1P prof

Derivació analítica
(teoria i exercicis)

\+

Derivació geomètrica
(exercicis)

\+

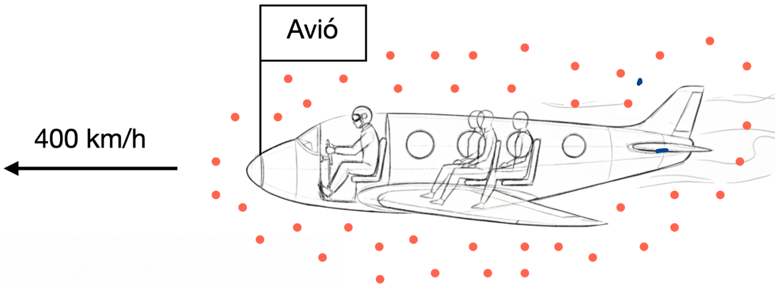
Components intrínseques
(exercicis)

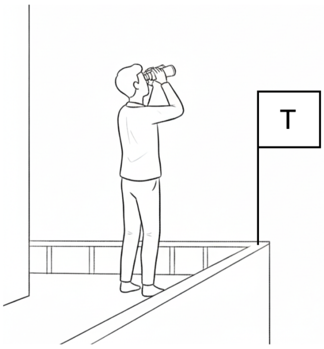
Lluís Ros
https://lluisros.github.io/mecanica

2025-26 Q2

Recordem:

Referència

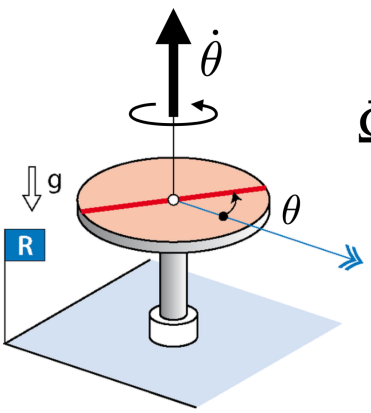




$$\bar{v}_{\text{avió}}(\text{Passatgers}) = \bar{0} \text{ km/h}$$

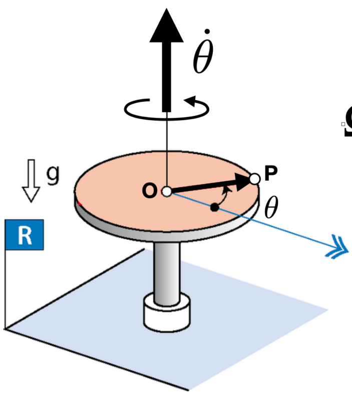
$$\bar{v}_{\text{T}}(\text{Passatgers}) = \left(\leftarrow 400 \text{ km/h} \right)$$

Vel. angular d'un sòlid
(en rotació simple)



$$\bar{\Omega}_{\text{T}}^{\text{Plat}} = \left(\uparrow \dot{\theta} \right)$$

Vel. angular d'un vector
(en rotació simple)



$$\bar{\Omega}_{\text{R}}^{\overline{\text{OP}}} = \left(\uparrow \dot{\theta} \right)$$

També hem vist derivació geomètrica de vectors

Avui: derivació analítica | camí + ràpid quan el vector es mou de manera general

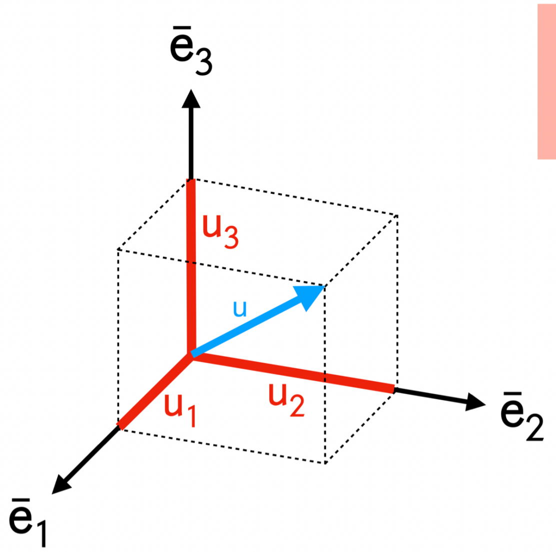
Repr. analítica d'un vec.

$$\left\{ \vec{u} \right\}_B = \sum_{i=1}^{3} u_i \, \bar{e}_i = \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}_B}_{\text{Not. + compacta}}$$

Indica $\vec{u}$ expr. en base B

Per treballar analíticament, triem una base …

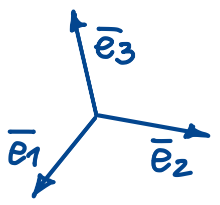
$$B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$



$\bar{e}_i$ = "versors"

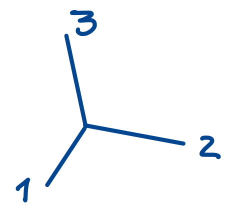
u_i = "components"

Sempre triarem B dextrògira



$B = (\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3)$

$=$

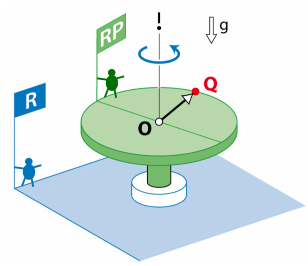


$B = (1, 2, 3)$

Derivació analítica

$$\bar u = \sum_{i=1}^{3} u_i \, \bar e_i$$

P.q. $\left.\bullet\right]_R$?



$$\boxed{\left\{ \left.\frac{d\bar u}{dt}\right]_R \right\}_B} = \sum_{i=1}^{3} \dot u_i \, \bar e_i + u_i \left.\frac{d\bar e_i}{dt}\right]_R =$$

$$\left.\frac{d\bar e_i}{dt}\right]_R = \bar\Omega_R^{\bar e_i} \times \bar e_i = \bar\Omega_R^{B} \times \bar e_i$$

$$\forall i \quad \bar\Omega_R^{\bar e_i} = \bar\Omega_R^{B}$$

derivació geomètrica

$$= \sum_{i=1}^{3} \dot u_i \, \bar e_i + u_i \left(\bar\Omega_R^{B} \times \bar e_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \dot u_i \, \bar e_i + \bar\Omega_R^{B} \times \left(u_i \, \bar e_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \dot u_i \, \bar e_i + \bar\Omega_R^{B} \times \sum_{i=1}^{3} u_i \, \bar e_i =$$

Fórmula derivació analítica

$$\left\{\left.\frac{d\bar{u}}{dt}\right]_R\right\}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\\ \dot{u}_3\end{Bmatrix}}_{\text{Derivada de les components}} + \underbrace{\{\bar{\Omega}^B_R\}_B}_{\text{òmega de la base}} \times \underbrace{\{\bar{u}\}_B}_{\text{Vec sense derivar}}$$

$$\frac{d}{dt}\{\bar{u}\}_B$$

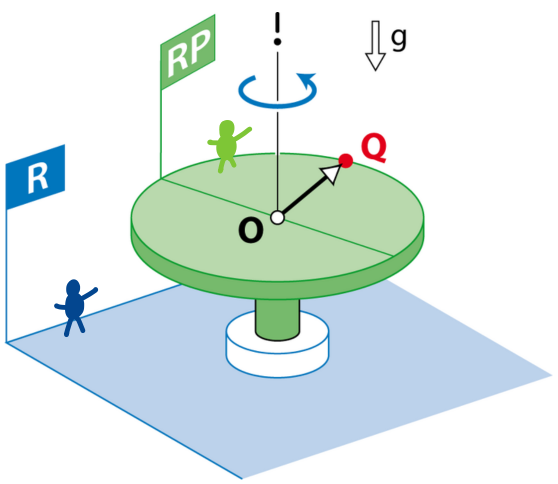
Producte vectorial

$$\{\bar{\mathbf{u}}\}_B \times \{\bar{\mathbf{v}}\}_B = \begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}u_2v_3 - u_3v_2\\ u_3v_1 - u_1v_3\\ u_1v_2 - u_2v_1\end{Bmatrix}$$

