2P

Versió 1.3

Derivació geomètrica i analítica

Lluís Ros
https://lluisros.github.io/mecanica

Recordatori

Derivada temporal de $\bar{u}$ relativa a la ref. R

Derivació geomètrica

"òmega" del <u>vector</u> resp. R

$$\left.\frac{d\bar{u}}{dt}\right]_R = \begin{bmatrix}\text{canvi}\\ \text{valor}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{canvi}\\ \text{direcció}\end{bmatrix} = \underbrace{\dot{u}\cdot\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}}_{\substack{\text{canvi val.}\\ (\parallel \text{ a } \bar{u})}} + \underbrace{\bar{\Omega}^{\bar{u}}_{R}\times\bar{u}}_{\substack{\text{canvi dir.}\\ (\perp \text{ a } \bar{u})}}$$

Ref. respecte la qual derivem

Derivació analítica:

"Òmega" de la <u>base</u> resp. R

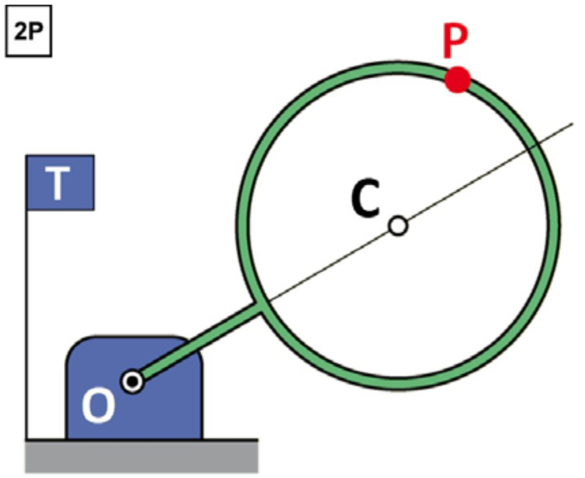
$$\left\{\left.\frac{d\bar{u}}{dt}\right]_R\right\}_B = \frac{d}{dt}\{\bar{u}\}_B + \left\{\bar{\Omega}^{B}_{R}\right\}_B \times \{\bar{u}\}_B =$$

Base en la que expressem el resultat

Ref. respecte la qual derivem

$$= \begin{Bmatrix}\text{derivada}\\ \text{de les}\\ \text{components}\\ \text{de } \bar{u}\end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix}\text{òmega de}\\ \text{la base B}\\ \text{resp. R}\end{Bmatrix}_B \times \begin{Bmatrix}\text{vector}\\ \text{sense}\\ \text{derivar}\end{Bmatrix}_B$$

2P

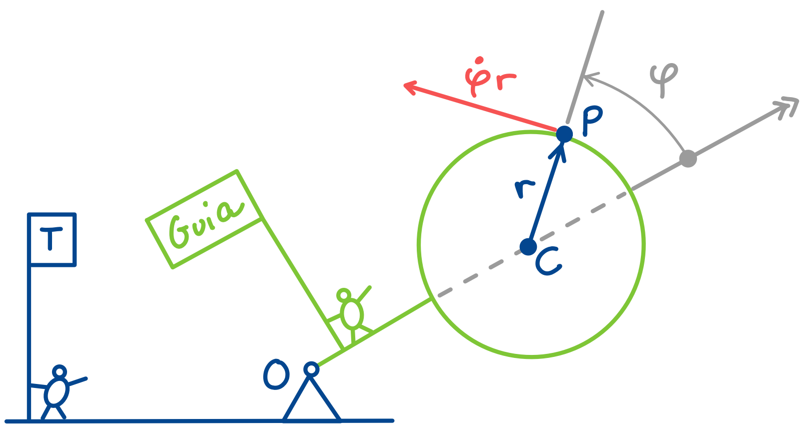


La guia circular està articulada al terra (T).
La partícula **P** es mou dins la guia.
Mitjançant la derivada geomètrica, calcula
$\bar{v}_{guia}(\mathbf{P})$, $\bar{v}_{T}(\mathbf{P})$, $\bar{\alpha}_{T}^{guia}$, $\bar{\alpha}_{T}^{\mathbf{CP}}$.

(Suposeu:
$r = |\overline{CP}|$
$R = |\overline{OC}|$)

$\bar{v}_{Guia}(P)$

Derivem el vec. pos. $\overline{CP}$ obtingut a 1P (*):



$|\overline{CP}| = r$

$$\boxed{\bar{v}_{Guia}(P) = \left[\frac{d\,\overline{CP}}{dt}\right]_{Guia}} = \overbrace{\left[\begin{matrix}\text{canvi}\\ \text{valor}\end{matrix}\right]}^{0} + \overbrace{\left[\begin{matrix}\text{canvi}\\ \text{dir.}\end{matrix}\right]}^{\bar{\Omega}^{CP}_{Guia} \times \overline{CP}} =$$

$$= \boxed{(\circlearrowleft \dot{\varphi}) \times (\nearrow r) = (\nwarrow \dot{\varphi} r)} \quad (I) \quad (**)$$

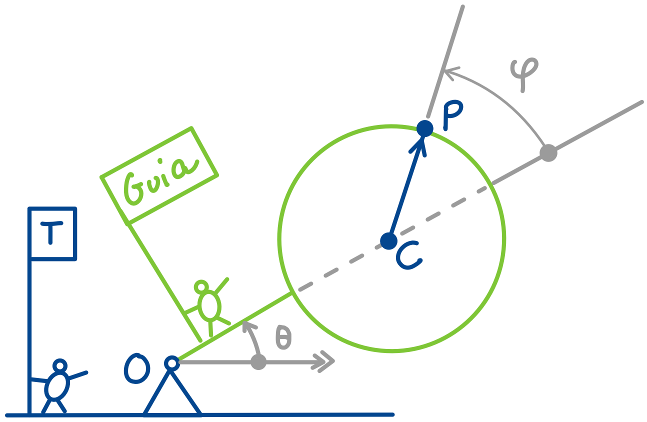
Compareu-la amb la de l'Eq. (I) de l'ex. seg. (són iguals!)

(*) $\overline{CP}$ és un vec. pos. vàlid per estudiar el moviment de P resp. la guia perquè C és fix a la guia.

(**) Les direccions indicades a (I) són aproximades: cal haver fet el dibuix de dalt per deixar-les clares de manera precisa.

$\overline{\alpha}^{Guia}_{T}$ ← Accel. angular de la guia resp. T

Clarament :



$$\overline{\Omega}^{Guia}_{T} = \left(\overset{\curvearrowleft}{\odot}\ \dot{\theta}\right)$$

Per tant :

$$\overline{\alpha}^{Guia}_{T} = \left.\frac{d\,\overline{\Omega}^{Guia}_{T}}{dt}\right]_{T} =$$

$$= \underbrace{\left[\begin{matrix}\text{canvi}\\ \text{valor}\end{matrix}\right]}_{\overset{\curvearrowleft}{\odot}\ \ddot{\theta}} + \underbrace{\left[\begin{matrix}\text{canvi}\\ \text{dir.}\end{matrix}\right]}_{=\,0} = \left(\overset{\curvearrowleft}{\odot}\ \ddot{\theta}\right)$$

perquè $\overline{\Omega}^{Guia}_{T}$ sempre té dir. $\overset{\curvearrowleft}{\odot}$

$\overline{\alpha}^{\overline{CP}}_{T}$

$$\overline{\Omega}^{\overline{CP}}_{T} = \overline{\Omega}^{\overline{CP}}_{Guia} + \overline{\Omega}^{Guia}_{T} =$$

$$= \left(\overset{\curvearrowleft}{\odot}\ \dot{\varphi}\right) + \left(\overset{\curvearrowleft}{\odot}\ \dot{\theta}\right) = \left[\overset{\curvearrowleft}{\odot}\left(\dot{\varphi}+\dot{\theta}\right)\right]$$

v. dibuix anterior

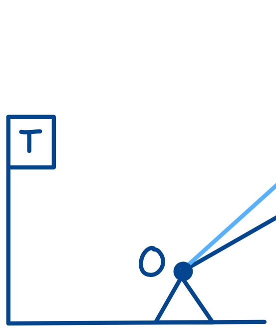
$$\overline{\alpha}^{\overline{CP}}_{T} = \left.\frac{d\,\overline{\Omega}^{\overline{CP}}_{T}}{dt}\right]_{T} = \left[\begin{matrix}\text{canvi}\\ \text{valor}\end{matrix}\right] + \underbrace{\cancel{\left[\begin{matrix}\text{canvi}\\ \text{direcció}\end{matrix}\right]}}_{0} =$$

Ja que $\overline{\Omega}^{\overline{CP}}_{T}$ sempre té dir. $\overset{\curvearrowleft}{\odot}$

$$= \left[\overset{\curvearrowleft}{\odot}\left(\ddot{\varphi}+\ddot{\theta}\right)\right]$$

$\bar{v}_T(P)$

A 1P ja vam obtenir un vec. de posició adient per a estudiar el moviment de P resp. T. Era $\overline{OP}$ (pq O és fix a T (*)):



Ara bé: $\overline{OP}$ costa de derivar directament, perquè canvia tant en valor com en direcció.

