9P

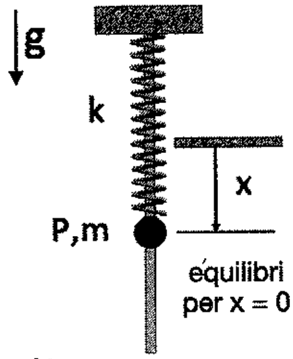
Problemes de dinàmica de partícula sobre:

Oscil·lacions i punts d'equilibri

Integració eqs. mov. senzilles
Oscil·lacions 1GL
Punts d'equilibri
Linealització

Farem 3 ex. representatius de com es fa l'estudi d'oscil·lacions avd punts equilibri. Mireu d'entendre'ls en profunditat

9P La partícula **P** de massa m penja d'una molla lineal de constant k que té un extrem lligat a una guia llisa vertical fixa a terra (T). La guia travessa la partícula impedint el seu moviment lateral. Per a $x = 0$ la partícula es troba en equilibri. Determina:



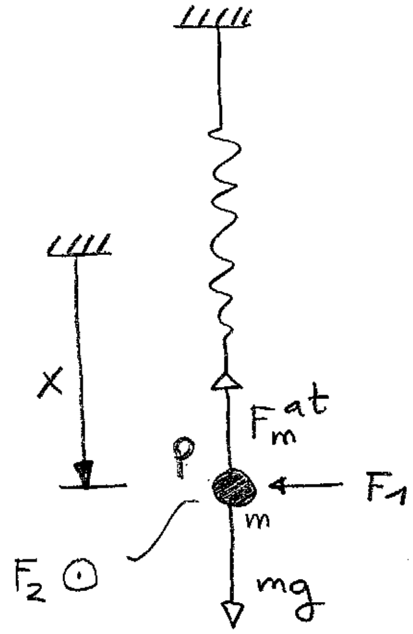
- La força de la molla en funció de x.
- L'equació del moviment per la coordenada x.
- La força de la guia sobre **P**.
- L'evolució de x en funció del temps.

És $x = 0$ una posició d'equilibri estable?

Quina és la freqüència de les oscil·lacions al voltant d'aquesta posició?

ESBORRO TOT i seguim

$\boxed{\bar{F}_{Guia \to P} \text{ i Eq. mov. coord. } x}$



$\underline{2^a \text{ LN en dirs. horitz.:}}$

$$\left.\begin{array}{l}(\leftarrow F_1) = \bar{0} \\ (\odot F_2) = \bar{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\bar{F}_{Guia \to P}}^{\text{d'enllaç}} = \bar{0}$$

$\underline{2^a \text{ LN}]_{vert}}$

ooh! sense f. enllaç!

$$(\downarrow mg) + [\uparrow \underbrace{(mg + Kx)}_{F_m^{at}}] = m(\downarrow \ddot{x})$$

$$\cancel{mg} - \cancel{mg} - Kx = m\ddot{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{m\ddot{x} + Kx = 0} \\ \\ \boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0} \\ \\ \boxed{\ddot{x} = -\underbrace{\frac{K}{m}}_{\mathcal{K}}x}\end{array}\right\}$$

3 maneres habituals

LINEAL coefs ct

Treballarem + amb aquesta

Ara em miro x com $x(t)$

$\boxed{\text{Evolució } x(t)\ ?}$

Cal trobar $x(t)$ que satisfaci:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\underline{K}\cdot x(t) \qquad (\mathrm{I}) \\ x(0) &= x_0 \qquad (\mathrm{II}) \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \qquad (\mathrm{III}) \end{aligned}\right\} \text{PVI}$$

Donats

Coneixem alguna $x(t)$ que compleixi (I)? Sí!

pars

$$x(t) = D \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = \omega D \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \underbrace{D \sin(\omega t + \varphi)}_{x(t)}$$

Pinto D, ω, φ en groc

$x(t)$ satisfà (I)? Sí, sempre i quan

$$\omega^2 = \underline{K} = \frac{k}{m}$$

$$\Updownarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$x(t)$ també satisfà (II) i (III) si:

$$\left.\begin{aligned} D &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \\ \varphi &= \operatorname{atan}\left(\frac{\omega x_0}{\dot{x}_0}\right) \end{aligned}\right\}$$

