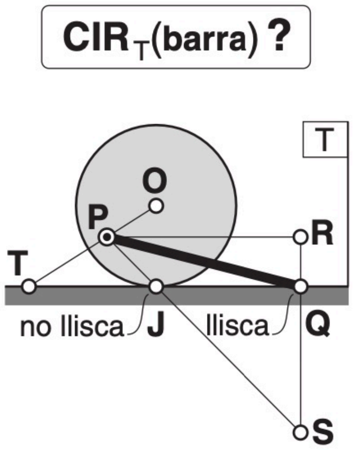
# 6P

# Cinemàtica del sòlid rígid 2D

(inclou cinemàtica de vehicles)

Roda amb barra articulada – Q10 abril 2015

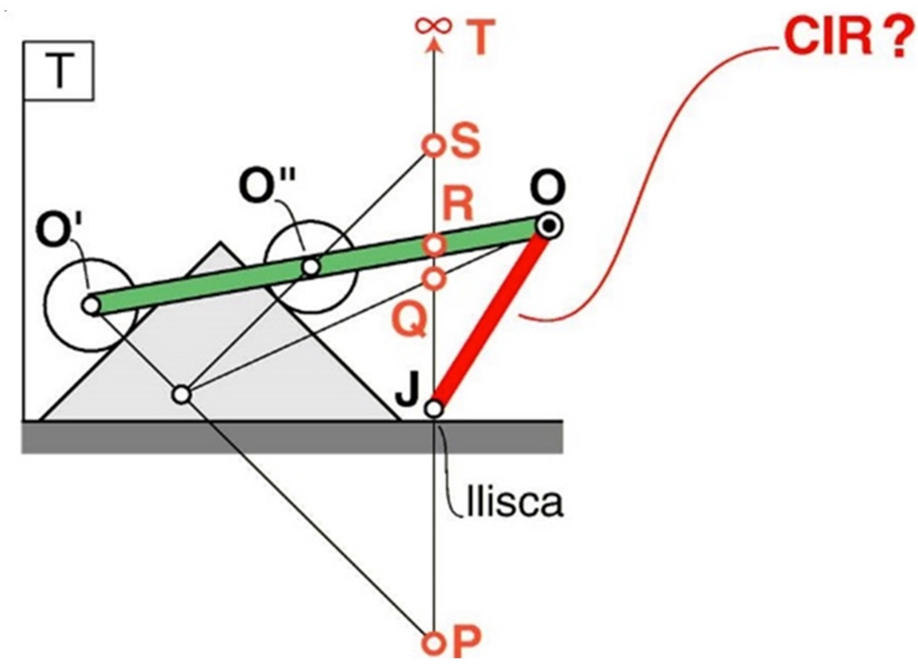



**10** La roda es mou sense lliscar sobre el terra. La barra està articulada a la roda en el punt **P** i el seu extrem **Q** llisca sobre el terra. Quin és el Centre Instantani de Rotació de la barra PQ respecte al terra?

**A** **R**
**B** **O**
**C** **T**
**D** **J**
**E** **S**

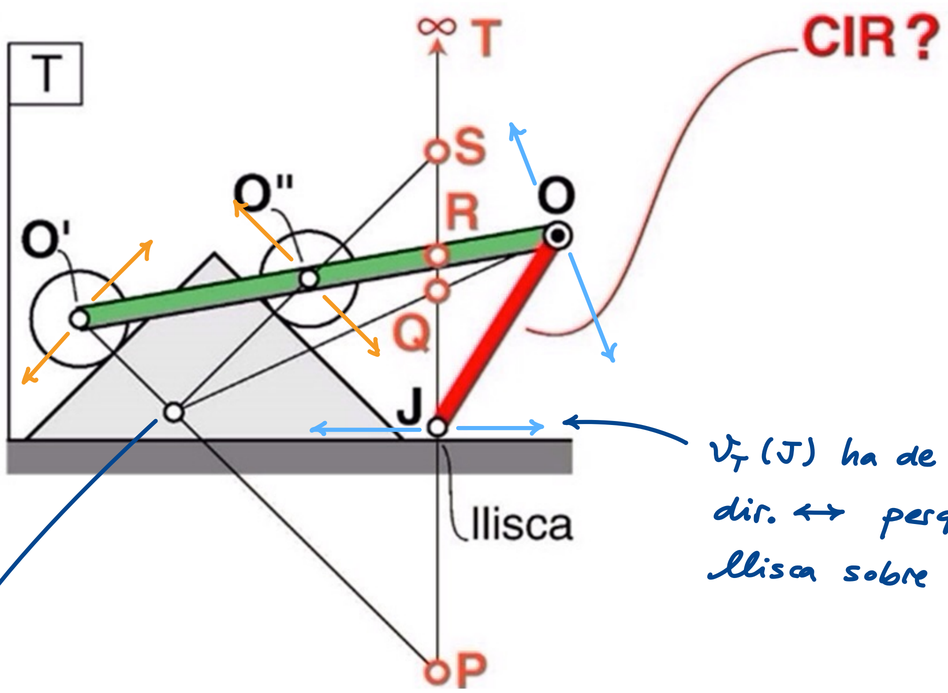
CIR barra vermella

Quin és el CIR de la barra vermella respecte T?




6P'

Sol.



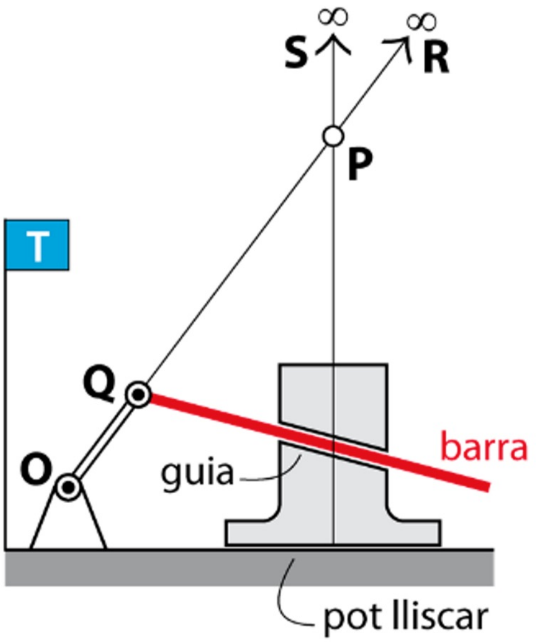

$v_T(J)$ ha de ser en dir. ↔ perquè J llisca sobre el terra

$CIR_T\left(\begin{smallmatrix}\text{Barra}\\\text{verda}\end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \bar{v}_T(O)$ és ↕

$\bar{v}_T(J)$ és ↔

$\Rightarrow CIR_T\left(\begin{smallmatrix}\text{Barra}\\\text{vermella}\end{smallmatrix}\right) = Q$

Barra amb enllaços de revolució i prismàtics




$CIR_T^{barra}$ ?

