

3P

Versió 1.0

Exercicis de derivació
geomètrica i analítica

+

Angles d'Euler

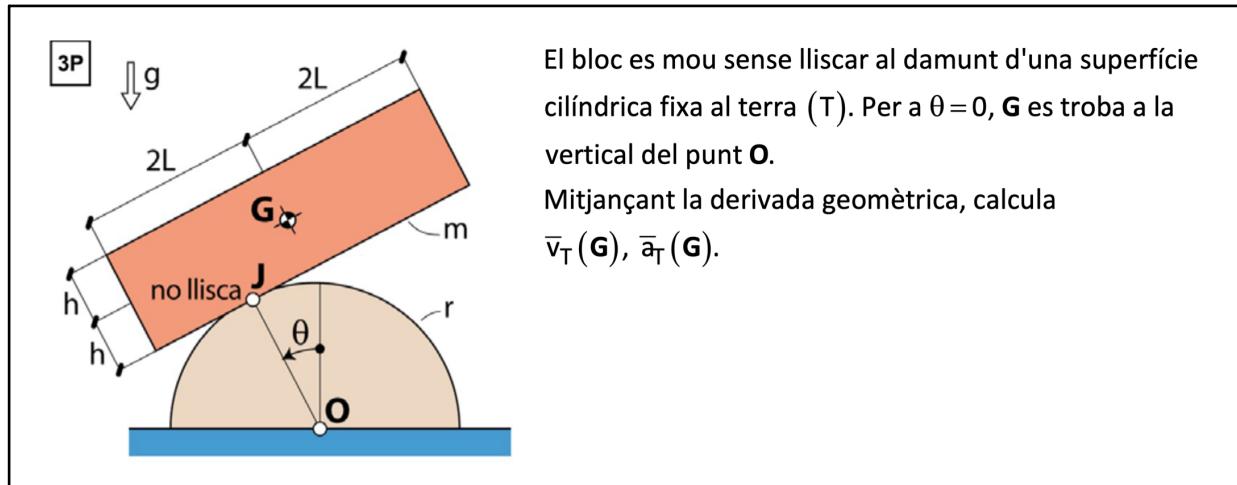
+

Qüestions pendents de 3T

Lluís Ros

<https://lluisros.github.io/mecanica>

Exercicis de derivació geomètrica i analítica



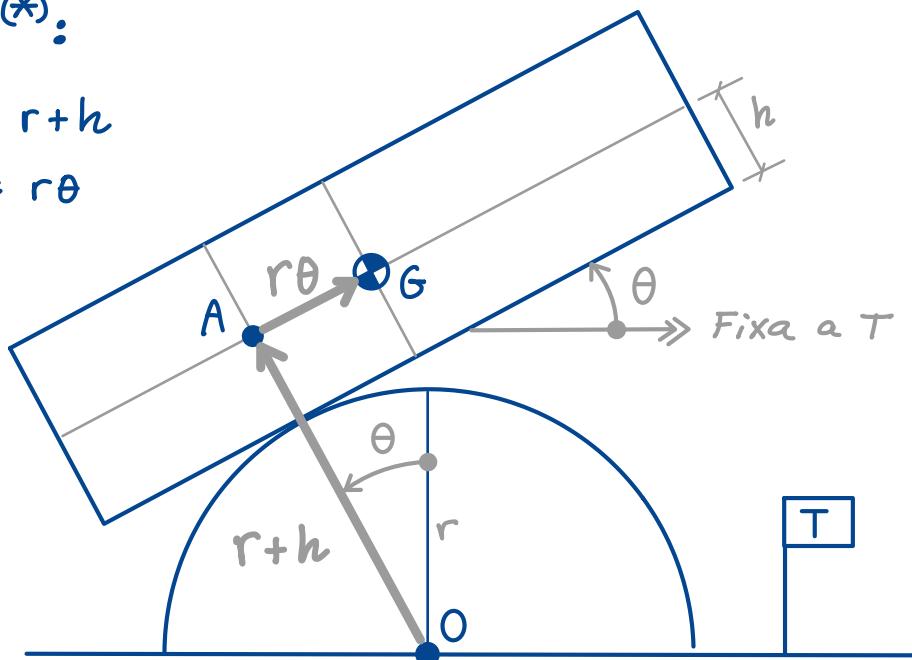
$\bar{v}_T(G)$

Triem $\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{AG}$ com a vec. pos. de G (el derivarem).

Clarament (*):

$$|\overline{OA}| = r+h$$

$$|\overline{AG}| = r\theta$$



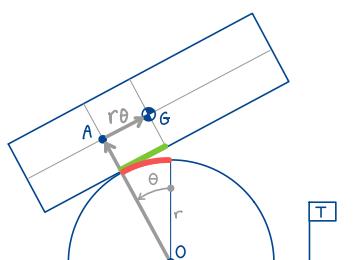
L'orient. de \overline{OA} resp. T ve donada per θ

L'orient. del bloc i de \overline{AG} , també!

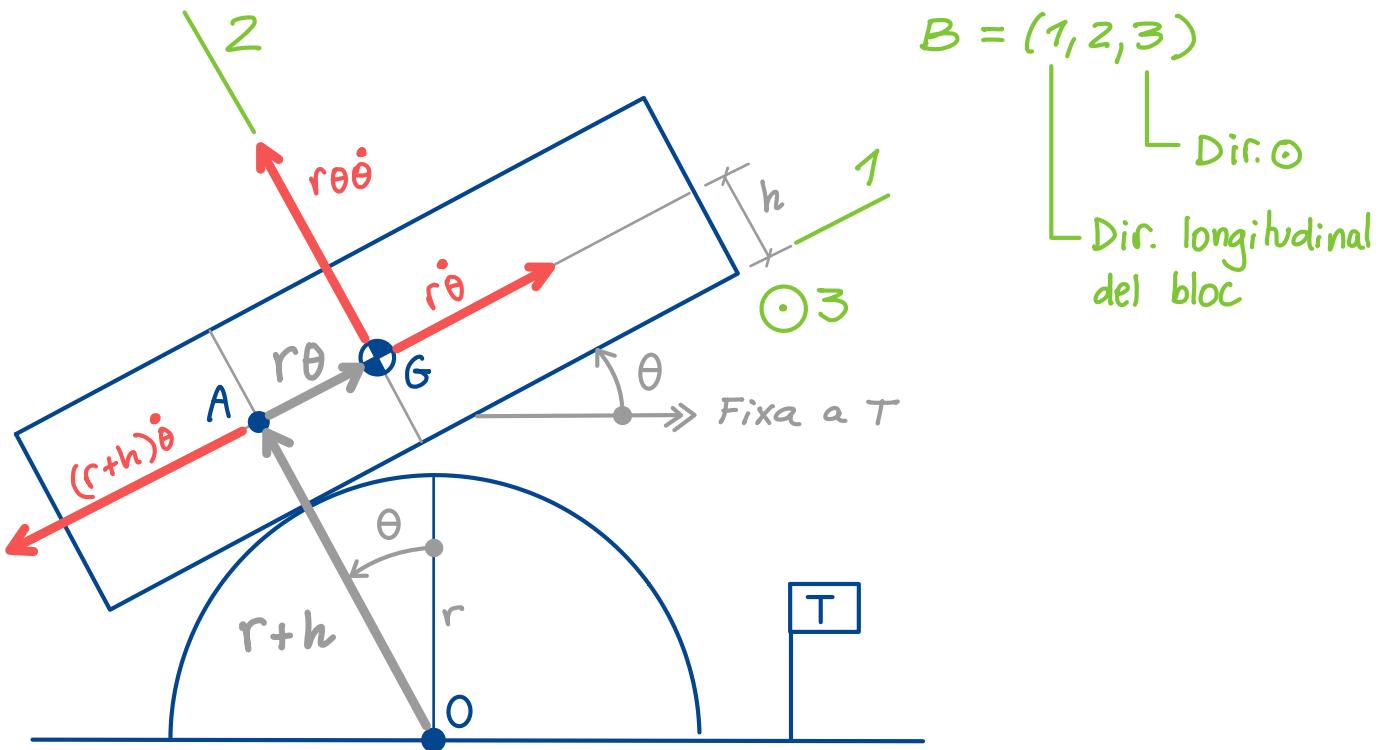
\overline{OA} no canvia de valor, però si de dir. (amb $\odot \dot{\theta}$)

\overline{AG} canvia de valor (θ varia), i tb. de dir. (amb $\odot \dot{\theta}$)

(*) $|\overline{AG}| = r\theta$ perquè, si G és sobre la vertical de O quan $\theta=0$, vol dir que els trams verd i vermell coincideixen (i el vermell és $r\theta$)



Les derivades temporals de \overline{OA} i \overline{AG} són els següents vècs. vermells:



$$B = (1, 2, 3)$$

Dir. \odot

Dir. longitudinal
del bloc

Ergo :

$$\begin{aligned} \overline{\vec{v}_T(P)} &= (\rightarrow r\dot{\theta}) + \underbrace{[(r+h)\dot{\theta}]}_{(\leftarrow r\dot{\theta}) + (\leftarrow h\dot{\theta})} + (\uparrow r\theta\ddot{\theta}) = \\ &= \boxed{(\leftarrow h\dot{\theta}) + (\uparrow r\theta\ddot{\theta})} \quad (1) \end{aligned}$$

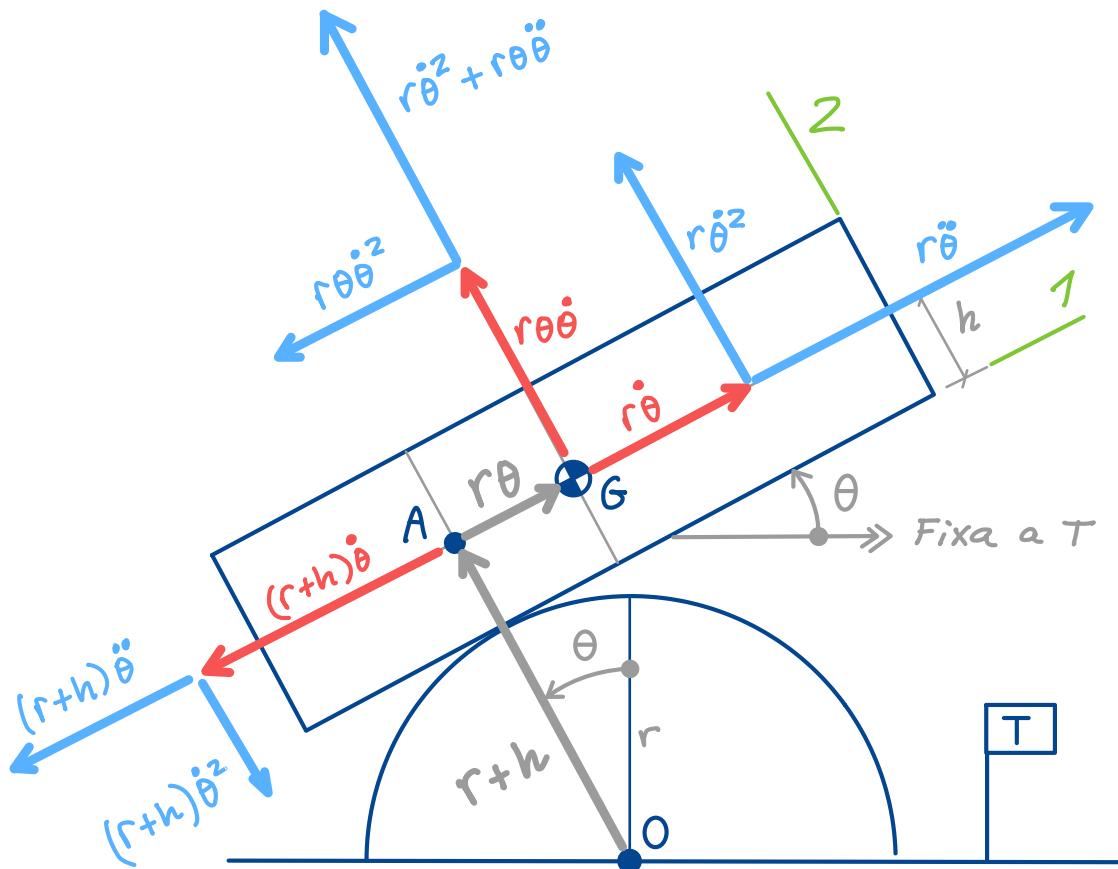
Si voleu, podem expressar $\overline{\vec{v}_T(P)}$ vectorialment mitjançant alguna base. $B = (1, 2, 3)$ va molt bé, ja que té els versors en les dirs. que surten a l'Eq. (1):

$$\left\{ \overline{\vec{v}_T(P)} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} -h\dot{\theta} \\ r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

L'Eq. (2) ens anirà bé per comprovar els resultats obtinguts per derivació analítica (seg. exercici).

