8P - Extra

Exercicis addicionals, relacionats
amb molles i amortidors

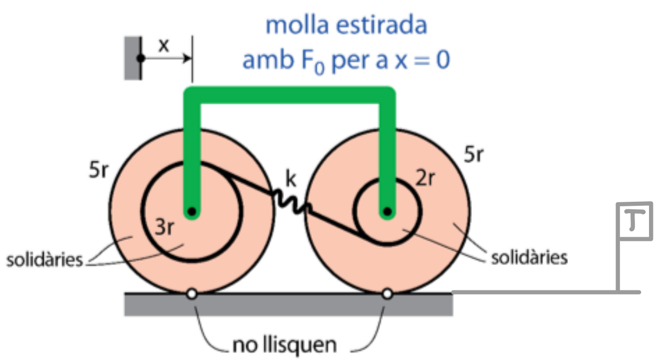
Versió 1.1

Lluís Ros
https://lluisros.github.io/mecanica

En exercicis de molles inserides en fils inextensibles que s'enrotllen a corrons, hi pot haver casos en que calgui calcular les velocitats dels extrems de la molla en una **referència diferent de T**, ja que si les calculem a T no surten longitudinals a la molla (cosa que dificulta determinar $\dot\rho$). El següent exemple ho il·lustra.

TP-G10, 3 abril 2025

Quina és l'expressió de la força d'atracció de la molla en funció de x ?



RE = Roda esquerra

RD = Roda dreta

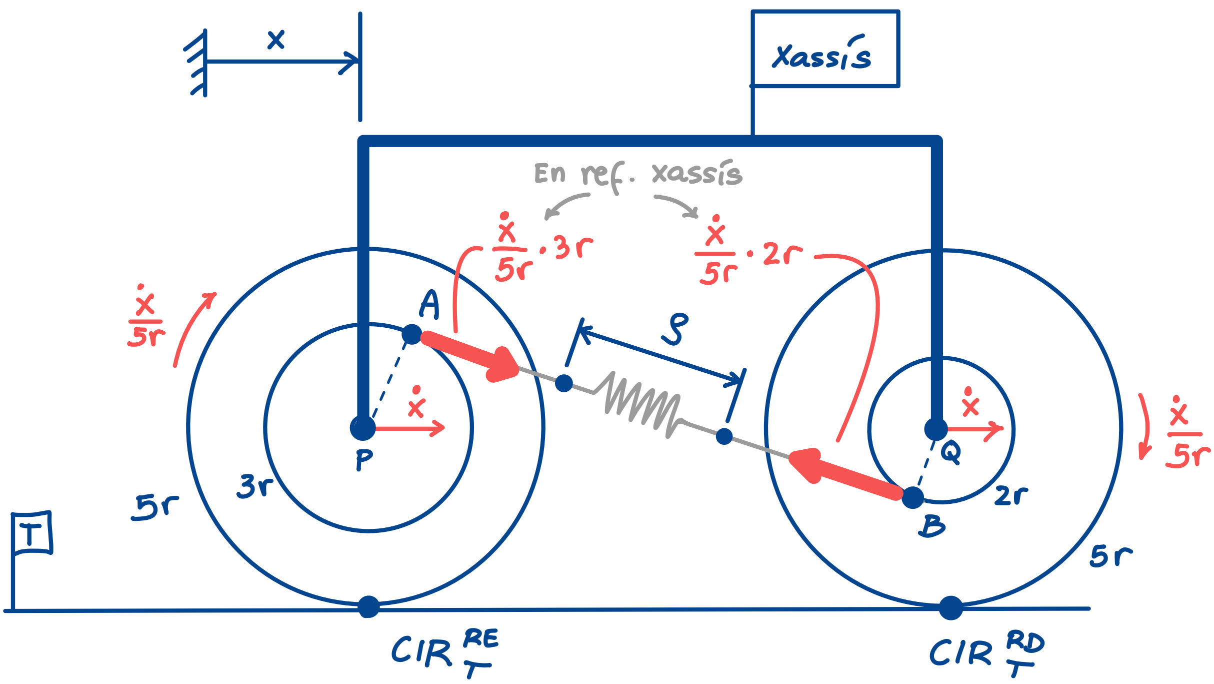
Solució

Tenim una molla acoplada a un fil inextensible que s'enrotlla sobre corrons ⇒ calcularem $\dot\rho$ i integrarem. Per trobar $\dot\rho$ ens calen les velocitats de A i B en una ref. en la que surtin longitudinals a la molla. Això passa a la ref. xassís (i no a ref. T !):

$$\bar\Omega^{RE}_{T} = \vec{\otimes}\,\frac{\dot x}{5r} = \bar\Omega^{RE}_{xassís}$$