Ex. lector: demostrar-ho imposant II i III a $x(t)$

Alternativa: $x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$

Conclusió:

La solució del PVI és

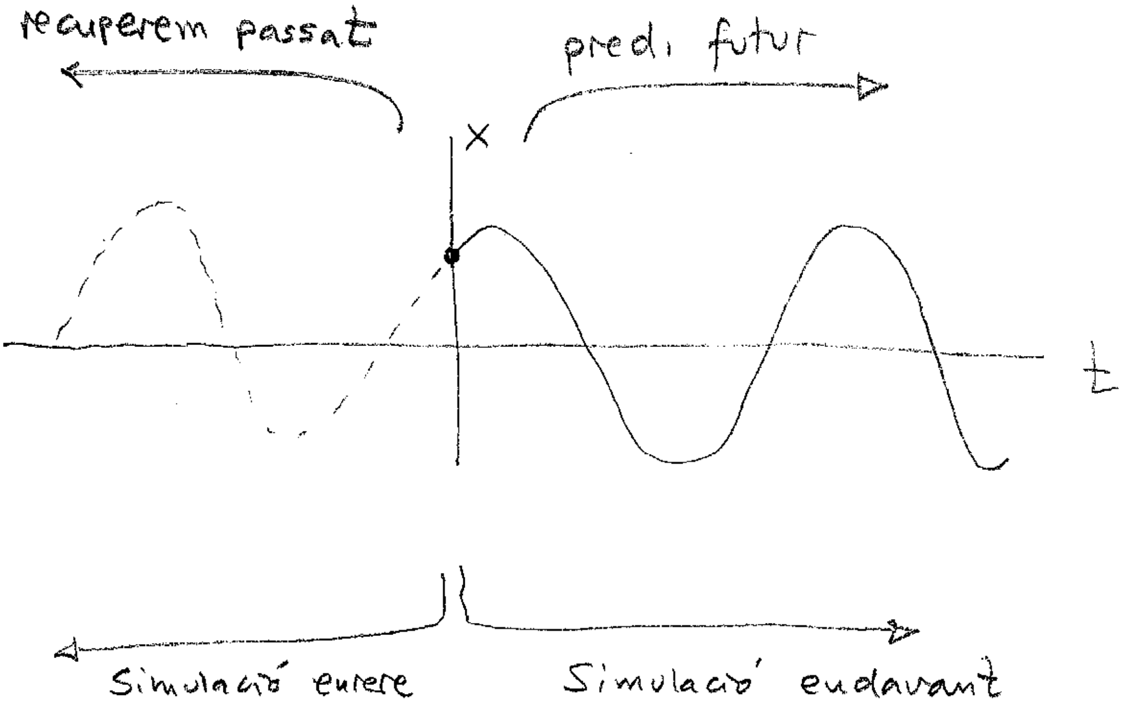
$$x(t) = \underbrace{D}_{\text{amplitud}} \sin(\omega t + \underbrace{\varphi}_{\text{fase}})$$

amb

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

i els valors D i φ anteriors

OBS: Preguntarem ω (no D i φ)



EST: Perturbo i torna a l'equilibri

INEST: Perturbo i s'allunya

A

A

Millor així?

A

Ergo $x(t)$ és
- sinusoïdal
- de freqüència $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ } Par. intrínsec
- d'amplitud D
- de fase φ } Pars extrínsecs (depenen de c.i.)

Preguntarem ω, no D i φ.

A

La pos. d'equilibri $x_{eq}=0$ surt a l'eq. mov.?

DEF.- x és d'equilibri si quan hi deixem el sistema aturat ($\dot{x}=0$), s'hi queda ($\ddot{x}=0$)

$$\ddot{x} = -K \cdot x$$

$x = x_{eq}$
$\dot{x} = 0$
$\ddot{x} = 0$

SEMPRE FAREM AQ. SUBSTITUCIÓ × TROBAR x_{eq}

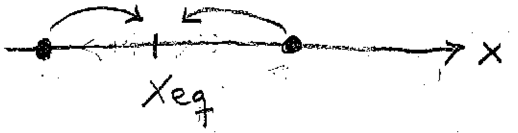
$$\boxed{0 = -K \cdot x_{eq}}$$ Eq. que caracteritza les x_{eq}

resolc

$$\boxed{x_{eq} = 0}$$ sí que hi surt!