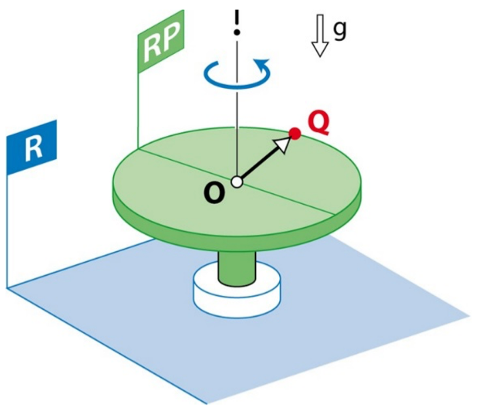
$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

Cofactors de i, j, k

FAQ : Per què escrivim $\left.\frac{d\bar{u}}{dt}\right]_R$?



Pq el ritme de canvi d'un vec. depèn des d'on l'avaluem.



La plataforma (RP) gira respecte del terra (R). Mitjançant la derivada analítica, calcula:

$\bar{v}_R(\mathbf{Q}), \bar{a}_R(\mathbf{Q}), \bar{\alpha}_R^{RP}$.

$\bar{v}_R(Q)$ i $\bar{a}_R(Q)$

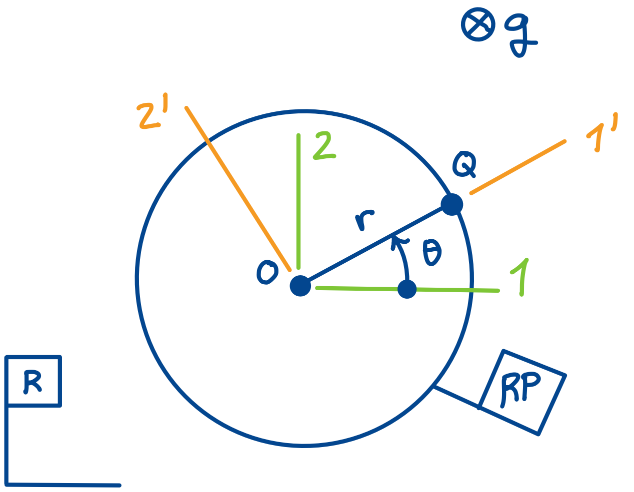
Vec. pos de Q a R?

$\overline{OQ}$ es adient (O fix a R)

2 bases naturals:

$\underbrace{B = (1,2,3)}_{\text{d'or. fixa a T}}$

$\underbrace{B' = (1',2',3')}_{\text{d'or. fixa a RP}}$



En base B

$$\left\{\overline{OQ}\right\}_B = \begin{Bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{v}_R(Q)\right\}_B = \left\{\left[\frac{d\overline{OQ}}{dt}\right]_R\right\}_B = \begin{Bmatrix} \text{deriv.} \\ \text{de les} \\ \text{comp.} \end{Bmatrix}_B + \cancel{\left\{\bar{\Omega}^B_R\right\}_B}^{\,\bar{0}} \times \begin{Bmatrix} \text{vec.} \\ \text{sense} \\ \text{derivar} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{a}_R(Q)\}_B = \left\{\left[\frac{d\,\bar{v}_R(Q)}{dt}\right]_R\right\}_B = \begin{Bmatrix} -r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \\ r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

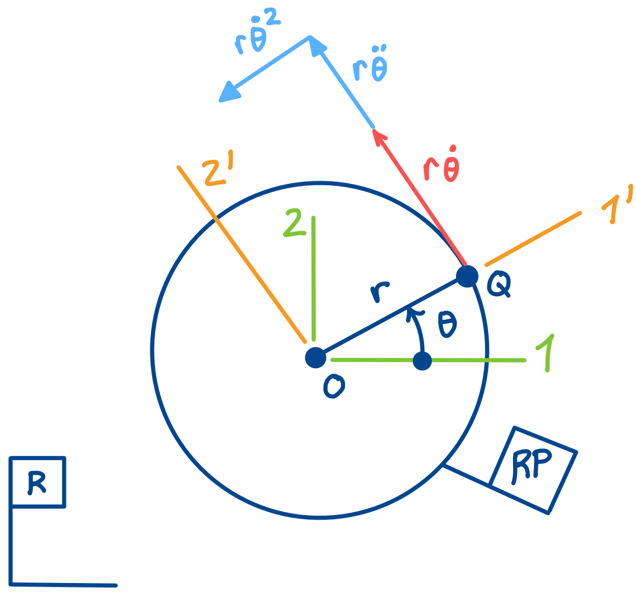
En base B'

$$\{\overline{OQ}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{v}_R(Q)\}_{B'} = \left\{\left[\frac{d\,\overline{OQ}}{dt}\right]_R\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \overbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}^{\bar{\Omega}_R^{B'} = (\odot\,\dot{\theta})} \times \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = (\nwarrow r\dot{\theta})$$

$$\{\bar{a}_R(Q)\}_{B'} = \left\{\left[\frac{d\,\bar{v}_R(Q)}{dt}\right]_R\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = (\nwarrow r\ddot{\theta}) + (\swarrow r\dot{\theta}^2)$$

Quadren amb deriv. geomètrica :



- Base = Llenguatge per expressar vectors

- Base ≠ Ref

$\bar{\alpha}^{RP}_{R}$

$$\bar{\alpha}^{RP}_{R} = \left.\frac{d\,\bar{\Omega}^{RP}_{R}}{dt}\right]_{R} = \text{Deriv. temporal de } \bar{\Omega}^{RP}_{R} \text{ a ref. } R$$

$$\left\{\bar{\Omega}^{RP}_{R}\right\}_{B} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}_{(\odot\dot{\theta})} = \left\{\bar{\Omega}^{RP}_{R}\right\}_{B'} \leftarrow \text{És } (\odot\dot{\theta})$$

Derivem-la en base B:

$$\left\{\bar{\alpha}^{RP}_{R}\right\}_{B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \overset{0}{\cancel{\bar{\Omega}^{B}_{R}}} \times \bar{\Omega}^{RP}_{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \leftarrow \text{És } (\odot\ddot{\theta})$$

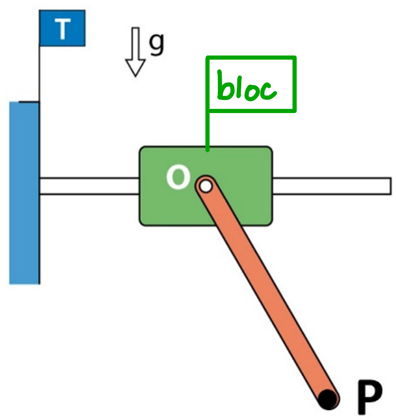
DEURES

Ara en base B':

$$\left\{\bar{\alpha}^{RP}_{R}\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \overset{\bar{0}\ (\text{són paral·lels})}{\cancel{\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}^{B'}_{R}} \times \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}^{RP}_{R}}}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \leftarrow \text{És } (\odot\ddot{\theta})$$

