

# 10P

Versió 0.9 preliminar

## Geometria de masses

Lluís Ros

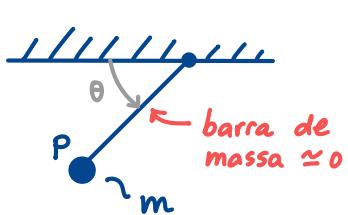
<https://lluisros.github.io/mecanica>

## Introducció

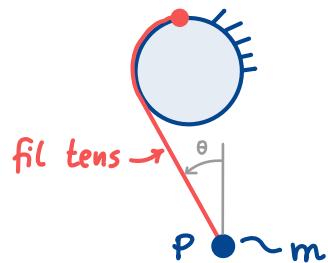
En aquesta segona part de l'assignatura estem utilitzant les lleis de la mecànica Newtoniana per obtenir

- equacions del moviment (\*)
- forces d'enllaç
- forces o parells que han d'aplicar els motors per garantir una certa acceleració.

Quan el sistema es senzill si només involucra una partícula P en tenim prou amb aplicar la 2a llei de Newton ( $\sum \bar{F}_{\rightarrow P} = m_p \ddot{\alpha}_{\text{RGA}}(P)$ , 3 eqs. escalaris). És el cas d'aquests dos sistemes ja vistos:



Pèndol simple



Pèndol sobre cilindre

En ambdós casos la massa està concentrada en un sol punt P i, per tant, no hi ha una geometria de masses a considerar. En els propers dies volarem analitzar sistemes mecànics més complexos, que involucrin sòlids, en els quals caldrà tenir en compte la distribució espacial de la massa.

---

(\*) Donen l'acceleració del sistema en funció de l'estat mecànic i de les forces i parells d'activació aplicats

Per analitzar aquests sistemes utilitzarem els teoremes de la quantitat de moviment (TQM) i del moment cinètic (TMC), que aviat presentarem. Aquests teoremes generalitzen les equacions de l'equilibri de l'estàtica que ja coneixeu.

$$\sum \underbrace{\bar{F}_{ext}}_{\text{forces exteriors aplicades al sistema}} = \bar{0}$$

forces exteriors aplicades al sistema

$$\sum \underbrace{\bar{M}_{ext}(Q)}_{\text{moments exteriors respecte un punt } Q, \text{ aplicats al sistema}} = \bar{0}$$

moments exteriors respecte un punt  $Q$ , aplicats al sistema

Per aplicar

Caldrà saber

TQM

centre d'inèrcia del sistema (\*)

TMC

Moment cinètic del sistema

Tant el centre d'inèrcia com el moment cinètic d'un sistema depenen de la distribució (o geometria) de la massa del sistema (com està repartida).

### Centre d'inèrcia d'un sistema

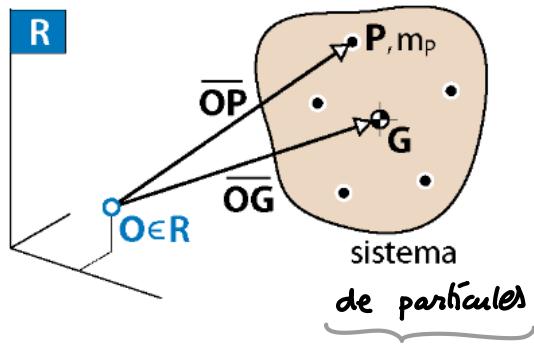
El centre d'inèrcia  $G$  d'un sistema de partícules (sorint un nòlid rígid) és un punt la cinemàtica del qual és un promig ponderat de la de totes les partícules del sist. Concretament, la posició de  $G$  en una referència  $R$  ve donada pel vector

(\*) "Centre d'inèrcia" = "centre de masses"

massa partícules  $P$

$$\overline{OG} = \sum_P \frac{m_P}{M} \cdot \overline{OP} \quad (\square)$$

massa total del sist.



Si derivem ( $\square$ ) resp. t a ref  $R$ , tenim:

S'orient és un  
sòlid rígid

$$\overline{v_R}(G) = \sum_P \frac{m_P}{M} \cdot \overline{v_R}(P)$$

Surt el promig  
ponderat que diem

$$\overline{a_R}(G) = \sum_P \frac{m_P}{M} \cdot \overline{a_R}(P)$$

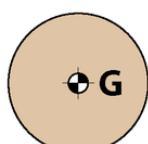
Fixem-nos que fent la substitució  $\overline{OP} = \overline{OG} + \overline{GP}$  a ( $\square$ ), i multiplicant per  $M$ , obtenim l'equació equivalent

$$\sum_P m_P \cdot \overline{GP} = \underbrace{\overline{0}}_{\text{vec. zero}} \quad (O)$$

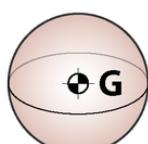
Si un punt  $G$  satisfa ( $O$ ) podem assegurar que és el centre d'inèrcia del sistema. Això facilita molt la localització de  $G$  en el cas de sòlids rígids homogenis que presentin simetries importants:

Centre de masses de sòlids homogenis

placa circular



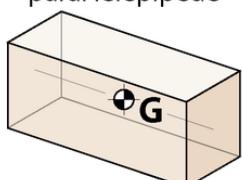
esfera



placa rectangular



paral·lelepípede



anella



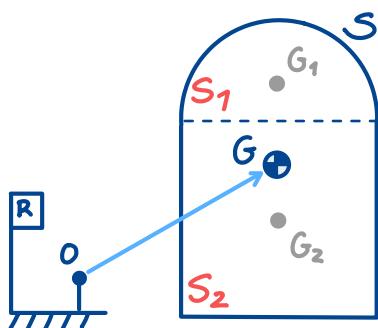
cilindre

Com veiem en  
aquest exemple,  
 $G$  no sempre és  
un punt físic  
d's!

## Centres d'inèrcia de sòlids "compostos"

### centre inèrcia

Els c.i. de sòlids habituals estan tabulats. Si tenim un sòlid  $S$  que es pot veure com la suma de diversos sòlids. Si, el c.i.  $G$  de  $S$  es pot trobar fent el promig ponderat dels c.i.  $G_i$  dels sòlids  $S_i$ :



$$\overline{OG} = \frac{m_1 \overline{OG}_1 + m_2 \overline{OG}_2}{m_1 + m_2}$$

Exercicis: Practiqueu el càlcul de c.i. resolent els exemples D5.1, D5.2, D5.3 de la Wikimec.

## Moment cinètic d'un sistema de partícules

### sorint un sòlid rígid

Suposant un sòlid rígid, sigui  $S$  un sistema de partícules en moviment en relació a una referència  $R$ , i considerem una partícula  $P$  de  $S$  amb massa  $m_p$ . Per definició:

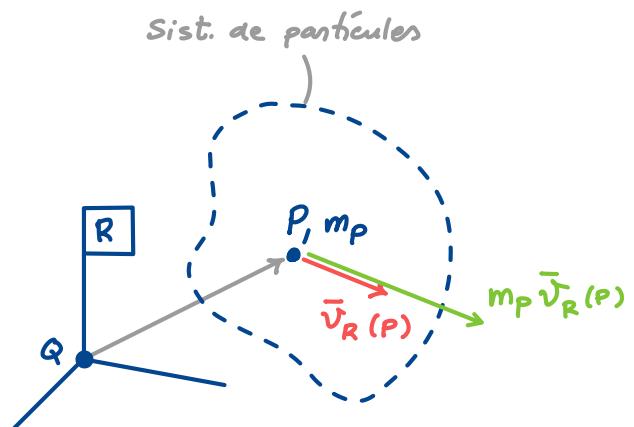
- La quantitat de moviment de  $P$  a  $R$  és el vector

$$m_p \cdot \vec{v}_R(P)$$

- El moment cinètic de  $P$  a  $R$  respecte un punt  $Q$  fix a  $R$  és

$$\overline{H}_R^P(Q) = \overline{QP} \times m_p \vec{v}_R(P)$$

moment resp. Q de la quantitat de moviment de  $P$



El moment cinètic de S a R, respecte Q, s'obté sumant el de totes les partícules d'S:

$$\bar{H}_R^S(Q) = \sum_P \bar{Q}P \times m_P \bar{v}_R(P) \quad (*)$$

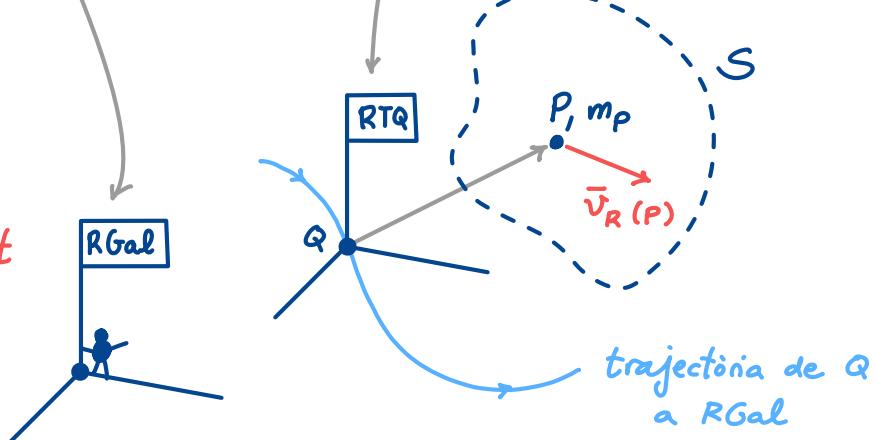
En les properes seccions veurem que, en el teorema del moment cinètic, el vector  $\bar{H}_R^S(Q)$  es calcula per a una referència R que es trasllada amb Q (RTQ) respecte de la ref. Galileana (RGal) en la que realment volem estudiar el moviment de S:

Volem estudiar el movim.

d'S des d'aquí ...

$RGal = T$   
habitualment

... però ens caldrà calcular el mom.  
cinètic de S en la RTQ ( $\bar{H}_{RTQ}^S(Q)$ )



E és a dir: Q és un punt fix a RTQ però que, en general, pot tenir moviment respecte RGal, i RTQ és simplement una referència "que viafja engauxada a Q" mantenint constant la seva orientació respecte RGal. Això vol dir que

$$\bar{\Omega}_{RGal}^{RTQ} = \bar{0}$$

(Important)

$$\bar{\Omega}_{RTQ}^S = \bar{\Omega}_{RGal}^S$$



A partir d'ara, el moment cinètic d'S respecte un punt Q es calcularà sempre a la RTQ.

## Moment cinètic d'un sólid rígid

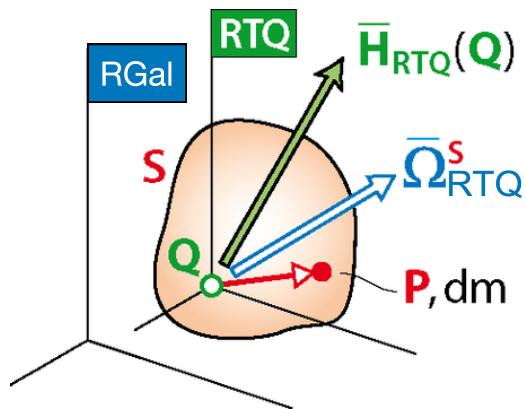
Quan  $S$  és un sólid rígid, el sumatori de l'Eq. (\*) es converteix en una integral estesa a tots els diferencials de massa de  $S$ :

$$\bar{H}_{RTQ}^S(Q) = \int_S \bar{QP} \times dm(P) \bar{\omega}_{RTQ}(P)$$

Malgrat la complexitat aparent d'aquesta expressió, quan  $Q$  és un punt de  $S$  ( $Q \in S$ ) es demostra que

$$\bar{H}_{RTQ}^S(Q) = \mathbb{I}(Q) \cdot \underbrace{\bar{\Omega}_{RTQ}^S}_{\parallel \bar{\Omega}_{RGal}^S}$$

$| Q \in S$



on :

$\mathbb{I}(Q)$  = Tensor d'inèria de  $S$  al punt  $Q$

(matriu  $3 \times 3$  simètrica, definida positiva,  
que depèn de la distribució de massa de  $S$ )

$\bar{\Omega}_{RTQ}^S$  = Velocitat angular de  $S$  respecte la RTQ

(com hem dit abans, és igual a  $\bar{\Omega}_{RGal}^S$ )

Important!

COMPTE  
!

Si  $Q \notin S$ , no podem calcular el moment cinètic amb l'anterior expressió. Caldrà fer servir la descomposició baricèntrica. Ja ho veurem!

## Forma del tensor d'inèrcia d'un sólid rígid $S$

Els elements de  $\mathbb{II}(Q)$  depenen de la distribució de massa de  $S$  al voltant d'uns eixos de coordenades  $(x_1, x_2, x_3)$  amb origen a  $Q$ , orientats d'acord amb una base vectorial  $B = (1, 2, 3)$  triada:

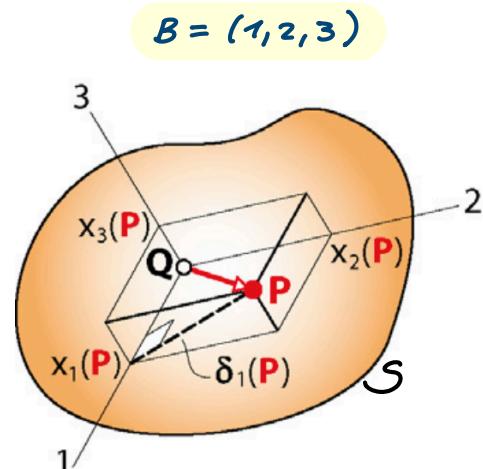
$$[\mathbb{II}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Indiquem la base triada

Moments d'inèrcia  
 Productes "

$$I_{ii} = \int_S \underbrace{\left[ x_j^2(P) + x_k^2(P) \right]}_{\parallel \text{ (distància de } P \text{ a eix } i)^2} dm(P)$$

$$I_{ij} = - \int_S x_i(P) \cdot x_j(P) \cdot dm(P)$$



En aquest curs, sempre triarem una base  $B$  en la que els elements de  $[\mathbb{II}(Q)]_B$  siguin constants. Això passa, per exemple, quan  $B$  es fixa al sólid. (\*)

(\*) També passa quan

- El sólid és rotor simètric per al punt  $Q$ , respecte un cert pla  $i\bar{j}$  (si triem 2 dels eixos de la base en el pla  $i\bar{j}$ ).
- El sólid és rotor esfèric per al punt  $Q$ : en aquest cas,  $\mathbb{II}(Q)$  és constant (i diagonal) respecte qualsevol base (sigui fixa o no al sólid).

vegeu les definicions de rotor simètric i esfèric més avall.

## Direccions principals d'inèrcia

La matriu  $\mathbb{I}(Q)$  canvia d'aspecte quan es canvia de base

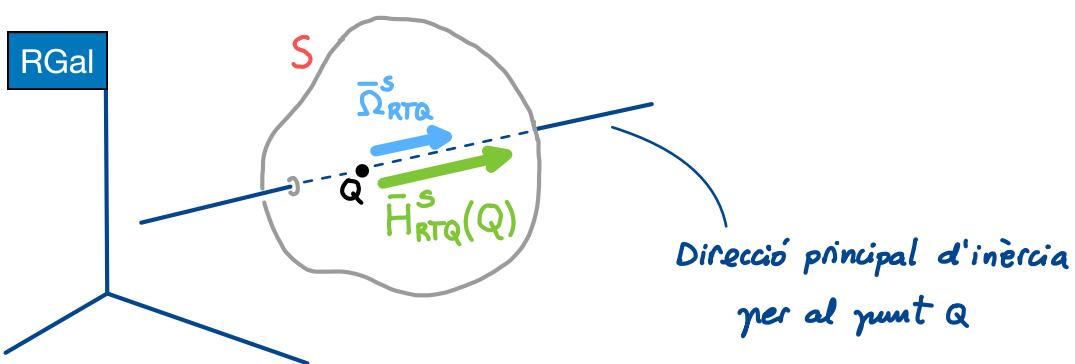
$$\left[ \mathbb{I}(Q) \right]_{B1} \neq \left[ \mathbb{I}(Q) \right]_{B2}$$

Si expresssem  $\mathbb{I}(Q)$  en una base pròpia BP (una que tingui els seus 3 vectors en la direcció de 3 vectors propis<sup>(\*)</sup> independents de  $\mathbb{I}(Q)$ ), aleshores  $\mathbb{I}(Q)$  és diagonal:

$$\left[ \mathbb{I}(Q) \right]_{BP} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \quad (\boxtimes)$$

Les direccions de la base BP que passen per Q s'anomenen direccions principals d'inèrcia (DPI) i els moments d'inèrcia corresponents ( $I_{11}, I_{22}, I_{33}$  a  $\boxtimes$ ) són els moments principals d'inèrcia (MPI).

