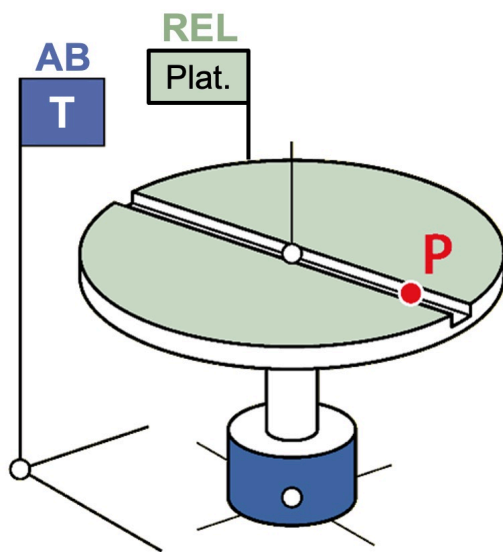


# 4P

Composició  
de moviments

## Rel. entre vel. i accel. en 2 refs.



$$\bar{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P}) + \bar{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P})$$

$$\text{amb } \bar{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P} \in REL)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{a}}_{REL}(\mathbf{P}) + \bar{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) + \bar{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P})$$

$$\text{amb } \begin{cases} \bar{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P} \in REL) \\ \bar{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P}) = 2\bar{\boldsymbol{\Omega}}_{AB}^{REL} \times \bar{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P}) \end{cases}$$

### Recordeu:

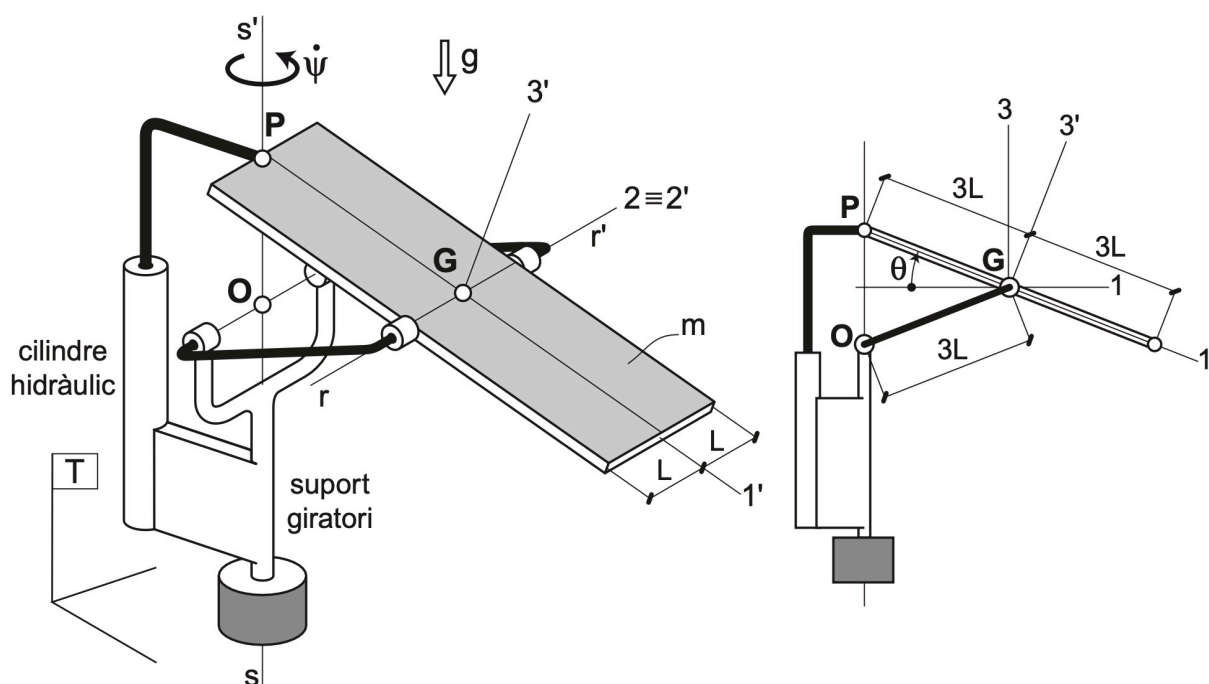
Sempre cal declarar les referències.