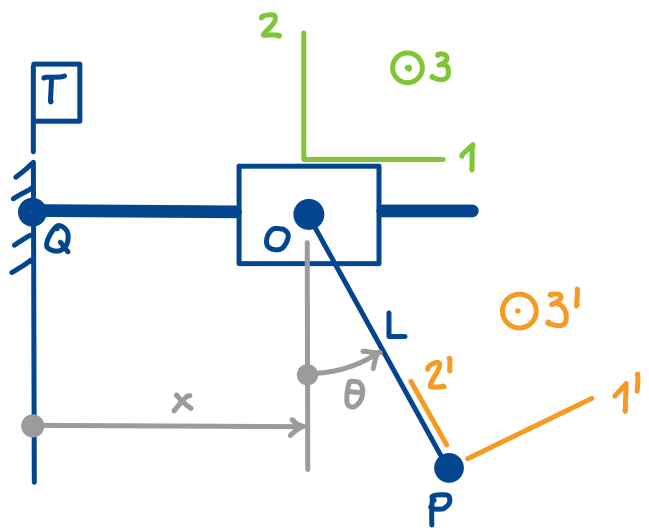
Com era d'esperar

En ambdues bases surt el mateix resultat, ja que $\odot\dot{\theta}$ només té canvi de valor $(\odot\ddot{\theta})$.



El bloc es pot moure al llarg de la guia fixa a terra (T). La barra està articulada al bloc. Mitjançant la derivada analítica, calcula

$$\bar{v}_{bloc}(\mathbf{P}),\ \bar{a}_{bloc}(\mathbf{P}),\ \bar{v}_T(\mathbf{P}),\ \bar{a}_T(\mathbf{P}),\ \bar{\alpha}_T^{barra}.$$



Dues bases "naturals":

- $\underbrace{B = (1,2,3)}$ d'or. fixa al bloc
- $\underbrace{B' = (1',2',3')}$ d'or. fixa a la barra

$\bar{v}_{bloc}(P)$ i $\bar{a}_{bloc}(P)$

En base B

$$\{\overline{OP}\}_B = \begin{Bmatrix} L\sin\theta \\ -L\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \longleftarrow \text{Introduïm } \theta$$

$$\{\bar{v}_{bloc}(P)\}_B = \begin{Bmatrix} L\dot{\theta}\cos\theta \\ L\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \longleftarrow \bar{\Omega}^B_{bloc} = \bar{0}$$

$$\{\bar{a}_{bloc}(P)\}_B = \begin{Bmatrix} L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta \\ L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \longleftarrow \bar{\Omega}^B_{bloc} = \bar{0}$$

En base B'

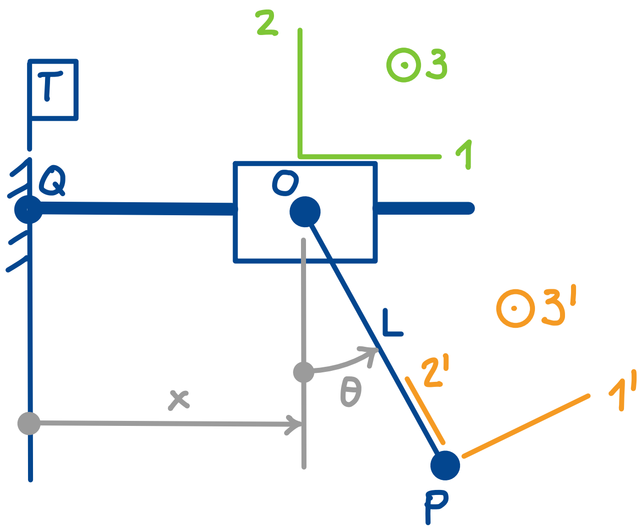
$$\{\overline{OP}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{v}_{bloc}(P)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \overbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}^{\overline{\Omega}^{B'}_{bloc}} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{a}_{bloc}(P)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} L\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \overbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}^{\overline{\Omega}^{B'}_{bloc}} \times \begin{Bmatrix} L\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L\ddot{\theta} \\ L\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\bar{v}_T(P)$ i $\bar{a}_T(P)$

En base B



Introduim x

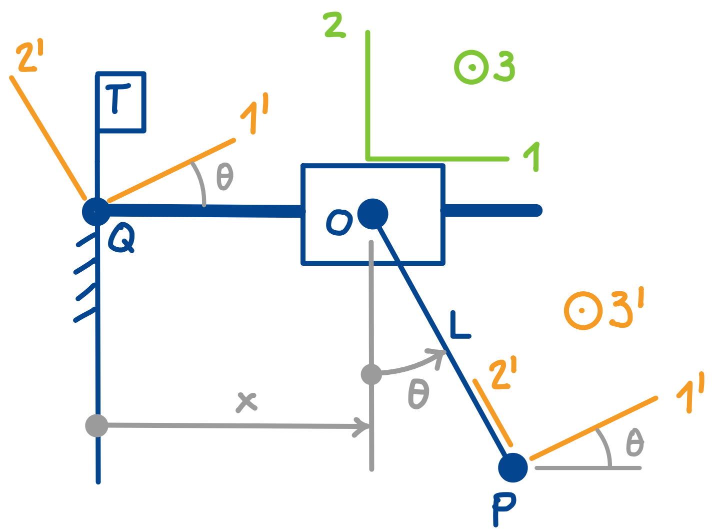
$$\{\overline{QP}\}_B = \{\overline{QO}\}_B + \{\overline{OP}\}_B =$$

$$= \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} L\sin\theta \\ -L\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x + L\sin\theta \\ -L\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta \\ L\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{\bar{a}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} \ddot{x} + L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta \\ L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\bar{\Omega}^B_T = 0$

En base B'



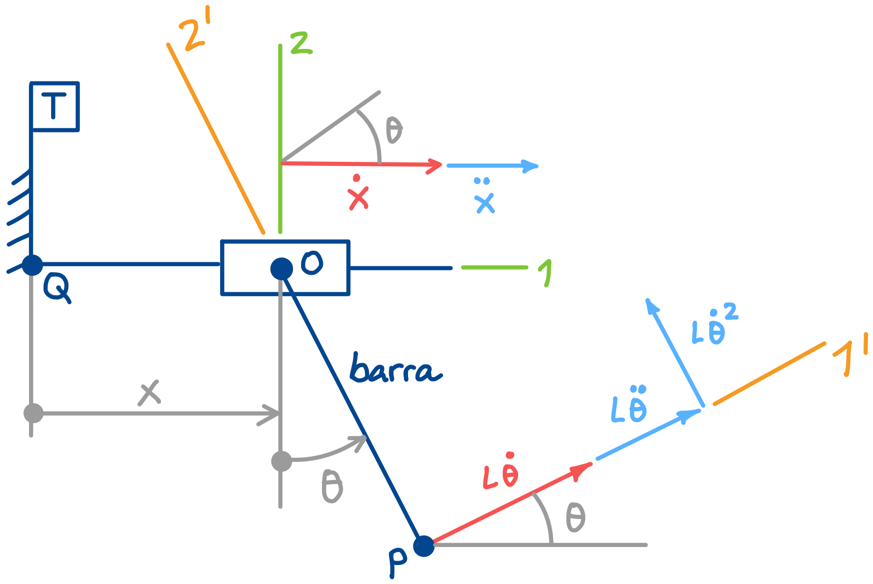
$$\{\bar{QP}\}_{B'} = \{\bar{QO}\}_{B'} + \{\bar{OP}\}_{B'} =$$