Com que tota DPI és paral·lela a un vector propi de  $\mathbb{I}(Q)$ , una DPI es pot definir també com una direcció en la que, si  $\bar{\Omega}_{RTQ}^s$  és paral·lela a la DPI,  $\bar{H}_{RTQ}(Q)$  també ho és:




---

(\*) Recordem que si  $\vec{v}$  és un vector propi d'una matriu  $A$ , aleshores  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$  amb  $\lambda \in \mathbb{R}$ . És a dir:  $\vec{v}$  i  $A\vec{v}$  són paral·lels.

Anirem descobrint la rellevància d'aquest paral·lelisme pel que fa a la dinàmica de rotació del sólid (+ endavant)

Aquí practicarem el càlcul del tensor  $\mathbb{II}(Q)$  sobre diversos exemples. Sobre la marxa anirem descobrint varis propietats de  $\mathbb{II}(Q)$  que en faciliten la seva obtenció. Les emmarcarem en rectangles grisos.

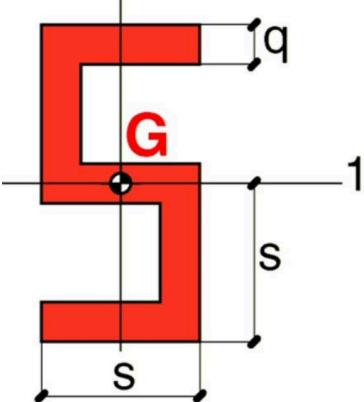
### Forma qualitativa vs quantitativa

Per obtenir  $\mathbb{II}(Q)$  sempre aplicarem 2 passos:

- (1) Estudiarem la forma qualitativa que té  $\mathbb{II}(Q)$ . Això ens ajudarà a extreure'n conclusions relatives a la dinàmica del sólid, i prepararem el terreny pel pas (2)
- (2) Amb l'ajut de taules, si cal, obtindrem la forma quantitativa de  $\mathbb{II}(Q)$

Dedicarem la 1<sup>a</sup> part de la classe a obtenir formes qualitatives, i la 2<sup>a</sup> a les quantitatives.

2

La peça plana és homogènia. Fes l'avaluació qualitativa de  $\text{II}(G)$ .

$$\text{B} = (1, 2, 3)$$

Per simplificar assumirem  $q \approx 0$  però tot l'anàlisi és fàcil de generalitzar per  $q > 0$

Figura plana  $\Rightarrow$  Tots els  $\text{dm}(P)$  tenen coordenada  $x_3(P) = 0$ .

$\Rightarrow$  els productes d'inèrria que involucrin  $x_3(P)$  seran zero:

$$\left[ \text{II}(G) \right]_B = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} I_{13} &= - \int x_1 x_3 \, dm = 0 \\ I_{23} &= - \int x_2 x_3 \, dm = 0 \end{aligned}$$

Fixem-nos que, gràcies als zeros que hi ha a la 3a fila i columna, si la velocitat angular del sòlid respecte RGal té la forma

$$\left\{ \bar{\Omega}_{RGal}^S \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \bar{\Omega} \end{array} \right\},$$

aleshores  $\bar{H}_{RTG}^S(G)$  i  $\bar{\Omega}_{RGal}^S$  són paral·lels:

$$\left\{ \bar{H}_{RTG}^S(G) \right\}_B = \underbrace{\left[ \text{II}(G) \right]_B}_{\left[ \begin{array}{ccc} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{array} \right]} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \bar{\Omega} \end{array} \right\}}_{\bar{\Omega}_{RGal}^S} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ I_{33} \bar{\Omega} \end{array} \right\}$$

vectors paral·lels

moment principal d'inèrria per la dir. 3

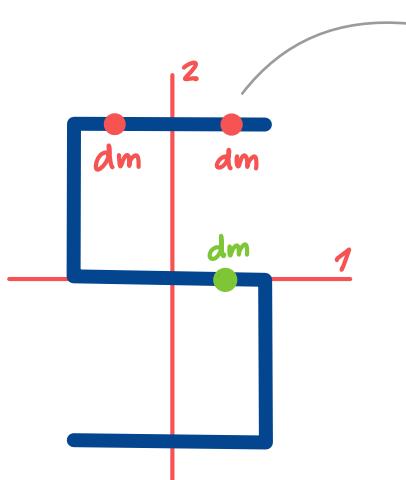
Per tant, la dir. 3 és DPI per al punt G, i  $I_{33}$  és el moment principal d'inèrria (MPI) associat.

En general:

Quan a la columna  $i$  de  $\mathbb{II}(G)$ , i per simetria a la fila  $i$ , tots els productes d'inèrcia s'igualen zero, la direcció  $i$  de la base serà una DPI per al punt on calculem el tensor, i  $I_{ii}$  serà el MPI associat

Ara fixem-nos que, a l'exemple, la dir. 3 és DPI independentment del punt on calculem el tensor. Això és així sempre per un solíid pla: la dir.  $\perp$  al pla del solíid és DPI per a tot punt del solíid.

Seguim. Ara ens preguntem: com són  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$  a l'exemple? Per definició són  $\geq 0$ , però... algun podria ser zero? Mirant la posició dels diferencials de massa veiem que no!



Els  $dm$  vermellos, per exemple, teuen contribució no nul·la a  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$ .

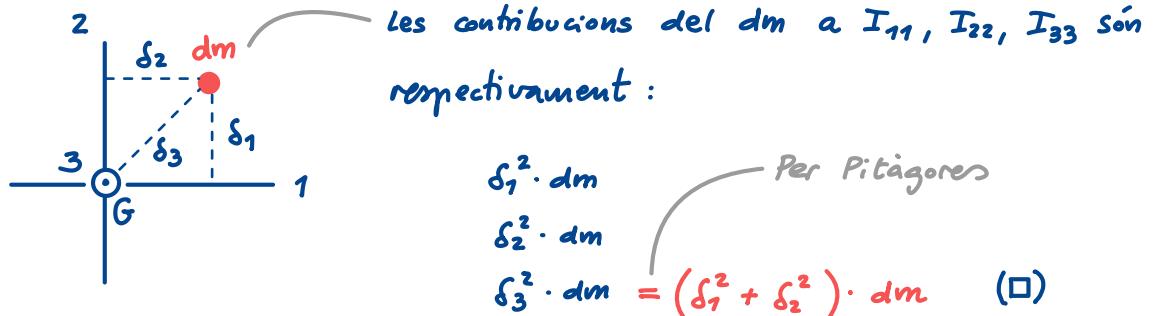
Per tant:

$$I_{11} = \int_S \delta_1^2(P) \cdot dm(P) \neq 0$$

$$I_{22} = \int_S \delta_2^2(P) \cdot dm(P) \neq 0$$

$$I_{33} = \int_S \delta_3^2(P) \cdot dm(P) \neq 0$$

Més coses. Ara fixem-nos en un  $dm(P)$  qualsevol (figura següent):



Integrant ( $\square$ ) sobre  $S$ , descobrim que

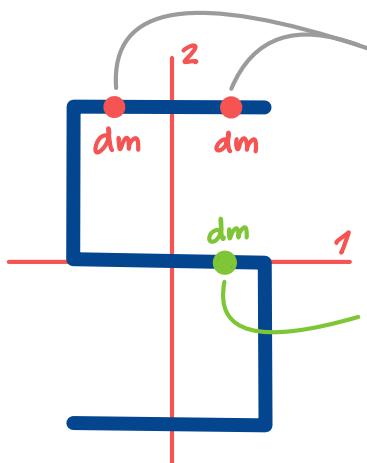
$$I_{33} = I_{11} + I_{22}$$

Ergo la forma qualitativa, per ara, és

$$[II(G)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

En general, per un solíid pla serà  $I_{KK} = I_{ii} + I_{jj}$ , on  $K$  és la dir.  $\perp$  al pla de la figura.