Quan feu composició de moviments, cal declarar què feu servir com a referències absoluta i relativa (AB i REL)

Si expresseu els resultats en alguna base, indiqueu a què són fixes les direccions d'aquesta base.

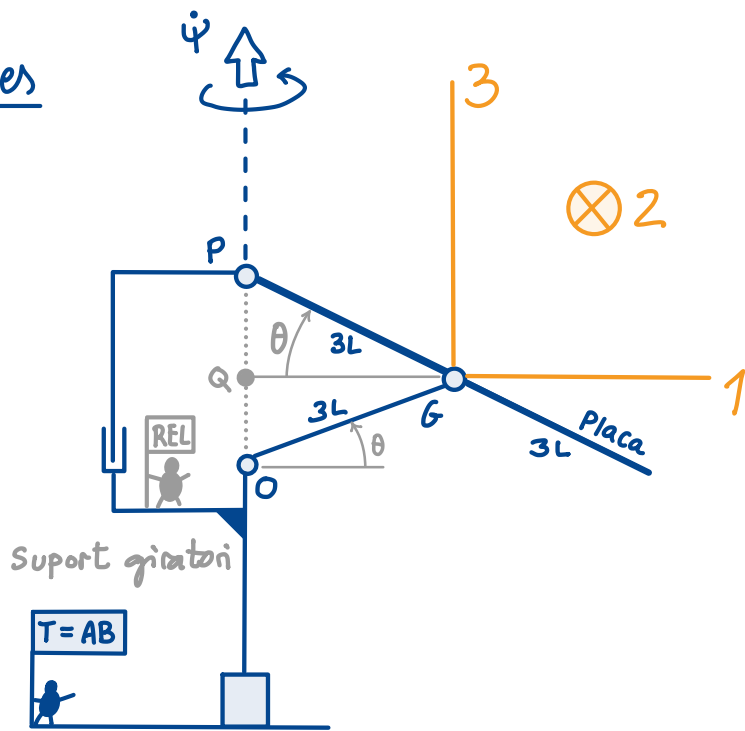
### Placa articulada giratòria

La placa rectangular està unida a un suport giratori a través de dues barres amb articulacions als extrems. Una tercera barra està unida a la placa a través d'una ròtula esfèrica (a **P**) i al suport a través d'un enllaç cilíndric. El suport gira amb velocitat angular  $\dot{\psi}$  de valor variable respecte del terra (T).



Determineu les components, en la base d'eixos (1,2,3), de l'acceleració del centre d'inèrcia **G** de la placa respecte al terra per composició de moviments, prenent com a ref. REL. la solidària al suport giratori **[3 p]**

## Pistes



→ velocitats  
→ accel.

Dir. QG      Dir Vertical

$B = (1, 2, 3)$

fixa al suport  
giratori

 $\bar{v}_T(G)$  via comp. vel.

REL = support giration  
AB = T

$$\bar{v}_{AB}(G) = \underbrace{\left( \uparrow \bigcirc \right)}_{\bar{v}_{REL}(G)} + \underbrace{\left( \otimes \bigcirc \right)}_{\bar{v}_{AR}(G)} = \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}_B$$

- Dibuixos vecs. vermells  
a la fig. i els projecto

No es  
demana,  
pero ho  
fem x  
practicar

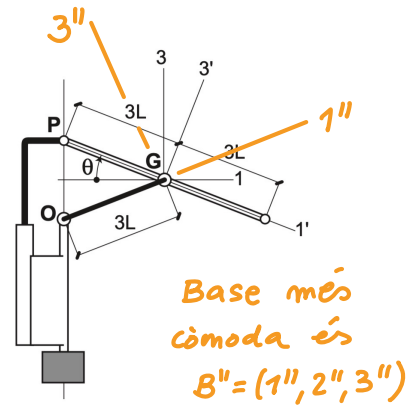
 $\bar{a}_T(G)$  via comp. accel.

