1P

Definició de coordenades lineals i angulars

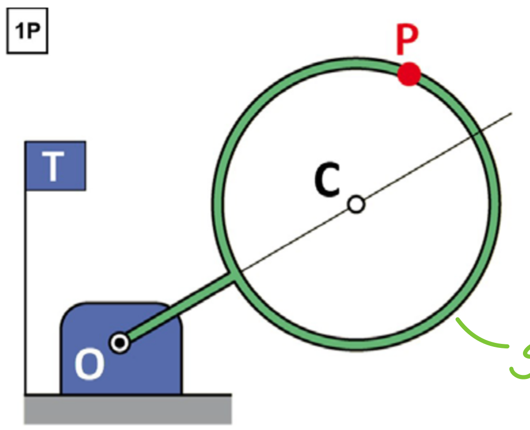
Rotacions simples

Diagrama de moviments relatius (DMR)

Graus de llibertat (GL)

Lluís Ros
https://lluisros.github.io/mecanica

1P



La guia circular està articulada al terra (T).

La partícula **P** es mou dins la guia.

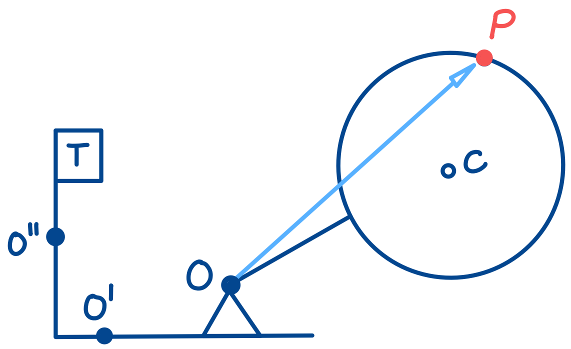
- Vector de posició de **P** respecte de T i de la guia?
- Orientació de la guia respecte de T?
- Orientació de $\overline{\mathbf{CP}}$ respecte de la guia i de T?

guia circular

Cal pensar P com una caliua petita movent-se dins la guia.

Vec. de pos. de P resp. T i de la guia

Respecte T :



Cal triar un origen O per al vector, que sigui un punt fix a T

El més natural és O.

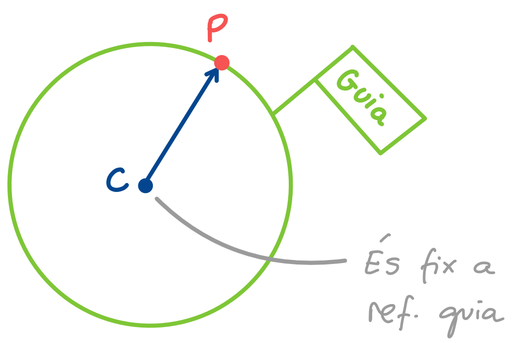
Triant O, el vec. de posició demanat és $\overline{OP}$.

Respecte la guia :

Ens cal un punt fix a la guia com a origen.

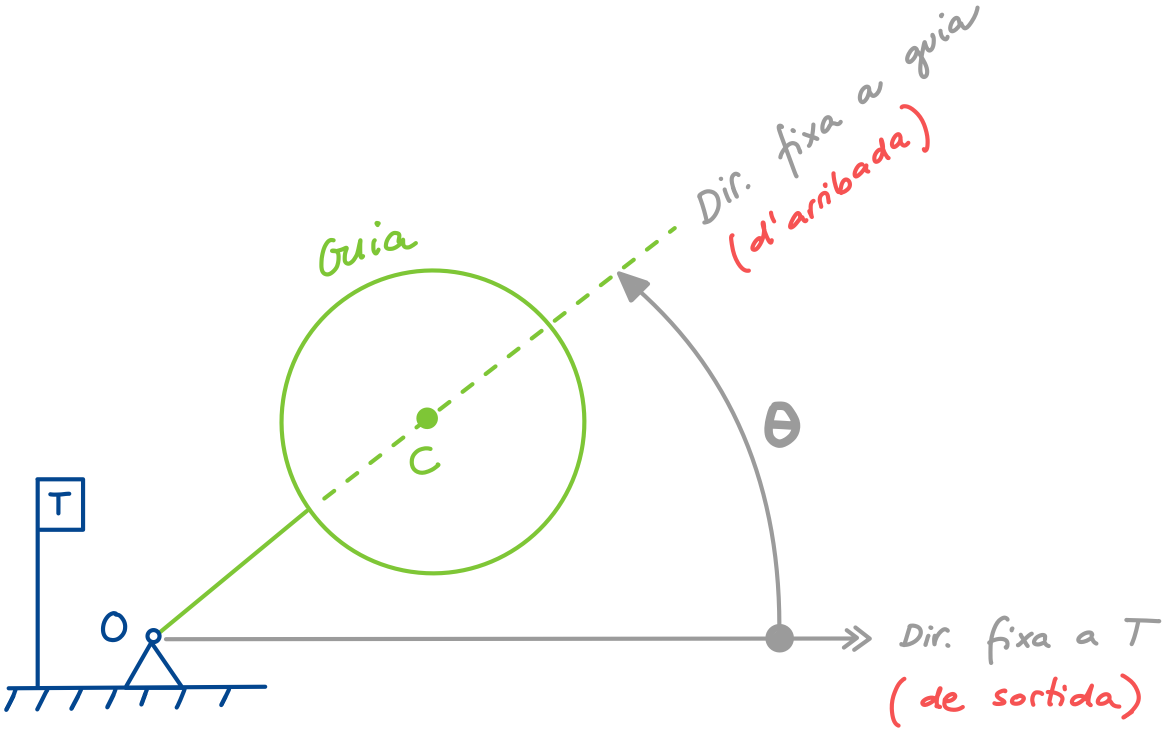
El més natural és C (centre de la guia).

