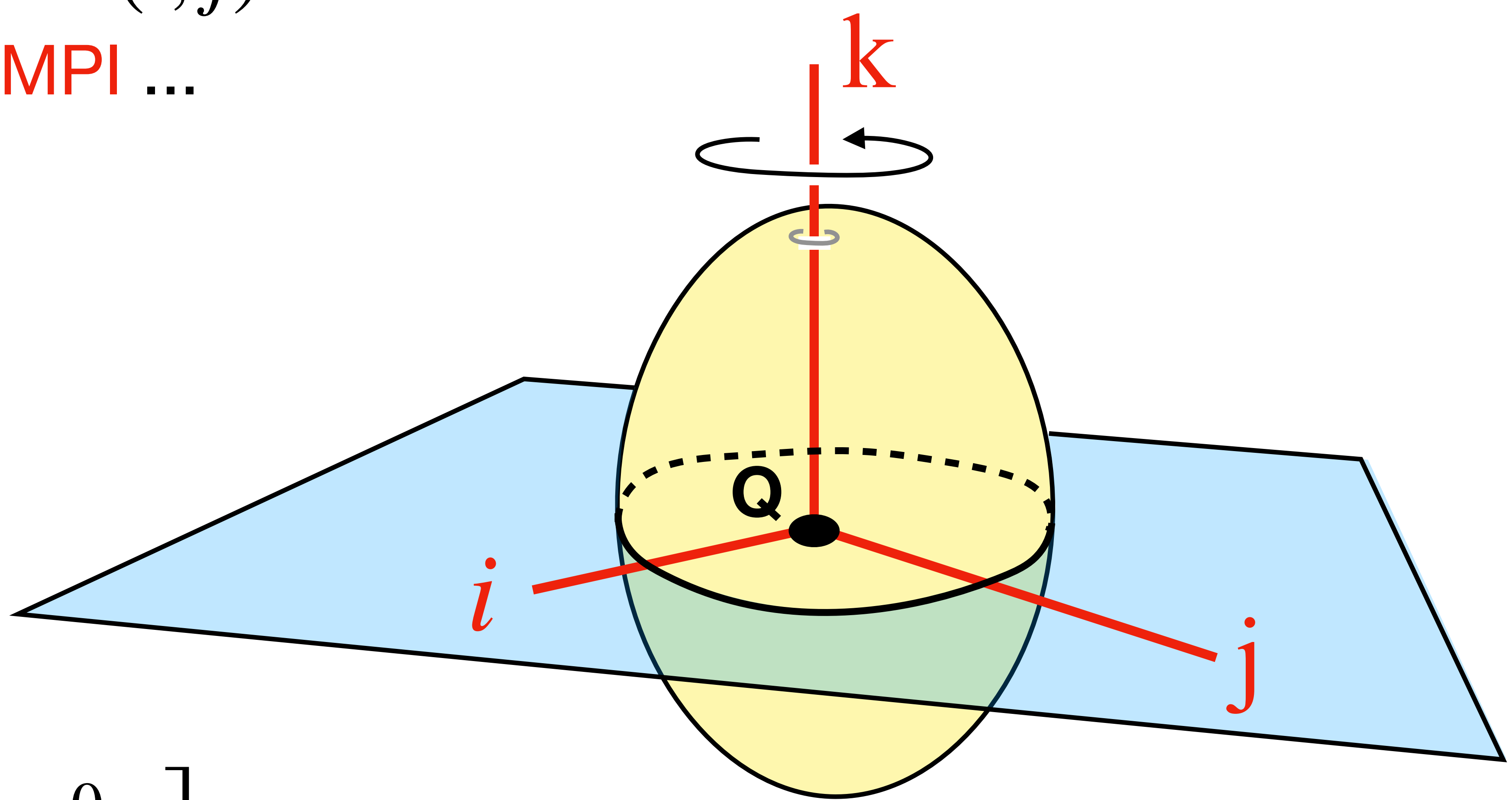


[II(C)] ?

qualitatiu

"Rotor simètric per **Q**" en el pla (i, j)

Si per al punt **Q** les dirs. (i, j)
són DPI amb mateix MPI ...

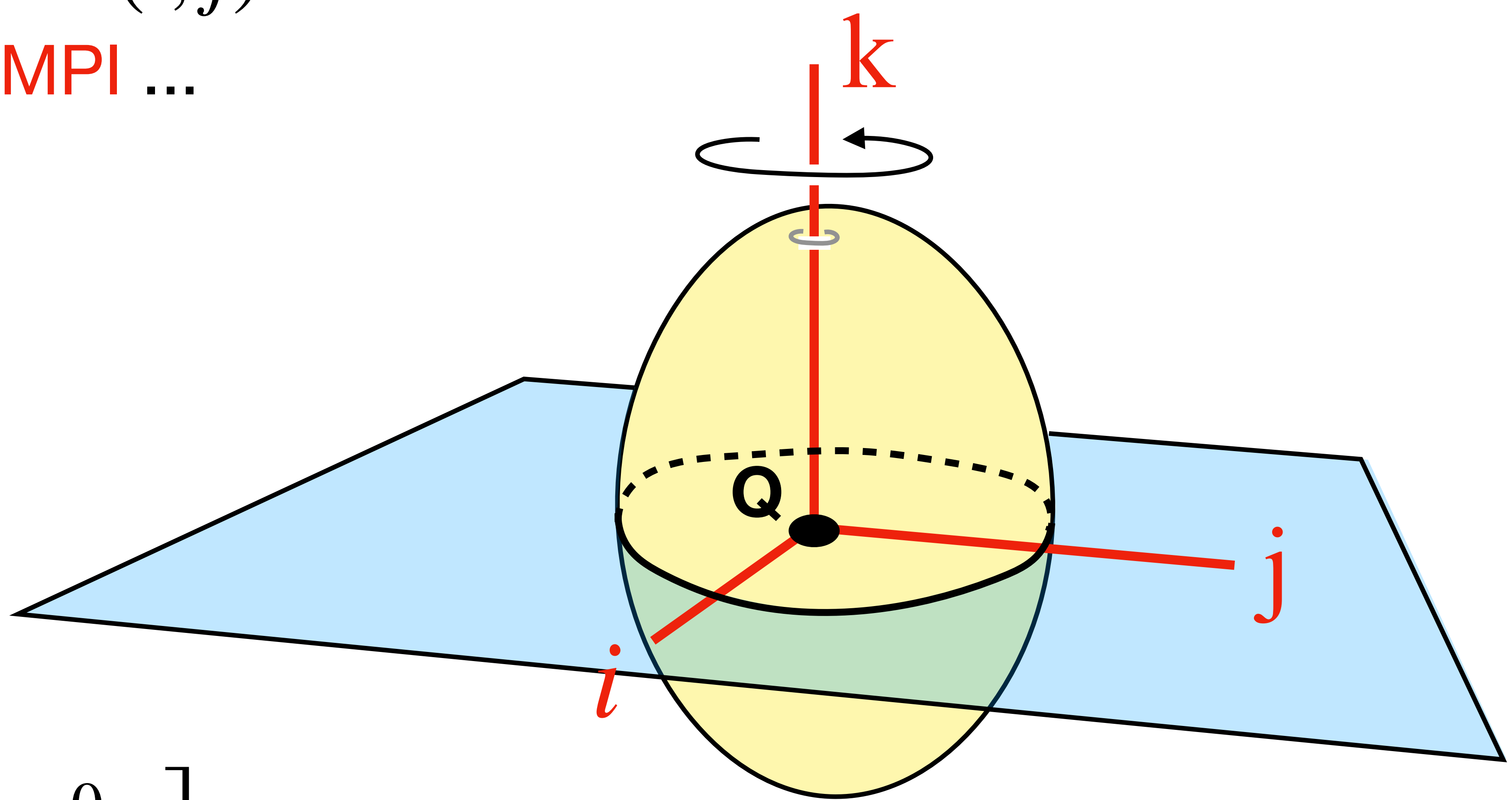


$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{kk} \end{bmatrix}}_{}$$

no canvia si girem B avd dir. k

"Rotor simètric per **Q**" en el pla (i, j)