$\bar{a}_T(G)$

Només cal derivar els vecs. vermells per obtenir els blaus:

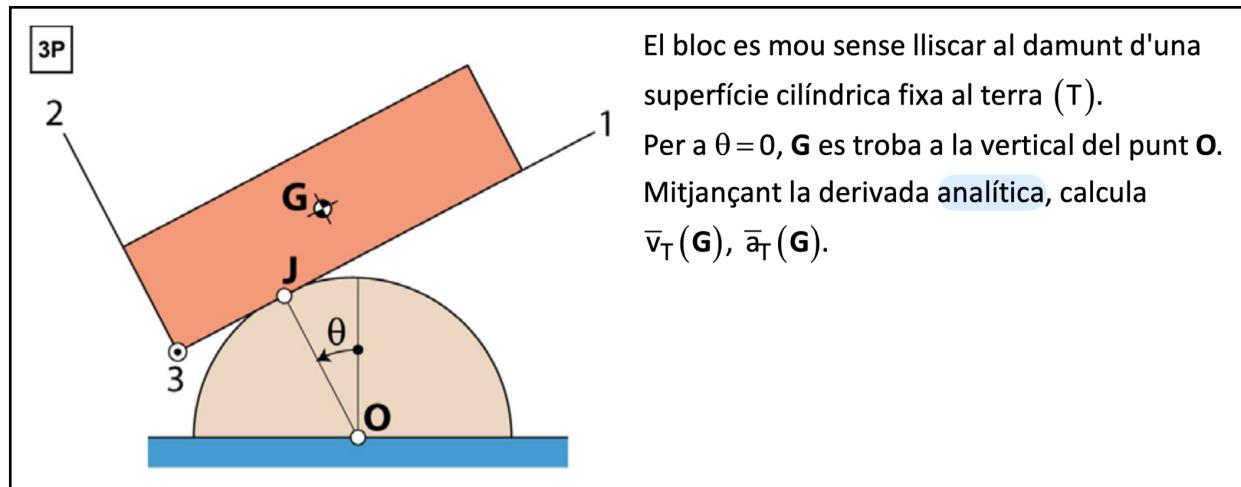


Sumant els vecs. blaus obtenim:

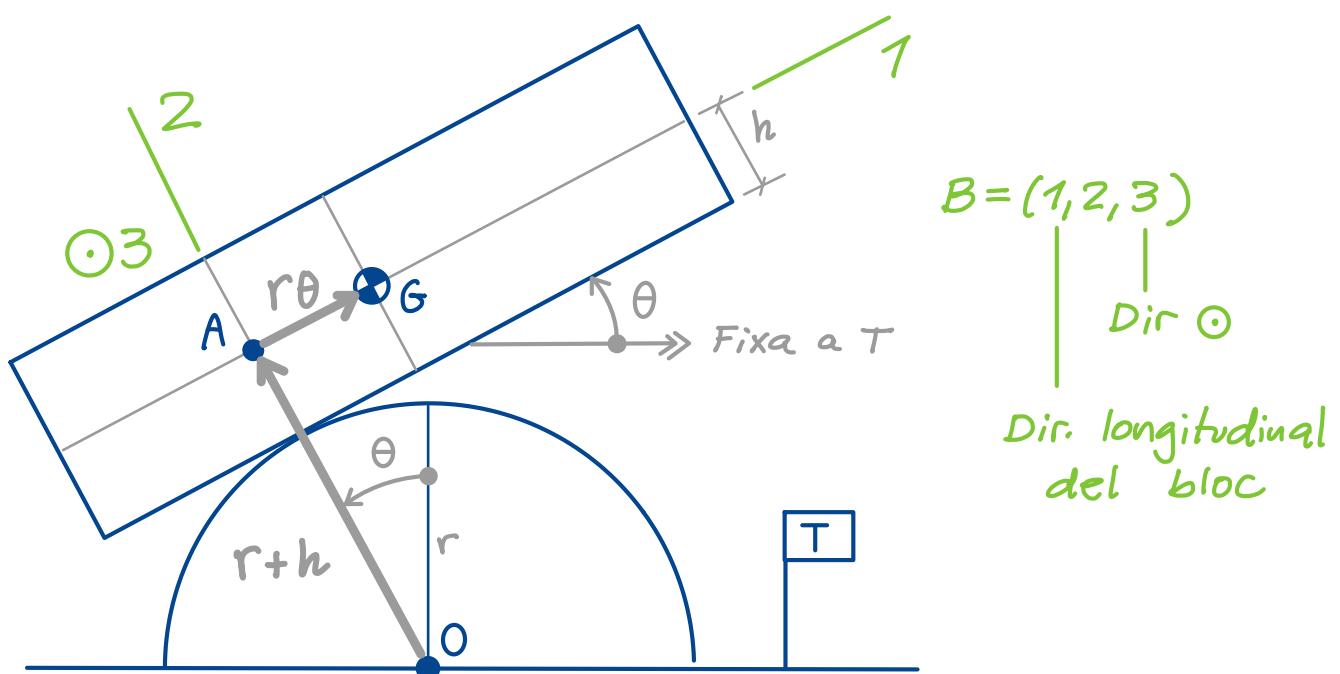
$$\bar{a}_T(G) = \left[\leftarrow (h\ddot{\theta} + r\theta\dot{\theta}^2) \right] + \left[\uparrow (r\dot{\theta}^2 - h\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta}) \right],$$

que expressat en base $B = (1, 2, 3)$ és

$$\{\bar{a}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} - r\theta\dot{\theta}^2 \\ r\dot{\theta}^2 - h\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$



$\bar{v}_T(G)$



$$\{\bar{OG}\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ r+h \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\dot{\theta} \\ r+h \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\{\bar{v}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} r\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r\dot{\theta} \\ r+h \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} \\ r\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Derivem $\{\bar{OG}\}_B$ analíticament

Matix resultat que a Eq. (2) de l'ex. ant.

$$\bar{\alpha}_T(G)$$

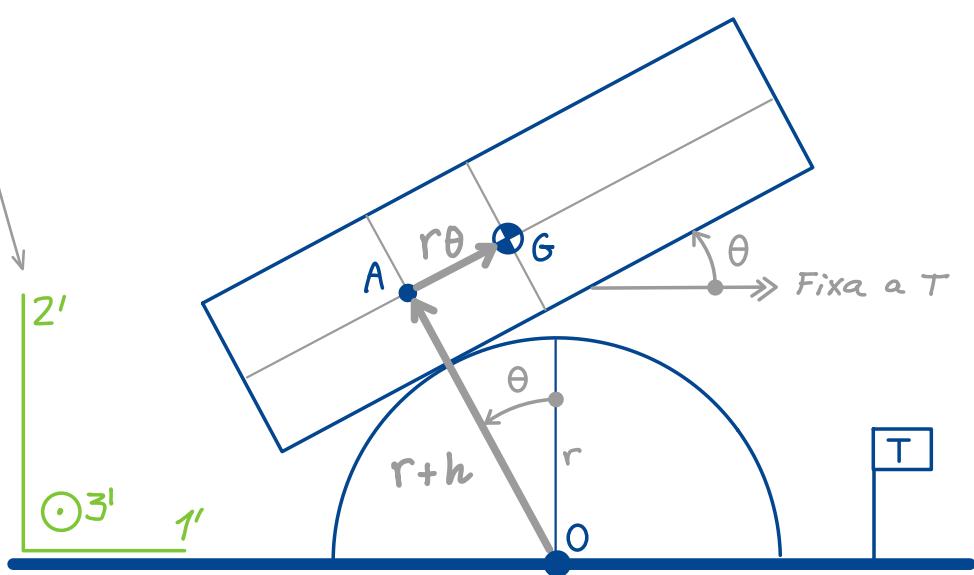
Derivem $\bar{v}_T(G)$ respecte del temps:

$$\{\bar{\alpha}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} \\ r\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -r\dot{\theta}\ddot{\theta} \\ -h\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}} \times \begin{Bmatrix} -h\dot{\theta} \\ r\theta\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

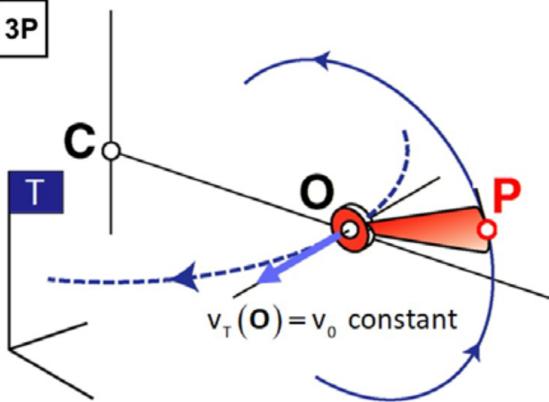
$$= \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} - r\dot{\theta}\ddot{\theta} \\ r\dot{\theta}^2 - h\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Mateix resultat
que a l'Eg. (3)
de l'ex. anterior!

Obs.: tb hauríem pogut utilitzar aquesta base
 $B' = (1', 2', 3')$ fixa a T però l'expressió de
 \bar{OG} seria més complexa, i la de $\bar{v}_T(G)$ i $\bar{\alpha}_T(G)$
també perquè B' no té els versors apuntant en les
dirs. dels canvis de valor i dir. de \bar{OA} i \bar{AG} .