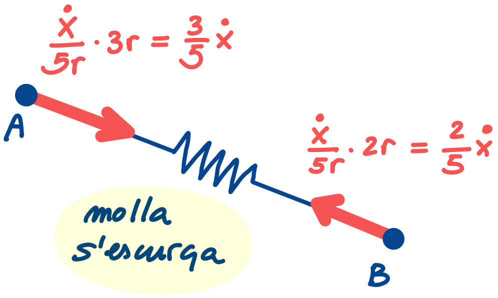
$$\bar\Omega^{RD}_{T} = \vec{\otimes}\,\frac{\dot x}{5r} = \bar\Omega^{RD}_{xassís}$$

Des del xassís s'observen les mateixes vel. angulars que des de T, p.q. xassís no gira



En el dibuix anterior: $P = CIR^{RE}_{xassís}$, $Q = CIR^{RD}_{xassís}$, i per tant A i B descriuen, en ref. xassís, trajectòries circulars amb centre a P i Q, respectivament. Això permet deduir ràpidament les velocitats de A i B a la ref. xassís, que tenen la dir. de la molla:

A la ref. xassís tenim



Negatiu p.q. molla s'escurça!

$$\dot{\rho} = -\left(\frac{3}{5}\dot{x} + \frac{2}{5}\dot{x}\right) = -\dot{x}$$

$$\boxed{\Delta\rho = \int_0^t \dot{\rho}\, dt} = -\int_0^t \dot{x}\, dt$$

$$= -\left(x(t) - \underbrace{x(0)}_{0}\right) = -x(t) = \boxed{-x}$$

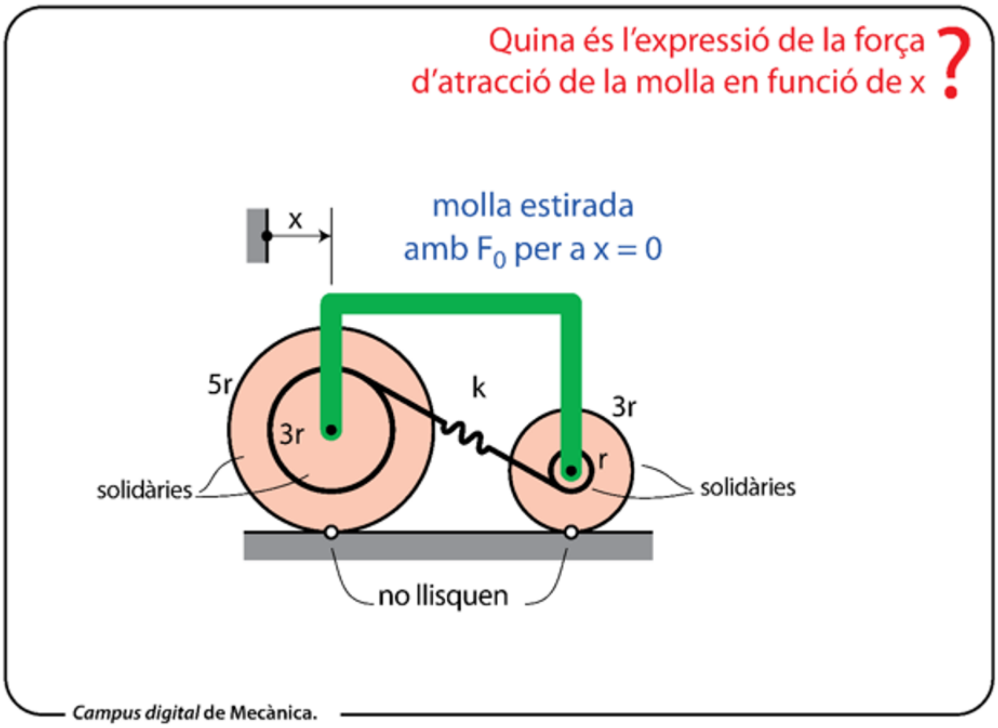
A la config. de referència inicial tenim $x = 0$