$$\bar{a}_{AB}(G) = \underbrace{\left( \text{yellow blob} \right) + \left( \text{yellow blob} \right)}_{\bar{a}_{REL}(G)} + \underbrace{\left( \otimes \text{ yellow blob} \right) + \left( \leftarrow \text{ yellow blob} \right)}_{\bar{a}_{ar}(G)} +$$

$$+ 2 \underbrace{\left( \bar{\Omega}_T^{\text{REL}} \right)}_{\bar{a}_{cor}(G)} \times \underbrace{\left( \tilde{J}_{REL}(G) \right)}_{\tilde{J}_{REL}(G)} = \left\{ \begin{array}{l} -3L\ddot{\theta} \sin \theta - 3L\dot{\theta}^2 \cos \theta - 3L\dot{\psi}^2 \cos \theta \\ 3L\ddot{\psi} \cos \theta - 6L\dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta \\ 3L\ddot{\theta} \cos \theta - 3L\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{array} \right\}_B \quad (A)$$

Dibuixos vecs blaus a la figura i els projectes

Nota: La base + còmoda per expressar els resultats, de fet, és la solidària a les barres laterals, xq només requereix descompondre  $\leftarrow \dot{\psi}^2 3L \cos \theta$ . Deures: projecteu  $\vec{v}_{AB}(G)$  i  $\vec{a}_{AB}(G)$  en aq. base



Sol. alternativa, derivant un vec. pos. (No la farem)

També és una bona opció!

$$\vec{OG} = \begin{Bmatrix} 3L \cos \theta \\ 0 \\ 3L \sin \theta \end{Bmatrix}_B = 3L \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{Bmatrix}_B$$

com que és un vec. de posició totalment genèric, és un vector "pel·lícula" i el podem derivar!

Derivem dues vegades en base B, que gira amb  $\vec{\Omega}_T^B = \dot{\psi} \hat{3}$

$$\{\vec{\Omega}_T^B\}_B$$

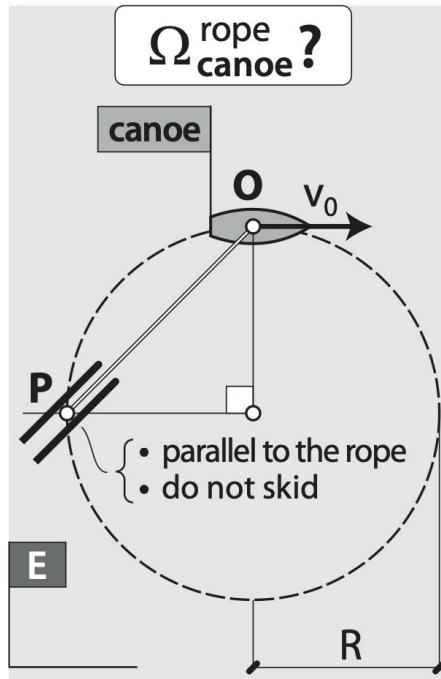
$$\vec{v}_T(G) = \frac{d\vec{OG}}{dt}_T = 3L \left[ \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \\ \dot{\theta} \cos \theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix}} \right] = 3L \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \\ \dot{\theta} \cos \theta \end{Bmatrix}_B$$

$$\vec{a}_T(G) = 3L \left[ \begin{Bmatrix} -\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \\ \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \\ \dot{\theta} \cos \theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -\dot{\psi}^2 \cos \theta \\ -\dot{\theta} \dot{\psi} \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}} \right] =$$

$$= 3L \begin{Bmatrix} -\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta - \dot{\psi}^2 \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - 2\dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \\ \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{Bmatrix}_B \quad (B)$$