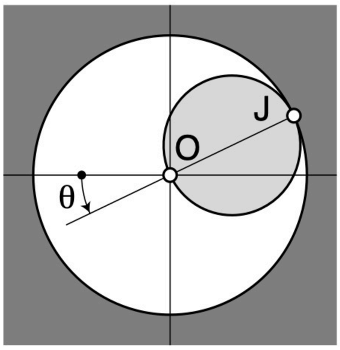
6P'

Sol.

La barra vermella només es pot traslladar. No pot girar, perquè els 2 enllaços prismàtics no li ho permeten.

Vol dir que $\overline{\Omega}_T^{barra} = 0$. Això implica que el seu CIR és a l'$\infty$ (sobre un punt de la recta de l'$\infty$). Per altra banda $CIR_T^{barra}$ ha de ser sobre la recta OQ perquè Q té velocitat $\perp$ a aquesta recta. Per tant, $CIR_T^{barra}$ ha de ser el punt de l'$\infty$ de la recta OQ.

Disc en circumferència - Qüestions 3.3 i 3.4 MPSR




3.3 El disc de radi r rodola sense lliscar per l'interior de la circumferència fixa de radi 2r. Quina és la celeritat del punt O del disc?

A $0$
B $r\,\dot{\theta}$
C $r\,\dot{\theta}\,/\,2$
D $2\,r\,\dot{\theta}$
E $4\,r\,\dot{\theta}$

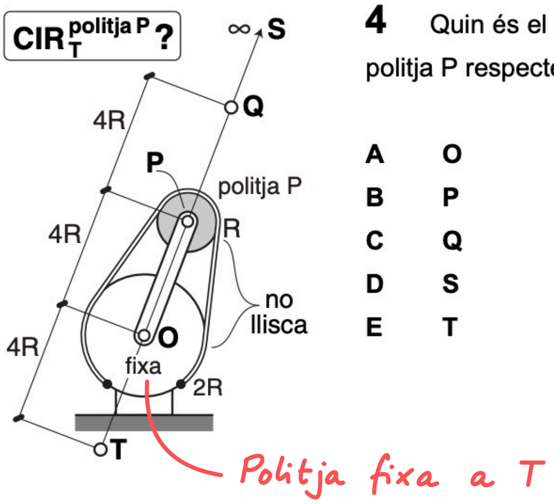
3.4 Per al sistema de la qüestió anterior i per a la configuració de la figura, quin és el mòdul de l'acceleració del punt J del disc?

A $0$
B $\infty$
C $r\,\dot{\theta}^2$
D $2\,r\,\dot{\theta}^2$
E $r\,\dot{\theta}^2\,\sqrt{2}$

Pista:

Clarament, el centre del disc descriu un mov. circular amb centre a O i radi R, de vel. angular $\odot\,\dot{\theta}$

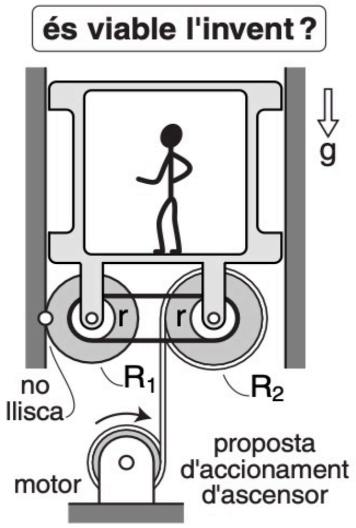
CIR Politja – Qüestió 4, oct 2012




**4** Quin és el Centre Instantani de Rotació del moviment de la politja P respecte al terra?

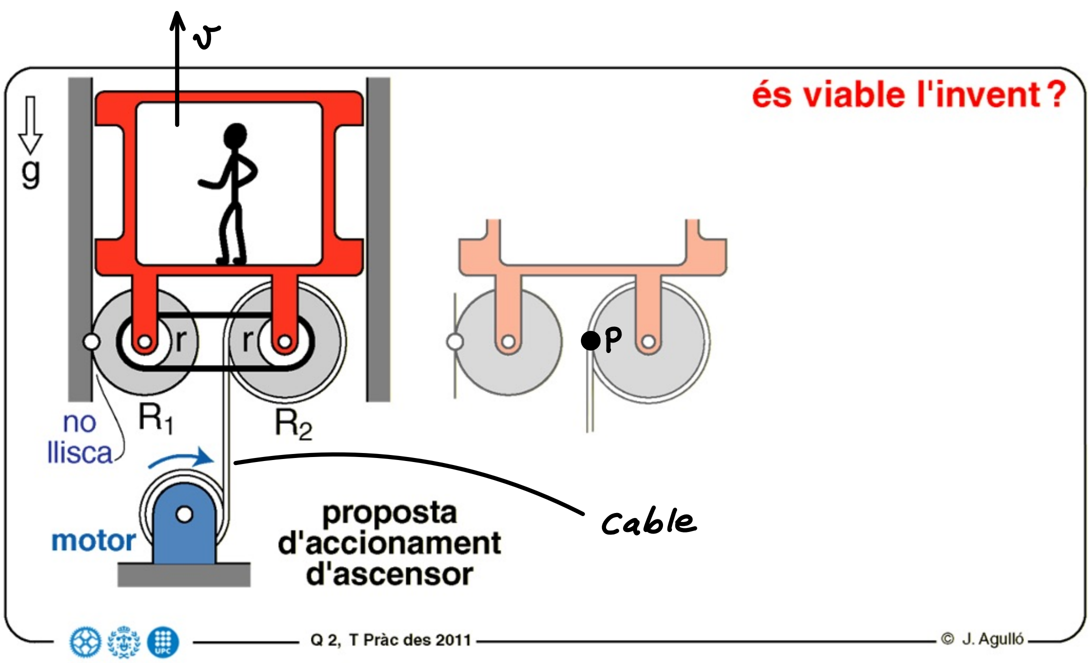
**A** O
**B** P
**C** Q
**D** S
**E** T

Ascensor - Test pràc. des. 2011



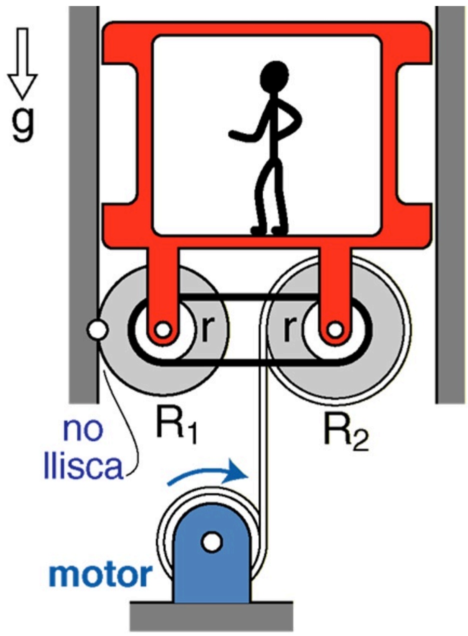

**2** Es proposa el mecanisme d'accionament d'un ascensor descrit a la figura. La roda de radi $R_1$ no llisca sobre la paret i és impulsada per la rotació de la roda de radi $R_2$ per mitjà de les politges de radi r, que són solidàries a les rodes. La roda de radi $R_2$ és impulsada pel motor per mitjà d'un cable enrotllat a la roda i al tambor del motor. És viable l'invent?