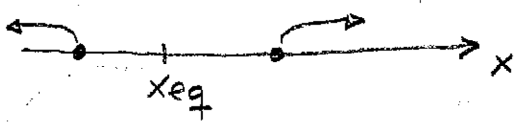
x_{eq} és estable o inestable? MOLLA = ELEM. RECUPERADOR

ESTABLE:



Perturbo i torna

INESTABLE:



Perturbo i s'allunga

Per saber si $x_{eq} \left\langle \begin{matrix} EST \\ INEST \end{matrix} \right.$ → Analitzem EDO de l'error ε

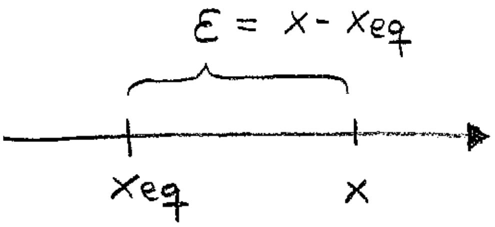
no faig amb exm pèndol pàg. ant,

No ho poso

Molla = Elem recuperador ⇒ ESTABLE. Matemàticament com es veu?

Estudiarem l'<u>EDO de l'error ε</u>

Definim l'error ε així:



Si	Xeq és
$\varepsilon \to 0$	ESTABLE
ε s'allunya de zero	INEST

EDO de ε?

$$\boxed{\ddot{x} = -\mathbb{K}\, x}$$

Eq. mov. sist. (determina x(t))

$$x = \cancel{x_{eq}}^{\,0} + \varepsilon$$
$$\dot{x} = \dot{\varepsilon}$$
$$\ddot{x} = \ddot{\varepsilon}$$

L'analitzem

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} = -\mathbb{K}\, \varepsilon}$$

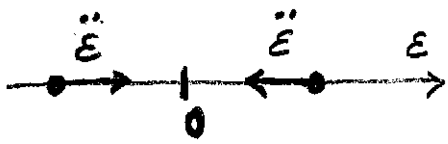
EDO de ε (determina ε(t))

No sempre surten "iguals"

En aq. exercici, $\mathbb{K} = \frac{K}{m} > 0$:

$$\ddot{\varepsilon} = \overbrace{-\mathbb{K}}^{-}\varepsilon \quad (\mathbb{K} > 0) \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon > 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} < 0 \\ \varepsilon < 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} > 0 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon \to 0$$

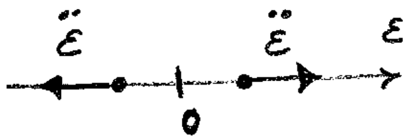
Eq. ESTABLE



I si hagués estat $\mathbb{K} < 0$?

$$\ddot{\varepsilon} = \overbrace{-\mathbb{K}}^{+}\varepsilon \quad (\mathbb{K} < 0) \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon > 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} > 0 \\ \varepsilon < 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} < 0 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon \text{ s'allunya de zero}$$