$$= \begin{Bmatrix} x\cos\theta \\ -x\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x\cos\theta \\ -L-x\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{v}_T(P)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\sin\theta \\ -\dot{x}\sin\theta - x\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x\cos\theta \\ -L-x\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} \dot{\theta}L + x\dot{\theta}\sin\theta \\ x\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta + L\dot{\theta} \\ -\dot{x}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{a}_T(P)\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + L\ddot{\theta} \\ -\ddot{x}\sin\theta - \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta + L\dot{\theta} \\ -\dot{x}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + L\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta} \\ -\ddot{x}\sin\theta + L\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\bar{v}_T(P)$ i $\bar{a}_T(P)$ obtinguts geomètricament, quadren:



$$\bar{v}_T(P) = (\rightarrow \dot{x}) + (\nearrow L\dot{\theta})$$

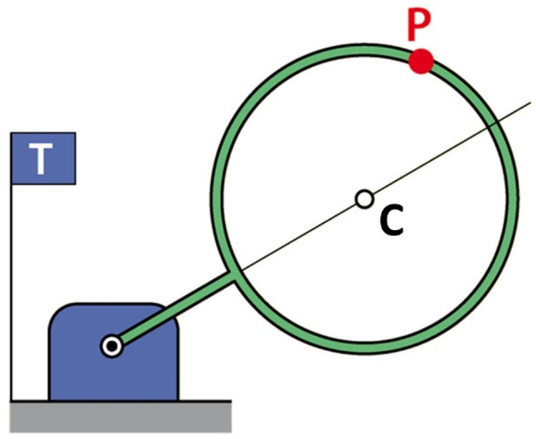
$$\bar{a}_T(P) = (\rightarrow \ddot{x}) + (\nearrow L\ddot{\theta}) + (\nwarrow L\dot{\theta}^2)$$

$\bar{\alpha}_T^{\,barra}$

$$\left\{\bar{\Omega}_T^{\,barra}\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{\alpha}_T^{\,barra}\right\}_B = \left\{ \left[\frac{d\bar{\Omega}_T^{\,barra}}{dt}\right]_T \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

En B' surt igual

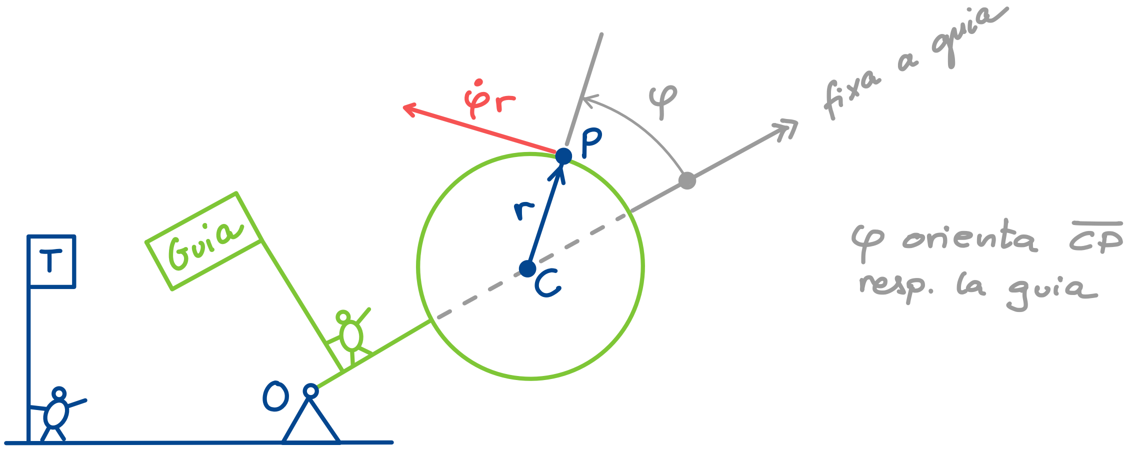


La guia circular està articulada al terra (T). La partícula **P** es mou dins la guia. Mitjançant la derivada geomètrica, calcula

$\overline{v}_{guia}(\mathbf{P}),\ \overline{v}_{T}(\mathbf{P}),\ \overline{\alpha}_{T}^{guia},\ \overline{\alpha}_{T}^{\overline{CP}}$.

$\overline{v}_{Guia}(P)$

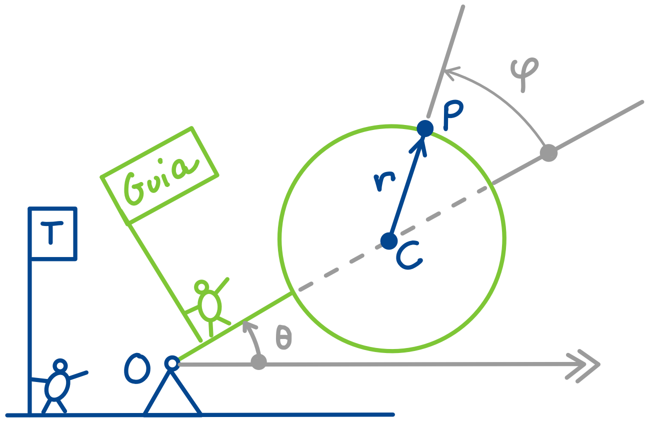
$\overline{CP}$ vec. pos. vàlid de P a ref. Guia



$$\boxed{\overline{v}_{Guia}(P)} = \left[\frac{d\,\overline{CP}}{dt}\right]_{Guia} = \underbrace{\left[\text{canvi valor}\right]}_{0} + \underbrace{\left[\text{canvi dir.}\right]}_{\overline{\Omega}^{\overline{CP}}_{Guia} \times \overline{CP}} =$$

$$= \boxed{(\circlearrowleft \dot\varphi) \times (\nearrow r) = (\nwarrow \dot\varphi r)}$$

$\bar\alpha_T^{Guia}$



$$\bar\Omega_T^{Guia} = (\overset{\curvearrowleft}{\odot}\ \dot\theta)$$

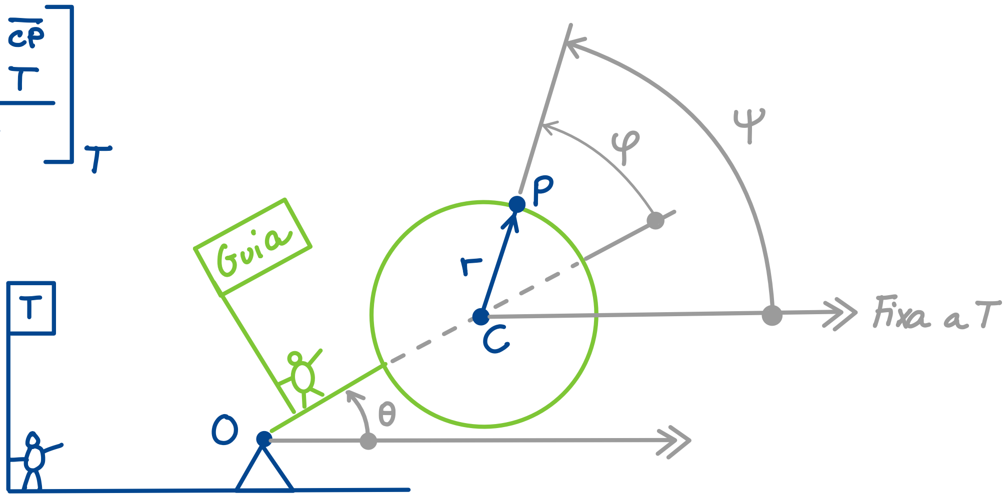
$$\bar\alpha_T^{Guia} = \left.\frac{d\,\bar\Omega_T^{Guia}}{dt}\right]_T =$$

$$= \underbrace{\left[\begin{array}{c}\text{canvi}\\ \text{valor}\end{array}\right]}_{\overset{\curvearrowleft}{\odot}\ \ddot\theta} + \underbrace{\left[\begin{array}{c}\text{canvi}\\ \text{dir.}\end{array}\right]}_{=\,0} = (\overset{\curvearrowleft}{\odot}\ \ddot\theta)$$

perquè $\bar\Omega_T^{Guia}$ sempre té dir. $\overset{\curvearrowleft}{\odot}$

$\bar\alpha_T^{\overline{CP}}$

$$\bar\alpha_T^{\overline{CP}} = \left.\frac{d\,\bar\Omega_T^{\overline{CP}}}{dt}\right]_T$$