**A** No és viable.
**B** És viable si $R_1 = R_2$
**C** És viable si $R_1 > R_2$.
**D** És viable si $R_1 < R_2$.
**E** És viable per a qualsevol relació de radis.




Pista: Per a que sigui viable, quan la cabina puja amb vel. ↑v, el punt P ha de tenir vel. ↓, ja que el cable només pot estirar cap avall, no empènyer cap amunt.

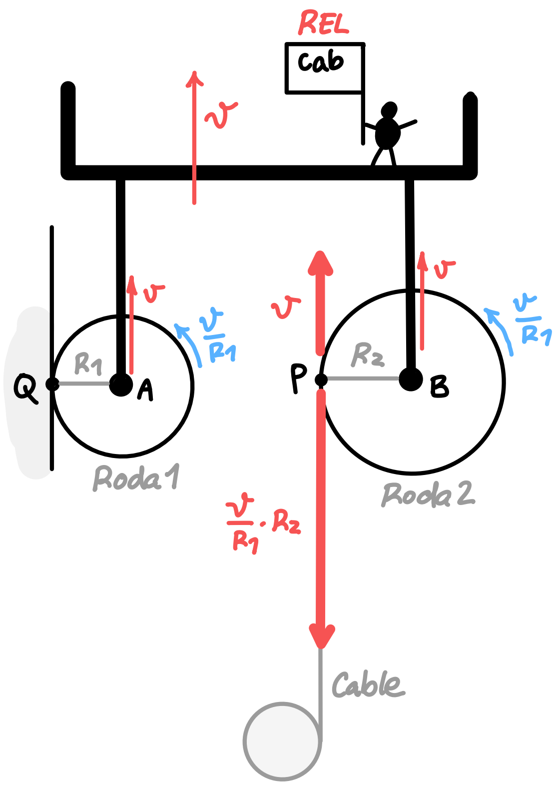
**Sol:**




Per a que funcioni, quan la cabina puja amb ↑$v$, la vel. de P ha de ser ↓ (el cable només pot estirar, no empènyer).

Suposem $\bar{v}_T(\text{Cabina}) = \uparrow v$

Calcularem $\bar{v}_T(P)$ i mirarem si pot ser cap ↓




AB = T, REL = Cab

$$\bar{v}_{AB}(P) = \underbrace{\bar{v}_{REL}(P)}_{\downarrow \frac{v}{R_1}\cdot R_2} + \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)}_{\uparrow v} =$$

$$\bar{\Omega}^{\text{Roda 1}}_{T} = \odot \underbrace{\frac{v}{R_1}}_{\parallel} \qquad \left(Q = \text{CIR}^{\text{Roda 1}}_{T}\right)$$

Cabina no gira resp. T → $\parallel$

$\bar{\Omega}^{\text{Roda 1}}_{\text{Cab}}$

Rel. transmissió 1 : 1 → $\parallel$

$\bar{\Omega}^{\text{Roda 2}}_{\text{Cab}}$

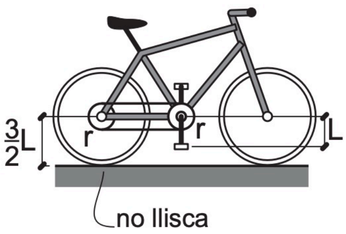
$$= \left(\frac{v}{R_1}\cdot R_2 \downarrow\right) - \left(\downarrow v\right) = v\left(\overbrace{\frac{R_2}{R_1} - 1}^{\text{Ha de ser } > 0}\right)\downarrow$$

$\frac{R_2}{R_1} - 1 > 0 \Rightarrow$ Cal $R_2 > R_1$ per a que funcioni

$\boxed{\text{RESP} = \text{D}}$

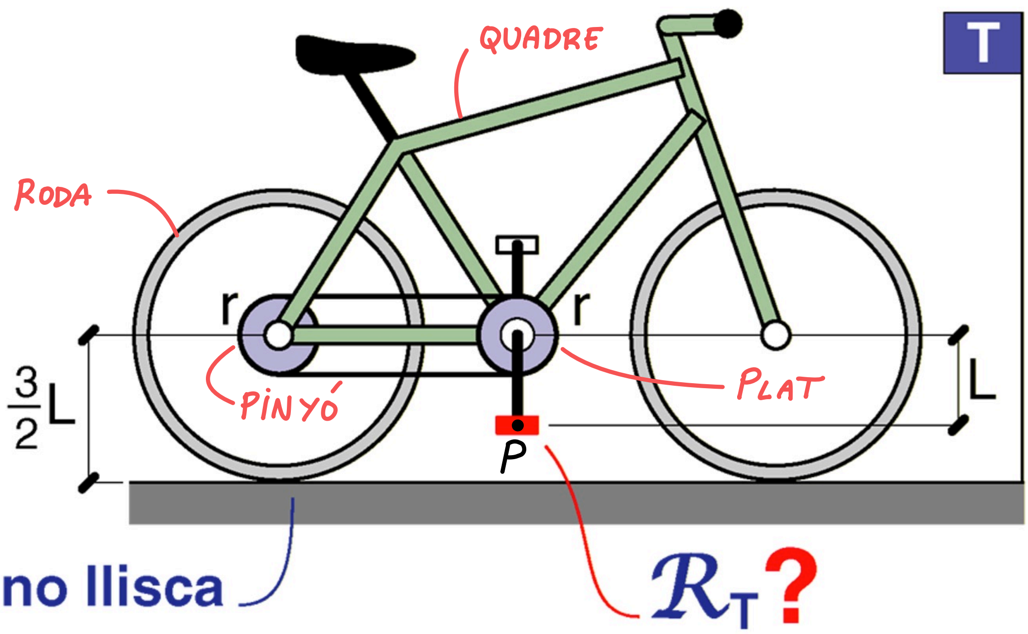
Si $R_2 < R_1$, quan cabina puja la $\bar{v}_T(P)$ és ↑. En tal cas, el cable hauria d'empènyer, i no pot perquè no és rígid.