Però el podem descompondre així:

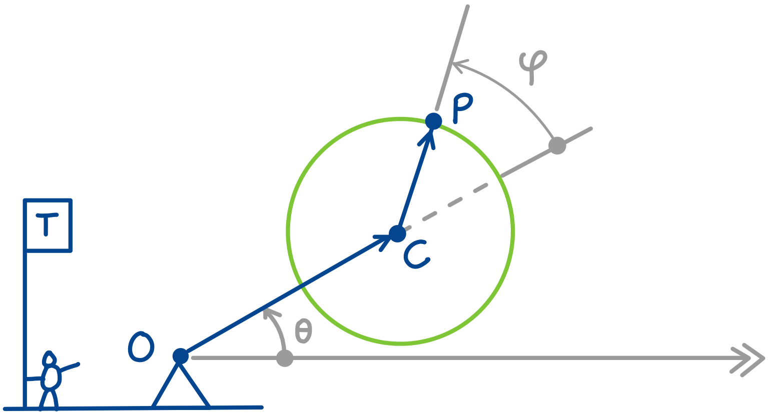
$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}.$$

$\overline{OC}$ i $\overline{CP}$ són fàcils de derivar perquè només canvien de direcció, no de valor. Per tant, aprofitem-ho:

$$\bar{v}_T(P) = \left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T = \left.\frac{d\overline{OC}}{dt}\right]_T + \left.\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_T$$

Per derivar $\overline{OC}$ i $\overline{CP}$ ens cal tenir aquests vectors orientats resp. T. Així podrem obtenir les seves velocitats angulars. Podem utilitzar aquests angles, que ja hem definit:

(*) Sovint escrivim "$O \in T$" per indicar que "O és fix a T".



Ara... Amb quina vel. angular gira $\overline{OC}$ resp. T?

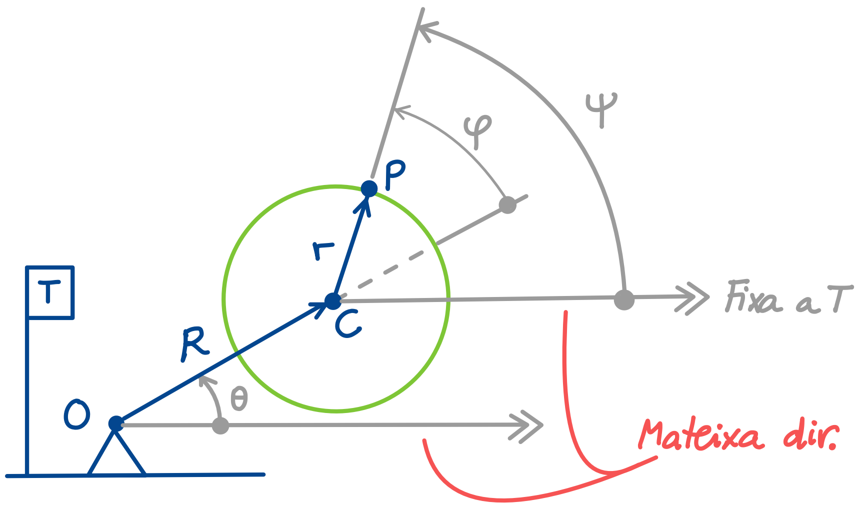
$$\bar{\Omega}^{\overline{OC}}_{T} = (\odot\, \dot{\theta})$$ ⟵ Perfecte!

I amb quina gira $\overline{CP}$ resp. T?

$$\bar{\Omega}^{\overline{CP}}_{T} = (\odot\, \dot{\varphi}),$$ oi?

Doncs no! Estem observant el moviment de $\overline{CP}$ resp. T, ergo ens cal veure com canvia l'orientació de $\overline{CP}$ resp. una dir. fixa a T. Per fer-ho bé, doncs, orientarem $\overline{CP}$ amb

$$\psi = \theta + \varphi$$



Conclusió:

$$\bar{\Omega}^{\overline{CP}}_{T} = \underbrace{(\odot\, \dot{\psi})}_{=\,\left[\odot\,(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\right]}$$

Ara sí que ho tenim bé!

Vinga, ja podem derivar:

Només tenen canvi de dir.

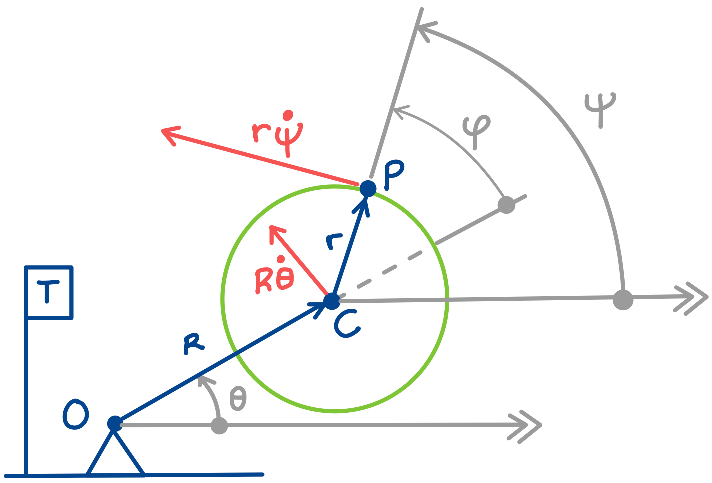
$$\boxed{\bar{v}_T(P)} = \left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T = \left.\frac{d\overline{OC}}{dt}\right]_T + \left.\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_T =$$

$$= \bar{\Omega}^{\overline{OC}}_{T} \times \overline{OC} + \bar{\Omega}^{\overline{CP}}_{T} \times \overline{CP} =$$

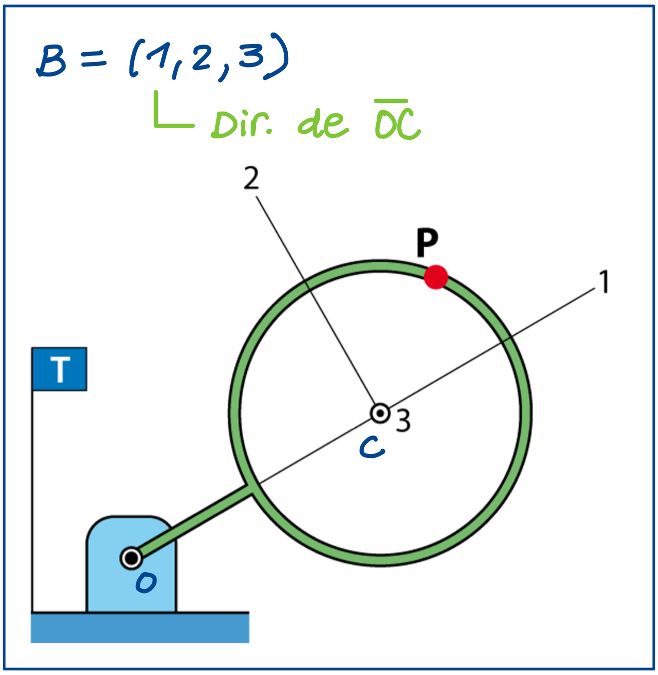
$$= \left(\circlearrowleft\!\odot\ \dot{\theta}\right) \times \left(\nearrow \underbrace{R}_{|\overline{OC}|}\right) + \left(\circlearrowleft\!\odot\ \dot{\psi}\right) \times \left(\uparrow r\right) =$$

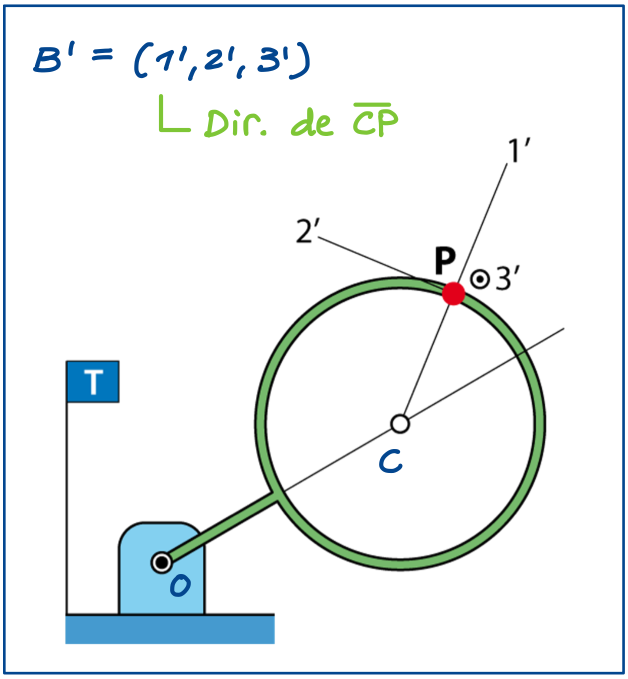
$$= \boxed{\left(\nwarrow R\dot{\theta}\right) + \left(\nwarrow r\dot{\psi}\right)} \qquad (\mathrm{II})$$

Podem dibuixar els vectors $(\nwarrow R\dot{\theta})$ i $(\nwarrow r\dot{\psi})$:



