

# 10P

Versió 1.1

## Geometria de masses

Lluís Ros

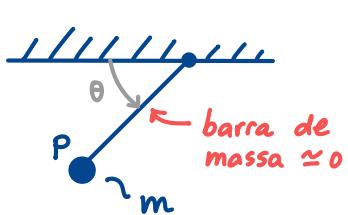
<https://lluisros.github.io/mecanica>

## Introducció

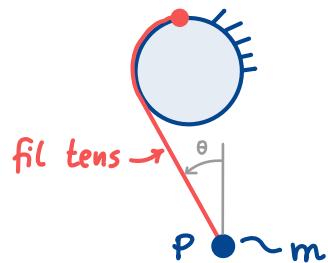
En aquesta segona part de l'assignatura estem utilitzant les lleis de la mecànica Newtoniana per obtenir

- equacions del moviment (\*)
- forces d'enllaç
- forces o parells que han d'aplicar els motors per garantir una certa acceleració.

Quan el sistema es senzill si només involucra una partícula P en tenim prou amb aplicar la 2a llei de Newton ( $\sum \bar{F}_{\rightarrow P} = m_P \ddot{\alpha}_{\text{RGA}}(P)$ , 3 eqs. escalaris). És el cas d'aquests dos sistemes ja vistos:



Pèndol simple



Pèndol sobre cilindre

En ambdós casos la massa està concentrada en un sol punt P i, per tant, no hi ha una geometria de masses a considerar. En els propers dies volarem analitzar sistemes mecànics més complexos, que involucrin sòlids, en els quals caldrà tenir en compte la distribució espacial de la massa.

---

(\*) Donen l'acceleració del sistema en funció de l'estat mecànic i de les forces i parells d'activació aplicats

Per analitzar aquests sistemes utilitzarem els teoremes de la quantitat de moviment (TQM) i del moment cinètic (TMC), que aviat presentarem. Aquests teoremes generalitzen les equacions de l'equilibri de l'estàtica que ja coneixeu

$$\sum \underbrace{\bar{F}_{ext}}_{\text{forces exteriors aplicades al sistema}} = \bar{0}$$

forces exteriors aplicades al sistema

$$\sum \underbrace{\bar{M}_{ext}(Q)}_{\text{moments exteriors respecte un punt } Q, \text{ aplicats al sistema}} = \bar{0}$$

moments exteriors respecte un punt  $Q$ , aplicats al sistema

Per aplicar

Caldrà saber

TQM

centre d'inèrcia del sistema (\*)

TMC

Moment cinètic del sistema

Tant el centre d'inèrcia com el moment cinètic d'un sistema depenen de la distribució (o geometria) de la massa del sistema (com està repartida).

### Centre d'inèrcia d'un sistema

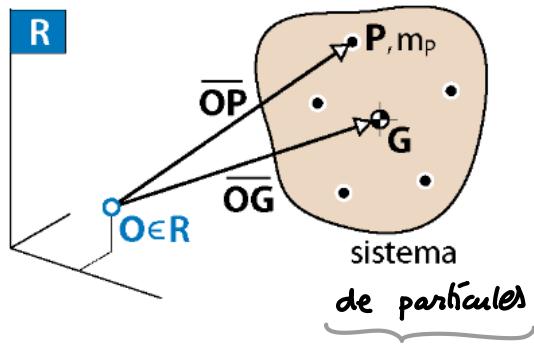
El centre d'inèrcia  $G$  d'un sistema de partícules (sorint un nòlid rígid) és un punt la cinemàtica del qual és un promig ponderat de la de totes les partícules del sist. Concretament, la posició de  $G$  en una referència  $R$  ve donada pel vector

(\*) "Centre d'inèrcia" = "centre de masses"

massa partícules  $P$

$$\overline{OG} = \sum_P \frac{m_P}{M} \cdot \overline{OP} \quad (\square)$$

massa total del sist.



Si derivem ( $\square$ ) resp. t a ref  $R$ , tenim:

Sovint és un sólid rígid

$$\overline{v_R}(G) = \sum_P \frac{m_P}{M} \cdot \overline{v_R}(P)$$

Surt el promig ponderat que diem

$$\overline{a_R}(G) = \sum_P \frac{m_P}{M} \cdot \overline{a_R}(P)$$

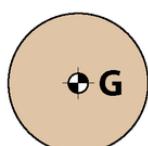
Fixem-nos que fent la substitució  $\overline{OP} = \overline{OG} + \overline{GP}$  a ( $\square$ ), i multiplicant per  $M$ , obtenim l'equació equivalent

$$\sum_P m_P \cdot \overline{GP} = \underbrace{\overline{0}}_{\text{vec. zero}} \quad (O)$$

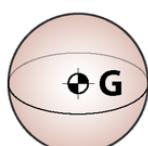
Si un punt  $G$  satisfa ( $O$ ) podem assegurar que és el centre d'inèria del sistema. Això facilita molt la localització de  $G$  en el cas de sòlids rígids homogenis que presentin simetries importants:

Centre de masses de sòlids homogenis

placa circular



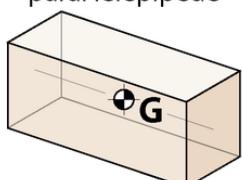
esfera



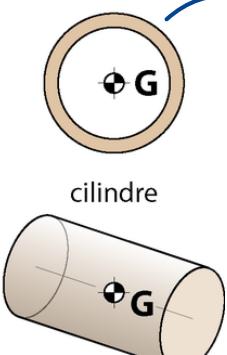
placa rectangular



paral·lelepípede



anella



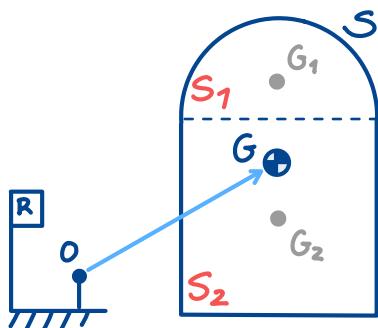
cilindre

Com veiem en aquest exemple,  $G$  no sempre és un punt físic d's!

## Centres d'inèrcia de sòlids "compostos"

### centre inèrcia

Els c.i. de sòlids habituals estan tabulats. Si tenim un sòlid  $S$  que es pot veure com la suma de diversos sòlids. Si, el c.i.  $G$  de  $S$  es pot trobar fent el promig ponderat dels c.i.  $G_i$  dels sòlids  $S_i$ :



$$\overline{OG} = \frac{m_1 \overline{OG}_1 + m_2 \overline{OG}_2}{m_1 + m_2}$$

Exercicis: Practiqueu el càlcul de c.i. resolent els exemples D5.1, D5.2, D5.3 de la Wikimec.

## Moment cinètic d'un sistema de partícules

### sorint un sòlid rígid

Suposant un sòlid rígid, sigui  $S$  un sistema de partícules en moviment en relació a una referència  $R$ , i considerem una partícula  $P$  de  $S$  amb massa  $m_p$ . Per definició:

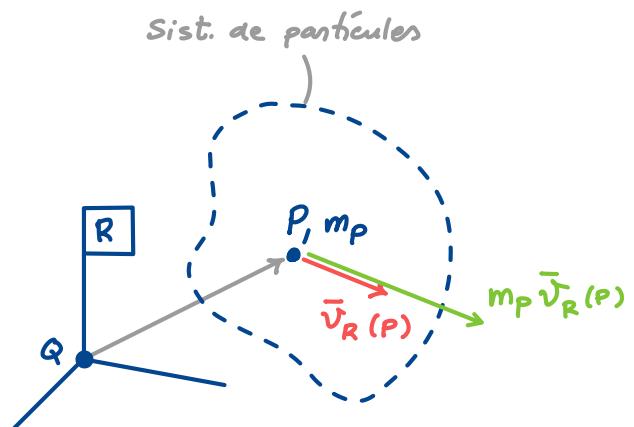
- La quantitat de moviment de  $P$  a  $R$  és el vector

$$m_p \cdot \vec{v}_R(P)$$

- El moment cinètic de  $P$  a  $R$  respecte un punt  $Q$  fix a  $R$  és

$$\overline{H}_R^P(Q) = \overline{QP} \times m_p \vec{v}_R(P)$$

moment resp.  $Q$  de la quantitat de moviment de  $P$



El moment cinètic de S a R, respecte Q, s'obté sumant el de totes les partícules d'S:

$$\bar{H}_R^S(Q) = \sum_P \bar{Q}P \times m_P \bar{v}_R(P) \quad (*)$$

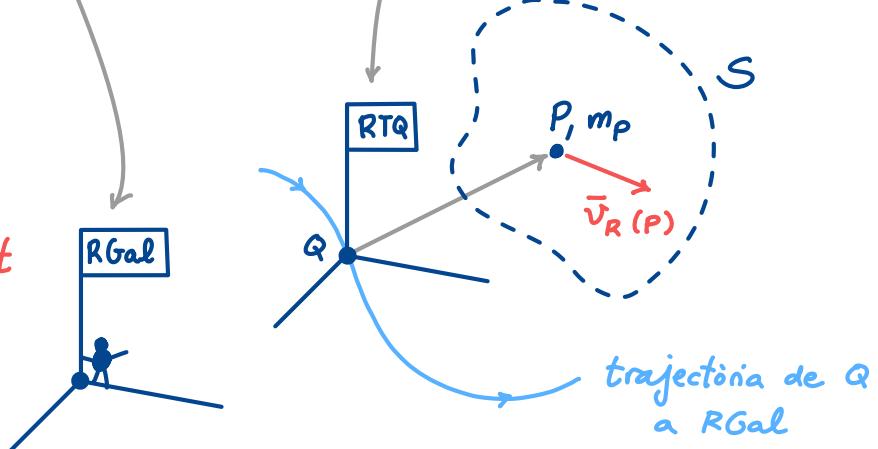
En les properes seccions veurem que, en el teorema del moment cinètic, el vector  $\bar{H}_R^S(Q)$  es calcula per a una referència R que es trasllada amb Q (RTQ) respecte de la ref. Galileana (RGal) en la que realment volem estudiar el moviment de S:

Volem estudiar el movim.

d'S des d'aquí ...