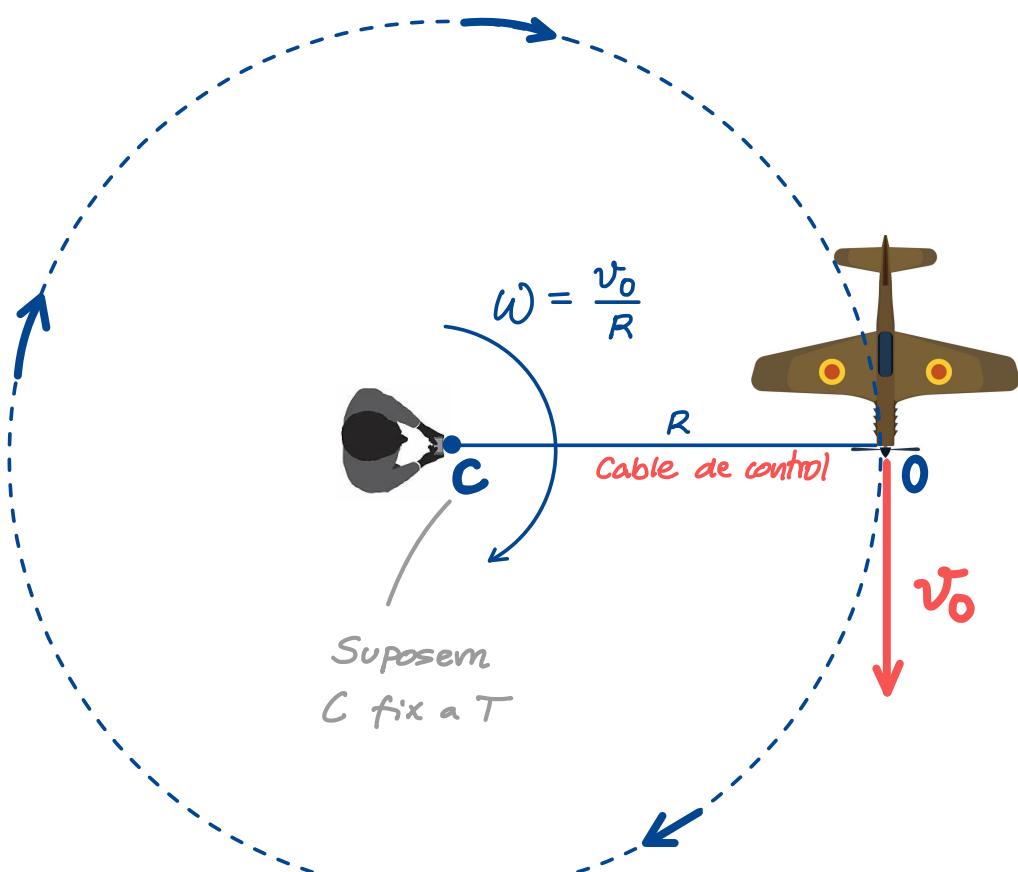
3P



Un avió gira respecte del terra de manera que la punta de la cabina (**O**) descriu una trajectòria circular respecte del terra (**T**) amb celeritat constant v_0 . L'hèlix està articulada a **O**. Mitjançant la derivada analítica, calcula $\bar{v}_T(P)$, $\bar{a}_T(P)$, $\bar{\alpha}_T^{\text{hèlix}}$.

Exercici inspirat en el pilotatge d'aeromodels amb línia de control ("control line flying"):

<https://youtu.be/wZavLFRsMHg?si=wueZ1sArJ49wwCWp&t=179>



Definim :

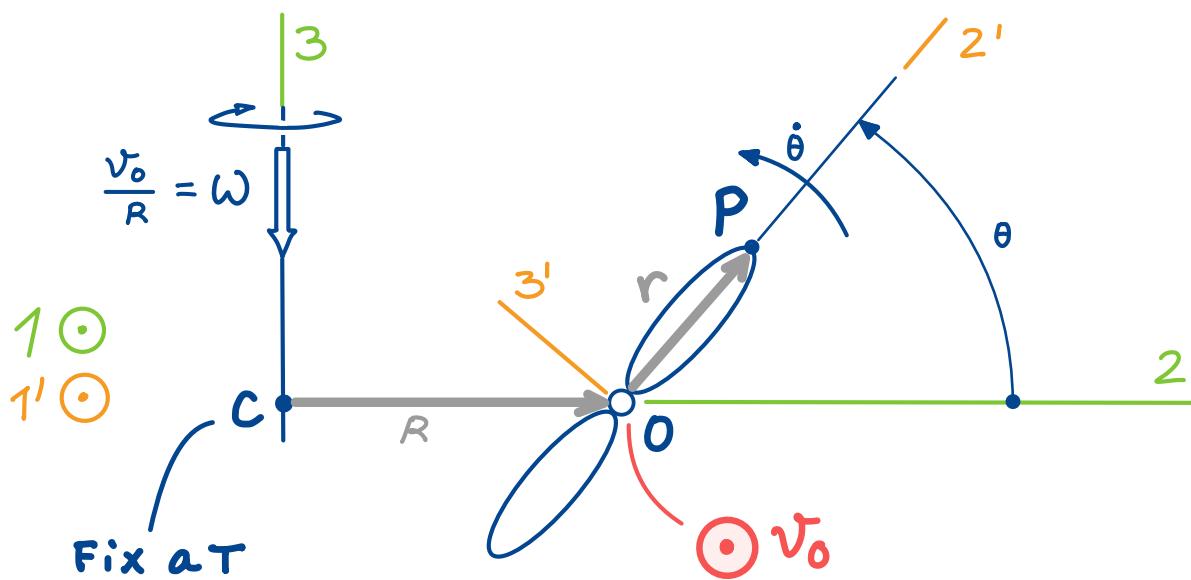
$$R = |\overline{CO}|$$

$$r = |\overline{OP}|$$

$$\omega = \Omega_T^{\overline{CO}} = \underbrace{\frac{v_0}{R}}_{\text{CONSTANT!}}$$

valor de la vel. angular de \overline{CO} resp. T

Derivarem $\overline{CP} = \overline{CO} + \overline{OP}$ analíticament.



Cal triar una base per fer els càlculs.

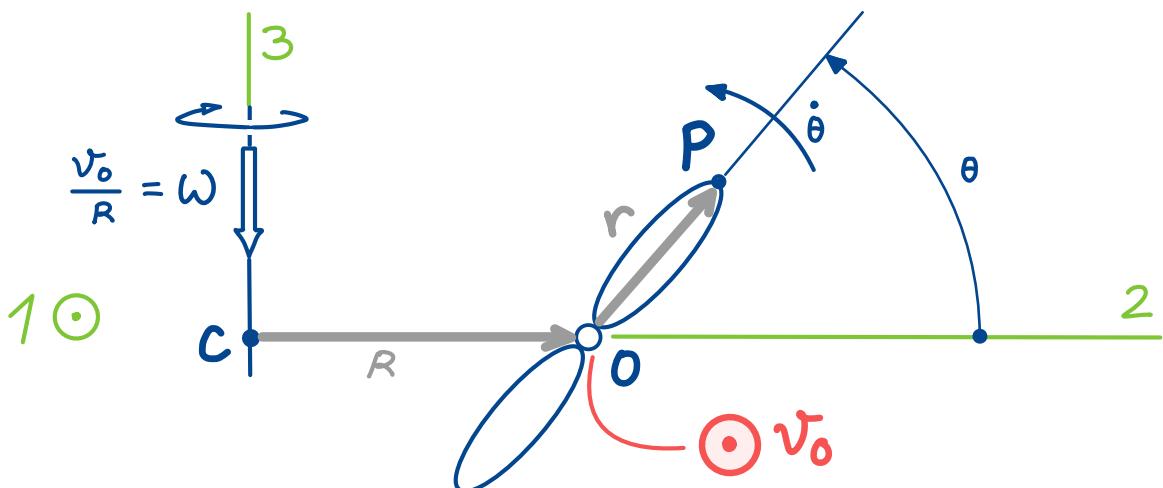
Ens adonem que aquestes dues bases van bé:

$$\boxed{B = (1, 2, 3)} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Dir. } \overline{CO} \\ \text{Dir. } \odot \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{facilita la} \\ \text{projeció de } \overline{CO} \end{array} \quad \boxed{\bar{\Omega}_T^B = (\downarrow \omega)}$$

$$\boxed{B' = (1', 2', 3')} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Dir. } \overline{OP} \\ \text{Dir. } \odot \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{facilita la} \\ \text{proj. de } \overline{OP} \end{array} \quad \boxed{\bar{\Omega}_T^{B'} = (\downarrow \omega) + (\odot \dot{\theta})}$$

Farem els càlculs en ambdues bases, per practicar.

En base $B = (1, 2, 3)$



$\bar{v}_T(P)$

$$\{\bar{CP}\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\cos\theta \\ rsin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R+r\cos\theta \\ rsin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}_T^B} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ R+r\cos\theta \\ rsin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega R + \omega r\cos\theta \\ -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix}$$

Anàlisi dimensional:

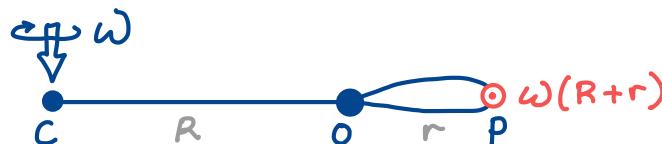
► Tot surt en m/s ✓

Anàlisi de casos particulars (suposant $\theta=0$)

► Si aturem el motor de l'hèlix, però no la cabina:

$$\begin{array}{l} \dot{\theta}=0 \quad \forall t \quad (\text{aturem } \dot{\theta}) \\ \theta=0 \quad (\text{suposem } \theta=0) \end{array}$$

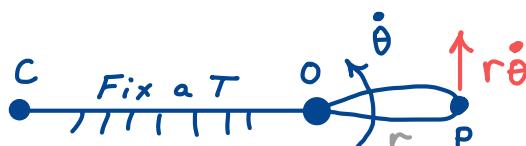
$$\Rightarrow \{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} \omega(R+r) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



► Si aturem la cabina, però no l'hèlix:

$$\begin{array}{l} \omega=0 \quad \forall t \quad (\text{aturem } \omega) \\ \theta=0 \quad (\text{suposem } \theta=0) \end{array}$$

$$\Rightarrow \{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r\dot{\theta} \end{Bmatrix}$$



Comprovacions

$\bar{a}_T(P)$

Recordem que $\omega = ct$

$$\left\{ \bar{a}_T(P) \right\}_B = \begin{Bmatrix} -wr\dot{\theta}\sin\theta \\ -r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \\ r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} wR + wr\cos\theta \\ -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} -wr\dot{\theta}\sin\theta \\ -\omega^2 R - r\omega^2 \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -2\omega r\dot{\theta}\sin\theta \\ -r\ddot{\theta}\sin\theta - \omega^2 R - r(\dot{\theta}^2 + \omega^2)\cos\theta \\ r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \end{Bmatrix}$$

Anàlisi dimensional:

► Tot surt en m/s^2



Anàlisi de casos particulars (suposant $\theta=0$):

► Si aturem motor de l'hèlix, però no la cabina:

$$\begin{array}{l} \dot{\theta} = 0 \quad \forall t \text{ (aturem } \dot{\theta}) \\ \theta = 0 \quad (\text{suposem } \theta = 0) \end{array} \Rightarrow \left\{ \bar{a}_T(P) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega^2(R+r) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

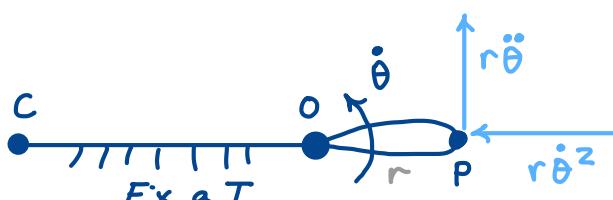


► Si aturem la cabina però no l'hèlix:

$$\begin{array}{l} \omega = 0 \quad \forall t \text{ (aturem } \omega) \\ \theta = 0 \quad (\text{suposem } \theta = 0) \end{array} \Rightarrow \left\{ \bar{a}_T(P) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