Ja no posem la dependència de t

Ara ja podem formular la força de la molla. Ho fem amb el criteri d'atracció perquè ens diuen que per $x = 0$ la molla està estirada $\Rightarrow$ Està fent una força atractiva entre els seus extrems $\Rightarrow$ F_0 és atractiva:

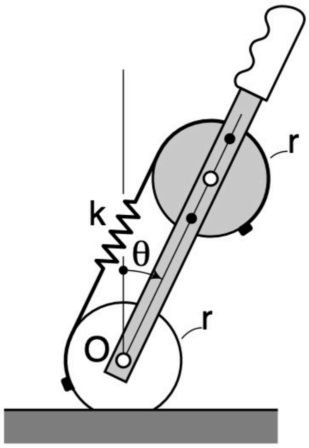
$$\boxed{F_m^{at} = F_0 + K\underbrace{(-x)}_{\Delta\rho} = F_0 - Kx}$$

Si heu entès l'anterior, intenteu resoldre aquest!



Solució :

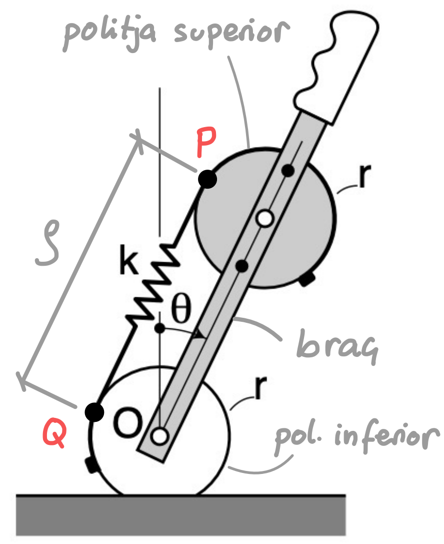
$$\boxed{F_m^{at} = F_0 - K \frac{14}{15} x}$$



5.29 En el mecanisme de la figura la politja inferior és solidària al terra i la superior, d'igual radi, és solidària al braç que pot girar al voltant de O. La molla de constant k està unida a les politges per mitjà de dos fils inextensibles que s'hi enrotllen i que no llisquen al seu damunt. Per a $\theta=0$ la molla està estirada amb una tensió T_0. Quina és la força d'atracció que fa la molla en funció de θ?

A $T_0 - k\,r\,\theta$
B $T_0 + k\,r\sin\theta$
C $T_0 + k\,r\,\theta$
D T_0
E $T_0 - k\,r\sin\theta$

Molla inserida en fil inextensible ⇒ necessàriament fa una força atractiva (ja que el fil només pot estar tibat per fer la seva funció) ⇒ utilitzarem el criteri d'atracció.



Buscarem $\dot\rho$ i integrarem

Ens calen les velocitats de P i Q en una ref. en la que siguin longitudinals a la molla. Així el càlcul de $\dot\rho$ serà fàcil.

⇓

Utilitzem la ref. braç!

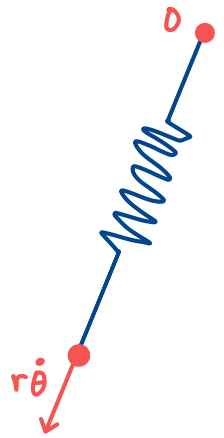
$\bar v_{braç}(P) = 0$, ja que la politja superior és fixa al braç.

$$\bar v_{braç}(Q) = \overline{\Omega}^{\overbrace{pol.inf.}^{politja\ inferior}}_{braç} \times \overline{OQ} = (\circlearrowleft \odot\, \dot\theta) \times (\nwarrow r) = (\swarrow \dot\theta r)$$

$O = CIR^{pol.inf}_{braç}$

$$\overline{\Omega}^{pol.inf.}_{T} = \overline{\Omega}^{pol.inf.}_{braç} + \overline{\Omega}^{braç}_{T}$$

$$\overline{\Omega}^{pol.inf.}_{braç} = \overline{\Omega}^{pol.inf.}_{T} - \overline{\Omega}^{braç}_{T} = \bar 0 - (\circlearrowright \otimes \dot\theta) = (\circlearrowleft \odot \dot\theta)$$



← A la ref braç tenim aquestes velocitats.