$RGal = T$   
habitualment

... però ens caldrà calcular el mom.  
cinètic de S en la RTQ ( $\bar{H}_{RTQ}^S(Q)$ )



E és a dir: Q és un punt fix a RTQ però que, en general, pot tenir moviment respecte RGal, i RTQ és simplement una referència "que viafja engauxada a Q" mantenint constant la seva orientació respecte RGal. Això vol dir que

$$\bar{\Omega}_{RGal}^{RTQ} = \bar{0}$$

(Important)

$$\bar{\Omega}_{RTQ}^S = \bar{\Omega}_{RGal}^S$$



A partir d'ara, el moment cinètic d'S respecte un punt Q es calcularà sempre a la RTQ.

## Moment cinètic d'un sólid rígid

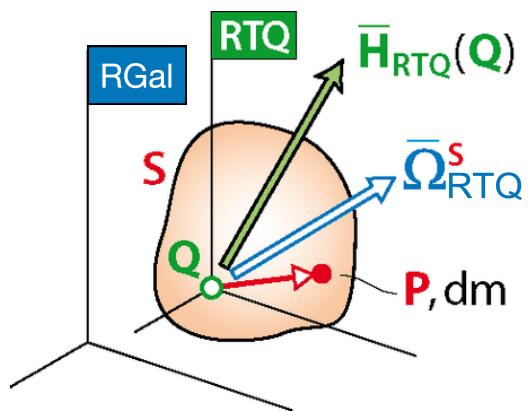
Quan  $S$  és un sólid rígid, el sumatori de l'Eq. (\*) es converteix en una integral estesa a tots els diferencials de massa de  $S$ :

$$\bar{H}_{RTQ}^S(Q) = \int_S \bar{QP} \times dm(P) \bar{\omega}_{RTQ}(P)$$

Malgrat la complexitat aparent d'aquesta expressió, quan  $Q$  és un punt de  $S$  ( $Q \in S$ ) es demostra que

$$\bar{H}_{RTQ}^S(Q) = \mathbb{I}(Q) \cdot \underbrace{\bar{\Omega}_{RTQ}^S}_{\parallel \bar{\Omega}_{RGal}^S}$$

$| Q \in S$



on :

$\mathbb{I}(Q)$  = Tensor d'inèria de  $S$  al punt  $Q$

(matriu  $3 \times 3$  simètrica, definida positiva,  
que depèn de la distribució de massa de  $S$ )

$\bar{\Omega}_{RTQ}^S$  = Velocitat angular de  $S$  respecte la RTQ

(com hem dit abans, és igual a  $\bar{\Omega}_{RGal}^S$ ) | Important !

COMPTE

!

Si  $Q \notin S$ , no podem calcular el moment cinètic amb l'anterior expressió. Caldrà fer servir la descomposició baricèntrica, que és vàlida tant si  $Q \in S$ , com si no ! Ja ho veurem !

## Forma del tensor d'inèrcia d'un sólid rígid $S$

Els elements de  $\mathbb{II}(Q)$  depenen de la distribució de massa de  $S$  al voltant d'uns eixos de coordenades  $(x_1, x_2, x_3)$  amb origen a  $Q$ , orientats d'acord amb una base vectorial  $B = (1, 2, 3)$  triada:

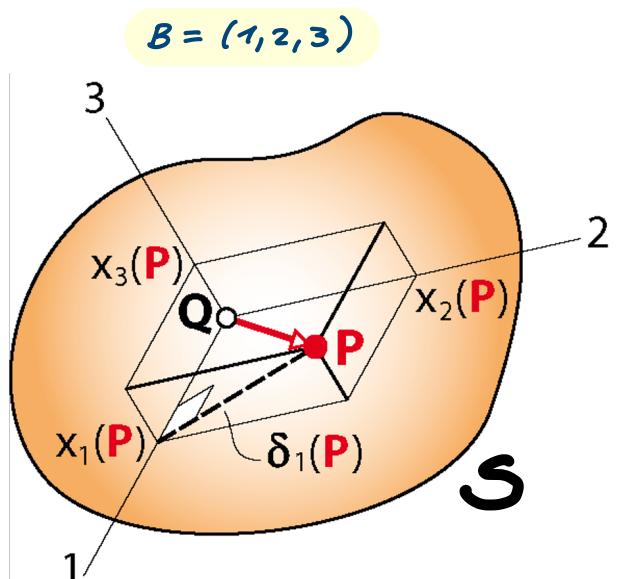
$$[\mathbb{II}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Indiquem la base triada

Moments d'inèrcia  
 Productes "

$$I_{ii} = \int_S \underbrace{\left[ x_j^2(P) + x_k^2(P) \right]}_{\parallel \text{ (distància de } P \text{ a eix } i)^2} dm(P)$$

$$I_{ij} = - \int_S x_i(P) \cdot x_j(P) \cdot dm(P)$$



En aquest curs, sempre triarem una base  $B$  en la que els elements de  $[\mathbb{II}(Q)]_B$  siguin constants. Això passa, per exemple, quan  $B$  es fixa al sólid. (\*)

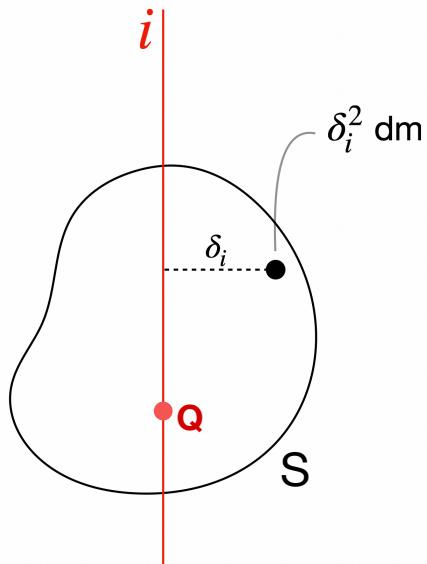
(\*) Després veurem que també passa quan

- El sólid és rotor simètric per al punt  $Q$ , respecte un cert pla  $i,j$  (si triem 2 dels eixos de la base en el pla  $i,j$ , i el tercer perpendicular a aquests dos).
- El sólid és rotor esfèric per al punt  $Q$ : en aquest cas,  $\mathbb{II}(Q)$  és constant (i diagonal) respecte qualsevol base (sigui fixa o no al sólid).

vegeu les definicions de rotor simètric i esfèric més avall.

Quedem-nos amb les següents "imatges resum":

### Mom. inèrcia $I_{ii}$



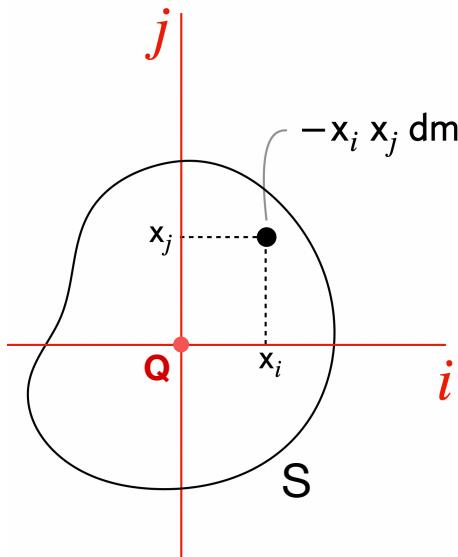
La contribució de cada dm del sòlid al moment d'inèrcia al voltant d'un eix  $i$  ( $I_{ii}$ ) és

$$\delta_i^2 dm$$

Sumant les contribucions de tots els dm del sòlid obtenim

$$I_{ii}(Q)$$

### Prod. inèrcia $I_{ij}$



La contribució de cada dm del sòlid al producte  $I_{ij}$  és

$$-x_i x_j dm$$

Sumant les contribucions de tots els dm del sòlid obtenim

$$I_{ij}(Q)$$

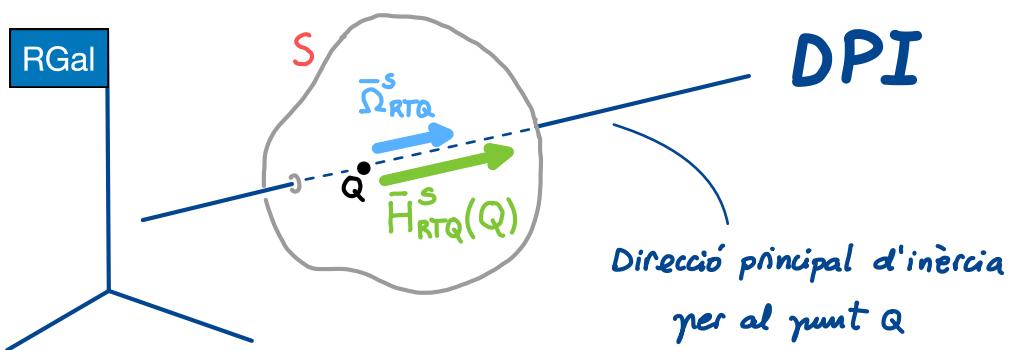
Per a qui deritgi entendre quin significat físic té un moment d'inèrcia, en paral·lelisme amb el concepte de massa, regeu l'Apendix I al final.