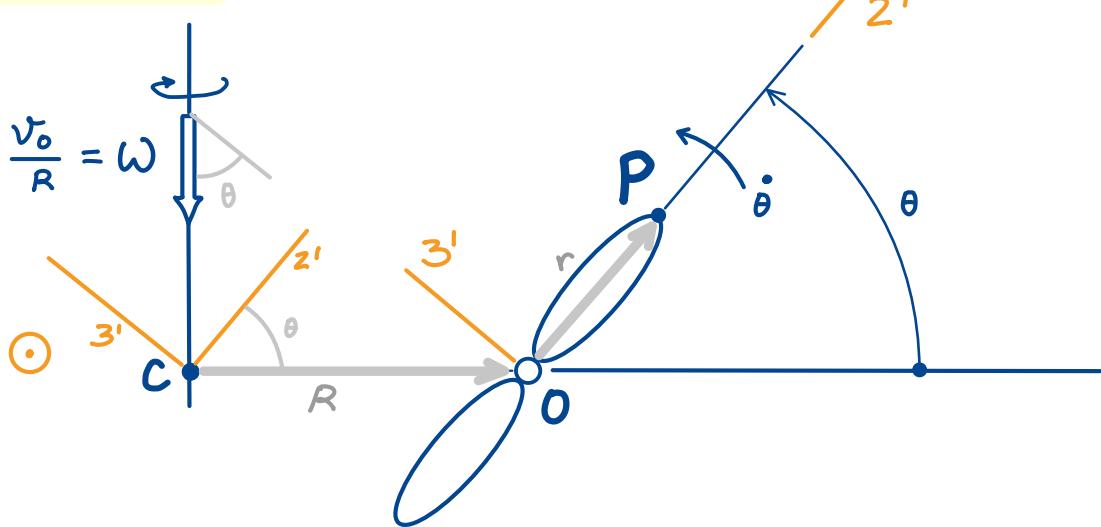


Comprovacions



En base B'

$\bar{v}_T(P)$



$$\{\bar{v}_{CP}\}_{B'} = \bar{v}_O + \bar{v}_{OP} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R\cos\theta \\ -R\sin\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R\cos\theta+r \\ -R\sin\theta \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\{\bar{v}_T(P)\}_{B'}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R\dot{\theta}\sin\theta \\ -R\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -w\sin\theta \\ -w\cos\theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ R\cos\theta+r \\ -R\sin\theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -R\ddot{\theta}s \\ -R\ddot{\theta}c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} WR \\ R\dot{\theta}s \\ R\dot{\theta}c + \dot{r} \end{Bmatrix} \underbrace{= \begin{Bmatrix} WR + wrc\cos\theta \\ 0 \\ \dot{r} \end{Bmatrix}}_{WR}$$

$S = \sin\theta$ $C = \cos\theta$ ← Per abreviar

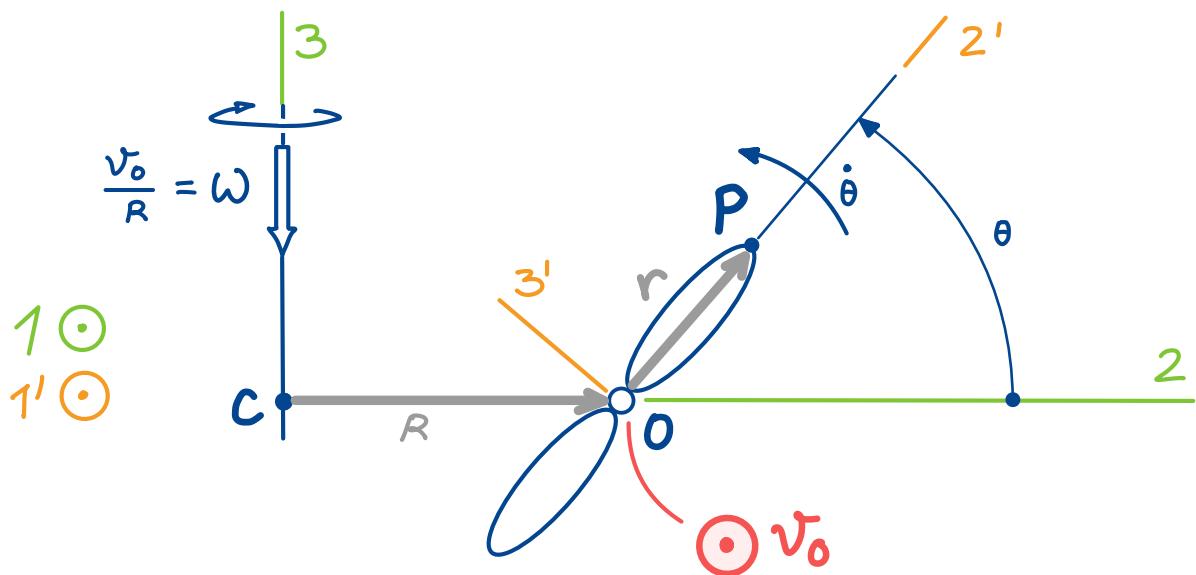
$\bar{a}_T(P)$

$$\boxed{\{\bar{a}_T(P)\}_{B'}} = \begin{Bmatrix} -wr\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \\ \ddot{r} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -w\sin\theta \\ -w\cos\theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} WR + wrc\cos\theta \\ 0 \\ \dot{r} \end{Bmatrix}}_{\text{Combinando}}$$

$$= \boxed{\begin{Bmatrix} -2wr\dot{\theta}\sin\theta \\ -w^2\cos\theta(R+r\cos\theta) - \dot{\theta}^2r \\ (\ddot{r} + w^2\sin\theta(R+r\cos\theta)) \end{Bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} -wr\dot{\theta}\sin\theta \\ -w^2R\cos\theta - w^2r\cos^2\theta - \dot{\theta}^2r \\ w^2R\sin\theta + w^2r\sin\theta\cos\theta \end{Bmatrix}}$$

$\bar{\alpha}_T$ hélice



$$\bar{\Omega}_T \text{ hélice} = \bar{\Omega}_{\text{cabina}} \text{ hélice} + \bar{\Omega}_T \text{ cabina} = (\odot \dot{\theta}) + (\downarrow \omega)$$

En base B

$$\{\bar{\Omega}_T \text{ hélice}\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} \quad \text{variable, en ppi.}$$

$$\{\bar{\alpha}_T \text{ hélice}\}_B = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix}} \times \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ -\omega \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En base B'

$$\{\bar{\Omega}_T \text{ hélice}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -\omega \sin \theta \\ -\omega \cos \theta \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\alpha}_T \text{ hélice}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ -\omega \dot{\theta} \cos \theta \\ \omega \dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix} + \{\bar{\Omega}_T \text{ hélice}\}_{B'} \times \{\bar{\Omega}_T \text{ hélice}\}_{B'}$$

Angles d'Euler

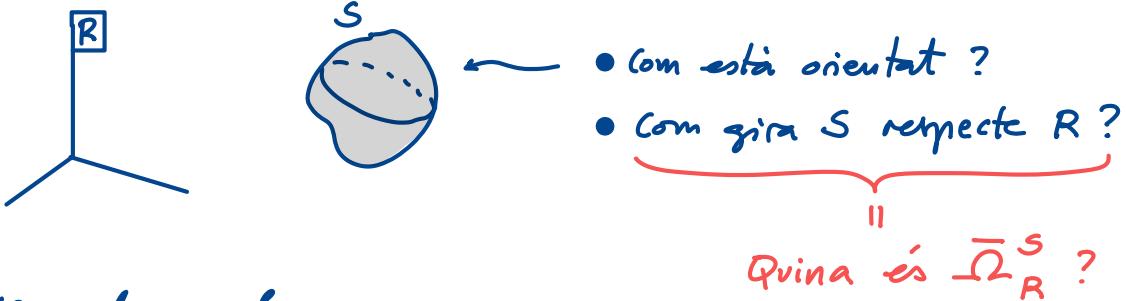
Repàs de teoria

+

Exercicis

Repàs d'angles d'Euler

Permeten orientar un sòlid respecte una ref. i expressar la vel. angular del sòlid respecte aquesta ref.

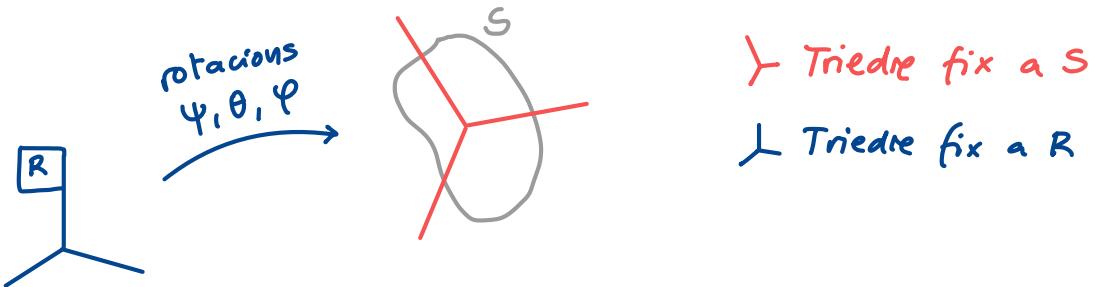


Recordem els angles

ψ	θ	φ
psi	theta	phi
precessió	nutació	spin

Sempre en aquest ordre!

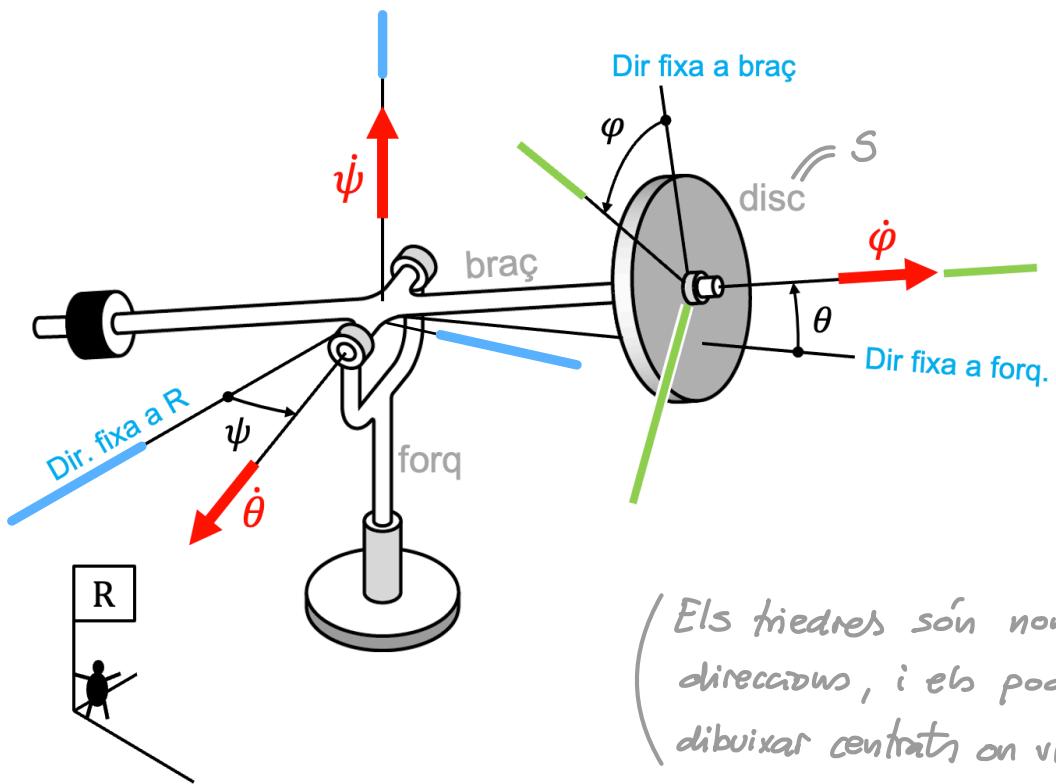
Sigui un sòlid S amb un triedre fix a ell. Les rotacions d'Euler són 3 rotacions encadenades (en sèrie), al voltant de 3 eixos, que permeten definir l'orientació del triedre fix a S relativa a un triedre fix a R :



A teoria heu vist com són aquestes rotacions en el cas del giroscopi. Vegeu apartat C1.4 de [mec.etscib.edu](#) wikimec

Però una cosa és com queda orientat aquest triedre fix al sòlid, i una altra és com queden els eixos de rotació després de cada gir.

