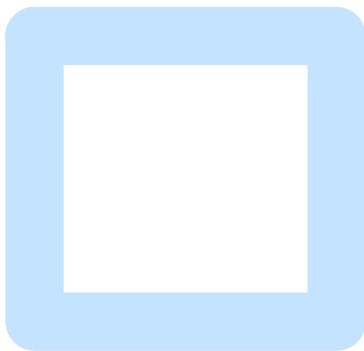


1P

derivació
geomètrica



Els requadres blaus
són petits reconditoris



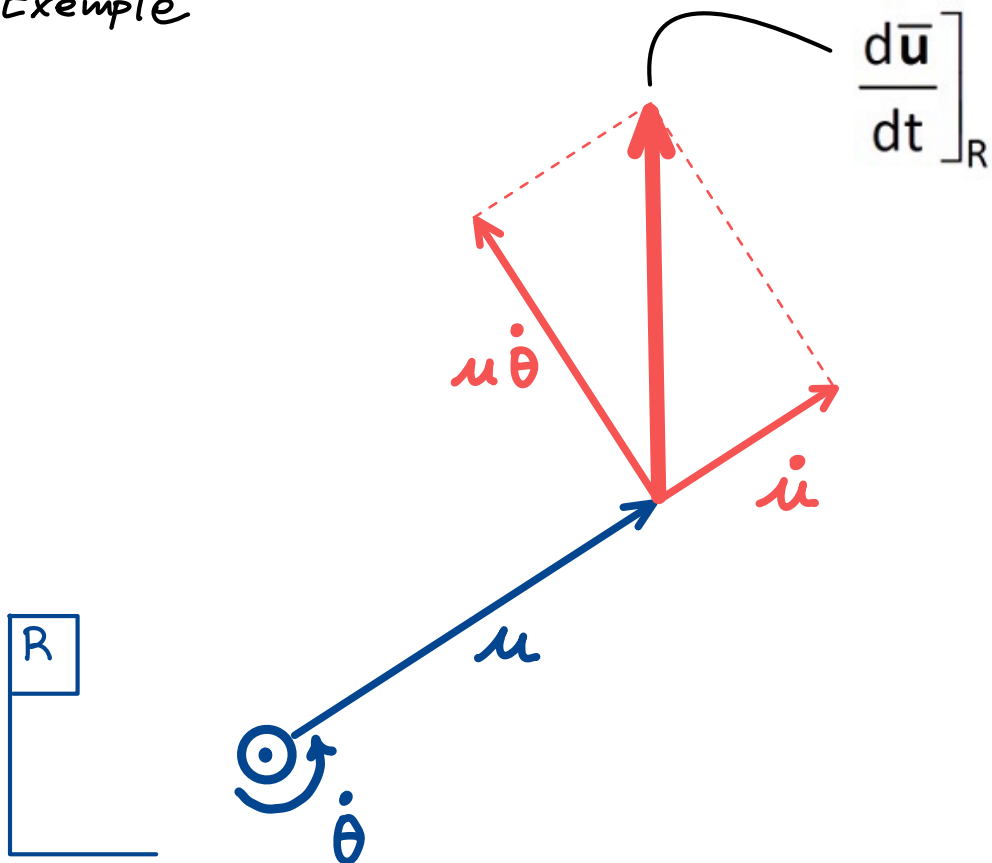
Els requadres negres
són els exercicis

Derivació geomètrica

$$\left[\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} \right]_R = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \text{canvi de} \\ \text{valor} \end{array} \right]}_{\parallel \bar{\mathbf{u}}} + \underbrace{\left[\begin{array}{c} \text{canvi de} \\ \text{direcció} \end{array} \right]}_{\perp \bar{\mathbf{u}}} = \underbrace{\dot{u} \frac{\bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}|}}_{\text{canvi val.}} + \underbrace{\bar{\boldsymbol{\Omega}}_R \times \bar{\mathbf{u}}}_{\text{canvi dir.}}$$

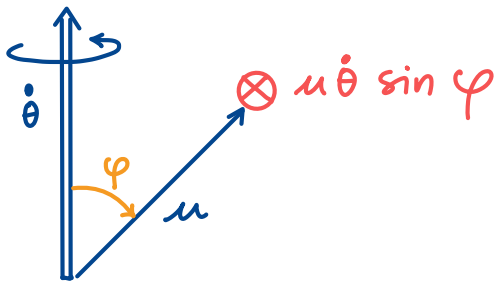
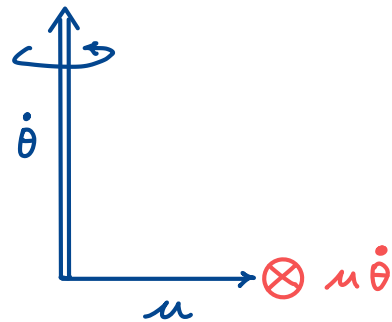
(En general té aquesta forma)

