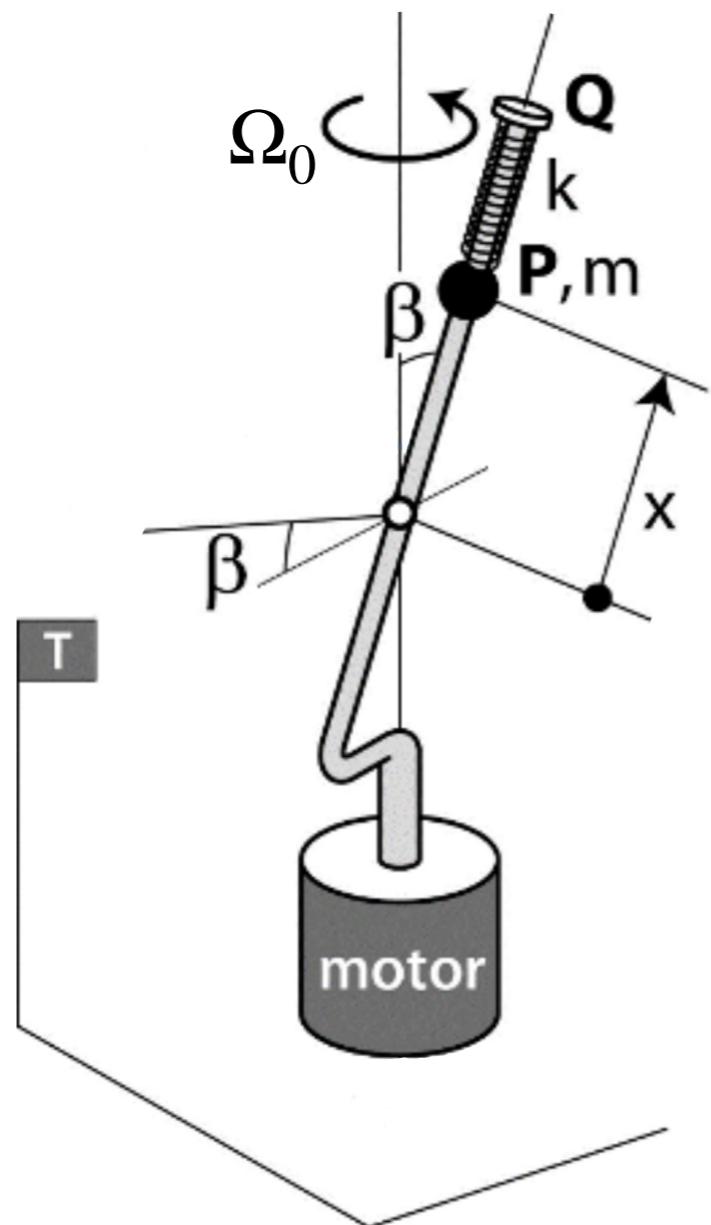


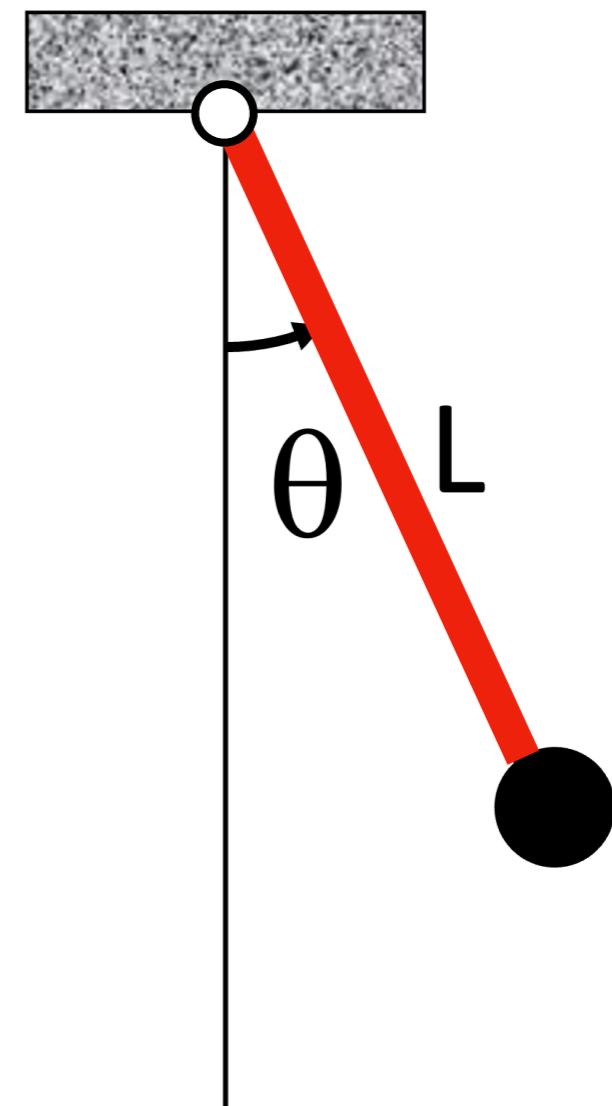
10P

Geometria de masses

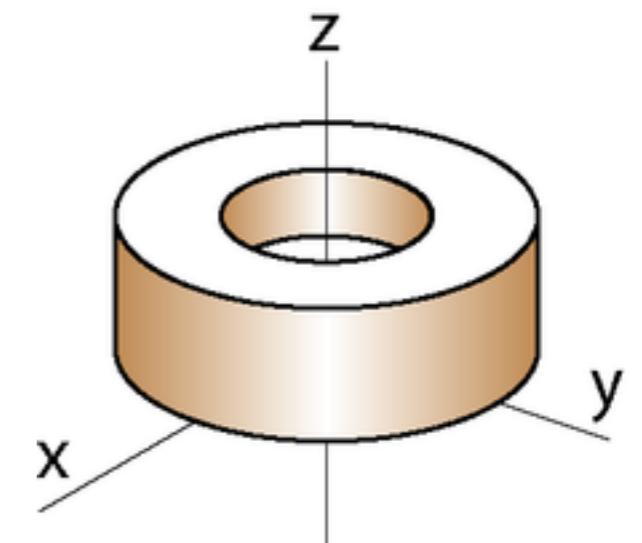
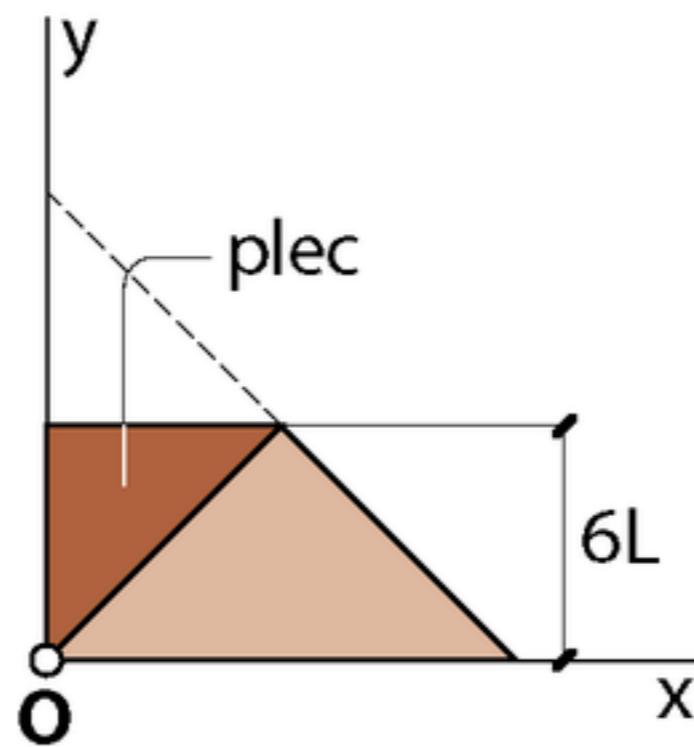
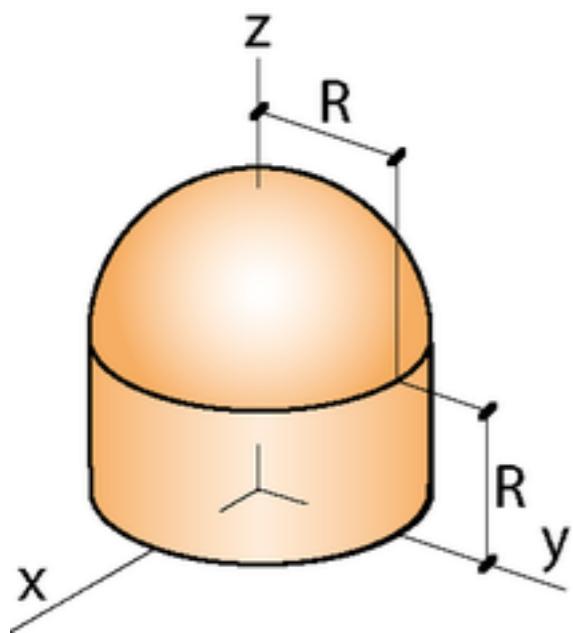
Massa-molla-guia