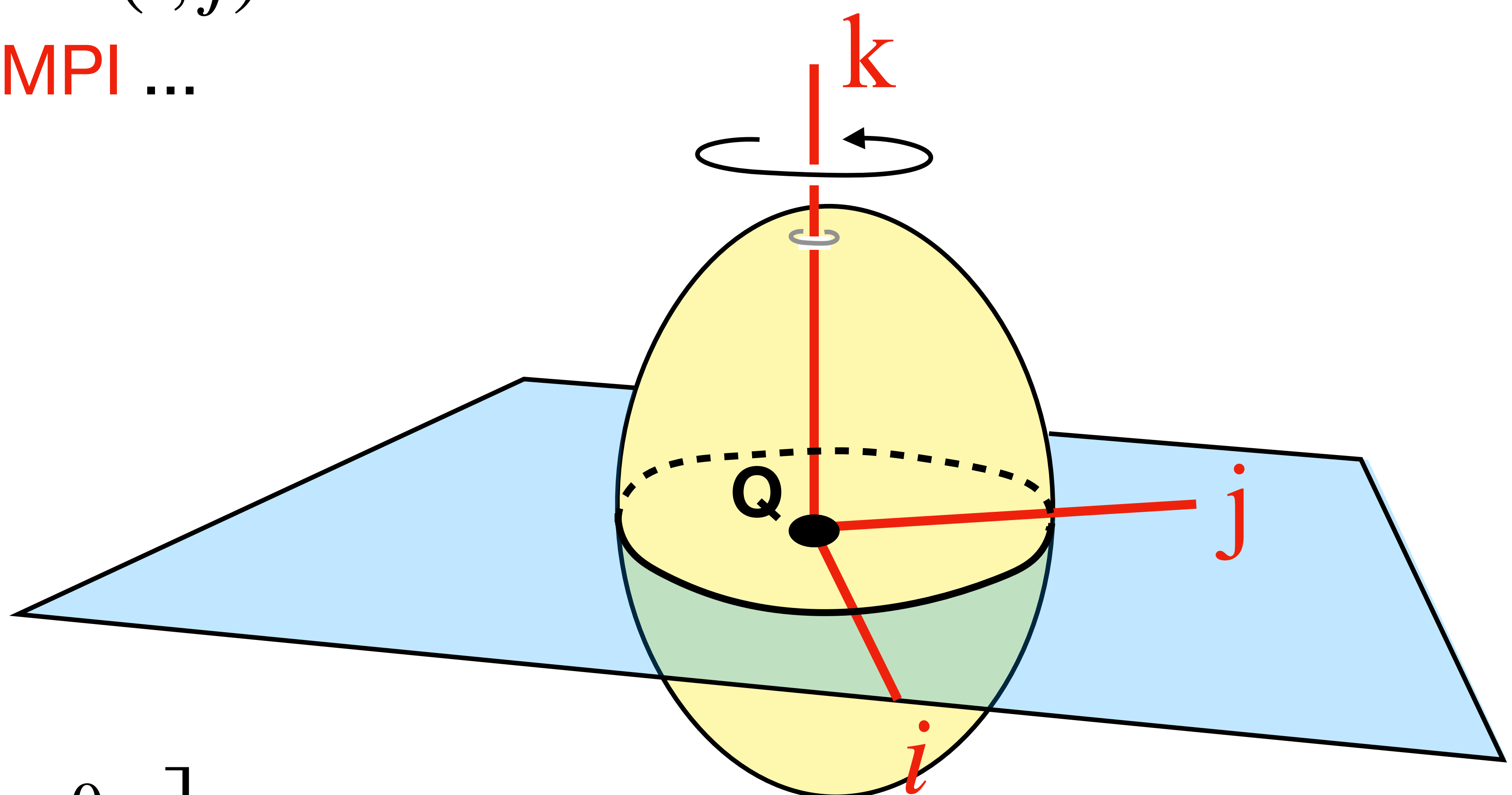
Si per al punt **Q** les dirs. (i, j)
són DPI amb mateix MPI ...



$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_{\mathrm{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{kk} \end{bmatrix}}_{\text{no canvia si girem B avd dir. k}}$$

"Rotor simètric per **Q**" en el pla (i, j)

Si per al punt **Q** les dirs. (i, j)
són DPI amb mateix MPI ...

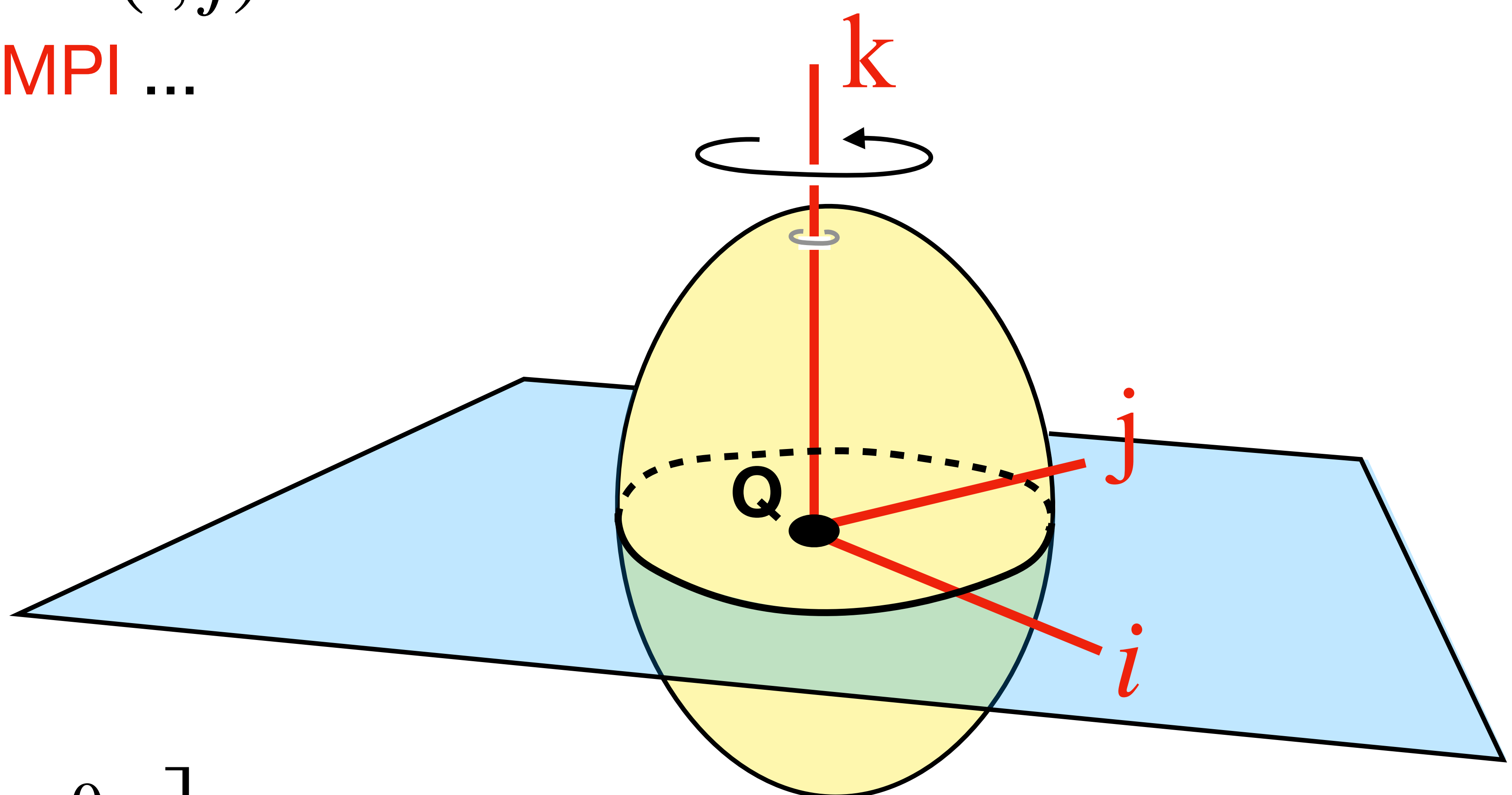


$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{kk} \end{bmatrix}}$$

no canvia si girem B avd dir. k

"Rotor simètric per **Q**" en el pla (i, j)