Per tant

$$\dot{\rho} = r\dot{\theta}$$ (quan $\dot{\theta} > 0$, la molla s'allarga)

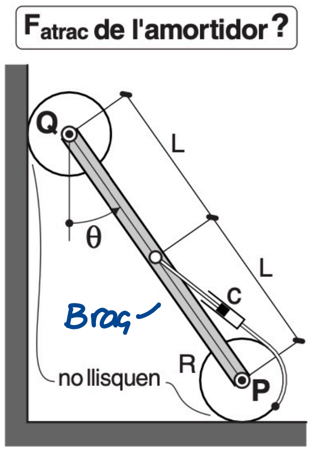
Integrant $\dot{\rho}$:

$$\Delta\rho = \int_0^t \dot{\rho}\, dt = \int_0^t r\dot{\theta}\, dt = r\left[\theta(t)\right]_0^t = r\theta(t) = r\theta$$

La config. inicial de referència de la molla és per a $\theta(0) = 0$ (veure enunciat)

Per tant

$$\boxed{F_m^{at}} = F_0 + K\Delta\rho = \boxed{T_0 + Kr\theta}$$



11 En el sistema de la figura, els corrons rodolen sense lliscar. Els seus centres estan articulats als extrems de la barra **P-Q** de longitud 2L. L'amortidor de constant c actua entre el punt mig de la barra i la perifèria del corró de centre **P**, a la qual es troba unit per un fil que hi és enrotllat i que hi té l'extrem fixat. Quina és l'expressió de la força d'atracció de l'amortidor?

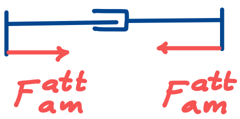
A	$c\dot{\theta}2L\cos\theta$	**D**	$c\dot{\theta}(-R+2L\cos\theta)$
B	$c\dot{\theta}(R+2L\cos\theta)$	**E**	$c\dot{\theta}2(-R+2L\cos\theta)$
C	$c\dot{\theta}2(R+L\cos\theta)$		

Sist amb 1 GL : Si $\underbrace{R_{sup}}_{\text{Roda superior}}$ gira ↻, θ augmenta, i $\underbrace{R_{inf}}_{\text{Roda inferior}}$ gira ↻.

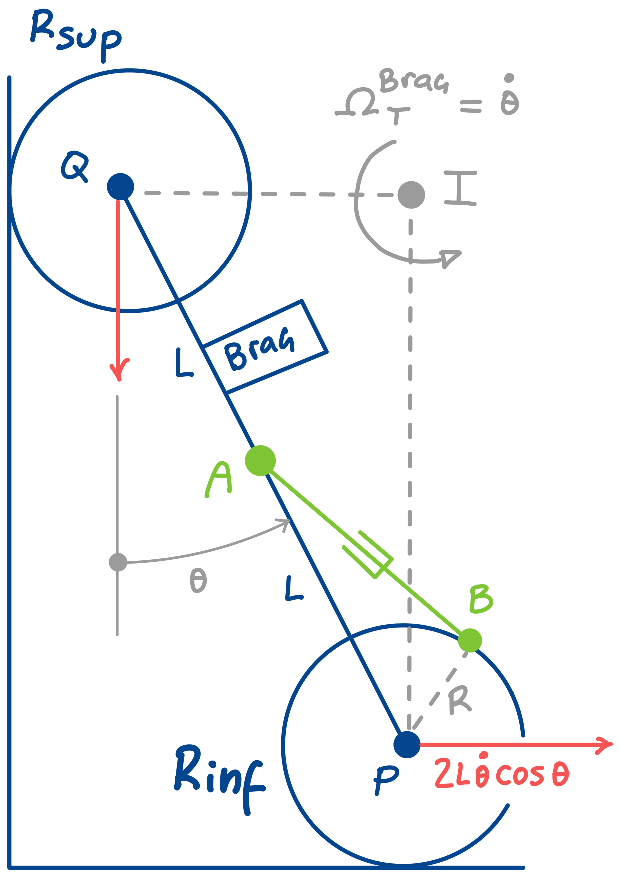
Sempre que tinguem almenys 1 extrem d'una molla o amortidor que s'enrotlla en una politja, com aquí, calcularem $\dot{\rho}$ buscant les velocitats dels extrems.

