

5P

Versió 0.9.1 (preliminar)

Cinemàtica del sòlid rígid 3D
(CSR 3D)

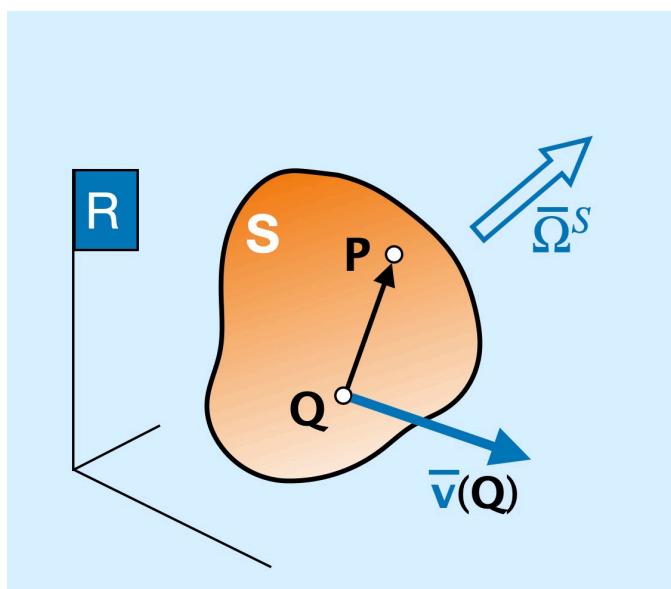
Lluís Ros
<https://luisros.github.io/mecanica>

Recordatori

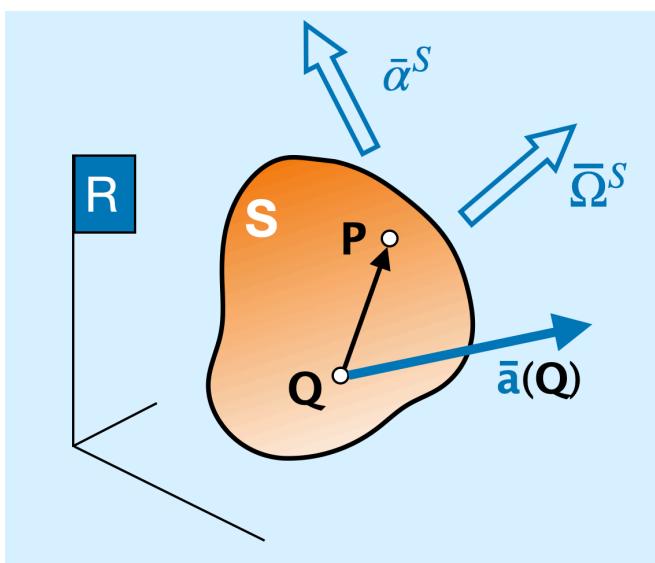
Cinemàtica del sòlid rígid (CSR)

Com que tots els vectors i derivades són en la referència R, hem omès el subíndex R per alleugerir la notació
(al formulari s'ha fet el mateix)

$$\bar{v}(P) = \bar{v}(Q) + \bar{\Omega}^S \times \bar{QP}$$



$$\bar{a}(P) = \bar{a}(Q) + \bar{\Omega}^S \times (\bar{\Omega}^S \times \bar{QP}) + \bar{\alpha}^S \times \bar{QP} \quad = \frac{d\bar{\Omega}^S}{dt}$$



Avui aplicarem les anteriors expressions per calcular velocitats i acceleracions de punts de sòlids rígids.

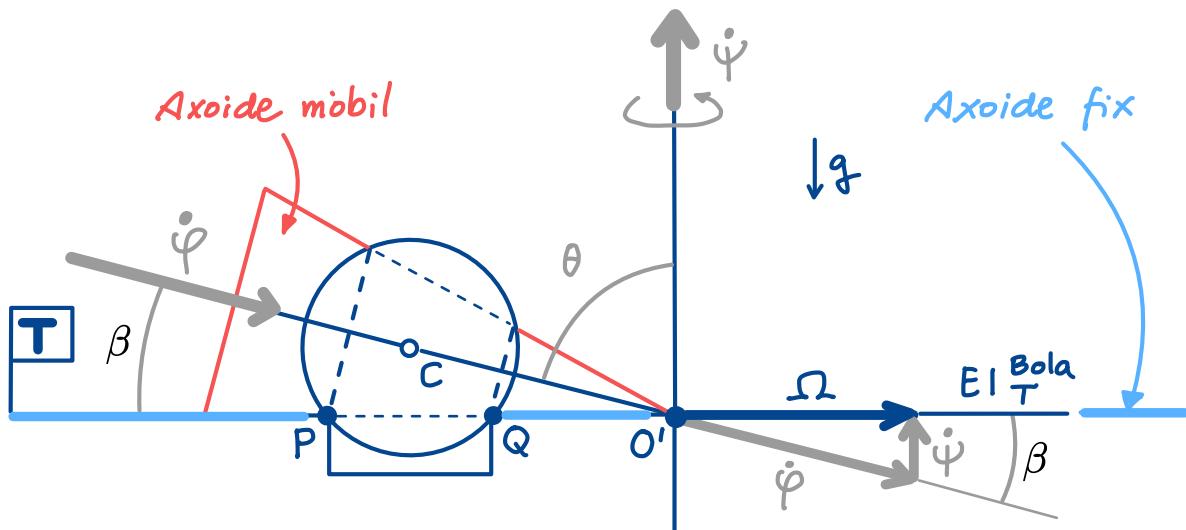
Començarem amb l'exercici de la bola rodolant sobre pista circular (pàgina següent), que ja vareu veure a teoria. Allí el vau treballar a nivell de velocitats, i nosaltres ho farem a nivell d'acceleracions.

Essència de l'argument vist a teoria

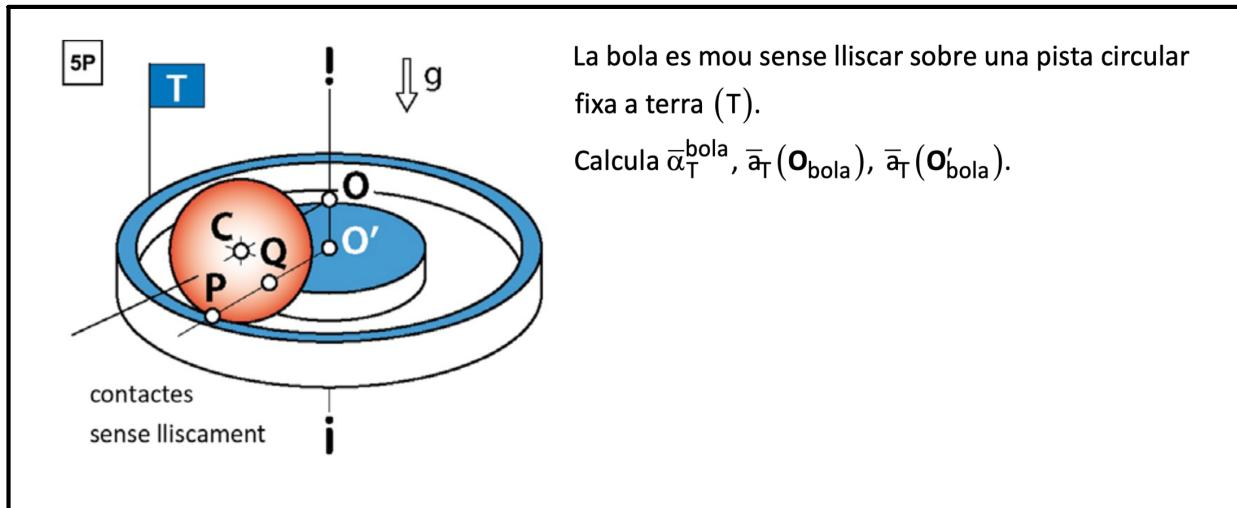
El moviment de la bola sembla complicat. Costa definir uns angles d'Euler que permetin explicar-lo perquè la bola no té cap simetria especial: d'entrada no veiem com podem triar un eix "phipunt" de rotació pròpia (com al giroscopi o a la baldufa).