Eq. INESTABLE



9P

Versió simplificada del prob. 1.7 de RBD, pàg 66

Partícula sobre guia inclinada amb molla

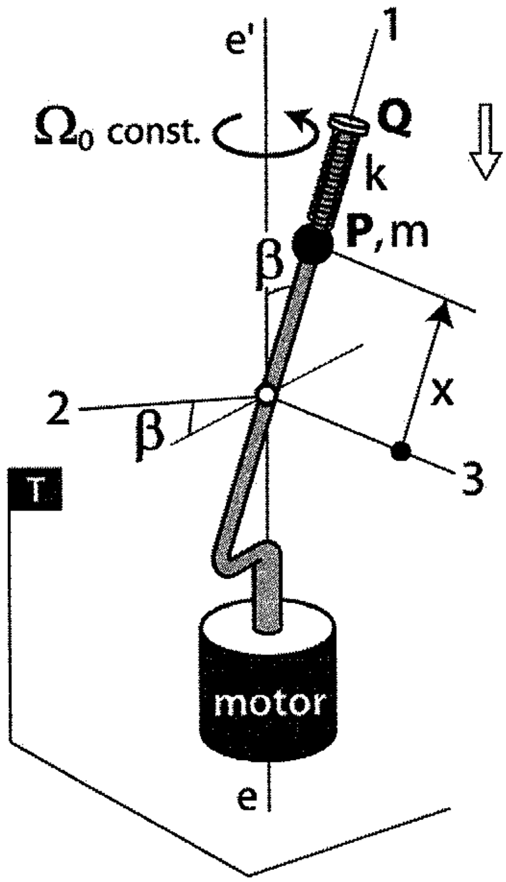
Una partícula P de massa m llisca al llarg d'una guia recta inclinada i llisa que gira amb velocitat angular constant Ω_0 al voltant de l'eix vertical e-e' relatiu a terra (T). La partícula està unida a una molla que té el seu extrem superior unit al punt Q de la guia. La coordenada x descriu la posició de la partícula relativa a la guia. Quan $\Omega_0 = 0$, la posició $x = 0$ correspon a una posició d'equilibri. Determina:

(a) Quants graus de llibertat té el sistema?

(b) L'equació del moviment per a la coordenada x. A quin tipus de moviment correspon?

(c) La naturalesa de $x = 0$ (equilibri estable o inestable).

(d) Les components de la força d'enllaç sobre P.



(a) GL sistema ?

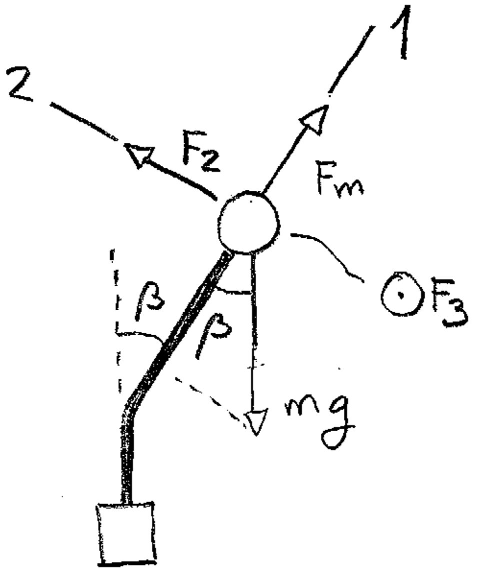
$$2\text{ GL}\begin{cases}\dot{\psi}=\Omega_0 & (\text{actuat, i forçat a valdre } \Omega_0)\\ \dot{x} & (\text{lliure})\end{cases}$$

(b) Eq. mov. coord. x ? (per ψ seria $\ddot{\psi}=0$)

Apliquem 2ª LN:

$$\sum \bar{F}_{\to P} = m_P\, \bar{a}_r(P)$$

Forces sobre P



De paraula

No N_2, N_3
(enllaç bilat)

- $\bar{F}^{\text{enllaç}}_{\text{guia}\to P} = (\nwarrow F_2) + (\odot F_3)$

  No n'hi ha en dir. 1 pq mov. és permès en aq. dir.

- pes $\downarrow$ mg
- força molla $\nearrow F_m$

$$\left\{\sum \bar{F}_{\to P}\right\}_{B=(1,2,3)} = \begin{Bmatrix} F_m - mg\cos\beta \\ F_2 - mg\sin\beta \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

En dir 1 $\nexists$ f. enllaç

$\Downarrow$

$\boxed{2^a\text{ LN}]_1 \text{ dóna l'eq. mov.}}$ Full ruta al cap!

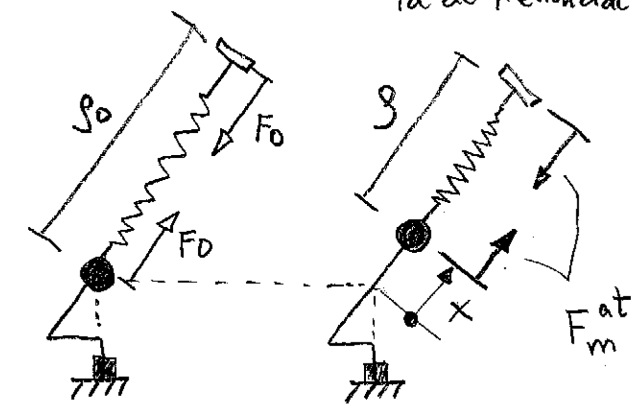
Formulació F_m

La trio com config. inicial

F_0 no dada!