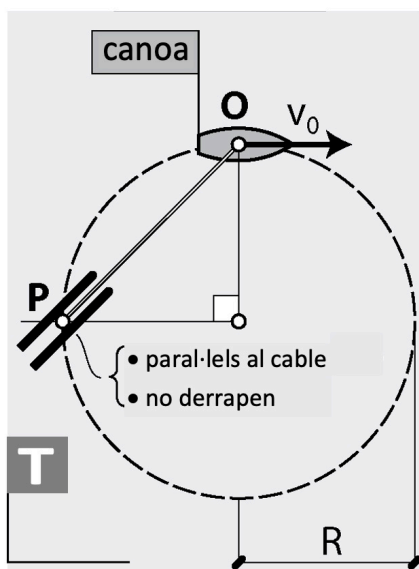
(B) = (A)  
Com esperàvem!

Canoa i esquiador (qüestió 2.42 RBK, pàg. 96)



**2.42** Point **O** of the canoe has a uniform circular motion relative to the ground (**E**). The canoe drags a skier **P** (modeled as a particle) through a taut rope. What is the rope angular velocity relative to the canoe ( $\Omega_{canoe}^{rope}$ ) at this particular configuration?

- A 0
- B  $v_0/(\sqrt{2}R)$ , clockwise direction
- C  $v_0/(\sqrt{2}R)$ , counterclockwise direction
- D  $v_0/(2R)$ , clockwise direction
- E  $v_0/(2R)$ , counterclockwise direction



$\bar{\Omega}_{canoe}^{cable} ?$

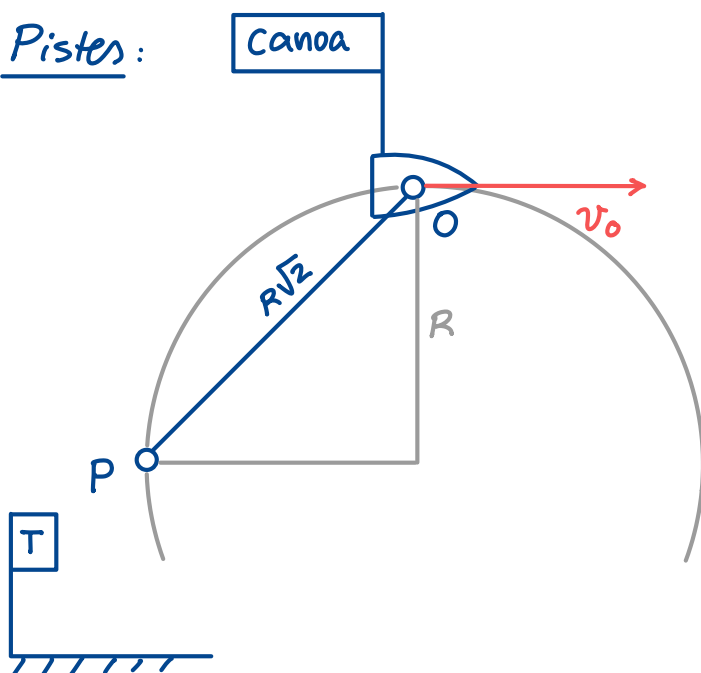
Pistes:

Canoa

Farem comp. velocitats amb

$$AB = T$$

$$REL = \text{Canoa}$$



$$\vec{v}_{AB}(P) = \vec{v}_{REL}(P) + \vec{v}_{ar}(P)$$

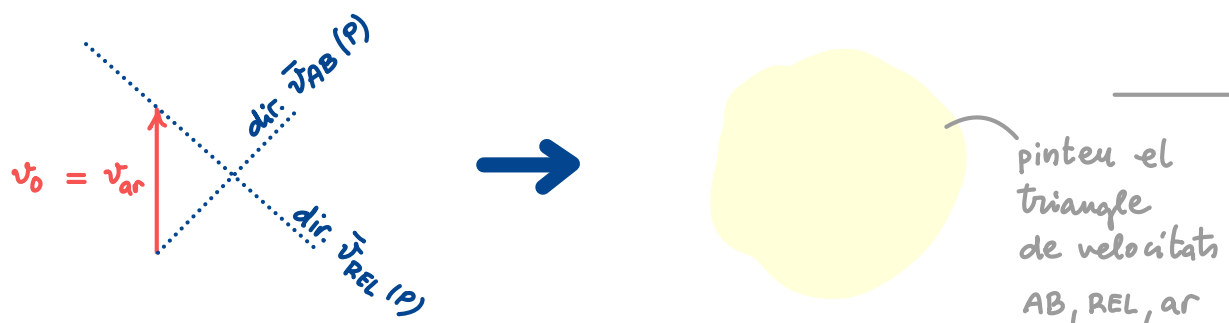
$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{REL} + \vec{v}_{ar} \quad (A)$$

Ja que esguís no derrapen

Ja que mov. rel. és circular

Ja que canoa fa movim. circular

De (A) deduïm la següent geometria de velocitats:



Com que des de la canoa veiem que

$$\vec{v}_{REL}(P) = \text{(yellow blob)} \quad (B)$$

la vel. ang. del cable respecte la canoa ha de tenir la forma

$$\vec{\Omega}_{\text{cable canoa}} = \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_{REL}(P) = \text{(yellow blob)} \quad (C)$$

Ja que P té movim. circular vist des de la canoa

igualant (B) i (C):

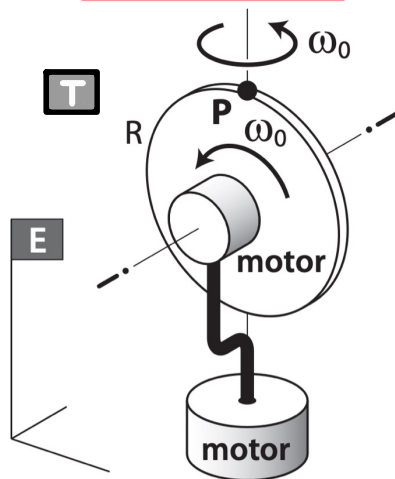
$$\text{(yellow blob)} \Rightarrow \omega = \text{(yellow blob)}$$

Per tant:

$$\vec{\Omega}_{\text{cable canoa}} = \text{(yellow blob)}$$

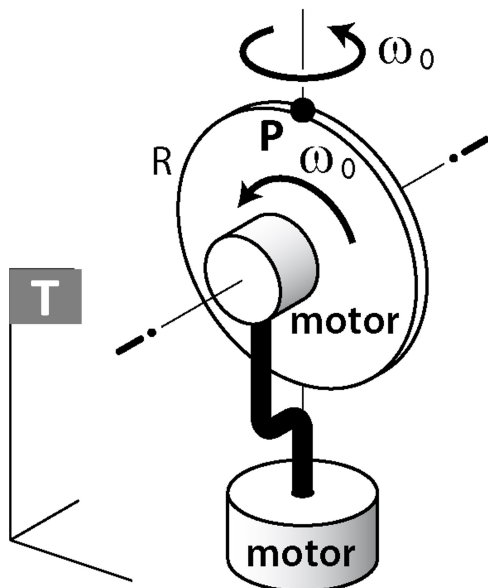
Disc de 2 GL (qüestió 2.18 RBK)

$\mathcal{R}_T(\mathbf{P})$ ?



**2.18** What is the value of the radius of curvature  $\mathcal{R}_T(\mathbf{P})$  when point  $\mathbf{P}$  of the disk goes through the highest position?

- A 0
- B  $R$
- C  $R/2$
- D  $R/\sqrt{2}$
- E  $R/\sqrt{5}$



$\mathcal{R}_T(\mathbf{P})$ ?