La solució passa per observar com evoluciona l'eix instantani de la bola al llarg del temps. El conjunt de rectes de la "referència bola" que en algun moment han sigut eix instantani és l'**axoide mòbil** (un con d'obertura β). El conjunt de rectes de la "referència terra" que en algun moment han sigut eix instantani és l'**axoide fix** (el pla horitzontal que passa per O' , vist com a con d'obertura 90°). Ara: l'axoide mòbil rodola sobre el fix al llarg del temps, i es pot veure com una **baldufa caiguda!** El seu eix de simetria ens proporciona l'eix phipunt que volíem, i ara entenem el moviment de la bola. És com el d'una baldufa amb nutació θ constant.

Finalment, veiem que els vectors phipunt i psipunt no són independents: sumats han de donar un vector horitzontal de valor Ω , que és la velocitat angular de la bola respecte T. La bola es mou amb un grau de llibertat, que podem associar a psipunt. Del dibuix queda clar que $\Omega = \text{psipunt} / \tan(\beta)$.



Passem a fer l'exercici, recordant en cada pas allò que s'ha fet a teoria.

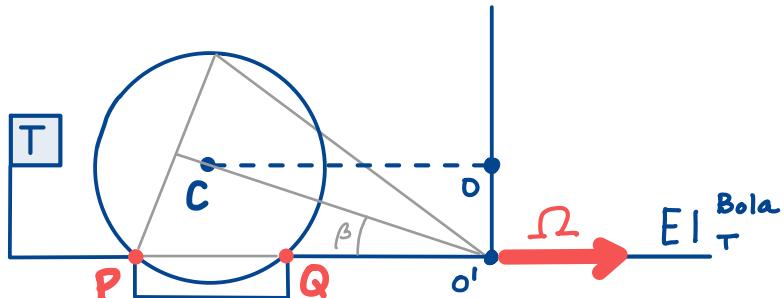


Per trobar $\bar{\alpha}_T^{\text{bola}}$ cal trobar $\bar{\Omega}_T^{\text{bola}}$ i derivar-la respecte el temps.
A teoria ja van calcular $\bar{\Omega}_T^{\text{bola}}$, però recordem com es feia:

$$\bar{\Omega}_T^{\text{bola}}$$

$$\underbrace{v(P) = v(Q) = 0}_{\downarrow}$$

$$EI_T^{\text{bola}} = \overbrace{P \quad Q}^{v_{\text{llisc}}} = \bar{v}_{\text{llisc}} = \bar{\alpha}_T^{\text{bola}}$$



Per tant $\bar{\Omega}_T^{\text{bola}}$ ha de tenir la forma

$$\bar{\Omega}_T^{\text{bola}} = (\Rightarrow \Omega)^{\text{pdet}}$$

Axoide fix

Rectes del terra que en algun moment han sigut EI_T^{bola}

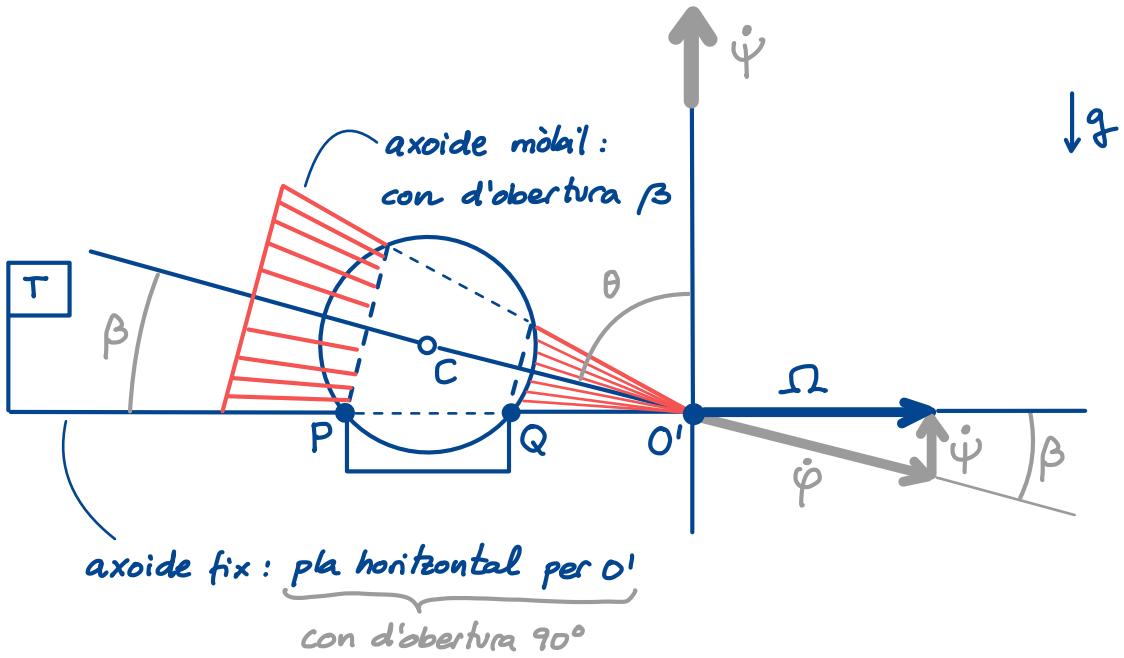
} con d'obertura 90°
(Pla horitz. per O')

Axoide móvil

Rectes de la bola que en algun moment han sigut EI_T^{bola}

} con d'obertura β

Dibuixem els axoides:



En cada instant 1 recta de l'ax. móbil està en contacte amb 1 recta del fix. \Rightarrow L'ax. móbil rodola sobre el fix!

Els punts de l'ax. móbil són fixos a la ref. bola.



Moviment bola resp. $T =$ Movim. ax. móbil resp. ax. fix.



Podem assimilar la bola a una **baldufa cònica caiguda** amb eix de simetria CO' i obertura β .



Podem veure $\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}}$ com suma d'una vel. angular de precessió ($\dot{\psi}$) més una de rotació pròpia ($\dot{\varphi}$):