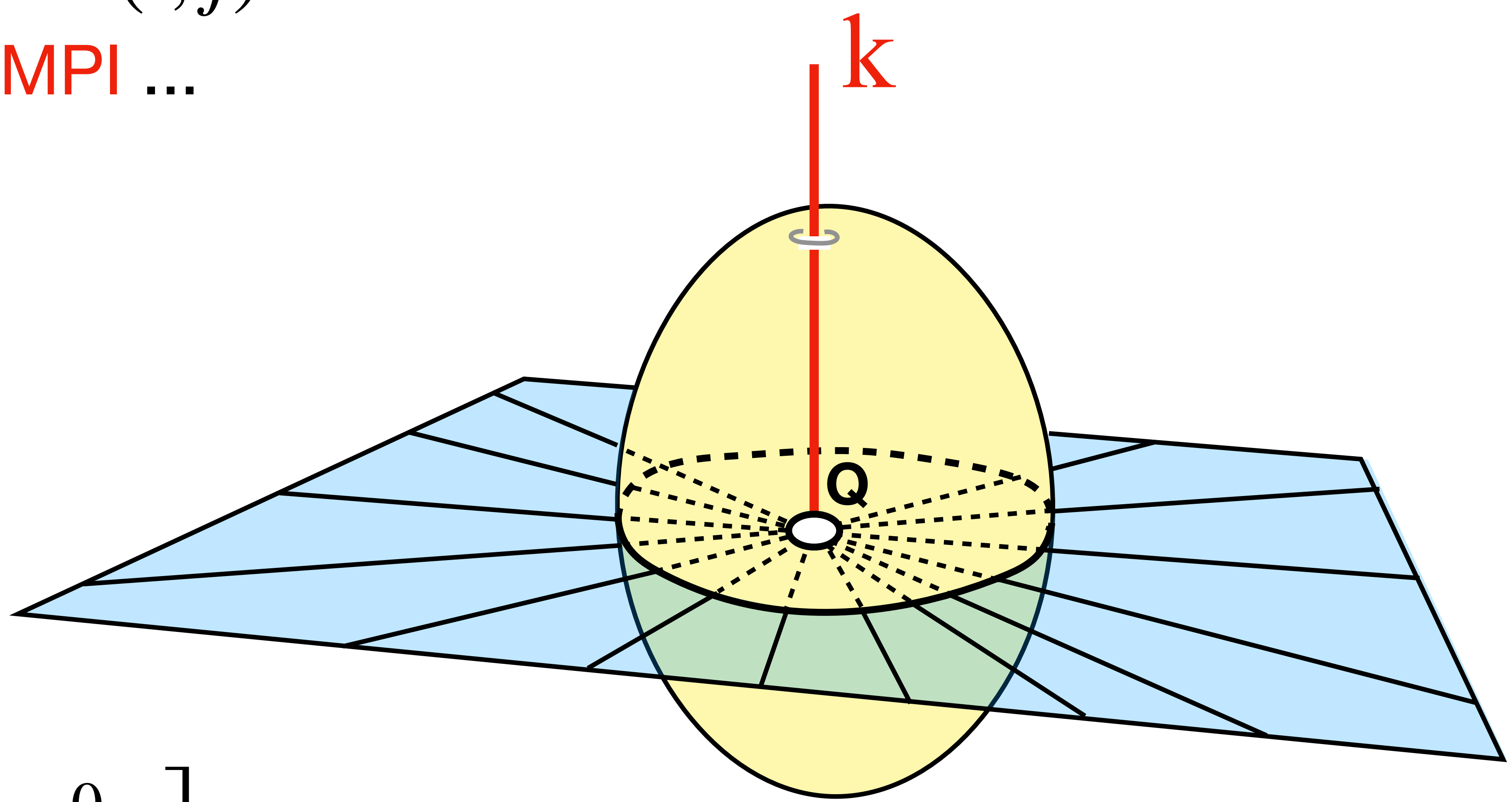
Si per al punt **Q** les dirs. (i, j)
són DPI amb mateix MPI ...



$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_{\mathrm{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{kk} \end{bmatrix}}_{\text{no canvia si girem B avd dir. k}}$$

"Rotor simètric per **Q**" en el pla (i, j)

Si per al punt **Q** les dirs. (i, j)
són DPI amb mateix MPI ...



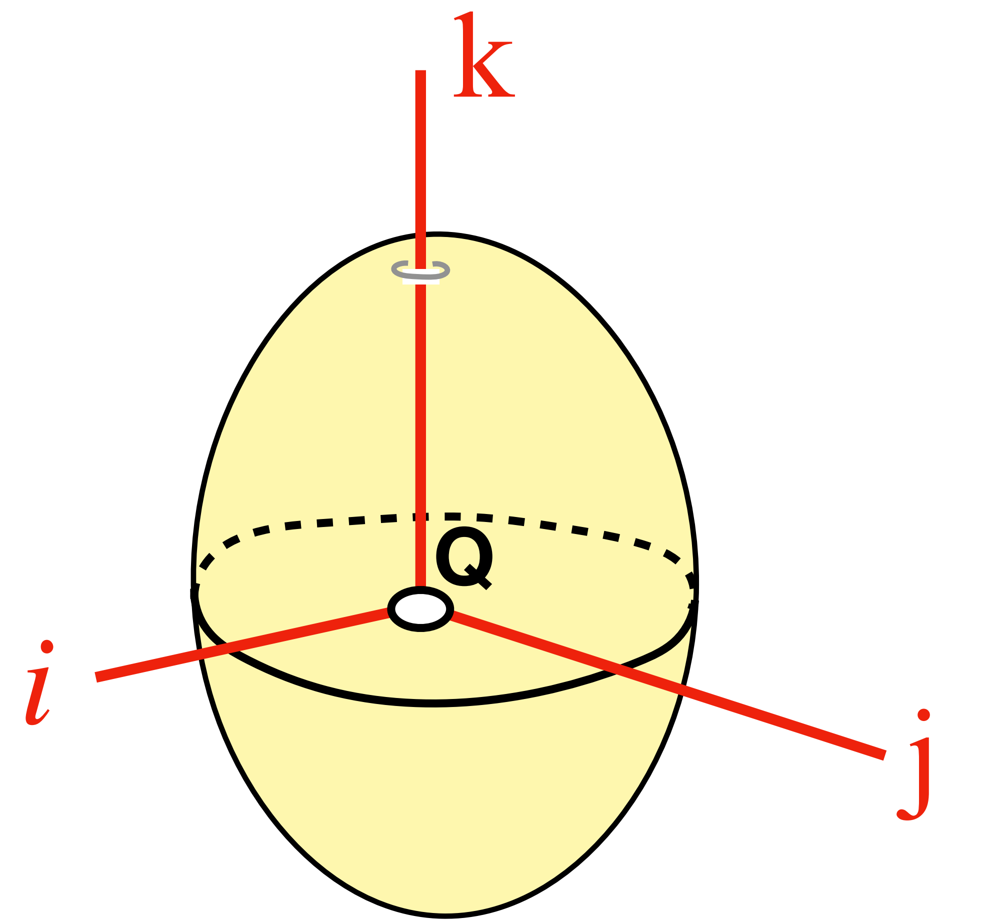
$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{kk} \end{bmatrix}$$

Tota recta del pla (i, j) per **Q** és DPI

(amb mom. inèrcia I al seu voltant)

"Rotor esfèric per **Q**"

Si per al punt **O** les dirs. (i, j, k)
són DPI amb mateix MPI ...



