14P

Versió 0.9

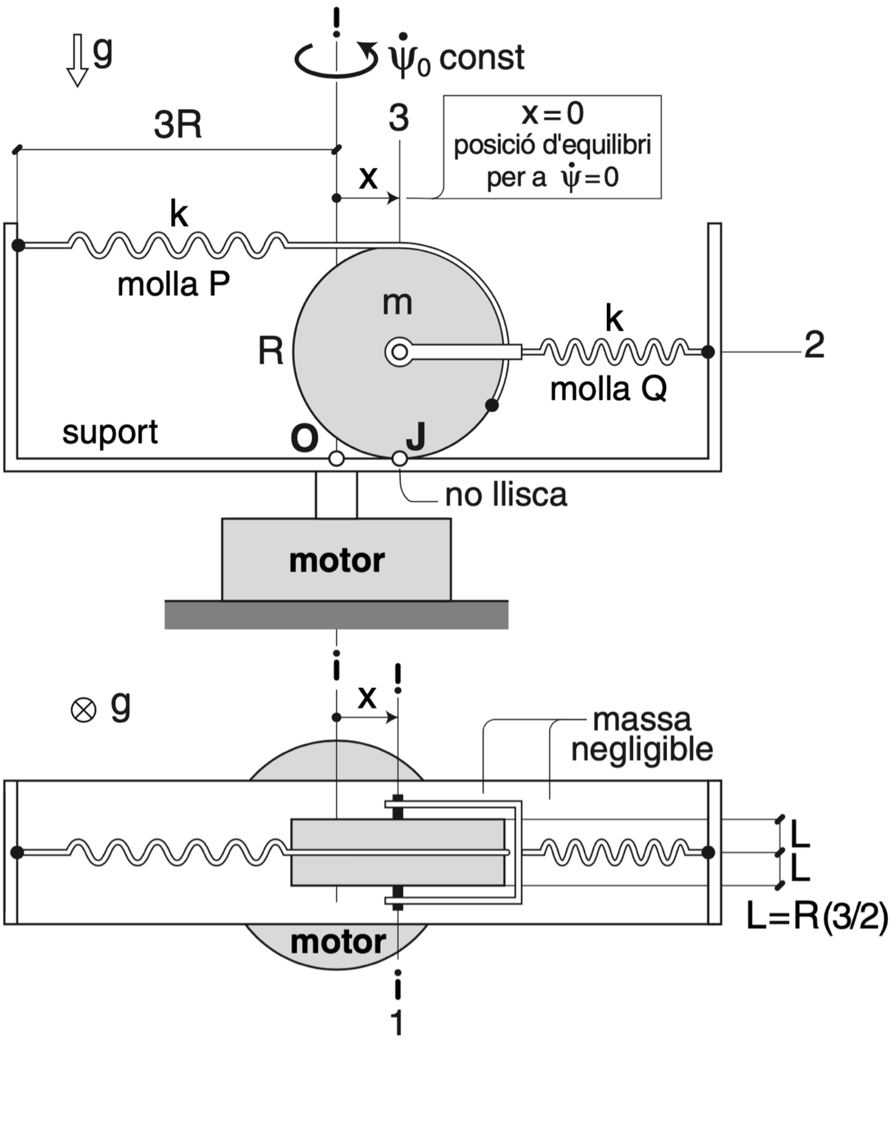
Teoremes vectorials IV

Lluís Ros

https://lluisros.github.io/mecanica

Examen de REAVA, 7 de juliol 2015

El corró homogeni, de radi R, gruix 2L (amb $L=(3/2)R$) i massa m, manté contacte sense lliscar amb el suport, que té radi 3R, massa negligible i gira amb velocitat angular $\dot{\psi}_0$ constant respecte del terra. Les dues molles tenen una constant de rigidesa k i un dels seus extrems fixos al suport. La molla Q té l'altre extrem fix al centre del corró, en tant que la molla P s'enrotlla a la perifèria del corró. Per a $x=0$, que és d'equilibri per a $\dot{\psi}_0=0$, la molla P està tensada amb una força F_0.



Fes el diagrama general d'interaccions (DGI) i troba:

- L'equació del moviment per a la coordenada x.
- El parell motor Γ que garanteix $\dot{\psi}_0 = \text{ct}$.
- La força normal del suport sobre el corró.

GL del sistema i incògnites associades

El sistema té 2 GL:

$\dot{\psi}_0$ (forçat) $\Rightarrow$ Γ és una incògnita del problema dinàmic.
$\dot{x}$ (lliure) $\Rightarrow$ $\ddot{x}$ " " " " " "

Caracterització del contacte suport-corró a J

És un contacte multipuntual sense lliscament (c.m.p.s.ll.)

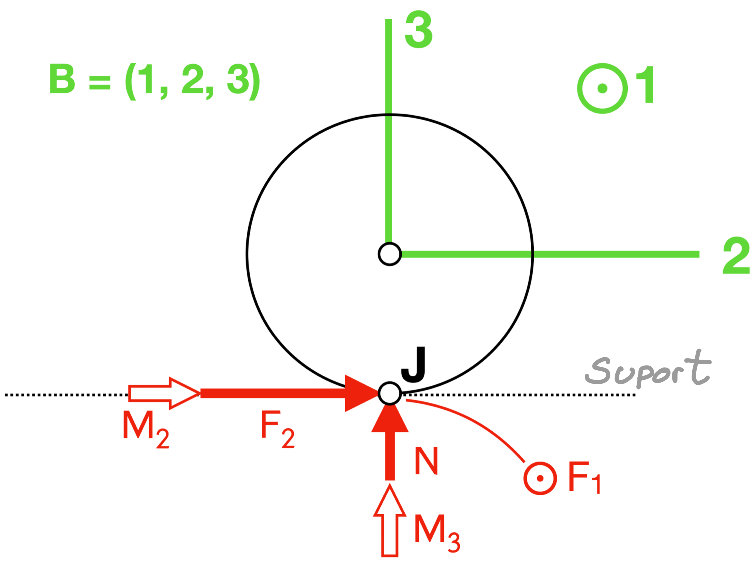
Com que el corró només té 1 GL respecte del suport (rodola radialment sobre aquest), el torsor d'enllaç suport → corró introduirà 5 ie.

Caracteritzat a J, i en base B, aquest torsor és:

$$\left\{\bar{F}_{\text{sup}\to\text{corro}}\right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ N \end{Bmatrix} \qquad \left\{\bar{M}_{\text{sup}\to\text{corro}}(\mathbf{J})\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

$\mathbf{J}_{\text{corró}}$ no llisca respecte suport

Corró només pot girar en dir 1 resp suport



Formulació de la força de la molla Q

Ens diuen que per a $x=0$ i $\psi_0=0$ el sistema és en equilibri, i la molla P està fent una força de <u>tensió</u> F_0 (*) entre els seus extrems.

⇓ atracció

Suposarem que la config inicial de referència que determina la llargària ρ_0 és la donada per $x=0$.

⇓

Per trobar la força F_0' que fa la molla Q en aquesta config. apliquem les condicions d'equilibri sobre sist = corró:

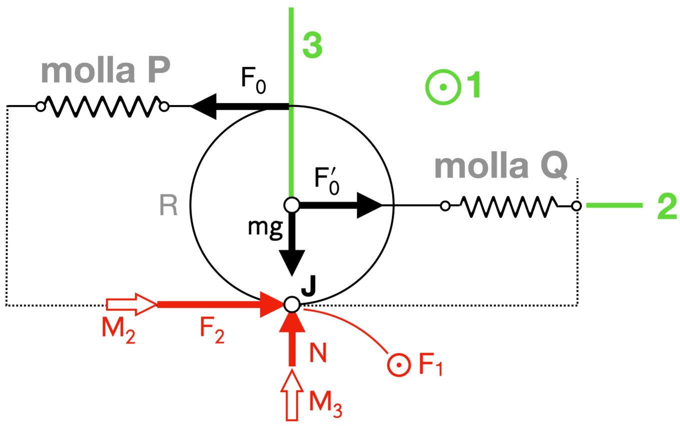
<u>TMC(J)]$_1$, sist = corró</u> :

$$\sum \overline{M}ext(J)\Big]_1 = \bar{0}$$

$$\left(\odot\, F_0 2R\right) + \left(\otimes\, F_0' R\right) = \bar{0}$$

$$F_0 2R = F_0' R$$

$$\boxed{F_0' = 2F_0}$$



Surt F_0' atractiva ⇒ formulem la força de la molla Q amb el criteri d'atracció:

$$\boxed{F_{mQ}^{at}} = F_0' + k\Delta\rho = \boxed{2F_0 - kx}$$

$\Delta\rho = -x$

(s'escurça en passar de la config de referència a la genèrica)

(*) Una molla inserida en fil inextensible (com la molla P) només pot fer força atractiva, no repulsiva, ja que el fil sols pot treballar en tensió

Pregunta freqüent

Acabem d'aplicar TMC a J, però J és un punt de contacte entre dos sòlids. No havíem quedat que es desaconsella aplicar el TMC en aquest tipus de punts?

Resposta

Cert, però només es desaconsella en situacions dinàmiques, on cal calcular el moment cinètic i potser el terme complementari del TMC, que són càlculs delicats en aquests punts. En situacions d'equilibri estàtic aquests termes no apareixen i podem aplicar el TMC a qualsevol punt sense preocupar-nos-en (serà $\Sigma \bar{M}_{ext}(\text{punt}) = \bar{0}$ sobre el sistema).