Radi curvatura pedal - Qüestió 5, octubre 2004

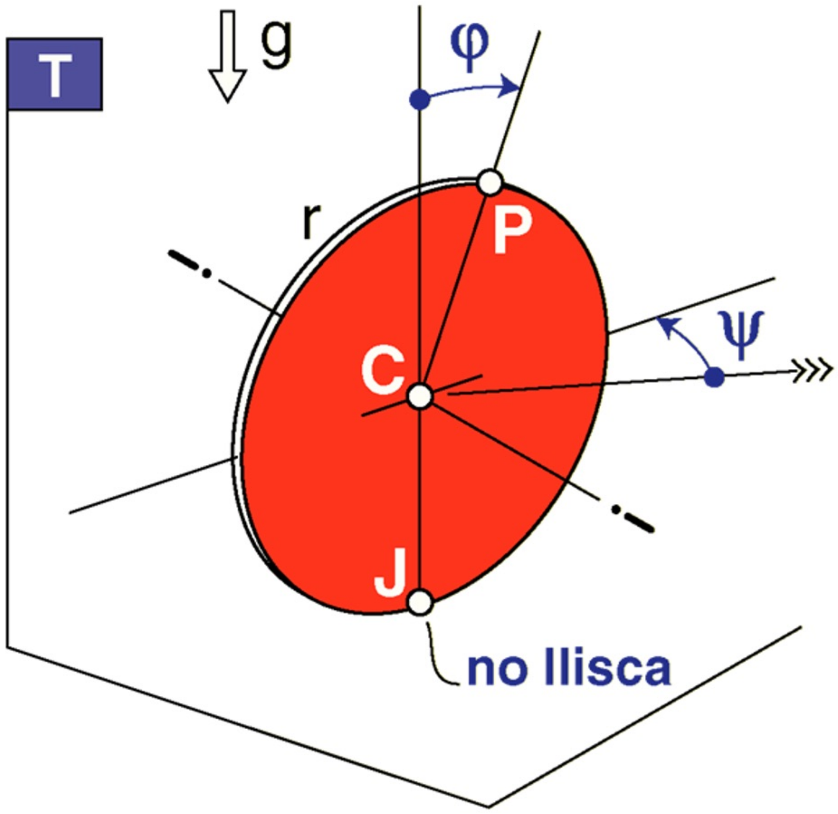



**5** En una bicicleta es fa servir un pinyó del mateix radi que el plat. El radi de la roda és 3/2 de la longitud de la manovella del pedal. Quin és el radi de curvatura de la trajectòria del pedal quan aquest passa per la posició més baixa?

| | |
|---|---|
| A | L |
| B | (1/2)L |
| C | (1/4)L |
| D | (2/3)L |
| E | (1/3)L |

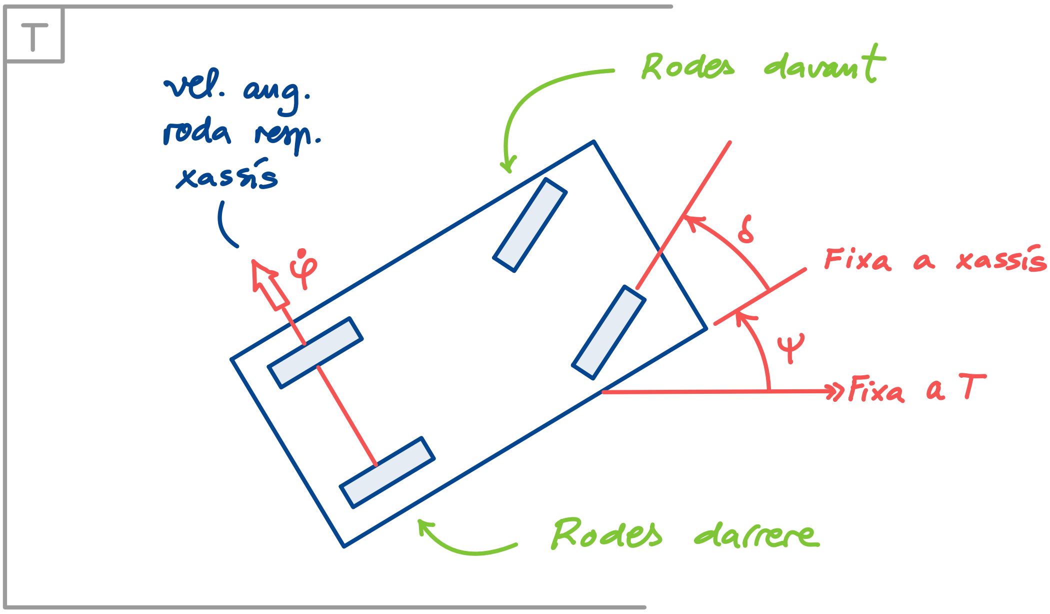


# Introducció a cinemàtica de vehicles




Començarem buscant la velocitat de C, que és un punt de la roda i també del xassís, partint de les velocitats angulars psipunt i phipunt de la roda. Veurem que l'expressió d'aquesta velocitat queda molt simple, només en funció de phipunt. Això ens permetrà fer anàlisis cinemàtiques ràpides de vehicles!

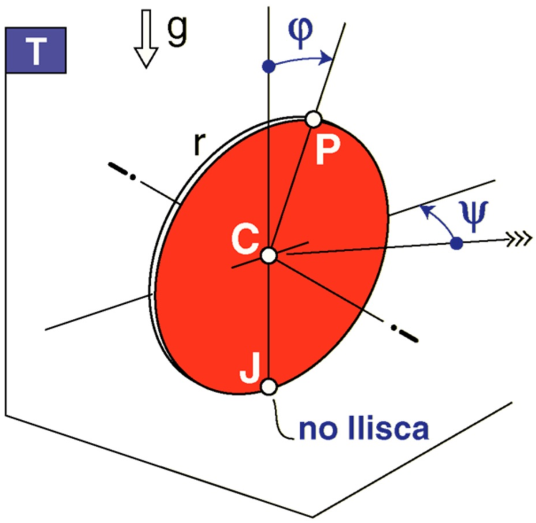
# Cinemàtica de vehicles




3 hipòtesis simplificadores

- Vehicle es mou en terra pla
- Veh. no té suspensions ⇒ Roda es manté en un pla vertical i només cal orientar-la amb 2 angles.

  Per la roda darrere serien $\psi$ i $\varphi$:

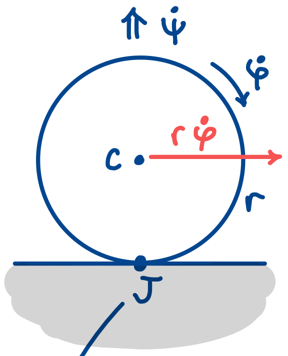



  Per la del davant serien $\psi+\delta$, $\varphi$

- Rodes primes → contacte puntual amb el terra. Permet introduir hipòtesi de no lliscament a J. Si el contacte fos en un segment de recta segur que hi hauria lliscament en alguns punts.

## Anàlisi cinemàtica roda del darrere:

Per la roda del davant surt el mateix!