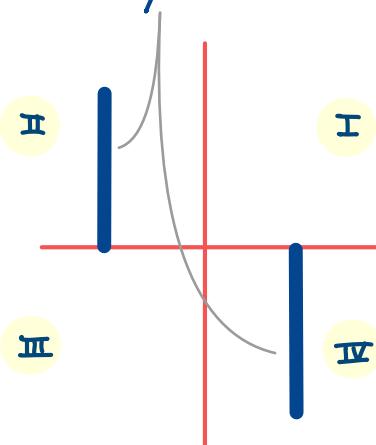
Ens falta saber el signe de  $I_{12} = - \int_S x_1 x_2 dm$ . Analitzem-lo:



Els dm en posicions simètriques respecte un eix cancelen mütuament la seva contribució a  $I_{12}$ .

Els dm sobre un eix tenen contribució nula a  $I_{12}$

Només aquests trossos contribueixen a  $I_{12}$ .



Però en ser els seus dm en els quadrants II i IV, tenim:

$$I_{12} = - \int_S \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{\text{negatiu}} dm > 0$$

Clarament: els signes de les contribucions en cada quadrant són

+	-
-	+

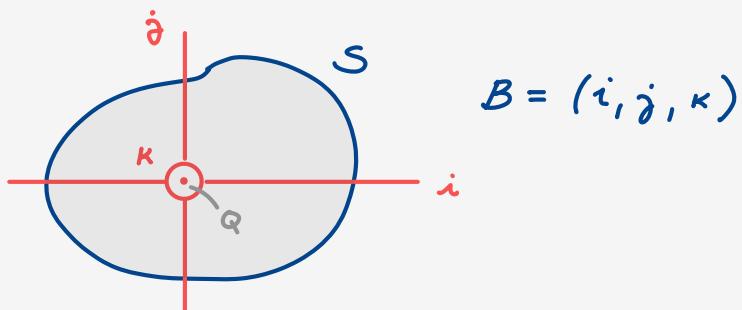
En conclusió: la forma qualitativa de  $\mathbb{II}(G)$  és:

$$\left[ \mathbb{II}(G) \right]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & |I_{12}| & 0 \\ |I_{12}| & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

Escrivim  $|I_{12}|$   
per fer pale  
que  $I_{12} > 0$

Conclusions:

Si  $S$  és un sòlid pla, amb eixos definits així



$$B = (i, j, k)$$

es compleix:

Propietat  
1

$\forall Q \in S$ , la dir.  $K$  ( $\perp a S$ ) és DPI

$$I_{KK} = I_{ii} + I_{jj}$$

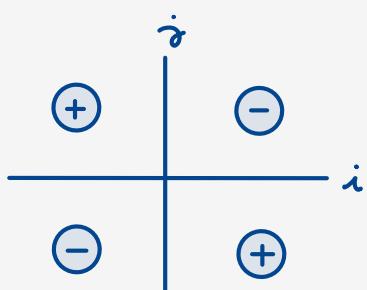
$I_{KK}$  és moment principal d'inèria

$$\left[ \mathbb{II}(Q) \right]_B = \begin{bmatrix} I_{ii} & I_{ij} & 0 \\ I_{ij} & I_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{I_{ii} + I_{jj}}_{I_{KK}} \end{bmatrix}$$

Propietat

2

El signe de la contribució de la massa en cada quadrant als productes d'inèria és:

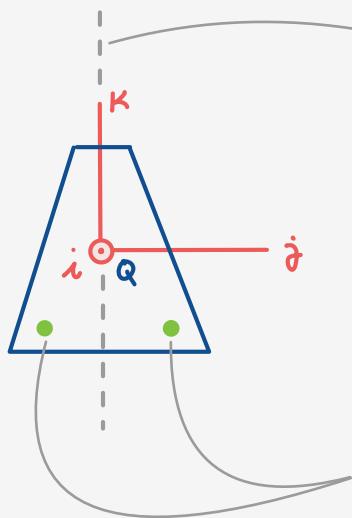


$$I_{ij} = - \int_S x_i x_j dm$$

Això no s'ha vist a classe però és útil!

A partir del que hem vist a l'exercici també és fàcil deduir que:

Per a un sólid  $S$  homogeni, no necessàriament pla, si hi ha un pla de simetria en la distribució de la massa, l'eix perpendicular al pla és DPI:



Pla ( $i, k$ ) de simetria  $\Rightarrow$  Eix  $j$  és DPI

$$B = (i, j, k)$$

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} * & & & \\ * & I_{jj} & * & \\ * & 0 & * & \\ 0 & & 0 & * \end{bmatrix}$$

$I_{ij} = 0$        $I_{jk} = 0$

Els dm simètrics tenen contribució conjunta nula a  $I_{ij}, I_{jk}$ .  
Ergo  $I_{ij} = I_{jk} = 0$ .

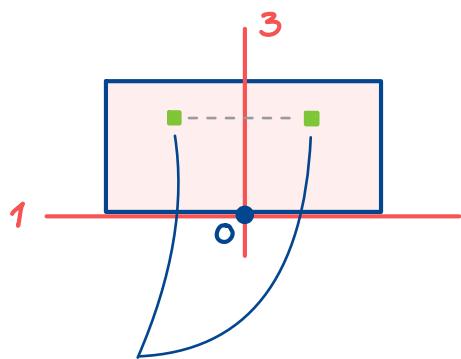
3

1

R1

2

Les dues plaques són idèntiques i homogènies.

Fes l'avaluació qualitativa de  $\mathbb{II}(O)$ . $R1 = \text{Rectangle } 1$  $R2 = " 2$  $\mathbb{II}(O)$  és suma dels tensors dels rectangles  $R1$  i  $R2$ .Tensor de  $R1$ 

dm simètrics tenen contribució neta zero a  $I_{13}$

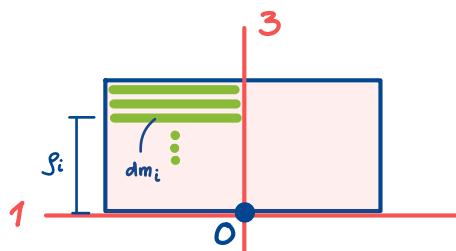
Figura plana amb eix 2  $\perp$  al seu pla  $\Rightarrow$  Dir. 2 és DP1  
 $I_{22} = I_{11} + I_{33}$

dm simètrics resp. pla 23 per O  $\Rightarrow I_{13} = 0$

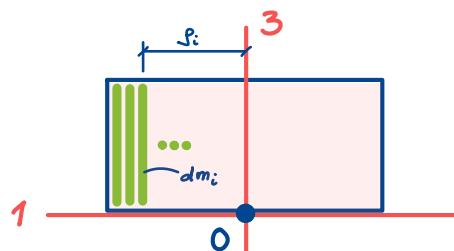
El tensor qualitatiu ha de ser

$$[\mathbb{II}_{R1}(O)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} + I_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

Aspecte nou d'aquest exercici: Permet esbrinar visualment si  $I_{11}$  és menor, major, o = a  $I_{33}$ . Ràpidament veiem que  $I_{11} = I_{33}$  ja que:



Aquests dm contribueixen a  $I_{11}$  amb  $s_i^2 d_m_i$



Aquests dm també contribueixen a  $I_{33}$  amb  $s_i^2 d_m_i$

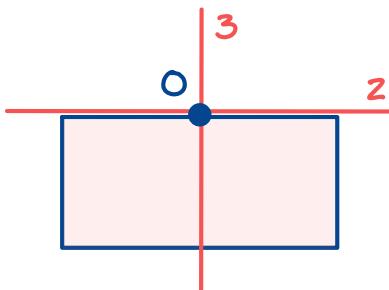
En resum, si  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{11} = \mathcal{I}_{33}$ ,

$$\left[ \mathcal{II}_{R1}(0) \right]_B = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & 2\mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