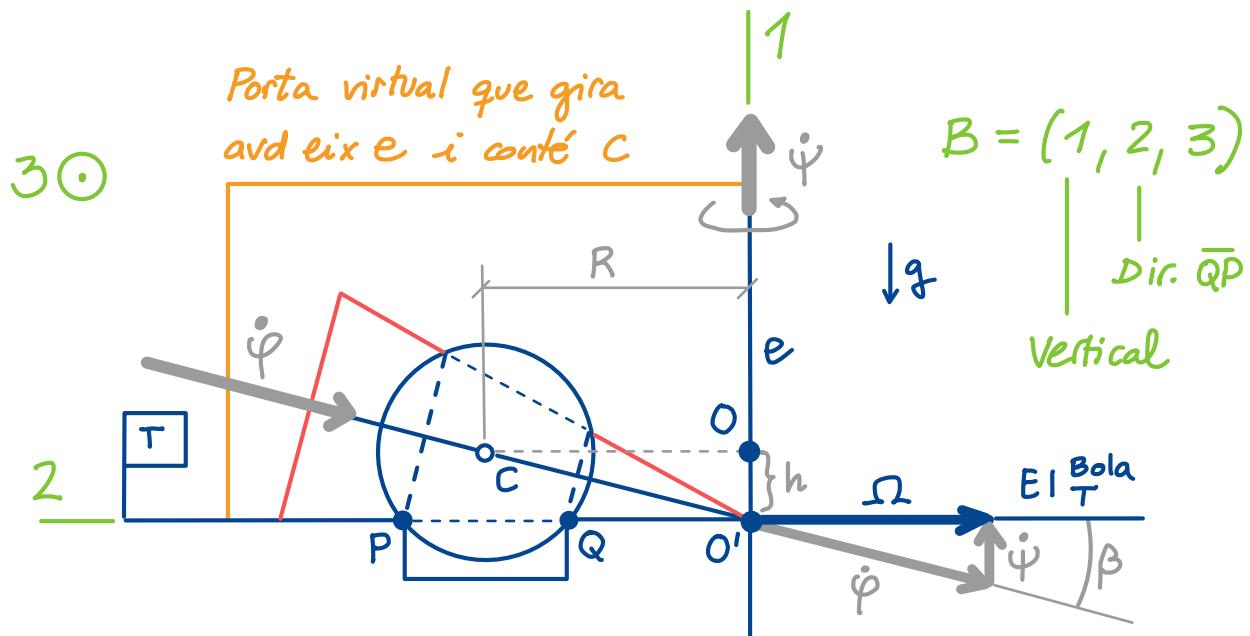
$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = \underbrace{(\uparrow \dot{\psi}) + (\Rightarrow \dot{\varphi})}_{\text{sumades han de donar } (\Rightarrow \Omega)}$$

sumades han de donar ($\Rightarrow \Omega$)

Igual que en una baldufa però amb $\bar{\theta} = 0$
 perquè ara l'angle θ es 'ct'.

$(\dot{\psi})$ = vel. angular de precessió d'una porta virtual que gira avd eix e i conte sempre el punt C

$(\dot{\varphi})$ = vel. angular de rotació pròpia de la bola (vista com a baldufa) avd eix co'.



Finalment veiem:

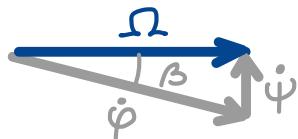
2 maneres de calcular Ω

1 Utilitzant que CE Porta i CE Bola a la vegada:

$$\underbrace{\Omega \dot{\psi} R}_{\bar{v}_T (\text{C Porta})} = \underbrace{\Omega h}_{\bar{v}_T (\text{C Bola})} \Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{R}{h} \dot{\psi}}$$

2 Via el triangle de vel. angulars:

$$\boxed{\Omega = \frac{\dot{\psi}}{\tan \beta} = \frac{\dot{\psi}}{\frac{h}{R}} = \frac{R}{h} \dot{\psi}}$$



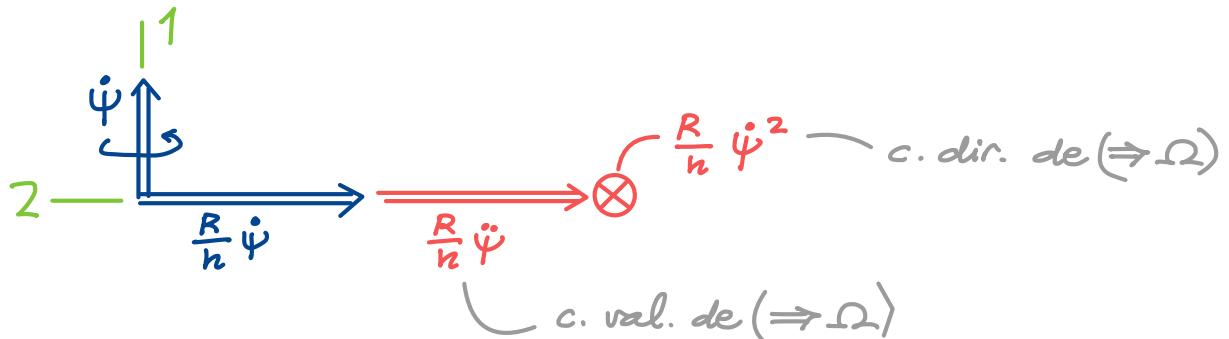
En conclusió:

$$\boxed{\Omega_T^{\text{Bola}} = \left(\Rightarrow \frac{\Omega}{R/h} \dot{\psi} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R}{h} \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix}_B} \quad \text{VEC. PEL·LI!}$$

$$\bar{\alpha}_T^{Bola}$$

Cal derivar $\bar{\Omega}_T^{Bola}$ resp. t (geomètricament o analíticament)

Derivant geomètricament:



$$\bar{\alpha}_T^{Bola} = (\Rightarrow \frac{R}{n} \ddot{\psi}) + (\otimes \frac{R}{n} \dot{\psi}^2) = \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{-\frac{R}{n} \ddot{\psi}} \\ -\frac{R}{n} \dot{\psi}^2 \end{array} \right\}_B$$

Derivant analíticament:

$$\left\{ \bar{\alpha}_T^{Bola} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{-\frac{R}{n} \ddot{\psi}} \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{-\frac{R}{n} \dot{\psi}} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{-\frac{R}{n} \ddot{\psi}} \\ -\frac{R}{n} \dot{\psi}^2 \end{array} \right\}_B$$

Deriv. components
de $\bar{\Omega}_T^{Bola}$

$$\bar{\alpha}_T(O_{Bola})$$

A teoria ja vau calcular $\bar{v}_T(O_{Bola})$. Recordem-ho^(*):

$$\bar{v}_T(O_{Bola}) = \odot \Omega h = \odot R \dot{\psi} \quad \begin{matrix} \Omega = \frac{R}{n} \dot{\psi} \\ \text{VÈC.} \\ \text{FOTO!} \end{matrix}$$

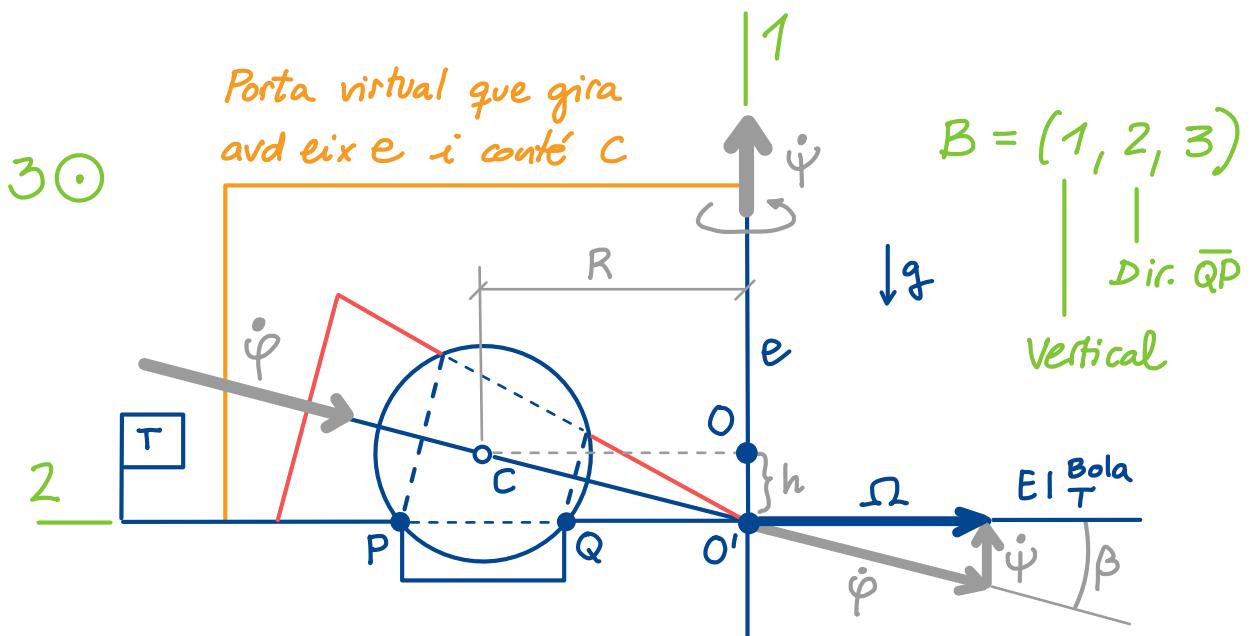
Dist. de O_{Bola} a $E_1 T^{Bola}$

(*) En detall, aquest càcul és, aplicant CSR des de O'_{Bola} :

$$\bar{v}_T(O_{Bola}) = \underbrace{\bar{v}_T(O'_{Bola})}_{O} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Bola}}_{(\Rightarrow \frac{R}{n} \dot{\psi})} \times \underbrace{\overline{O' O}}_{(\uparrow h)} = \odot R \dot{\psi}$$