Quan $\Omega_0 = 0$, $\underbrace{x = 0}$ $= x_{eq}$ (és d'equilibri)

Inicial — Genèrica (la de l'enunciat)



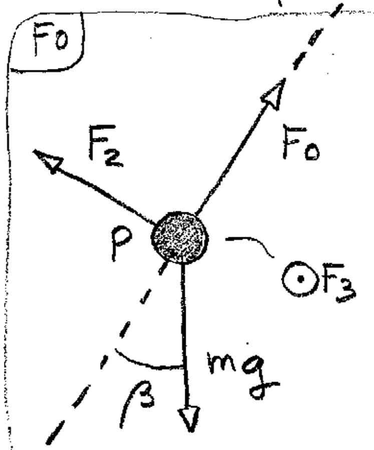
F_0 és atractiva (si fallo molla P cau)

$\Downarrow$

Crit. atracció

$$F_m^{at} = \underbrace{F_0} + K \, \Delta\rho$$

$\Delta\rho$ = $-x$ (s'ha escurçat)



Problema d'estàtica

$$\left.\sum \overline{F}_{\to P}\right]_{\text{Dir Guia}} = \overline{0}$$

$$(\nearrow F_0) + (\swarrow mg\cos\beta) = \overline{0}$$

$$F_0 = mg\cos\beta$$

Ergo:

$$\boxed{F_m^{at} = mg\cos\beta - Kx}$$

LA DIBUIXO!

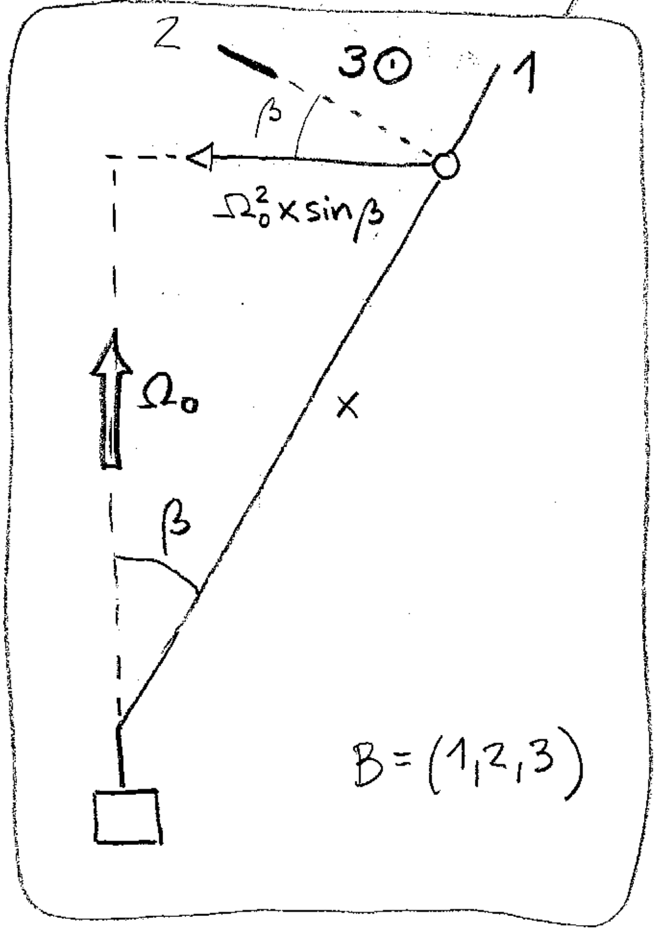
$\bar{a}_T(P)$ via comp. mov $\left\{ \begin{array}{l} AB = T \\ REL = Guia \end{array} \right.$