El vec. pos. de C resp. la guia serà $\overline{CP}$.



Orientació de la guia respecte de T

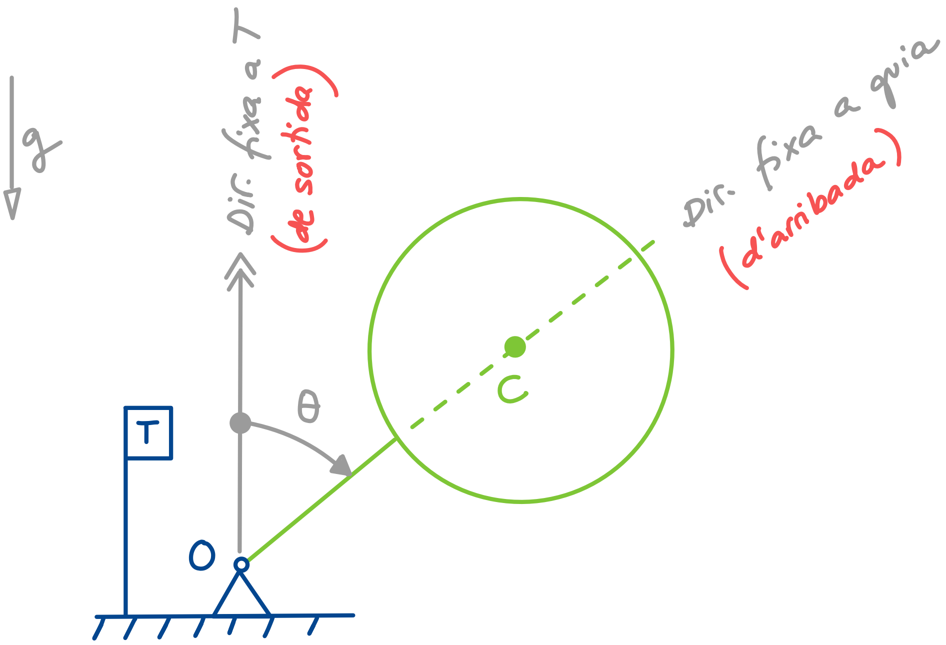
La guia té un moviment de rotació simple respecte de T, al voltant d'un eix que passa per O i és perpendicular al pla del dibuix.



En una rotació simple, l'orientació del sòlid (en aquest cas, la guia) ve donada per l'angle entre una direcció fixa a la referència (recta de sortida) i una una altra fixa al sòlid (recta d'arribada).

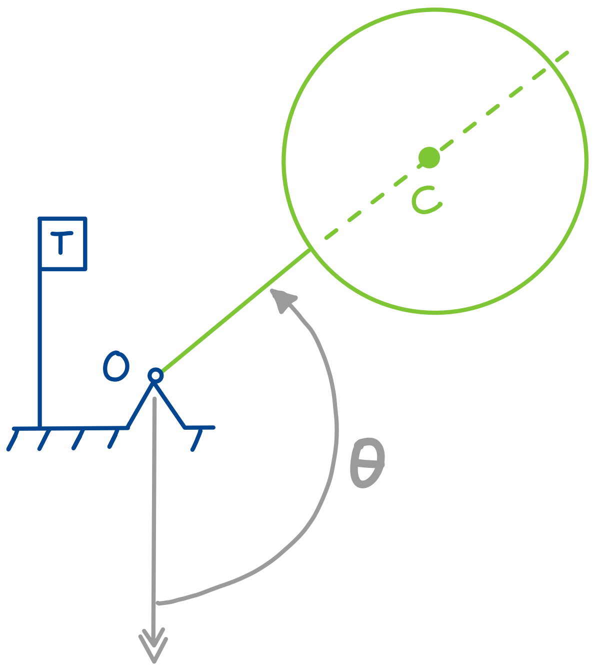
Triant les rectes del dibuix, l'orientació de la guia queda descrita per θ.

L'elecció de les direccions "fixa a la referència" i "fixa al sòlid" és arbitrària. Sempre hi ha múltiples opcions. Per exemple hauríem pogut triar



resultant-ne un angle θ diferent (tant en valor com en orientació perquè ara ha quedat definit en sentit horari).

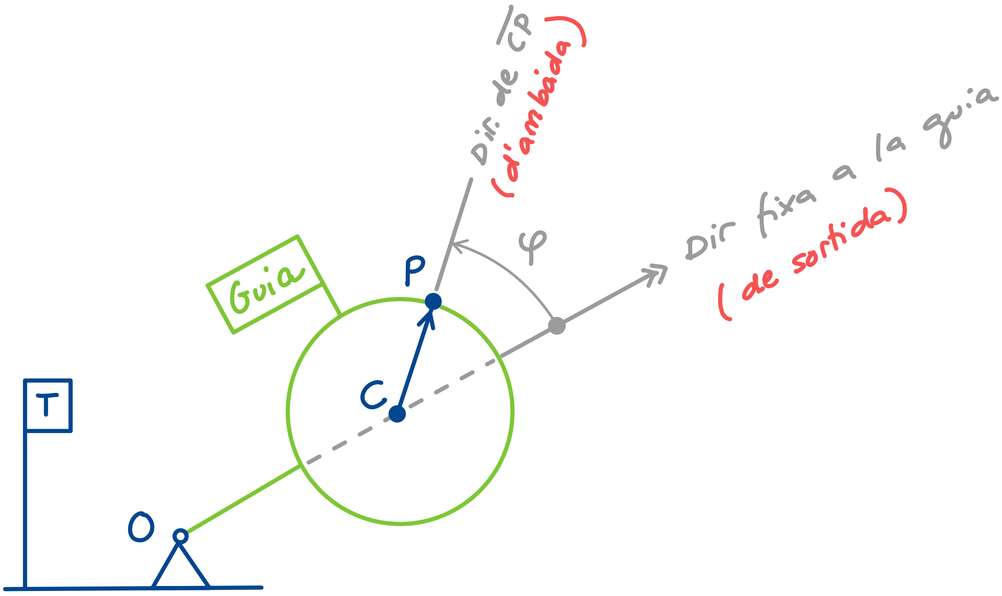
També hauríem pogut definir θ així ...