Exemple

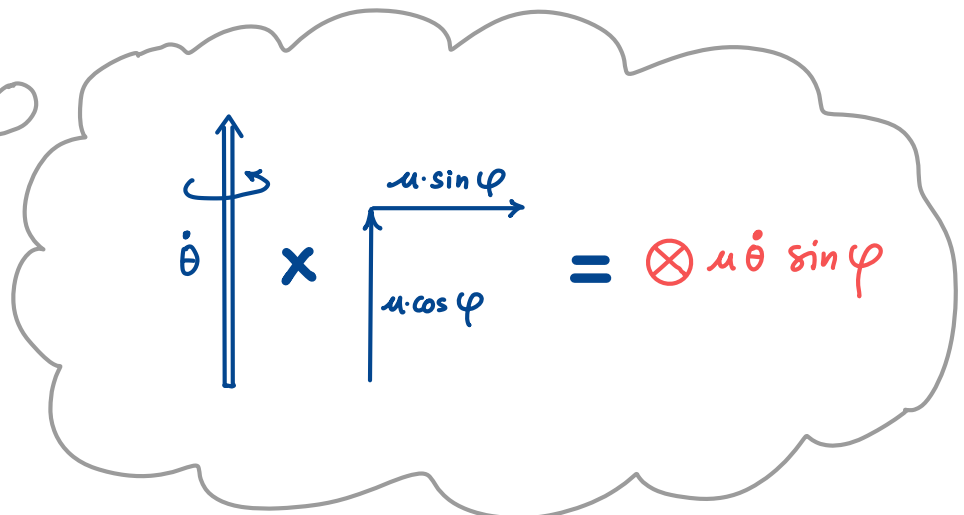


Exemples del canvi dir. $\vec{\Omega}_R \times \vec{u}$ quan $u = ct$

Suposem $\left[\begin{array}{l} \vec{u} \text{ té valor } u = ct \\ \vec{\Omega}_R \text{ " " } \dot{\theta} \end{array} \right.$

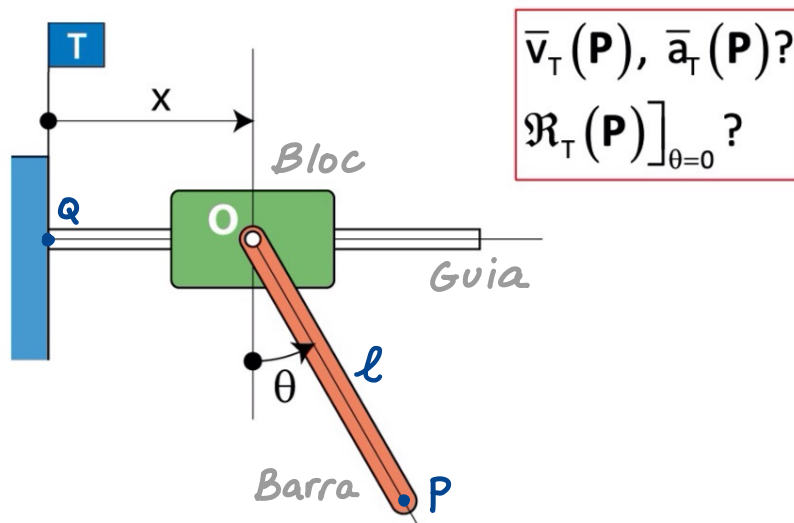


Com ho pensem



El pèndol d'Euler

En el sistema de la figura, el bloc es trasllada horitzontalment damunt la guia i el pèndol està unit al bloc mitjançant una articulació a O. Utilitzant les coordenades indicades, calculeu la velocitat i acceleració de P respecte del terra, i el radi de curvatura de P (també respecte el terra) quan l'angle theta és zero.



$$\bar{v}_T(P)$$

Pista: Deriveu el vector $\overline{QP} = \overline{QO} + \overline{OP}$. Penseu quins són el canvi de valor i el canvi de direcció de \overline{QO} i \overline{OP} per separat. Feu-vos una figura dibuixant aquests canvis.