Pèndol simple



Exm: D5.1 - D5.2 - D5.3 (Wikimec)



Tensor d'inèrcia de S a Q

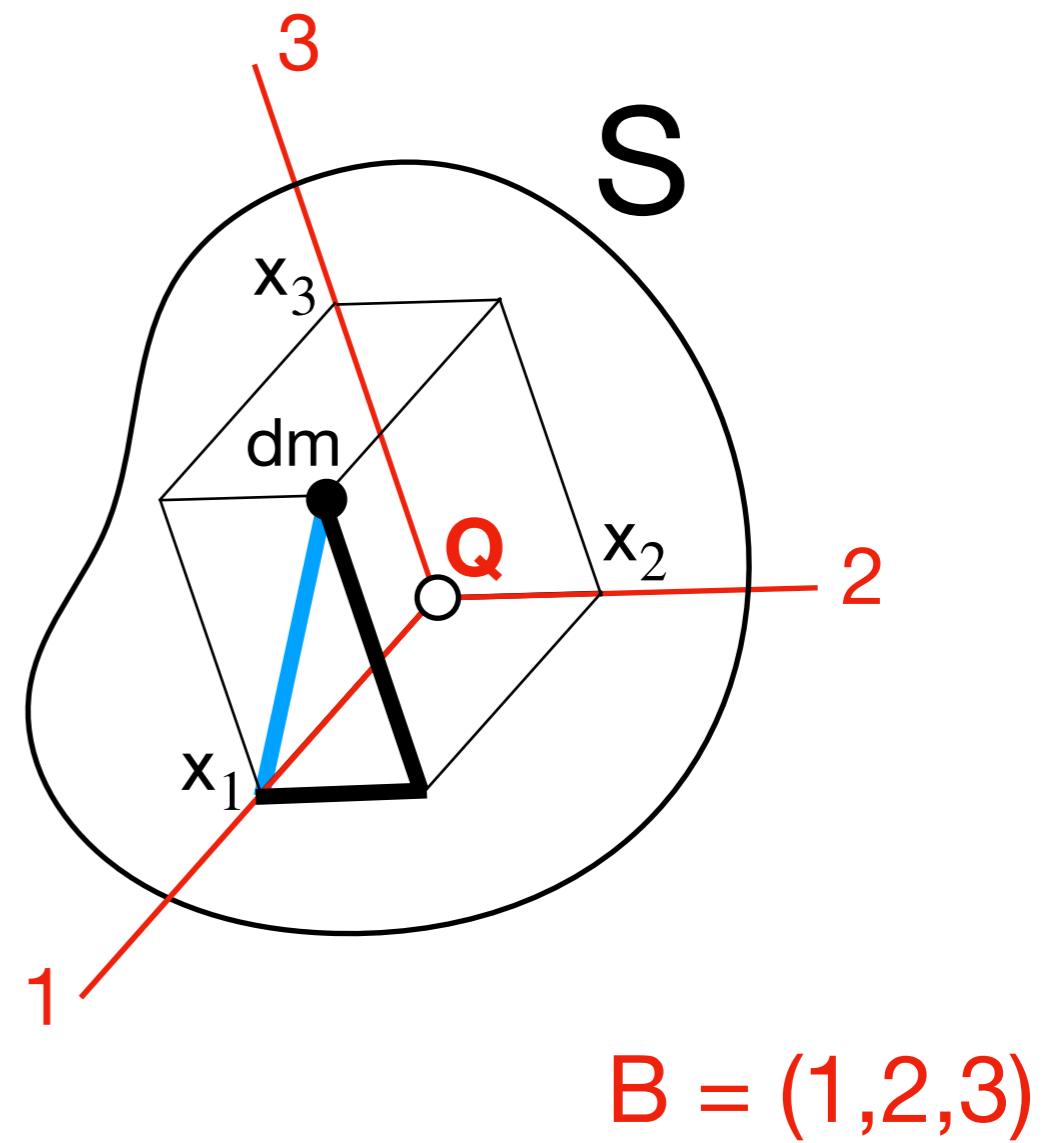
$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Moments d'inèrcia

$$I_{ii} = \int_S \underbrace{(x_j^2 + x_k^2)}_{(\text{dist a eix } i)^2} dm \geq 0$$

Exm:

$$I_{11} = \int_S \underbrace{(x_2^2 + x_3^2)}_{(\text{dist a eix 1})^2} dm$$



$B = (1, 2, 3)$

Tensor d'inèrcia de S a \mathbf{Q}

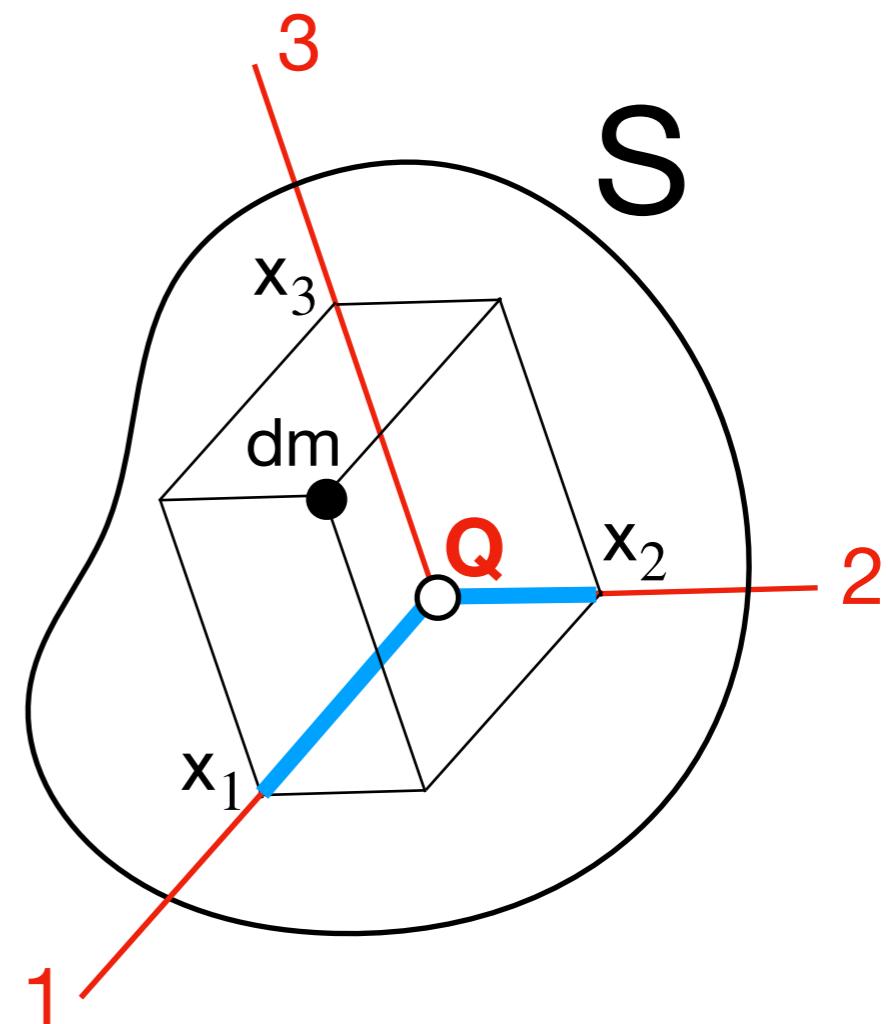
$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Productes d'inèrcia