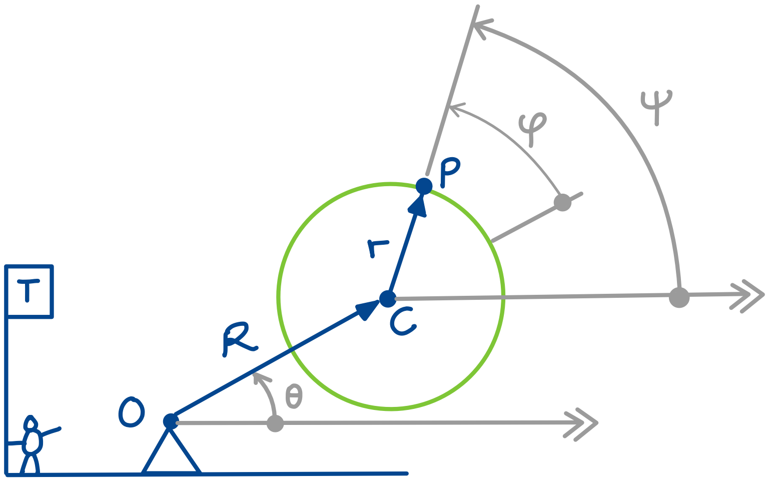
No $\dot\varphi$!

$$\bar\Omega_T^{\overline{CP}} = (\odot\ \dot\psi) = \left[\overset{\curvearrowleft}{\odot}\ (\dot\varphi + \dot\theta)\right]$$

$$\bar\alpha_T^{\overline{CP}} = \left[\begin{array}{c}\text{canvi}\\ \text{valor}\end{array}\right] + \underbrace{\cancel{\left[\begin{array}{c}\text{canvi}\\ \text{direcció}\end{array}\right]}}_{0} = \left[\overset{\curvearrowleft}{\odot}\ (\ddot\varphi + \ddot\theta)\right]$$

$\overline{v}_T(P)$

Vec. pos. adient és $\overline{OP}$



canvia | en valor / en dir.

Costa de derivar

El descomponem:

$$\overline{OP} = \underbrace{\overline{OC} + \overline{CP}}_{\text{Sols canvien de dir!}}$$

Ja podem derivar:

Només tenen canvi de dir.

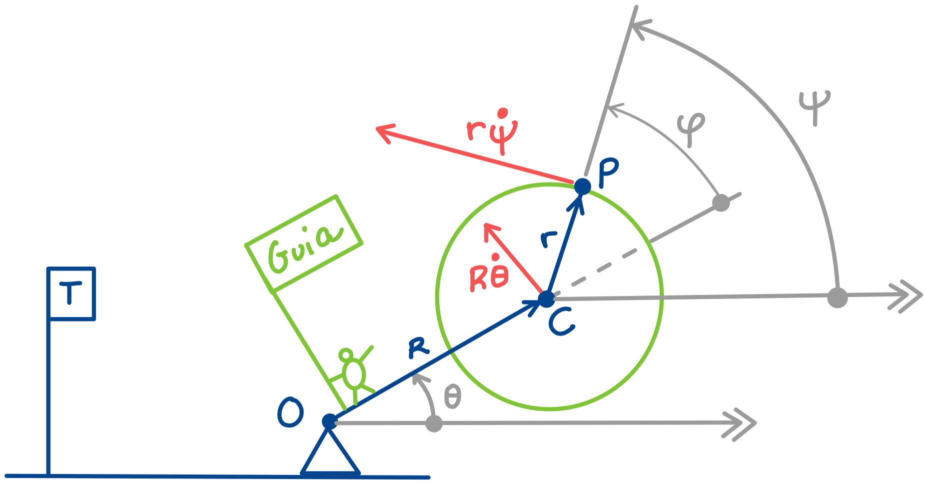
$$\boxed{\overline{v}_T(P)} = \left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T = \left.\frac{d\overline{OC}}{dt}\right]_T + \left.\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_T =$$

$$= \overline{\Omega}^{\overline{OC}}_{T} \times \overline{OC} + \overline{\Omega}^{\overline{CP}}_{T} \times \overline{CP} =$$

$$= (\odot\ \dot{\theta}) \times (\underbrace{R}_{|\overline{OC}|}) + (\odot\ \dot{\psi}) \times (r) =$$

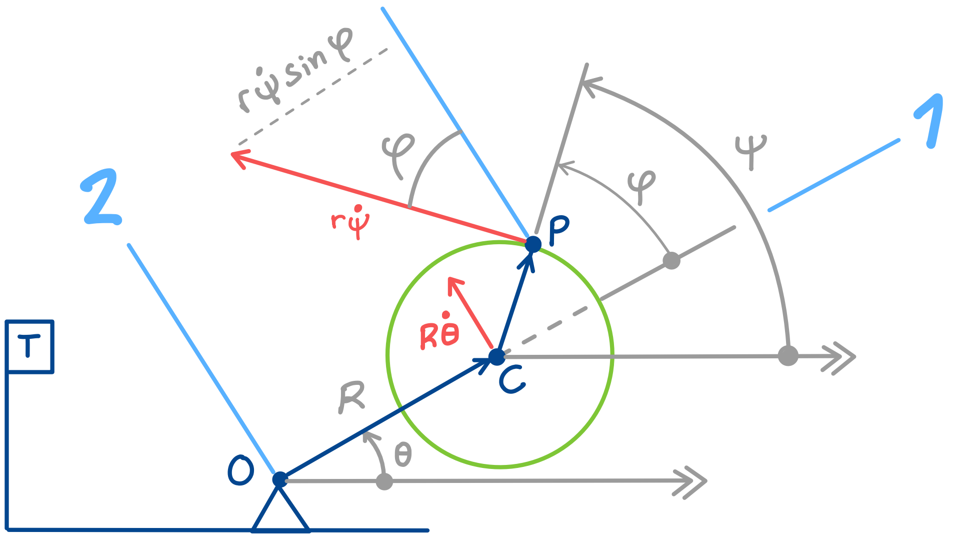
$$= \boxed{(R\dot{\theta}) + (r\dot{\psi})} \quad (\text{II})$$

Podem dibuixar els vectors $(\uparrow R\dot{\theta})$ i $(\nwarrow r\dot{\psi})$:



DEURES

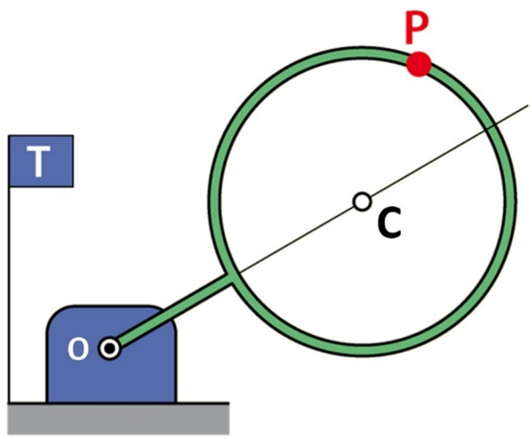
Podem expressar $\overline{\text{II}}$ en una base vectorial B:



$$\bar{v}_T(P) = \left[\nearrow\left(-r\dot{\psi}\sin\varphi\right)\right] + \left[\nwarrow\left(R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi\right)\right]$$

versor de B en dir. 1 — Versor de B en dir. 2

$$\left\{\bar{v}_T(P)\right\}_B = \begin{Bmatrix} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$