Aplicant CSR a roda:

Que simple!

$$\bar{v}_T(C) = \cancel{\bar{v}_T(J)} + (\underbrace{\Uparrow\dot{\psi}} + \otimes\dot{\varphi}) \times (\uparrow r) = (\rightarrow r\dot{\varphi})$$

0!

Per la roda davant surt el mateix perquè en lloc de $\Uparrow\dot{\psi}$ tenim $\Uparrow(\dot{\psi}+\dot{\delta})$

J no és el CIR! Ho seria si el movim. roda fos pla. Però aquí és 3D!

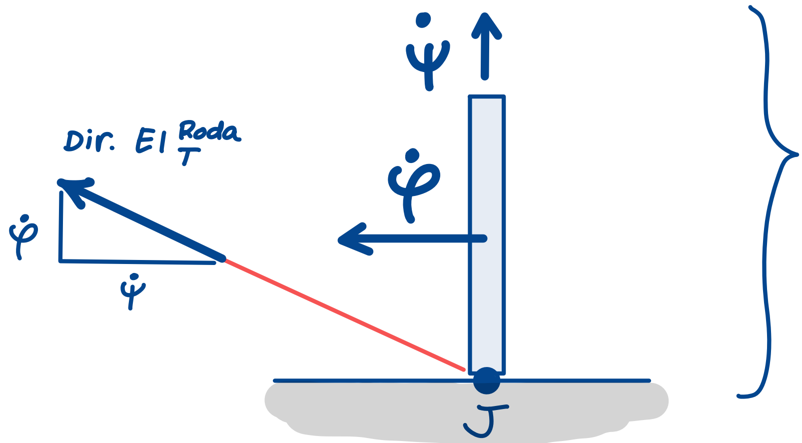
Per tant, $\rightarrow r\dot{\varphi}$ no és "distància al CIR · R", sinó el resultat d'aplicar CSR!

En fer anàlisi cinemàtica de veh. pensarem sempre en això $\forall$roda

És a dir: pensarem que el centre C de la roda té vel. $(\rightarrow r\dot{\varphi})$
Això ens permetrà fer anàlisis cinemàtiques ràpides perquè C sol ser, alhora, un punt del xassís (veure <u>qüestió del tricicle</u>)
(pàg. seg.)

<u>Observació:</u>

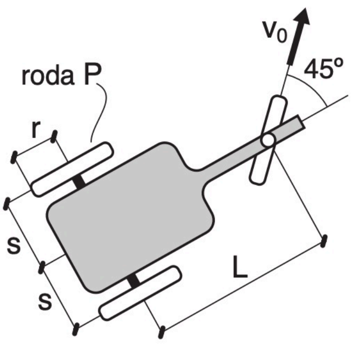
L'$EI_T^{roda}$ passa per J, però la roda té 2 GDL. La dir. de l'EI és $\bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\varphi}}$, per tant $EI_T^{roda}$ no queda determinat.
No ens seria útil. No cal que hi pensem!




Ni hi pensem!

Apliquem la teoria anterior al següent exemple:

Tricicle - Q5, març 2007




**5** En el tricicle de la figura, les rodes no llisquen damunt del terra. La roda directriu, de radi $r$, forma un angle de 45° amb l'eix longitudinal i el seu centre avança amb celeritat $v_0$. Quina és la velocitat de rotació de la roda P al voltant del seu eix?