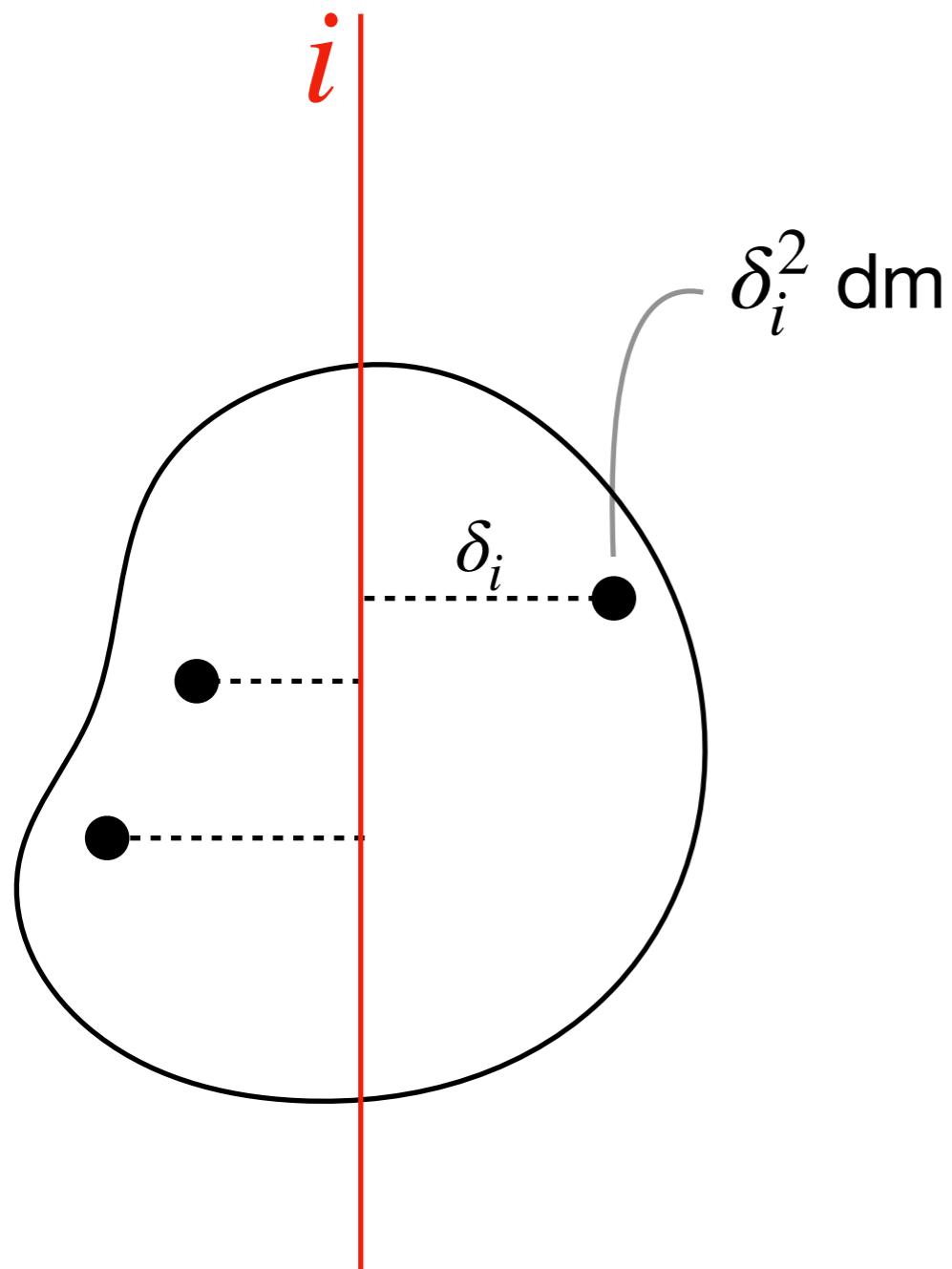
$$I_{ij} = - \int_S x_i x_j dm \quad (>0, <0, =0)$$

Exm:

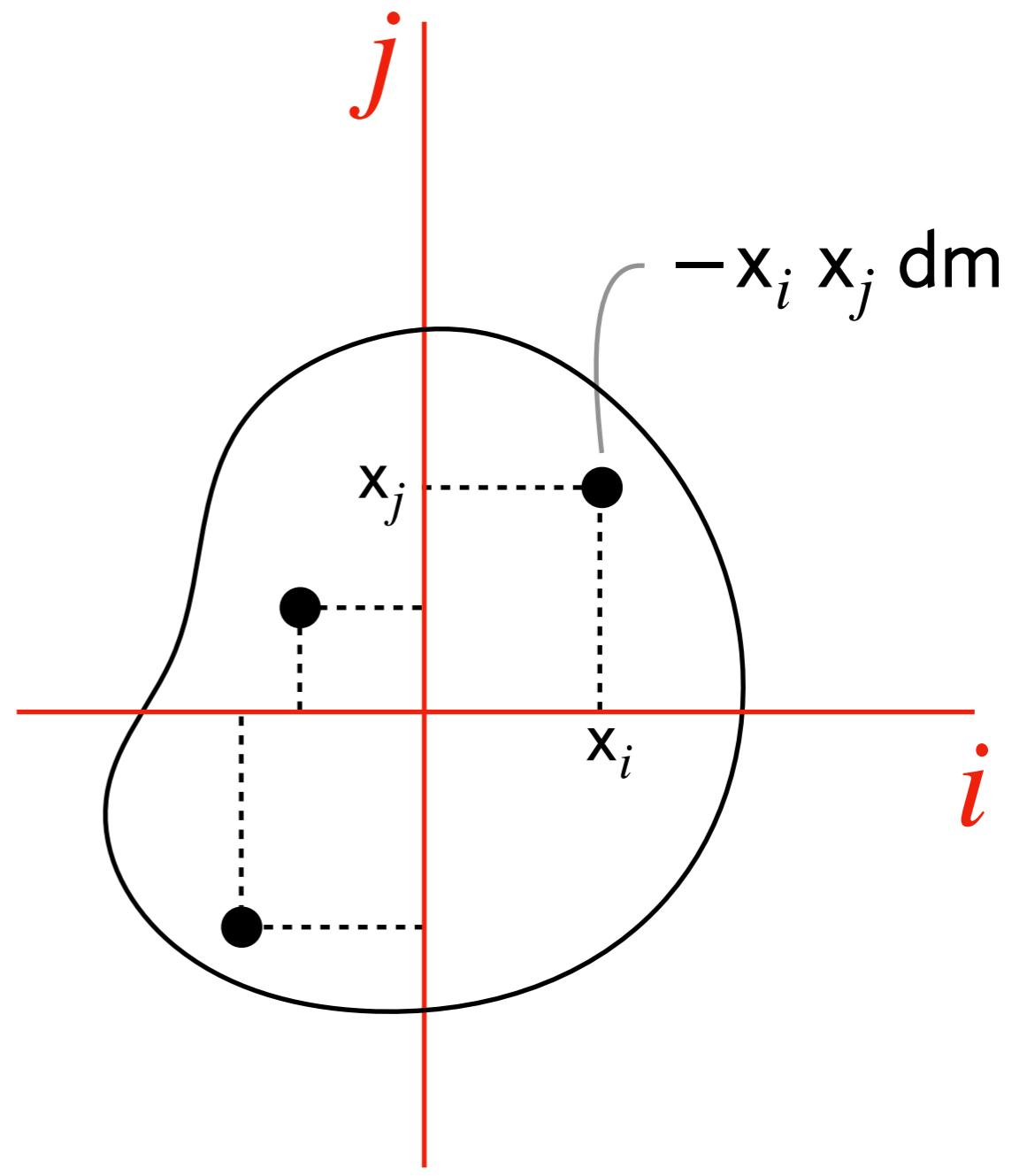
$$I_{12} = - \int_S x_1 x_2 dm$$



Mom. inèrcia I_{ii}



Prod. inèrcia I_{ij}



Direccions principals d'inèrcia (DPI)