... però sempre va millor treballar amb angles aguts i no obtusos, ja que faciliten les projeccions de vectors (veure + endavant).

Orientació de $\overline{CP}$ resp. de la guia i respecte T

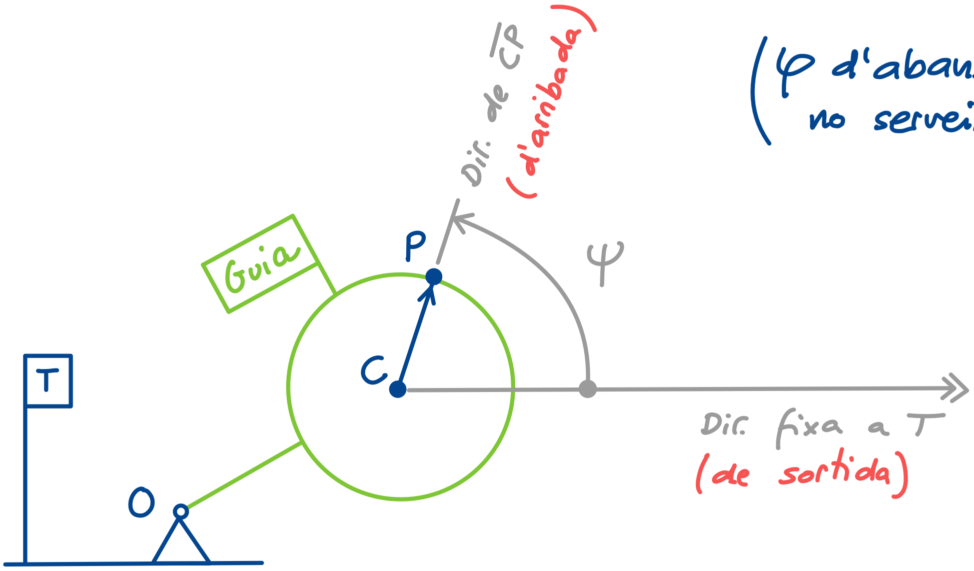
Respecte de la guia



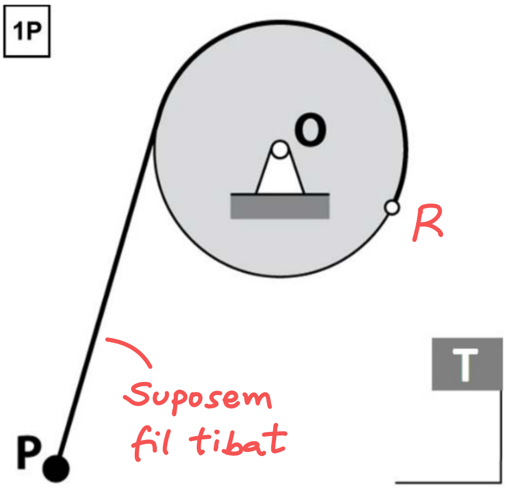
Amb la tria indicada, l'orient. de $\overline{CP}$ resp. de la guia ve donada per φ

Respecte de T

(φ d'abans no serveix!)



Amb la tria indicada, l'orient. de $\overline{CP}$ resp. de T ve donada per ψ (i veiem que $\psi = \theta + \varphi$).



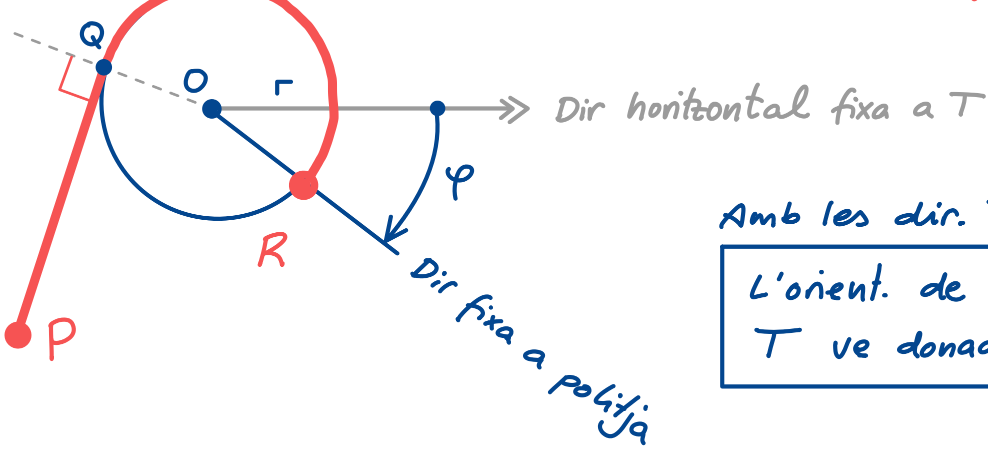
La politja està articulada al terra (T).

El fil inextensible recolza al damunt de la politja.

- Orientació de la politja respecte de T?
- Orientació del fil respecte de T?
- Vector de posició de **P** respecte de T?
- Orientació del fil respecte de la politja?
- Vector de posició de **P** respecte de la politja?
- Longitud lliure del fil, en una configuració general, en funció de la longitud en repòs i dels angles?