## Direccions i moments principals d'inèrcia

Recordem d'abans que el moment cinètic d'un sòlid S respecte un punt QES, es pot calcular via

$$\bar{H}_{RTQ}^S(Q) = \mathbb{I}(Q) \bar{\Omega}_{RGal}^S$$

DEFINICIONS: Quan  $\bar{\Omega}_{RGal}^S$  i  $\bar{H}_{RTQ}^S(Q)$  són paral·lels, es diu que la seva direcció és una **direcció principal d'inèrcia per a Q** (DPI per a Q):



$$\bar{H}_{RTQ}^S(Q) = \lambda \cdot \bar{\Omega}_{RTQ}^S$$

( $\lambda$  = factor de proporcionalitat)

Al factor de proporcionalitat  $\lambda$  entre  $\bar{\Omega}_{RGal}^S$  i  $\bar{H}_{RTQ}^S(Q)$  se l'anomena **moment principal d'inèrcia** (MPI) associat a aquesta DPI.

Més endavant anirem descobrint les repercussions dinàmiques de les DPI.

Observació: Clarament, una DPI correspon a la direcció d'un vector propi  $\vec{v}$  de  $\mathbb{I}(Q)$ , i el MPI associat és el valor propi de  $\vec{v}$ , ja que  $\mathbb{I}(Q) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$  (recordeu-ho d'àlgebra lineal)

Són  $\perp$  per definició de vector propi

Ara, fixem-nos: si  $B = (i, j, k)$  és la base en la que calculem el tensor, i la dir.  $k$  d'aquesta base és DPI, aleshores  $[\mathbb{I}(Q)]_B$  tindrà la forma:

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{KK} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Seran zero} \\ \text{necessàriament!} \end{array}$$

( " $*$ " = "qualsevol valor" )

i  $I_{KK}$  serà el MPI associat a aquesta DPI.

Hu de ser així perquè, si la dir.  $k$  és DPI, aleshores una velocitat angular en direcció  $k$  ha de donar lloc a un moment cinètic paral·lel a aquesta direcció (per definició de DPI), i per tant s'ha de complir

$$\begin{bmatrix} * & * & I_{ik} \\ * & * & I_{jk} \\ I_{ij} & I_{jk} & I_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{RGal}^S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \bar{\Omega} \end{bmatrix} \quad \text{per algun } \lambda \in \mathbb{R}$$

la qual cosa implica que

$$I_{ik} \bar{\Omega} = 0,$$

$$I_{jk} \bar{\Omega} = 0,$$

$$I_{KK} \bar{\Omega} = \lambda \bar{\Omega},$$

i d'aquí veiem que  $I_{ik} = I_{jk} = 0$ , i  $\lambda = I_{KK}$  és el factor de proporcionalitat entre  $\bar{\Omega}_{RGal}^S$  i  $\bar{H}_{RTQ}^S(Q)$ .

En les explicacions anteriors hem ordenat les direccions de la base així

$$B = (i, j, k)$$

i hem suposat que la dir.  $k$  era DPI. Clarament, si la dir.  $i$  hagués estat DPI, la forma del tensor seria

$$[\mathbb{II}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

MPI associat

Forma de  $\mathbb{II}(Q)$   
quan dir.  $i$  és DPI

"   
 $(i, j, k)$

i si hagués estat la dir.  $j$  tindriem

$$[\mathbb{II}(Q)]_B = \begin{bmatrix} * & 0 & * \\ 0 & I_{jj} & 0 \\ * & 0 & * \end{bmatrix}$$

MPI associat

Forma de  $\mathbb{II}(Q)$   
quan dir.  $j$  és DPI

Quan dues direccions de  $B = (i, j, k)$  són DPI, la tercera també ho és, ja que en aquest cas el tensor surt diagonal

$$[\mathbb{II}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & I_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

Forma de  $\mathbb{II}(Q)$   
quan les tres  
direccions  $i, j, k$   
són DPI

## Objectiu d'avui

Avui practicarem el càlcul del tensor  $\mathbb{II}(Q)$  sobre diversos exemples. Sobre la marxa anirem descobrint varietats propietats de  $\mathbb{II}(Q)$  que en faciliten la seva obtenció. Les emmarcarem en rectangles grisos.

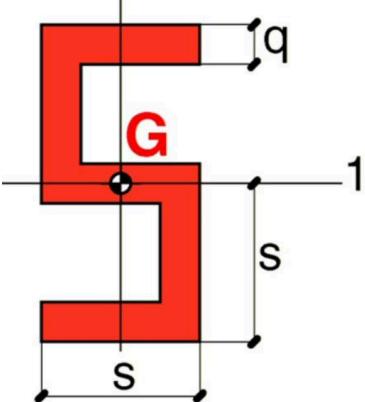
### Forma qualitativa vs quantitativa

Per obtenir  $\mathbb{II}(Q)$  sempre aplicarem 2 passos:

- (1) Estudiarem la forma qualitativa que té  $\mathbb{II}(Q)$ . Això ens ajudarà a extreure'n conclusions relatives a la dinàmica del rodat, i prepararem el terreny pel pas (2)
- (2) Amb l'ajut de taules, si cal, obtindrem la forma quantitativa de  $\mathbb{II}(Q)$

Dedicarem la 1<sup>a</sup> part de la classe a obtenir formes qualitatives, i la 2<sup>a</sup> a les quantitatives.

2

La peça plana és homogènia. Fes l'avaluació qualitativa de  $\text{II}(G)$ .

$$\text{B} = (1, 2, 3)$$

Per simplificar assumirem  $q \approx 0$  però tot l'anàlisi és fàcil de generalitzar per  $q > 0$

Figura plana  $\Rightarrow$  Tots els  $\text{dm}(P)$  tenen coordenada  $x_3(P) = 0$ .

$\Rightarrow$  els productes d'inèrria que involucrin  $x_3(P)$  seran zero:

$$\left[ \text{II}(G) \right]_B = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} I_{13} &= - \int x_1 x_3 \, dm = 0 \\ I_{23} &= - \int x_2 x_3 \, dm = 0 \end{aligned}$$

Fixem-nos que, gràcies als zeros que hi ha a la 3a fila i columna, si la velocitat angular del sòlid respecte Gal té la forma

$$\left\{ \bar{\Omega}_{\text{RGal}}^S \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \bar{\Omega} \end{array} \right\},$$

aleshores  $\bar{H}_{\text{RTG}}^S(G)$  i  $\bar{\Omega}_{\text{RTG}}^S$  són paral·lels:

$$\left\{ \bar{H}_{\text{RTG}}^S(G) \right\}_B = \underbrace{\left[ \text{II}(G) \right]_B}_{\left[ \begin{array}{ccc} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{array} \right]} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \bar{\Omega} \end{array} \right\}}_{\bar{\Omega}_{\text{RGal}}^S} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ I_{33} \bar{\Omega} \end{array} \right\}$$

vectors paral·lels

moment principal d'inèrria per la dir. 3

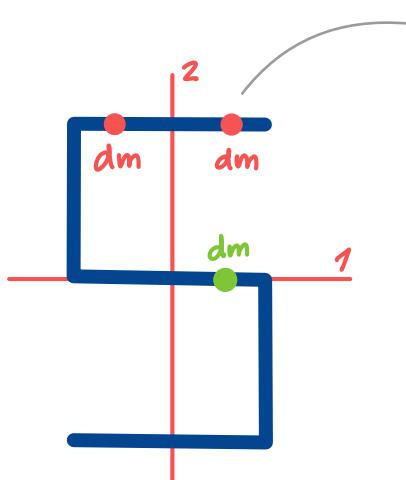
Per tant, la dir. 3 és DPI per al punt G, i  $I_{33}$  és el moment principal d'inèrria (MPI) associat.

En general:

Quan a la columna  $i$  de  $\mathbf{II}(G)$ , i per simetria a la fila  $i$ , tots els productes d'inèrcia s'igualen zero, la direcció  $i$  de la base serà una DPI per al punt on calculem el tensor, i  $I_{ii}$  serà el MPI associat

Ara fixem-nos que, a l'exemple, la dir. 3 és DPI independentment del punt on calculem el tensor. Això és així sempre per un solíid pla: la dir.  $\perp$  al pla del solíid és DPI per a tot punt del solíid.

Seguim. Ara ens preguntem: com són  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$  a l'exemple? Per definició són  $\geq 0$ , però... algun podria ser zero? Mirant la posició dels diferencials de massa veiem que no!



Els dm vermellos, per exemple, teuen contribució no nul·la a  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$ .