Ara, per trobar $\bar{a}_T(O_{Bola})$ pots estem temptats de derivar $\bar{v}_T(O_{Bola})$ resp. el temps (geomètricament o analítica). Seria un error! Fixem-nos que $\odot R \dot{\psi}$ només és la velocitat de O_{Bola} en l'instant en que O_{Bola} passa pel punt més alt. Un picosegon + tard, O_{Bola} tindrà una vel. diferent, amb components $\odot, \downarrow, \rightarrow$, que no sabem quines seran. Per tant, $\odot R \dot{\psi}$ és un vector particularitat (o "foto") i no el podem derivar. Com calcularem $\bar{a}_T(0)$, doncs? Aplicant CSR des de C:

$$\begin{aligned} \bar{a}_T(0) &= \underbrace{\bar{a}_T(C)}_A + \underbrace{\bar{\alpha}_T^{Bola} \times \bar{CO}}_B + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Bola} \times (\bar{\Omega}_T^{Bola} \times \bar{CO})}_0 = && \text{Aplicant CSR des de D' ag.} \\ & & & \leftarrow \text{ferme no s'anul·laria i surt un xic + laborios} \\ & = \underbrace{(\odot \ddot{\psi} R)}_A + \underbrace{(\rightarrow \dot{\psi}^2 R)}_B + \left[\left(\Rightarrow \frac{R}{h} \ddot{\psi} \right) + \left(\odot \frac{R}{h} \dot{\psi}^2 \right) \right] \times (\rightarrow R) = \\ & & & \\ & = (\odot \ddot{\psi} R) + (\rightarrow \dot{\psi}^2 R) + \left(\downarrow \frac{R^2 \dot{\psi}^2}{h} \right) = && \left\{ \begin{array}{l} - \frac{R^2 \dot{\psi}^2}{h} \\ - \dot{\psi}^2 R \\ - \ddot{\psi} R \end{array} \right\}_B \end{aligned}$$



$\bar{a}_T(O'Bola)$

$O'Bola$ és l'extrem de l'axoide mòbil, que roman fix a T

$$\text{Per tant } \bar{v}_T(O'Bola) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \bar{a}_T(O'Bola) = 0$$

Així doncs $O'Bola = O'Terra$

$\bar{a}_T(P_{Bola})$

Això no ens ho demanen però ho fem per practicar.

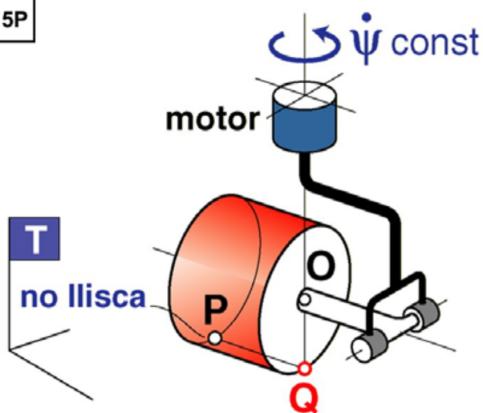
Apliquem CSR des de O' , utilitzant dibuix ant.:

$$\begin{aligned}
 \boxed{\bar{a}_T(P_{Bola})} &= \underbrace{\bar{a}_T(O'Bola)}_0 + \bar{\alpha}_T^{Bola} \times \overline{O'P} + \underbrace{\bar{\omega}_T^{Bola} \times (\bar{\omega}_T^{Bola} \times \overline{O'P})}_0 = \\
 &= \boxed{\left[\left(\Rightarrow \frac{\ddot{\psi}_R}{n} \right) + \left(\otimes \frac{R}{n} \dot{\psi}^2 \right) \right] \times \left[\leftarrow (R+S) \right] = \boxed{\uparrow \left(\frac{R(R+S)}{n} \dot{\psi}^2 \right)}}
 \end{aligned}$$

Mola cilíndrica

Prova NAEP 1998 - 99, 3 febrer 1999

5P



L'eix del corró està articulat a una forquilla que gira amb $\dot{\psi}$ constant respecte del terra (T). El corró manté contacte amb el terra i no llisca a P .

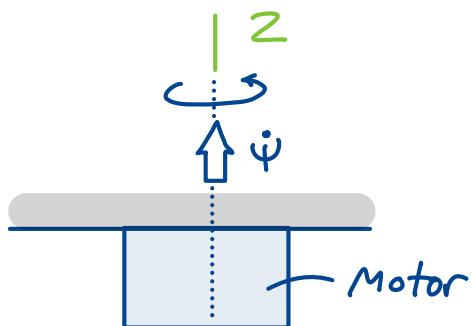
Determina l'EIRL_T^{corró}, i calcula $\bar{v}_T(Q)$, $\bar{a}_T(P)$.

Nota: En la versió original d'aquest problema, el corró s'interpreta com una mola abrasiva que llima el terra (no llisca a P , però sí en la resta de punts del segment PQ). Mantindrem aquesta interpretació, i al corró l'anomenarem "mola".

Solució: pàgina següent.