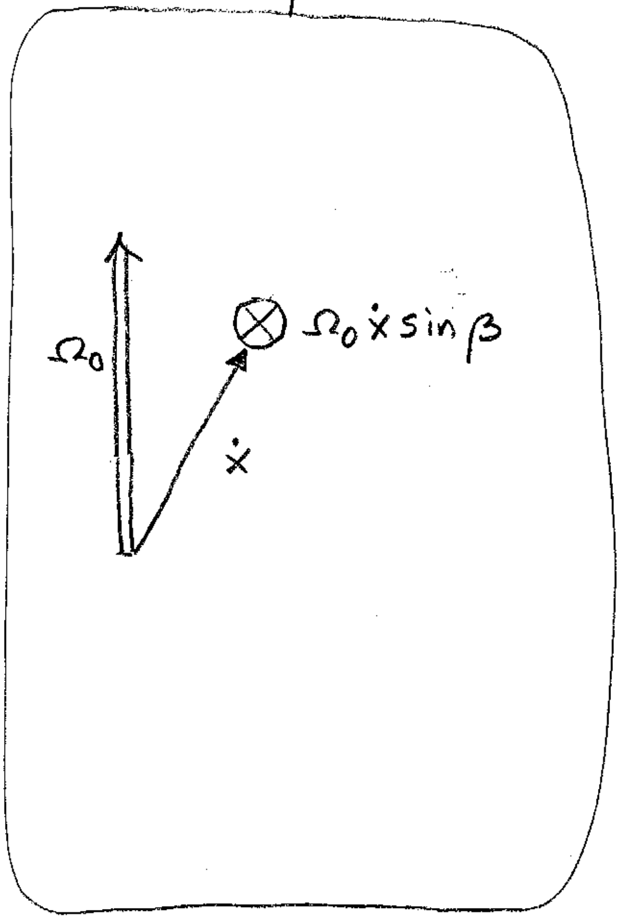
Només em cal la comp. en dir. guia

salto a baix directe!

$$\bar a_T(P) = \underbrace{\bar a_{Guia}(P)}_{(\nearrow \ddot x)} + \underbrace{\bar a_{ar}(P)}_{(\leftarrow \Omega_0^2 x\sin\beta)} + \underbrace{2\,\bar\Omega_T^{Guia}\times \bar v_{Guia}(P)}_{(\otimes\, 2\,\Omega_0\dot x\sin\beta)} = \dots$$

No ho poso





$$\dots = \left\{ \begin{array}{c} \underbrace{\ddot x - \Omega_0^2 x\sin^2\beta}_{a_1} \\ \Omega_0^2 x\sin\beta\cos\beta \\ -2\,\Omega_0\dot x\sin\beta \end{array} \right\}_{B=(1,2,3)}$$

No ho poso

2^a LN$\Big]_{guia = Dir. 1}$:

$$\sum \bar{F}_{\to P}\Big]_1 = m\ \bar{a}_{T(P)}\Big]_1$$

$$\underbrace{F_m}_{\parallel} - mg\cos\beta = m\ a_1$$

$$\cancel{mg\cos\beta} - Kx - \cancel{mg\cos\beta} = m\left(\ddot{x} - \Omega_0^2\ x\sin^2\beta\right)$$

$$m\ddot{x} + \underbrace{\left(K - m\Omega_0^2\sin^2\beta\right)}_{K' = \text{ctant}} x = 0$$

Té la forma

$$m\ddot{x} + K'x = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{K'}{m} x}$$

$\mathbb{K}$

Mateixa forma ex. ant

$\Downarrow$ L'evol. $x(t)$ serà

$$x(t) = D\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K'}{m}}$$

Comprovacions

▷ Si $\beta = 0$ ha de sortir eq. mov. ex. ant. I surt!

$$\boxed{\beta = 0 \Rightarrow K' = K \Rightarrow \text{Mateixa eq. mov. ex. ant.}}$$

▷ Enunciat diu que $x = 0$ és pos equilibri. Ho és?

$$\boxed{x_{eq} = 0 \text{ surt a l'EDO !} \quad \left(\begin{array}{l}\text{Eq. mov. mateixa} \\ \text{forma ex. ant.}\end{array}\right)}$$

Explicar que dóna un citeri de disseny per al valor de K.

si volem P en equil. dins un rang Ω_0's ...

... quin valor de K he de triar?

(c) $x_{eq}=0$ és estable?