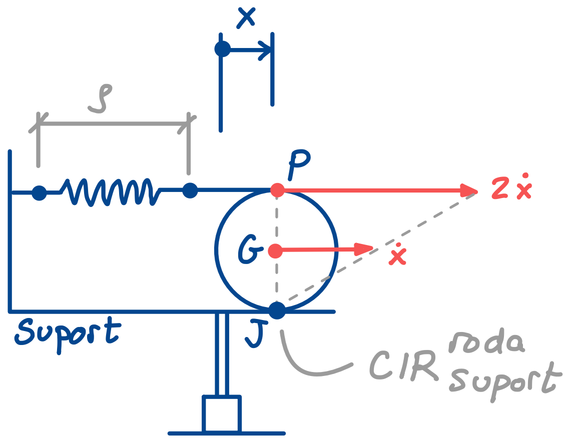
Formulació de la força de la molla P

A la ref. suport

$$\bar{v}_{Sup}(P) = (\rightarrow 2\dot{x})$$

Clarament,

$$\dot{\rho} = 2\dot{x}$$



Integrant

$$\Delta\rho = \int_0^t \dot{\rho}\, dt = \int_0^t 2\dot{x}(t)\, dt = 2\left[x(t)\right]_0^t = 2\left(x(t) - \overset{0}{\overbrace{x(0)}}\right) = 2x(t)$$

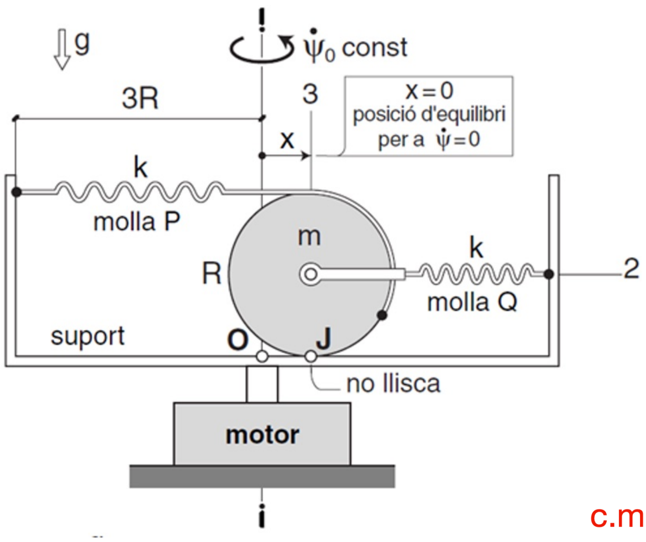
instant en que $x = 0$

En ser una molla inserida en fil inextensible només pot fer forces atractives ⇒ utilitzem el criteri d'atracció:

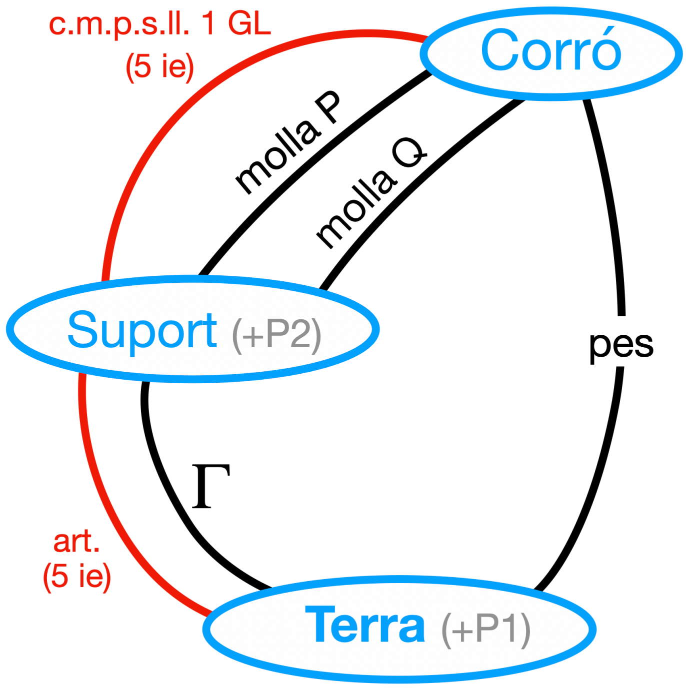
Important

$$\boxed{F_{mP}^{at}} = F_0 + K\Delta\rho = \boxed{F_0 + K\,2x}$$

DGI i anàlisi del problema dinàmic global



P_1 = estàtor
P_2 = rotor | del motor



Recompte d'incògn. i eqs. del problema dinàmic global:

12 incògnites: 10 ie, Γ, $\ddot{x}$
12 equacions: 2 sòlids $\cdot \dfrac{6 \text{ eqs}}{\text{sòlid}}$

$\Downarrow$

Problema **DETERMINAT**

Eq. mov. coord. x

x només afecta la cinemàtica del corró (no la del suport). Per taut, el sist. haurà d'incloure el corró obligadament. Les úniques opcions són

Sistema	Incòg.	#incòg.	Problema
Corró	5 ie, $\ddot{x}$	6	DET
Corró + sup	5 ie, $\ddot{x}$, Γ	7	INDET

Per taut, explorem $\Sigma \bar{F}_{ext}$ i $\Sigma \bar{M}_{ext}$ sobre

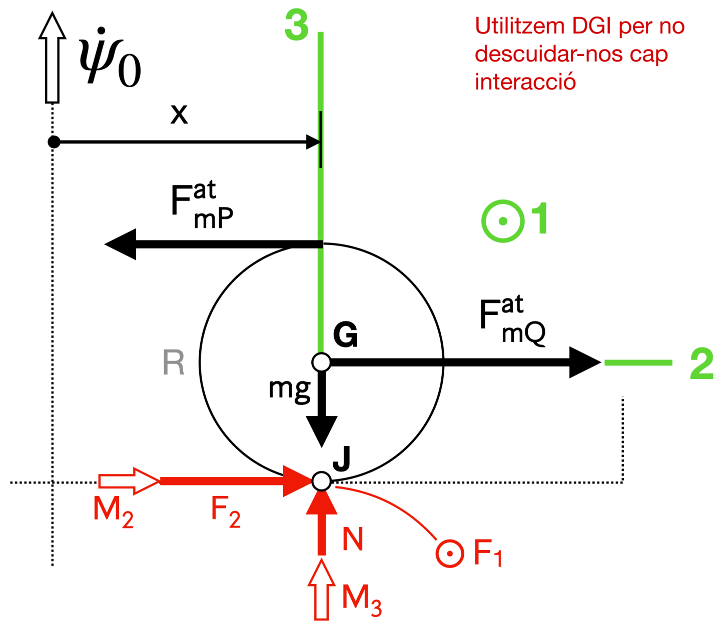
sist = corró

per veure quines components del TMC i/o TQM caldran.

L'aplicació de TMC a J seria delicada, ja ho hem dit.

$\Downarrow$

Explorem TMC a G (i potser TQM)



$$\left\{\Sigma \bar{M}_{ext}(G)\right\}_B = \begin{Bmatrix} F^{at}_{mP} \cdot R + F_2 R \\ M_2 - F_1 R \\ M_3 \end{Bmatrix} \rightarrow$$ Cap component lliure d'ie ☹ **(I)**

Amb TMC no n'hi haurà prou!

$$\left\{\Sigma \bar{F}_{ext}\right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F^{at}_{mQ} - F^{at}_{mP} + F_2 \\ N - mg \end{Bmatrix}$$ **(II)**

Explorem $\Sigma \bar{F}_{ext}$ pensant en TQM

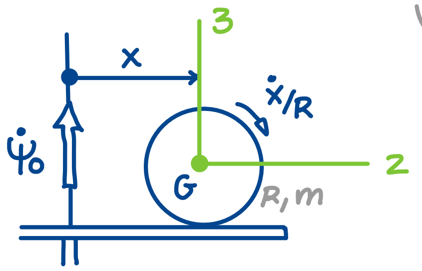
Veiem que les components $TMC(G)]_1$ i $TQM]_2$ sols contenen 1 ie (F_2). També contindran $\ddot{x}$. Formaran un sistema d'eqs. lineal en 2 incògn. ($\ddot{x}$ i F_2). Ergo:

Full ruta eq. mov. x (i F_2)	$\left.\begin{array}{l} TMC(G)]_1 \\ TQM]_2 \end{array}\right\}$ Sobre sist = corró (Aillarem $\ddot{x}$ i F_2)

$TMC(G)]_1$, sist = corró

$$\Sigma \bar{M}_{ext}(G) = \dot{\bar{H}}_{RTG}(G)$$

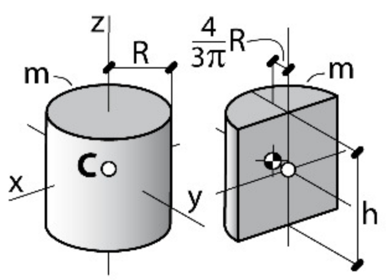
$$\bar{H}_{RTG}(G) = \mathbb{I}(G) \cdot \bar{\Omega}^{corró}_{RTG}$$



$$\bar{\Omega}^{corró}_{T} = \bar{\Omega}^{corró}_{sup} + \bar{\Omega}^{sup}_{T} =$$

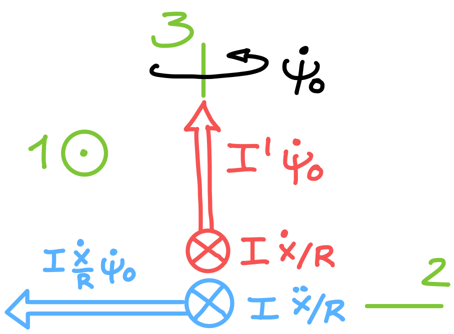
$$= \left(\otimes \frac{\dot{x}}{R}\right) + \left(\Uparrow \dot{\psi}_0\right) = \begin{Bmatrix} -\frac{\dot{x}}{R} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{H}_{RTG}(G)\}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I' & \\ & & I' \end{bmatrix}}_{\text{Rotor simètric a G}} \begin{Bmatrix} -\frac{\dot{x}}{R} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I\,\dot{x}/R \\ 0 \\ I'\dot{\psi}_0 \end{Bmatrix}$$