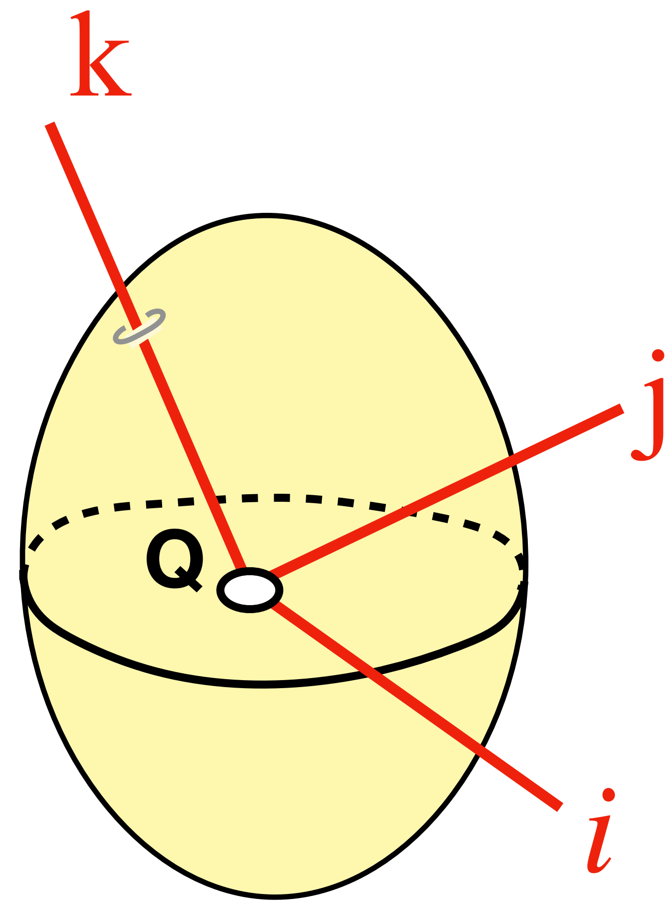
... el tensor a **Q** té la forma

$$\begin{bmatrix} \mathtt{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathtt{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathtt{I} \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada

"Rotor esfèric per **Q**"

Si per al punt **Q** les dirs. (i, j, k)
són DPI amb mateix MPI ...



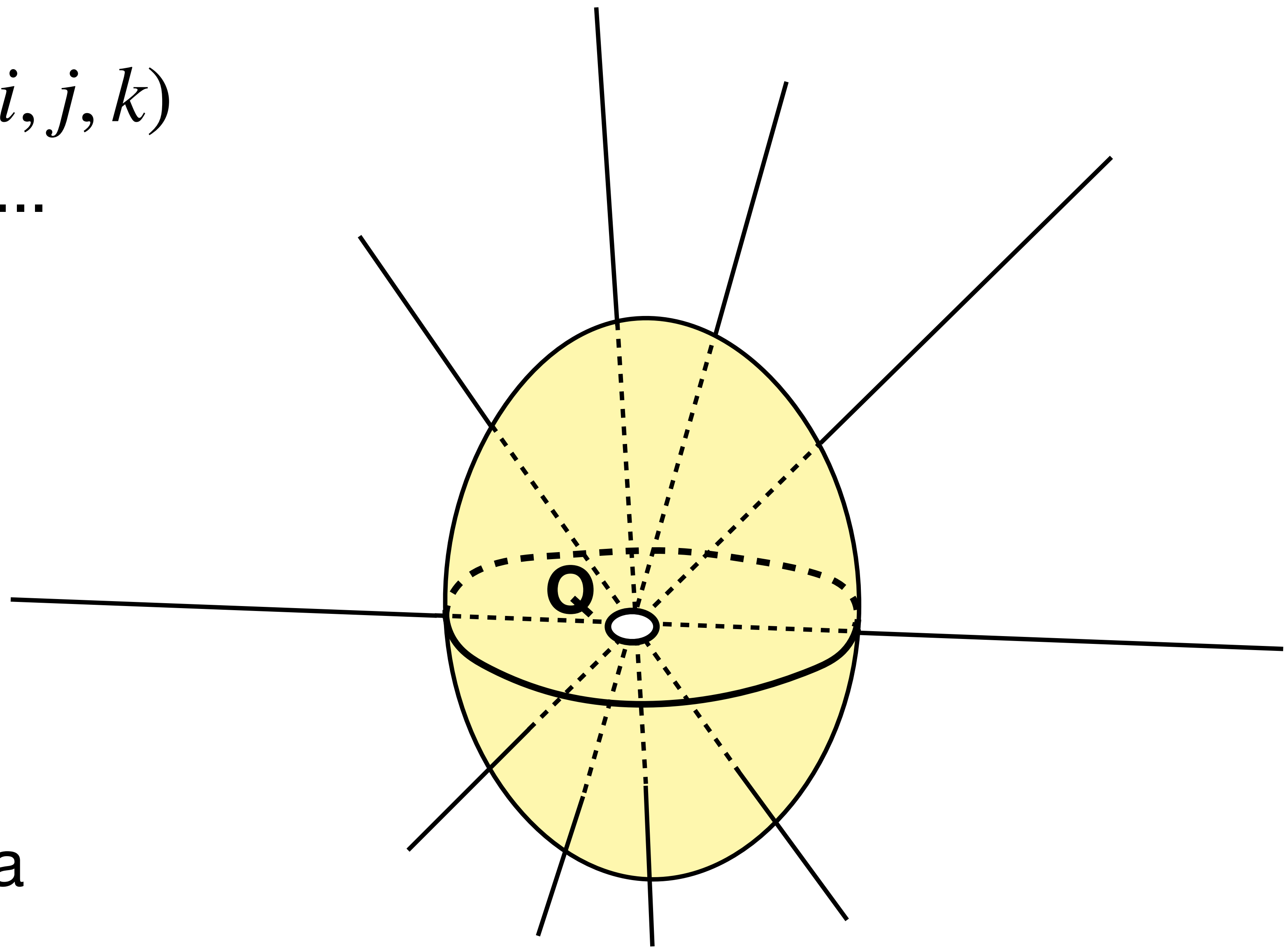
... el tensor a **Q** té la forma

$$\begin{bmatrix} \mathtt{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathtt{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathtt{I} \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada

"Rotor esfèric per **Q**"

Si per al punt **Q** les dirs. (i, j, k)
són DPI amb mateix MPI ...