### Tensor de R2

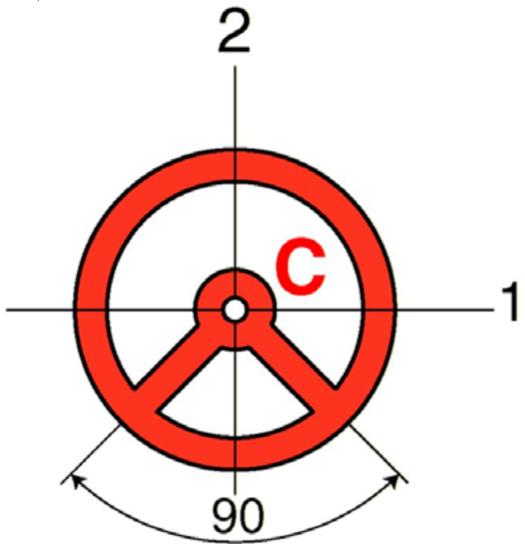
Amb un raonament anàleg veiem ràpidament que

$$\left[ \mathcal{II}_{R2}(0) \right]_B = \begin{bmatrix} 2\mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}$$



### Tensor global $\mathcal{II}(0)$

$$\left[ \mathcal{II}(0) \right]_B = \left[ \mathcal{II}_{R1}(0) \right]_B + \left[ \mathcal{II}_{R2}(0) \right]_B = \begin{bmatrix} 3\mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & 3\mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathcal{I} \end{bmatrix}$$



La peça plana és homogènia.  
Fes l'avaluació qualitativa de  $\text{II}(\mathbf{C})$ .

Aquest exm. permet il·lustrar

- Canvis de base
- Concepte de rotor
- Simètric

Podem descompondre el sòlid així:

$$\text{Solid} = \text{Anella} + \text{Radius}$$

Són figures planes amb matrícies moment d'inèria resp. eixos 1 i 2, i amb producte d'inèria 12 nul per simetria.

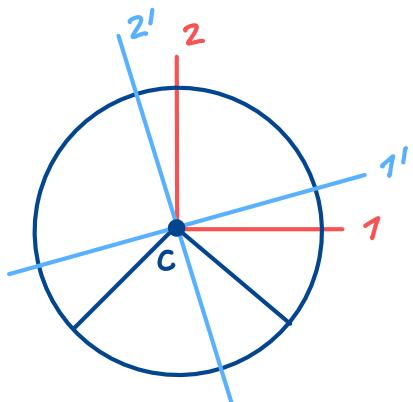
$$\begin{aligned} [\text{II}_{\text{anella}}(c)]_B &= \begin{bmatrix} I' & I' \\ I' & 2I' \end{bmatrix} \\ [\text{II}_{\text{radius}}(c)]_B &= \begin{bmatrix} I'' & I'' \\ I'' & 2I'' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Reducció}} \quad [\text{II}(c)]_B = \begin{bmatrix} I & I \\ I & 2I \end{bmatrix}$$

$I = I' + I''$

Ara,... què passaria si volguessim  $\text{II}(c)$  en una nova base  $B' = (1', 2', 3')$ ?

*Mateix que abans*

Caldrà fer un canvi de base! Recordem com es fa, d'àlgebra lineal:



## Canvi de base d'un tensor d'inèrcia

Rarament ho farem servir!

$$[\mathbb{I}(P)]_{B'} = [S]^{-1} [\mathbb{I}(P)]_B [S]$$

on:

$$S = \begin{bmatrix} \text{per columnes: els versors de la} \\ \text{base } B' \text{ expressats en base } B \end{bmatrix}$$

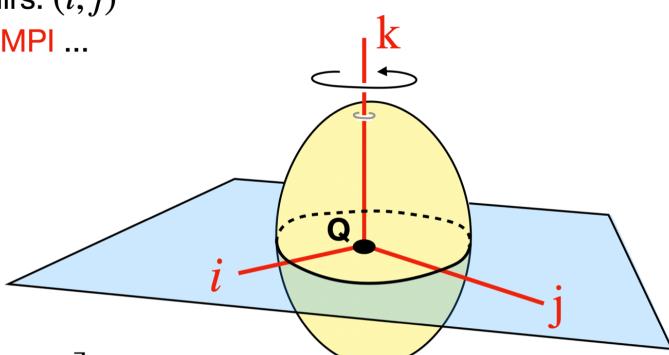
Ara bé, en aquest exemple no caldrà fer el canvi. Com que  $[\mathbb{I}(C)]_B$  té la forma  $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$ , el tensor en la base  $B'$  serà el mateix! Això es deu a la següent propietat (\*):

Quan per un punt Q les dirs.  $(i, j)$  són DPI amb mateix moment d'inèrcia I, el tensor  $\mathbb{I}(Q)$  és invariant a rotacions de la base B avd la dir. k. Es diu que el sòlid és un rotor simètric per a Q en el pla  $(i, j)$ .

### "Rotor simètric per Q" en el pla $(i, j)$

Si per al punt Q les dirs.  $(i, j)$  són DPI amb mateix MPI ...

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}}_{\text{no canvia si giren B avd dir. k}}$$



$$B = (i, j, k)$$

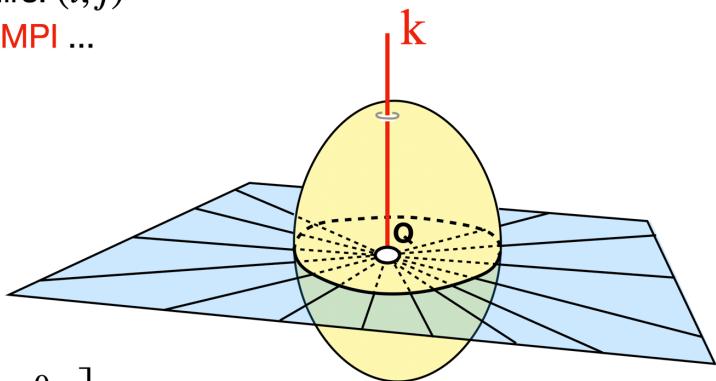
no canvia si giren B avd dir. k  
(és invariant a rotacions avd dir. k)

(\*) Vegeu demostració a Wikimec D5.4 → Propietat 4

Quan passa l'anterior, tota recta del pla  $(i, j)$  que passa per  $Q$  és DPI i el moment d'inèrcia del sòlid al voltant d'aquesta recta serà  $I$  (el valor del moment principal d'inèrcia associat a les dirs.  $i, j$ )

### "Rotor simètric per $Q$ " en el pla $(i, j)$

Si per al punt  $Q$  les dirs.  $(i, j)$   
són DPI amb mateix MPI ...



$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

Tota recta del pla  $(i, j)$  per  $Q$  és DPI  
(amb moment inèrcia  $I$  al seu voltant)

És directe de veure que quan el sòlid és un rotor simètric per a un punt  $Q$  en el pla  $(i, j)$ :

Si  $\bar{\Omega}_{RTQ}^{\text{sòlid}}$  és  $\begin{cases} \text{o bé } \parallel \text{ al pla } ij \\ \text{o bé } \parallel \text{ dir. } k \end{cases}$

↓  
Aleshores

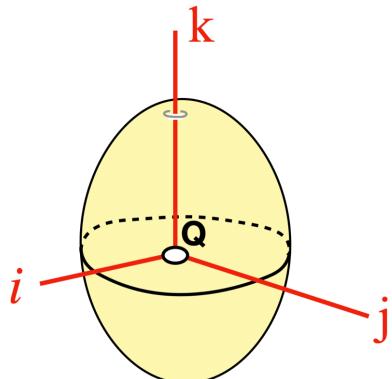
$$H_{RTQ}^{\text{sòlid}}(Q) \parallel \bar{\Omega}_{RTQ}^{\text{sòlid}}$$

Això té implicacions dinàmiques que ja veurem ...

Ara que sabem què és un rotor simètric, ... que deu ser un rotor esfèric?