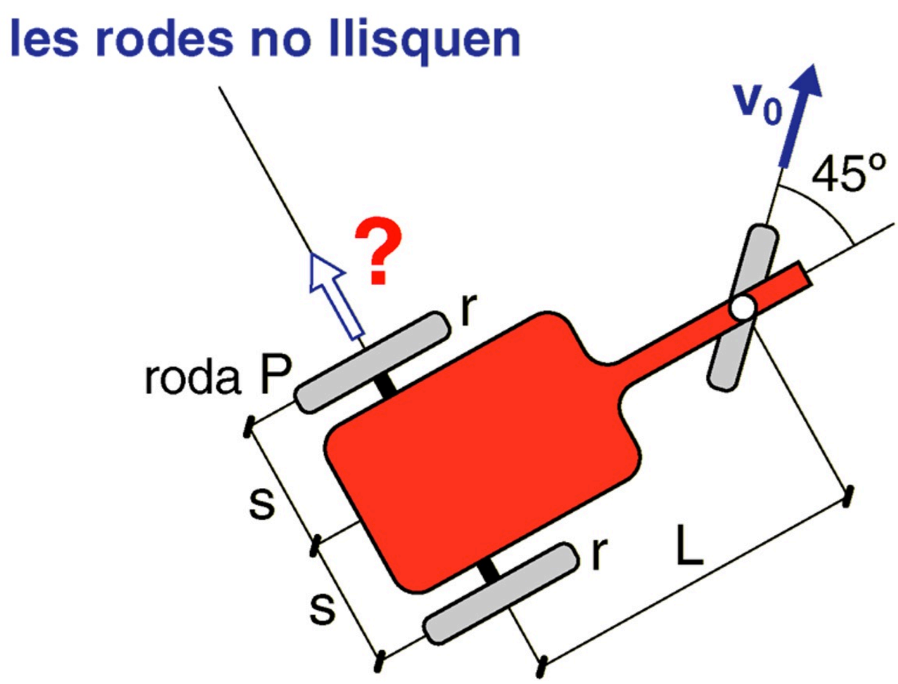
**A** $\frac{v_0}{r}$

**B** $\frac{v_0}{r\sqrt{2}}$

**C** $\frac{L-s}{L}\frac{v_0}{r\sqrt{2}}$

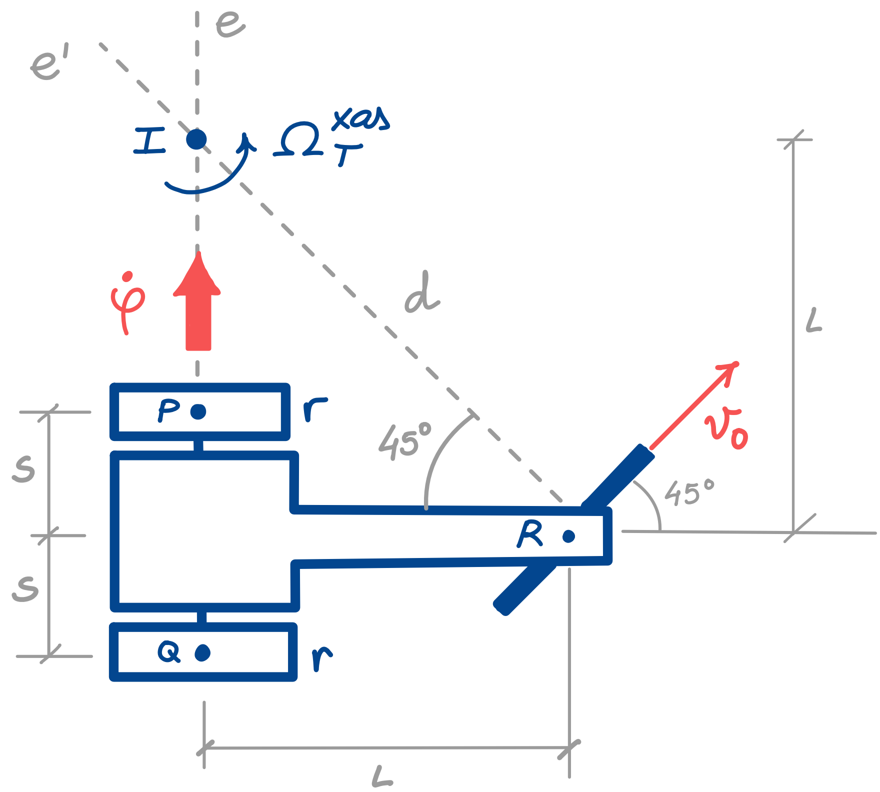
**D** $\frac{L-s}{L}\frac{v_0}{r}$

**E** $\frac{L+s\sqrt{2}}{L}\frac{v_0}{r}$



Solució:

$\dot{\varphi}$ ?




P, Q, R són punts de les respectives rodes, però també del xassís.

P i Q tenen vel. ⊥ eix e
R té vel. ⊥ eix e' $\Rightarrow$ $CIR_T^{xassís} = I$

Busquem $\Omega_T^{xas}$:

$$\Omega_T^{xas} = \frac{v_0}{d} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}}$$ "xas" = xassís

Ara, veient P com a punt de la roda:

$$v_T(P) = r \cdot \dot{\varphi} \qquad (I)$$

CSR roda

I veient P com del xassís:

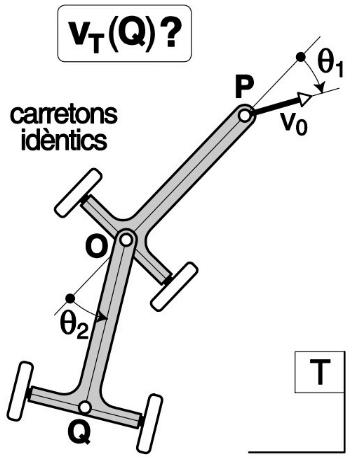
$$v_T(P) = \Omega_T^{xas} \cdot \underbrace{(L-s)}_{\text{dist. al CIR}} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}} \cdot (L-s) \qquad (II)$$

CSR xassís

I = II :

$$r\dot{\varphi} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}}(L-s) \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{v_0}{rL\sqrt{2}}(L-s)}$$

Carretons articulats - Q3, abril 2012




**3** Els dos carretons articulats a **O** són idèntics. Si el punt **P** es mou amb la velocitat $v_0$ indicada, amb quina celeritat es mou el punt **Q**?