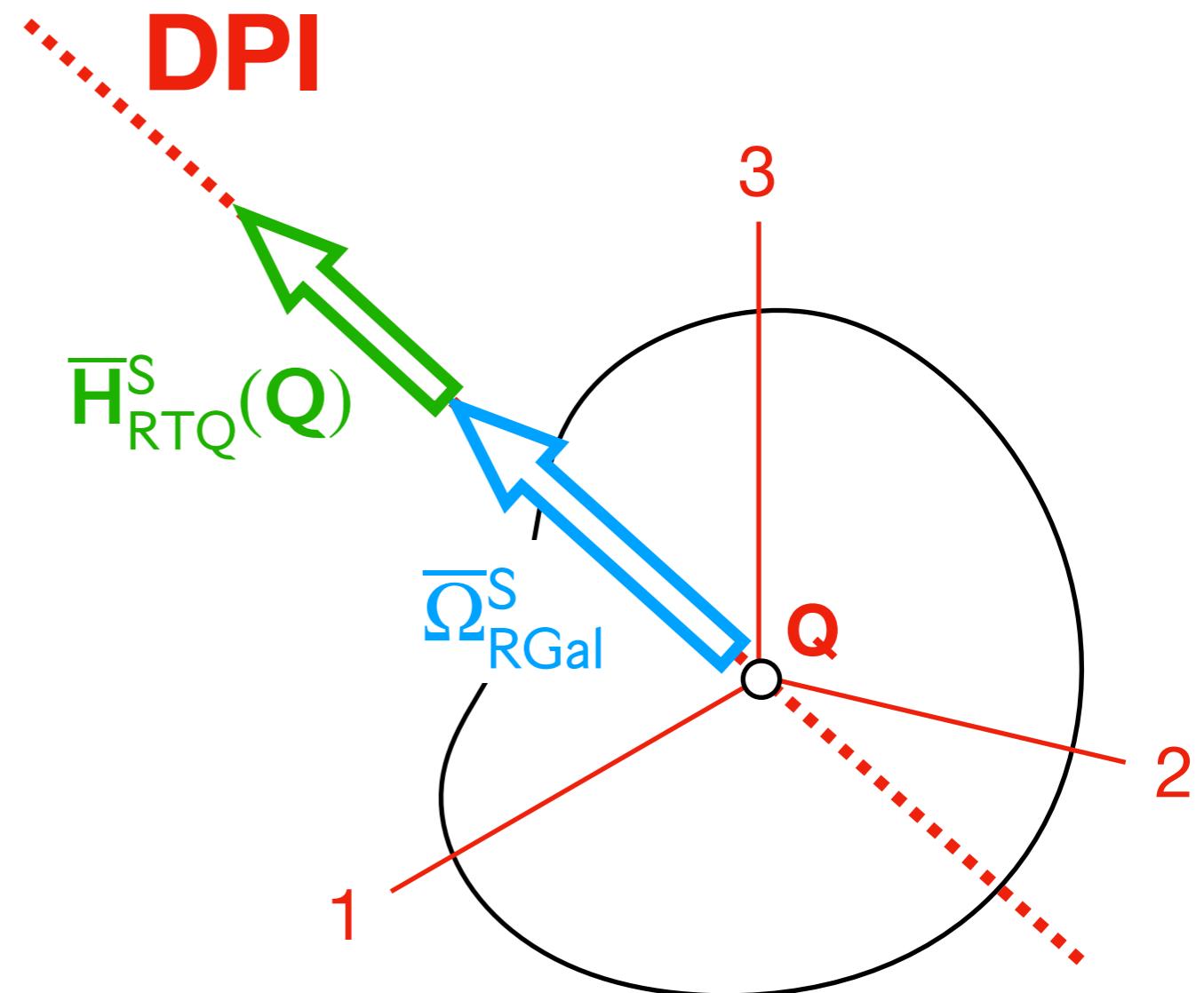
Són les direccions
dels **vectors propis**

$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{RTQ}^S(\mathbf{Q}) = \mathbb{I}(\mathbf{Q}) \quad \overline{\Omega}_{RGal}^S$$



Si són paral·lels,
la seva dir. és **DPI**

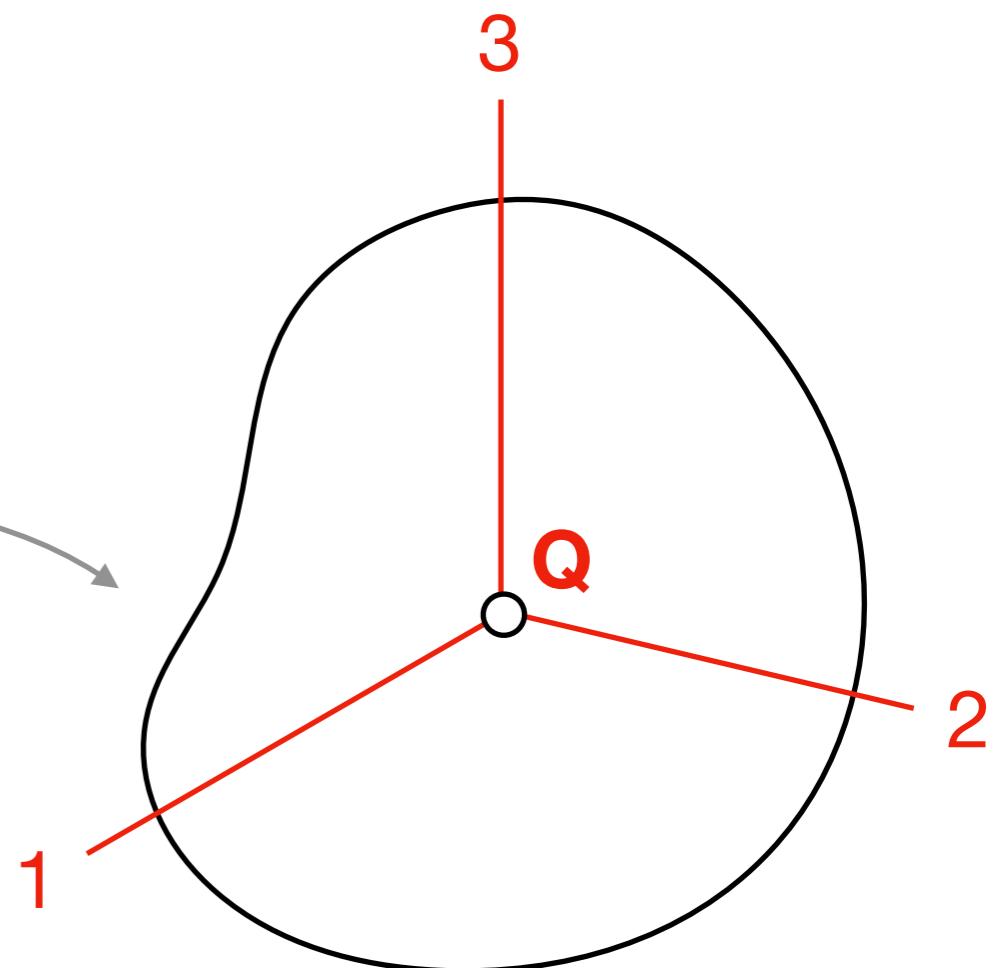


Bases adients?

$$[\mathbb{II}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Farem servir bases B
en les que el tensor sigui **constant**