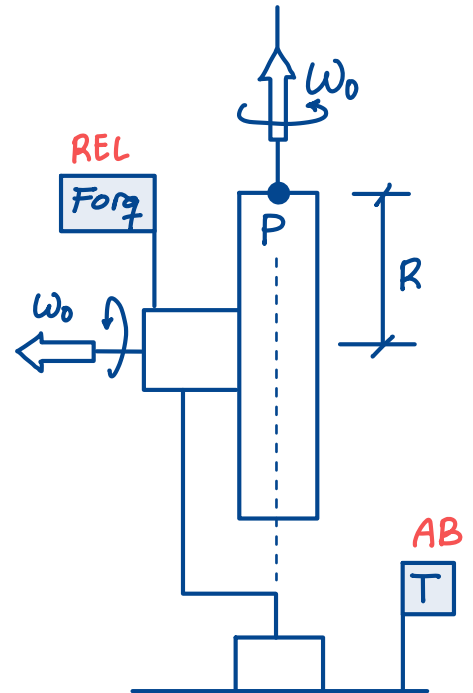
Pistes:

Comp. mov.  $\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = Forq \end{array} \right.$

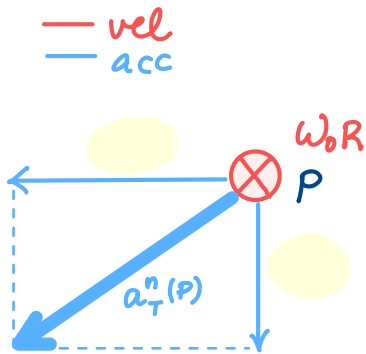
$$\vec{v}_{AB}(P) = \underbrace{\vec{v}_{REL}(P)}_{\otimes \omega_0 R} + \underbrace{\vec{v}_{ar}(P)}_0 = \otimes \omega_0 R$$

$$\vec{a}_{AB}(P) = \vec{a}_{REL}(P) + \vec{a}_{ar}(P) + \underbrace{\vec{a}_{cor}(P)}_{2 \vec{\Omega}_{AB}^{REL} \times \vec{v}_{REL}(P)} =$$

$$= \underbrace{(\downarrow)}_{REL} + \underbrace{(\quad)}_{ar} + 2 \underbrace{\left[ (\quad) \times (\quad) \right]}_{cor} = (\downarrow) + (\leftarrow)$$



Dibuixem vel. i acc. de P per esbrinar quin part és  $\vec{a}_T^n(P)$ :



Tota l'accel.  
és normal!

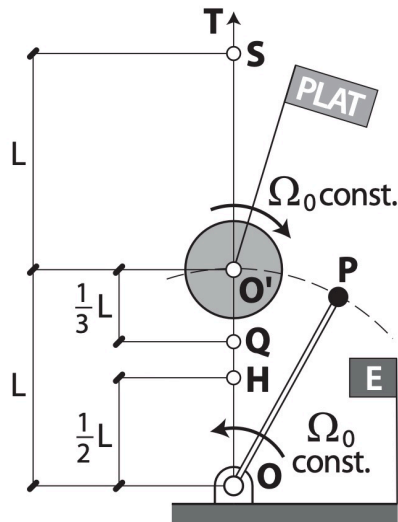
$$a_T^n(P) = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} =$$

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|} = \frac{\omega_0^2 R^2}{\quad} =$$

$$RESP =$$

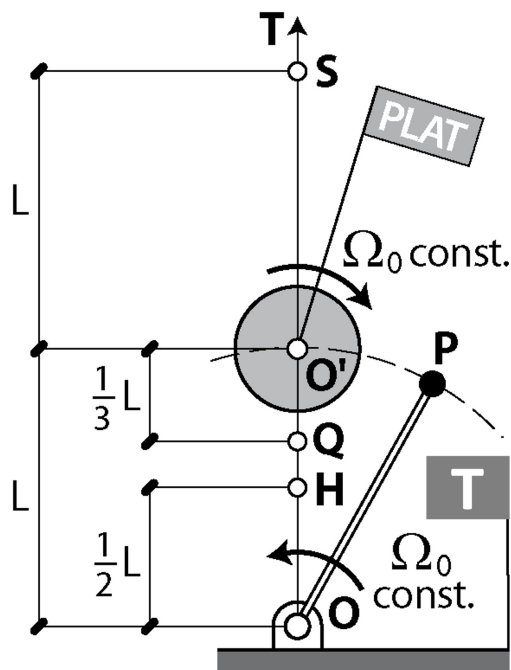
CC de P (Qüestió 2.21 RBK)

Curv. Center<sub>PLAT</sub>(P)  
when P goes through O'?