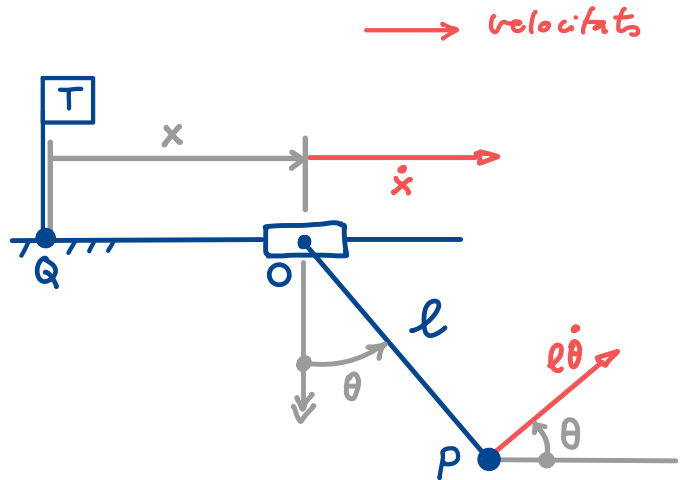
La solució és a la pàg. reg. i amb tot detall a la Wikimec. Intenteu-ho per vosaltres!

$$\bar{v}_T(P)$$

$$Ref = T$$

$Q = \text{origen vec. pos. de } P$
 \perp Fix a T !

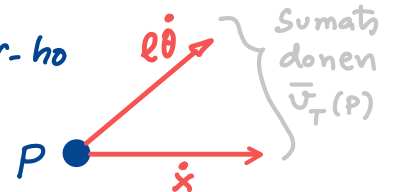
$$\bar{Q}P = \bar{Q}O + \bar{O}P$$



$$\bar{v}_T(P) = \underbrace{\frac{d\bar{Q}O}{dt}}_{\substack{\text{sols té} \\ \text{c. val.}}} \Big|_T + \underbrace{\frac{d\bar{O}P}{dt}}_{\substack{\text{sols té} \\ \text{c. dir.}}} \Big|_T = (\rightarrow \dot{x}) + (\nearrow l\dot{\theta})$$

$$(\rightarrow \dot{x}) \quad (\nwarrow \dot{\theta}) \times (\searrow l)$$

Cal pensar-ho
així \rightarrow



$$\bar{a}_T(P)$$

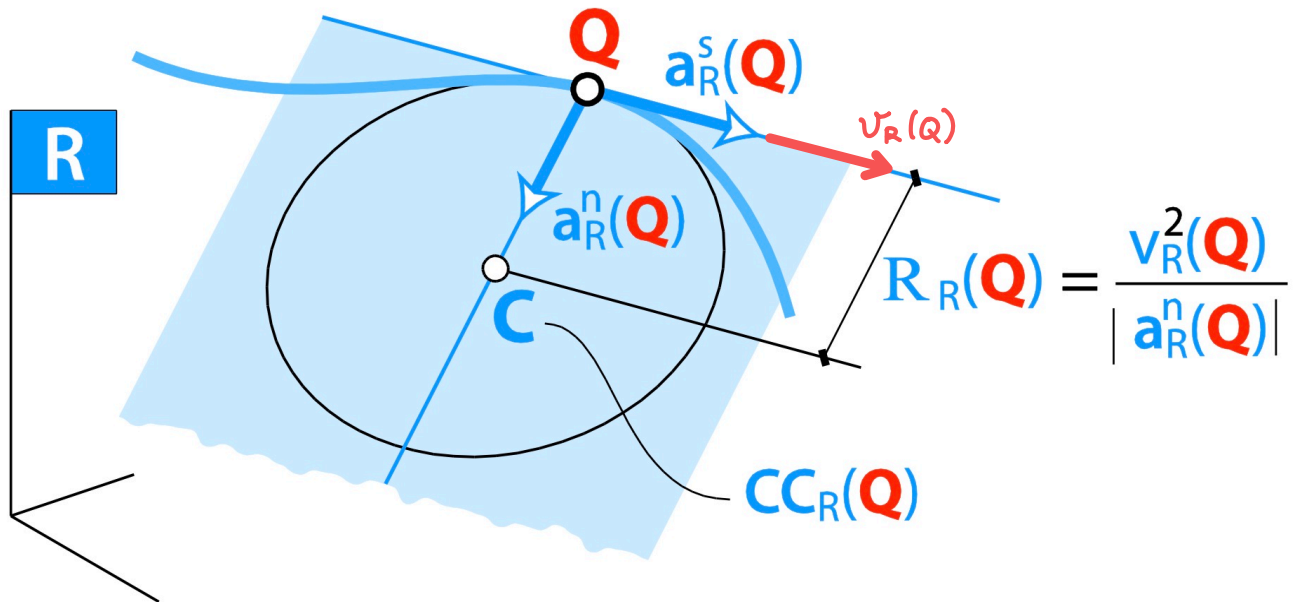
Es fa igual, però derivant els vecs. vermells