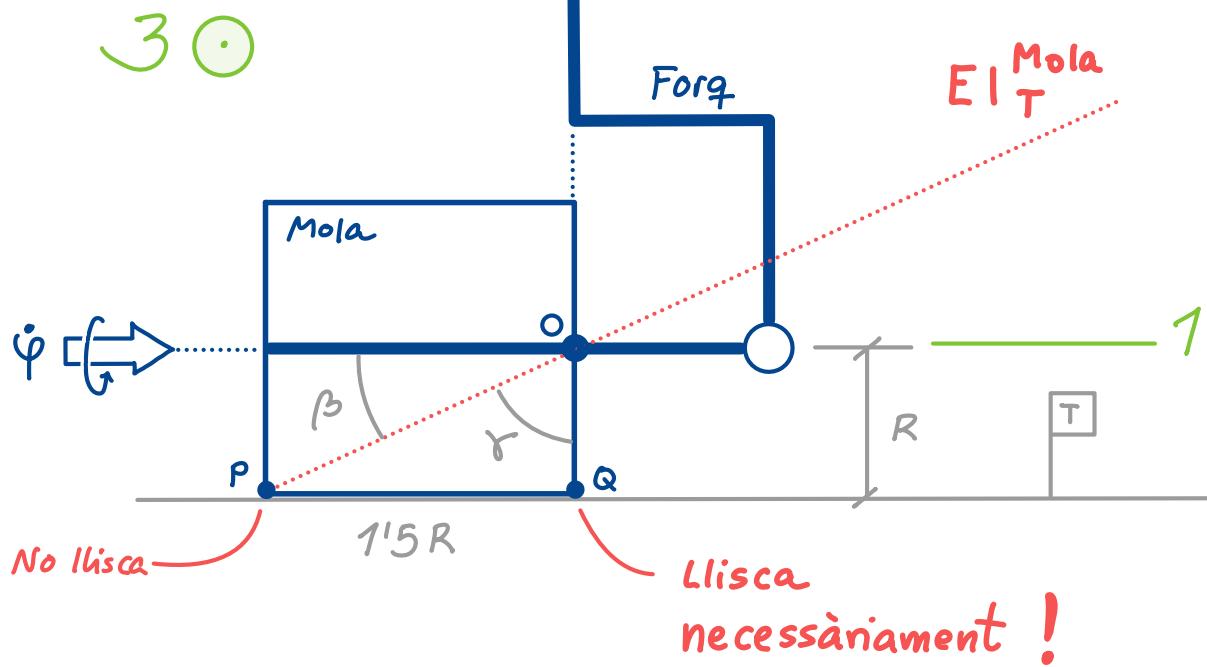
EI_T^{Mola} i axoides

1 GL

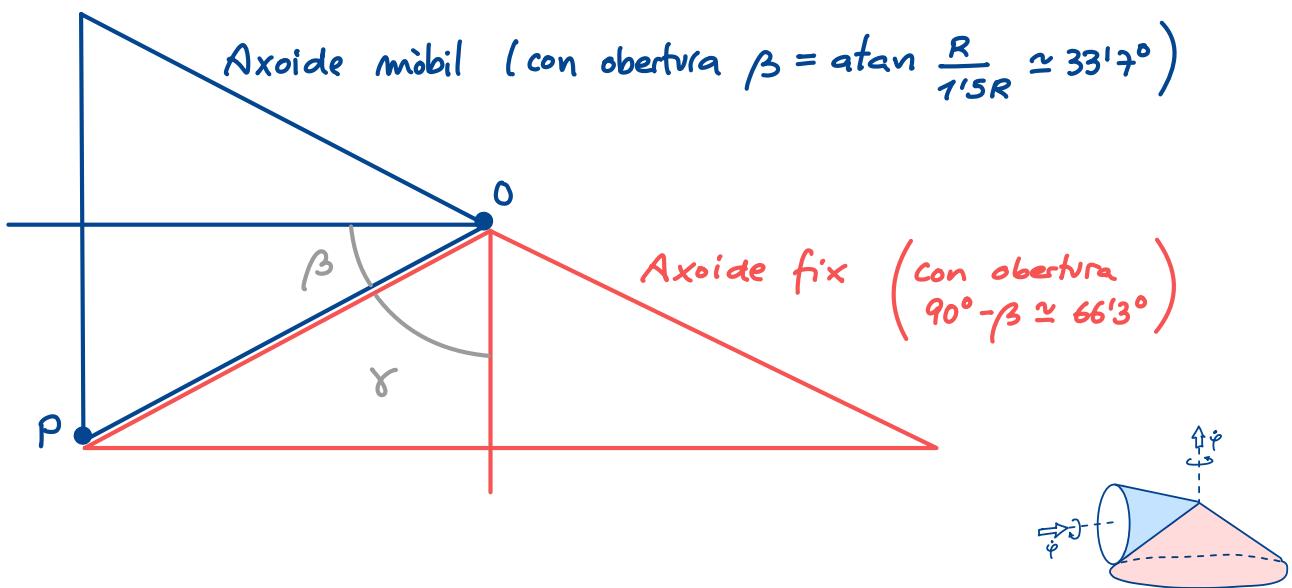


$B = (1, 2, 3)$

Eix mola Vertical



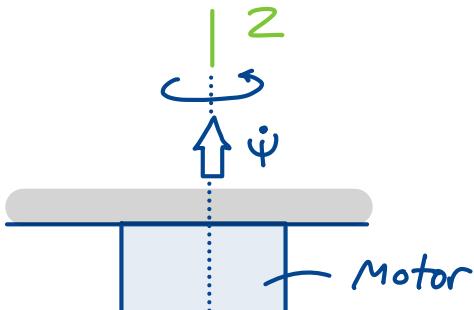
$$EI_T^{\text{Mola}} = \text{recta } OP \quad (\text{p.g. la vel d'}O \text{ i } P \text{ és } 0, \text{ resp. T})$$



$$\bar{\omega}_T(Q) \text{ i } \bar{\alpha}_T(P)$$

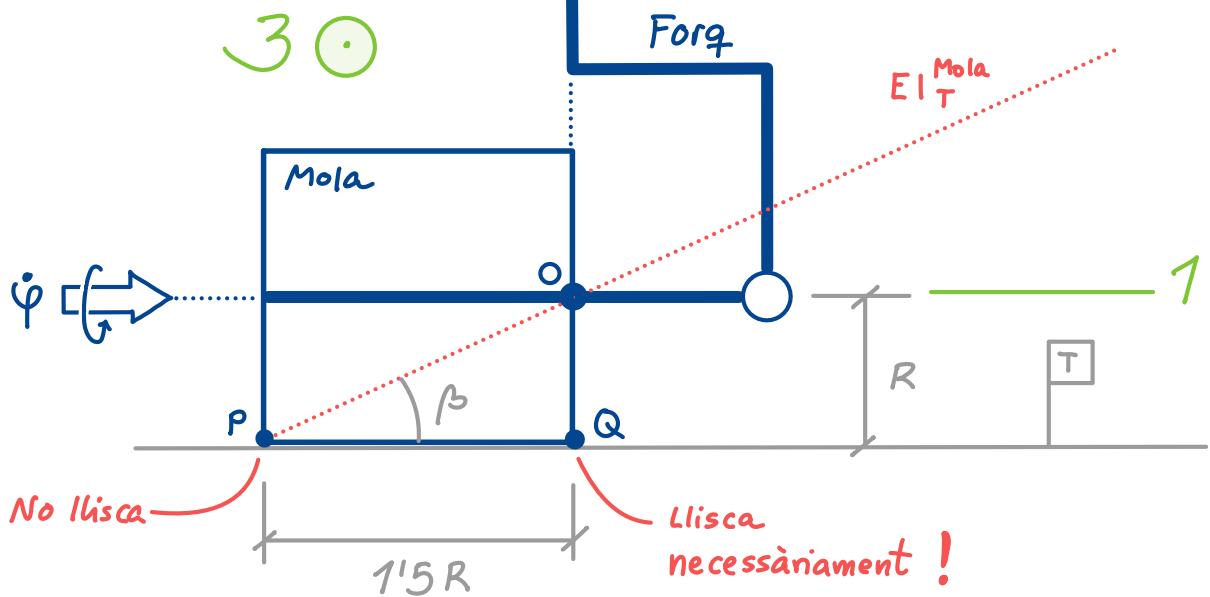
Per trobar $\bar{\omega}_T(Q)$
i $\bar{\alpha}_T(P)$ ens caldrà
trobar abans

- $\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}$
- $\bar{\alpha}_T^{\text{Mola}}$



$$B = (1, 2, 3)$$

Eix mola Vertical

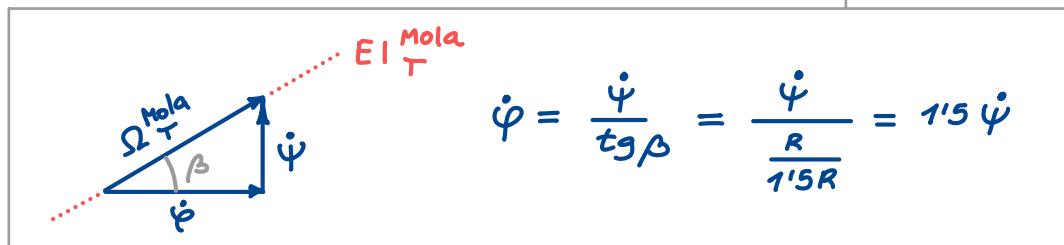


$$\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}$$

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} = \bar{\Omega}_{\text{Forq}}^{\text{Mola}} + \bar{\Omega}_T^{\text{Forq}} = (\Rightarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \dot{\psi}) = (\Rightarrow 1.5 \dot{\varphi}) + (\uparrow \dot{\psi}) = \begin{Bmatrix} 1.5 \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_B$$

No indep!