$I = \frac{mR^2}{2}$ $I' = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{(2L)^2}{12}\right)$	 **II(C)** $I_{xx} = m(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mR^2$ rotor simètric a **C**

$$\left\{\dot{\bar{H}}_{RTG}(G)\right\}_B = \begin{Bmatrix} -I\,\ddot{x}/R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -I\,\dot{x}/R \\ 0 \\ I'\dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I\,\ddot{x}/R \\ -I\,\frac{\dot{x}}{R}\dot{\psi}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(III)}$$

Quadra amb deriv. analítica



$[\mathrm{I} = \mathrm{III}]_1$:

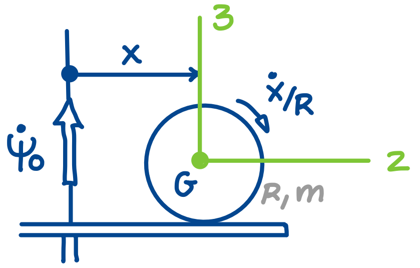
$$F_{mP}^{at}\cdot R + F_2 R = -I\,\frac{\ddot{x}}{R}$$

$$(F_0 + K\,2x)\cancel{R} + F_2\cancel{R} = -\frac{mR^{\cancel{2}}}{2}\,\frac{\ddot{x}}{R}$$

$$F_2 + F_0 + 2Kx = -\frac{m\ddot{x}}{2}$$

$$\boxed{F_2 = -\frac{m\ddot{x}}{2} - F_0 - 2Kx} \quad \text{(IV)}$$

TQM$]_{2}$, sist = corró



$$\sum \bar{F}_{ext} = m\,\bar{a}_T(G)$$

$\bar{a}_T(G)$ via comp. mov. $\left|\begin{array}{l} AB = T \\ REL = \text{Suport} \end{array}\right.$

$$\bar{a}_T(G) = \bar{a}_{REL}(G) + \bar{a}_{ar}(G) + 2\bar{\Omega}_{AB}^{REL} \times \bar{v}_{REL}(G) =$$

$$= (\rightarrow \ddot{x}) + (\leftarrow \dot{\psi}_0^2 x) + 2\,(\Uparrow \dot{\psi}_0) \times (\rightarrow \dot{x}) =$$

$$= \left[\rightarrow (\ddot{x} - \dot{\psi}_0^2 x)\right] + (\otimes\, 2\dot{\psi}_0\dot{x}) \quad \text{(V)}$$

$$\left[(II) = m\cdot(V)\right]_2 :$$

$$F^{at}_{mQ} - F^{at}_{mP} + F_2 = m\left(\ddot{x} - \dot{\varphi}_0^2 x\right)$$

$$2F_0 - kx - F_0 - 2kx + F_2 = m\ddot{x} - m\dot{\varphi}_0^2 x$$

$$F_0 - 3kx + F_2 = m\ddot{x} - m\dot{\varphi}_0^2 x$$

$$\Big\downarrow \text{ utilitzant } F_2 \text{ de (IV)}$$

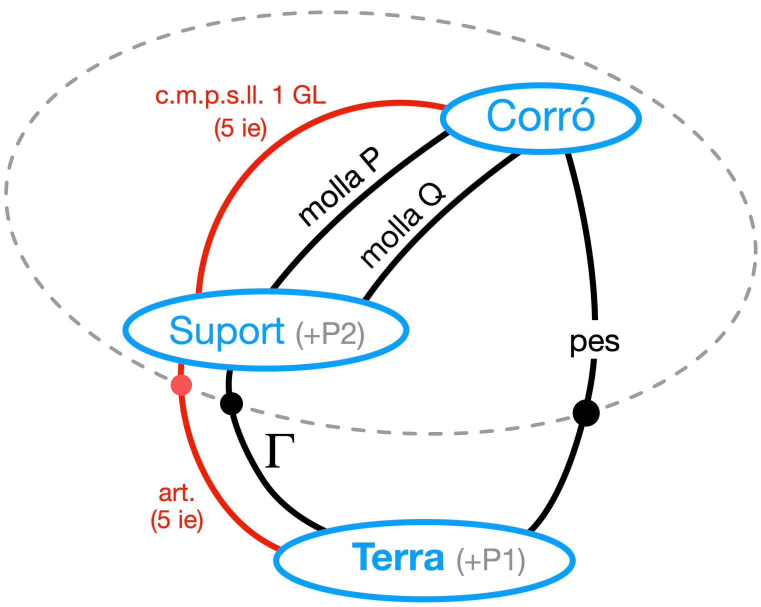
$$\cancel{F_0} - 3kx - \frac{m\ddot{x}}{2} - \cancel{F_0} - 2kx = m\ddot{x} - m\dot{\varphi}_0^2 x$$

I d'aquí arribem a l'eq. mov. que buscàvem:

$$\boxed{\frac{3}{2}m\ddot{x} + \left(5k - m\dot{\varphi}_0^2\right)x = 0}$$ Forma implícita

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{2}{3m}\left(m\dot{\varphi}_0^2 - 5k\right)x \qquad (VI)}$$ Forma explícita

Parell motor Γ per mantenir $\dot{\varphi}_0 = ct$



Ara $\ddot{x}$ ja no és incògnita [la sabem de (VI)].

Per sist = corró + suport tindrem

$$5\,ie + \Gamma \rightarrow 6 \text{ incògn.}$$

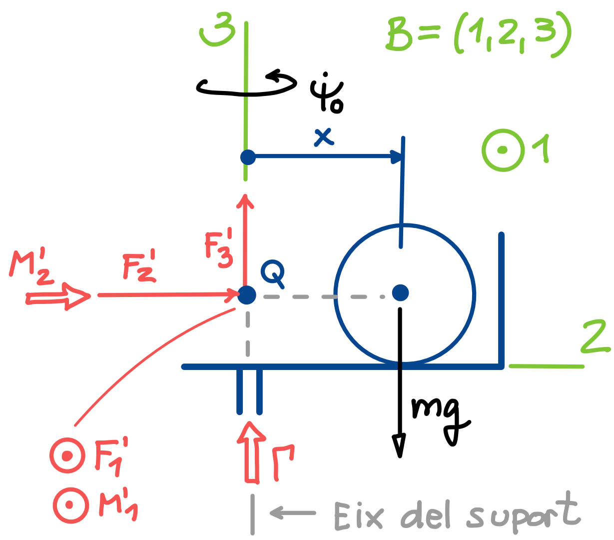
i el problema serà DETERMINAT

Mirant les forces i moments sobre sist = corró + suport :

Torsor enllaç T → sup a Q:

$$\{\bar F_{T\to sup}\} = \begin{Bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar M_{T\to sup}(Q)\} = \begin{Bmatrix} M_1' \\ M_2' \\ 0 \end{Bmatrix}$$



si prenem moments resp. Q en dir. 3 només apareix Γ

Full ruta per Γ	$TMC(Q)]_3$ per sist = corró + suport

$$\underbrace{\sum \bar M_{ext}(Q)\Big]_3}_{\Gamma} = \underbrace{\dot{\bar H}_{RTQ}(Q)\Big]_3}_{\text{Calculem-ho}}$$

$$\underbrace{\bar H_{RTQ}(Q)}_{Q \notin \text{corró}} = \bar H_{RTG}(G) + \overbrace{\overline{QG} \times m\,\bar v_T(G)}^{\bar H^{\oplus}_{RTQ}(Q)}$$

$$\{\bar H_{RTQ}(Q)\}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} -I\,\ddot x/R \\ -I\,\dot x/R\cdot\dot\psi_0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{El tenim d'abans}} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m\dot\psi_0 x^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I\,\ddot x/R \\ -I\,\dot x/R\cdot\dot\psi_0 \\ m\dot\psi_0 x^2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\overline{QG} \times m\,\bar v_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{Bmatrix} \times m \begin{Bmatrix} -\dot\psi_0 x \\ \dot x \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m\,\dot\psi_0 x^2 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)\right\}_B = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 2m\dot{\psi}_0 x\dot{x} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}^B_T} \times \begin{Bmatrix} -I\,\ddot{x}/R \\ -I\,\dot{x}/R\cdot\dot{\psi}_0 \\ m\dot{\psi}_0 x^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 2m\dot{\psi}_0 x\dot{x} \end{Bmatrix}$$

Per tant

$$\boxed{\Gamma = 2m\dot{\psi}_0 x\dot{x}}$$

Força normal a J

Formulant TQM$]_3$ per sist = corró :

$$N - mg = m\cdot 0$$

$$\Downarrow$$

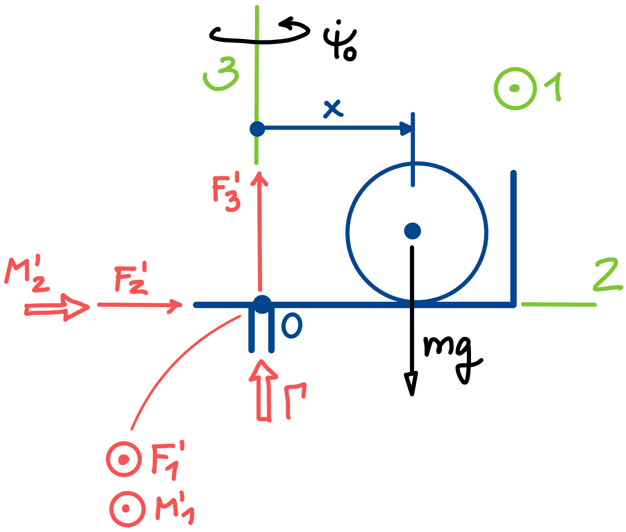
$$\boxed{N = mg}$$

Mirant les forces i moments sobre sist = corró + suport:

Torsor enllaç T → sup a O:

$$\left\{\overline{F}_{T\to sup}\right\} = \begin{Bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\overline{M}_{T\to sup}(0)\right\} = \begin{Bmatrix} M_1' \\ M_2' \\ 0 \end{Bmatrix}$$



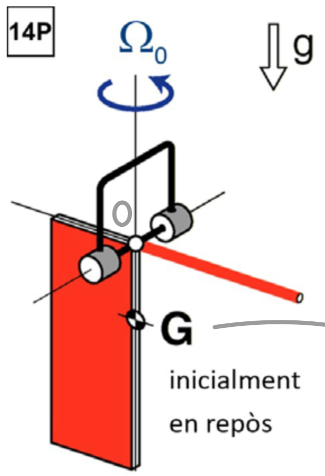
Si prenem moments resp. O en dir. 3 només apareix Γ

Full ruta per Γ	$TMC(0)]_3$ per sist = corró + suport

$$\underbrace{\sum \overline{M}_{ext}(0)\Big]_3}_{\Gamma} = \underbrace{\dot{\overline{H}}_{RTO}(0)\Big]_3}_{\text{Calculem-ho}}$$

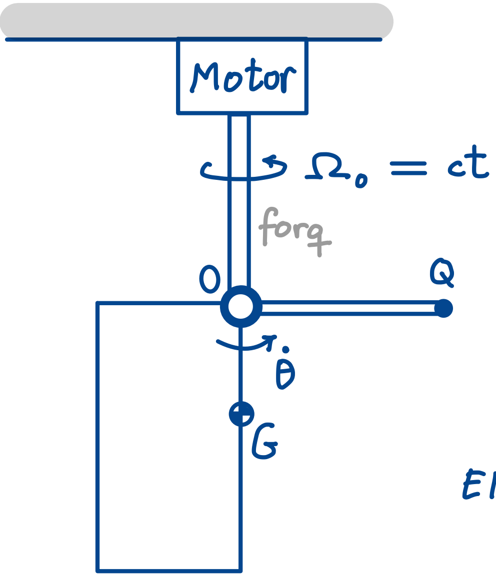
$$\overline{H}_{RTO}(0) = \overline{H}_{RTG}(G) + \underbrace{\overline{OG} \times m\,\overline{v}_T(G)}_{\overline{H}^{\oplus}_{RTO}(0)}$$

$$\left\{\overline{OG} \times m\,\overline{v}_T(G)\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ x \\ R \end{Bmatrix} \times m \begin{Bmatrix} -\dot{\psi}_0 x \\ \dot{x} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Rm\dot{x} \\ Rm\dot{x} \\ \end{Bmatrix}$$



El sòlid està format per una barra i una placa rectangular, i gira amb Ω_0 constant respecte del terra (T) sota l'acció d'un motor. Investiga la possibilitat que el sòlid giri sense que el seu centre d'inèrcia **G** s'allunyi de la vertical que passa per **O**.

És el centre d'inèrcia del sòlid (barra + placa)



Volem que la barra es mantingui horitzontal

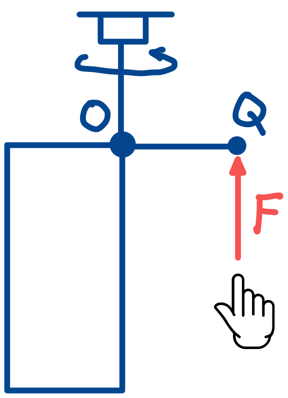
El motor garanteix $\Omega_0 = ct$, però

$$\bar{\Omega}^{\text{sòlid}}_{T} = \underbrace{(\odot\,\dot\theta)}_{\bar{\Omega}^{\text{sòlid}}_{\text{forq}}} + \underbrace{(\Uparrow \Omega_0)}_{\bar{\Omega}^{\text{forq}}_{T}}$$

Per mantenir la barra horitzontal caldrà que $\dot\theta = 0$. És a dir, que

$$\bar{\Omega}^{\text{sòlid}}_{T} = (\Uparrow \Omega_0) = ct$$

Suposarem que $\bar{\Omega}^{\text{sòlid}}_{T}$ és aquesta i esbrinarem si cal aplicar una força ($\uparrow F$) a Q per garantir-la.



Si ens surt	Voldrà dir que
$F=0$	El sòlid pot girar amb $(\Uparrow \Omega_0)$, sense necessitat d'aplicar cap força $(\uparrow F)$.
$F>0$	El sòlid girarà en sentit horari si no apliquem $(\uparrow F)$ (en relació al dibuix anterior)
$F<0$	El sòlid girarà en sentit antihorari si no apliquem $(\uparrow F)$

La velocitat angular $\bar{\Omega}_T^{\text{sòlid}} = (\Uparrow \Omega_0)$ ha de ser compatible amb el TMC aplicat al sòlid. Formulem aquest teorema per trobar F.

TMC (O), sist = sòlid

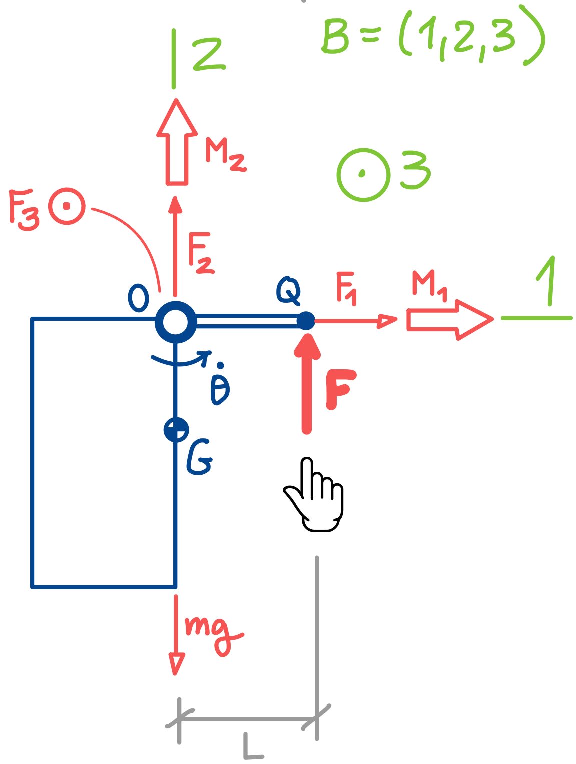
O fix a T ⇒ terme complementari nul

$$\underbrace{\sum \bar{M}_{ext}(O)} = \dot{\bar{H}}_{RTO}(O)$$

Per calcular-ho dibuixem forces i moments sobre el sòlid →

fixa al sòlid

$B=(1,2,3)$



Torsor d'enllaç forq→sòlid a O:

$$\left\{\bar{F}_{forq \to sòlid}\right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{forq \to sòlid}(O)\right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

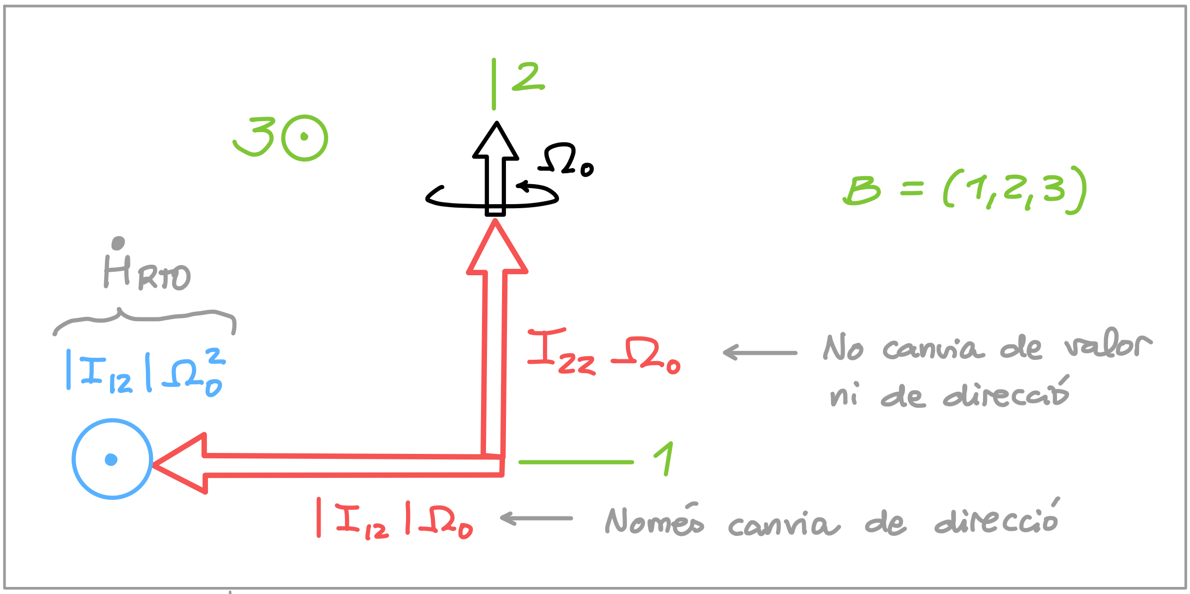
$$\left\{\sum \bar{M}_{ext}(O)\right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ FL \end{Bmatrix} \quad \textbf{(I)}$$

$$\left\{\bar{H}_{RTO}(O)\right\}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{11} & -|I_{12}| & 0 \\ |I_{12}| & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}_{sòlid}(O)} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}^{sòlid}_{RTO} = \bar{\Omega}^{sòlid}_{T}} = \begin{Bmatrix} -|I_{12}|\Omega_0 \\ I_{22}\,\Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Fig plana $\Rightarrow$ 3 és DPI