Orient. de la politja resp. T

R = ancoratge fil - politja

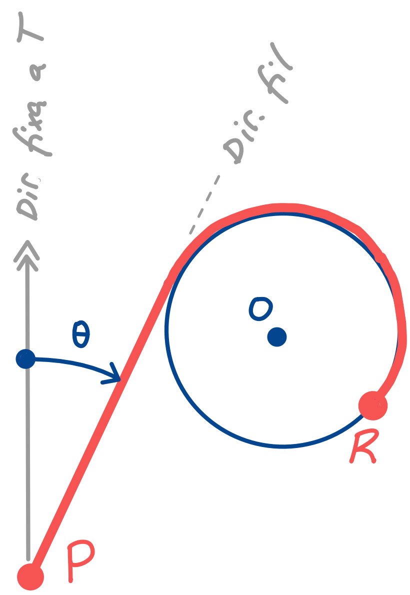


Amb les dir. triades:

L'orient. de la politja resp. T ve donada per φ

⚠ Compte : la dir. OQ <u>és fixa al fil</u> però no a la politja !

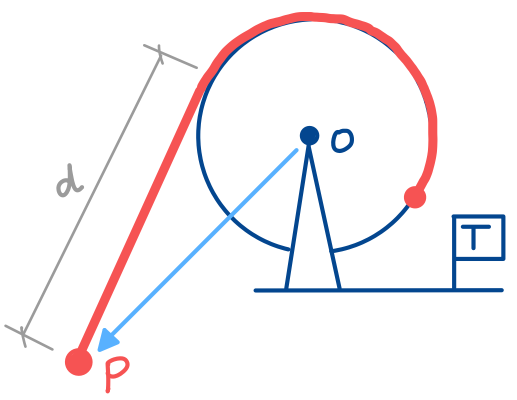
Orient. del fil resp. T



Amb les dir. triades :

L'orientació del fil resp. T ve donada per θ

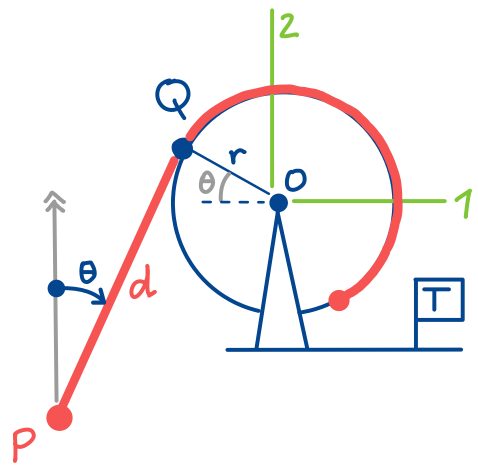
Vector de posició de P resp. T



Com a origen del vector cal triar un punt fix a T. El més natural és O.

Triem $\overline{OP}$ com a vec. de pos. de P resp. T

Extra (*): Si volem, podem expressar $\overline{OP}$ en funció de φ, θ i la longitud lliure del fil ($d = |\overline{QP}|$), utilitzant una base vectorial; p. ex. la base



$B = (1, 2, 3)$

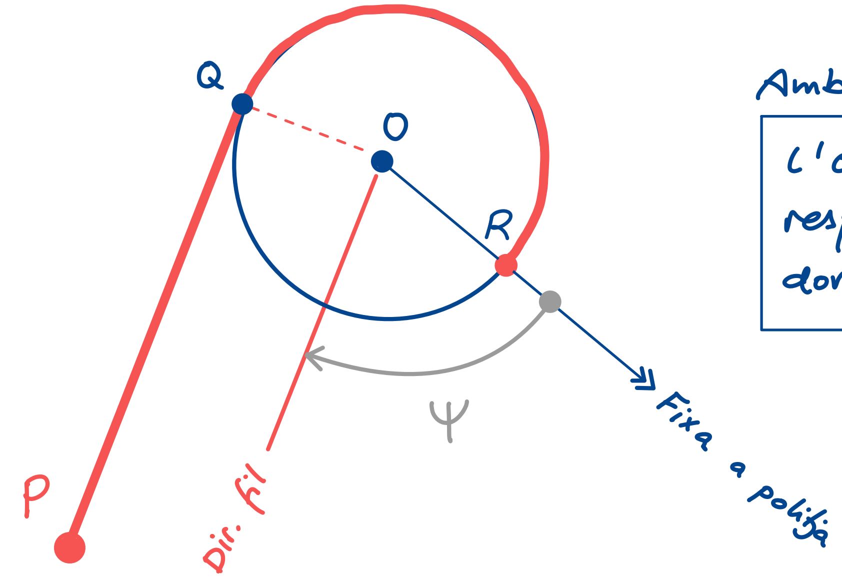
- 2: Dir. vertical de T
- 1: Dir horitz. de T

$$\left\{\overline{OP}\right\}_B = \left\{\overline{OQ}\right\}_B + \left\{\overline{QP}\right\}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} -r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\overline{OQ}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -d\sin\theta \\ -d\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\overline{QP}}$$

Més avall veurem que d es pot expressar en funció de φ, θ, i L (la longitud "en repòs" del fil).

(*) Salteu-vos-ho d'entrada (cal saber bases vectorials ⇒ setmana vinent)