Com que demanen F_{am}^{att} → Criteri d'atracció:

$$F_{am}^{att} = c\dot{\rho} \qquad (\text{si } \dot{\rho} > 0$$



)



Busquem $\dot{\rho}$:

$CIR_T^{Braç} = I$ (fàcil)

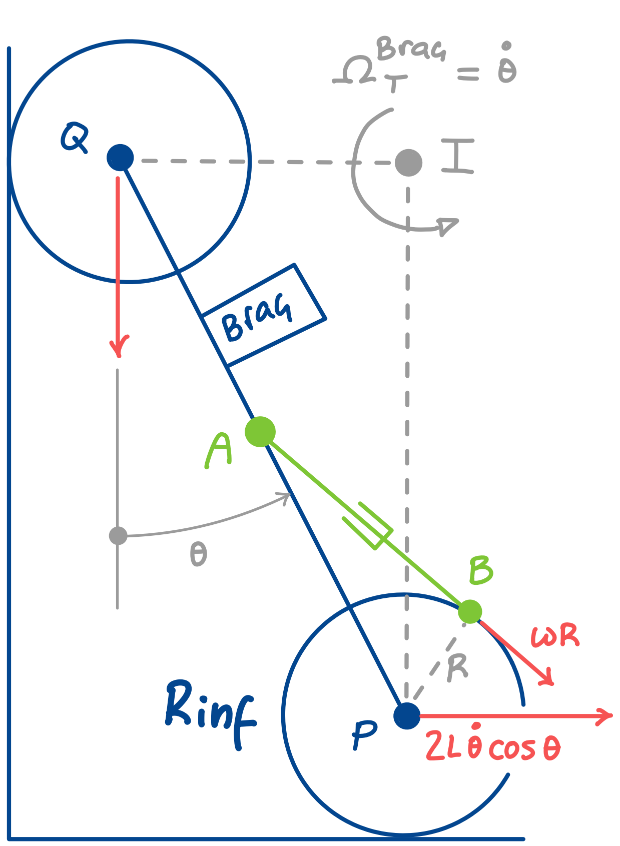
Permet trobar

$$\overline{v}_T(P) = (\rightarrow \dot{\theta}\cdot 2L\cos\theta)$$

Ara podríem buscar

$\overline{v}_T(A)$ i $\overline{v}_T(B)$

però no ens van bé per obtenir $\dot{\rho}$ perquè no són en la dir. de l'amortidor!



A ref. braç, en canvi, la vel. de A és zero, i la de B té la dir. de l'amortidor.

Busquem $\bar{v}_{Braç}(B)$!

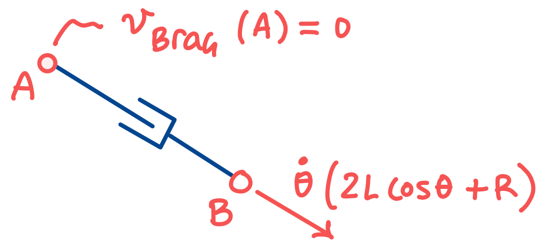
Respecte el braç, Rinf descriu un movim. circular al voltant de P amb vel. angular $\bar{\Omega}^{Rinf}_{Braç}$:

$$\bar{\Omega}^{Rinf}_{T} = \bar{\Omega}^{Rinf}_{Braç} + \bar{\Omega}^{Braç}_{T}$$

$$\bar{\Omega}^{Rinf}_{Braç} = \bar{\Omega}^{Rinf}_{T} - \bar{\Omega}^{Braç}_{T} = \left(\overset{\curvearrowright}{\otimes}\ \frac{2L\dot\theta\cos\theta}{R}\right) - \left(\overset{\curvearrowleft}{\odot}\ \dot\theta\right) =$$

$$= \overset{\curvearrowright}{\otimes}\left(\frac{2L\dot\theta\cos\theta}{R} + \dot\theta\right) = \overset{\curvearrowright}{\otimes}\left[\overbrace{\dot\theta\left(\frac{2L\cos\theta + R}{R}\right)}^{\omega}\right]$$

$$\bar{v}_{Braç}(B) = (\searrow\ \omega R) = \left[\searrow\ \dot\theta(2L\cos\theta + R)\right]$$