$I_{12} < 0$ ja que la massa és al 3^er quadrant de O

(la massa de la barra no contribueix a I_{12})



$$\left\{\dot{\bar{H}}_{RTO}(O)\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ |I_{12}|\Omega_0^2 \end{Bmatrix} \quad \textbf{(II)}$$

<u>(I) = (II)</u>

$M_1 = 0$

$M_2 = 0$

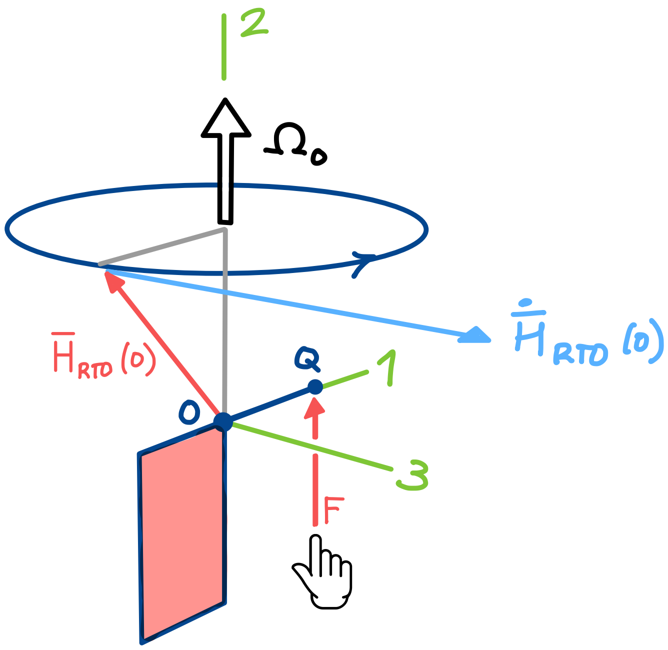
$FL = |I_{12}|\Omega_0^2 \Longrightarrow \boxed{F = \dfrac{|I_{12}|\Omega_0^2}{L}} \quad \textbf{(III)}$

$F > 0$

<u>Conclusió</u>

El sòlid girarà en sentit horari si no apliquem F

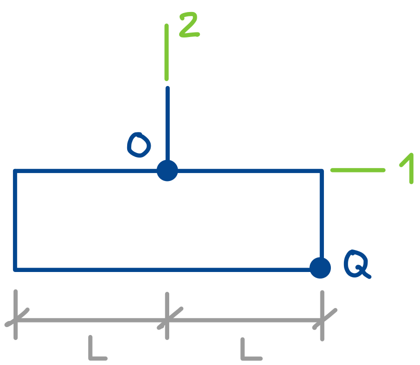
Per a mantenir $\dot{\theta} = 0$ caldrà aplicar $\uparrow F$ durant tot el moviment del sòlid



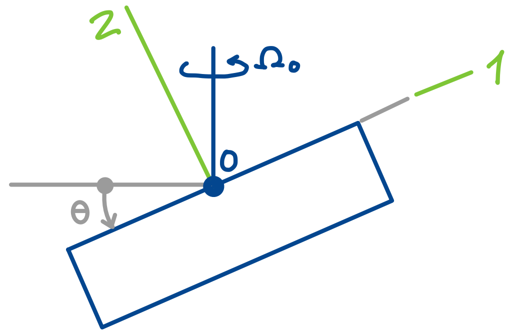
($\uparrow F$) crea el moment necessari, en dir. 3, que fa que la component 3 del TMC(O) es compleixi.

Què passaria si la dir. 2 fos DPI per al punt O ?

Un exemple de sòlid on la dir. 2 és DPI és



En aquest cas, $I_{12} = 0 \Rightarrow \bar{H}_{RTO}$ i $\bar{\Omega}_0$ serien paral·lels, i de l'Eq. (III) veiem que $F = 0$. No caldria aplicar cap força sobre Q per mantenir $\dot{\theta} = 0$. Dit d'una altra manera, si definim l'angle θ així



la posició $\theta = 0$ seria d'equilibri.

Però, ... seria estable? Per esbrinar-ho cal analitzar l'equació del mov. per a θ, que de teoria sabem que és

$$I_{33}\ddot{\theta} + \left[mgl + (I_{22}-I_{11})\Omega_0^2\cos\theta\right]\sin\theta = 0 \quad \text{(IV)}$$

Per trobar les configuracions d'equilibri substituïm

$$\theta = \theta_{eq}\,,\quad \dot{\theta} = 0\,,\quad \ddot{\theta} = 0$$

a (IV):

$$\left[mgl + (I_{22}-I_{11})\Omega_0^2\cos\theta_{eq}\right]\sin\theta_{eq} = 0 \quad \text{(V)}$$

Clarament $\theta_{eq} = 0$ és d'equilibri ja que satisfà (V).

Per veure si $\theta_{eq} = 0$ és d'equilibri estable obtenim l'EDO de l'error associada a (IV)

$$I_{33}\ddot{\varepsilon} + \left[mgl + (I_{22}-I_{11})\Omega_0^2\cos\varepsilon\right]\sin\varepsilon = 0$$

La linealitzem al voltant de $\varepsilon = 0$:

$$\underbrace{I_{33}}_{A}\ddot{\varepsilon} + \underbrace{\left[mgl + (I_{22}-I_{11})\Omega_0^2\right]}_{B}\varepsilon = 0$$

Identifiquem K:

$$\ddot{\varepsilon} = -\underbrace{\frac{B}{A}}_{K}\varepsilon$$

I veiem que

$$\underbrace{K > 0}_{\text{Equilibri estable}} \iff \frac{B}{A} > 0 \iff mgl + (I_{22} - I_{11})\Omega_0^2 > 0$$

(A: sempre > 0)

Ergo:

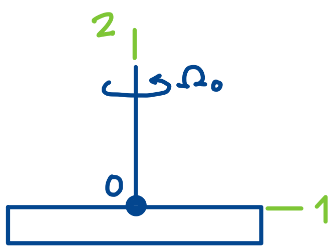
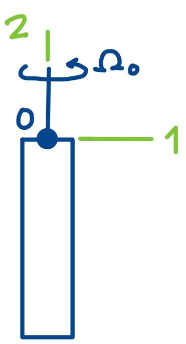
Si $I_{22} > I_{11} \Rightarrow \theta_{eq} = 0°$ és d'equilibri estable $\forall \Omega_0$

Si $I_{22} < I_{11} \Rightarrow \theta_{eq} = 0°$ és d'equilibri estable per $\Omega_0 < \Omega_{crítica}$, altrament inestable.

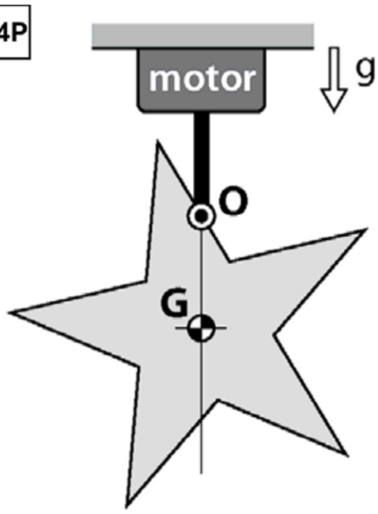
Càlcul de $\Omega_{crítica}$

$$mgl + (I_{22} - I_{11})\Omega_0^2 > 0 \Rightarrow \Omega_0 < \underbrace{\sqrt{\frac{mgl}{I_{11} - I_{22}}}}_{\Omega_{crítica}}$$

En resum:

$I_{22} > I_{11}$	$I_{11} > I_{22}$
$\theta_{eq} = 0°$ ESTABLE $\forall \Omega_0$	$\theta_{eq} = 0°$: EST si $\Omega_0 < \Omega_{crítica}$; INEST altrament
	

14P

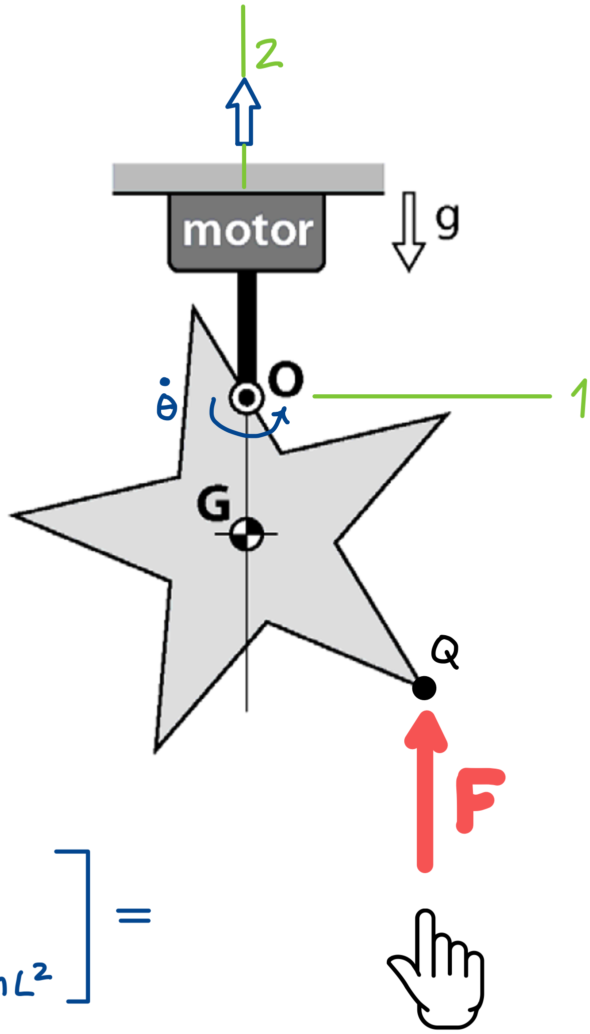


El sòlid homogeni en forma d'estrella gira amb Ω_0 constant respecte del terra (T) sota l'acció d'un motor. Investiga la possibilitat que el sòlid giri sense que el seu centre d'inèrcia **G** s'allunyi de la vertical que passa per **O**.