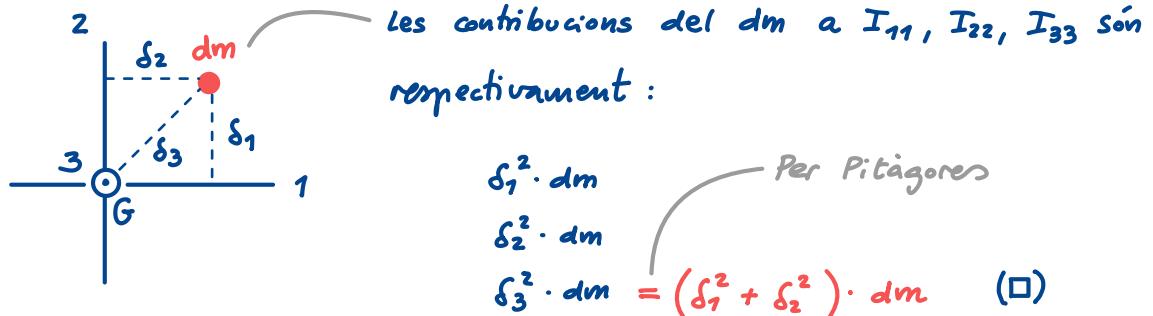
Per tant:

$$I_{11} = \int_S \delta_1^2(P) \cdot dm(P) \neq 0$$

$$I_{22} = \int_S \delta_2^2(P) \cdot dm(P) \neq 0$$

$$I_{33} = \int_S \delta_3^2(P) \cdot dm(P) \neq 0$$

Més coses. Ara fixem-nos en un  $dm(P)$  qualsevol (figura següent):



Integrant  $(\square)$  sobre  $S$ , descobrim que

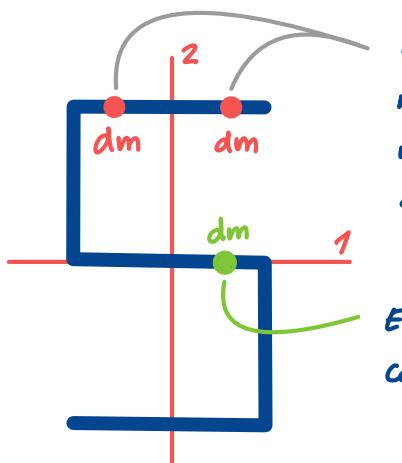
$$I_{33} = I_{11} + I_{22}$$

Ergo la forma qualitativa, per ara, és

$$[II(G)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

En general, per un solíid pla serà  $I_{KK} = I_{ii} + I_{jj}$ , on  $K$  és la dir.  $\perp$  al pla de la figura.

Ens falta saber el signe de  $I_{12} = - \int_S x_1 x_2 dm$ . Analitzem-lo:

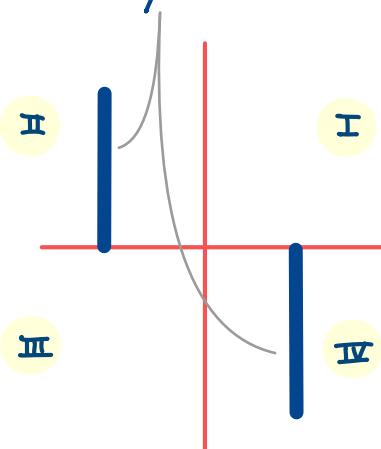


Els  $dm$  en posicions simètriques respecte un eix cancelen mütuament la seva contribució a  $I_{12}$ .

Wow!

Els  $dm$  sobre un eix tenen contribució nula a  $I_{12}$

Només aquests trossos contribueixen a  $I_{12}$ .



Però en ser els seus  $dm$  en els quadrants II i IV, tenim :

$$I_{12} = - \int_S \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{\text{negatiu}} dm > 0$$

Clarament: els signes de les contribucions en cada quadrant són

+	-
-	+

Important!

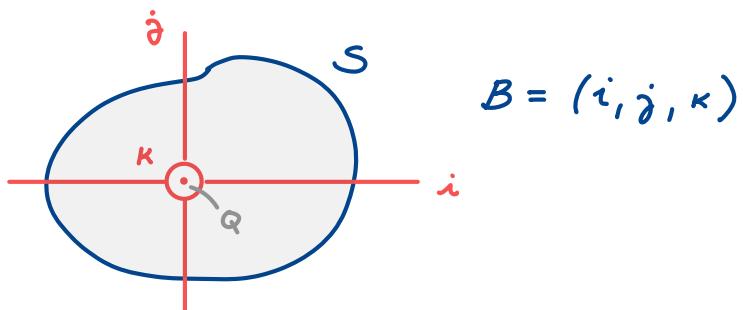
En conclusió: la forma qualitativa de  $\mathbb{II}(G)$  és:

$$\left[ \mathbb{II}(G) \right]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & |I_{12}| & 0 \\ |I_{12}| & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

Escrivim  $|I_{12}|$   
per fer pale  
que  $I_{12} > 0$

Conclusions:

Si  $S$  és un sòlid pla, amb eixos definits així



$$B = (i, j, k)$$

es compleix:

Propietat  
1

$\forall Q \in S$ , la dir.  $K$  ( $\perp a S$ ) és DPI

$$I_{KK} = I_{ii} + I_{jj}$$

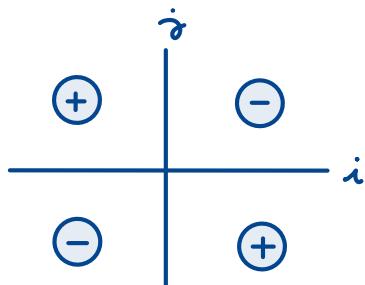
$I_{KK}$  és moment principal d'inèria

$$\left[ \mathbb{II}(Q) \right]_B = \begin{bmatrix} I_{ii} & I_{ij} & 0 \\ I_{ij} & I_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{I_{ii} + I_{jj}}_{I_{KK}} \end{bmatrix}$$

Propietat  
2

El signe de la contribució de la massa en cada quadrant als productes d'inèria és:

2

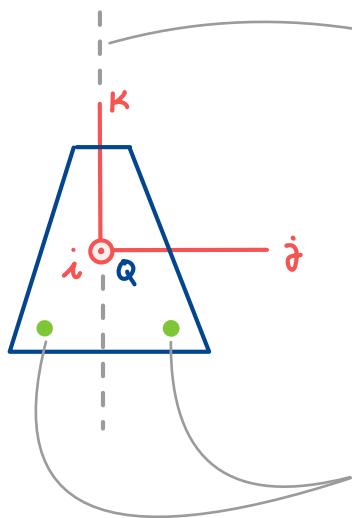


$$I_{ij} = - \int_S x_i x_j dm$$

Això no s'ha vist a classe però és útil!

A partir del que hem vist a l'exercici també és fàcil deduir que:

Per a un sólid  $S$  homogeni, no necessàriament pla, si hi ha un pla de simetria en la distribució de la massa, l'eix perpendicular al pla és DPI:



Pla ( $i, k$ ) de simetria  $\Rightarrow$  Eix  $j$  és DPI

$$B = (i, j, k)$$

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} * & & & \\ * & I_{jj} & * & \\ * & 0 & * & \\ 0 & & 0 & * \end{bmatrix}$$

$I_{ij} = 0$        $I_{jk} = 0$

Els dm simètrics tenen contribució conjunta nula a  $I_{ij}, I_{jk}$ .  
Ergo  $I_{ij} = I_{jk} = 0$ .

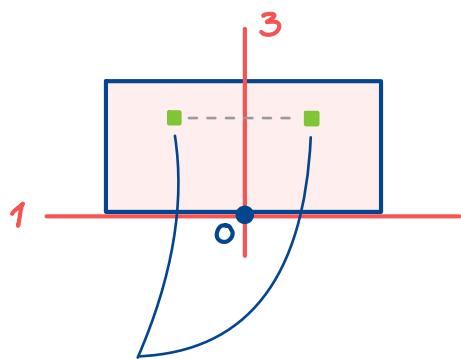
3

1

R1

2

Les dues plaques són idèntiques i homogènies.

Fes l'avaluació qualitativa de  $\mathbb{II}(O)$ . $R1 = \text{Rectangle } 1$  $R2 = " 2$  $\mathbb{II}(O)$  és suma dels tensors dels rectangles  $R1$  i  $R2$ .Tensor de  $R1$ 

dm simètrics tenen contribució neta zero a  $I_{13}$

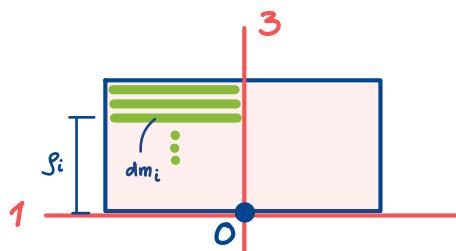
Figura plana amb eix 2  $\perp$  al seu pla  $\Rightarrow$  Dir. 2 és DP1  
 $I_{22} = I_{11} + I_{33}$

dm simètrics resp. pla 23 per O  $\Rightarrow I_{13} = 0$

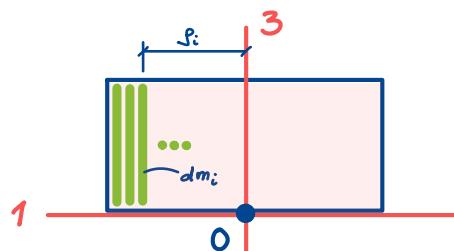
El tensor qualitatiu ha de ser

$$[\mathbb{II}_{R1}(O)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} + I_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