Finalment, si volem, podem expressar (II) utilitzant una base vectorial. Hi ha 2 bases que faciliten la projecció de (II) perquè tenen almenys una direcció alineada amb un dels vectors de (II). Són:



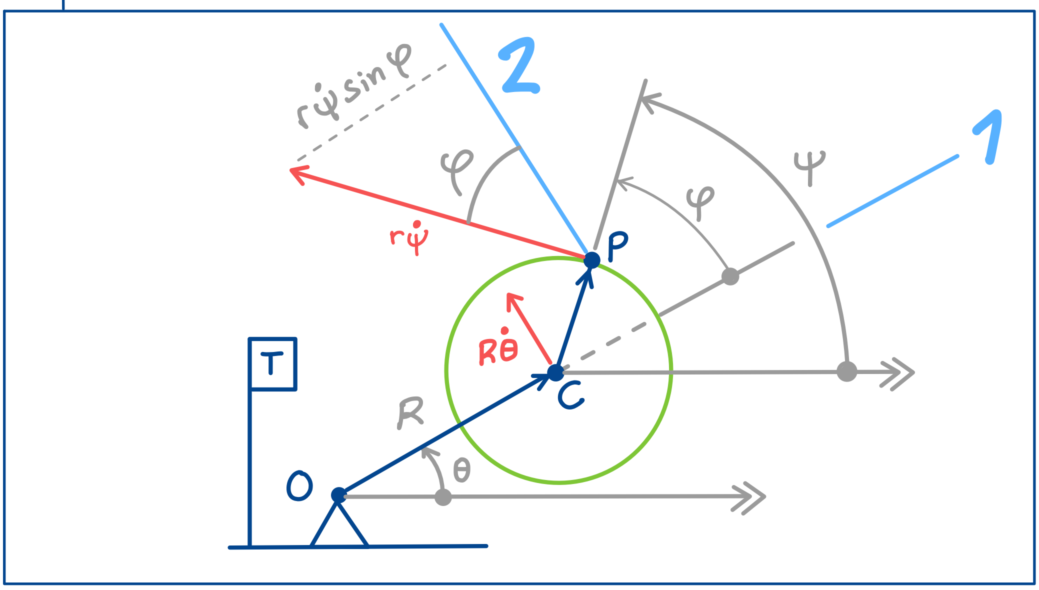


Utilitzant B, per exemple, tenim :

$$\bar{v}_T(P) = \left[\nearrow\left(-r\dot{\psi}\sin\varphi\right)\right] + \left[\nwarrow\left(R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi\right)\right] \quad (\bigstar)$$

versor de B en dir. 1

Versor de B en dir. 2



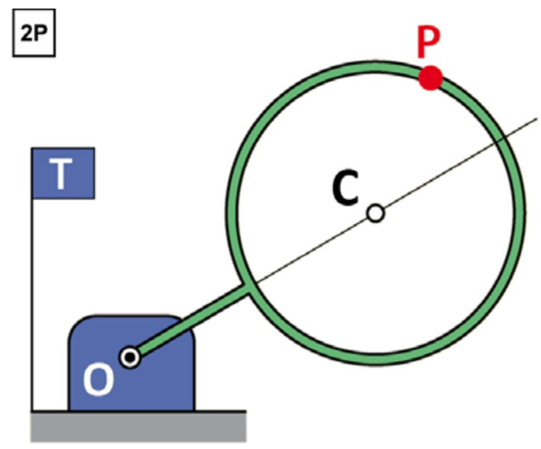
2 maneres equivalents d'escriure $\bar{v}_T(P)$

També podem escriure (★) com un vector de 3 components:

$$\left\{\bar{v}_T(P)\right\}_B = \begin{Bmatrix} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\mathrm{III})$$

base utilitzada (cal indicar-la!)

2P



La guia circular està articulada al terra (T).
La partícula **P** es mou dins la guia.
Mitjançant la derivada analítica, calcula
$\bar{v}_{guia}(\mathbf{P}),\ \bar{v}_T(\mathbf{P}),\ \bar{a}_{guia}(\mathbf{P}),\ \bar{a}_T(\mathbf{P}),\ \Re_T(\mathbf{P})\big]_{\overline{OC}||\overline{CP}}$.

$\bar{v}_{Guia}(P)$

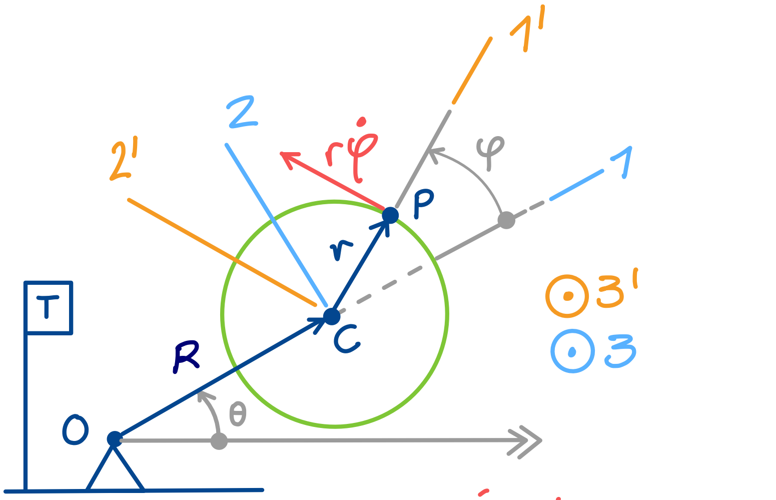
Un vec. pos. adient és $\overline{CP}$ (ja que $C \in$ Guia)

$\overline{CP}$ és fàcil de projectar en la base $B' = (1', 2', 3')$ $\Rightarrow$ Treballem en B'

Dir. fixa a $\overline{CP}$

Dir. ⊙

$$\{\overline{CP}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Ara és vel. ang. de la base, no de $\overline{CP}$

$$\boxed{\{\bar{v}_{Guia}(P)\}_{B'}} = \left\{\left[\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_{Guia}\right\}_{B'} = \underbrace{\left\{\frac{d\overline{CP}}{dt}\right\}_{B'}}_{\text{Deriv. components}} + \underbrace{\{\bar{\Omega}^{B'}_{Guia}\}_{B'} \times \{\overline{CP}\}_{B'}}_{\text{òm. base } B' \text{ resp. Guia} \times \text{vec. sense derivar}} =$$

Derivem a ref. Guia!

Resultat en base B'

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} r \\ 0 \end{Bmatrix}} \quad (I)$$

Coincideix amb l'obtingut geomètricament (v. Eq. (I) ex. anterior).

<u>Extra</u>: Tb podem fer els càlculs amb $B=(1,2,3)$:

Dir. $\overline{OC}$ → 1

Dir. $\odot$ → 3

$$\left\{\overline{CP}\right\}_B = \begin{Bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Mateix resultat que (I), però en base B

$$\boxed{\left\{\bar{v}_{Guia}(P)\right\}_B} = \left\{\left[\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_{Guia}\right\}_B =$$

$$= \left\{\frac{d\overline{CP}}{dt}\right\}_B + \left\{\cancel{\bar{\Omega}^B_{Guia}}\right\}_B^{\,0} \times \left\{\overline{CP}\right\}_B = \boxed{\begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

$\bar{a}_{Guia}(P)$

Derivem (I):

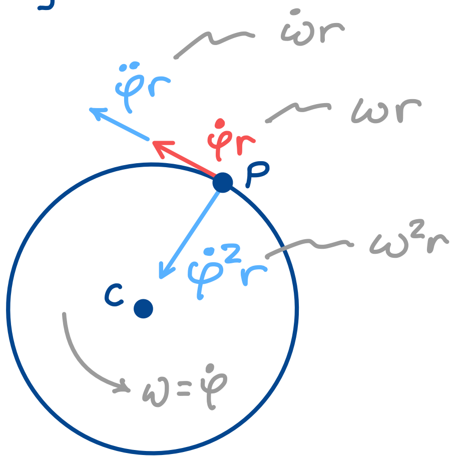
Tot en B'

$$\left\{\bar{a}_{Guia}(P)\right\}_{B'} = \left\{\left[\frac{d\bar{v}_{Guia}(P)}{dt}\right]_{Guia}\right\}_{B'} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{derivada} \\ \text{components} \\ \bar{v}_{Guia}(P) \end{bmatrix} + \bar{\Omega}^{B'}_{Guia} \times \bar{v}_{Guia}(P) =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}^2 r \\ \ddot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(II)}$$

Surten les components intrínseques de l'acceleració típiques del moviment circular, com era d'esperar



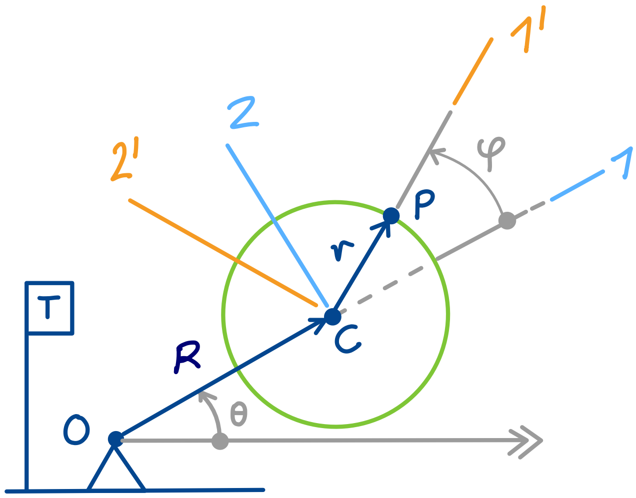
$\bar{v}_T(P)$

$B = (1, 2, 3)$

$B' = (1', 2', 3')$

Un vec. pos. adient per a P és $\overline{OP}$, pq $O \in T$.