Podem aplicar la mateixa tècnica que en l'exercici anterior.

$\downarrow$

Quina $(\uparrow F)$ cal aplicar a Q per evitar la rotació $\bar{\Omega}^{\text{sòlid}}_{\text{forq}} = (\odot \dot{\theta})$?



En aquest cas

$$\left[\mathbb{I}(O)\right]_B \overset{\text{Steiner}}{=} \left[\mathbb{I}(G)\right]_B + \left[\mathbb{I}^{\oplus}(O)\right]_B =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}}_{\text{Sòlid és rotor simètric a } G.\ \text{No sabem } I \text{ però no cal.}} + \begin{bmatrix} mL^2 & & \\ & 0 & \\ & & mL^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{I+mL^2} & & \\ & \boxed{I} & \\ & & 2I+mL^2 \end{bmatrix}$$

I_{11}

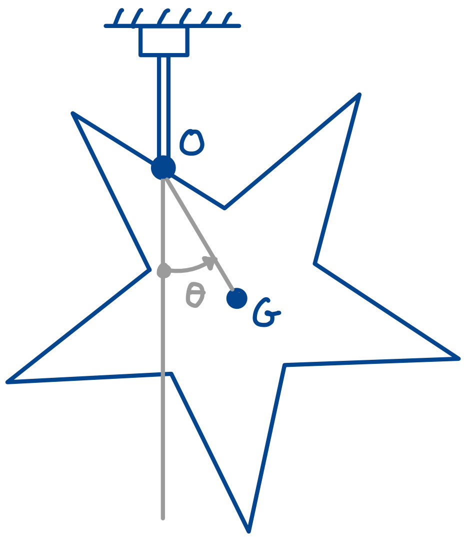
I_{22}

Clarament $I_{22} < I_{11}$

Com que la dir. 2 és DPI, per l'anàlisi que hem fet a l'exercici anterior (o a classe de teoria) el sòlid no tindrà tendència inicial a inclinar-se

De l'anàlisi del tensor d'inèrcia hem vist que

$$I_{22} < I_{11}$$

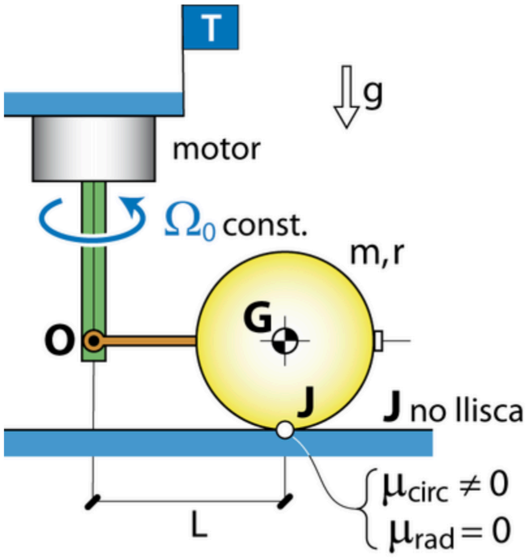


Per tant, $\theta_{eq} = 0°$ serà posició d'equilibri estable per a valors de Ω_0 inferiors a una certa $\Omega_{crítica}$.

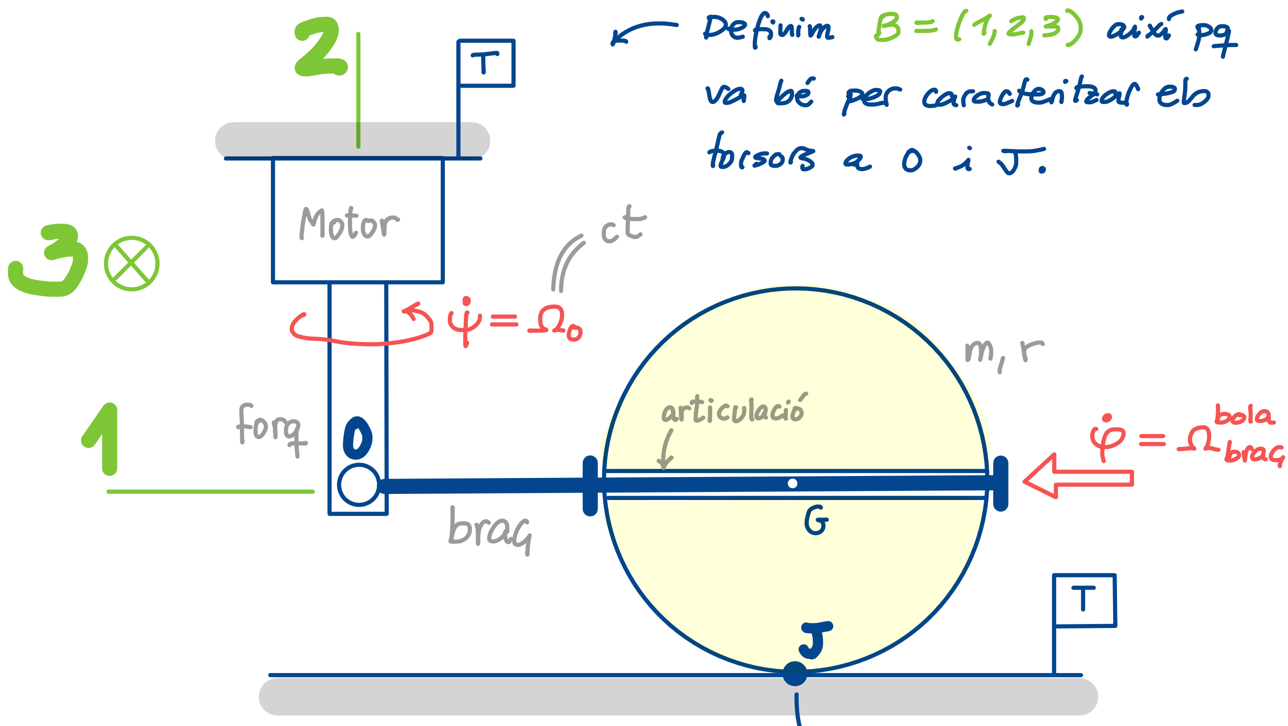
Per $\Omega_0 > \Omega_{crítica}$, la posició $\theta_{eq} = 0$ serà d'equilibri inestable.

Bola giratòria (Q8, juny 2016)

Exemple resolt D7.4 de Wikimec



La bola, de massa m i radi r, manté un contacte puntual sense lliscament amb el terra i està articulada a un braç horitzontal. El braç està articulat a una forquilla que gira amb velocitat angular constant sota l'acció d'un motor. Braç i forquilla tenen massa negligible. El coeficient de fricció en direcció radial entre bola i terra és nul ($\mu_{\text{rad}} = 0$). Es tracta d'investigar si la rotació Ω_0 pot provocar a pèrdua de contacte entre bola i terra.



Definim $B = (1,2,3)$ així pq va bé per caracteritzar els torsors a O i J.

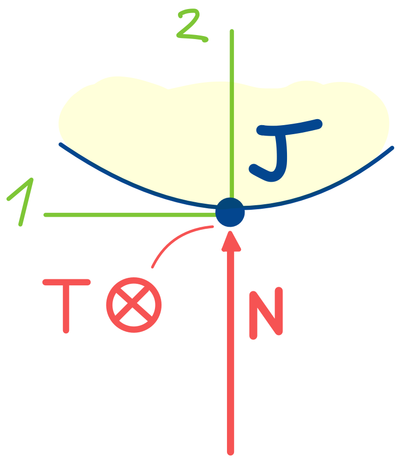
$B = (1,2,3)$ no és fixa a la bola, però ja va bé per trobar el tensor d'inèrcia de la bola, ja que aquesta és rotor esfèric a G

Caracterització de l'enllaç Terra → Bola

A J hi tenim un contacte puntual sense lliscament (c.p.s.ll.)
En aquests contactes típicament hi ha la força normal N i dues components tangencials T_1 i T_2, però en aquest cas ens diuen

$\boxed{\begin{array}{l} \mu_{circ} \neq 0 \\ \mu_{rad} = 0 \end{array}} \Rightarrow$ Sols hi ha rugositat en dir. circumferencial, no radial

Per tant, sols hi haurà component tangencial en la dir. circumferencial(*), i el torsor d'enllaç T → Bola a J serà:

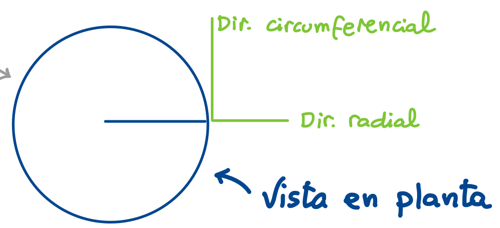


$$\left\{\bar{F}_{T\to Bola}\right\}_B = \left\{\begin{matrix} 0 \\ N \\ T \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \\ \leftarrow N > 0 \\ \leftarrow \text{Component en dir. circumferencial} \end{matrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{T\to Bola}(J)\right\}_B = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

Per veure si el contacte a J es pot perdre, cal investigar si N es pot fer zero per algun valor Ω_0

(*) J_{geom} descriu una circumferència sobre el terra.