**2.21** Where is the **P** curvature center relative to the platform (PLAT) when **P** goes through the platform center **O'** (fixed to the ground E)?

- A **O**
- B **H**
- C **Q**
- D **S**
- E **T**



CC<sub>PLAT</sub>(P) quan  
P passa per O'?

## Pistes

Comp. vel. amb  $\left| \begin{array}{l} AB = \\ REL = \end{array} \right.$

$$\boxed{\vec{v}_{REL}(P) = \vec{v}_{AB}(P) - \vec{v}_{ar}(P) = (\leftarrow \Omega_0 L)}$$

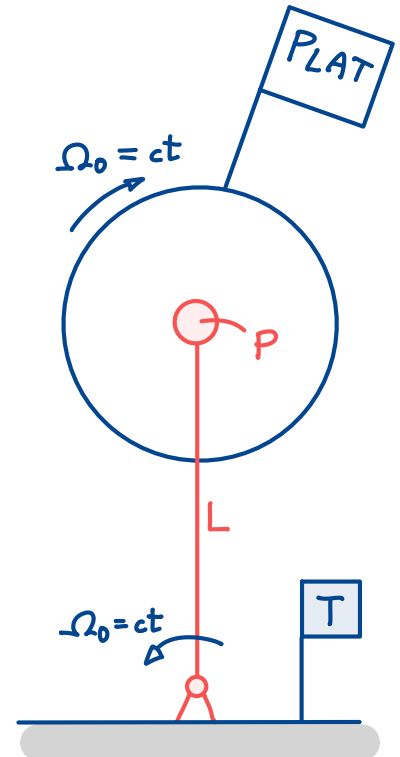
$$\boxed{\vec{a}_{REL}(P) = \vec{a}_{AB}(P) - \vec{a}_{ar}(P) - \vec{a}_{cor}(P) =}$$

$$\underbrace{2 \vec{\Omega}_{AB}^{REL} \times \vec{v}_{REL}(P)}$$

$$= (\downarrow) - 0 - 2 \left[ (\curvearrowright) \times (\leftarrow) \right] =$$

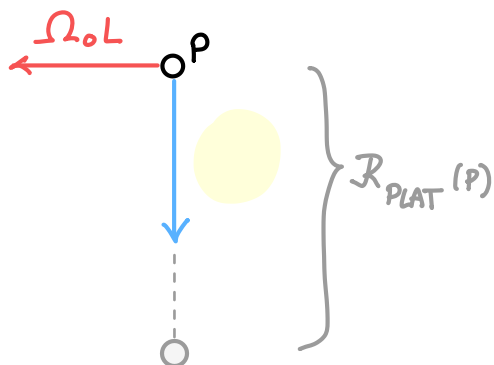
$$\downarrow 2 \Omega_0^2 L$$

$$\boxed{= (\text{oval})}$$



Dibuix per esbrinar quina és la component  $\vec{a}_{PLAT}^n(P)$

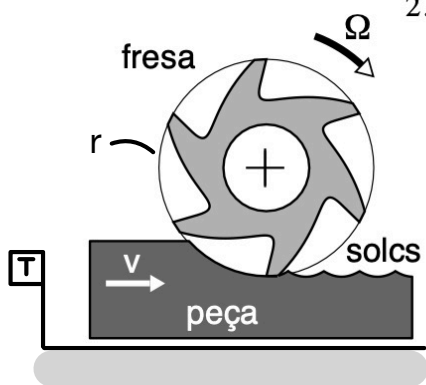
→ vel.  
→ acc.



$$R_{PLAT}(P) = \frac{v_{PLAT}^2(P)}{|a_{PLAT}^n(P)|} = \frac{\text{oval}}{\text{oval}} = \text{oval}$$

$$CC_{PLAT}(P) = \text{oval}$$

$$\boxed{RESP =}$$



2.14 En una fresadora la fresa de radi  $r$  gira amb velocitat angular  $\Omega$  constant al voltant del seu eix, que és fix, i la peça que és fresada avança amb celeritat  $v$ . Quin és el radi de curvatura del fons dels solcs que queden al damunt de la superfície fresada?