Sol:

$$\bar{a}_T(P) = \left[\nearrow (l\ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta) \right] + \left[\nwarrow (l\dot{\theta}^2 - \ddot{x} \sin \theta) \right]$$

$$\mathcal{R}_T(P) \Big|_{\theta=0}$$

Recordem:



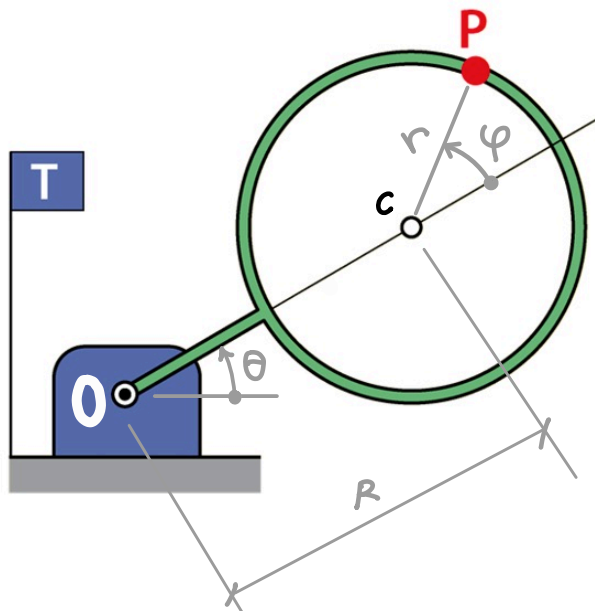
Recomanació: Dibuixen la configuració del sistema per a $\theta=0$, pintant-li $\vec{v}_T(P)$, $\vec{a}_T^n(P)$, i $\vec{a}_T^s(P)$

Sol:

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{(l\dot{\theta} + \dot{x})^2}{l\dot{\theta}^2}$$

Ex. 2.7 RBK (adaptat): Partícula sobre guia circular

La massa puntual P es mou lliurement sobre el suport circular de radi r . El suport gira al voltant del punt O fix a T . Troben $\vec{v}_T(P)$, $\vec{a}_T(P)$ i $\mathcal{R}_T(P) \Big|_{\theta=0}$ en funció de $\theta, \dot{\theta}, \varphi$ i $\dot{\varphi}$.



$$\begin{aligned} \vec{v}_T(P)? \\ \vec{a}_T(P)? \\ \mathcal{R}_T(P) \Big|_{\varphi=0} ? \end{aligned}$$

$$\vec{v}_T(P)$$

Pista : Deriven $\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{PC}$

Utilitzen les coord. θ i φ per expressar-ho tot.

Sol. (agrupant en les dir. indicades):

$$\vec{v}_T(P) = \left[\nwarrow (R\dot{\theta} + r\dot{\varphi}\cos\varphi) \right] + \left[\swarrow r\dot{\varphi}\sin\varphi \right]$$

$$(\text{on } \dot{\varphi} = \dot{\theta} + \dot{\varphi})$$

$$\bar{a}_T(p)$$

Sol:

$$\bar{a}_T(p) = \left[\nearrow (R\ddot{\theta} - r\dot{\psi}^2 \sin \varphi + r\ddot{\psi} \cos \varphi) \right] + \left[\swarrow (R\dot{\theta}^2 + r\dot{\psi}^2 \cos \varphi + r\ddot{\psi} \sin \varphi) \right]$$

on :

$$\dot{\psi} = \dot{\theta} + \dot{\varphi}, \quad \ddot{\psi} = \ddot{\theta} + \ddot{\varphi}$$

$$\mathcal{R}_T(p) \Big|_{\varphi=0}$$

Sol:

$$\mathcal{R}_T(p) = \frac{(r\dot{\psi} + R\dot{\theta})^2}{R\dot{\theta}^2 + r\dot{\psi}^2}$$