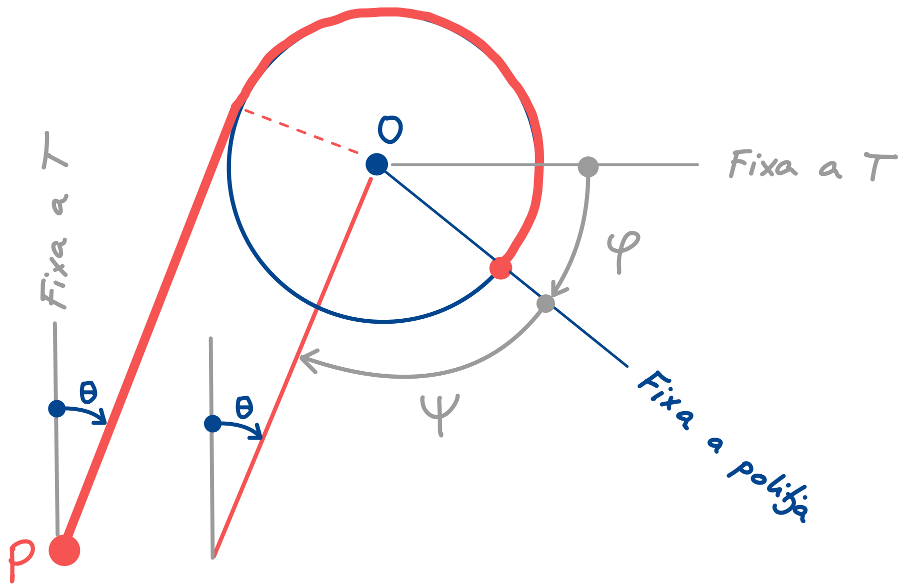
Orientació del fil resp. la politja



Amb les dir. triades:

L'orient. del fil resp. la politja ve donada per ψ.

Obs: ψ es pot escriure en funció de φ i θ:

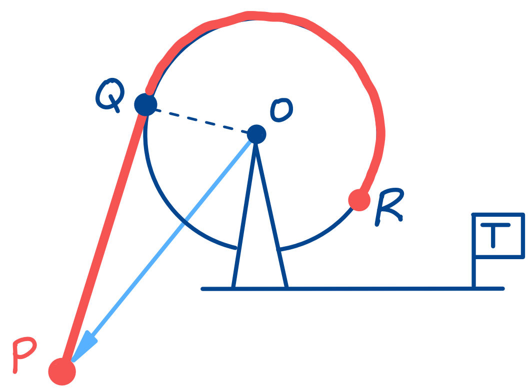


Clarament:

$$\varphi + \psi - \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\psi = \theta - \varphi + \frac{\pi}{2}}$$

Vector de posició de P resp. politja

Com origen del vector podem triar O novament ja que O també és fix a la politja.



Amb aquesta tria, el vector demanat és $\overline{OP}$.

També podríem triar R com origen, però és menys natural. La tria de O permet fer la descomposició

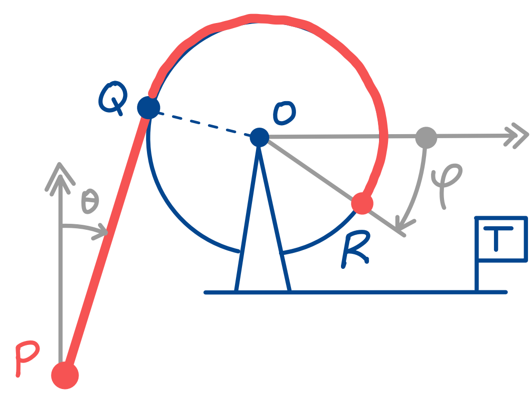
$$\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP}$$

que facilita escriure $\overline{OP}$ en funció de φ i θ si cal.

Q no serviria com a origen perquè és el punt geomètric de contacte fil-politja, que <u>no és fix</u> a la politja.

Longitud lliure del fil

És la longitud $d = |\overline{QP}|$.