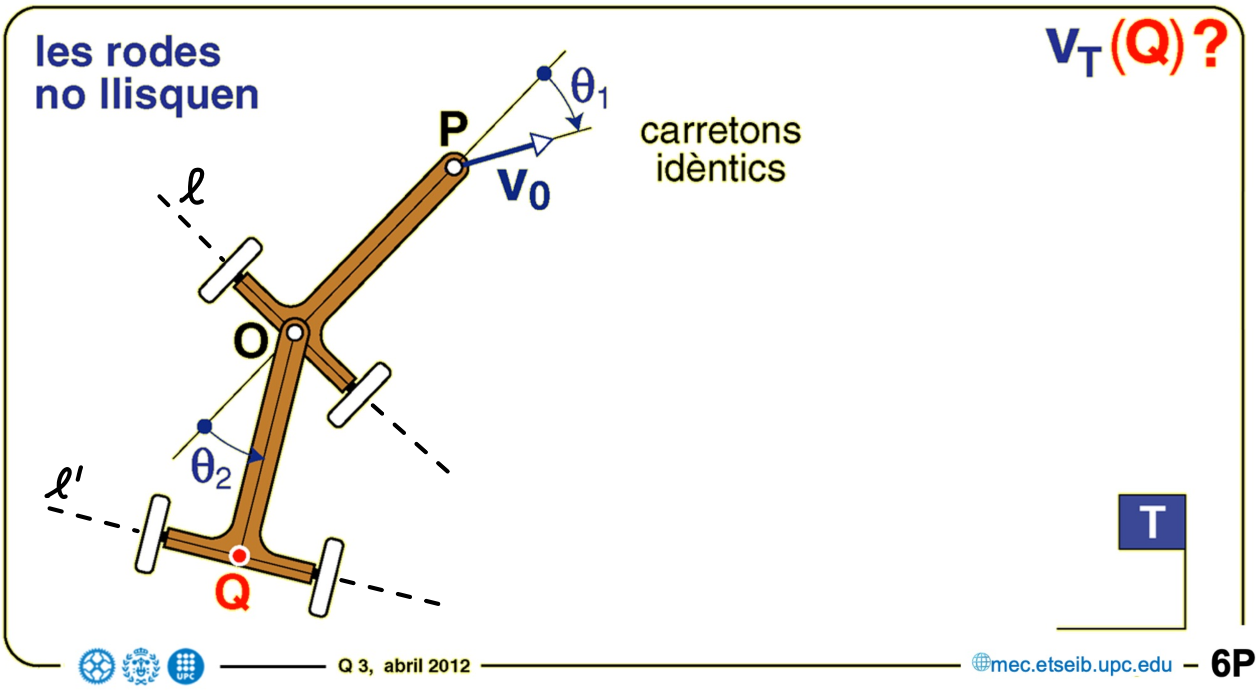
**A** $v_0$

**B** $v_0 \cos\theta_1$

**C** $v_0 \cos\theta_1 \cos\theta_2$

**D** $v_0 \cos\theta_1 / \cos\theta_2$

**E** $v_0 \cos\theta_2 / \cos\theta_1$

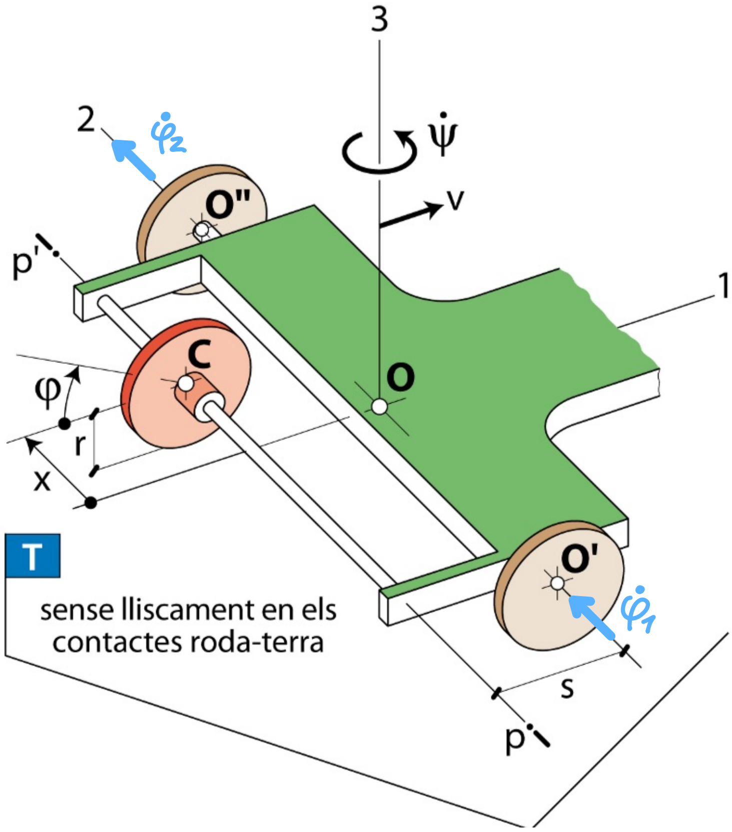


Vehicle amb tres rodes - RBK problema 3.25

**3.25** The vehicle moves on a horizontal ground. The three wheels do not slide on the ground. The wheel with center **C** rotates around the axis p–p′ parallel to **O**′ – **O**″. The speed $v_E(\mathbf{O})$ and the change of orientation $\dot{\psi}$ are variable.

Determineu:

- El nombre de GL del sistema.
- $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ en funció de $v$ i $\dot{\psi}$?
- $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ en funció de $v$ i $\dot{\psi}$?



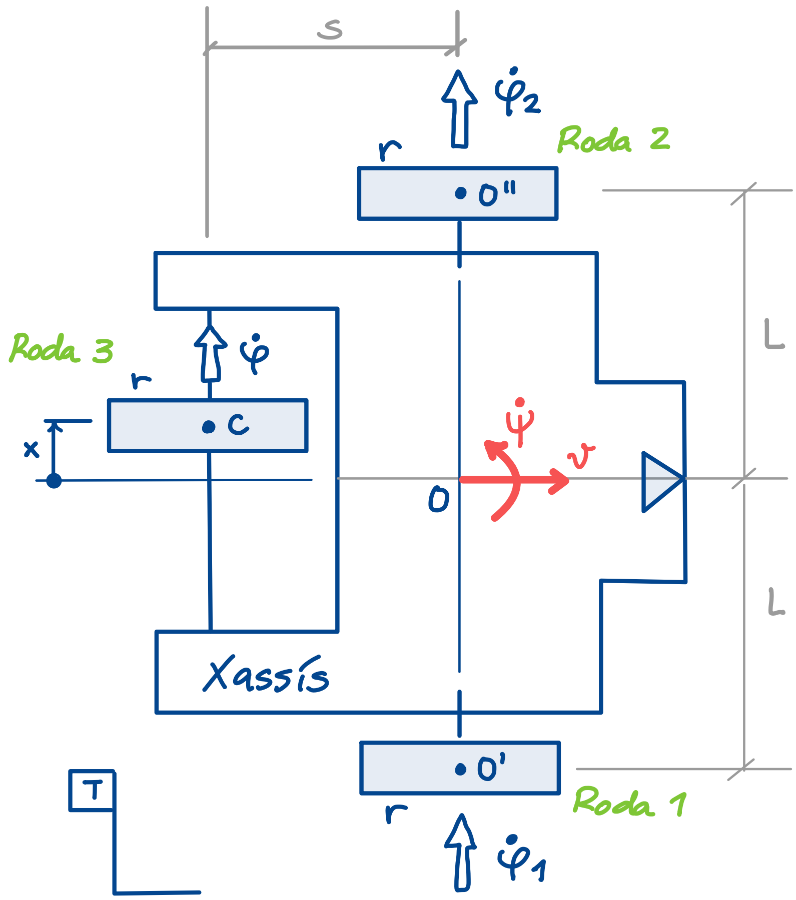

Motivació: Aplicació a pilotatge del vehicle

El vehicle es pot motoritzar de dues maneres

- Amb 2 motors que actuen $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ ← La més típica
- Amb 2 motors que actuen $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$

Si suposem que $v$ i $\dot{\psi}$ són consignes de velocitat donades per un joystick, per exemple, les funcions que ens demanen de trobar ens permeten convertir les comandes $v$ i $\dot{\psi}$ introduides al joystick en comandes de velocitat que han de satisfer els motors.

## GL sistema



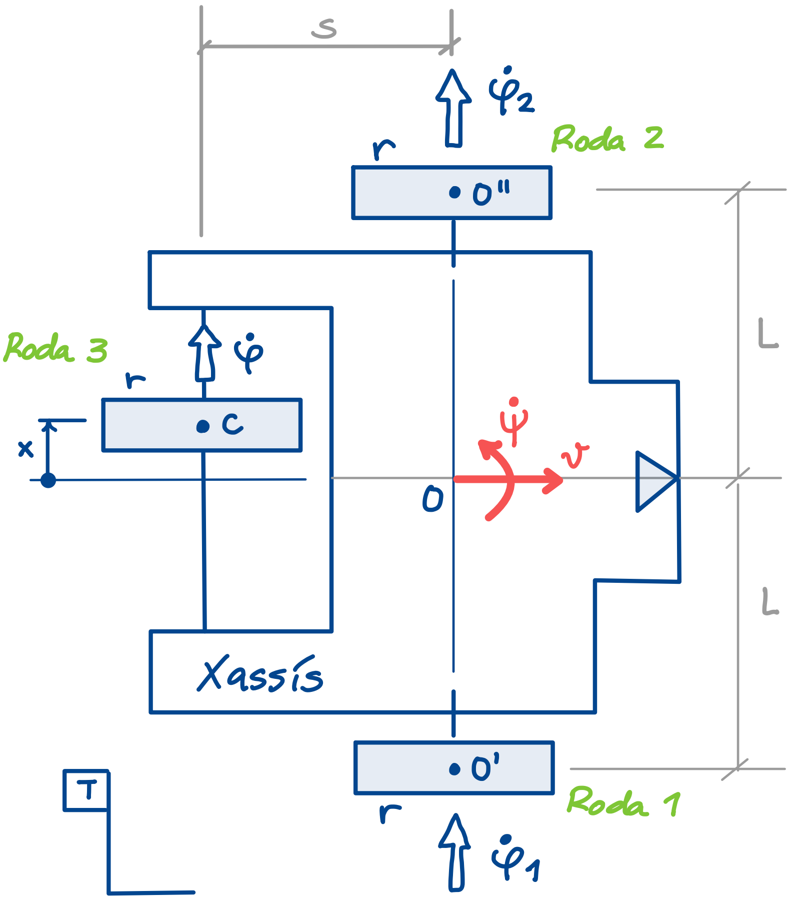

### Manera 1

Si bloquejo $\dot\psi$, xassís no pot girar però sí traslladar-se $\leftrightarrow$ (amb les rodes rodant sense lliscar). Si a més bloquejo $v$, ja res es pot moure. Per tant, el vehicle té 2 GL.