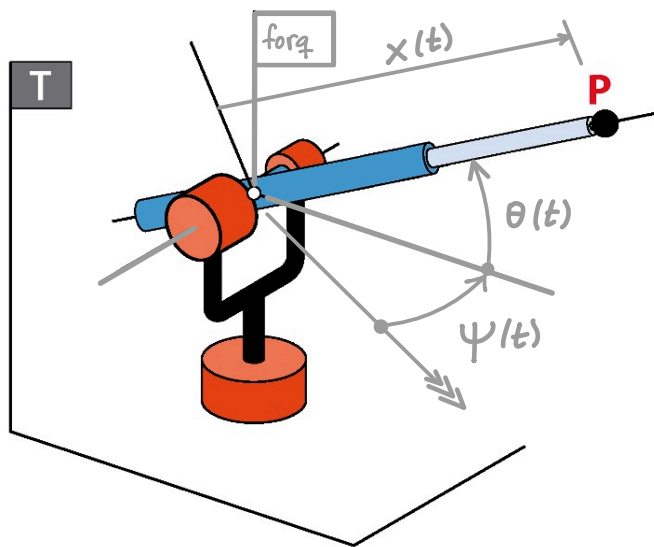
$\overbrace{r\dot{\psi} + R\dot{\theta}}^{\dot{\theta} + \dot{\varphi}}$

Problema 2.3 MPSR, pàg. 57 (Antena telescòpica)

Una antena telescòpica és orientada per mitjà de les rotacions motoritzades $\psi(t)$ i $\theta(t)$. Un altre accionament fa variar la longitud $x(t)$.

Determineu :

$$\bar{v}_T(P), \bar{a}_T(P), \bar{v}_{\text{forq}}(P), \bar{a}_{\text{forq}}(P)$$



$$\bar{v}_{\text{forq}}(P), \bar{a}_{\text{forq}}(P)?$$
$$\bar{v}_T(P), \bar{a}_T(P)?$$

Aquest és llarg. A classe prioritzarem el càlcul de $\bar{v}_T(P)$ i deixarem la resta per vosaltres.

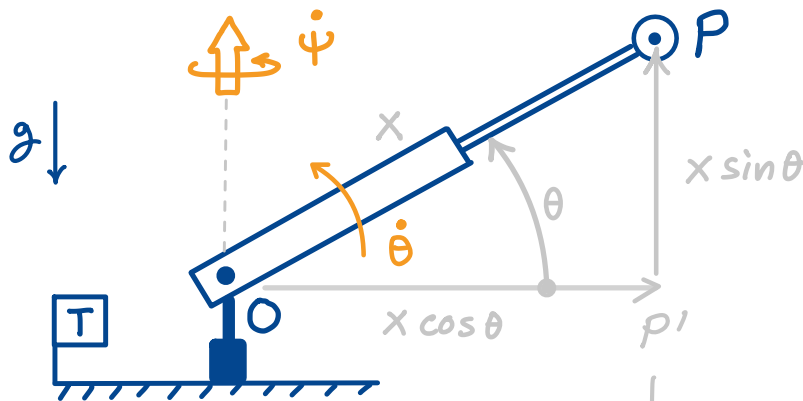
$\vec{v}_T(P)$

Aquí podem descompondre \vec{OP} en suma de les seves components horitzontal i vertical:

$$\vec{OP} = \vec{OP'} + \vec{P'P}$$

Així, $\vec{OP'}$ només queda afectat per $\dot{\psi}$ (ens mantenim en el terreny de les rotacions riúples) i $\vec{P'P}$ només canvia de valor.

← Dibuixeu-li les d/dt de $\vec{OP'}$ i $\vec{P'P}$



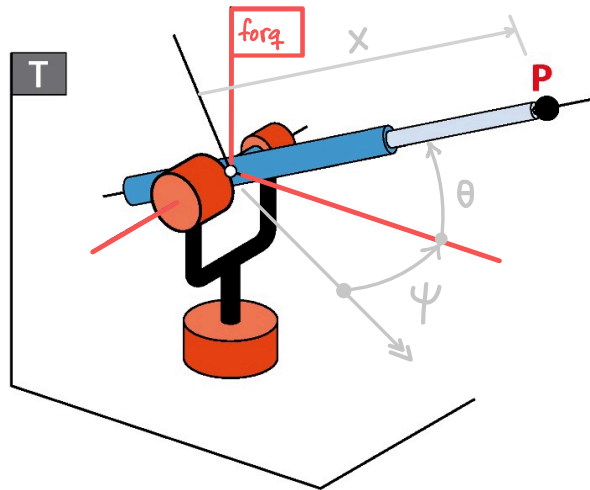
projecció vertical de P sobre pla horitz. per O