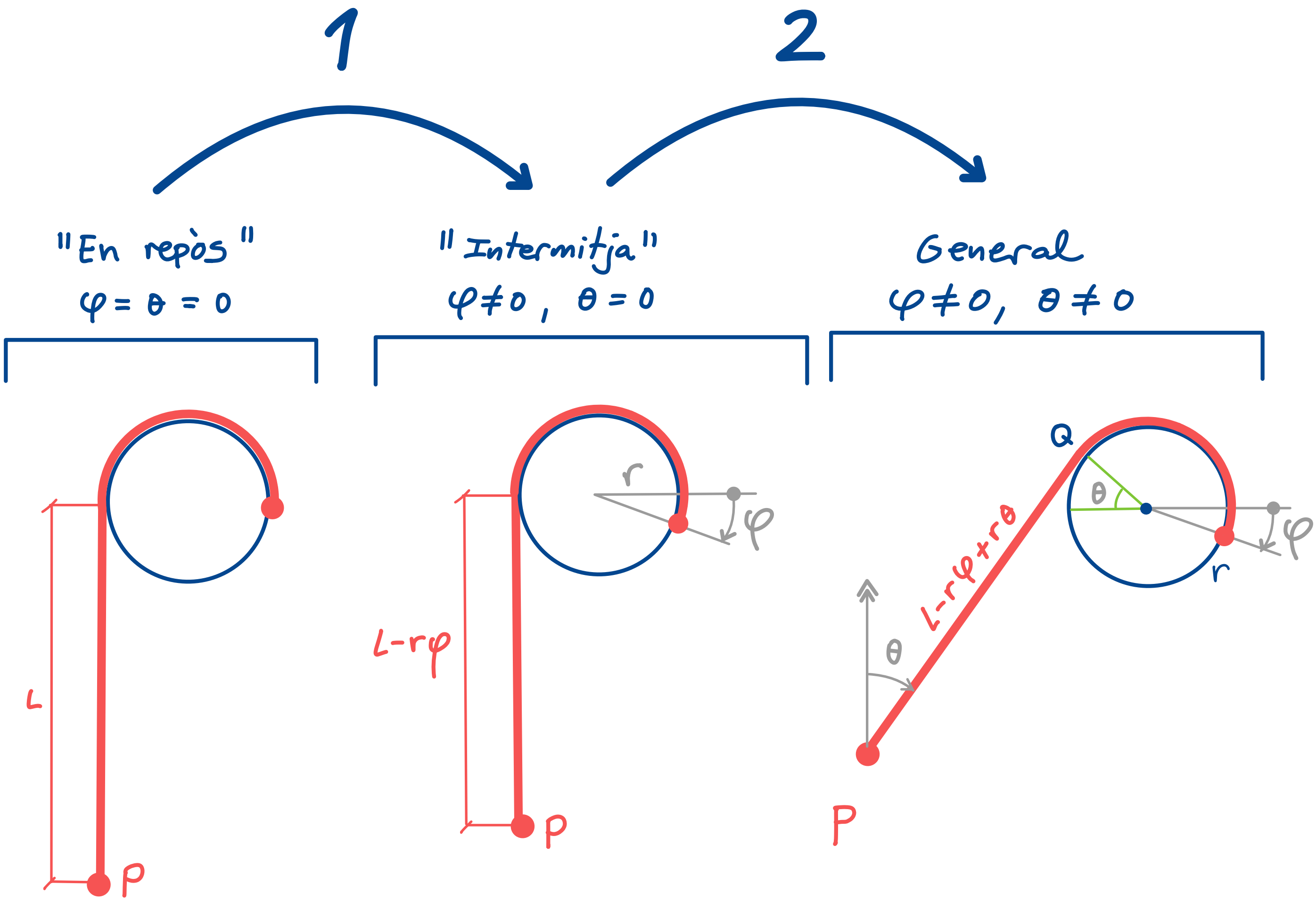


La volem per a una configuració general (per valors genèrics de φ i θ).

Definim la longitud "en repòs" com:

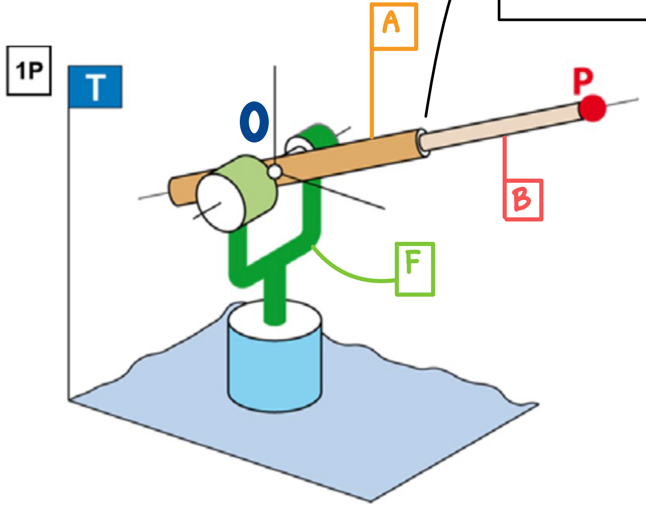
$$L = \left.\left|\overline{QP}\right|\right]_{\varphi=\theta=0}$$

Podem passar de la configuració "en repòs" ($\varphi=\theta=0$) a una de general (valors φ, θ genèrics) en 2 passos:

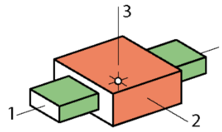


Per tant:

$$\boxed{d = L - r\varphi + r\theta}$$



Suposarem que és un enllaç prismàtic

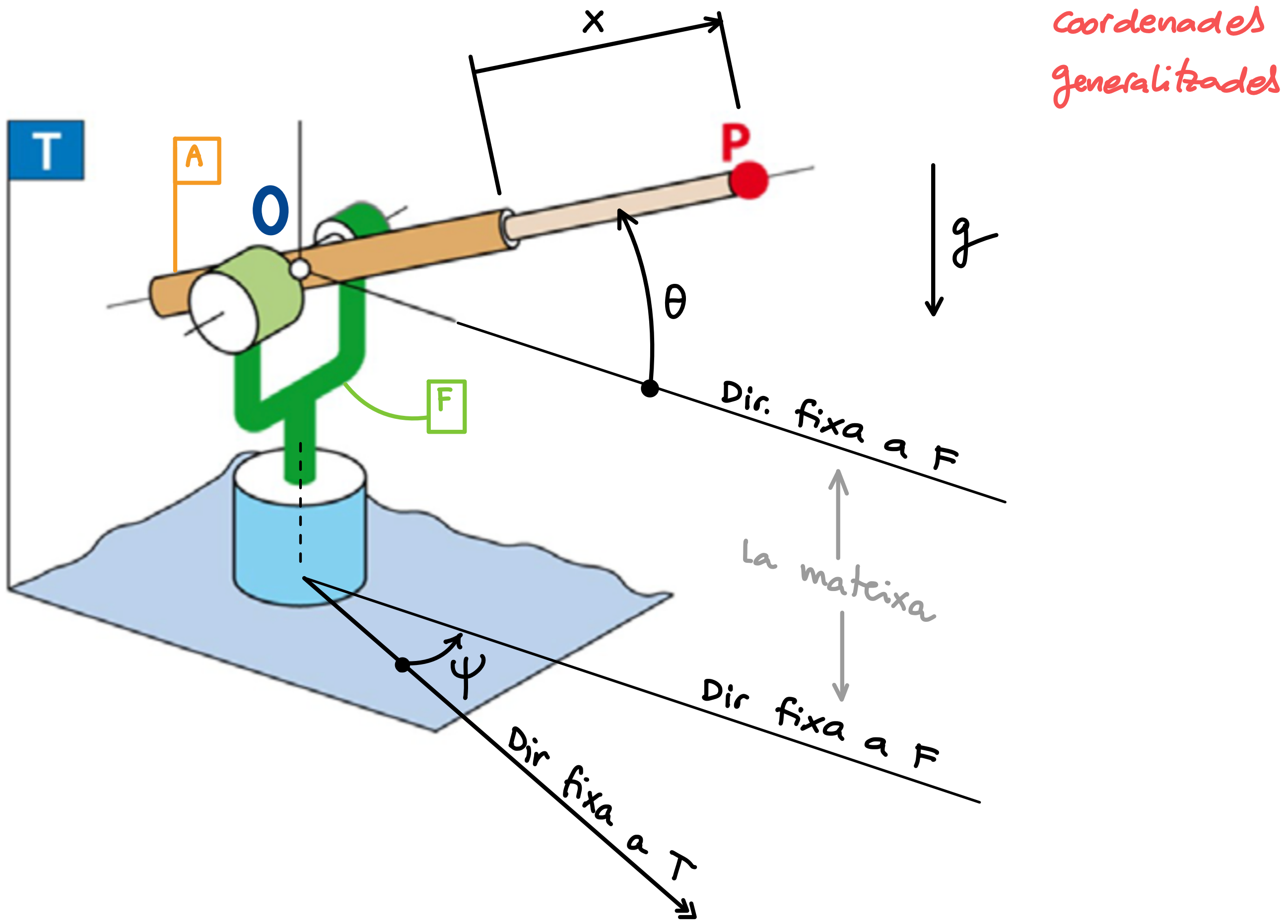


La forquilla (F) gira respecte del terra (T). L'antena telescòpica està articulada a la forquilla.

- Vector de posició de **P** respecte de la primera part de l'antena (A), de F i de T?
- Diagrama de Moviments Relatius?
- Graus de Llibertat?
- Orientació de l'antena respecte de F, T?
- Orientació de la forquilla respecte de T?

El sistema està format pel terra (T) i 3 sòlids (F, A, B) amb moviments relatius entre ells (els permesos pels enllaços). Podem descriure aquests moviments mitjançant les següents coordenades ψ, θ, x :

S'anomenen coordenades generalitzades

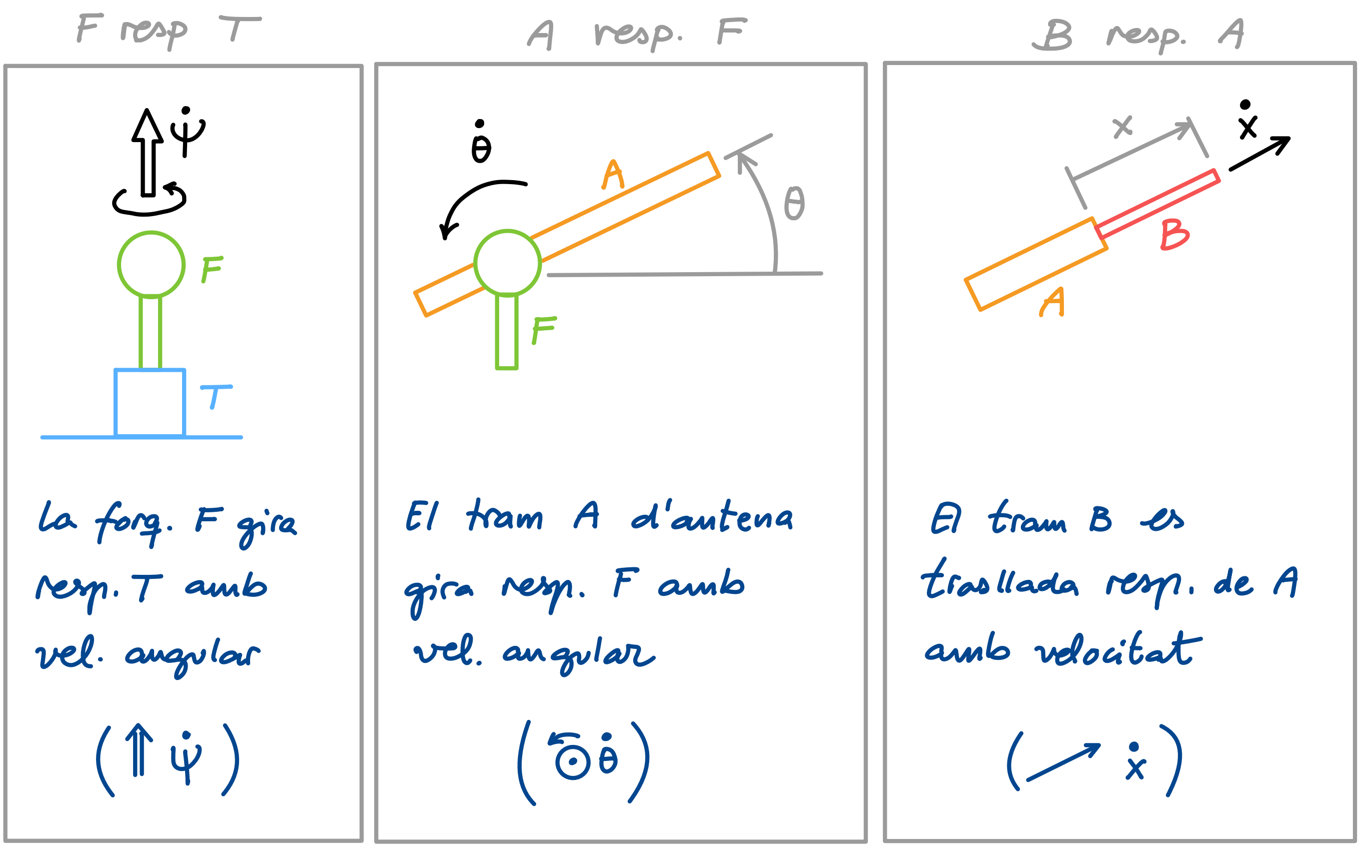


ψ = angle entre una dir. horitzontal (*) fixa a T i la perpendicular al pla de la forquilla F.