- A  $r$
- B  $r(1+v/r \Omega)$
- C  $r(1-v/r \Omega)$
- D  $r(1+v/r \Omega)^2$
- E  $r(1-v/r \Omega)^2$

Nota:  $v = ct$

## Pistes

Punt clau

Si definim

$$AB = T$$

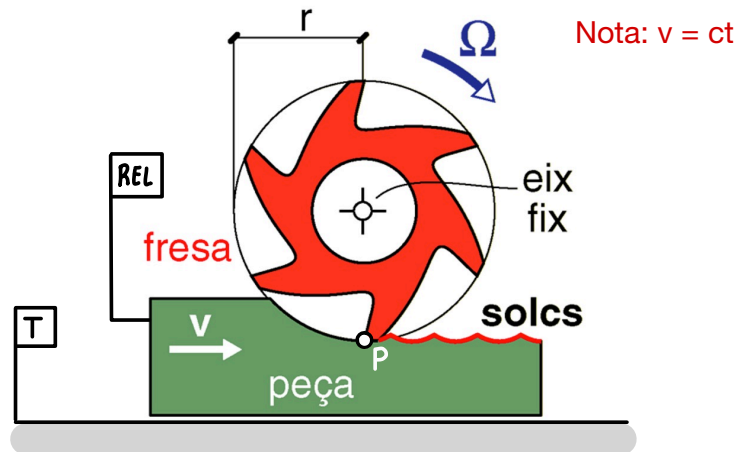
$$REL = \text{Peça}$$

el radi que ens demanen és

$$\mathcal{R}_{REL}(P)$$

Peça

## $\mathcal{R}$ del fons dels solcs

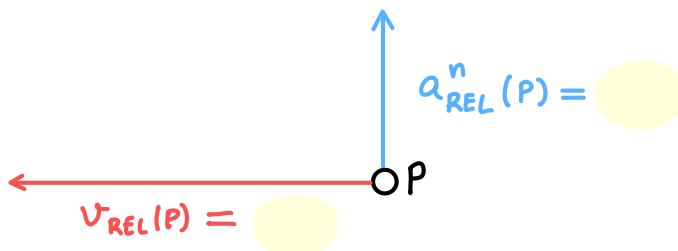


Cal trobar la  $\vec{v}_{REL}(P)$  i la  $\vec{a}_{REL}^n(P)$ , i  $\mathcal{R}_{REL}(P) = \frac{|\vec{v}_{REL}(P)|^2}{|\vec{a}_{REL}^n(P)|}$

$$\vec{v}_{REL}(P) = \vec{v}_{AB}(P) - \vec{v}_{Ar}(P) = (\text{yellow circle}) - (\text{yellow circle}) = \left[ \leftarrow (\text{yellow circle}) \right]$$

$$\vec{a}_{REL}(P) = \vec{a}_{AB}(P) - \vec{a}_{Ar}(P) - 2\vec{\Omega}_{AB}^{REL} \times \vec{v}_{AB}^{REL}(P) =$$

$$= (\uparrow \text{yellow circle}) - (\text{yellow circle}) - 2(\text{yellow circle} \times \text{yellow circle}) = (\uparrow \text{yellow circle})$$



$$\mathcal{R}_{REL}(P) = \frac{(\text{yellow circle})^2}{\text{yellow circle}} = \text{yellow circle} = r \left(1 + \frac{v}{\Omega r}\right)^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2b}{a}\right) = a^2 \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2$$

Aquest últim pas només resciu la resposta en la forma de l'enunciat de la qüestió. Estrictament, no cal!