Per exemple:
B fixa al sòlid

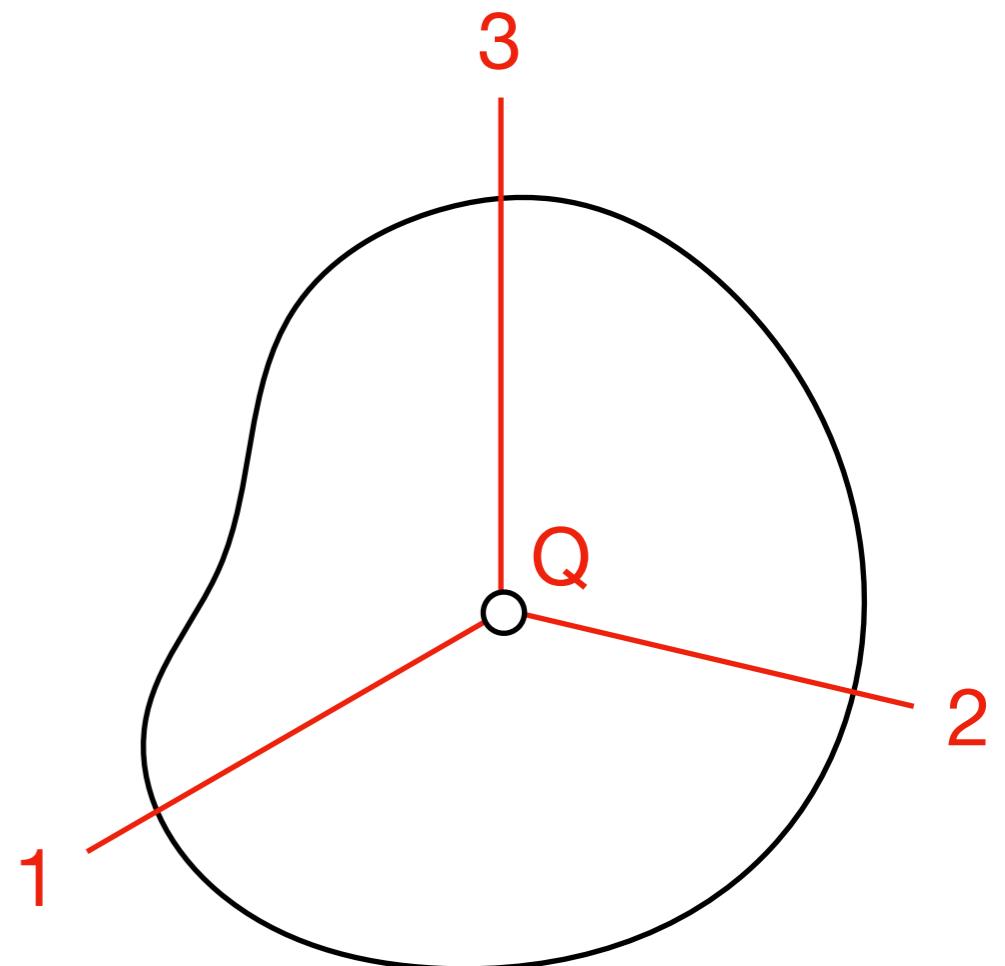


$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

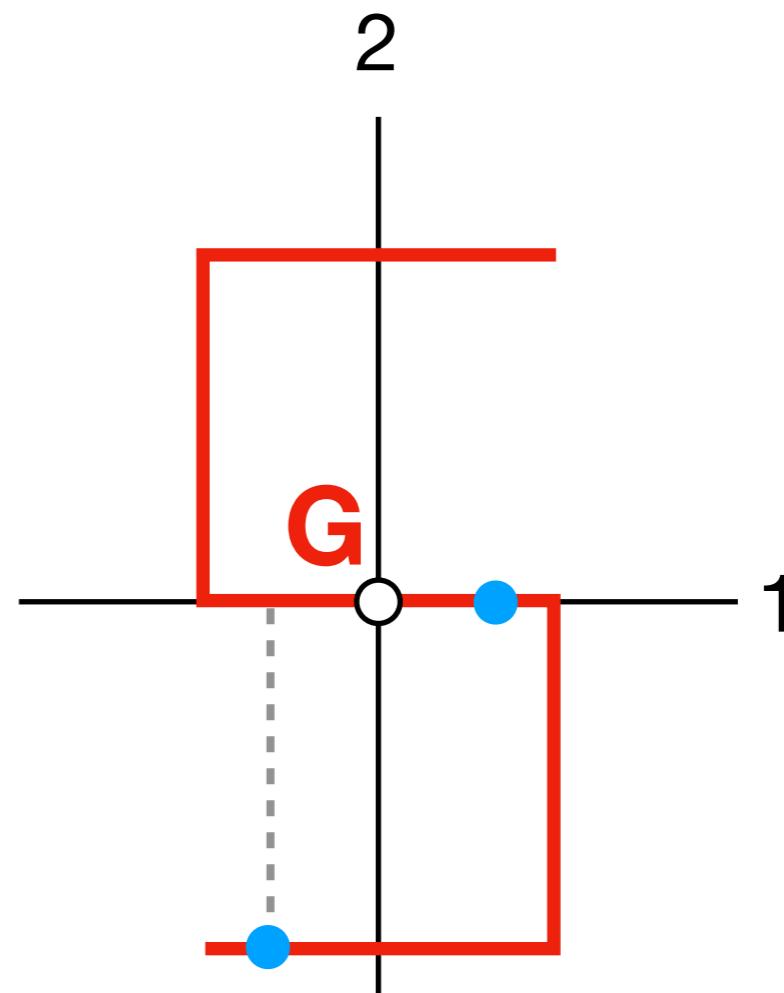
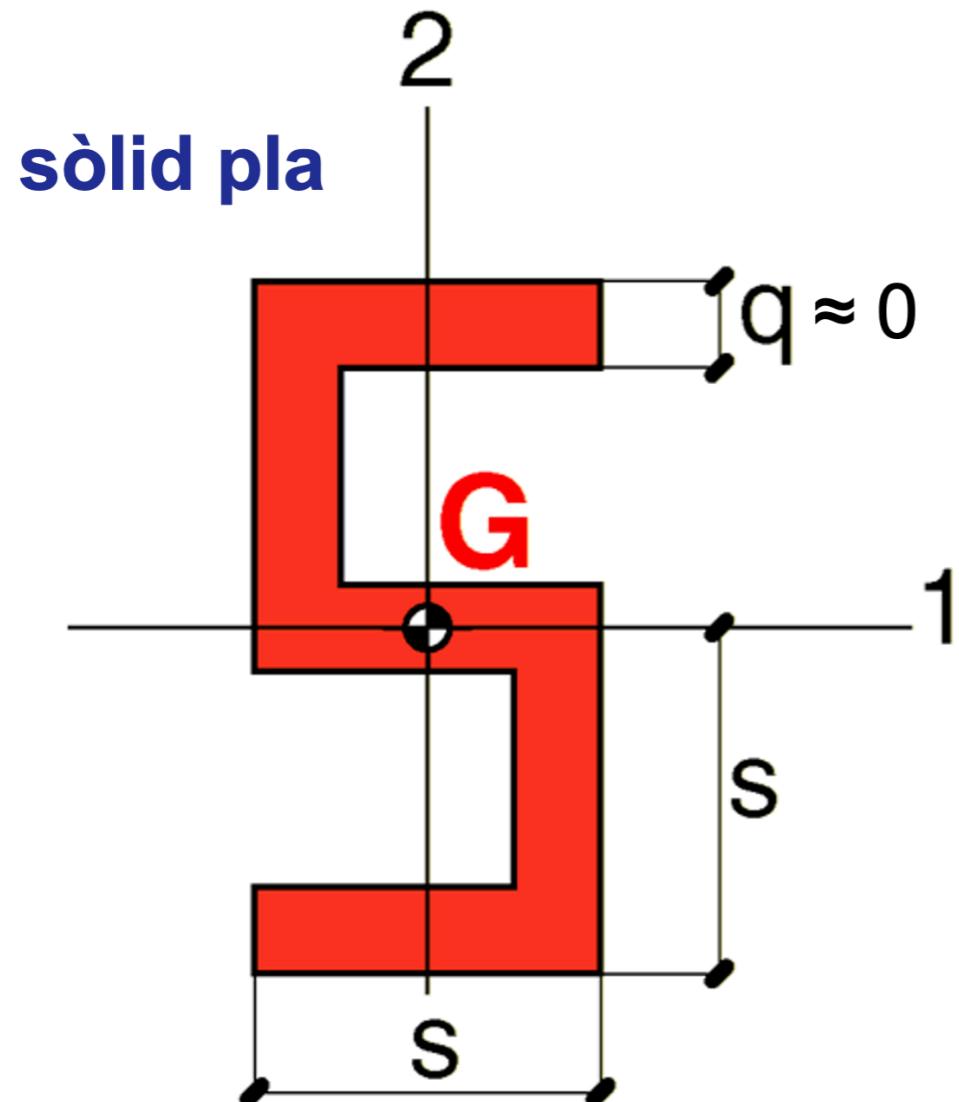
Objectiu d'avui:

Aprendre a **avaluar-lo**

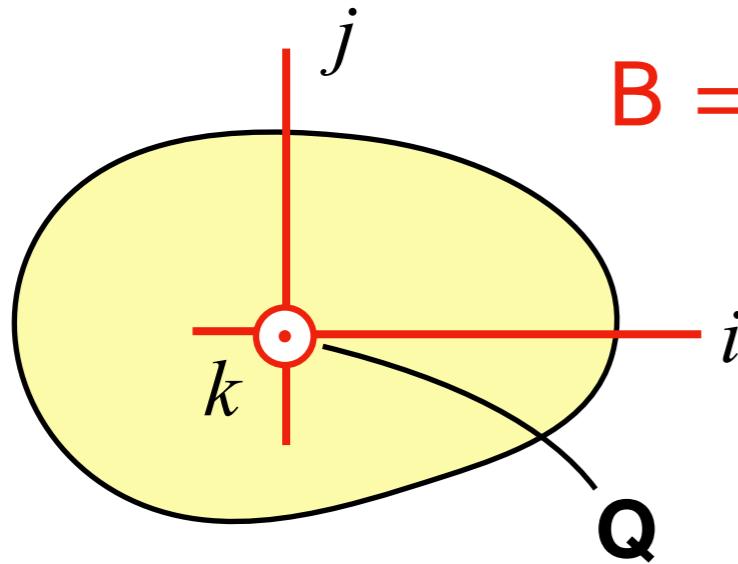
- Qualitativament
- Quantitativament



$[I(G)]_B$ qualitatiu ?