θ = angle entre la perpendicular al pla de F i la direcció de l'antena A.

x = distància entre l'extrem de A i P

Aquestes coordenades ens permeten descriure els moviments relatius entre parelles de sòlids. Ho farem amb dibuixos 2D perquè són més clars:

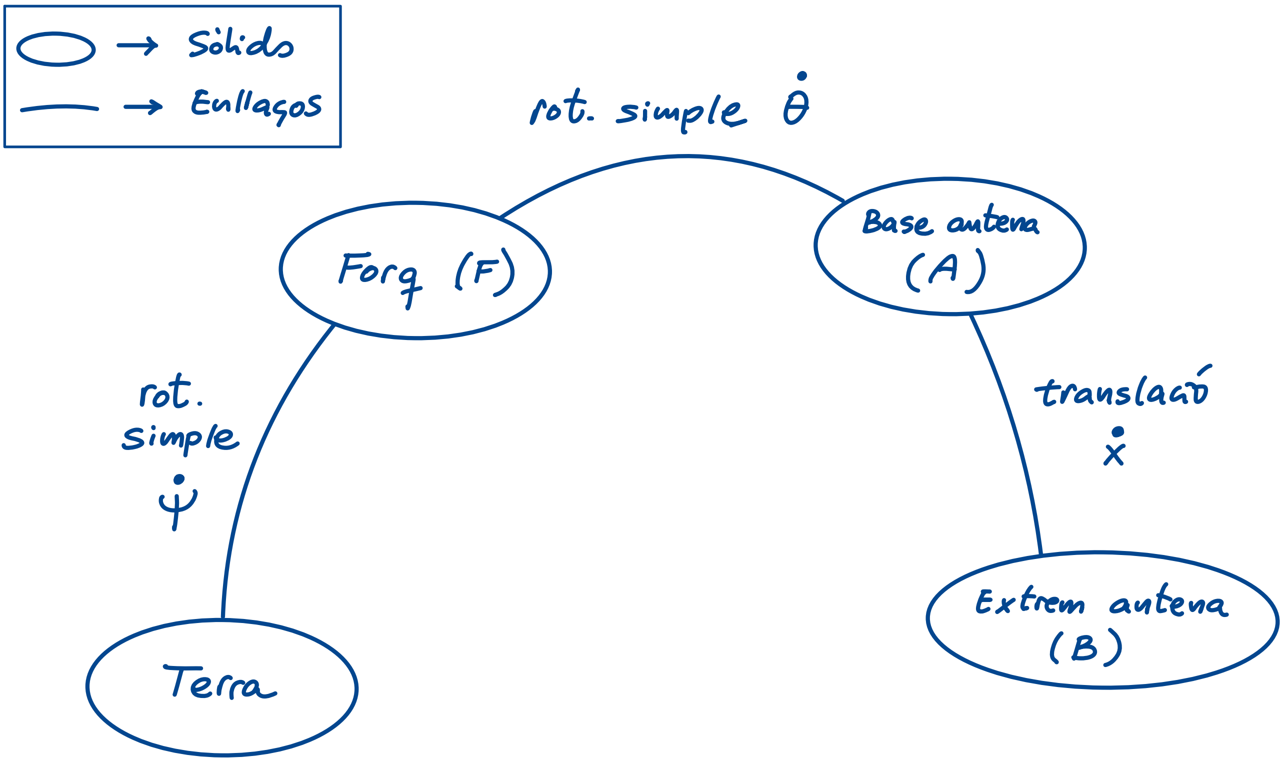


(*) Una dir. horitzontal és qualsevol direcció perpendicular al vector gravetat ($\bar{g}$).

Quan diem "moviment relatiu" volem dir "velocitat relativa" (d'un sòlid o referència, respecte d'un altre sòlid o referència). És a dir, els vectors ($\Uparrow \dot{\psi}$), ($\odot \dot{\theta}$) i ($\nearrow \dot{x}$) abans indicats.

Diagrama de moviments relatius (DMR)

És una representació gràfica dels sòlids del sistema i dels enllaços entre ells (del moviment relatiu permès per aquests enllaços). Per al sistema d'aquest exercici seria:



Graus de llibertat del sistema

El conjunt <u>mínim</u> de variables escalars de velocitat que cal per descriure el <u>moviment</u> del sistema (les velocitats de tots els seus punts) constitueix el conjunt de <u>graus de llibertat</u> (GL) del sistema.

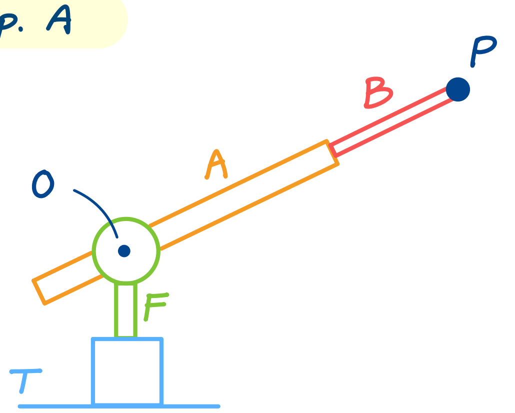
En aquest exercici, el sistema té 3 GL ja que el seu moviment queda descrit per

$$\underbrace{\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{x}}_{3\ GL}$$

Una manera eficaç de comptar GL és anar bloquejant moviments relatius, un rere l'altre, fins que el sistema quedi aturat resp. T. El nombre de moviments relatius que hagi calgut bloquejar coincideix amb el nombre de GL del sistema.

Vec. pos. de P resp. A, F, T

Resp. A



Cal un punt fix a A com a origen ⇒ triem el punt O (intersecció de l'eix entre F i T i l'eix entre A i F).

⇓

El vector serà $\overline{OP}$

Resp. F

El punt O també és fix a F ⇒ serveix com a origen del vec. posició de P resp. F ⇒ $\overline{OP}$ és un vec. posició de P resp. F adient!

Resp. T

Novament, $\overline{OP}$ serveix com a vec. pos. de P resp. T perquè O també és fix a T.