Aspecte nou d'aquest exercici: Permet esbrinar visualment si  $I_{11}$  és menor, major, o = a  $I_{33}$ . Ràpidament veiem que  $I_{11} = I_{33}$  ja que:



Aquests dm contribueixen a  $I_{11}$  amb  $s_i^2 d_m_i$



Aquests dm també contribueixen a  $I_{33}$  amb  $s_i^2 d_m_i$

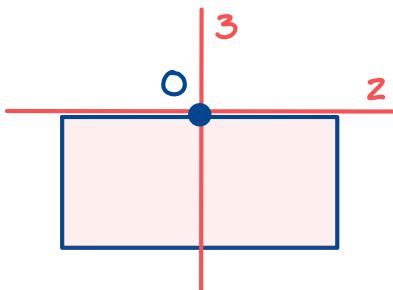
En resum, si  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{11} = \mathcal{I}_{33}$ ,

$$\left[ \mathcal{II}_{R1}(0) \right]_B = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & 2\mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

### Tensor de R2

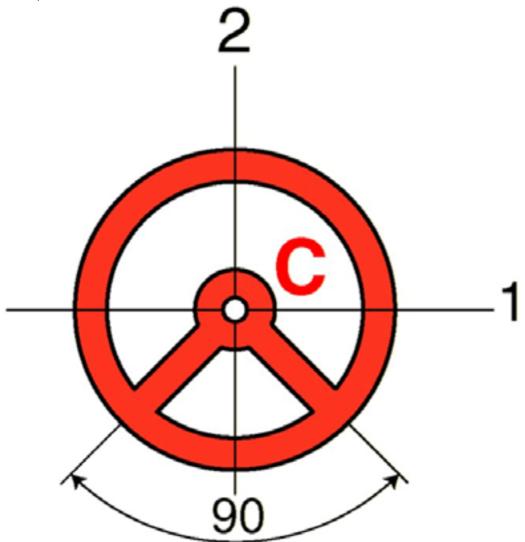
Amb un raonament anàleg veiem ràpidament que

$$\left[ \mathcal{II}_{R2}(0) \right]_B = \begin{bmatrix} 2\mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}$$



### Tensor global $\mathcal{II}(0)$

$$\left[ \mathcal{II}(0) \right]_B = \left[ \mathcal{II}_{R1}(0) \right]_B + \left[ \mathcal{II}_{R2}(0) \right]_B = \begin{bmatrix} 3\mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & 3\mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathcal{I} \end{bmatrix}$$



La peça plana és homogènia.  
Fes l'avaluació qualitativa de  $\text{II}(\mathbf{C})$ .

Aquest exm. permet il·lustrar

- Canvis de base
- Concepte de rotor
- Simètric

Podem descompondre el sòlid així:

$$\text{Solid} = \text{Anella} + \text{Radius}$$

Són figures planes amb matrícies moment d'inèria resp. eixos 1 i 2, i amb producte d'inèria 12 nul per simetria.

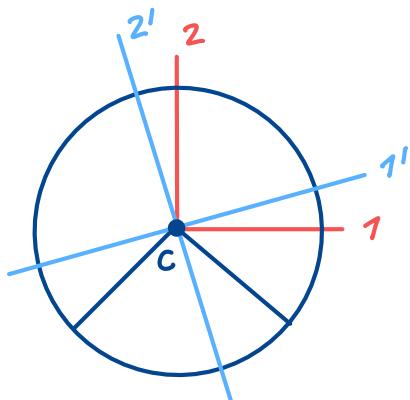
$$\begin{aligned} [\text{II}_{\text{anella}}(c)]_B &= \begin{bmatrix} I' & I' \\ I' & 2I' \end{bmatrix} \\ [\text{II}_{\text{radius}}(c)]_B &= \begin{bmatrix} I'' & I'' \\ I'' & 2I'' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Reducció}} \quad [\text{II}(c)]_B = \begin{bmatrix} I & I \\ I & 2I \end{bmatrix}$$

$I = I' + I''$

Ara,... què passaria si volguessim  $\text{II}(c)$  en una nova base  $B' = (1', 2', 3')$ ?

Mateix que abans

Caldrà fer un canvi de base! Recordem com es fa, d'àlgebra lineal:



## Canvi de base d'un tensor d'inèrcia

Rarament ho farem servir!

$$[\mathbb{I}(P)]_{B'} = [S]^{-1} [\mathbb{I}(P)]_B [S]$$

on:

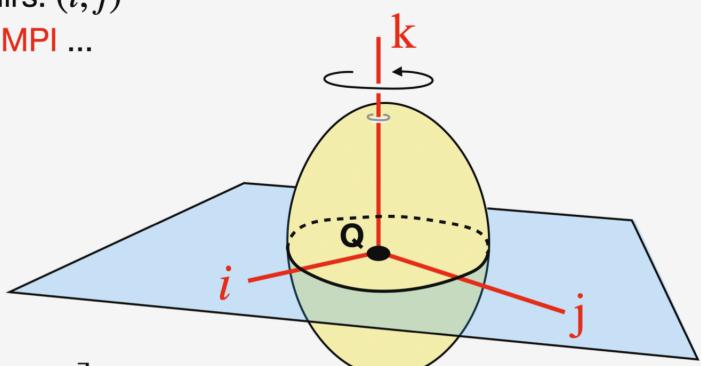
$$S = \begin{bmatrix} \text{per columnes: els versors de la} \\ \text{base } B' \text{ expressats en base } B \end{bmatrix}$$

Ara bé, en aquest exemple no caldrà fer el canvi. Com que  $[\mathbb{I}(C)]_B$  té la forma  $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$ , el tensor en la base  $B'$  serà el mateix! Això es deu a la següent propietat (\*):

Quan per un punt Q les dirs.  $(i, j)$  de la base  $B = (i, j, k)$  són DPI amb mateix MPI (de valor  $I$ ), el tensor  $\mathbb{I}(Q)$  és invariant a rotacions d'aquesta base al voltant de la dir.  $k$ . Es diu que el sòlid és un rotor simètric per a Q en el pla  $(i, j)$ :

### "Rotor simètric per Q" en el pla $(i, j)$

Si per al punt Q les dirs.  $(i, j)$  són DPI amb mateix MPI ...



$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}}_{\text{no canvia si giren B avd dir. k}}$$

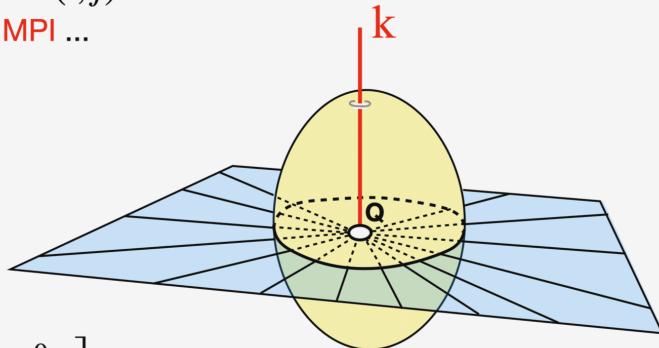
no canvia si giren B avd dir. k  
(és invariant a rotacions avd dir. k)

(\*) Vegeu demostració a Wikimec D5.4 → Propietat 4

Quan passa l'anterior, la direcció de qualsevol recta del pla  $(i,j)$  per  $\mathbf{Q}$  és DPI, amb MPI de valor  $I$ :

### "Rotor simètric per $\mathbf{Q}$ " en el pla $(i,j)$

Si per al punt  $\mathbf{Q}$  les dirs.  $(i,j)$   
són DPI amb mateix MPI ...



$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

Tota recta del pla  $(i,j)$  per  $\mathbf{Q}$  és DPI  
(amb moment inèrcia  $I$  al seu voltant)

És directe de veure que quan el sòlid és un rotor simètric per a un punt  $\mathbf{Q}$  en el pla  $(i,j)$ :

Si  $\bar{\Omega}_{RTQ}^{\text{sòlid}}$  és paral·lela al pla  $(i,j)$

↓  
Aleshores

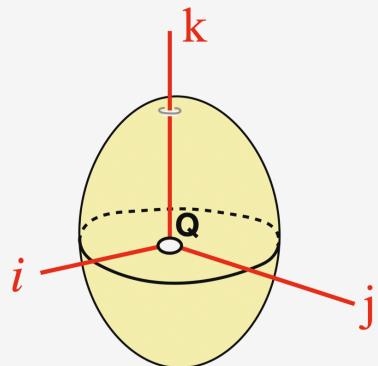
$$H_{RTQ}^{\text{sòlid}}(\mathbf{Q}) \parallel \bar{\Omega}_{RG}^{\text{sòlid}}$$

Això té implicacions dinàmiques que ja veurem ...

Ara que sabem què és un rotor simètric, ... que deu ser un rotor esfèric?

## "Rotor esfèric per Q"

Si per al punt **Q** les dirs.  $(i, j, k)$   
són DPI amb mateix MPI ...