## "Rotor esfèric per $\mathbf{Q}$ "

Si per al punt  $\mathbf{O}$  les dirs.  $(i, j, k)$   
són DPI amb mateix MPI ...

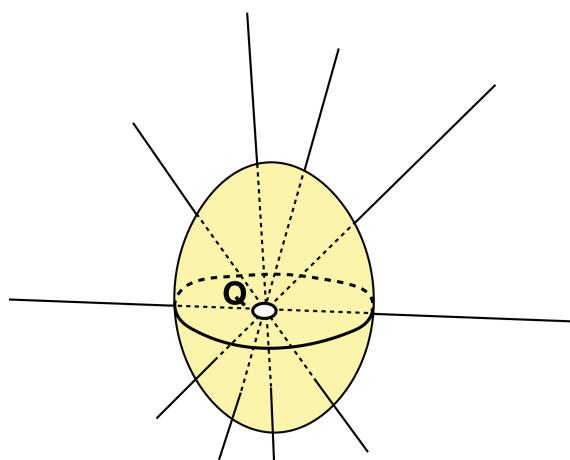


... el tensor a  $\mathbf{Q}$  té la forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada

Si passa l'anterior, diem que el sòlid és rotor esfèric per a  $\mathbf{Q}$ . Clarament, en tal sòlid, tota recta per  $\mathbf{Q}$  és DPI, amb moment d'inèrcia associat de valor  $I$ :



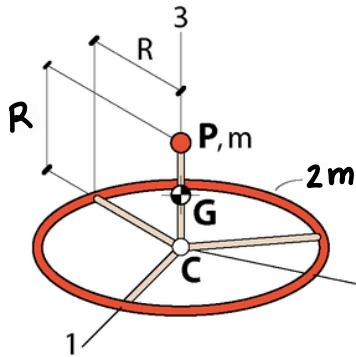
Qualsevol recta per  $\mathbf{Q}$  és DPI  
( amb moment inèrcia  $I$  )

En un rotor esfèric  $\bar{H}_{RTQ}^{\text{sòlid}}(\mathbf{Q}) \parallel \bar{\Omega}_{RTQ}^{\text{sòlid}}$  sempre!

Treballen aquest exemple:

### Exemple D5.9: rotor esfèric

El sòlid està format per una anella homogènia, de massa  $2m$ , i una partícula  $\mathbf{P}$  de massa  $m$ . Les barres que uneixen aquests elements són de massa negligible.



El tensor a  $\mathbf{C}$  és la suma de dos tensors:

$$\text{II}(\mathbf{C}) = \text{II}^{\text{part}}(\mathbf{C}) + \text{II}^{\text{anella}}(\mathbf{C}).$$

El de la partícula és immediat:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1(\mathbf{P}) = \delta_2(\mathbf{P}), \delta_3(\mathbf{P}) = 0 \\ x_1(\mathbf{P}) = x_2(\mathbf{P}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow [\text{II}^{\text{part}}(\mathbf{C})]_B = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ja que l'anella és un sòlid pla i simètric respecte de l'eix 1 o del 2, la propietat 1 i la propietat 3 condueixen a:

$$[\text{II}^{\text{anella}}(\mathbf{C})]_B = \begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 \\ 0 & 0 & 2I_a \end{bmatrix}.$$

El sòlid és un rotor simètric per a  $\mathbf{C}$  ja que té dos moments principals iguals:

$$[\text{II}(\mathbf{C})]_B = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 \\ 0 & 0 & 2I_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p + I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_p + I_a & 0 \\ 0 & 0 & 2I_a \end{bmatrix}.$$

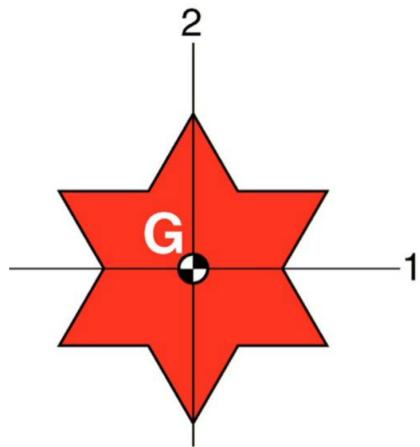
L'expressió quantitativa del tensor no requereix acudir a les taules:

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1(\mathbf{P}) = \delta_2(\mathbf{P}) = R \\ \delta_3(\text{dm} \in \text{anella}) = R \Rightarrow 2I_a = 2mR^2 \end{array} \right\} \Rightarrow [\text{II}(\mathbf{C})]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} mR^2$$

Es tracta d'un rotor esfèric, i per tant  $\overline{\mathbf{H}}_{RTC}(\mathbf{C})$  sempre és paral·lel a  $\overline{\boldsymbol{\Omega}}_T^S$ :  
 $\overline{\mathbf{H}}_{RTC}(\mathbf{C}) = \text{II}(\mathbf{C}) \overline{\boldsymbol{\Omega}}_T^S = 2mR^2 \overline{\boldsymbol{\Omega}}_T^S$ .

T és la RG habitual en aquesta assignatura

La peça plana és homogènia. Fes l'avaluació qualitativa de  $\text{II}(G)$ .



En ser un sòlid pla, dir. 3 és DPI, i  $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ . A més, en ser l'eix 2 de simetria,  $I_{12} = 0$ . Per tant :

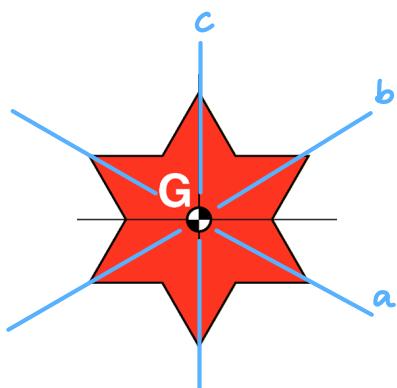
$$[\text{II}(G)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

Ara bé,  $I_{11} \geq I_{22}$ ? A priori, és difícil de saber!

Però es pot invocar la següent propietat (\*):

PROPIETAT (Equidistribució de massa al voltant de 3 eixos copланaris)

Quan un sòlid té 3 o més moments d'inèrcia en un matríx pla ij iguals per a un punt O, també és un rotor simètric per a O.

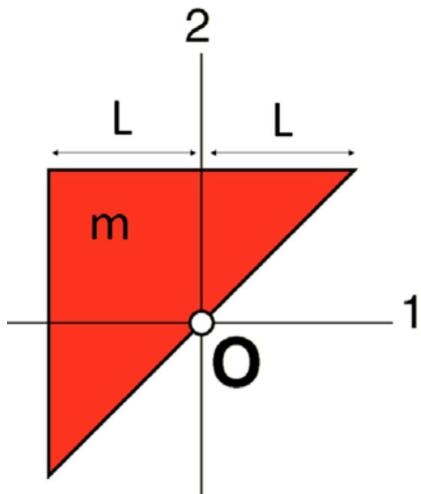


Clarament,  $I_{aa} = I_{bb} = I_{cc}$   
i, per l'anterior propietat, el sòlid és un rotor simètric a G:

$$[\text{II}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

Rotor Simètric a G

(\*) La demostració és feixuga i ens la saltarem



La placa triangular, de massa  $m$  i costats  $2L$ , és homogènia.

Fes l'avaluació de  $\mathbb{II}(O)$ :

- qualitativa.
- quantitativa.

Amb aquest comencem a practicar l'aval. quantitativa

Però sempre cal començar per la qualitativa !

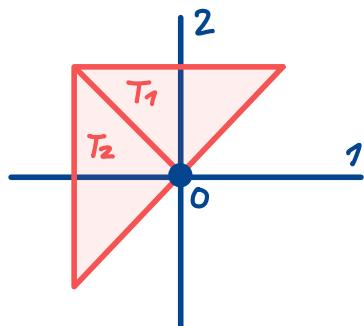
### Tensor qualitatiu

Figura plana. Tensor té la forma

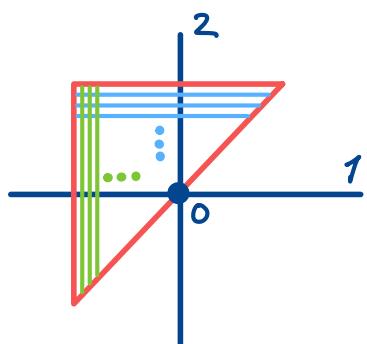
$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

Però  $I_{12} = 0$ , perquè els triangles  $T_1$  i  $T_2$  tenen, cadascun,

producte d'inèrcia ( $1,2$ ) nul degut a les simetries respecte els eixos 1 i 2.