La guia circular està articulada al terra (T). La partícula **P** es mou dins la guia. Mitjançant la derivada analítica, calcula

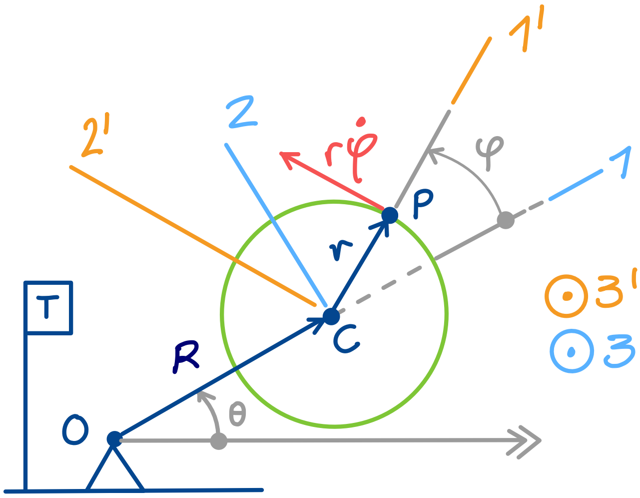
$$\bar{v}_{guia}(\mathbf{P}),\ \bar{v}_T(\mathbf{P}),\ \bar{a}_{guia}(\mathbf{P}),\ \bar{a}_T(\mathbf{P}),\ \Re_T(\mathbf{P})\Big]_{\overline{OC}\parallel\overline{CP}}$$

$\bar{v}_{Guia}(P)$

Un vec. pos. adient és $\overline{CP}$ ($C \in$ Guia)

$\overline{CP}$ és fàcil de projectar en B'

$$B' = \underbrace{(1', 2', 3')}_{\text{D'or. fixa a CP}}$$



$$\left\{\overline{CP}\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\left\{\bar{v}_{Guia}(P)\right\}_{B'}} = \left\{\left[\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_{Guia}\right\}_{B'} = \left\{\frac{d\overline{CP}}{dt}\right\}_{B'} + \left\{\bar{\Omega}^{B'}_{Guia}\right\}_{B'} \times \left\{\overline{CP}\right\}_{B'} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} r \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Coincideix amb l'obtingut geomètricament

Extra: Tb podem fer els càlculs amb $B=(1,2,3)$:

Dir. $\overline{OC}$ — 1

Dir. $\odot$ — 3

$$\{\overline{CP}\}_B = \begin{Bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Mateix resultat que (I), però en base B

$$\boxed{\{\bar{v}_{Guia}(P)\}_B} = \left\{\left[\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_{Guia}\right\}_B =$$

$$= \left\{\frac{d\overline{CP}}{dt}\right\}_B + \{\cancelto{0}{\bar{\Omega}^B_{Guia}}\}_B \times \{\overline{CP}\}_B = \boxed{\begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

$\bar{a}_{Guia}(P)$

Derivem (I):

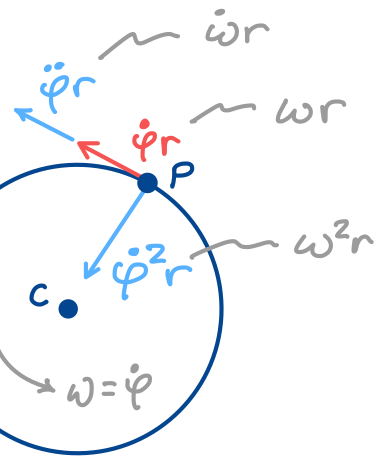
$$\{\bar{a}_{Guia}(P)\}_{B'} = \left\{\left[\frac{d\bar{v}_{Guia}(P)}{dt}\right]_{Guia}\right\}_{B'} =$$

Tot en B'

$$= \begin{bmatrix} \text{derivada} \\ \text{components} \\ \bar{v}_{Guia}(P) \end{bmatrix} + \bar{\Omega}^{B'}_{Guia} \times \bar{v}_{Guia}(P) =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}^2 r \\ \ddot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(II)}$$

Surten les components intrínseques de l'acceleració típiques del moviment circular, com era d'esperar



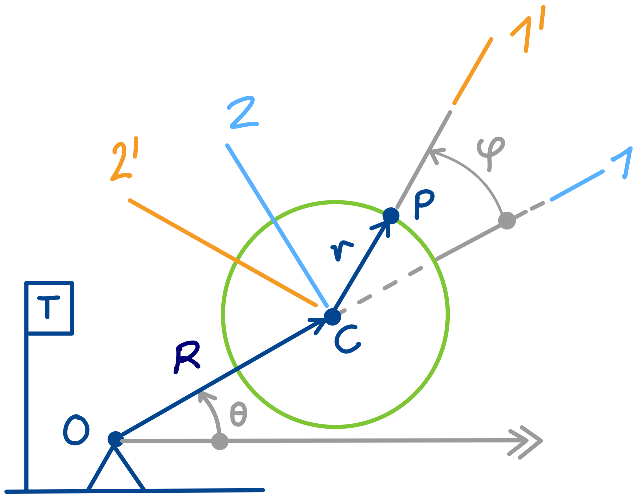
$\bar{v}_T(P)$

$B = (1, 2, 3)$

$B' = (1', 2', 3')$

Un vec. pos. adient per a P és $\overline{OP}$, pq $O \in T$.

$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}$$



És aconsellable treballar en B o B' ja que faciliten la projecció de $\overline{OC}$ i $\overline{CP}$ respectivament. Descartem l'ús d'una base fixa a T perquè no aniria tan bé. Triem B, però B' seria bona tb:

$$\left\{\overline{OP}\right\}_B = \left\{\overline{OC}\right\}_B + \left\{\overline{CP}\right\}_B = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R + r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{v}_T(P)\right\}_B = \left\{\left[\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T\right\}_B = \left[\begin{matrix}\text{deriv.} \\ \text{comp.}\end{matrix}\right] + \bar{\Omega}^B_T \times \left[\begin{matrix}\text{vec sense} \\ \text{derivar}\end{matrix}\right] =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R + r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\theta}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\theta} + r\dot{\theta}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Quadra amb l'Eq. (III) de l'exercici anterior}} \quad \text{(III)}$$

$$\boxed{\varphi + \theta = \psi \Rightarrow \dot{\varphi} + \dot{\theta} = \dot{\psi}}$$

$\bar{a}_T(P)$

Derivem (III) :

$$\left\{\bar{a}_T(P)\right\}_B = \left\{\left[\frac{d\,\bar{v}_T(P)}{dt}\right]_T\right\}_B = \left[\begin{matrix}\text{deriv.}\\ \text{comp}\end{matrix}\right] + \bar{\Omega}_T^B \times \left[\begin{matrix}\text{vec.}\\ \text{sense}\\ \text{deriv.}\end{matrix}\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix} -r\ddot{\psi}\sin\varphi - r\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\varphi \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - r\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} -\ddot{\psi}r\sin\varphi - \dot{\varphi}r\dot{\psi}\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}r\dot{\psi}\cos\varphi \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\dot{\psi}\sin\varphi - \dot{\theta}r\dot{\psi}\sin\varphi \\ 0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} -\ddot{\psi}r\sin\varphi - \overbrace{(\dot{\varphi}+\dot{\theta})}^{\dot{\psi}}r\dot{\psi}\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - (\dot{\varphi}+\dot{\theta})r\dot{\psi}\sin\varphi \\ 0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} -\ddot{\psi}r\sin\varphi - r\dot{\psi}^2\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - r\dot{\psi}^2\sin\varphi \\ 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{(IV)}$$

Tot seguit ens demanen $\mathcal{R}_T(P)$, que és el radi de curvatura de la trajectòria de P en un cert instant de temps.