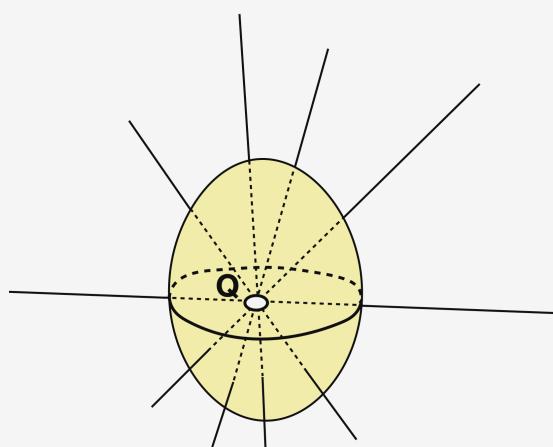
... el tensor a **Q** té la forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada

Quan passa això → diem que el sòlid és rotor esfèric per a **Q**.

En aquesta situació, la direcció de qualsevol recta per **Q**  
és DPI amb MPI de valor **I**:



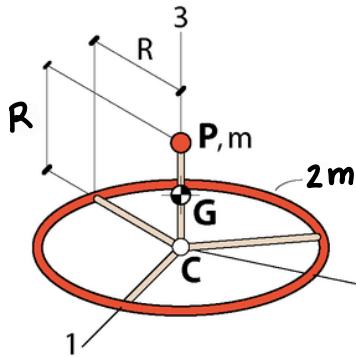
Qualsevol recta per **Q** és DPI  
( amb moment inèrcia **I** )

En un rotor esfèric  $\bar{H}_{RTQ}^{\text{sòlid}}(Q) \parallel \bar{\Omega}_{RTQ}^{\text{sòlid}}$  sempre!

Treballen aquest exemple:

### Exemple D5.9: rotor esfèric

El sòlid està format per una anella homogènia, de massa  $2m$ , i una partícula  $\mathbf{P}$  de massa  $m$ . Les barres que uneixen aquests elements són de massa negligible.



El tensor a  $\mathbf{C}$  és la suma de dos tensors:

$$\text{II}(\mathbf{C}) = \text{II}^{\text{part}}(\mathbf{C}) + \text{II}^{\text{anella}}(\mathbf{C}).$$

El de la partícula és immediat:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1(\mathbf{P}) = \delta_2(\mathbf{P}), \delta_3(\mathbf{P}) = 0 \\ x_1(\mathbf{P}) = x_2(\mathbf{P}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow [\text{II}^{\text{part}}(\mathbf{C})]_B = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ja que l'anella és un sòlid pla i simètric respecte de l'eix 1 o del 2, la propietat 1 i la propietat 3 condueixen a:

$$[\text{II}^{\text{anella}}(\mathbf{C})]_B = \begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 \\ 0 & 0 & 2I_a \end{bmatrix}.$$

El sòlid és un rotor simètric per a  $\mathbf{C}$  ja que té dos moments principals iguals:

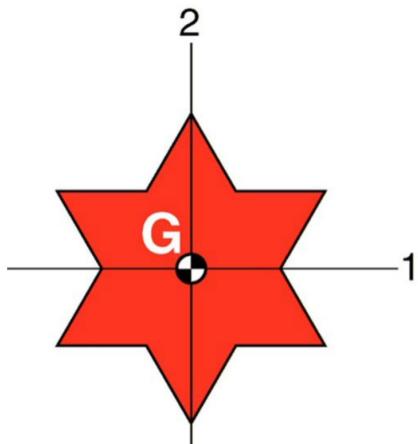
$$[\text{II}(\mathbf{C})]_B = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 \\ 0 & 0 & 2I_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p + I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_p + I_a & 0 \\ 0 & 0 & 2I_a \end{bmatrix}.$$

L'expressió quantitativa del tensor no requereix acudir a les taules:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1(\mathbf{P}) = \delta_2(\mathbf{P}) = R \\ \delta_3(\text{dm} \in \text{anella}) = R \Rightarrow 2I_a = 2mR^2 \end{array} \right\} \Rightarrow [\text{II}(\mathbf{C})]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} mR^2$$

Es tracta d'un rotor esfèric, i per tant  $\overline{\mathbf{H}}_{RTC}(\mathbf{C})$  sempre és paral·lel a  $\overline{\boldsymbol{\Omega}}_T^S$ :  
 $\overline{\mathbf{H}}_{RTC}(\mathbf{C}) = \text{II}(\mathbf{C}) \overline{\boldsymbol{\Omega}}_T^S = 2mR^2 \overline{\boldsymbol{\Omega}}_T^S$ .

T és la RG habitual en aquesta assignatura



La peça plana és homogènia. Fes l'avaluació qualitativa de  $\text{II}(G)$ .

En ser un sòlid pla, dir. 3 és DPI, i  $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ . A més, en ser l'eix 2 de simetria,  $I_{12} = 0$ . Per tant :

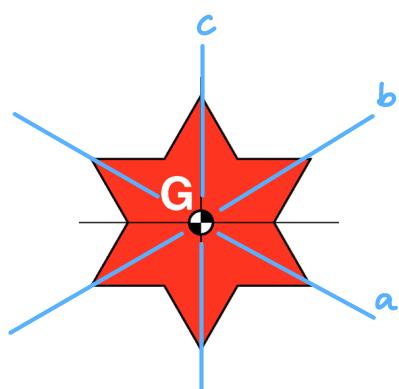
$$[\text{II}(G)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

Am bé,  $I_{11} \geq I_{22}$ ? A priori, és difícil de saber!

Però es pot invocar la següent propietat (\*):

PROPIETAT (Equidistribució de massa al voltant de 3 eixos copланaris)

Quan un sòlid té 3 o més moments d'inèrcia en un matríx pla ij iguals per a un punt O, també és un rotor simètric per a O.

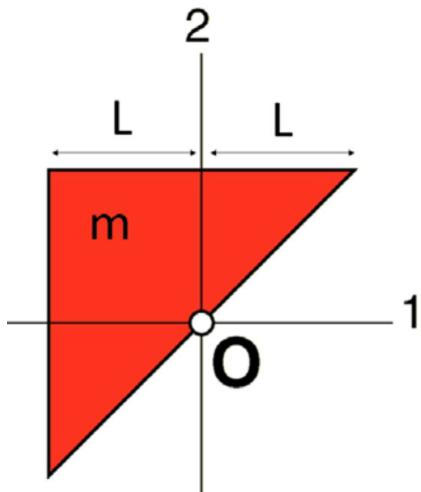


Clarament,  $I_{aa} = I_{bb} = I_{cc}$   
i, per l'anterior propietat, el sòlid és un rotor simètric a G:

$$[\text{II}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

Rotor Simètric a G

(\*) La demostració és feixuga i ens la saltarem



La placa triangular, de massa  $m$  i costats  $2L$ , és homogènia.

Fes l'avaluació de  $\mathbb{II}(O)$ :

- qualitativa.
- quantitativa.

Amb aquest comencem a practicar l'aval. quantitativa

Però sempre cal començar per la qualitativa !

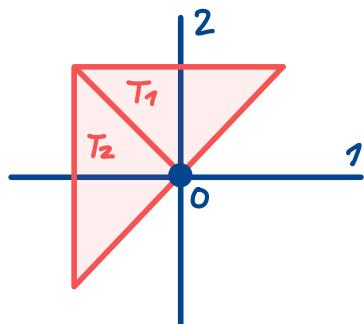
### Tensor qualitatiu

Figura plana. Tensor té la forma

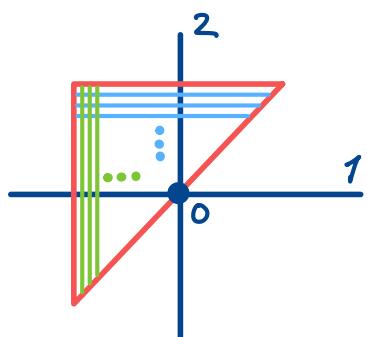
$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

Però  $I_{12} = 0$ , perquè els triangles  $T_1$  i  $T_2$  tenen, cadascun,

producte d'inèrcia ( $1,2$ ) nul degut a les simetries respecte els eixos 1 i 2.



A més,  $I_{11} = I_{22}$ , ja que els dm blaus i verds tenen la mateixa contribució a  $I_{11}$  i  $I_{22}$ , respectivament



Ergo tensor qualitatiu és :

$$[\mathbb{II}(O)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

rotor  
simètric  
a 0

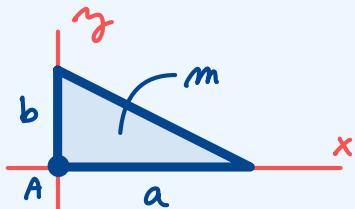
## Tensor quantitatiu

Els moments i productes d'inèria dels sòlids més habituals estan tabulats (vegeu formulari) però el sòlid que estigem estudiant sovint serà una combinació dels sòlids tabulats, i el punt o els eixos indicats a la taula podrien no coincidir amb els que ens calen. Caldrà aplicar la taula amb habilitat, i per a això:

Els clau haver determinat abans la forma qualitativa del tensor

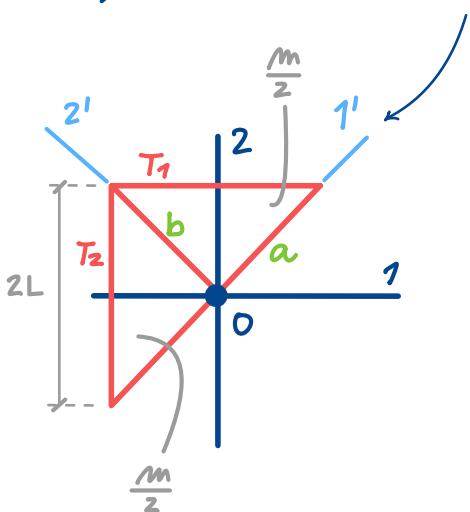
!