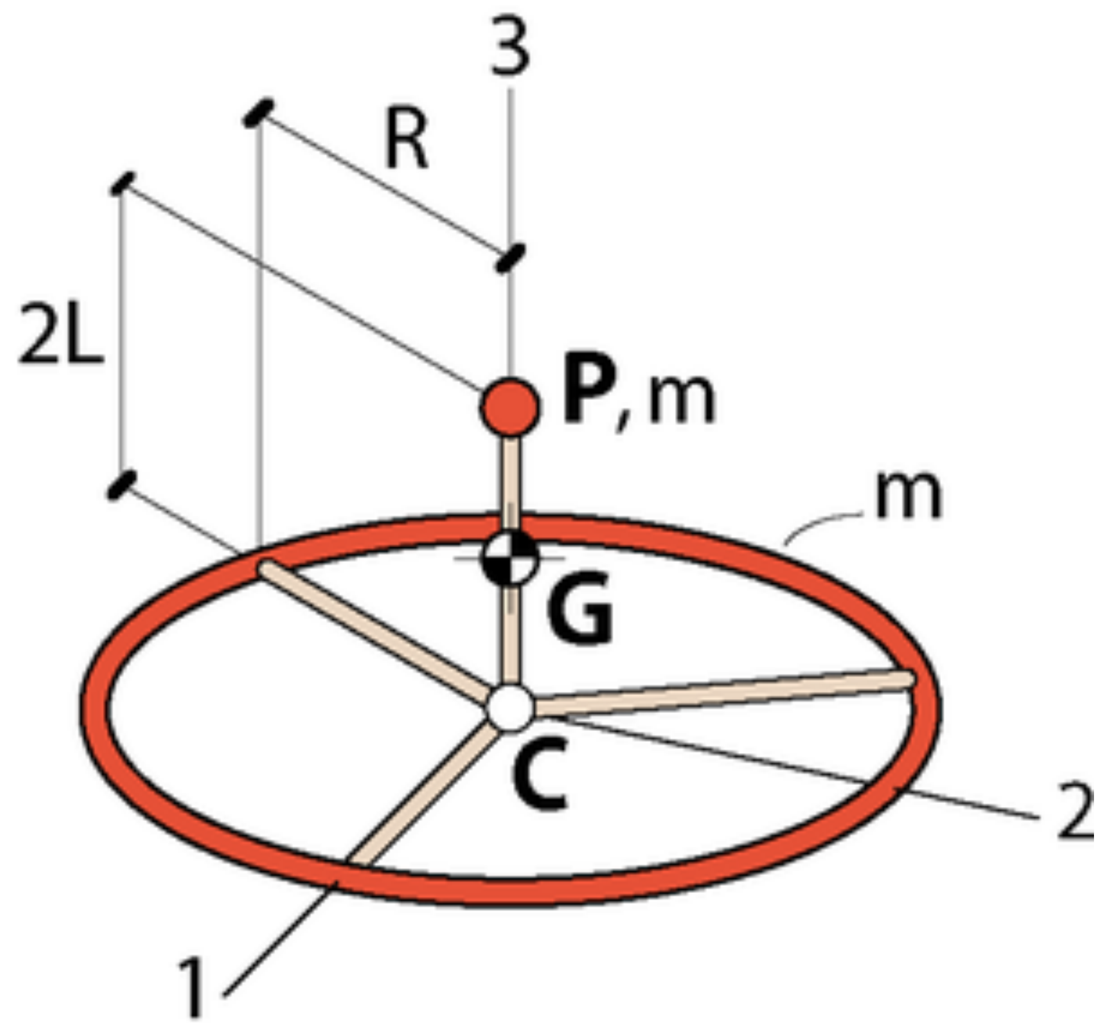
... el tensor a **Q** té la forma

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada

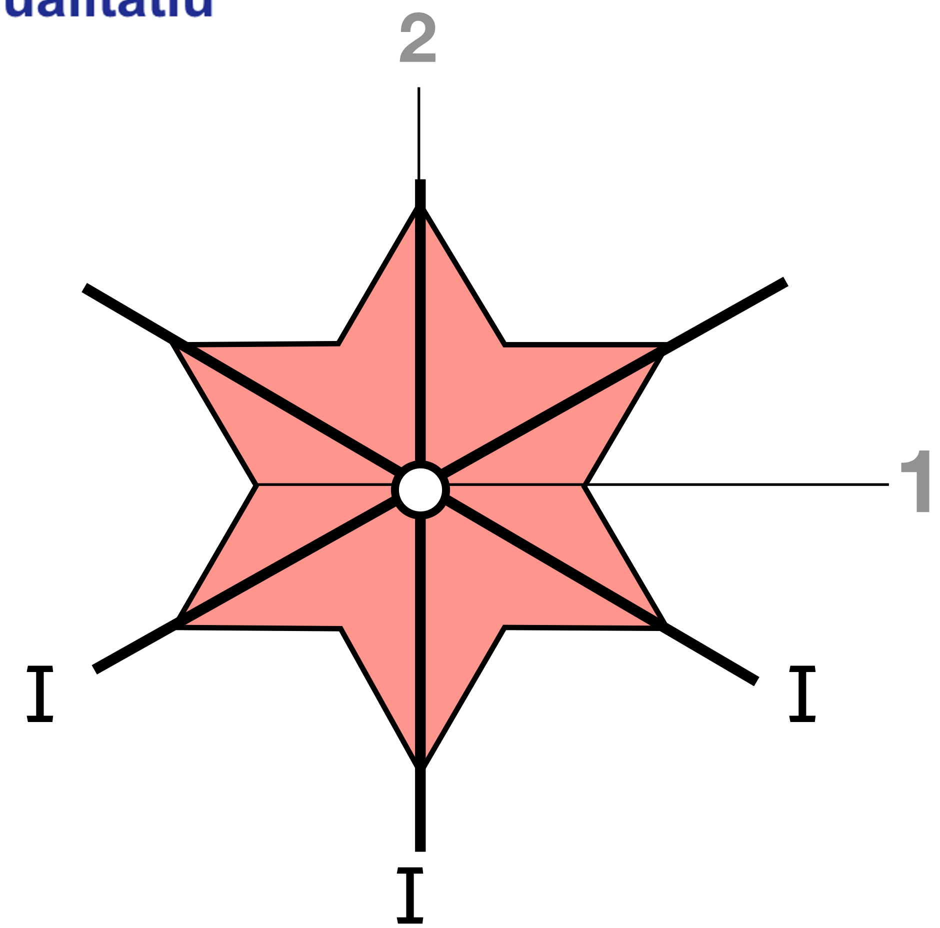
Qualsevol recta per **Q** és DPI
(amb moment inèrcia I)

Exemple D5.9 - Wikimec



[II(G)] ?

qualitatiu



Sòlid pla i eix 2 de simetria

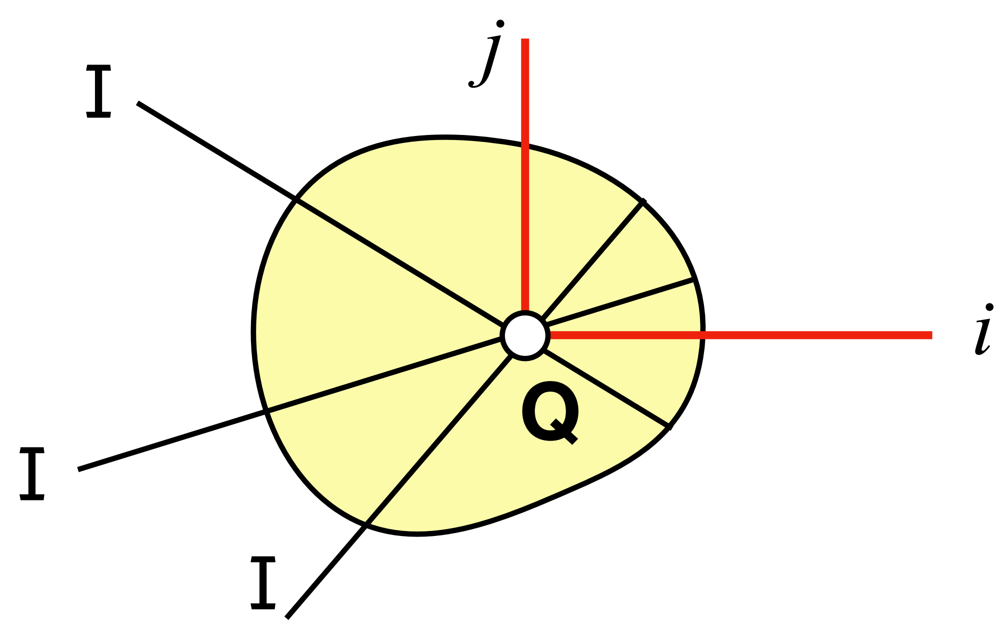
$$[\mathbb{I}(\mathbf{G})]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$$

I_{11}, I_{22} ?

3 moments en pla (1,2) iguals $\Rightarrow$ Rotor simètric a **G** per aquest pla!

$$[\mathbb{I}(\mathbf{G})]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

Si **3 o més** moments d'inèrcia resp. eixos d'un **mateix pla** (i,j) són iguals ...