Recordem primer aquest concepte, associat a les components intrínseques de l'acceleració.

Recordatori

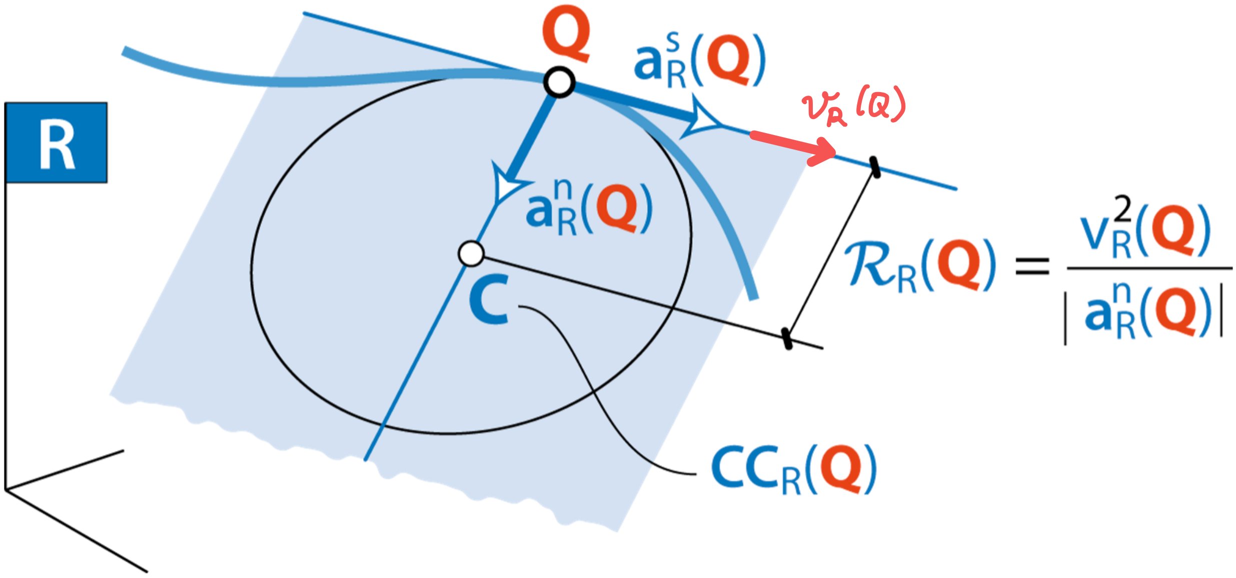
Components intrínseques de l'acceleració

Sigui una partícula Q que descriu una certa trajectòria en una referència R. En cada instant t, l'accel. de Q es pot descompondre en una component tangencial $\bar{a}_R^s(Q)$, paral·lela a $\bar{v}_R(Q)$, i una component normal $\bar{a}_R^n(Q)$, perpendicular a $\bar{v}_R(Q)$. A més, en aquest instant t, la trajectòria es pot aproximar localment per un cercle, anomenat "osculador". El radi d'aquest cercle és

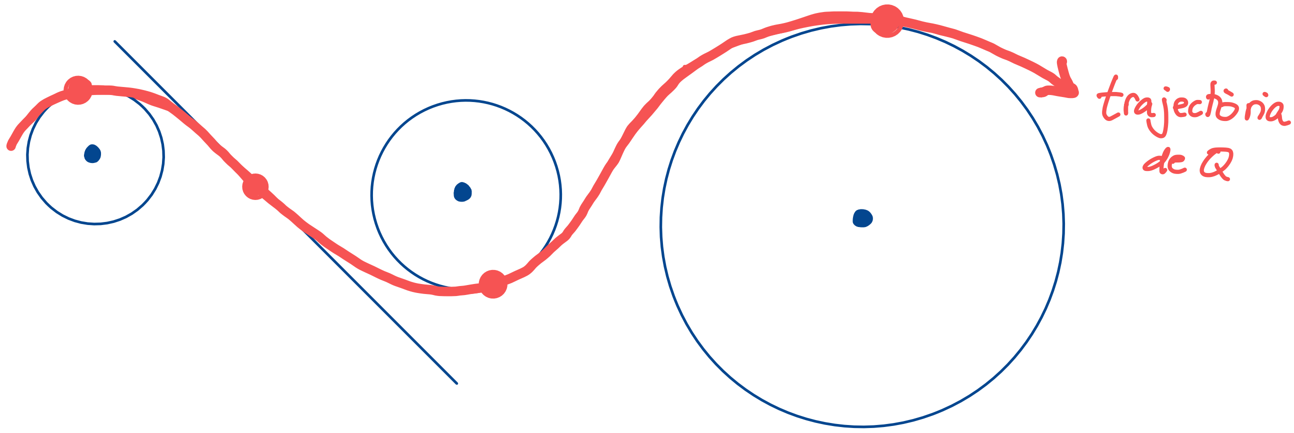
$$\mathcal{R}_R(Q) = \frac{v_R^2(Q)}{|a_R^n(Q)|} \begin{array}{l} \leftarrow [\text{Valor de } \bar{v}_R(Q)]^2 \\ \leftarrow \text{Mòdul del valor de } \bar{a}_R^n(Q) \end{array}$$

El centre del cercle s'anomena centre de curvatura de la trajectòria al punt Q (relatiu a la ref. R), i el denotem així

$$CC_R(Q)$$



$\rho_R(Q)$ i $CC_R(Q)$ varien al llarg del temps perquè el cercle oscula al llarg de la trajectòria:



Recordeu:

- L'accel. tangencial $\bar{a}^s_R(Q)$ és la responsable del canvi de valor de $\bar{v}_R(Q)$
- L'accel. normal $\bar{a}^n_R(Q)$ és la responsable del canvi de direcció de $\bar{v}_R(Q)$

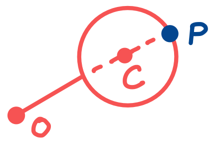
Calculem doncs el que ens demanaven:

$$\left.\mathcal{R}_T(P)\right]_{\overline{OC}\,\parallel\,\overline{CP}}$$

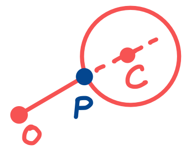
Vol dir, per a l'instant en que $\overline{OC}$ és paral·lel a $\overline{CP}$

COMPTE: això no vol dir que $\varphi = 0\ \forall t$. Només és nul quan P passa per aquesta situació

És a dir | quan $\varphi = 0$ →



o quan $\varphi = \pi$ →



Només fem el cas $\varphi = 0$:

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{\left|a_T^n(P)\right|}$$

$\left(\text{Valor de } \bar{v}_T(P)\right)^2$

Mòdul del valor de $\bar{a}_T^n(P)$

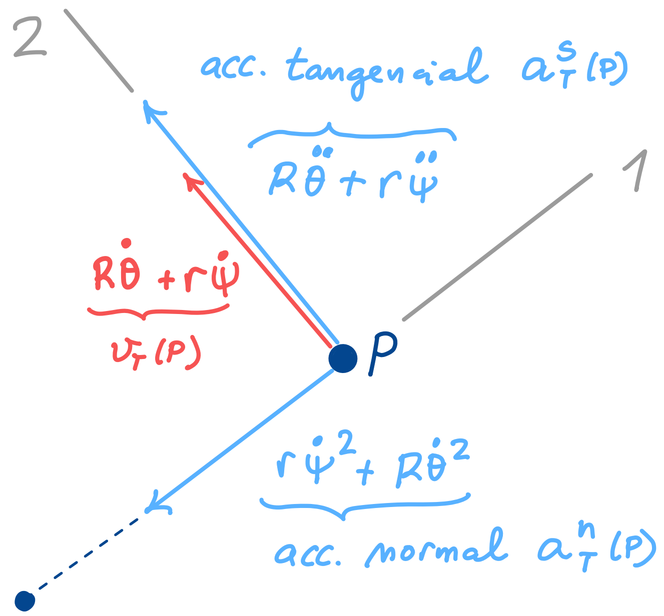
$$\left\{\left.\bar{v}_T(P)\right]_{\varphi=0}\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Particularitzant (III) per $\varphi = 0$

$$\left\{\left.\bar{a}_T(P)\right]_{\varphi=0}\right\} = \begin{Bmatrix} -r\dot{\psi}^2 - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Particularitzant (IV) per $\varphi = 0$

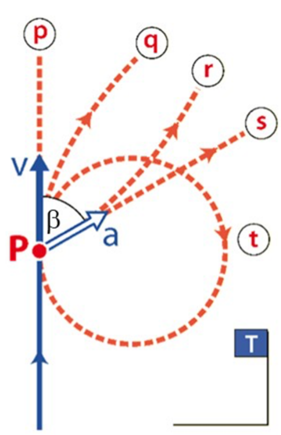
Per identificar la component normal de $\bar{a}_T(P)$ sempre aconsello que us feu un dibuix:



$CC_T(P)$ = centre de curvatura de P relatiu a T

Per tant :

$$\mathcal{R}_T(P)\Big]_T = \frac{(R\dot{\theta}+r\dot{\psi})^2}{r\dot{\psi}^2+R\dot{\theta}^2} \qquad (V)$$



La partícula **P** descriu una trajectòria rectilínia respecte del terra (T).

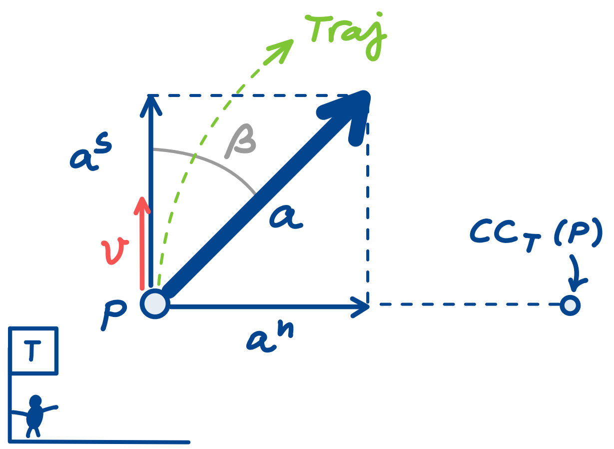
Quan té celeritat v, sobtadament s'accelera amb $\bar{a}_T(\mathbf{P})$ de valor constant, i formant un angle β constant amb $\bar{v}_T(\mathbf{P})$.

Quina trajectòria passa a fer?

s r Descartades (implicarien canvi sobtat vel.)

Sols poden ser p, q o t.

A partir de l'instant dibuixat:



$$\left.\begin{aligned} a^s &= a\cos\beta \\ a^n &= a\sin\beta \end{aligned}\right\} \textbf{ct !}$$

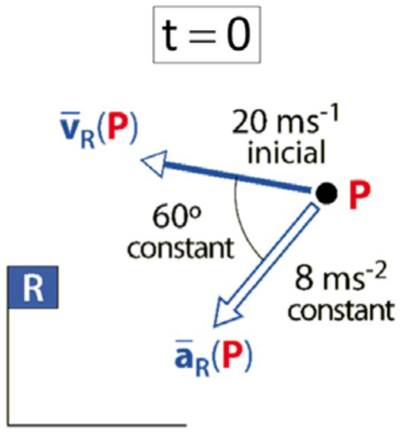
$a^n \neq 0 \Rightarrow$ traj serà curvada $\Rightarrow$ descartem p

Sols poden ser q o t, però

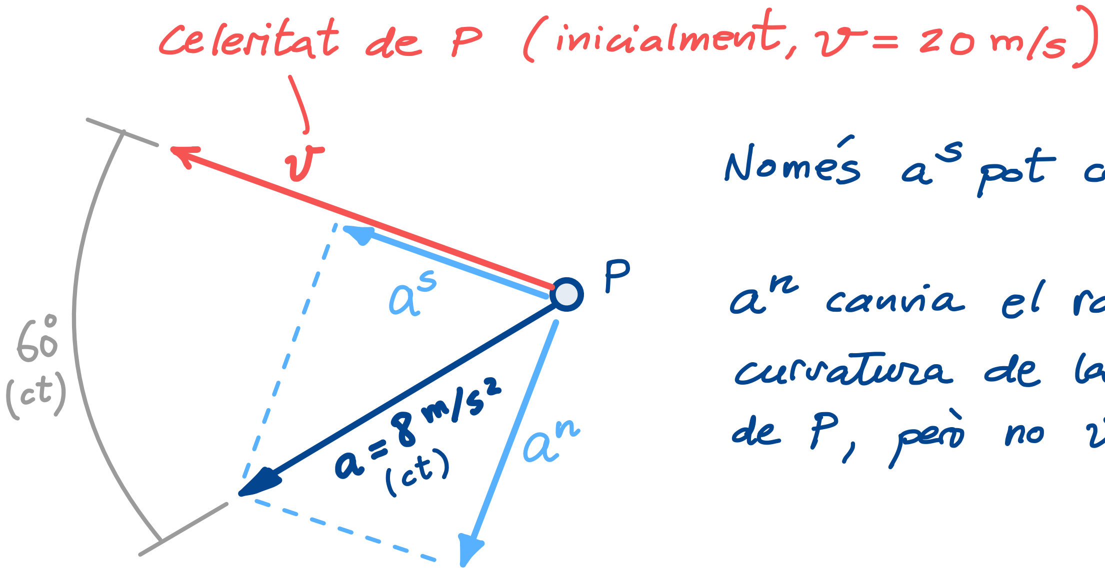
$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{\overbrace{v^2}^{\text{creixerà pq } a^s = ct}}{\underbrace{a^n}_{ct}} \Longrightarrow \mathcal{R}_T(P) \text{ creixerà}$$

Descartem t pq té $\mathcal{R}_T(P) = ct$

Sols pot ser q (única amb radi creixent)



En un cert instant, la partícula **P** té celeritat de 20 m/s respecte del terra (T). Si s'accelera amb $\bar{a}_T(\mathbf{P})$ de valor constant, i formant un angle de 60° constant amb $\bar{v}_T(\mathbf{P})$, quina és la seva celeritat 10 segons més tard?



Només a^s pot canviar v

a^n canvia el radi de curvatura de la traj. de P, però no v.

Clarament:

$$a^s = a \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \frac{m}{s^2} = \frac{4 \frac{m}{s}}{s}$$

$\Downarrow$

v augmenta a ritme de 4 m/s cada segon

$\Downarrow$

En 10" v haurà augmentat 40 m/s.

$\Downarrow$

Com que inicialment $v = 20$ m/s, al cap de 10s v serà de $20 + 40 = 60$ m/s.