Posem $\dot{\varphi}$ est $\dot{\psi}$
perquè $\dot{\psi}$ és la
variable controlada



$$\bar{\alpha}_T^{\text{Mola}}$$

$$\bar{\alpha}_T^{\text{Mola}} = \left. \frac{d \bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}}{dt} \right|_T = (\uparrow \dot{\psi}) \times (\Rightarrow 1.5 \dot{\varphi}) = (\vec{\otimes} 1.5 \dot{\varphi}^2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.5 \dot{\varphi}^2 \end{Bmatrix}_B$$

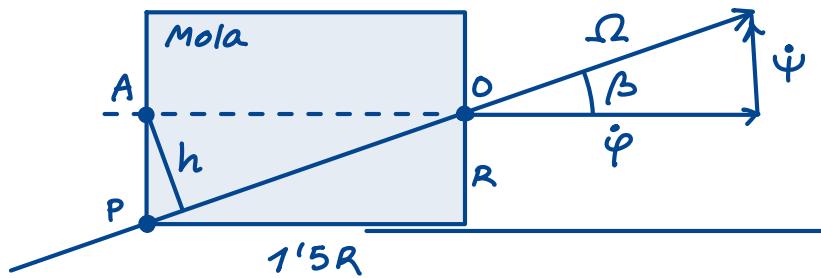
Derivem geomètricament tenint
en compte que $\dot{\varphi} = ct$

$(\Rightarrow 1.5 \dot{\varphi})$ solo té
canvi de dir.
 $(\uparrow \dot{\psi})$ vector ct!

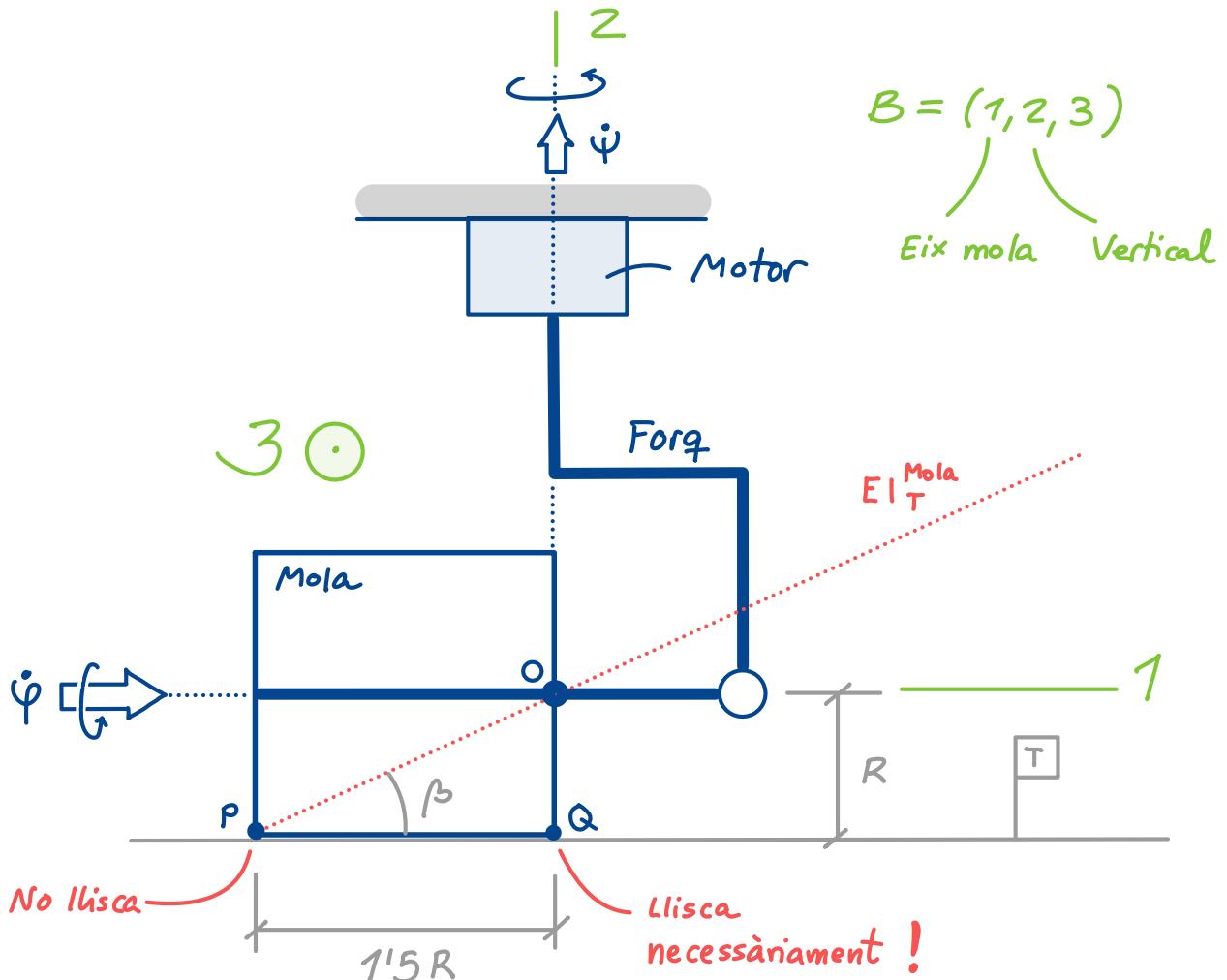
És més llarg, però $\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}$ es pot obtenir té igualant velocitats del punt A, vist com A ∈ Mola, o A ∈ Porta:

$$\underbrace{\odot \Omega \overbrace{1'5R \sin \beta}^h}_{\bar{v}_T(A_{\text{Mola}})} = \underbrace{\odot \dot{\psi} 1'5R}_{\bar{v}_T(A_{\text{Porta}})}$$

$$\Omega = \frac{\dot{\psi}}{\sin \beta}$$



$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} &= (\Rightarrow \Omega \cos \beta) + (\uparrow \Omega \sin \beta) = \\ &= (\Rightarrow \frac{\dot{\psi}}{\tan \beta}) + (\uparrow \dot{\psi}) = (\Rightarrow 1'5 \dot{\psi}) + (\uparrow \dot{\psi})\end{aligned}$$



$$\bar{v}_T(Q)$$

$$\bar{v}_T(Q) = \underbrace{\bar{v}_T(0)}_0 + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} \times \bar{OQ}}_{(\Rightarrow 1.5\dot{\psi} + \uparrow\dot{\psi}) \times (\downarrow R)} = \otimes 1.5\dot{\psi}R \quad \text{CLARAMENT Q Llisca !}$$

$$\bar{a}_T(P)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_T(P) &= \underbrace{\bar{a}_T(0)}_0 + \underbrace{\bar{\alpha}_T^{\text{Mola}} \times \bar{OP} + \bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} \times (\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} \times \bar{OP})}_{0 \quad pq \quad \bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} \text{ es } \parallel \bar{OP}} = \\
 &= (\otimes 1.5\dot{\psi}^2) \times [(\downarrow R) + (\leftarrow 1.5R)] = \\
 &= (\leftarrow 1.5\dot{\psi}^2R) + (\uparrow 2.25\dot{\psi}^2R) = \begin{Bmatrix} -1.5\dot{\psi}^2R \\ 2.25\dot{\psi}^2R \\ 0 \end{Bmatrix}_B
 \end{aligned}$$