Per a l'exm. anterior momèns ens cal  $\mathbf{I}$ . De la taula veiem que:



$$\mathbf{II}(A) = \begin{cases} I_{xx} = \frac{1}{6}mb^2 & (\blacksquare) \\ I_{xy} = -\frac{1}{12}mab \end{cases}$$

Els eixos  $x, y$ , i el punt  $A$  de la taula no coincideixen amb els que tenim, però el nostre sòlid és rotor simètric! Per tant, el tensor en  $B' = (1', 2', 3)$  també serà  $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$



Veient el sòlid com  $T_1 + T_2$ , i aplicant  $(\blacksquare)$  a  $T_1$  i  $T_2$ :

$$I = I_{1'} = 2 \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{m}{2} \right) \left( \frac{2L}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \frac{1}{3} mL^2$$

2 triangles  
massa de 1 triangle  $b$

En conclusió:

$$[\mathbf{II}(O)]_B = \frac{mL^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## Teorema de Steiner

No sempre tindrem tanta sort! Sovint passarà que el punt al qual referim el tensor és diferent del de la taula. Afortunadament, el teorema de Steiner ens permet fer "canvis de punt":

$$\underline{\underline{I}}(Q) = \underline{\underline{I}}(G) + \underline{\underline{I}}^\oplus(Q)$$

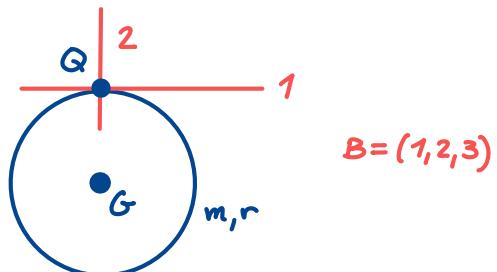
Tensor per  
al punt Q  
del sòlid

Tensor per  
al centre  
d'inèrzia G

Tensor a Q de tota  
la massa del sòlid  
concentrada a G.

Exemple:

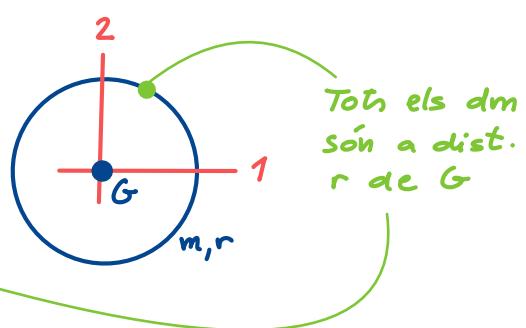
Per a l'anell de la fig., homogeni  
de massa m, calculen  $[\underline{\underline{I}}(Q)]_B$



El tensor a G es fàcil:

$$[\underline{\underline{I}}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

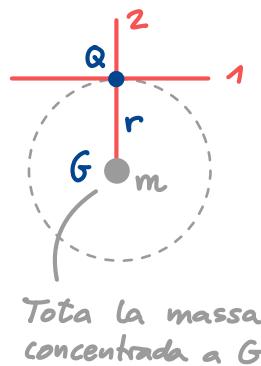
$\parallel I_{33} = mr^2$



El tensor a Q s'obté via Steiner:

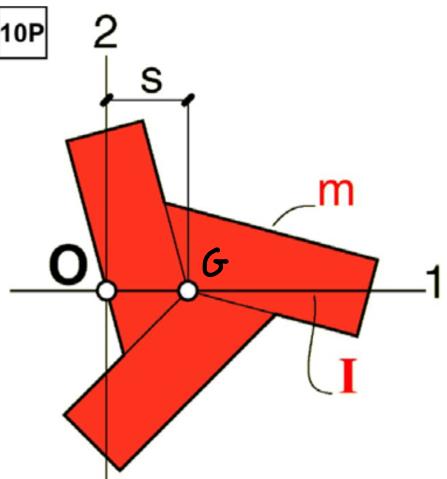
$$[\underline{\underline{I}}(Q)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & \frac{mr^2}{2} & mr^2 \\ & \frac{mr^2}{2} & \\ & & mr^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{I}}(G)} + \underbrace{\begin{bmatrix} mr^2 & 0 & mr^2 \\ & mr^2 & \\ & & mr^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{I}}^\oplus(Q)} =$$

$$= mr^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$



Practiquem Steiner una mica més:

10P

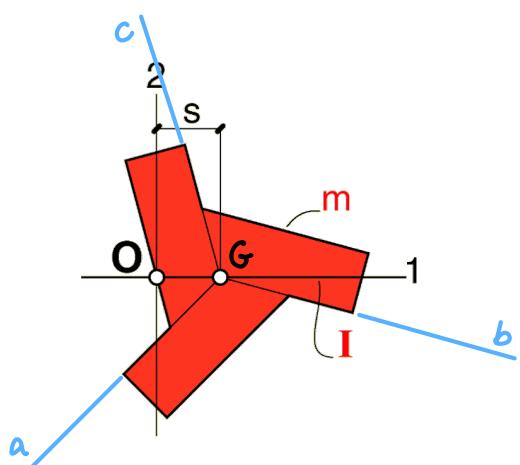


La peça de massa  $m$  és homogènia. El seu moment d'inèrcia respecte de l'eix 1 és  $I$ . Fes l'avaluació qualitativa de  $\text{II}(O)$ .

$(G$  és, clarament, el centre d'inèrcia del sólid)

Sòlid pla  $\Rightarrow$  Dir. 3 és DPI (independentment del punt triat)

Tenim 3 eixos del pla 12 amb = moment d'inèrcia ( $a, b, c$ )



però passen per  $G$ , no per  $O$ .  
És a dir, el sólid és rotor simètric per a  $G$ , amb

$$[\text{II}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

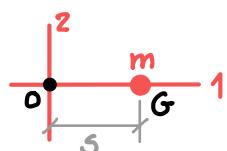
En ser rotor simètric, el moment d'inèrcia respecte qualquer eix del pla (1,2) que passi per  $G$  és igual. Com que ens donen el moment resp. d'eix 1 (que és  $I$ ), utilitzarem aquest a  $[\text{II}(G)]_B$ .

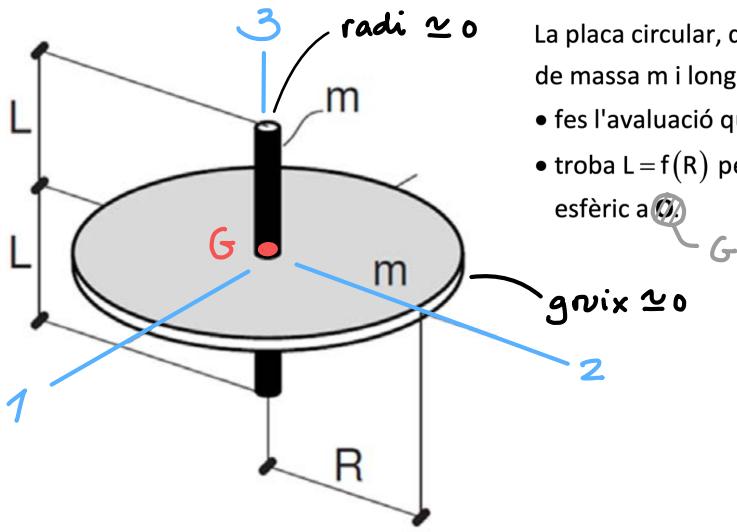
Ara només cal aplicar Steiner per obtenir  $[\text{II}(o)]_B$ :

$$[\text{II}(o)]_B = [\text{II}(G)]_B + [\text{II}^\oplus(o)]_B =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & ms^2 & ms^2 \\ ms^2 & I & 0 \\ ms^2 & 0 & I \end{bmatrix}}_{\text{Tota la massa concentrada a } G} = \begin{bmatrix} I & I+ms^2 & 2I+ms^2 \\ I+ms^2 & I & 0 \\ 2I+ms^2 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Tota la massa concentrada a  $G$



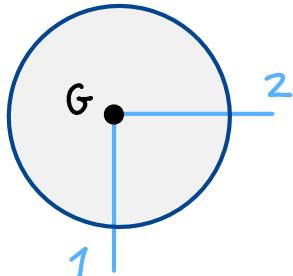


La placa circular, de massa  $m$  i radi  $R$ , i la barra, de massa  $m$  i longitud  $2L$ , són homogènies.