Tot això es veu clar al giroscopi, on $S = \text{disc}$:



- Triedre fix a R ? → El blau! (Dir. $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$ per $\psi = \theta = \varphi = 0$)
- Triedre fix a S ? → El verd!
- Eixos d'Euler? → Els dels vecs. vermellos! $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$

Recorden sempre això:

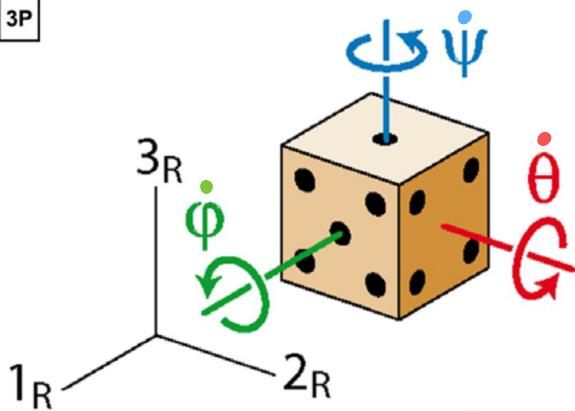
Eix	Com queda?	Gira amb vel. angular
A 90° $\bar{\psi}$	Fix a R	$\bar{\theta}$ (no gira) $\bar{\psi}$
A 90° $\bar{\phi}$	\perp a $\bar{\psi}$ i $\bar{\theta}$	$\bar{\psi} + \bar{\theta}$

$$\text{Eix } \bar{\theta} = (\text{Pla } \perp \bar{\psi}) \cap (\text{Pla } \perp \bar{\phi})$$

Especificació rigorosa de la posició del 2^o eix

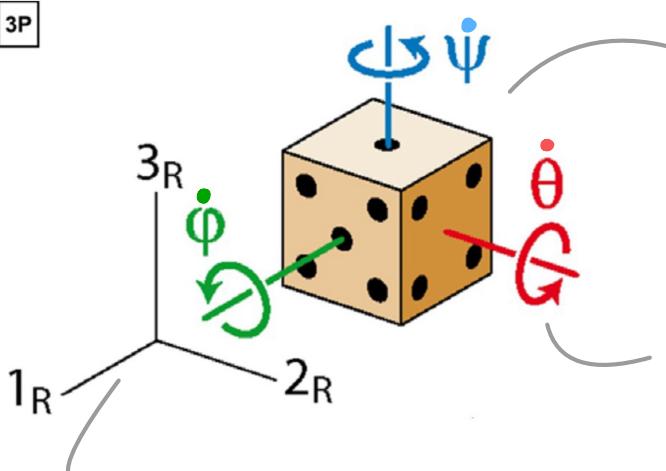
L'angle entre $\bar{\psi}$ i $\bar{\phi}$ pot ser qualsevol!

3P



El dau s'orienta mitjançant tres angles d'Euler respecte del terra (R).
Per a la configuració $\psi = \theta = \varphi = 0$, els eixos d'Euler són els indicats.
 $1_R 2_R 3_R$ són tres direccions fixes a terra.
Determina l'orientació del dau i la direcció de les rotacions d'Euler si s'introdueixen $\Delta\psi = \Delta\theta = \Delta\varphi = 90^\circ$.

3P



Configuració inicial
del dau (per
 $\psi = \theta = \varphi = 0$)

Fixeu-vos bé en els
sentits de gir!

Triedre fix a $R = T$ (terra)

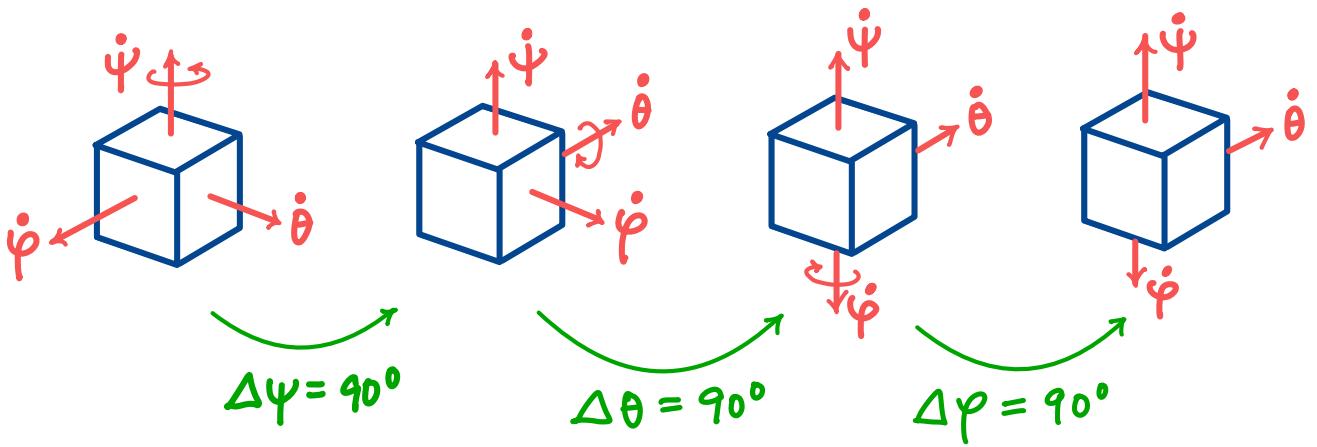
Per resoldre l'exercici:

- Dibuixarem com queden els eixos $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$ després de cada rotació
- Deduirem com queden les cares tenint en compte que les oposades sumen 7.
- Comprovaranem que :

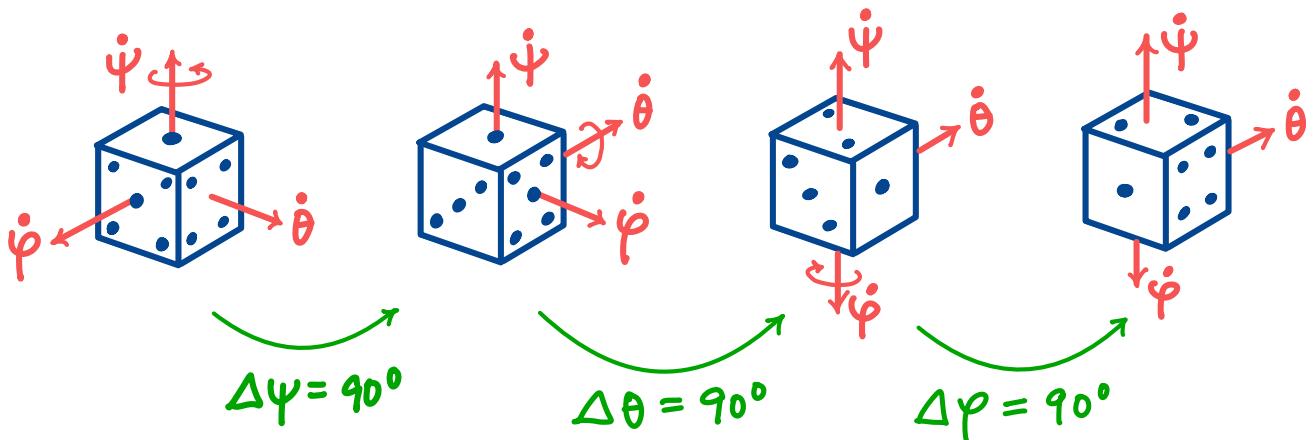
• $\bar{\psi}$ roman fix a la ref. ←
 A 90° ←
 A 90° ←
 • $\bar{\theta}$ " en el pla \perp a $\bar{\psi}$
 • $\bar{\varphi}$ " fix a la cara original del dau ←
en aq. cas

Angle entre
 $\bar{\psi}$ i $\bar{\varphi}$
 pot ser
 qualsevol

Com queden els eixos $\bar{\psi}, \dot{\theta}, \bar{\varphi}$:



Com queden les cares:

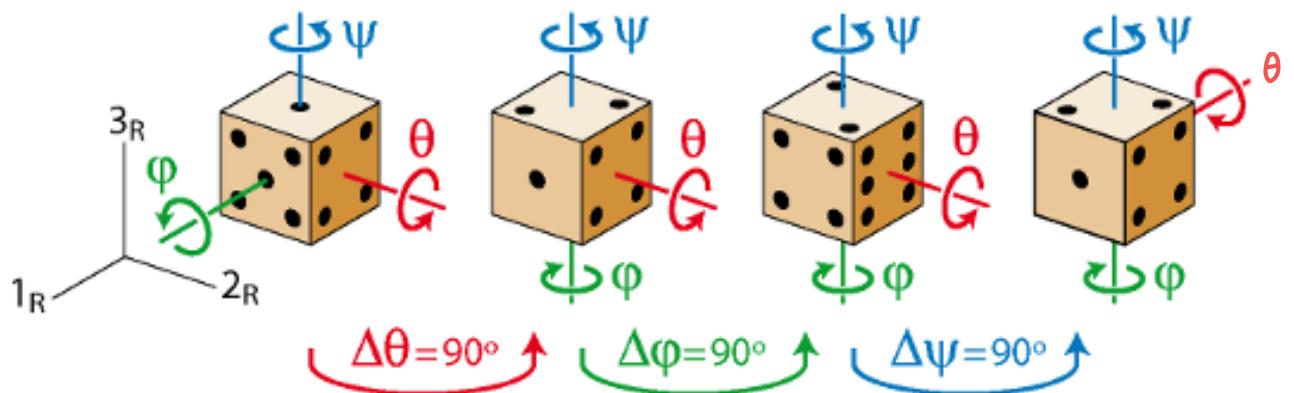
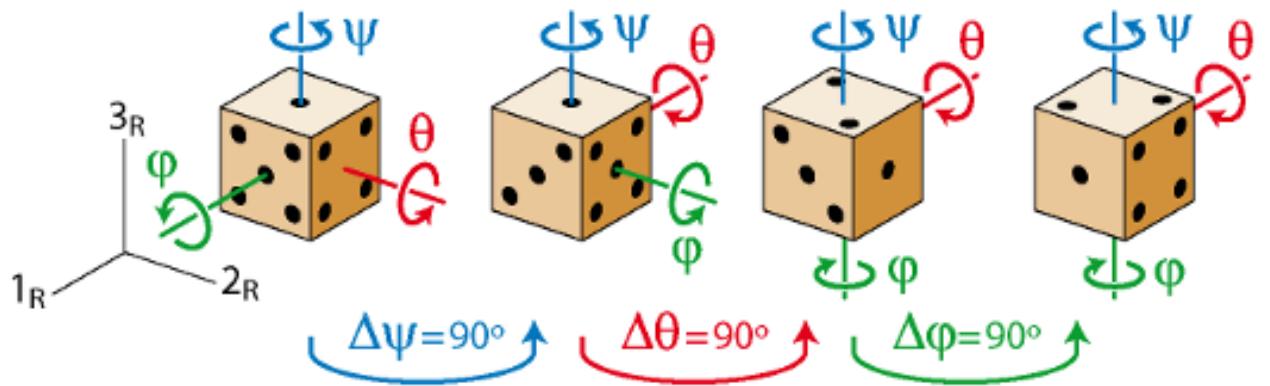


Comprovacions :