Bola impulsada per un rotor i un casquet

5P

$v(P) = v(Q)$

ω_P

ω_Q

T

$P, Q \text{ i } J \text{ no llisquen}$

La bola manté contacte sense lliscar amb el terra, amb un rotor i amb un casquet que giren amb ω_Q i ω_P , respectivament, respecte del terra (T).
Els punts P i Q tenen la mateixa velocitat.
Determina l'EIRL_T^{bola}.

$$\bar{v}_T(P) = \bar{v}_T(Q) \Rightarrow \text{Dir. de recta } \overrightarrow{PQ} \text{ és } \parallel \text{ a EIRL}$$

Es veu així

$$\bar{v}_T(P) = \bar{v}_T(Q) + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} \times \overrightarrow{QP}}$$

Per a que això sigui 0
cal que $\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} \parallel \overrightarrow{QP}$

$$\text{Per altra banda, } \vec{v}_T(J_{\text{Bola}}) = 0$$

Per tant, l'EIRL és \parallel a \overrightarrow{PQ} passant per J .

Bola amb 4 punts de no lliscament

5P R

J, J', K i K'
no llisquen

La bola manté contacte sense lliscar amb el terra (T) i amb un rotor. Determina l'EIRL_T^{bola}.

En principi, sembla evident que

$$EI_T^{\text{Bola}} = \text{recta } JJ'$$

Però això vol dir que les vel. de K i K' són iguals

$$\bar{v}_T(K) = \bar{v}_T(K') = \odot \omega \quad (\text{són } a = d \text{ de l}'EI)$$

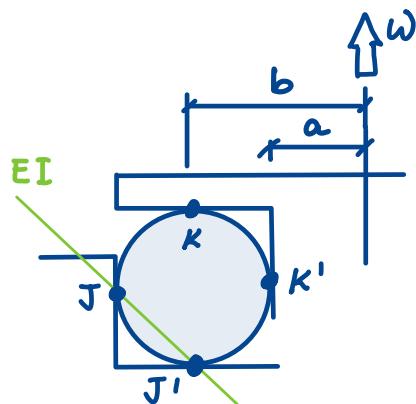
Per altra banda, el rotor impulsa K i K' amb velocitats diferents

$$\bar{v}_T(K) = \odot \omega \cdot b$$

$$\bar{v}_T(K') = \odot \omega \cdot a$$

Només tindrem

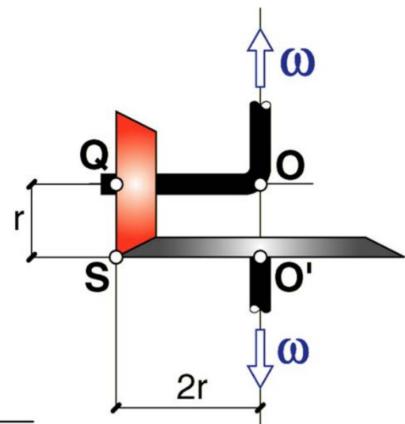
$$\bar{v}_T(K) = \bar{v}_T(K')$$



quan $\omega = 0$, altresment hi hauria lliscament a K o K'. Però si $\omega = 0$, el sistema Bola - Rotor estaria parat, i l'EI no estarà definit.

Rodes dentades

5P



L'eix de la mola gira amb ω respecte del terra (T), i manté contacte sense lliscar amb la plataforma, que gira amb ω respecte del terra.

Determina l'EIRL $_{T\text{mola}}$.

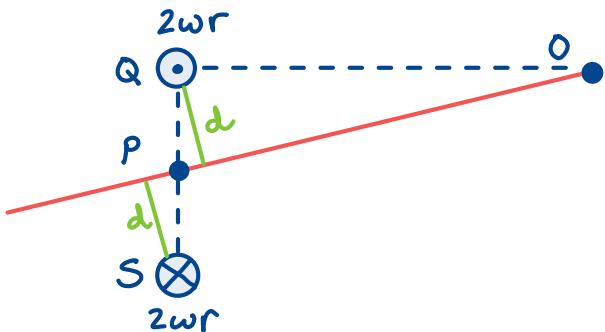
$$\bar{v}_T(O \text{ o } RV) = 0 \Rightarrow EI_T^{RV} \text{ passa per } O, \text{ i } \bar{v}_{llisc} = \bar{0}.$$

$$\bar{\Omega}_T^{RV} = \underbrace{\bar{\Omega}_{Brag}^{RV}}_{(\leftrightarrow \bullet)} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Brag}}_{(\uparrow \bullet)} \quad \Rightarrow \quad \bar{\Omega}_T^{RV} \text{ en el pla del dibuix}$$

(A)

Ergo EI_T^{RV} passa per O i \in pla del dibuix.

$$\begin{aligned} \bar{v}_T(Q) &= \odot 2wr \\ \bar{v}_T(S) &= \otimes 2wr \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad EI_T^{RV} \text{ passa per } P = \text{Punt mig entre } Q \text{ i } S$$

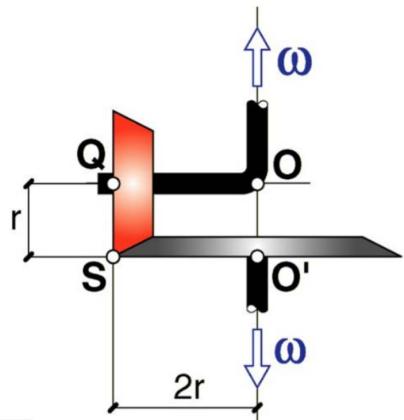


Si EI passés + amunt o avall de P les celeritats de Q i S serien \neq !

Resp: $EI_T^{RV} = \text{recta } PO$ (resp. \odot)

Rodes dentades: solució alternativa

5P



L'eix de la mola gira amb ω respecte del terra (T), i manté contacte sense lliscar amb la plataforma, que gira amb ω respecte del terra.

Determina l'EIRL_T^{mola}.

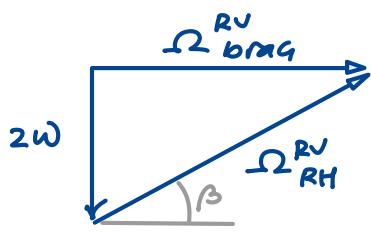
La part (A) és com abans. Ara, per trobar la dir de l'EIR_T^{RV} buscarem $\bar{\Omega}_T^{RV}$:

És en dir. \Rightarrow , només cal veure les rel. de Q i S

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_T^{RV} &= \bar{\Omega}_{\text{Brag}}^{RV} + \bar{\Omega}_T^{\text{Brag}} \\ &= (\rightarrow \Omega_{\text{Brag}}^{RV}) + (\uparrow \omega)\end{aligned}\quad \text{A}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_T^{RV} &= \bar{\Omega}_{RH}^{RV} + \bar{\Omega}_T^{RH} = \\ &= (\leftarrow \Omega_{RH}^{RV}) + (\downarrow \omega)\end{aligned}\quad \text{B}$$

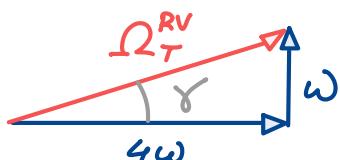
Igualant $A = B$ tenim



$$\Omega_{\text{Brag}}^{RV} = \frac{2\omega}{\tan \beta} = \frac{2\omega}{\frac{1}{2}} = 4\omega$$

$$\bar{\Omega}_{\text{Brag}}^{RV} = (\rightarrow 4\omega)$$

Ergo $\bar{\Omega}_T^{RV}$ de A:



$$\text{on } \tan \gamma = \frac{1}{4}$$

EIR_T^{RV} té la dir d' $\bar{\Omega}_T^{RV}$. Ergo és una recta de pendent $1/4$ que passa per O, i per tant pel punt mig entre Q i S.