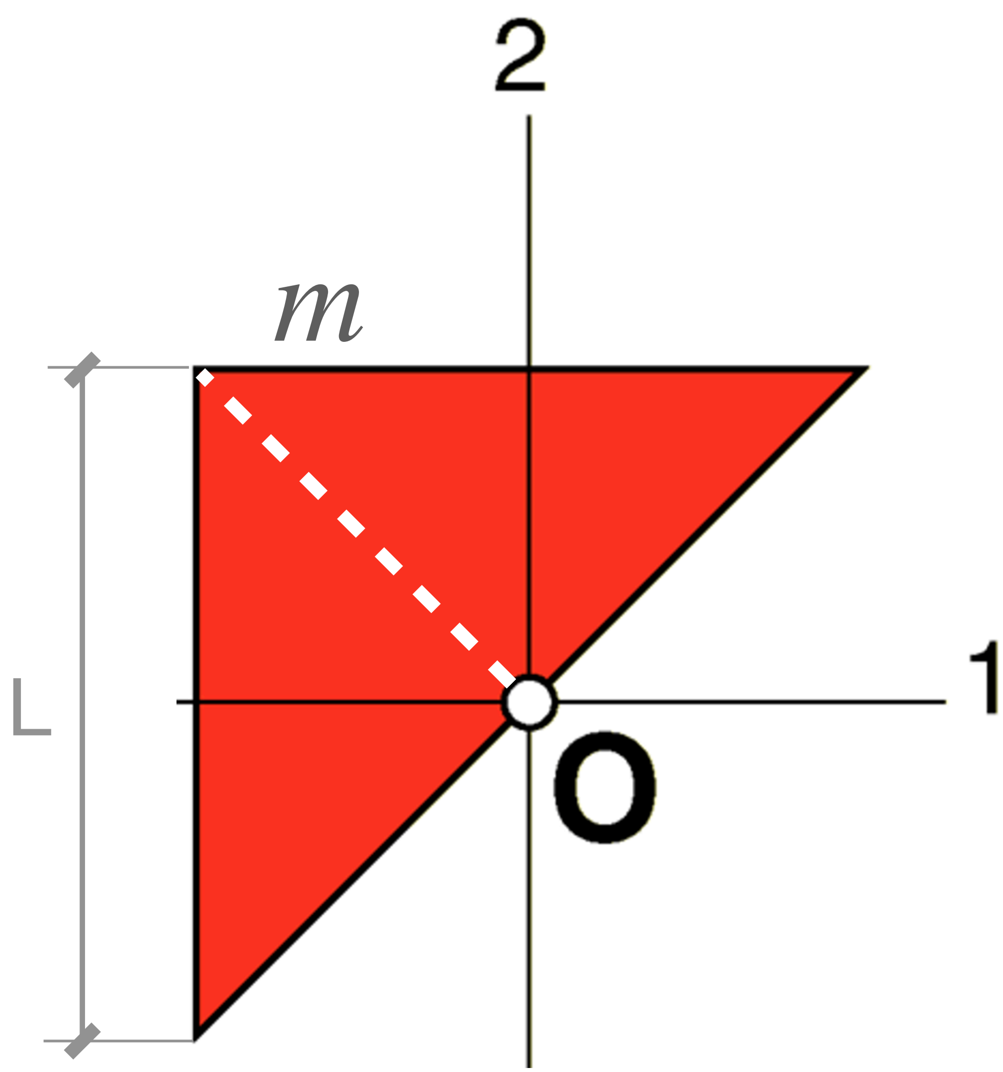
... el sòlid és **rotor simètric a Q** per aquest pla

[II(O)] ?
qualitatiu
quantitatiu

Fig. plana $\Longrightarrow$ 3 és DPI

I_{12}? ← És zero!

$$\left[\mathbb{I}(\mathbf{O})\right]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$



$[\mathbb{I}(\mathbf{O})]$ **?**

qualitatiu

quantitatiu

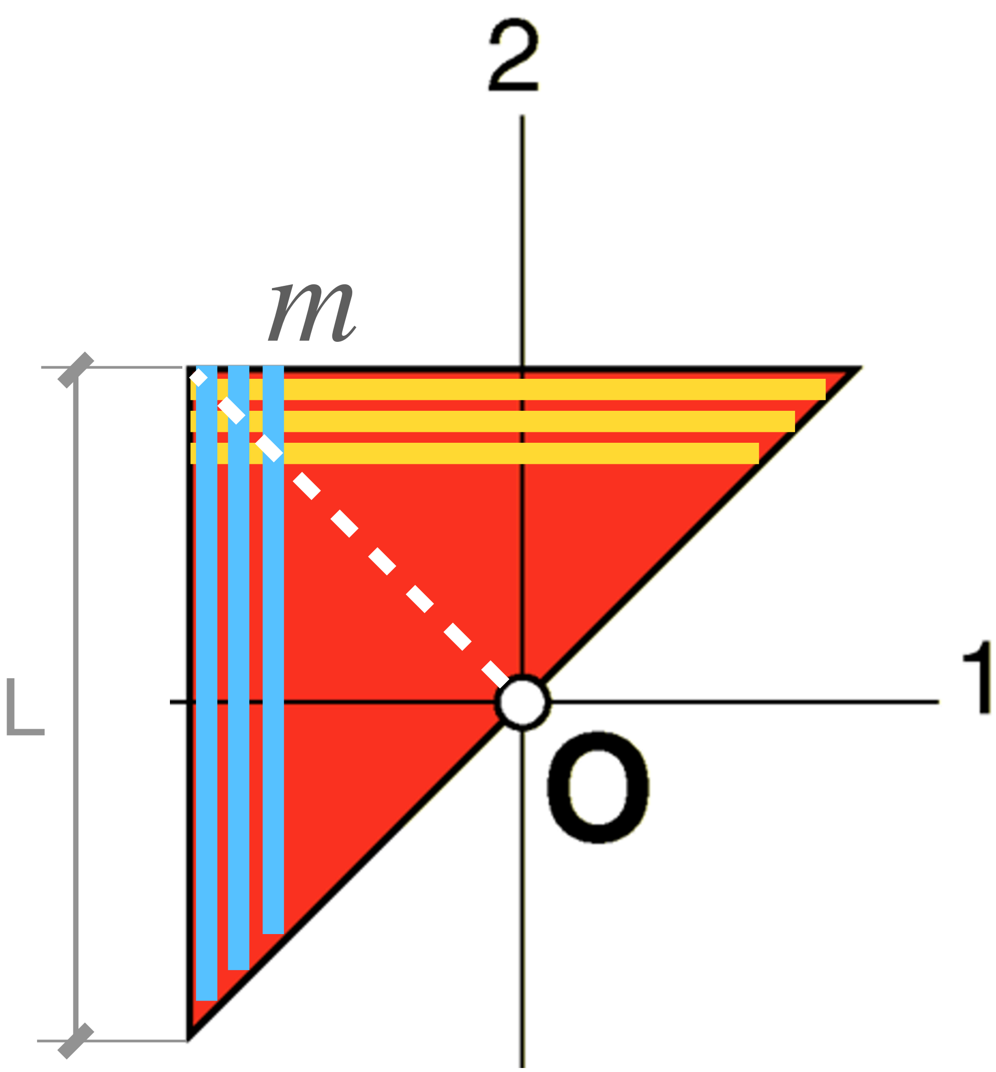


Fig. plana $\Longrightarrow$ 3 és DPI

I_{12}? $\leftarrow$ És zero!

$$[\mathbb{I}(\mathbf{O})]_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{11} & & \\ & \mathrm{I}_{22} & \\ & & \mathrm{I}_{11} + \mathrm{I}_{22} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{I}_{11}, \mathrm{I}_{22}$ **?** $\leftarrow$ Són iguals!