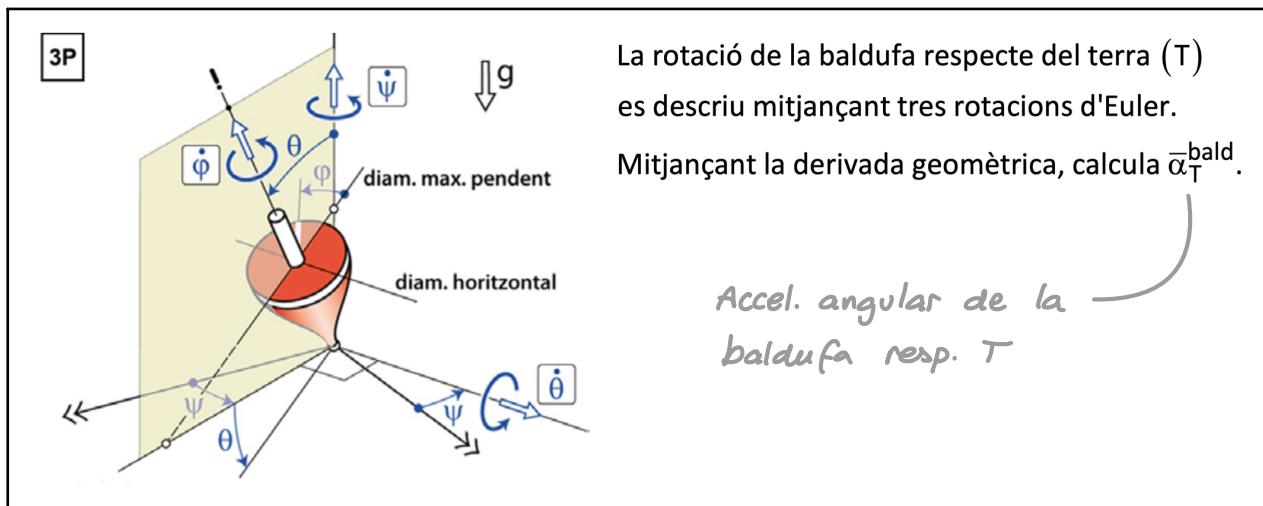
- $\bar{\psi}$ roman fix a ref? Si! ✓
- $\dot{\theta}$ roman al pla \perp a $\bar{\psi}$? Si! ✓
- $\dot{\varphi}$ roman \perp a cara ? Si! ✓

Deures : Introduiu les rotacions en l'ordre $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ i comproueu que surt el mateix !

Solució en els dos ordres :

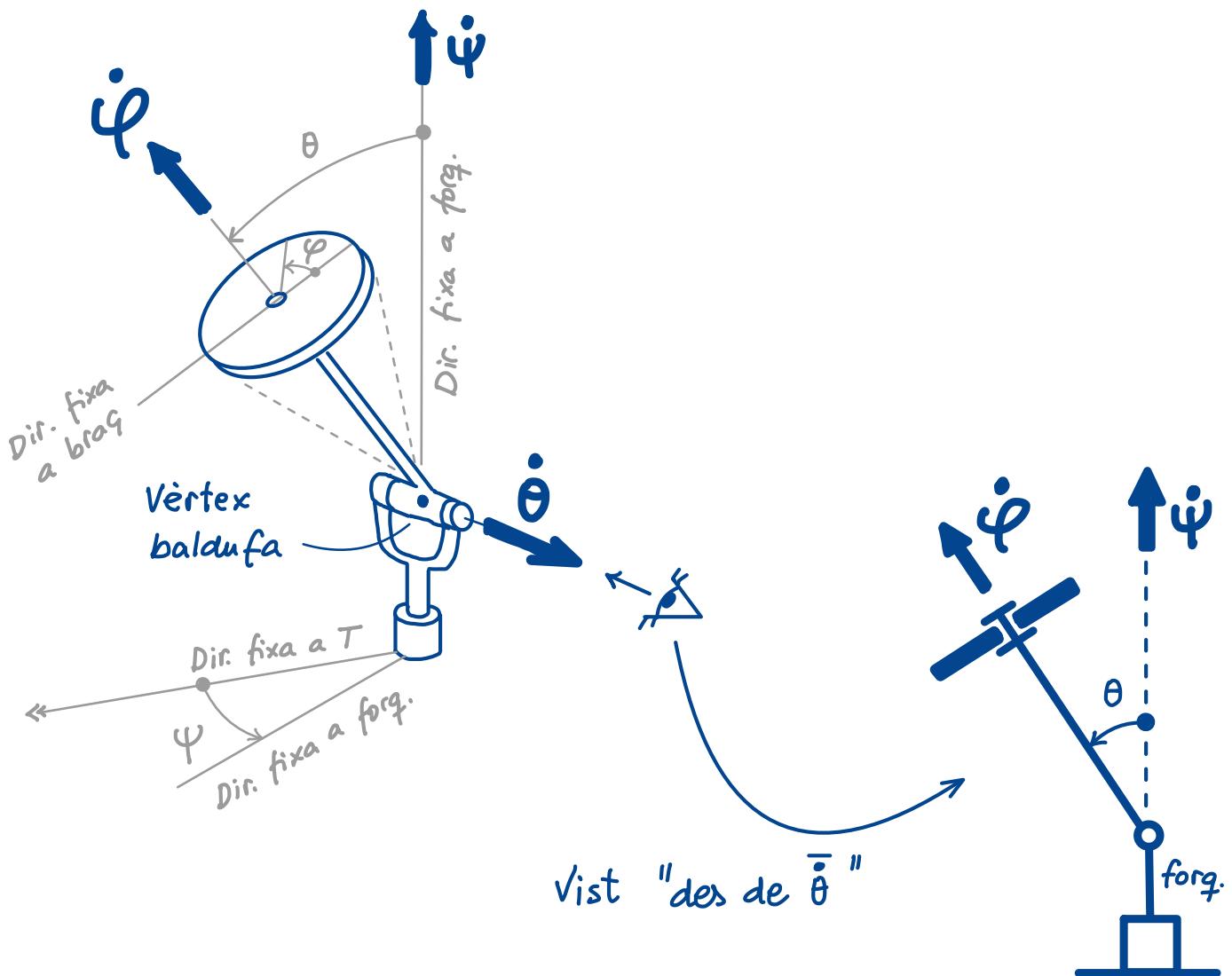


Ha de donar el mateix, ja que l'orientació per mitjà d'angles d'Euler és invariant a l'ordre en que s'introdueixen les rotacions.

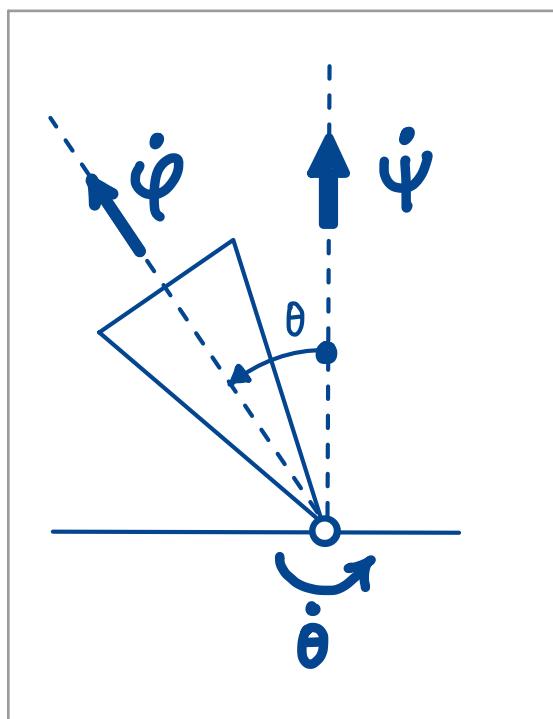


Cal derivar $\bar{\Omega}_T^{\text{bald}} = \bar{\psi} + \bar{\theta} + \bar{\varphi}$ geomètricament.

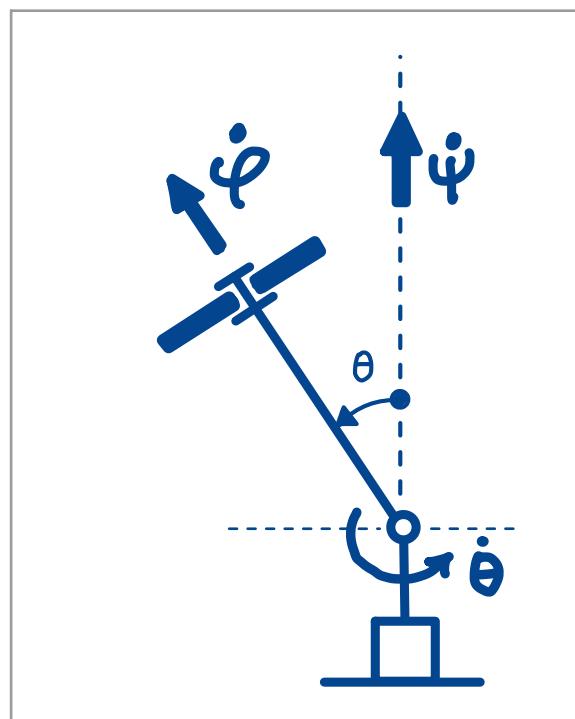
Tot i que no cal estrictament, podem pensar la baldufa com un giroscopi. Això ens ajudarà a entendre com varien $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$:



Baldufa

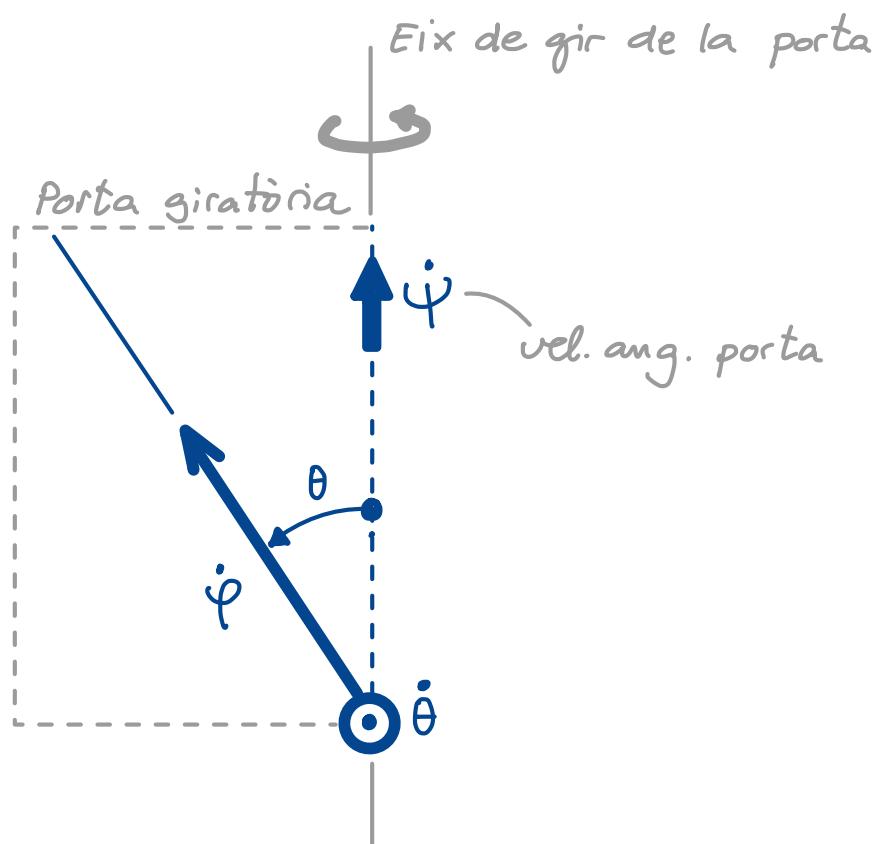


Giroscopi equivalent



Podem pensar el pla definit per $\bar{\psi}$ i $\bar{\phi}$ com una "porta" que gira amb vel. angular $\dot{\psi}$