Per un sòlid pla



$$B = (i, j, k)$$

es compleix

1

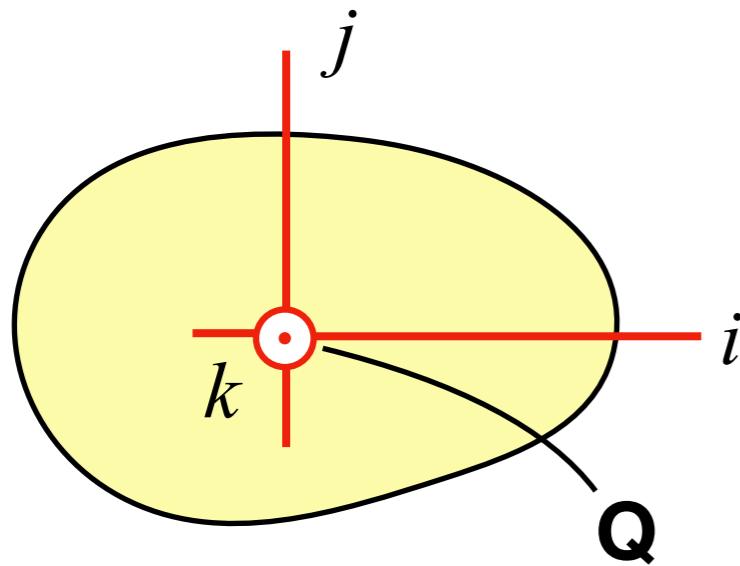
$\forall Q \in \text{sòlid, la dir. } \perp \text{ al sòlid és DPI}$

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{ii} & I_{ij} & 0 \\ I_{ij} & I_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