A més,  $I_{11} = I_{22}$ , ja que els dm blaus i verds tenen la mateixa contribució a  $I_{11}$  i  $I_{22}$ , respectivament



Ergo tensor qualitatiu és :

$$[\mathbb{II}(O)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

rotor simètric a 0

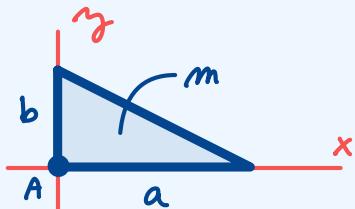
## Tensor quantitatiu

Els moments i productes d'inèria dels sòlids més habituals estan tabulats (vegeu formulari) però el sòlid que estigem estudiant sovint serà una combinació dels sòlids tabulats, i el punt o els eixos indicats a la taula podrien no coincidir amb els que ens calen. Caldrà aplicar la taula amb habilitat, i per a això:

Els clau haver determinat abans la forma qualitativa del tensor

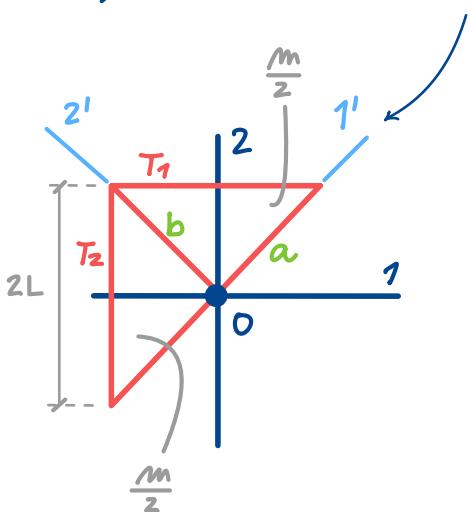
!

Per a l'exm. anterior momèns ens cal  $\mathbf{I}$ . De la taula veiem que:



$$\mathbf{II}(A) = \begin{cases} I_{xx} = \frac{1}{6}mb^2 & (\blacksquare) \\ I_{xy} = -\frac{1}{12}mab \end{cases}$$

Els eixos  $x, y$ , i el punt  $A$  de la taula no coincideixen amb els que tenim, però el nostre sòlid és rotor simètric! Per tant, el tensor en  $B' = (1', 2', 3)$  també serà  $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$



Veient el sòlid com  $T_1 + T_2$ , i aplicant  $(\blacksquare)$  a  $T_1$  i  $T_2$ :

$$I = I_{1'} = 2 \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{m}{2} \right) \left( \frac{2L}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \frac{1}{3} mL^2$$

2 triangles  
massa de 1 triangle  $b$

En conclusió:

$$[\mathbf{II}(O)]_B = \frac{mL^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

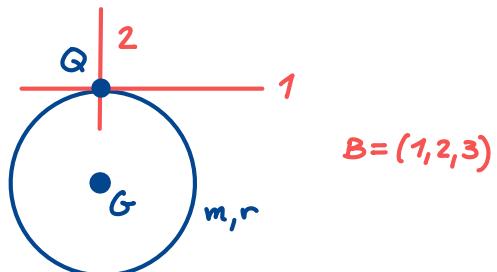
## Teorema de Steiner

No sempre trobarem tanta sort! Sovint passarà que el punt al qual referim el tensor és diferent del de la taula. Afortunadament, el teorema de Steiner ens permet fer "canvis de punt":

$$\mathbf{I}(Q) = \underbrace{\mathbf{I}(G)}_{\text{Tensor per al punt } Q} + \underbrace{\mathbf{I}^\oplus(Q)}_{\substack{\text{Tensor per al centre d'inèrcia } G \\ \text{Tensor a } Q \text{ de tota la massa del sólid concentrada a } G.}}$$

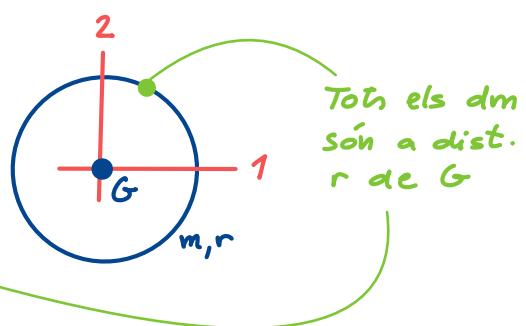
Exemple:

Per a l'anell de la fig., homogeni de massa  $m$ , calculen  $[\mathbf{I}(Q)]_B$



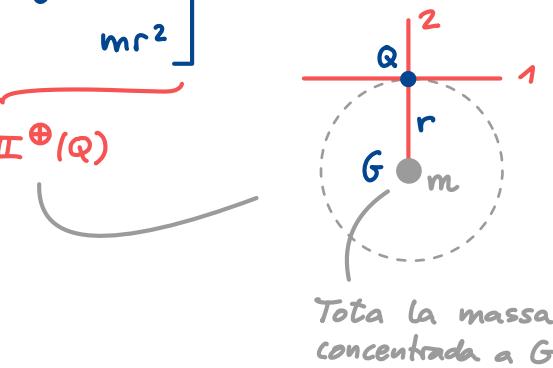
El tensor a  $G$  és fàcil:

$$[\mathbf{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix} \quad \text{II} \quad I_{33} = mr^2$$



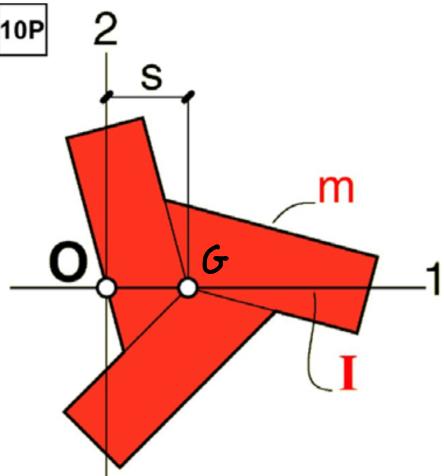
El tensor a  $Q$  s'obté via Steiner:

$$[\mathbf{I}(Q)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & \frac{mr^2}{2} & mr^2 \\ \frac{mr^2}{2} & \frac{mr^2}{2} & mr^2 \\ mr^2 & mr^2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}(G)} + \underbrace{\begin{bmatrix} mr^2 & 0 & mr^2 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ mr^2 & 0 & mr^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}^\oplus(Q)} = \\ = mr^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Practiquem Steiner una mica més:

10P

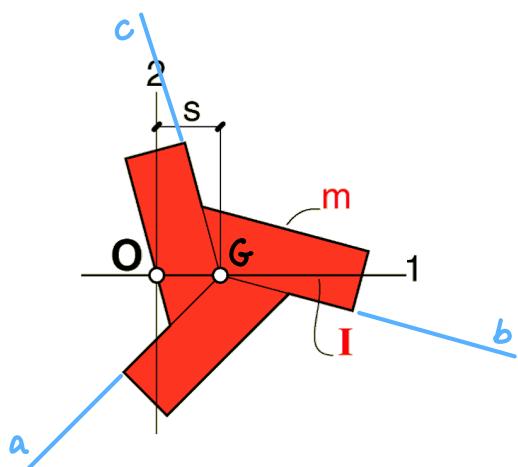


La peça de massa  $m$  és homogènia. El seu moment d'inèrcia respecte de l'eix 1 és  $I$ . Fes l'avaluació qualitativa de  $\llbracket \mathbf{II}(O) \rrbracket_B$ .