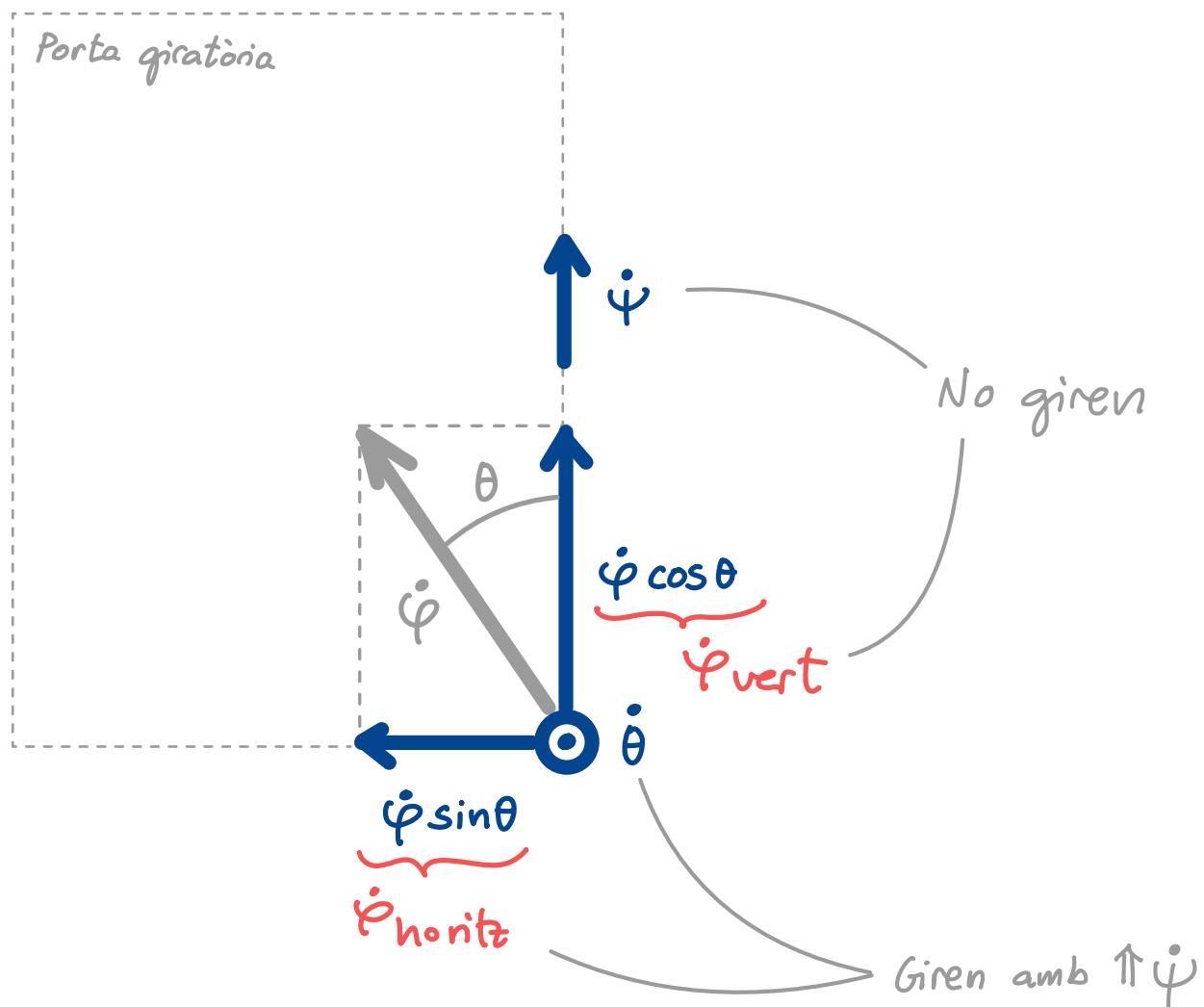
Els vectors $\bar{\psi}$ i $\bar{\phi}$ són sobre aquest pla, i $\dot{\theta}$ és \perp al pla:



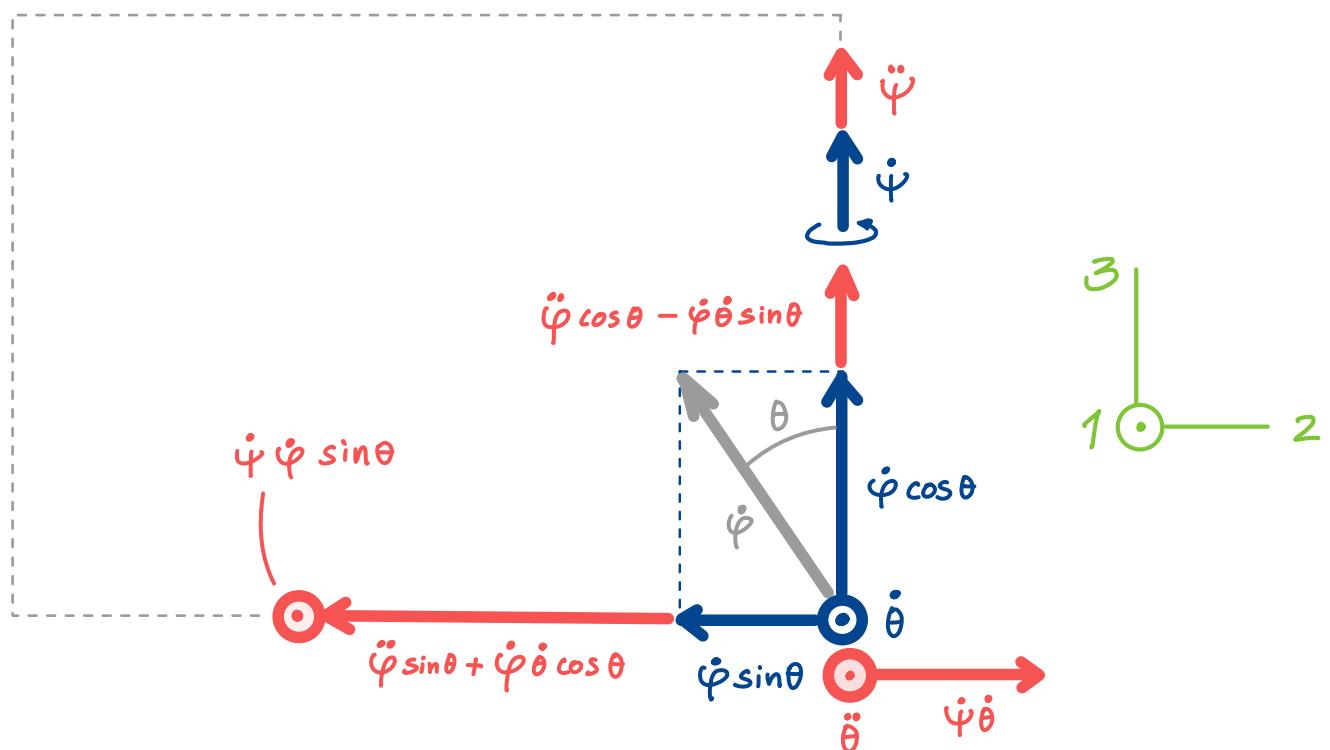
Per derivar geomètricament aquests tres vectors podem aplicar un truc: podem substituir $\dot{\varphi}$ per

$$\underbrace{\dot{\varphi}_{\text{vert.}} + \dot{\varphi}_{\text{horitz}}}_{\begin{array}{l} \text{component} \\ \text{vertical de } \dot{\varphi} \end{array}} + \underbrace{\dot{\varphi}_{\text{horitz}}}_{\begin{array}{l} \text{component} \\ \text{horizontal de } \dot{\varphi} \end{array}}$$

Això simplifica la derivació, perquè, ara, els vectors que giren ho faran amb rotació simple només:

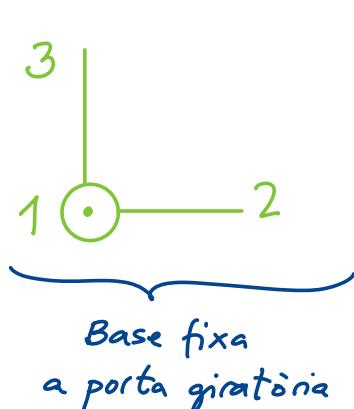


Ara derivem els vecs. blaus i obtenim els vermells :



$\bar{\alpha}_T^{Bald}$ és la suma dels vecs vermells ! Ja no la pintem!

Serà + pràctic expressar $\bar{\alpha}_T^{Bald}$ mitjançant la base :



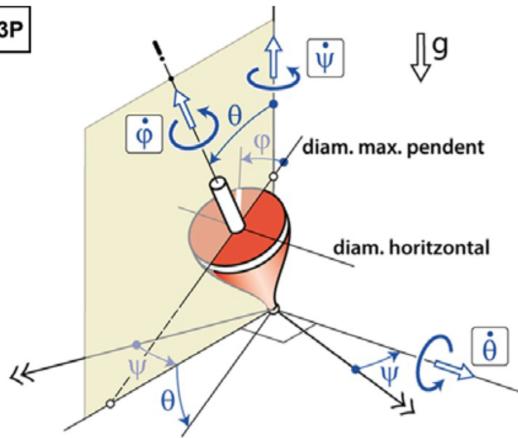
$$B = (1, 2, 3)$$

↑ ↑
 Dir. de $\bar{\theta}$ Dir. de $\bar{\psi}$
 ↑ ↑
 Sempre \perp ,
 per construcció dels
 eixos d'Euler

Queda així :

$$\left\{ \bar{\alpha}_T^{bald} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \dot{\theta} - \ddot{\phi} \sin \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\}_B \quad (A)$$

3P



La rotació de la baldufa respecte del terra (T) es descriu mitjançant tres rotacions d'Euler.

Mitjançant la derivada analítica, calcula $\bar{\alpha}_T^{\text{bald}}$.

En base B

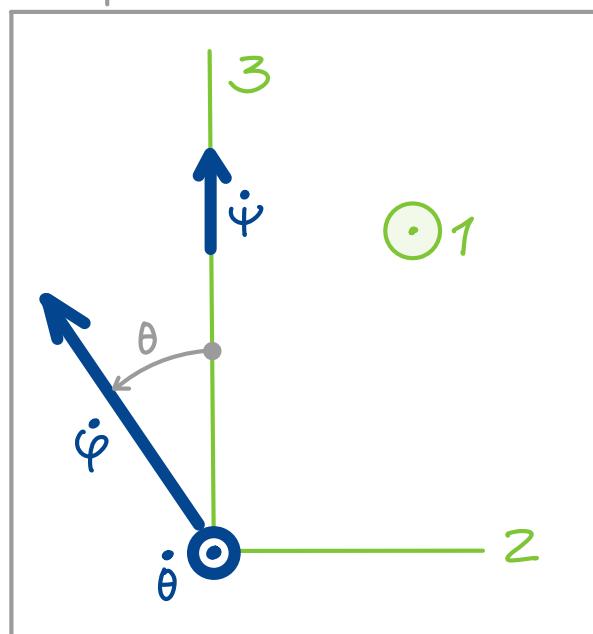
$$\underbrace{B = (1, 2, 3)}$$

Es la d'abans

(gira amb $\uparrow \bar{\psi}$)

$$\left\{ \bar{\omega}_T^{\text{bald}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{Bmatrix}$$

Pla "porta"



$$\boxed{\left\{ \bar{\alpha}_T^{\text{bald}} \right\}_B} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} \\ -\ddot{\varphi} \sin \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\varphi} + \ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{array} \right\}}_{\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \\ 0 \end{array} \right\}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \\ -\ddot{\varphi} \sin \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \\ \ddot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\} \quad (A'')$$

Quadra amb Eq.(A)
de l'exercici anterior !