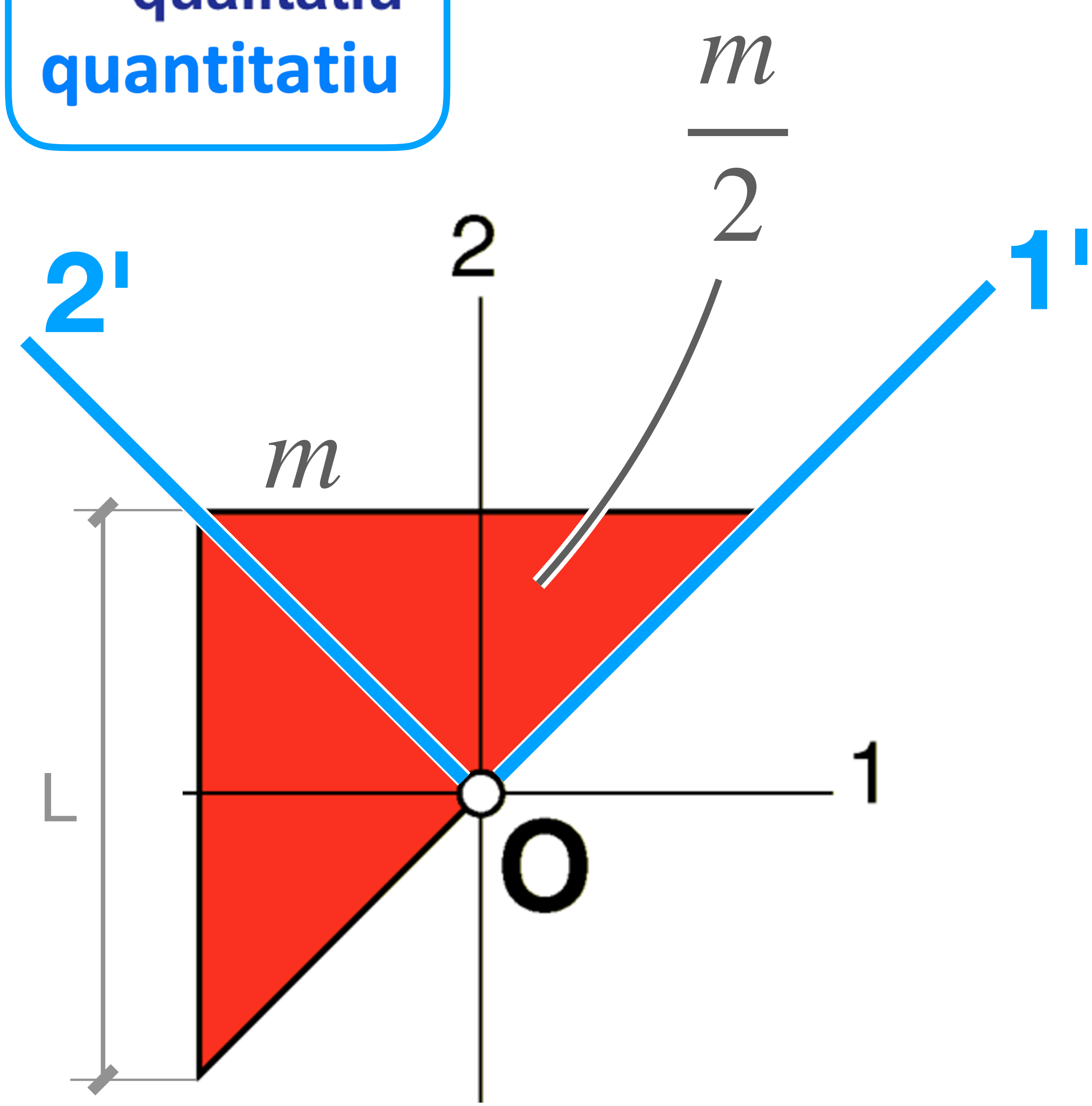
$$[\mathbb{I}(\mathbf{O})]_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & & \\ & \mathrm{I} & \\ & & 2\mathrm{I} \end{bmatrix}$$

Rotor simètric a **O**

$[\mathbb{I}(\mathbf{O})]$ **?**

qualitatiu

quantitatiu

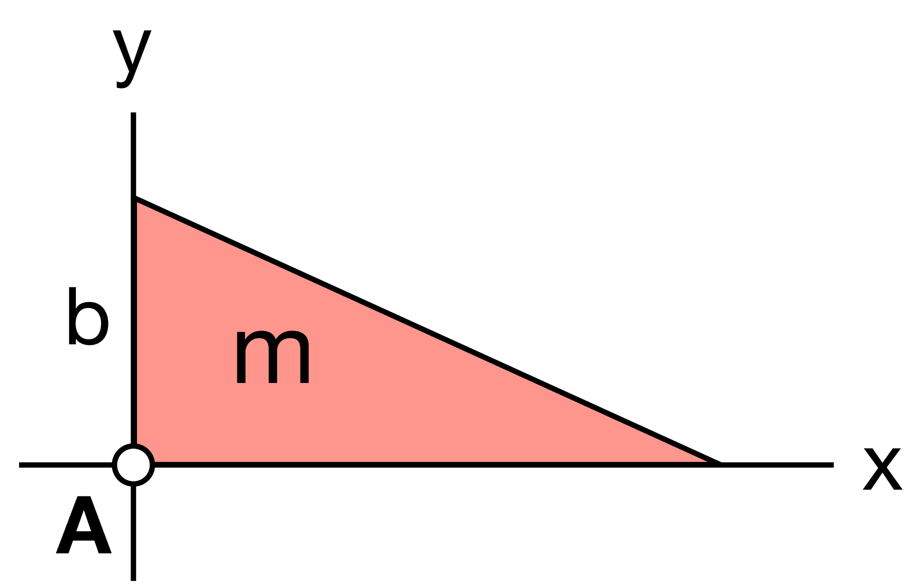


$$I = 2\left[\frac{1}{6}\,\frac{m}{2}\left(\frac{2L}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = \frac{mL^2}{3}$$

$$[\mathbb{I}(\mathbf{O})]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

Rotor simètric a **O**

Taula



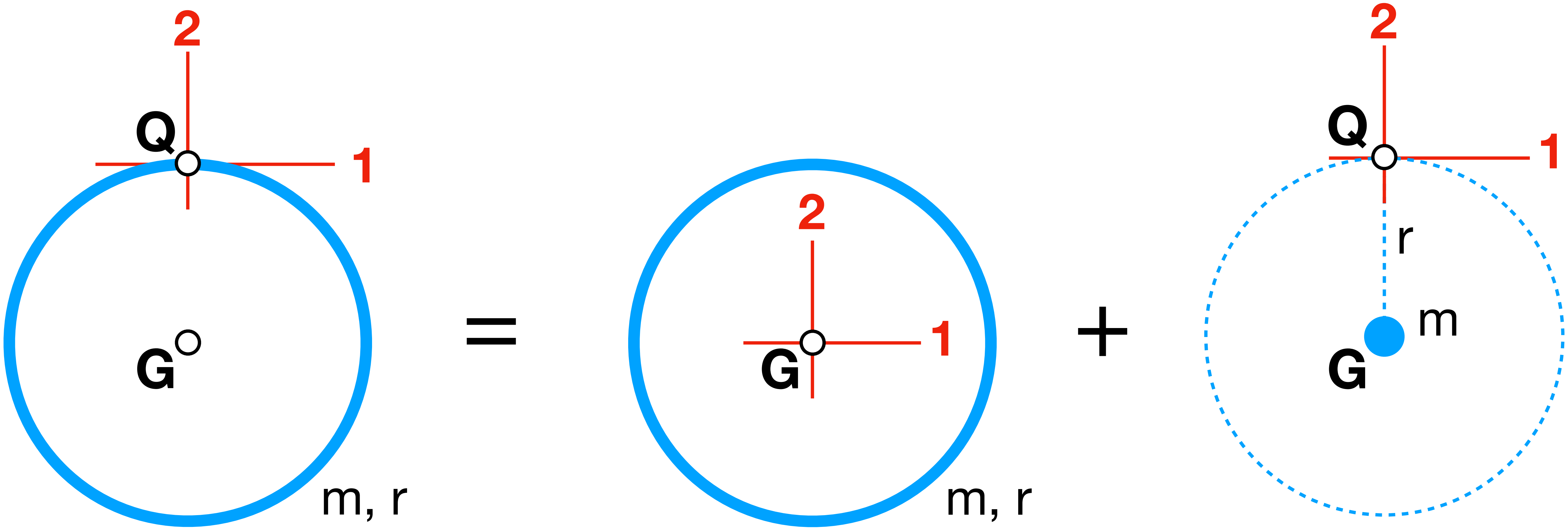
$$I_{xx}(\mathbf{A}) = \frac{1}{6}mb^2$$