*(G és, clarament, el centre d'inèrcia del sólid)*

Sòlid pla  $\Rightarrow$  Dir. 3 és DPI (independentment del punt triat)

Tenim 3 eixos del pla 12 amb = moment d'inèrcia ( $a, b, c$ )



però parten per  $G$ , no per  $O$ .  
És a dir, el sólid és rotor simètric per a  $G$ , amb

$$\llbracket \mathbf{II}(G) \rrbracket_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$

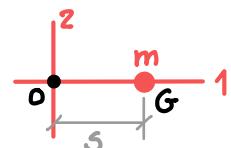
En ser rotor simètric, el moment d'inèrcia respecte qualsquer eix per  $G$  és igual. Com que ens donen el moment resp. eix 1 (que és  $I$ ), utilitzem aquest a  $\llbracket \mathbf{II}(G) \rrbracket_B$

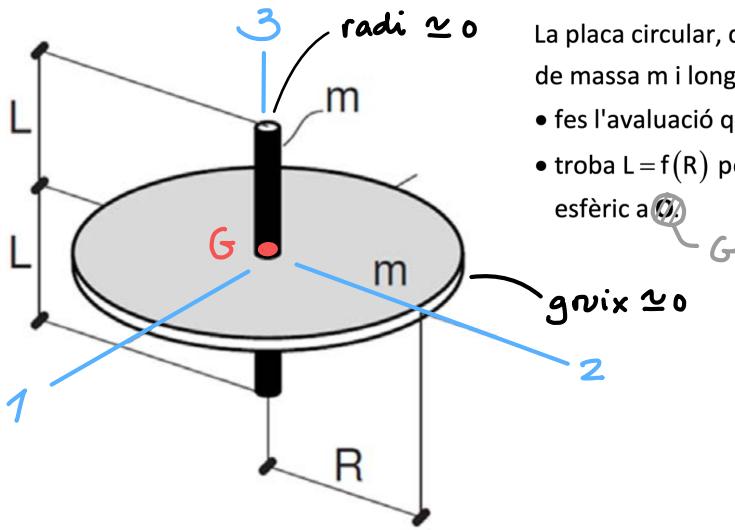
Però només cal aplicar Steiner per obtenir  $\llbracket \mathbf{II}(O) \rrbracket_B$ :

$$\llbracket \mathbf{II}(O) \rrbracket_B = \llbracket \mathbf{II}(G) \rrbracket_B + \llbracket \mathbf{II}^\oplus(O) \rrbracket_B =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & ms^2 & ms^2 \\ ms^2 & 0 & 0 \\ ms^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Tota la massa concentrada a } G} = \begin{bmatrix} I & I+ms^2 & I+ms^2 \\ I+ms^2 & I+2ms^2 & I+2ms^2 \\ I+ms^2 & I+2ms^2 & I+4ms^2 \end{bmatrix}$$

Tota la massa concentrada a  $G$



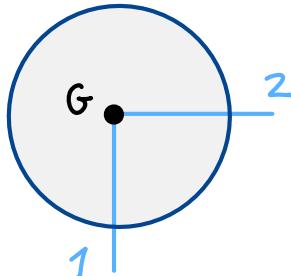


La placa circular, de massa  $m$  i radi  $R$ , i la barra, de massa  $m$  i longitud  $2L$ , són homogènies.

- fes l'avaluació qualitativa de  $\text{II}(G)$ .
- troba  $L = f(R)$  per tal que el peça sigui rotor esfèric a  $\text{O}$  la

$$[\text{II}(G)]_B = [\text{II}_{\text{disc}}(G)]_B + [\text{II}_{\text{barra}}(G)]_B =$$

Disc

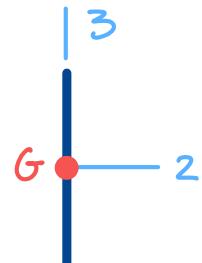


$$[\text{II}_{\text{disc}}(G)]_B = \begin{bmatrix} I' & I' \\ I' & 2I' \end{bmatrix} =$$

$$I' = \frac{1}{4}mR^2 \quad (\text{taula: disc homog.})$$

$$= \frac{mR^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Barra



$$[\text{II}_{\text{barra}}(G)]_B = \begin{bmatrix} I'' & I'' \\ I'' & 0 \end{bmatrix} =$$

$$I'' = m \left( \frac{1}{4}0^2 + \frac{(2L)^2}{12} \right) = \frac{mL^2}{3}$$

$$= \frac{mL^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} & \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} \\ \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} & 2 \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix}$$

Han de ser = perquè sigui rotor esfèric

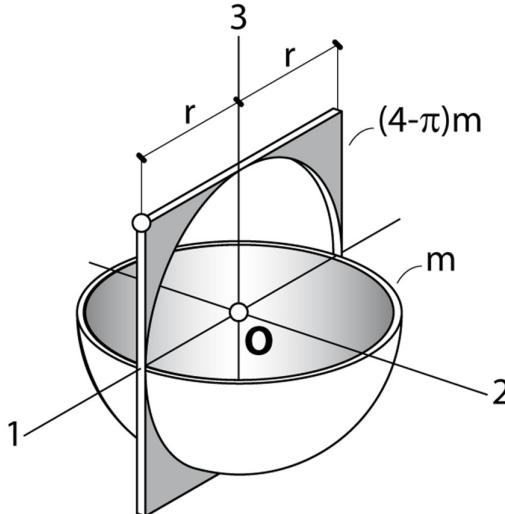
Caldrà que

$$\frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{3} = \frac{mR^2}{2}$$

$$3R^2 + 4L^2 = 6R^2$$

$$4L^2 = 3R^2$$

$$L = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$



**IV [4p]** El sòlid està format per una placa prima quadrada amb un forat circular, i una semiclosca esfèrica prima. Totes dues peces són homogènies. La closca té massa  $m$ , i la placa foradada té massa  $(4 - \pi)m$ . Quin és el tensor d'inèrcia al punt  $\mathbf{O}$ ? Fes-ne primer l'avaluació qualitativa, i després la quantitativa.

NOTA: El forat és equivalent a un disc de massa negativa.

## RESOLUCIÓ

### Avaluació qualitativa

$$[\mathbf{II}_{\text{placa}}(\mathbf{O})] + [\mathbf{II}_{\text{closca}}(\mathbf{O})] = \begin{bmatrix} I' & 0 & 0 \\ 0 & 2I' & 0 \\ 0 & 0 & I' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I'' & 0 & 0 \\ 0 & I'' & 0 \\ 0 & 0 & I''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'+I'' & 0 & 0 \\ 0 & 2I'+I'' & 0 \\ 0 & 0 & I'+I''' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

És clar que  $I_{11} < I_{22}$ , però no és evident si  $I_{33}$  és més gran o més petit que  $I_{11}$  o  $I_{22}$ .

### Avaluació quantitativa

El tensor d'inèrcia de la placa foradada es pot obtenir superposant el d'una placa quadrada sense forat, amb massa  $m_1$ , i el d'una placa circular amb massa  $m_2$  negativa (equivalent al forat):

La relació de masses ( $m_1/|m_2|$ ) ha de ser la mateixa que la de les àrees d'aquestes dues peces: (\*)

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1}{|m_2|} &= \frac{(2r)^2}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi} \\ m_1 - |m_2| &= (4 - \pi)m \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_1 = 4m, m_2 = \pi m$$

$$[\mathbf{II}_{\text{placa}}(\mathbf{O})] = \frac{1}{3}m_1r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}m_2r^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}4mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\pi mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per altra banda, les taules diuen que la closca és un rotor esfèric a  $\mathbf{O}$ . Per tant:

$$[\mathbf{II}_{\text{closca}}(\mathbf{O})] = \frac{2}{3}mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \text{ Sumant els dos tensors:}$$

$$[\mathbf{II}(\mathbf{O})] = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}, \text{ amb } I_{11} = I_{33} = \left( \frac{16 - 3\pi}{12} \right) mr^2 + \frac{2}{3}mr^2 = \left( \frac{8 - \pi}{4} \right) mr^2, I_{22} = \left( \frac{20 - 3\pi}{6} \right) mr^2$$

(\*)

Ja que  $\left| \begin{array}{l} m_1 = \sigma A_1 \\ m_2 = \sigma A_2 \end{array} \right.$  (on  $\sigma$  és la densitat de massa ( $\text{kg/m}^2$ ))