Us ha de sortir:

$$\begin{aligned}\vec{v}_T(P) = \frac{d\vec{OP}}{dt} \Big|_T = \dots = & \left[\uparrow (\dot{x} \sin \theta + x \dot{\theta} \cos \theta) \right] + \\ & \left[\rightarrow (\dot{x} \cos \theta - x \dot{\theta} \sin \theta) \right] + \\ & \left[\otimes x \dot{\psi} \cos \theta \right]\end{aligned}$$

Ex. per a vosaltres: Calculeu $\vec{a}_T(P)$

$$\bar{v}_{\text{forq}}(P)$$



$$\bar{v}_{\text{forq}}(P), \bar{a}_{\text{forq}}(P)?$$

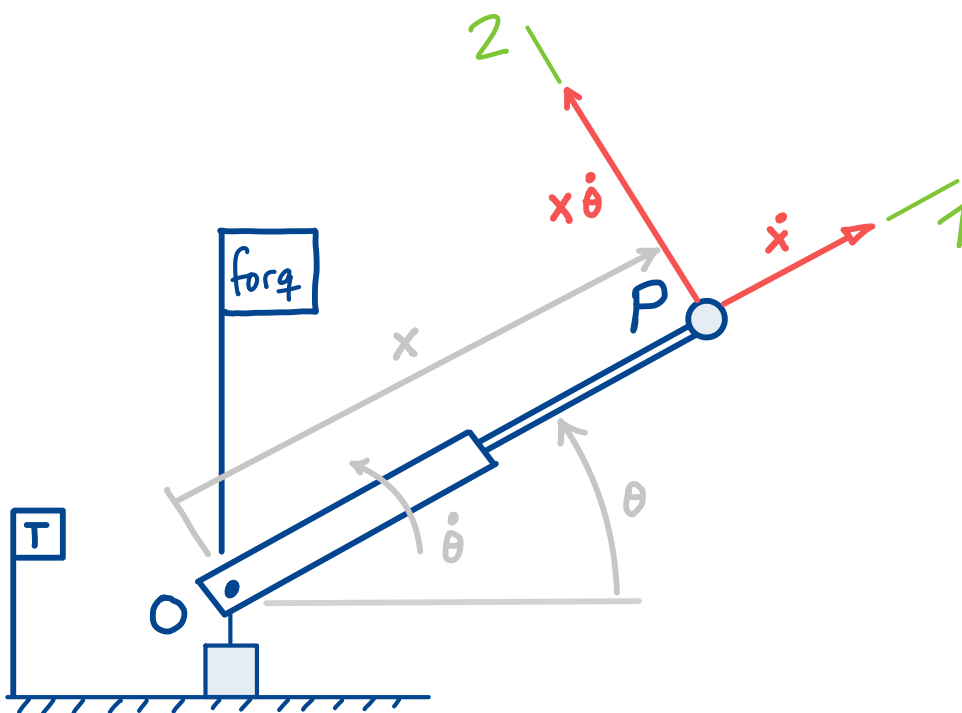
$$\bar{v}_T(P), \bar{a}_T(P)?$$

Des de ref. "forq" sols veiem movim. degut a $\theta(t)$ i $x(t)$:

O és fix a $\left\{ \begin{matrix} \text{forq.} \\ T \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ Serveix com origen vecs. pos. tant a ref "forq" com a ref "T"

$$\bar{v}_{\text{Forq}}(P) = \left[\frac{d\overline{OP}}{dt} \right]_{\text{forq}} = \left(\nearrow \dot{x} \right) + \left(\nwarrow x\dot{\theta} \right)$$

\overline{OP} només afectat per $\dot{\theta}$, no per $\dot{\psi}$



$$\bar{a}_{\text{forç}}(P)$$

Pista: pinten les derivades temporals dels vectors vermells sobre el dibuix anterior. Agrupant els vectors en les dirs. 1 i 2 del dibuix, ha de sortir:

$$\bar{a}_{\text{forç}}(P) = \left[\nearrow (\ddot{x} - x\dot{\theta}^2) \right] + \left[\nwarrow (2\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta}) \right]$$