Ara en base $B' = (1', 2', 3')$ que també va bé

B' definida així:

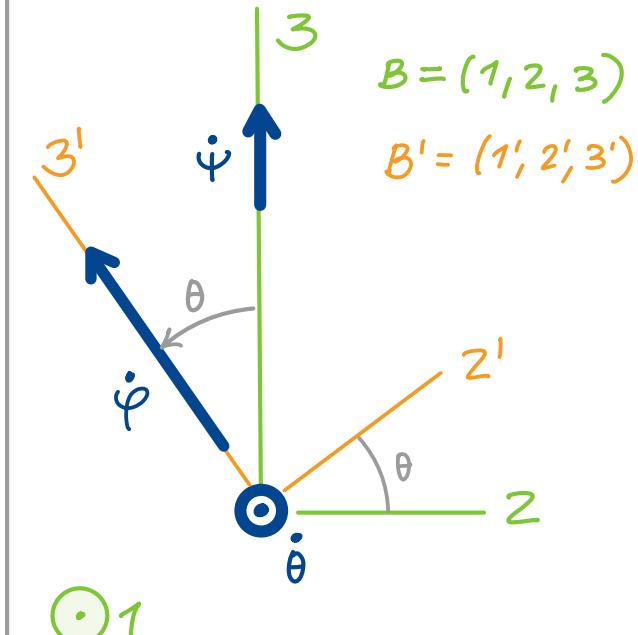
$$B' = (1', 2', 3')$$

Dir. de $\bar{\theta}$ Dir. de $\bar{\varphi}$

Sempre \perp
(per construcció eixos d'Euler)

$$\left\{ \bar{\Omega}_T^{bal'd} \right\}_{B'} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{array} \right\}$$

Pla "porta"



d/dt

$$\boxed{\left\{ \bar{\Omega}_T^{bal'd} \right\}_{B'}} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\varphi} \end{array} \right\}$$

$$\bar{\Omega}_T^{B'} = \bar{\psi} + \bar{\theta} \leftarrow \text{No intervé } \bar{\varphi}$$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{array} \right\}}_{+} \times \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{array} \right\} =$$

$$\parallel \leftarrow \bar{a} \times (\bar{a} + \bar{b}) = \underbrace{(\bar{a} \times \bar{a})}_{\circ} + (\bar{a} \times \bar{b})$$

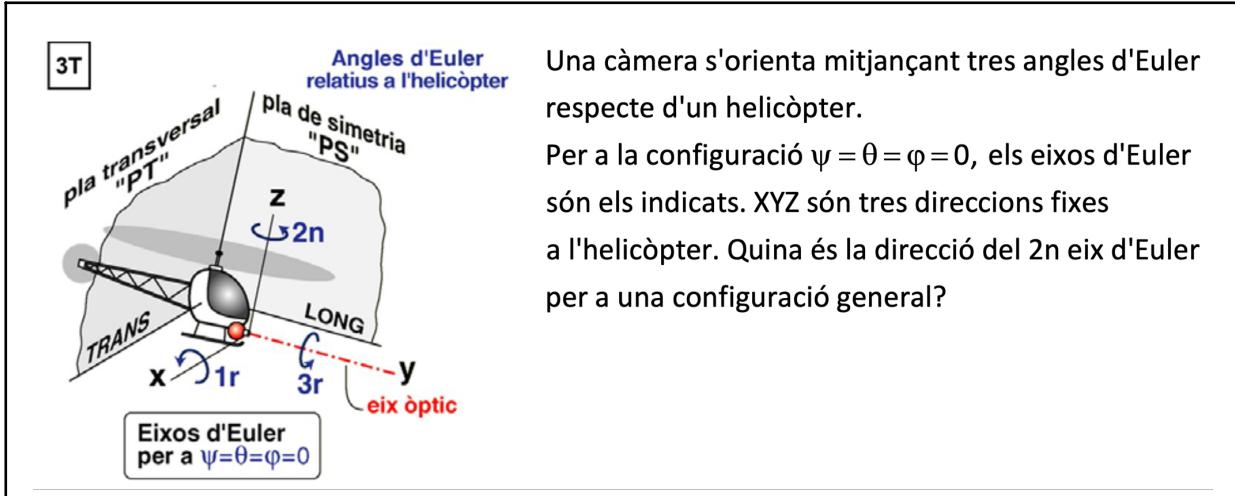
$$= \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\psi} \sin \theta \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\varphi} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \dot{\psi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} \dot{\psi} \\ 0 \end{array} \right\}$$

Extra

Qüestions pendents de 3T



Una càmera s'orienta mitjançant tres angles d'Euler respecte d'un helicòpter.

Per a la configuració $\psi = \theta = \phi = 0$, els eixos d'Euler són els indicats. XYZ són tres direccions fixes a l'helicòpter. Quina és la direcció del 2n eix d'Euler per a una configuració general?

Compte: estem orientant la càmera resp. l'helicòpter, no el terra.

Siguin | PP el "pla pel·lícula" ← El pla \perp a l'eix òptic, on es forma la imatge de la càmera

PS el "pla de simetria" de l'helicòpter.

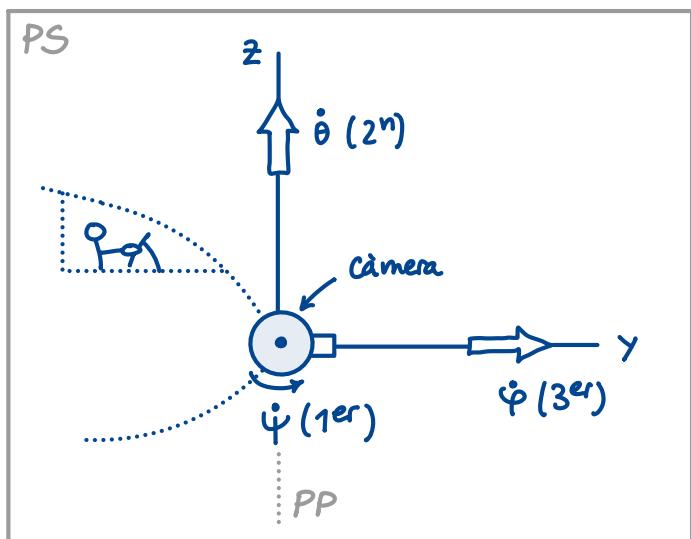
De teoria d'angles d'Euler sabem que

2ⁿ eix d'Euler es manté $\left\{ \begin{array}{l} \perp \text{ al 1er eix } \Rightarrow E \text{ PS} \\ \perp \text{ al 3er eix } \Rightarrow E \text{ PP} \end{array} \right.$

Per tant, en una config. general:

Dir. del 2ⁿ eix d'Euler = PS \cap PP

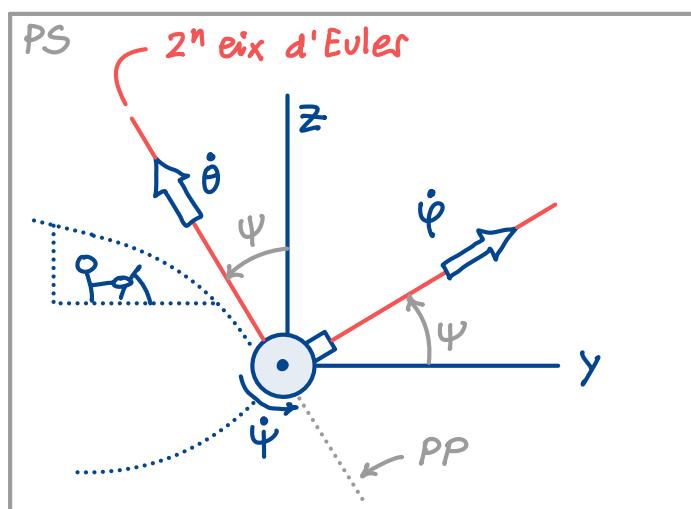
Tot i que no caldria afegir més explicacions, ho intento explicar amb dibuixos tot seguit:



Situació inicial
 (Triedre xyz és fix a l'helicòpter (és "el de referència"))

Clarament:

$$2^{\text{a}} \text{ eix Euler} = PS \cap PP$$



Situació després de la 1^{\text{a}} rotació (ψ)

Clarament:

$$2^{\text{a}} \text{ eix Euler} = PS \cap PP$$

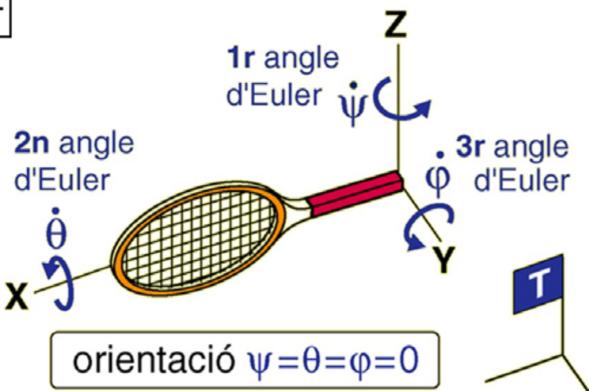
Després de la 2^{\text{a}} rotació ($\bar{\theta}$), PP s'abat, però seguim tenint:

$$2^{\text{a}} \text{ eix Euler} = PS \cap PP$$

Després de la 3^{\text{a}} rotació ($\bar{\varphi}$), PP gira arreu de l'eix $\bar{\varphi}$, però seguim tenint

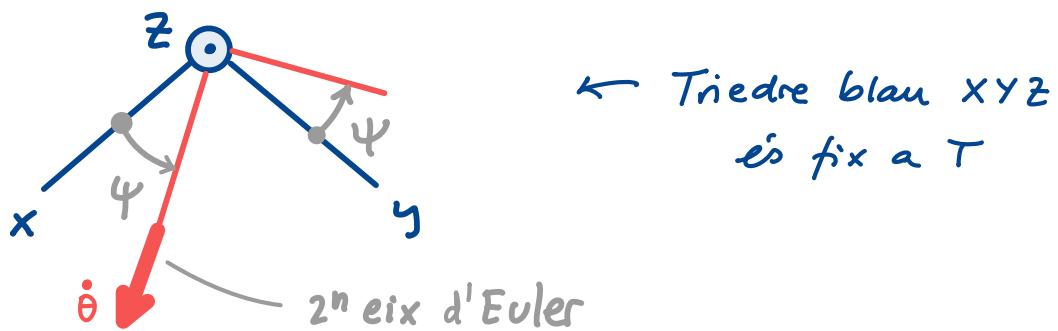
$$2^{\text{a}} \text{ eix Euler} = PS \cap PP$$

3T



La raqueta s'orienta mitjançant tres angles d'Euler respecte del terra (T). Per a la configuració $\psi = \theta = \varphi = 0$, els eixos d'Euler són els indicats. XYZ són tres direccions fixes a terra. Quina és la direcció del 2n eix d'Euler per a una configuració general?

2ⁿ eix es mou en el pla horitzontal de T:



2ⁿ eix d'Euler es manté

\perp al 1er eix \implies 2ⁿ eix \in pla horitzontal
" Dir. vertical (la gravetat) PH

\perp al 3er eix \implies 2ⁿ eix \in pla raqueta
Dir. \perp pla raqueta PR

Ergo, a una config. general:

$$2^n \text{ eix} = PH \cap PR$$