$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}$$



És aconsellable treballar en B o B' ja que faciliten la projecció de $\overline{OC}$ i $\overline{CP}$ respectivament. Descartem l'ús d'una base fixa a T perquè no aniria tan bé. Triem B, però B' seria bona tb:

$$\left\{\overline{OP}\right\}_B = \left\{\overline{OC}\right\}_B + \left\{\overline{CP}\right\}_B = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R + r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{v}_T(P)\right\}_B = \left\{\left[\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T\right\}_B = \begin{bmatrix} \text{deriv.} \\ \text{comp.} \end{bmatrix} + \bar{\Omega}^B_T \times \begin{bmatrix} \text{vec sense} \\ \text{derivar} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R + r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\theta}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\theta} + r\dot{\theta}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Quadra amb l'Eq. (III) de l'exercici anterior}} \quad \text{(III)}$$

$$\boxed{\varphi + \theta = \psi \Rightarrow \dot{\varphi} + \dot{\theta} = \dot{\psi}}$$

$\bar{a}_T(P)$

Derivem (III) :

$$\left\{\bar{a}_T(P)\right\}_B = \left\{\left[\frac{d\,\bar{v}_T(P)}{dt}\right]_T\right\}_B = \left[\begin{array}{c}\text{deriv.}\\ \text{comp}\end{array}\right] + \bar{\Omega}^B_T \times \left[\begin{array}{c}\text{vec.}\\ \text{sense}\\ \text{deriv.}\end{array}\right] =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -r\ddot{\psi}\sin\varphi - r\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\varphi \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - r\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{c} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -\ddot{\psi}r\sin\varphi - \dot{\varphi}r\dot{\psi}\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}r\dot{\psi}\cos\varphi \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\dot{\psi}\sin\varphi - \dot{\theta}r\dot{\psi}\sin\varphi \\ 0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -\ddot{\psi}r\sin\varphi - \overbrace{(\dot{\varphi}+\dot{\theta})}^{\dot{\psi}}r\dot{\psi}\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - (\dot{\varphi}+\dot{\theta})r\dot{\psi}\sin\varphi \\ 0 \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -\ddot{\psi}r\sin\varphi - r\dot{\psi}^2\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - r\dot{\psi}^2\sin\varphi \\ 0 \end{array}\right\} \quad \text{(IV)}$$

Tot seguit ens demanen $\mathcal{R}_T(P)$, que és el radi de curvatura de la trajectòria de P en un cert instant de temps.

Recordem primer aquest concepte, associat a les components intrínseques de l'acceleració.

Recordatori

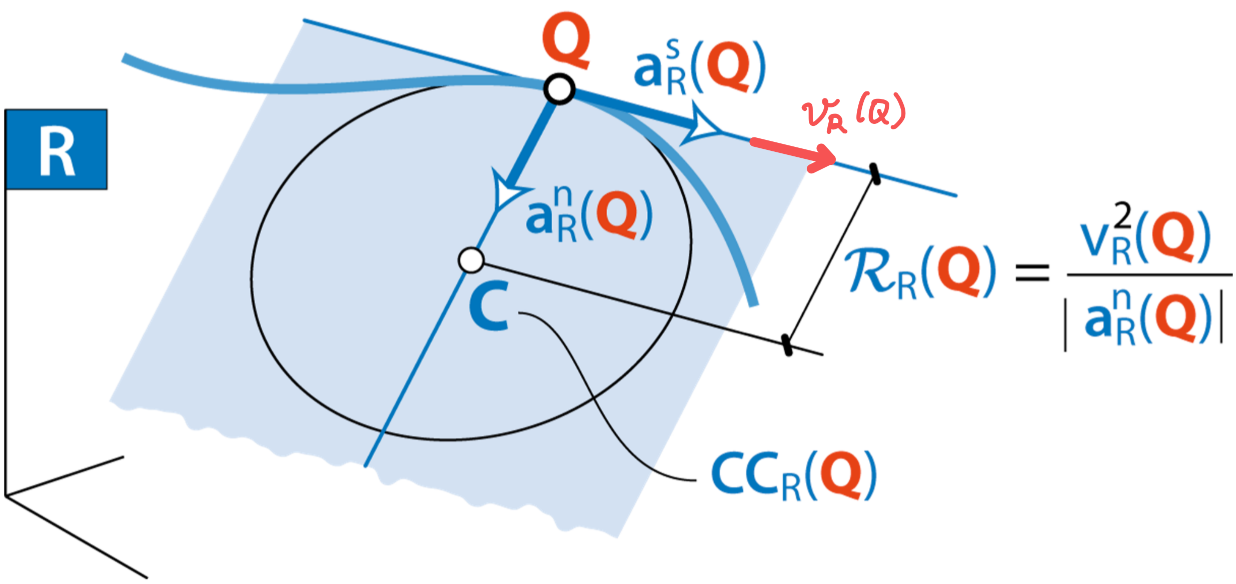
Components intrínseques de l'acceleració

Sigui una partícula Q que descriu una certa trajectòria en una referència R. En cada instant t, l'accel. de Q es pot descompondre en una component tangencial $\bar{a}^s_R(Q)$, paral·lela a $\bar{v}_R(Q)$, i una component normal $\bar{a}^n_R(Q)$, perpendicular a $\bar{v}_R(Q)$. A més, en aquest instant t, la trajectòria es pot aproximar localment per un cercle, anomenat "osculador". El radi d'aquest cercle és

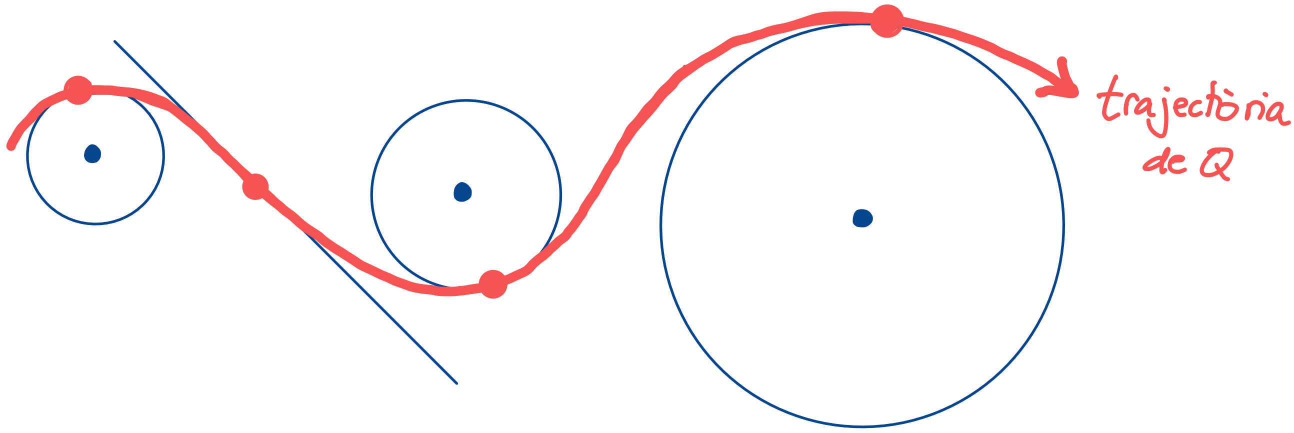
$$\mathcal{R}_R(Q) = \frac{v_R^2(Q)}{|a^n_R(Q)|} \quad \begin{array}{l} \leftarrow [\text{Valor de } \bar{v}_R(Q)]^2 \\ \leftarrow \text{Mòdul del valor de } \bar{a}^n_R(Q) \end{array}$$

El centre del cercle s'anomena centre de curvatura de la trajectòria al punt Q (relatiu a la ref. R), i el denotem així

$$CC_R(Q)$$



$\mathcal{R}_R(Q)$ i $CC_R(Q)$ varien al llarg del temps perquè el cercle oscula al llarg de la trajectòria :



Recordeu :

- L'accel. tangencial $\bar{a}^s_R(Q)$ és la responsable del canvi de valor de $\bar{v}_R(Q)$

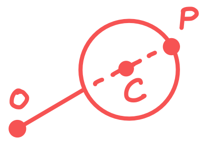
- L'accel. normal $\bar{a}^n_R(Q)$ és la responsable del canvi de direcció de $\bar{v}_R(Q)$

Calculem doncs el que ens demanaven:

$$\left.\mathcal{R}_T(P)\right]_{\overline{OC}\,\parallel\,\overline{CP}}$$

Vol dir, quan $\overline{OC}$ és paral·lel a $\overline{CP}$

És a dir, quan $\varphi = 0$ →



o bé quan $\varphi = \pi$.