$I_{ii} + I_{jj}$

I_{kk} és el **MPI** d'aquesta **DPI**

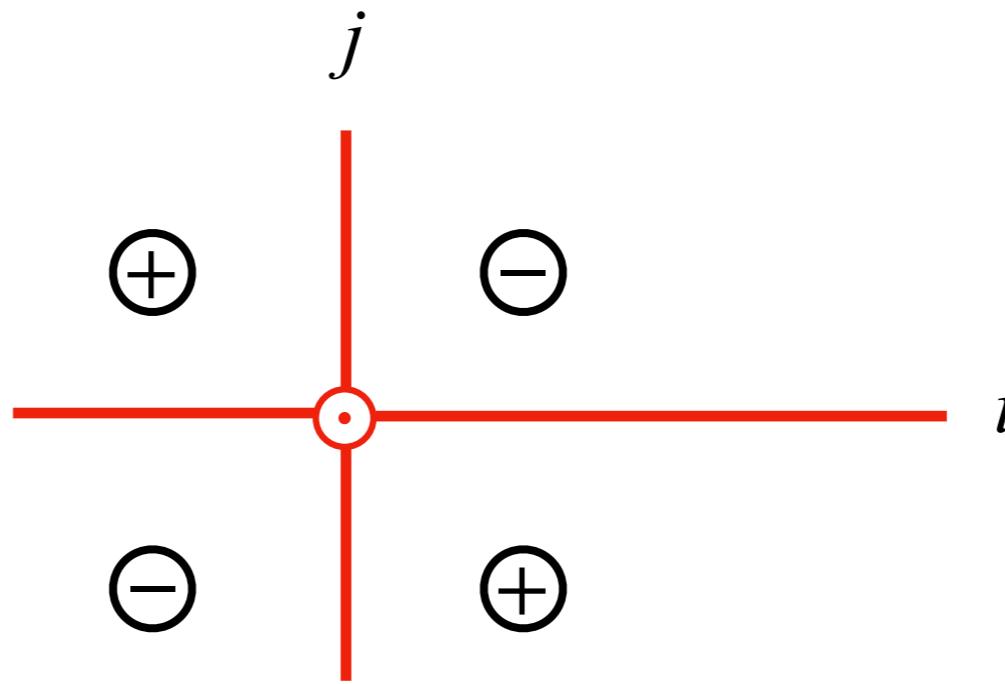
Per un sòlid pla



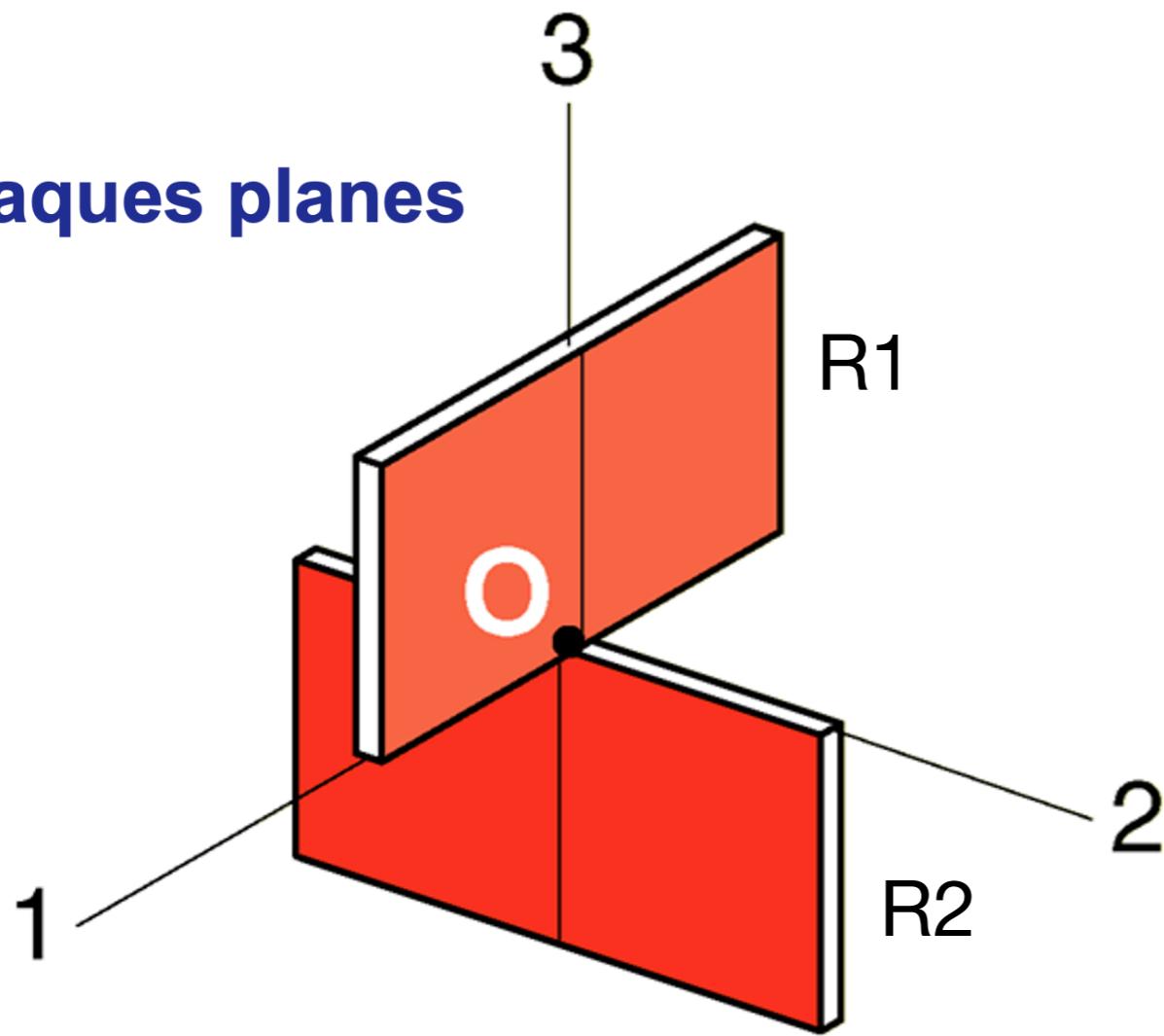
es compleix

2

Signe de la contribució dels dm a I_{ij}

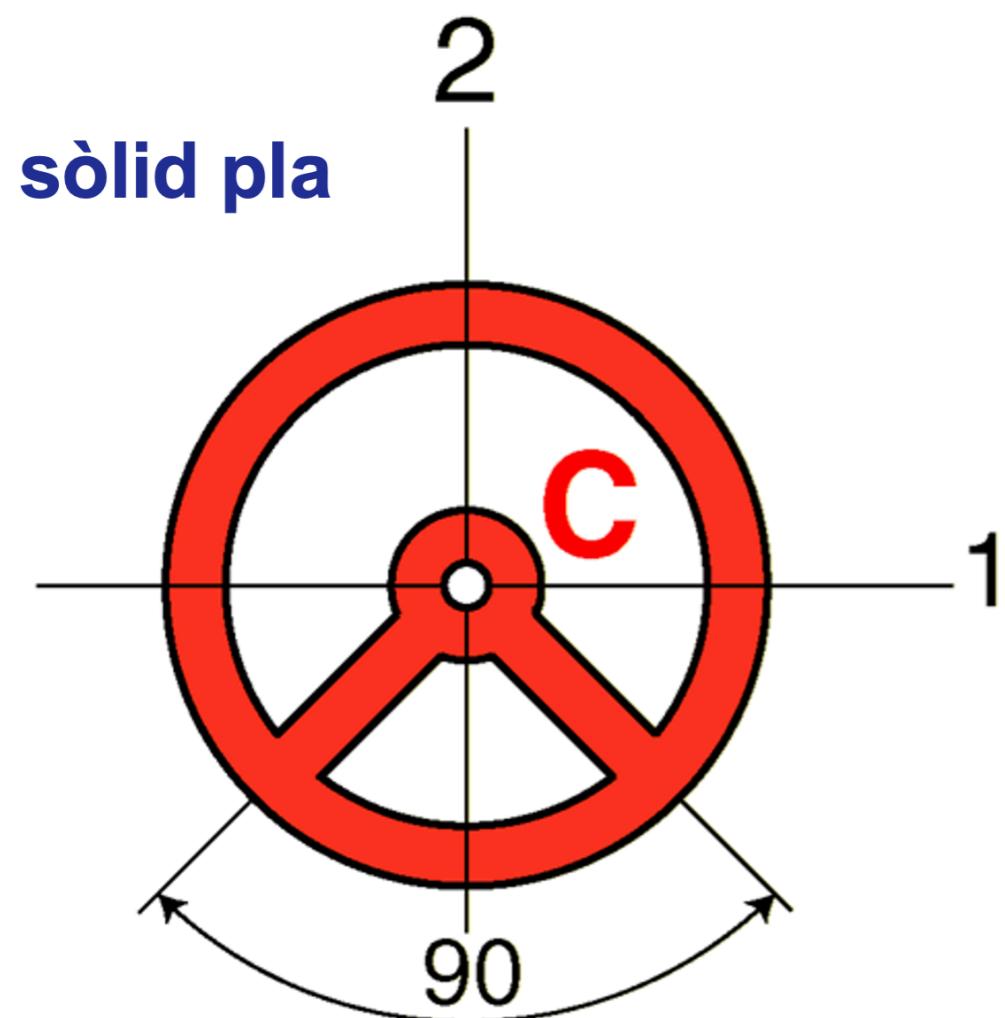


plaques planes



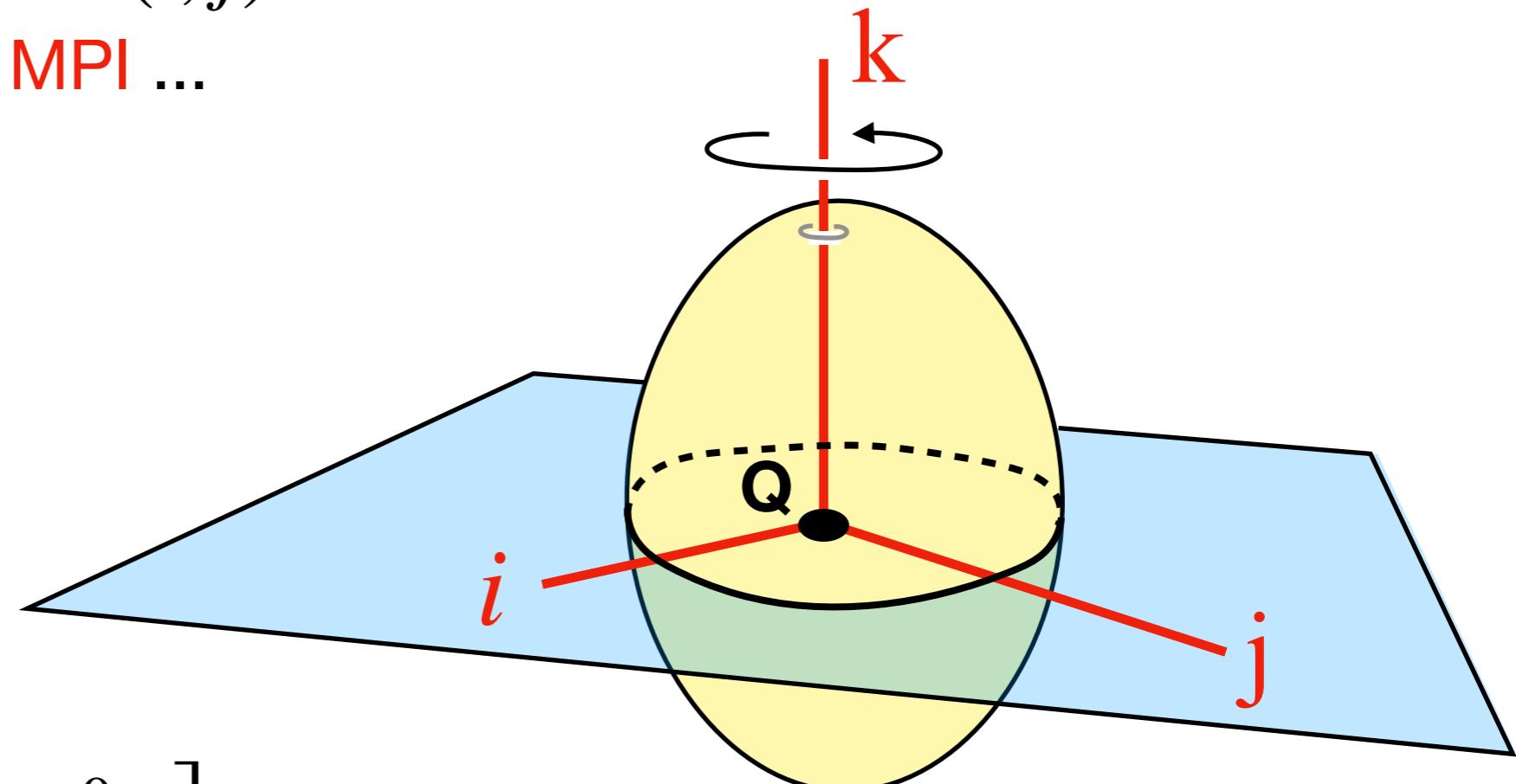
[II(O)]?
qualitatiu

[II(C)] ?
qualitatiu



"Rotor simètric per \mathbf{Q} " en el pla (i, j)

Si per al punt \mathbf{Q} les dirs. (i, j)
són DPI amb mateix MPI ...