Bola contra suport fix

5P

$\Omega_T^{\text{pista}} = \omega$

The diagram shows a ball of radius r rolling without slipping on a circular track of radius r . The track rotates with angular velocity ω relative to the ground (T). The ball's center of mass moves in a circle of radius $2r$ with angular velocity $\bar{\Omega}_T^{\text{bola}}$ relative to the ground. The ball's contact point with the track is labeled P, and its center of mass is labeled S. The track is supported by a fixed base and a bearing (coixinet). A coordinate system is shown at the center of the track.

La bola manté contacte sense lliscar amb un suport fix al terra, i una pista circular que gira amb ω respecte del terra (T).

Calcula $\bar{\Omega}_T^{\text{bola}}$.

Solució: pàgina següent

Solució:

$$\bar{v}_T(P) = \odot 3r\omega$$

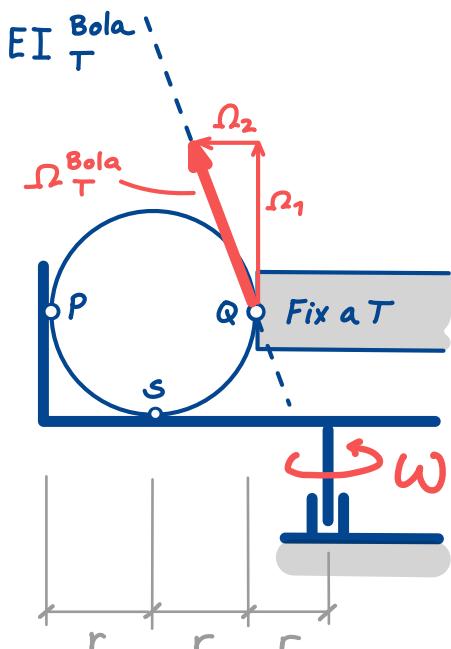
$$\bar{v}_T(S) = \odot 2r\omega$$

$$\bar{v}_T(Q) = \bar{0}$$

$$EI_T^{Bola} = \text{recta per } Q$$

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = (\uparrow \Omega_1) + (\leftarrow \Omega_2)$$

Ha de ser en el pla del dibuix
vist com són $\bar{v}_T(P)$ i $\bar{v}_T(S)$



$\bar{v}_T(P)$ calculada des de Q:

$$\odot 3r\omega = [(\uparrow \Omega_1) + (\leftarrow \Omega_2)] \times (\leftarrow 2r)$$

$$\odot 3r\omega = \odot 2\Omega_1 r$$

$$\Omega_1 = \frac{3}{2} \omega \quad (I)$$

2 condicions
que deter-
minen Ω_1
i Ω_2

$\bar{v}_T(S)$ calculada des de Q:

$$\odot 2r\omega = [(\uparrow \Omega_1) + (\leftarrow \Omega_2)] \times [(\leftarrow r) + (\downarrow r)]$$

$$\odot 2r\omega = (\uparrow \Omega_1) \times (\leftarrow r) + (\leftarrow \Omega_2) \times (\downarrow r)$$

$$\odot 2r\omega = (\odot \Omega_1 r) + (\odot \Omega_2 r)$$

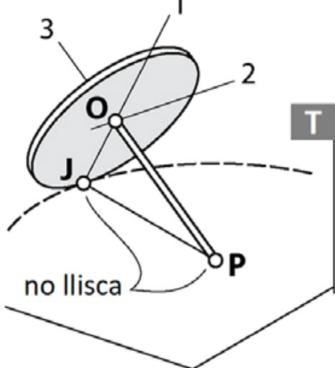
$$2r\cancel{\omega} = (\Omega_1 + \Omega_2)r$$

$$\Omega_2 = 2\omega - \Omega_1 \stackrel{(I)}{=} 2\omega - \frac{3}{2}\omega = \frac{\omega}{2}$$

Per tant

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = \left(\uparrow \frac{3}{2}\omega \right) + \left(\leftarrow \frac{\omega}{2} \right)$$

5P $v_T(O)$ valor variable



El disc i el braç són solidaris, i mantenen contacte sense lliscar amb el terra (T). El centre del disc O té celeritat variable respecte del terra. Determina la direcció de $\bar{\alpha}_T^{\text{disc}}$.

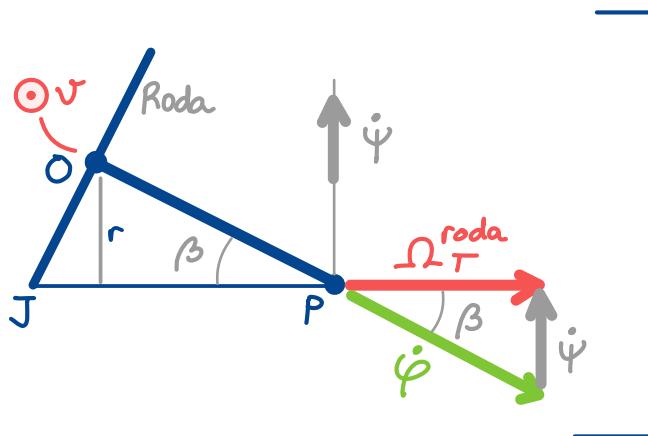
Solució

Clarament $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_T^{\text{roda}} = \text{recta } JP. \\ \bar{\Omega}_T^{\text{roda}} \text{ té la dir. de la recta } JP \end{array} \right.$

Signi v la celeritat de O . Suposem inicialment que

$$\bar{v}_T(O) = \odot v,$$

d'acord amb el seg. dibuix:



Podem veure la roda com una baldufa de vel. angular

$$\bar{\Omega}_T^{\text{roda}} = \bar{\psi} + \bar{\dot{\psi}}$$

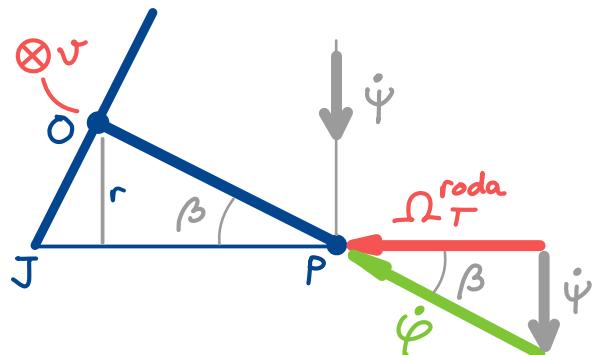
Com que $\bar{\Omega}_T^{\text{roda}}$ té dir. horizontal, ha de ser

$$\bar{\Omega}_T^{\text{roda}} = \left(\rightarrow \frac{v}{r} \right)$$

i derivant geomètricament :

$$\bar{\alpha}_T^{\text{roda}} = \left(\rightarrow \frac{\dot{v}}{r} \right) + \left(\otimes \dot{\psi} \frac{v}{r} \right)$$

Si laquèssim assumit $\bar{v}_T(0) = \otimes v$, hauríem obtingut



$$\bar{\Omega}_T^{\text{roda}} = \left(\leftarrow \frac{v}{r} \right)$$

$$\bar{\alpha}_T^{\text{roda}} = \left(\leftarrow \frac{\dot{v}}{r} \right) + \left(\otimes \dot{\psi} \frac{v}{r} \right)$$

En ambdós casos, la resposta es la mateixa.