Anàlisi de GL i incògnites associades

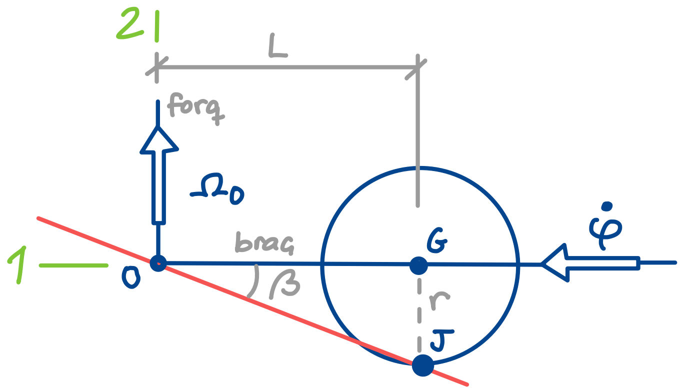
El sistema té 1 GL, que podem associar a $\dot{\varphi} = \Omega_0$ (si aturem $\dot{\varphi}$, tot queda aturat pq a J no hi ha lliscament)

És un GL forçat: el motor aplica el parell Γ que calgui per garantir que $\dot{\varphi} = \Omega_0 = ct.$ Com que $\ddot{\varphi} = 0 \ \forall t$, la incògnita associada al GL no és $\ddot{\varphi}$, sinó Γ.

Estudi cinemàtic

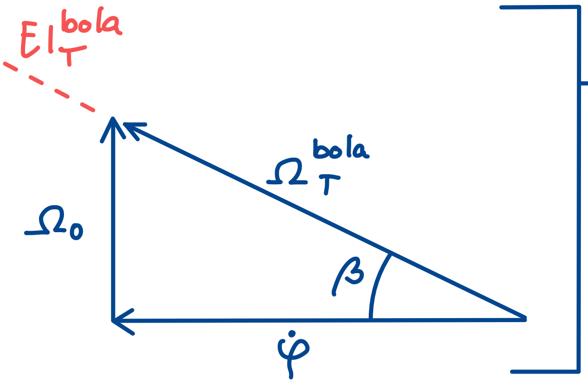
La rotació $\dot{\varphi}$ de la bola resp. braç es pot posar efd Ω_0:

$$\mathrm{EI}^{\text{bola}}_{T} = \text{recta OJ}$$



$$\bar{\Omega}^{\text{bola}}_{T} = \bar{\Omega}^{\text{bola}}_{\text{braç}} + \overbrace{\bar{\Omega}^{\text{braç}}_{\text{forq}}}^{\bar{0}} + \bar{\Omega}^{\text{forq}}_{T}$$

$$= \underbrace{(\Leftarrow \dot{\varphi}) + (\Uparrow \Omega_0)}_{\text{La suma ha de tenir la dir. de } \mathrm{EI}^{\text{bola}}_{T}}$$



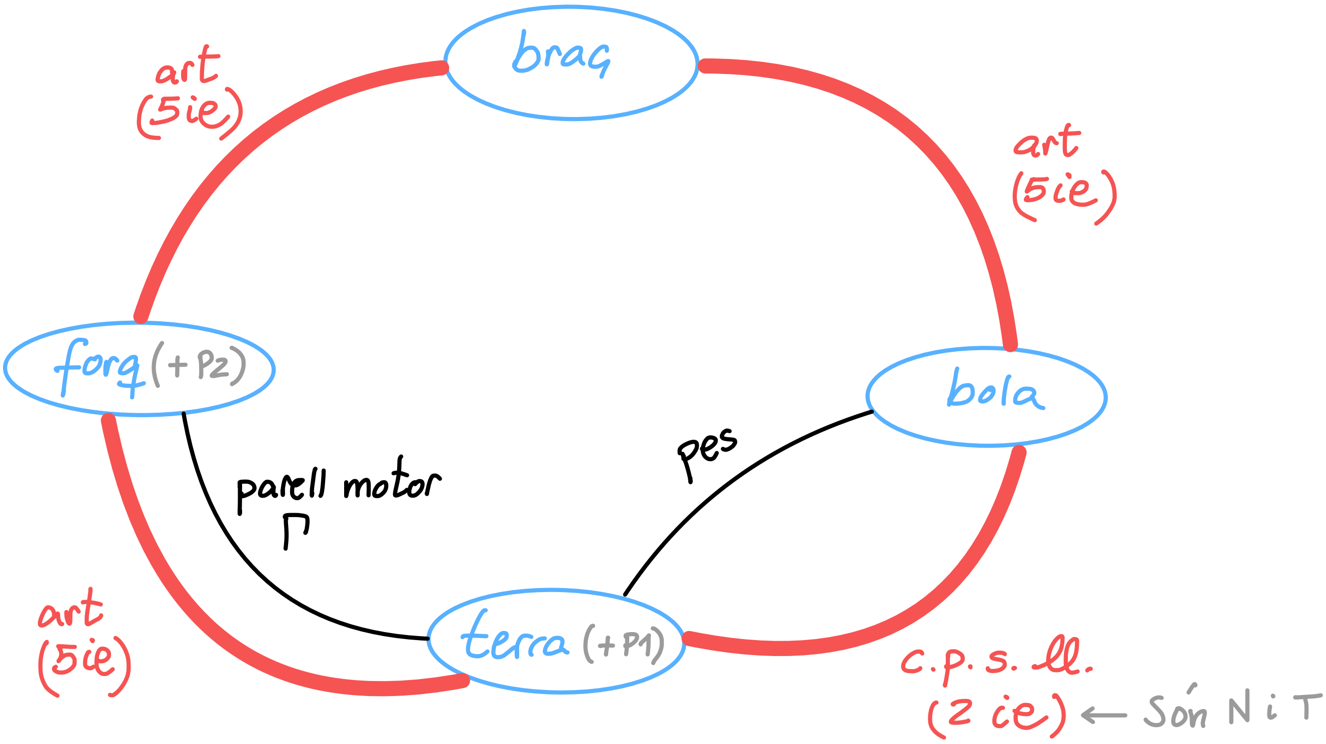
$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{\Omega_0}{\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{\Omega_0}{r/L} = \frac{L}{r}\Omega_0}$$

D'aquí veiem que $\dot{\varphi}$ depèn linealment de Ω_0 (és indirectament forçada pel motor)

Per tant:

$$\bar{\Omega}^{\text{bola}}_{T} = \left(\Leftarrow \frac{L}{r}\Omega_0\right) + \left(\Uparrow \Omega_0\right) = \begin{Bmatrix} \frac{L}{r}\Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_B \qquad (\mathrm{I})$$

DGI i anàlisi global del problema dinàmic



18 incògnites : $\underbrace{17\ ie}_{\text{incògn. d'enllaç}},\ \underbrace{\Gamma}_{\text{incògn. associada al GL}}$

18 equacions : 3 sòlids · $\dfrac{6 \text{ eqs}}{\text{sòlid}}$

Problema **DETERMINAT**

Full de ruta per calcular N (sense eliminar SAEs)

El braç ho és !

veure via alternativa més avall ↓

Com que N és una incògn. del c.p.s.ll.:

- ▷ El sistema ha d'incloure la bola
- ▷ L'arc del c.p.s.ll. ha de ser interacció externa (tallem per aquest arc)

Les úniques opcions són (encerclant al DGI):

Sistema	Incògn.	# incògn.	Problema
Bola	7 ie	7	INDET
Bola + braç	7 ie	7	INDET
Bola + braç + forq	7 ie, Γ	8	INDET
Bola + forq	17 ie, Γ	18	INDET

Tots els problemes associats surten indeterminats. Què podem fer? → Explorar l'aplicació dels teoremes vectorials als de menys variables. Si ho fem, veurem que:

Full ruta per N	Sistema = Bola + braç $TMC(O)]_3$
Full ruta per T	Sistema = Bola $TMC(G)]_1$

Exercici pel lector veure-ho !

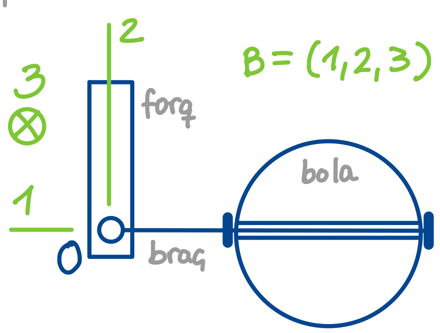
No demanen T però la podem buscar per practicar

Anem a veure un full de ruta alternatiu via eliminar el SAE.

Full de ruta per N eliminant SAEs del DGI

El braç és un SAE (té massa nul·la i només està sotmès a forces i mom. d'enllaç). Podem alleugerir el DGI substituint-lo pel torsor indirecte forq → (braç) → bola:

Bola té 2GL resp forq ⇒ El torsor tindrà 4 ie:



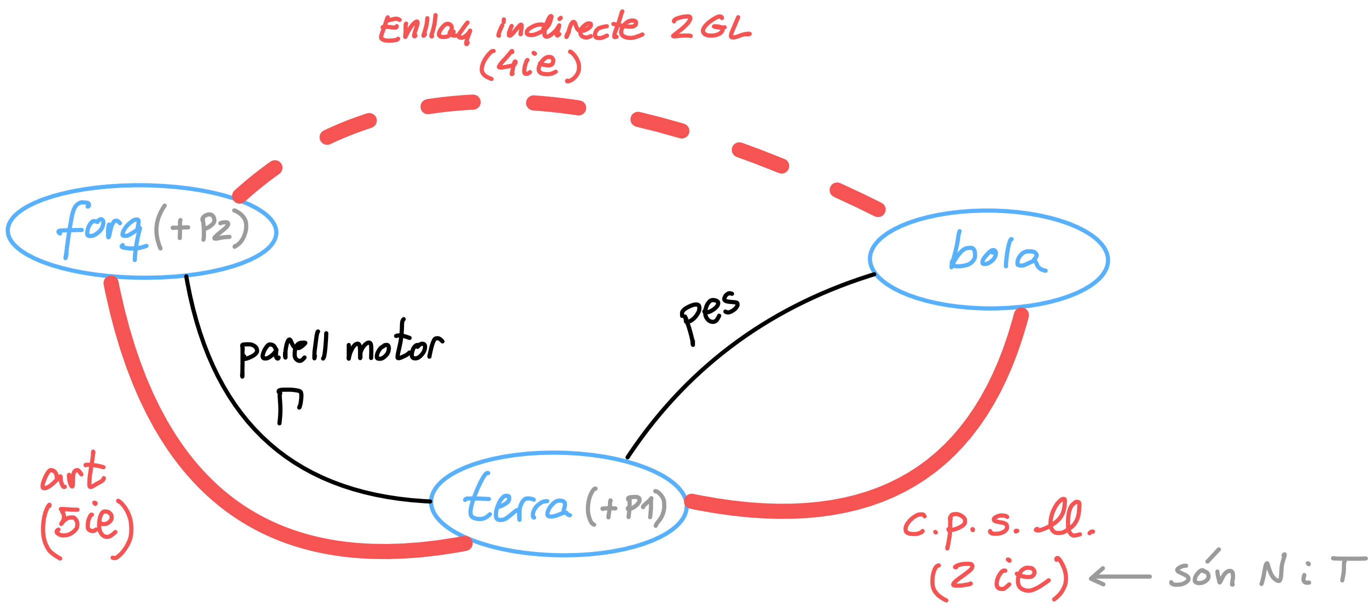
$$\left\{ \bar{F}_{\text{forq} \to (\text{braç}) \to \text{bola}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

O és fix a forq

$$\left\{ \bar{M}_{\text{forq} \to (\text{braç}) \to \text{bola}}(O) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Bola pot girar en dirs. 1 i 3 resp. forq.

El DGI alleugerit queda així:



Recompte global

12 incògnites: 11 ie, Γ
12 equacions: 2 sòlids · $\frac{6 \text{ eqs}}{\text{sòlid}}$

Problema global
DETERMINAT

Ara hi ha menys opcions per a la tria d'un subsistema. Només "Bola" o "Bola + forq", però no "Forq" ja que l'arc de N ha de ser interacció externa:

Sistema	Incògn.	#incògn.	Problema
Bola	6 ie	6	DET
Bola + forq	7 ie, Γ	8	INDET

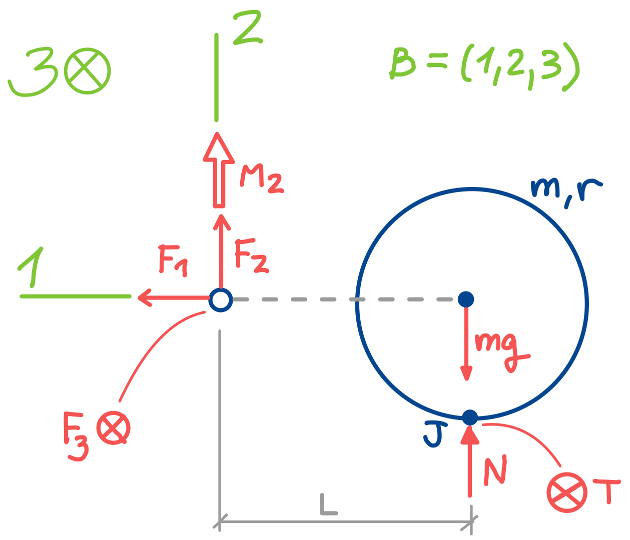
L'eliminació del SAE ens il·lumina el camí!

↓

Explorarem SIST = Bola:

Dibuixem les interaccions externes sobre SIST = bola:

(encerclem sist = bola mentalment al DGI per no descuidar-nos-en cap!)



Veiem que

- N crea moment en dir. 3, i cap altra ic en crea!
- T crea moment en dir. 1 i cap altra ie en crea!

(no demanen T però la podem buscar per practicar)

Ergo:

Full ruta per N	$TMC(0)]_3$ sobre sist = bola
Full ruta per T	$TMC(0)]_1$ sobre sist = bola

N via $TMC(0)]_3$ sobre sist = bola

$$\sum \overline{M}_{ext}(0) - \cancel{\overline{0G} \times m \times \overline{a}_T(0)}^{\overline{0}} = \dot{\overline{H}}_{RTO}(0)$$

$$\left\{\sum \overline{M}_{ext}(0)\right\}_B = \begin{Bmatrix} -Tr \\ M_2 + TL \\ mgL - NL \end{Bmatrix} \quad (\mathrm{II})$$

Calcularem $\dot{\overline{H}}_{RTO}(0)$ de dues maneres per practicar:

$\dot{\bar{H}}_{RTO}(O)$ via tensor a G, Steiner, i derivada analítica

$O \in$ bola

$$\bar{H}_{RTO}(O) = \mathbb{I}(O)\,\bar{\Omega}_T^{bola}$$

$\bar{\Omega}_T^{bola}$ de l'Eq. (I)

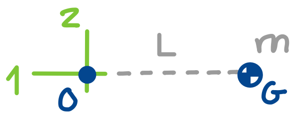
$$\left\{\bar{H}_{RTO}(O)\right\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33}\end{bmatrix}\underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{L}{r}\Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}_T^{bola}} = \begin{Bmatrix} I_{11}\frac{L}{r}\Omega_0 \\ I_{22}\,\Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left[\mathbb{I}(O)\right]_B = \left[\mathbb{I}(G)\right]_B + \left[\mathbb{I}^{\oplus}(O)\right]_B =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I\end{bmatrix}}_{\text{Rotor esfèric a } G} + \begin{bmatrix} 0 & & \\ & mL^2 & \\ & & mL^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33}\end{bmatrix}$$

Rotor esfèric a G

$I = \frac{2}{5}mr^2$



$I_{11} = \frac{2}{5}mr^2$

$I_{22} = I_{33} = \frac{2}{5}mr^2 + mL^2$

$$\left\{\dot{\bar{H}}_{RTO}(O)\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{11}\frac{L}{r}\Omega_0 \\ I_{22}\,\Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{11}\frac{L}{r}\Omega_0^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5}mrL\,\Omega_0^2 \end{Bmatrix} \qquad (\mathrm{III})$$

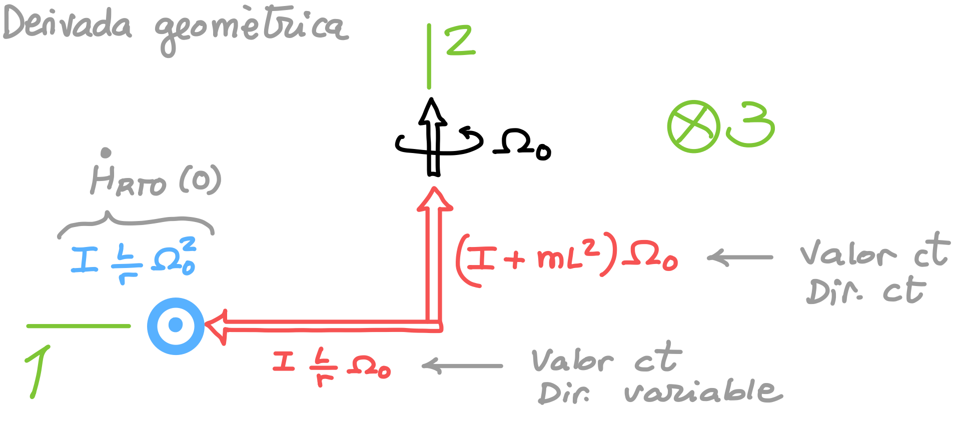
$\dot{\overline{H}}_{RTD}(O)$ via descomp. baricèntrica i derivada geomèt.

$$\overline{H}_{RTD}(O) = \underbrace{\overline{H}_{RTG}(G)}_{= \, \mathbb{II}(G)\cdot \overline{\Omega}_T^{bola}} + \overline{OG} \times m \underbrace{\overline{v}_{RTD}}_{\text{T (O fix a T)}}(G)$$

$$\left\{\overline{H}_{RTD}(O)\right\}_B \overset{(*)}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Rotor esfèric a } G \\ I = \frac{2}{5}mr^2}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{L}{r}\Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\overline{\Omega}_T^{bola} \text{ de l'Eq. (I)}} + \begin{Bmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m\Omega_0 L \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{IL}{r}\Omega_0 \\ I\Omega_0 + m\Omega_0 L^2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{IL}{r}\Omega_0 \\ (I + mL^2)\Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Derivada geomètrica



$$\dot{\overline{H}}_{RTD}(O) = \left(\odot \, \frac{2}{5}mr^2 \frac{L}{r}\Omega_0^2\right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5}mrL\Omega_0^2 \end{Bmatrix} \quad (\mathrm{III})$$

(*) B no és fixa a bola, però $\mathbb{II}(G)$ és constant i igual a $\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}$ perquè la bola és rotor esfèric per a G

$\left[\mathrm{II} = \mathrm{III}\right]_3$:

$$mg\cancel{L} - \cancel{L}N = -\frac{2}{5} mr\cancel{L}\Omega_0^2$$

$$\boxed{N = mg + \frac{2}{5} mr\Omega_0^2}$$

Conclusió : N sempre és positiva i la bola mai perdrà contacte a J independentment del valor Ω_0

T via $\left.\mathrm{TMC}(0)\right]_1$ sobre sist = bola

$\left[\mathrm{II} = \mathrm{III}\right]_1$:

$$-Tr = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 0}$$

Arribats aquí ens preguntem : pot lliscar a J ?

<u>Resposta :</u> per a que llisqui a J cal $T > \mu_{circ} N$ però aquesta condició mai es compleix ja que $T=0$ sempre, i $\mu_{circ} N > 0$ (els coefs de frec tenen valor positiu sempre).

$$\Downarrow$$

La bola mai lliscarà a J