Dóna criteri de disseny per K

De l'ex. ant. sabem que

$$x_{eq}=0 \text{ ESTABLE sii } \underline{K} = \frac{K'}{m} > 0$$

Ergo x_{eq} serà estable sii

$$\frac{K'}{m} > 0 \Leftrightarrow \frac{K - m\Omega_0^2 \sin^2\beta}{m} > 0$$

$$\Leftrightarrow K > m\Omega_0^2 \sin^2\beta$$

A major Ω_0 cal major K per estabilitat

$$\Leftrightarrow \Omega_0 < \underbrace{\sqrt{\frac{K}{m \sin^2\beta}}}_{\Omega_{crítica}}$$

Saltable (no cal)

Conclusió:

$x_{eq}=0$ ESTABLE si $\Omega_0 < \Omega_{crítica}$

Altrament serà INESTABLE

(d) $F_{enllaç\ guia \to P}$

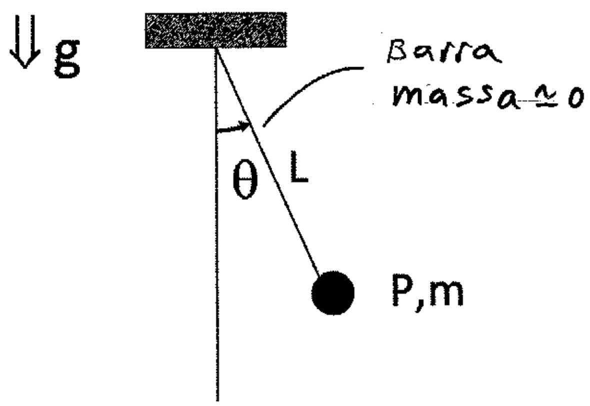
Com a deures!

9P

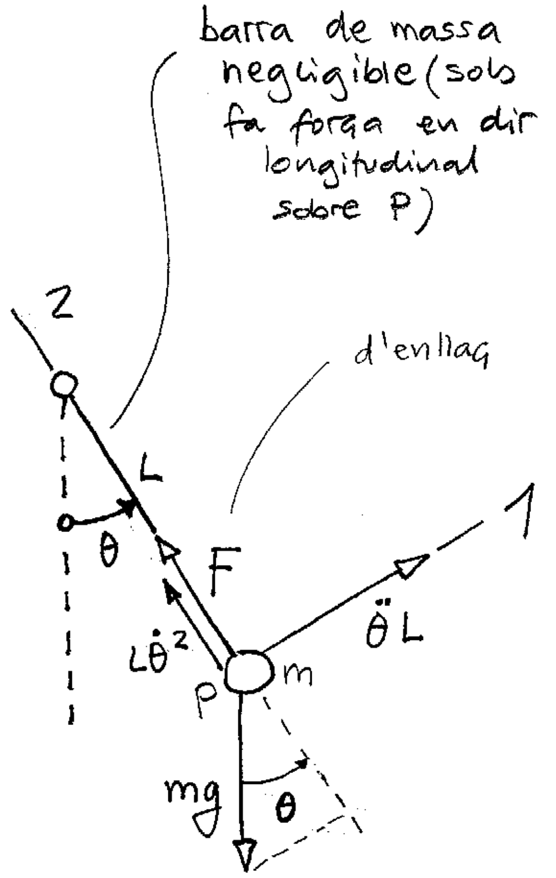
El pèndol simple de la figura té la massa m concentrada a P.

Trobeu-ne:

1. L'equació del moviment per a la coordenada θ.
2. Les configuracions d'equilibri, determinant si són estables o inestables.



(1) Eq. mov. coord. θ



→ Forces sobre P

→ Acceleració de P

En dir. 1 $\nexists$ f. enllaç

$\Downarrow$

2ª LN$]_1$ dóna l'eq. mov.

$$\left.\sum \overline{F}_{\to P}\right]_1 = m\,\left.\overline{a}_T(P)\right]_1$$

$$(\swarrow \cancel{m}g \sin\theta) = \cancel{m}(\nearrow \ddot{\theta}L)$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta \quad (\mathrm{I})}$$

EDO no lineal!

$\ddot{\theta}(t)$ no és proporc. a $\theta(t)$!

(2) Configs equilibri

θ és d'equilibri si quan hi deixo el sist. aturat ($\dot{\theta}=0$), s'hi queda ($\ddot{\theta}=0$).