- fes l'avaluació qualitativa de  $\text{II}(G)$ .
- troba  $L = f(R)$  per tal que el peça sigui rotor esfèric a la

$$[\text{II}(G)]_B = [\text{II}_{\text{disc}}(G)]_B + [\text{II}_{\text{barra}}(G)]_B =$$

Disc

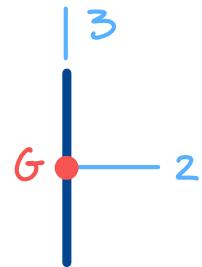


$$[\text{II}_{\text{disc}}(G)]_B = \begin{bmatrix} I' & I' \\ I' & 2I' \end{bmatrix} =$$

$$I' = \frac{1}{4}mR^2 \quad (\text{taula: disc homog.})$$

$$= \frac{mR^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Barra



$$[\text{II}_{\text{barra}}(G)]_B = \begin{bmatrix} I'' & I'' \\ I'' & 0 \end{bmatrix} =$$

$$I'' = m \left( \frac{1}{4}0^2 + \frac{(2L)^2}{12} \right) = \frac{mL^2}{3}$$

$$= \frac{mL^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} & \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} \\ \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} & 2 \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix}$$

Han de ser = perquè sigui rotor esfèric

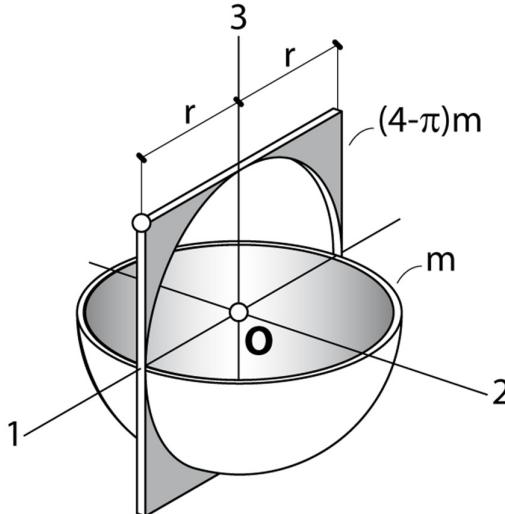
Caldrà que

$$\frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} = \frac{mR^2}{2}$$

$$3R^2 + 4L^2 = 6R^2$$

$$4L^2 = 3R^2$$

$$L = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$



**IV [4p]** El sòlid està format per una placa prima quadrada amb un forat circular, i una semiclosca esfèrica prima. Totes dues peces són homogènies. La closca té massa  $m$ , i la placa foradada té massa  $(4 - \pi)m$ . Quin és el tensor d'inèrcia al punt  $\mathbf{O}$ ? Fes-ne primer l'avaluació qualitativa, i després la quantitativa.

NOTA: El forat és equivalent a un disc de massa negativa.

## RESOLUCIÓ

### Avaluació qualitativa

$$[\mathbf{II}_{\text{placa}}(\mathbf{O})] + [\mathbf{II}_{\text{closca}}(\mathbf{O})] = \begin{bmatrix} I' & 0 & 0 \\ 0 & 2I' & 0 \\ 0 & 0 & I' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I'' & 0 & 0 \\ 0 & I'' & 0 \\ 0 & 0 & I''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'+I'' & 0 & 0 \\ 0 & 2I'+I'' & 0 \\ 0 & 0 & I'+I''' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

És clar que  $I_{11} < I_{22}$ , però no és evident si  $I_{33}$  és més gran o més petit que  $I_{11}$  o  $I_{22}$ .

### Avaluació quantitativa

El tensor d'inèrcia de la placa foradada es pot obtenir superposant el d'una placa quadrada sense forat, amb massa  $m_1$ , i el d'una placa circular amb massa  $m_2$  negativa (equivalent al forat):

La relació de masses ( $m_1/|m_2|$ ) ha de ser la mateixa que la de les àrees d'aquestes dues peces: (\*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1}{|m_2|} &= \frac{(2r)^2}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi} \\ m_1 - |m_2| &= (4 - \pi)m \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_1 = 4m, m_2 = \pi m$$

$$[\mathbf{II}_{\text{placa}}(\mathbf{O})] = \frac{1}{3}m_1r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}m_2r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}4mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\pi mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per altra banda, les taules diuen que la closca és un rotor esfèric a  $\mathbf{O}$ . Per tant:

$$[\mathbf{II}_{\text{closca}}(\mathbf{O})] = \frac{2}{3}mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \text{ Sumant els dos tensors:}$$

$$[\mathbf{II}(\mathbf{O})] = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}, \text{ amb } I_{11} = I_{33} = \left( \frac{16 - 3\pi}{12} \right) mr^2 + \frac{2}{3}mr^2 = \left( \frac{8 - \pi}{4} \right) mr^2, I_{22} = \left( \frac{20 - 3\pi}{6} \right) mr^2$$

(\*)

Ja que  $\left| \begin{array}{l} m_1 = \sigma A_1 \\ m_2 = \sigma A_2 \end{array} \right.$  (on  $\sigma$  és la densitat de massa ( $\text{kg/m}^2$ ))

## Annex I : Significat físic dels moments d'inèrcia

Com ja sabeu, la massa d'un sólid  $S$  dóna idea de la dificultat que suposa accelerar el centre d'inèrcia de  $S$ . Clarament, pel teorema de la quantitat de moviment sabem que

$$\sum \bar{F}_{\text{ext} \rightarrow S} = m \cdot \bar{a}_{\text{RGal}}(G)$$

massa de  $S$

Força resultant sobre  $S$       Accel. del centre d'inèrcia de  $S$

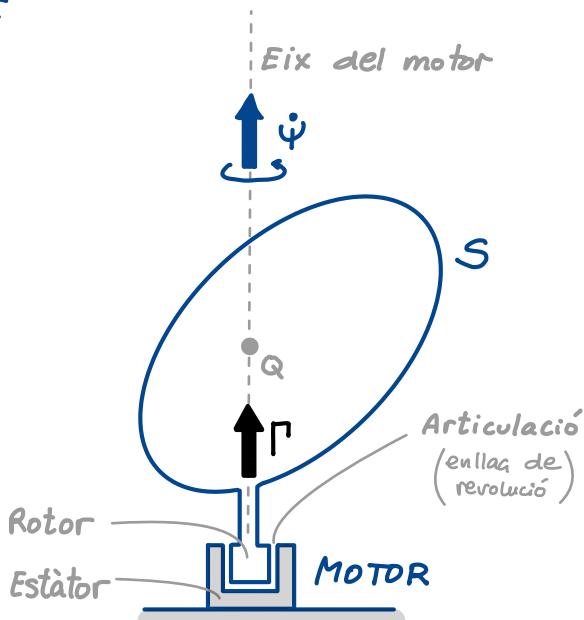
i, per tant, a major  $m$ , major serà la força resultant que caldrà aplicar per assolir una acceleració donada.

Anàlogament, el moment d'inèrcia de  $S$  respecte d'un cert eix dóna idea de la dificultat d'accelerar  $S$  angularment al voltant d'aquest

eix. Això és així perquè, si l'eix es pensa com el d'un motor articulat amb  $S$ , l'eq. del moviment de l'angle  $\psi$  girat per  $S$  al voltant de l'eix és

$$\tau = I \ddot{\psi} \quad (\square)$$

on



$I$  = moment d'inèrcia del sólid respecte de l'eix

$\tau$  = parell motor aplicat sobre el sólid  
(paral·lel a l'eix)

Clarament, com major sigui  $I$ , major serà el parell  $\tau$  requerit per a produir una certa acceleració  $\ddot{\psi}$ .

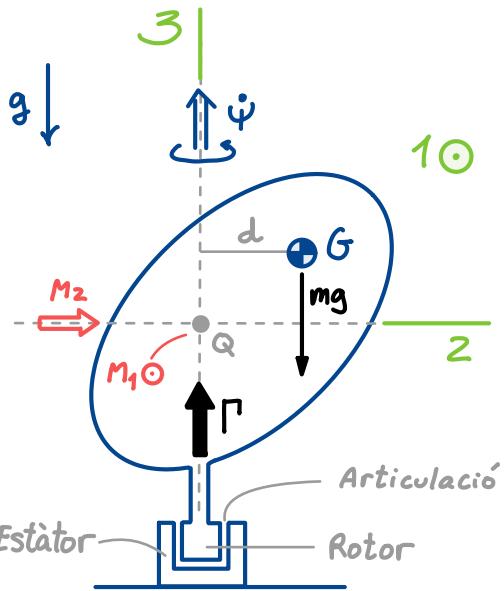
## Demostració de (□)

Aplicant el teorema del moment cinètic a  $Q$  per a sistema  $= S$ , tenim

$$\sum \bar{M}_{ext}(Q) = \dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$$

L'articulació aplica moments d'enllaç en les direccions 1 i 2, i el motor aplica un parell  $\Gamma$  en dir. 3.  
El pes només genera un moment en dir. 1.

Ergo :



$$B = (1, 2, 3)$$

$$\text{Gira amb } \bar{\omega}_T^B = (\Gamma \dot{\psi})$$

$$\left\{ \sum \bar{M}_{ext}(Q) \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} M_1 - mgd \\ M_2 \\ \Gamma \end{matrix} \right\} \quad (A)$$

En la comp. 3 no hi ha forces d'enllaç  $\rightarrow TMC(Q)_3$   
dóna l'equació del moviment per a  $\psi$ .

Ara:

$$\left\{ \bar{H}_{RTQ}(Q) \right\}_B = \begin{bmatrix} * & * & I_{13} \\ * & * & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{13} \dot{\psi} \\ I_{23} \dot{\psi} \\ I_{33} \dot{\psi} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q) \right\}_B = \begin{Bmatrix} I_{13} \ddot{\psi} \\ I_{23} \ddot{\psi} \\ I_{33} \ddot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{13} \dot{\psi} \\ I_{23} \dot{\psi} \\ I_{33} \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{13} \ddot{\psi} - I_{23} \dot{\psi}^2 \\ I_{23} \ddot{\psi} - I_{13} \dot{\psi}^2 \\ I_{33} \ddot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (B)$$

Igualant la 3a component de (A) amb la de (B) obtenim l'equació (□) que volíem demostrar.