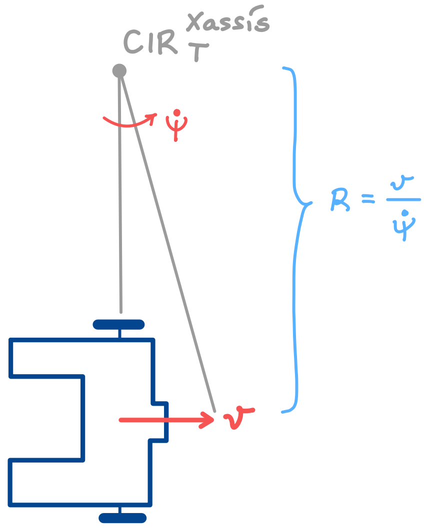
### Manera 2

Alternativament: si bloquejo $\dot x$, el punt C passa a ser del xassís, amb vel. $\rightarrow$. Els punts O' i O'' també tenen vel. $\rightarrow$. Ergo el $CIR_T^{xassís}$ és a l'$\infty$ i $\bar\Omega_T^{xassís} = \bar 0$. El vehicle es pot moure cap a $\rightarrow$. Si ara aturo $\dot\varphi$, tot queda aturat.

## $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ en funció de $(v, \dot{\psi})$




Fixem-nos que triant $(v, \dot{\psi})$ amb un joystick, estem triant la posició del CIR del xassís:




Via cinemàt. de roda

$$\bar{v}_T(O') = \underset{\longrightarrow}{r\dot{\varphi}_1}$$

$$\bar{v}_T(O'') = \underset{\longrightarrow}{r\dot{\varphi}_2}$$

Via CSR xassís

$$\bar{v}_T(O') = \bar{v}(O) + \bar{\Omega}^{xas}_T \times \overline{OO'} =$$

$$= (\underset{\longrightarrow}{v}) + (\odot\, \dot{\psi}) \times (\downarrow L) = \underset{\longrightarrow}{v + L\dot{\psi}}$$

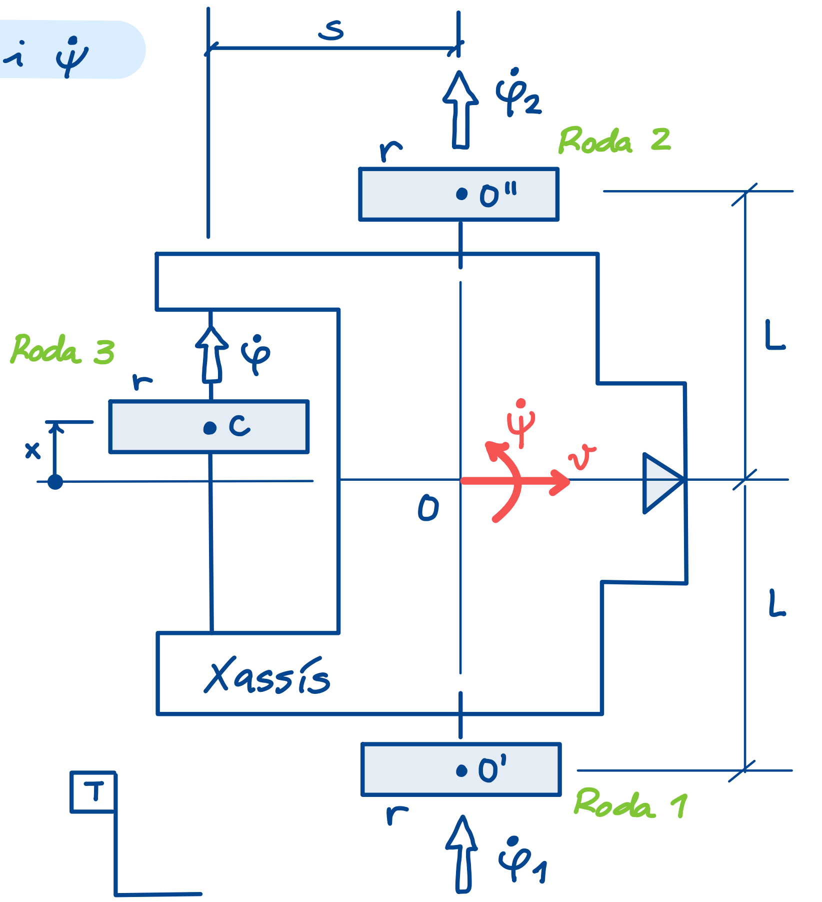
$$\bar{v}_T(O'') = (\underset{\longrightarrow}{v}) + (\odot\, \dot{\psi}) \times (\uparrow L) = \underset{\longrightarrow}{v - L\dot{\psi}}$$

Igualant

$$r\dot{\varphi}_1 = v + L\dot{\psi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{r}(v + L\dot{\psi})}$$

$$r\dot{\varphi}_2 = v - L\dot{\psi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{r}(v - L\dot{\psi})}$$

## $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ en funció de $v$ i $\dot{\psi}$




A la roda C:

$$\bar{v}_T(C) = (\rightarrow r\dot{\varphi}) \qquad (\mathrm{I})$$

Intentem calcular $\bar{v}_T(C)$ a partir de $v$ i $\dot{\psi}$ per igualar amb I.

Ara no podem aplicar CSR des de O pq C $\notin$ xassís!

Fem comp. movim. amb:

REL = xassís
AB = T

$$\bar{v}_T(C) = \bar{v}_{REL}(C) + \bar{v}_{ar}(C) = \bar{v}_{REL}(C) + \overbrace{\bar{v}_T(O) + \bar{\Omega}^{xas}_T \times \bar{OC}}^{ar} =$$

$$= (\uparrow \dot{x}) + (\rightarrow v) + \underbrace{(\odot \dot{\psi}) \times \left[(\leftarrow s) + (\uparrow x)\right]}_{(\downarrow \dot{\psi} s) + (\leftarrow \dot{\psi} x)} =$$

$$= \left[\uparrow (\dot{x} - \dot{\psi} s)\right] + \left[\rightarrow (v - \dot{\psi} x)\right] \qquad (\mathrm{II})$$

I = II:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \dot{x} - \dot{\psi} s \\ r\dot{\varphi} &= v - \dot{\psi} x \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\longrightarrow \boxed{\dot{x} = \dot{\psi} s} \\ &\longrightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{1}{r}(v - \dot{\psi} x)} \end{aligned}$$

### Aplicació a control

Si piloto amb joystick que dóna comandes de $v$ i $\dot{\psi}$, puc trobar les $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ que han de fer els motors