$\Downarrow$

Per trobar θ_{eq} → substituïm a (I) $\begin{cases}\theta = \theta_{eq}\\ \dot{\theta}=0\\ \ddot{\theta}=0\end{cases}$

$$\boxed{0 = -\frac{g}{L}\sin\theta_{eq}} \Rightarrow \sin\theta_{eq} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_{eq} = n\pi,\ n = 0, 1, 2, \ldots}$$

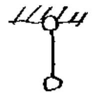
cond. algebraica q caracteritza θ_{eq}

Configs. d'equilibri

Són estables?

De paraula

Intuïtivament $\theta_{eq} = \begin{cases} 0 & \text{ESTABLE} \rightarrow \\ \pi & \text{INESTABLE} \rightarrow \end{cases}$



Com ho demostrem? Analitzant EDO error!

Ara eq. mov. no lineal $\Rightarrow$ EDO error ε no lineal ! $\Rightarrow$

Analitzarem les petites oscil·lacions avd θ_{eq}

En 3 passos:

$\boxed{1}$ Obtenim EDO de l'error ε

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\theta = \theta_{eq} + \varepsilon \qquad \underbrace{|\varepsilon| \ll 1}_{\text{molt petit}}$$

(oscil·lacions petites)

$$\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{g}{L}\sin(\theta_{eq} + \varepsilon)$$

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{g}{L}\left[\cancelto{0}{\sin\theta_{eq}}\cos\varepsilon + \cos\theta_{eq}\sin\varepsilon\right]$$

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} = -\frac{g\cos\theta_{eq}}{L}\sin\varepsilon}$$

No lineal!

($\ddot{\varepsilon}$ no proporc. a ε)

2 La linealitzem

$|\varepsilon| \ll 1$ (molt petit) $\Rightarrow \varepsilon^2 \simeq 0,\ \varepsilon^3 \simeq 0, \ldots$

Aproximem les funcions no lineals que quedin pel seu desenv. Taylor fins 1er ordre (termes lineals)

$$\ddot{\varepsilon} = -\overbrace{\frac{g\cos\theta_{eq}}{L}}^{K} \cdot \sin\varepsilon$$

$$\sin\varepsilon \cong \varepsilon - \cancel{\frac{\varepsilon^3}{3!}} + \cancel{\frac{\varepsilon^5}{5!}} + \ldots$$

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} = -K\,\varepsilon}$$

EDO LINEAL !

3 Mirem si $K > 0$ (equil. estable) o < 0 (inest.)

Per $\theta_{eq} = 0$, $K = \dfrac{g}{L} > 0 \Rightarrow$ Eq. ESTABLE

Per $\theta_{eq} = \pi$, $K = -\dfrac{g}{L} < 0 \Rightarrow$ Eq. INEST.

VEURE ALTRES LINEALITZACIONS

A WIKIMEC D.7

(o meves notes)

sol ser

L'EDO de l'error linealitzada normalment serà

$$\ddot{\varepsilon} = -K\varepsilon$$

però tb podria ser (*)

$$\ddot{\varepsilon} = -K\varepsilon - C\dot{\varepsilon} \qquad (C = \text{ctant} > 0)$$

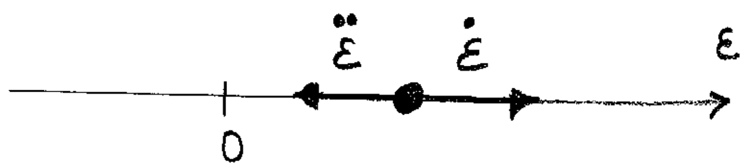
Es demostra que C no afecta l'estabilitat i seguirà essent (**)

$$K > 0 \Rightarrow \text{EST}$$
$$K < 0 \Rightarrow \text{INEST}$$

(*) Amb frec viscós típicament

(**)

Si $K>0$ a
$\ddot{\varepsilon} = -K\varepsilon - C\dot{\varepsilon}$
i $\dot{\varepsilon}>0$, tenim
$\ddot{\varepsilon}<0$, ergo
tornem a $\varepsilon = 0$
a la llarga.



(Argument intuïtiu)