Fem només el cas $\varphi = 0$:

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{\left|a_T^n(P)\right|}$$

$\left(\text{Valor de } \bar{v}_T(P)\right)^2$

Mòdul del valor de $\bar{a}_T^n(P)$

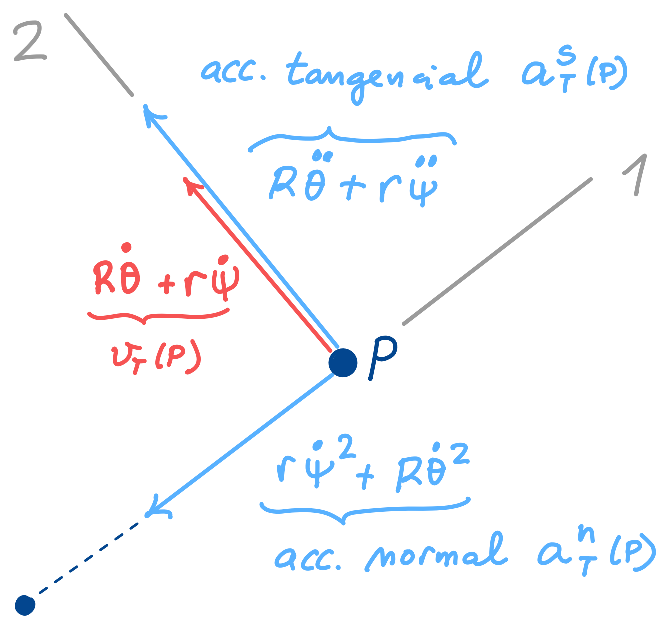
$$\left\{ \left.\bar{v}_T(P)\right]_{\varphi=0} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi} \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

Particularitzant (III) per $\varphi = 0$

$$\left\{ \left.\bar{a}_T(P)\right]_{\varphi=0} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -r\dot{\psi}^2 - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi} \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

Particularitzant (IV) per $\varphi = 0$

Per identificar la component normal de $\bar{a}_T(P)$ sempre aconsello que us feu un dibuix:



$CC_T(P)$ = centre de curvatura de P relatiu a T

Per tant :

$$\mathcal{R}_T(P)\Big]_T = \frac{(R\dot{\theta}+r\dot{\psi})^2}{r\dot{\psi}^2+R\dot{\theta}^2} \qquad (V)$$

Aclariment

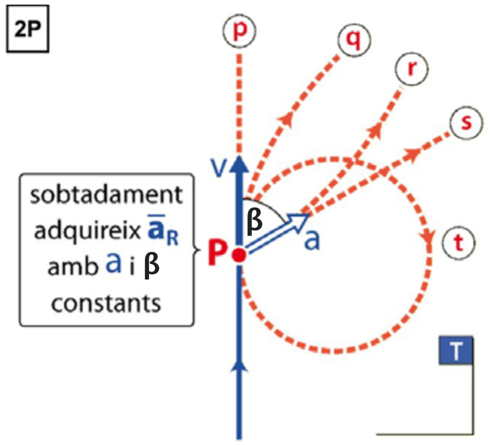
En relació a l'exercici que acabem de fer, alguns estudiants es fan la següent pregunta, del tot pertinent. N'adjunto també una resposta, a veure si us convenç:

En l'exercici de la guia circular giratòria es demana que calculem la velocitat i acceleració de P relatives a les referències "Guia" i "T". En el resultat final, aquestes velocitats surten expressades en funció de les coordenades θ, φ i les seves derivades $\dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ (també en funció de $\psi = \theta + \varphi$). Qui determina què valen aquestes coordenades i les seves derivades?

Per ara estem aprenent cinemàtica, i no ens preocupa gaire què valen θ i φ, i les seves derivades en cada instant de temps. Podeu imaginar, si voleu, que són valors coneguts. En realitat, aquests valors dependran de l'evolució concreta que tingui el sistema a partir d'unes condicions inicials, i de les forces aplicades des de llavors ençà, d'acord amb les lleis de la dinàmica. Quan entrem a dinàmica aprendrem a trobar les **equacions del moviment**, que determinen aquesta evolució. També pot ser que alguna coordenada sigui "forçada", és a dir, que hi hagi un motor que en determini el seu valor en cada instant de temps. Per exemple, a l'articulació de la guia amb el terra hi podria haver un motor que fixés $\theta(t)$ mitjançant un sistema de control adient.

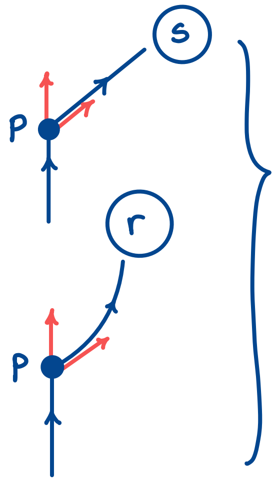
És bo pensar les coordenades del sistema, i les seves derivades, com a "codificadors compactes" de la posició, velocitat i acceleració de tots els punts del sistema. Com veiem en aquest exercici, i en altres que farem, coneguts els seus valors, sempre podrem calcular la posició, velocitat o acceleració de qualsevol punt del sistema. Aquest càlcul serà essencial per poder formular les equacions del moviment, que, com hem dit, determinen l'evolució del sistema.

Alerta: al dibuix canvien α per β



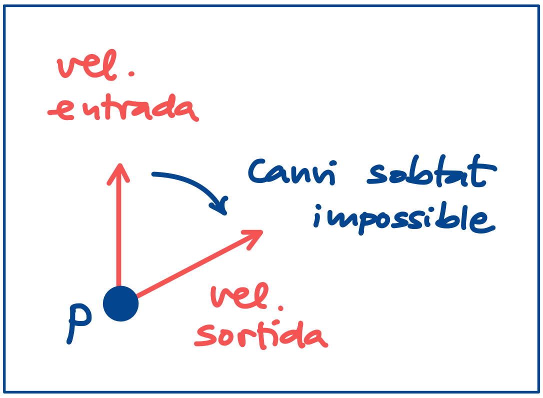
La partícula **P** descriu una trajectòria rectilínia respecte del terra (T). Quan té celeritat v, sobtadament s'accelera amb $\bar{a}_T(\mathbf{P})$ de valor constant, i formant un angle β constant amb $\bar{v}_T(\mathbf{P})$.

Quina trajectòria passa a fer?



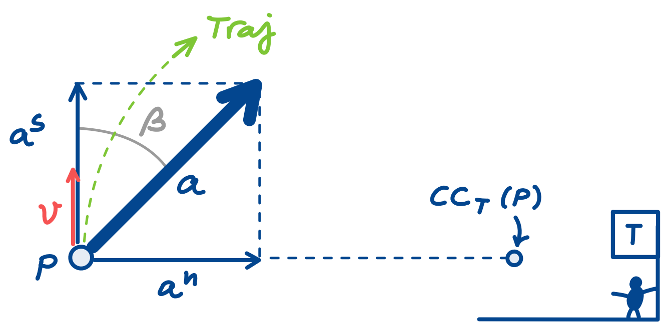
Impossibles!

Implicarien un canvi sobtat de velocitat



Ara cal saber si serà p, q o t.

A partir de l'instant dibuixat, tenim:



a^s = accel. tangencial] resp. T
a^n = " normal

$$\left.\begin{aligned} a^s &= a\cos\beta \\ a^n &= a\sin\beta \end{aligned}\right\}$$ constants al llarg del temps (pq a i β ho són)

(*) A menys que es produeixi una col·lisió, que no és el cas.

Com que $a^n \neq 0$ $\Rightarrow$ La trajectòria serà curvada $\Rightarrow$ Descartem p

El radi de curvatura $\mathcal{R} = \mathcal{R}_T(P)$ creixerà amb el pas del temps:

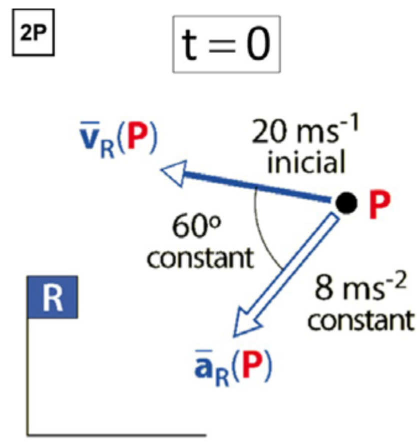
v creixerà pq $a^s = ct$

$$\mathcal{R} = \frac{v^2}{|a^n|} \Rightarrow \mathcal{R} \text{ creixerà}$$

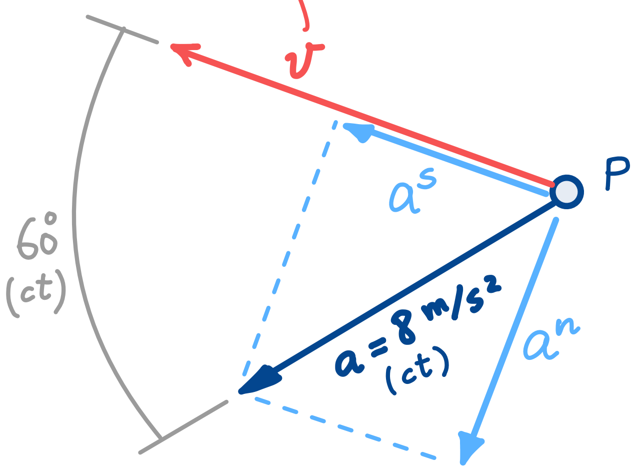
a^n es manté ct

Això descarta t, ja que té $\mathcal{R} = ct$

La traj. serà q pq és l'única de radi creixent.