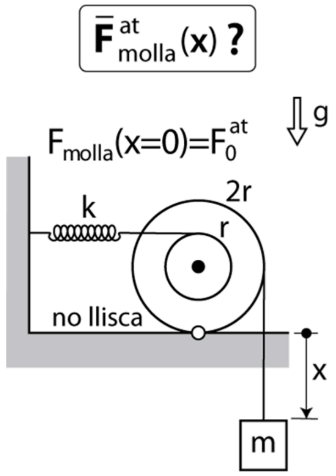


$$\longrightarrow \quad \dot\rho = \dot\theta(2L\cos\theta + R)$$

Finalment, doncs:

$$\boxed{F^{at}_{am} = c\,\dot\theta(2L\cos\theta + R)}$$

Q11 abril 2024



11 La molla lineal té un extrem unit a la paret i un altre a un fil inextensible que s'enrotlla sobre el perímetre intern d'una roda de radi r, solidària a la roda de radi 2r. El bloc de massa m penja d'un fil, també inextensible, que es manté sempre vertical i s'enrotlla sobre el perímetre de la roda de radi 2r. Si per a $x=0$ la molla exerceix una força d'atracció F_0^{at} entre els seus extrems, quina és l'expressió de la força d'atracció de la molla en funció de x?

A $F_0^{at}+(1/2)kx$ **D** $F_0^{at}-(3/2)kx$

B $F_0^{at}+(3/2)kx$ **E** $F_0^{at}+kx$

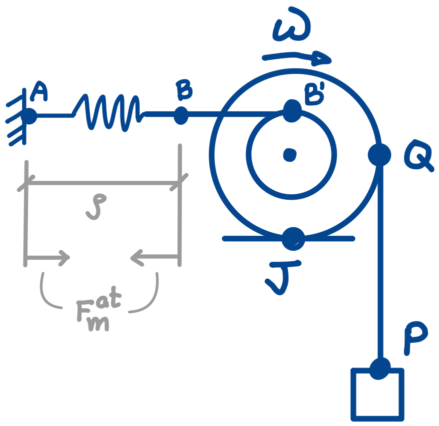
C $F_0^{at}-(1/2)kx$

Suposem que la roda gira amb $\bar{\Omega}_T^{roda} = \otimes\omega$. Clarament:

$$\bar{\Omega}_T^{cable\ QP} = \bar{0} \Rightarrow \bar{v}_T(Q) = \bar{v}_T(P)$$

$$\bar{v}_T(Q)\Big]_{vert} = \bar{v}_T(P)\Big]_{vert} = (\downarrow \dot{x})$$

└ cable inextensible



$$\bar{v}_T(Q) = (\otimes\omega)\times\overline{JQ} = (\searrow\ \omega\, 2r\sqrt{2})$$

Trobem ω imposant $\bar{v}_T(Q)\Big]_{vert} = (\downarrow\dot{x})$:

$$\underbrace{(\downarrow \omega 2r)}_{\bar{v}_T(Q)]_{vert}} = (\downarrow \dot{x}) \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\dot{x}}{2r}}$$

Ara

$$\bar{v}_T(B) = \bar{v}_T(B') = \underbrace{\left(\otimes \frac{\dot{x}}{2r}\right)}_{\bar{\Omega}_T^{roda}} \times \underbrace{(\uparrow 3r)}_{\overline{JB'}} = \left(\rightarrow \frac{3}{2}\dot{x}\right) \Rightarrow \boxed{\dot{\rho} = \frac{3}{2}\dot{x}}$$

$$\Delta\rho = \int_0^t \frac{3}{2}\dot{x}\,dt = \frac{3}{2}\big(x(t)-x(0)\big) = \frac{3}{2}x$$

└ Instant $t=0$ és el de la config. inicial de referència de la molla (la que correspon a $x=0$).

Per $x=0$ (config. inicial molla), tenim F_0^{at} (atractiva) ⇒ Crit. atracció:

$$\boxed{F_m^{at} = F_0^{at} + k\,\frac{3}{2}x}$$