Teorema de Steiner

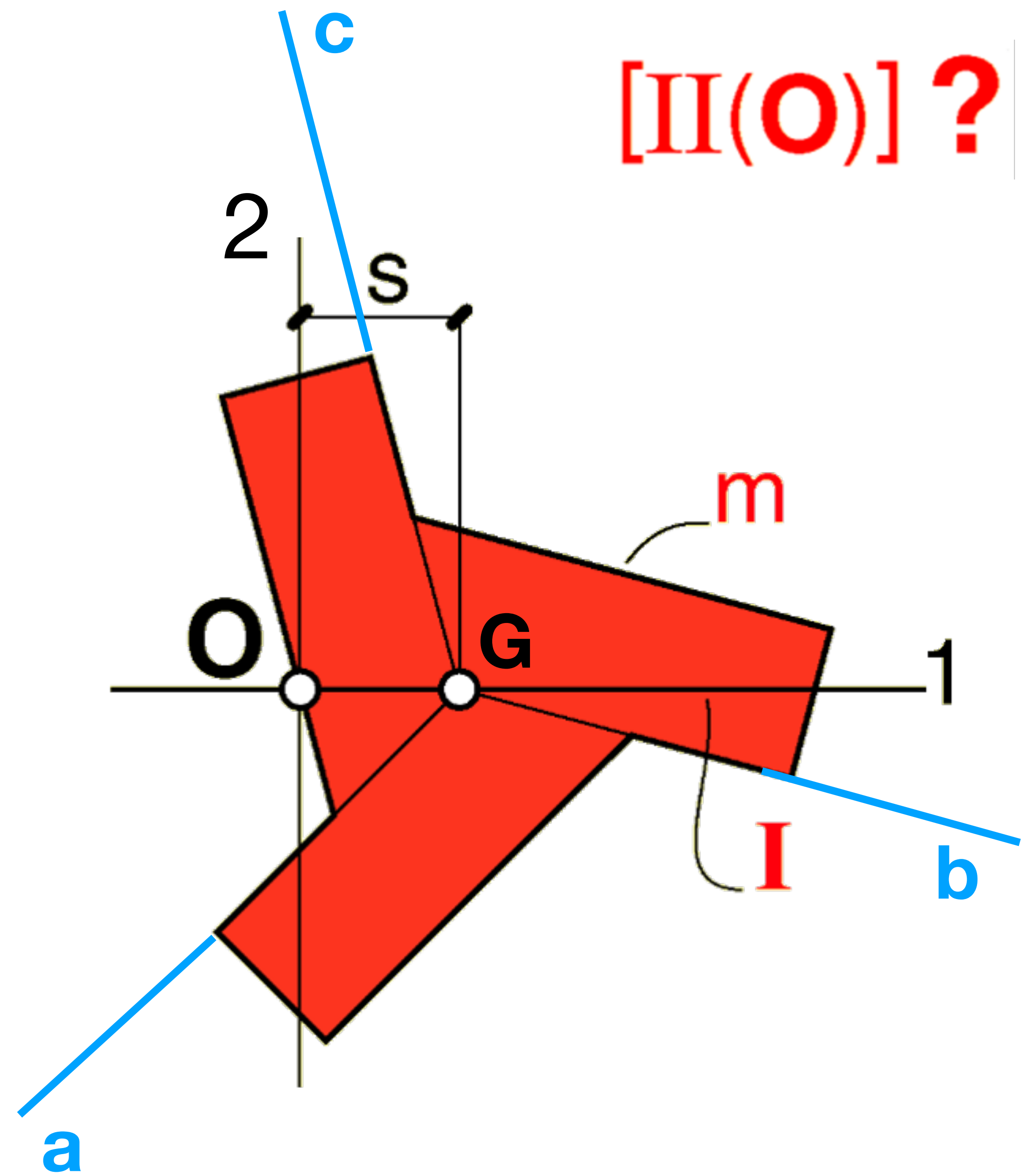
$$\underbrace{\mathbb{I}(\mathbf{Q})}_{\text{Tensor a }\mathbf{Q}} = \underbrace{\mathbb{I}(\mathbf{G})}_{\text{Tensor a }\mathbf{G}} + \underbrace{\mathbb{I}^{\oplus}(\mathbf{Q})}_{\substack{\text{Tensor a }\mathbf{Q}\text{ de tota la} \\ \text{massa concentrada a }\mathbf{G}}}$$

Exm: anell homogeni

$\left[\mathbb{I}(\mathbf{Q})\right]_{\mathrm{B}}$?



$[\mathbb{I}(O)]$?



Tensor a G és fàcil:

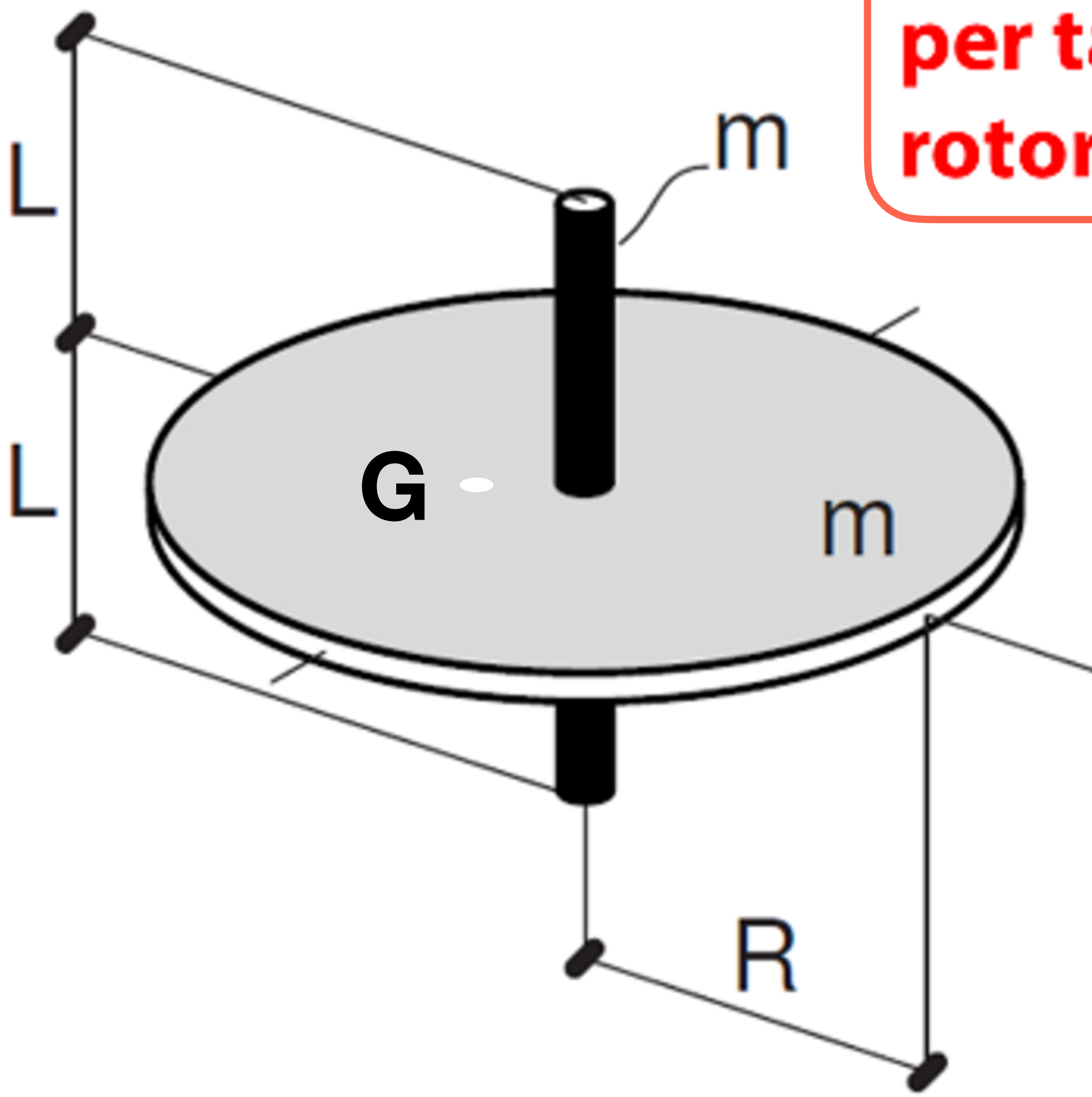
Sòlid pla $\Longrightarrow$ 3 és DPI

$$\underbrace{I_{aa} = I_{bb} = I_{cc}}_{\text{rotor simètric per a G}} = I$$

$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

Canvi a O via Steiner:

$$[\mathbb{I}(O)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}(G)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & \\ & ms^2 & \\ & & ms^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}^{\oplus}(O)}$$



Relació entre L i R per tal que sigui rotor esfèric a G?

II(O)?