En un cert instant, la partícula **P** té celeritat de 20 m/s respecte del terra (T). Si s'accelera amb $\bar{a}_T(\mathbf{P})$ de valor constant, i formant un angle de 60^o constant amb $\bar{v}_T(\mathbf{P})$, quina és la seva celeritat 10 segons més tard?



Només a^s pot canviar v

a^n canvia el radi de curvatura de la traj. de P, però no v.

Clarament:

$$a^s = a \cos 60^o = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \frac{m}{s^2} = \frac{4 \frac{m}{s}}{s}$$

$\Downarrow$

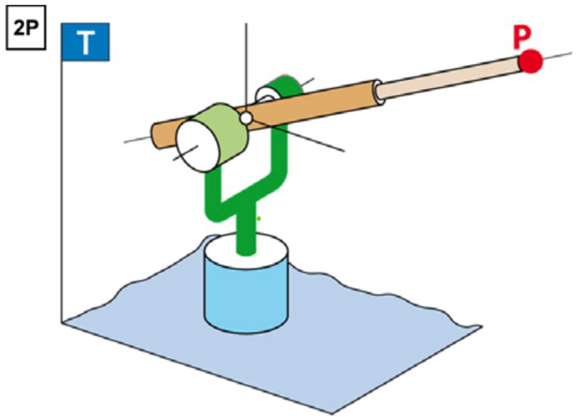
v augmenta a ritme de 4 m/s cada segon

$\Downarrow$

En 10" v haurà augmentat 40 m/s.

$\Downarrow$

Com que inicialment $v = 20$ m/s, al cap de 10s v serà de $20 + 40 = 60$ m/s.



La forquilla (forq) gira respecte del terra (T). La primera part de l'antena telescòpica (ant.1) està articulada a la forquilla. Mitjançant la derivada geomètrica, calcula $\bar{v}_{ant.1}(\mathbf{P})$, $\bar{a}_{ant.1}(\mathbf{P})$, $\bar{v}_{forq}(\mathbf{P})$, $\bar{a}_{forq}(\mathbf{P})$.

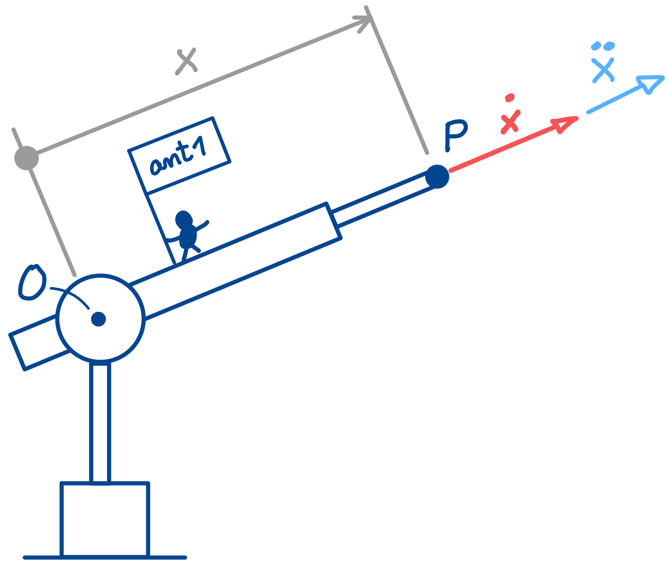
En aquest exercici i el següent utilitzarem les coords. ψ, θ, x ja definides a 1P.

$\bar{v}_{ant1}(P)$ i $\bar{a}_{ant1}(P)$

Derivem geomètricament $\overline{OP}$.

Vist des d'ant1, $\overline{OP}$ sols canvia de valor, no de direcció. Ergo:

$$\bar{v}_{ant1}(P) = (\nearrow \dot{x})$$



Derivant geomètricament $\bar{v}_{ant1}(P)$ obtenim

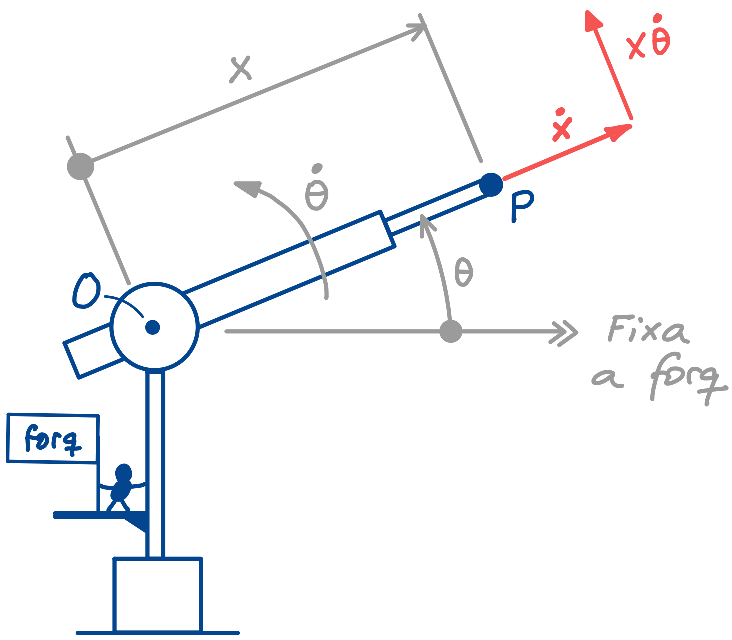
$$\bar{a}_{ant1}(P) = (\nearrow \ddot{x})$$

$\bar{v}_{ant1}(P)$ tampoc pateix canvis de dir. només de valor

$\overline{v}_{forq}(P)$

Ara cal avaluar els canvis de $\overline{OP}$ des de forq!

Des de forq, $\overline{OP}$ varia per causa de x i θ:



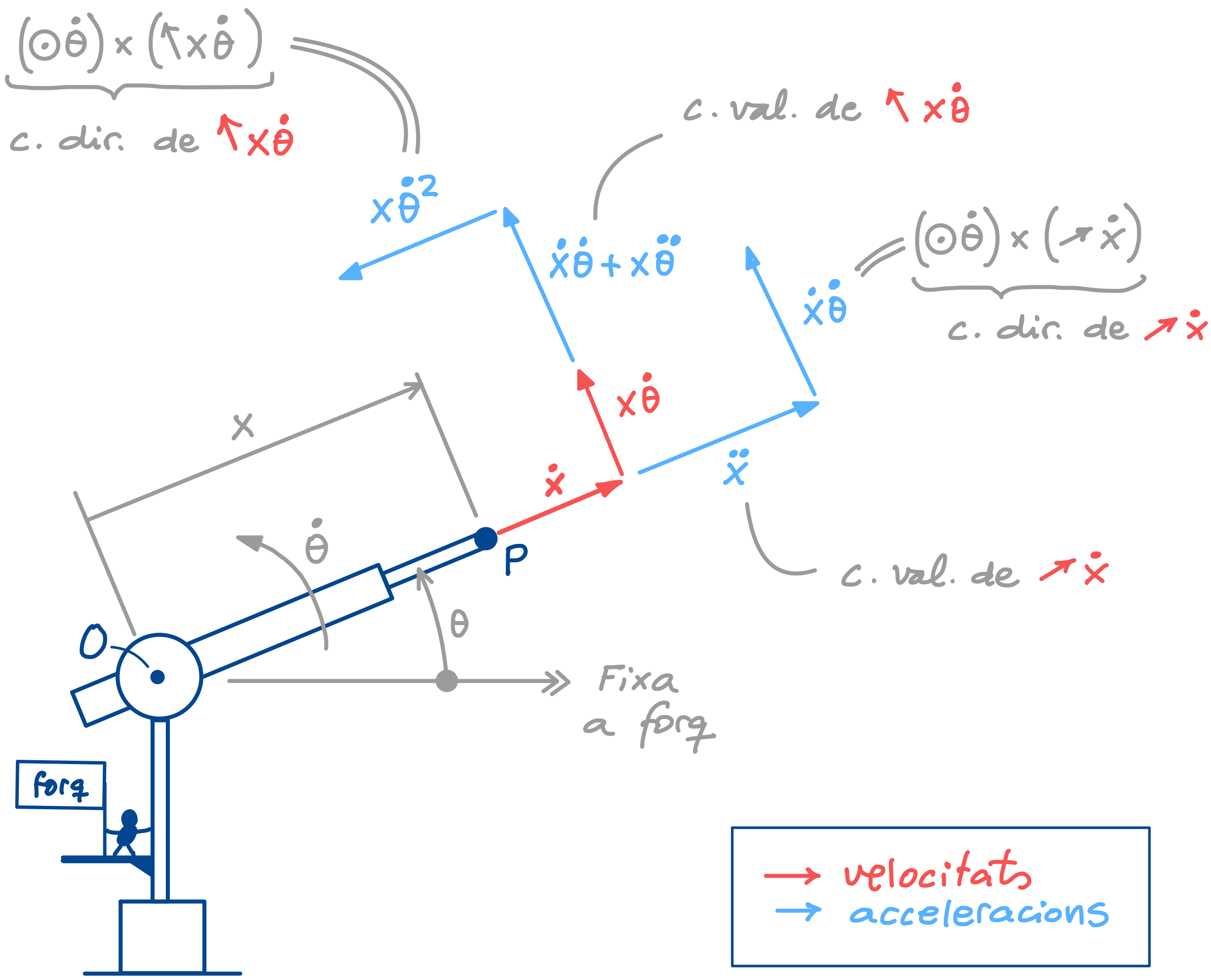
$\overline{OP}$ s'estira quan x varia, i $\circlearrowleft\!\odot\,\dot{\theta}$ el fa canviar de direcció. Ergo:

$$\text{c. dir} = \overline{\Omega}^{\overline{OP}}_{forq} \times \overline{OP} = \left(\circlearrowleft\!\odot\,\dot{\theta}\right) \times \left(\nearrow x\right)$$

$$\overline{v}_{forq}(P) = \underbrace{\overbrace{\left(\nearrow \dot{x}\right)}^{\text{c.val.}} + \overbrace{\left(\nwarrow \times \dot{\theta}\right)}^{\text{c. dir}}}_{\text{vecs. vermells indicats al dibuix}}$$

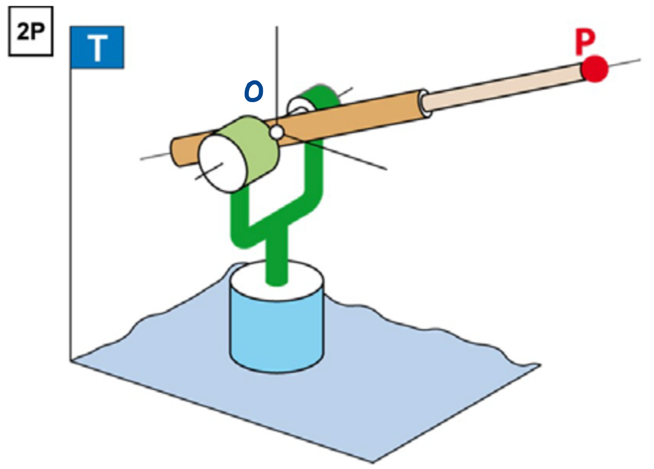
$\bar{a}_{forq}(P)$

Per calcular $\bar{a}_{forq}(P)$ derivem els vecs. vermells anteriors, adonant-nos que tots canvien de valor i també de dir. (per causa de $\odot\dot{\theta}$ novament). El resultat són els vecs. blaus:



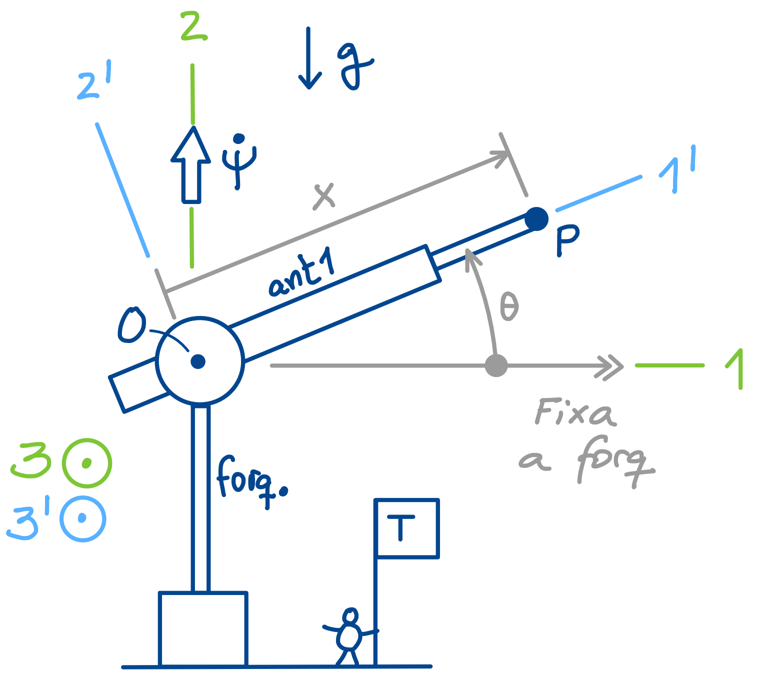
Agrupant els vecs. blaus queda:

$$\bar{a}_{forq}(P) = \underbrace{\left[\nearrow(\ddot{x} - x\dot{\theta}^2)\right] + \left[\nwarrow(2\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta})\right]}_{\text{vecs. blaus}}$$



La forquilla gira respecte del terra (T). La primera part de l'antena telescòpica (ant.1) està articulada a la forquilla. Mitjançant la derivada analítica, calcula $\bar{v}_T(\mathbf{P})$, $\bar{a}_T(\mathbf{P})$, $\bar{\alpha}_T^{ant.1}$.

Derivarem $\overline{OP}$. Aquest vector és fàcil de projectar en les següents bases:



$B = (1, 2, 3)$

2: Vertical

3: Dir de l'eix entre ant1 i forq.

$B' = (1', 2', 3')$

1': Dir antena

3': Dir de l'eix entre ant1 i forq.

La projecció de $\overline{OP}$ sobre B' és trivial, però la vel. angular de B' és $\bar{\Omega}_T^{B'} = (\Uparrow \dot{\psi}) + (\odot\, \dot{\theta})$. En canvi, la vel. angular de B és més senzilla, ja que

$$\bar{\Omega}_T^{B} = (\Uparrow \dot{\psi})$$

Per aquest motiu, triarem B, però B' també seria una bona opció. El que sí evitarem és treballar en una base fixa a T perquè dificultaria la projecció de $\overline{OP}$.

$\bar{v}_T(P)$

$$\{\overline{OP}\}_B = \begin{Bmatrix} x\cos\theta \\ x\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{v}_T(P)\}_B = \left\{ \left[\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T \right\}_B = \underbrace{\overbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{x}\sin\theta + x\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}^{\text{Derivada de les comp.}} + \overbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix}}^{\bar{\Omega}^B_T} \times \overbrace{\begin{Bmatrix} x\cos\theta \\ x\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}^{\text{Vector sense derivar}}}_{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x\dot{\psi}\cos\theta \end{Bmatrix}} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{x}\sin\theta + x\dot{\theta}\cos\theta \\ -x\dot{\psi}\cos\theta \end{Bmatrix} \quad (\blacksquare)$$

A la pàg. següent hem calculat $\bar{v}_T(P)$ derivant $\overline{OP}$ geomètricament. Es pot comprovar que surt el mateix!

$\bar{a}_T(P)$

$$\{\bar{a}_T(P)\}_B = \overbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - x\ddot{\theta}\sin\theta - x\dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{x}\sin\theta + \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + x\ddot{\theta}\cos\theta - x\dot{\theta}^2\sin\theta \\ -\dot{x}\dot{\psi}\cos\theta - x\ddot{\psi}\cos\theta + x\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix}}^{\text{Deriv. de les comp.}} +$$

$$+ \underbrace{\overbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix}}^{\bar{\Omega}^B_T} \times \overbrace{\begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{x}\sin\theta + x\dot{\theta}\cos\theta \\ -x\dot{\psi}\cos\theta \end{Bmatrix}}^{\text{Vec. sense derivar}}}_{\begin{Bmatrix} -x\dot{\psi}^2\cos\theta \\ 0 \\ -\dot{\psi}\dot{x}\cos\theta + \dot{\psi}x\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix}} =$$

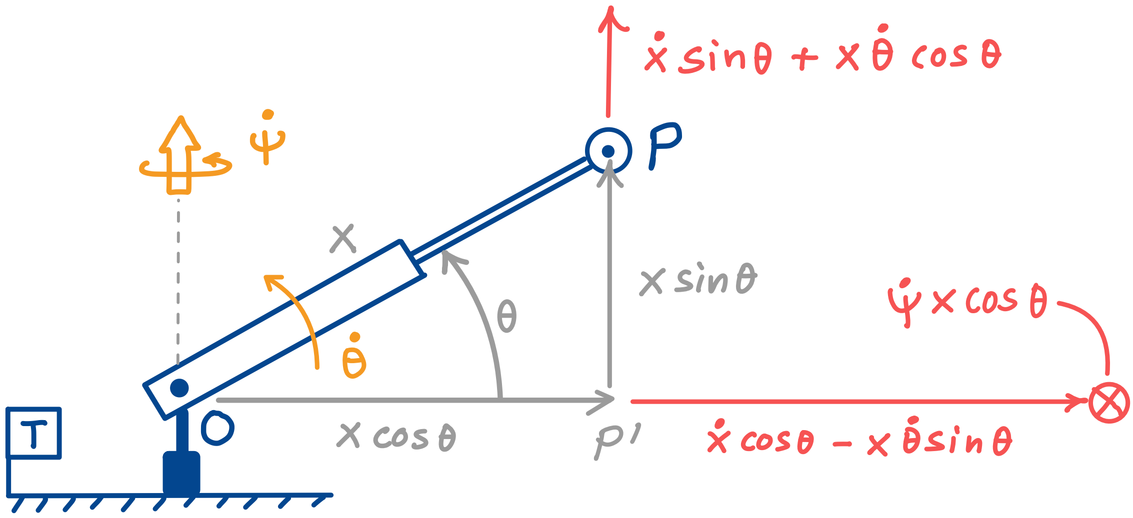
$$= \begin{Bmatrix} \ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - x\ddot{\theta}\sin\theta - x\dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{x}\sin\theta + \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + x\ddot{\theta}\cos\theta - x\dot{\theta}^2\sin\theta \\ -2\dot{x}\dot{\psi}\cos\theta - x\ddot{\psi}\cos\theta + 2x\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix}$$

$\bar{v}_T(P)$ derivant geomètricament

Podem descompondre(*) $\overline{OP} = \overbrace{\overline{OP'}}^{\text{horitz.}} + \overbrace{\overline{P'P}}^{\text{vertical}}$

- $\overline{OP'}$ només queda afectat per $\bar{\dot\psi}$ (una rotació simple).
- $\overline{P'P}$ només canvia de valor

P' = projecció vertical de P sobre pla horitz. per O



Per tant, tenim:

$$\boxed{\bar{v}_T(P) = \left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T} = \underbrace{\left.\frac{d\overline{OP'}}{dt}\right]_T}_{\text{Canvia de val. i dir.}} + \underbrace{\left.\frac{d\overline{P'P}}{dt}\right]_T}_{\text{Sols canvia de valor}} =$$

$$\boxed{= \left[\rightarrow (\dot x\cos\theta - x\dot\theta\sin\theta)\right] + \left[\otimes\ \dot\psi\, x\cos\theta\right] + \left[\uparrow (\dot x\sin\theta + x\dot\theta\cos\theta)\right]}$$

Quadra amb (■) de la pàg. anterior

(*) Aquesta descomposició no és estrictament necessària, però facilita la derivada perquè, aleshores, sols apareix un canvi de direcció degut a una rotació simple.

$\bar{\alpha}^{\,ant1}_{T}$

La velocitat angular de ant1 resp. T és

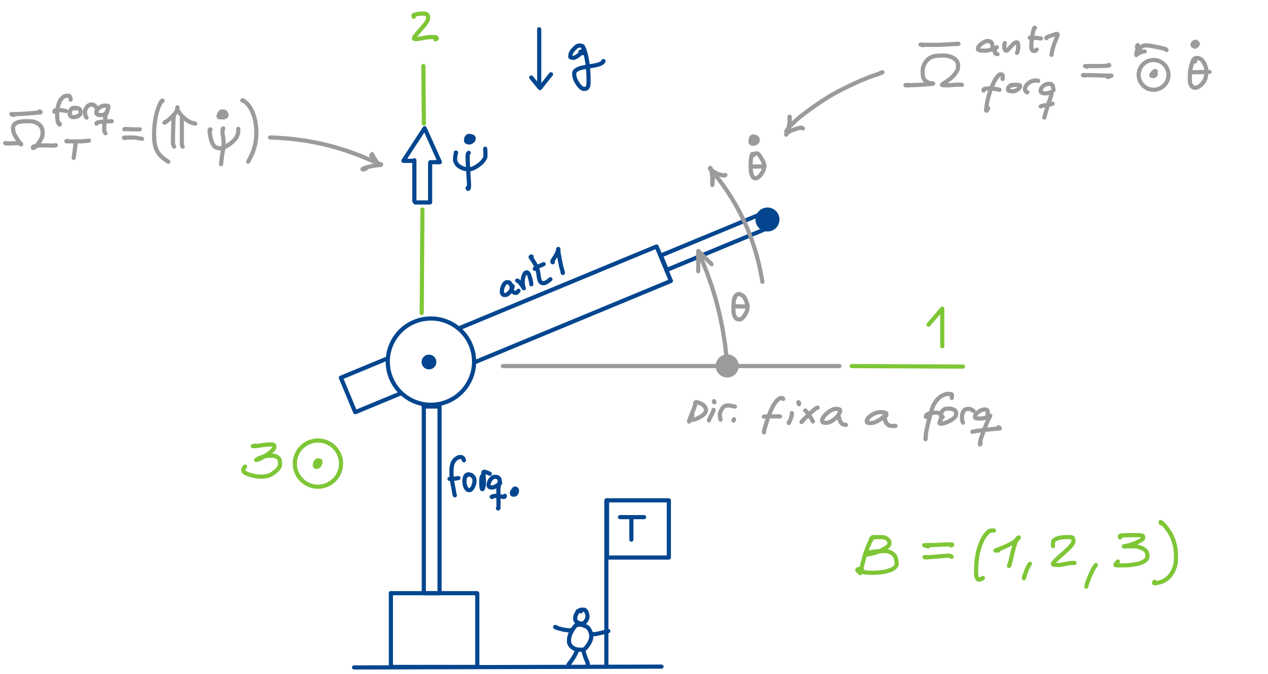
$$\bar{\Omega}^{\,ant1}_{T} = \bar{\Omega}^{\,ant1}_{forq} + \bar{\Omega}^{\,forq}_{T}$$

i, expressant-la en base B (vegeu dibuix de baix):

$$\left\{\bar{\Omega}^{\,ant1}_{T}\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (\bullet)$$

Per obtenir l'accel. angular $\bar{\alpha}^{\,ant1}_{T}$, derivem $(\bullet)$ respecte el temps:

$$\boxed{\left\{\bar{\alpha}^{\,ant1}_{T}\right\}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}}_{\text{Derivada de les comp.}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}^{\,B}_{T}} \times \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}^{\,ant1}_{T}} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}\dot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}} \quad (☼)$$



Si volem, podem derivar $\bar{\Omega}^{\,ant1}_{T}$ geomètricament també, i veure que s'obté el mateix resultat que a (☼). Fem-ho!

Del dibuix anterior tenim

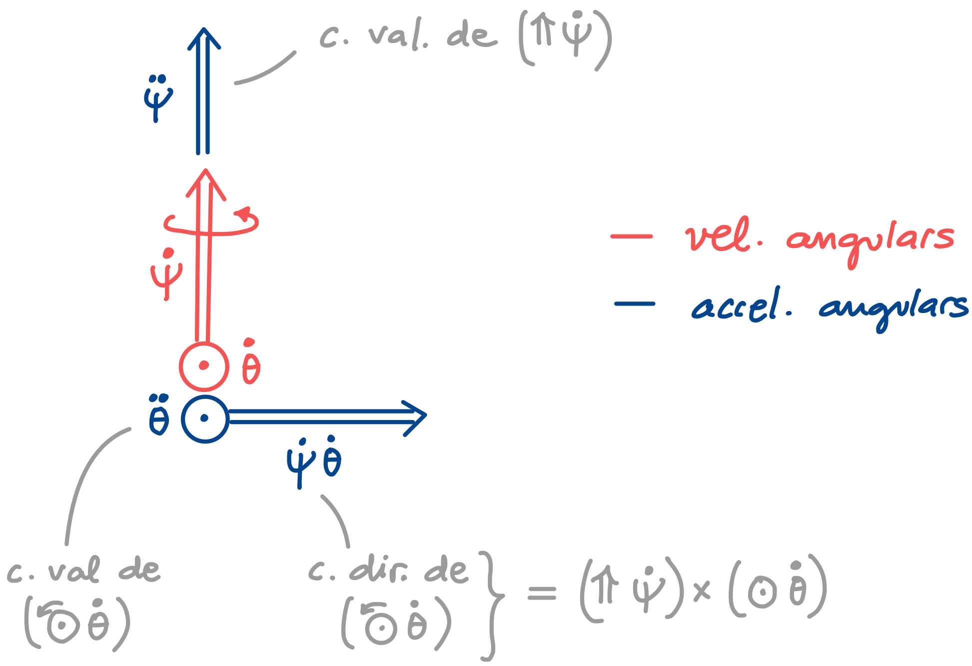
$$\overline{\Omega}^{\text{ant1}}_{T} = \overline{\Omega}^{\text{ant1}}_{\text{forq}} + \overline{\Omega}^{\text{forq}}_{T} = (\overset{\curvearrowleft}{\odot}\,\dot\theta) + (\Uparrow \dot\psi),$$

i, imaginant el sistema en moviment, veiem que:

$(\Uparrow\dot\psi)$ només canvia de valor (no gira)

$(\overset{\curvearrowleft}{\odot}\,\dot\theta)$ canvia de valor i direcció (gira amb $\Uparrow\dot\psi$)

Dibuixem els canvis, suposant mateixa vista que al dibuix anterior:



Per tant, $\bar\alpha^{\text{ant1}}_{T}$ és la suma dels vecs. blaus:

$$\boxed{\bar\alpha^{\text{ant1}}_{T} = (\Uparrow\ddot\psi) + (\overset{\curvearrowleft}{\odot}\,\ddot\theta) + (\Rightarrow\dot\psi\dot\theta)}$$

El resultat és idèntic a l'obtingut a l'Eq. (☼) per la via analítica.