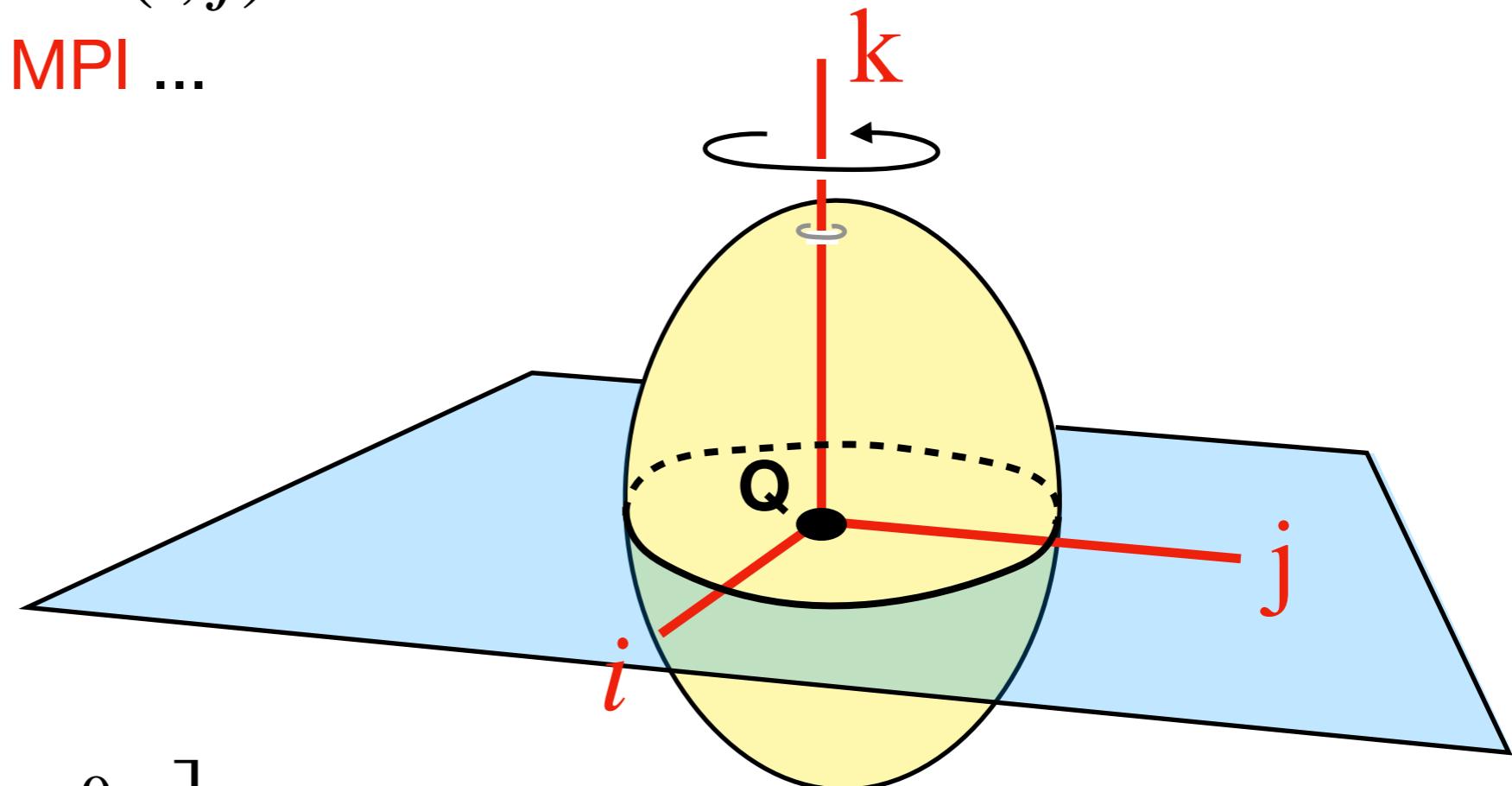
$$[\mathbb{II}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ $\underbrace{\hspace{10em}}$

no canvia si girem B avd dir. k

"Rotor simètric per \mathbf{Q} " en el pla (i, j)

Si per al punt \mathbf{Q} les dirs. (i, j)
són DPI amb mateix MPI ...

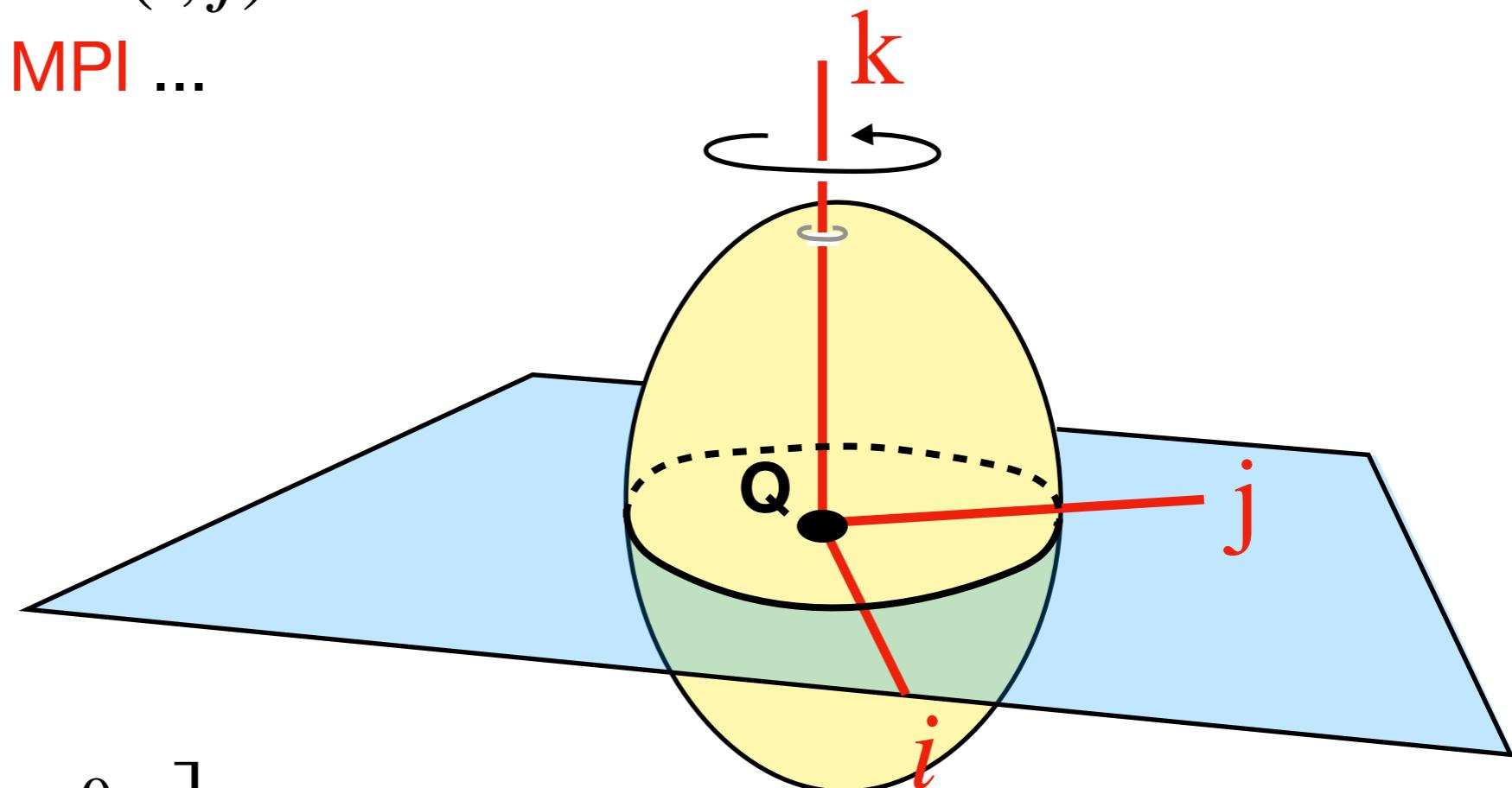


$$[\mathbb{II}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

no canvia si girem B avd dir. k

"Rotor simètric per \mathbf{Q} " en el pla (i, j)

Si per al punt \mathbf{Q} les dirs. (i, j)
són DPI amb mateix MPI ...

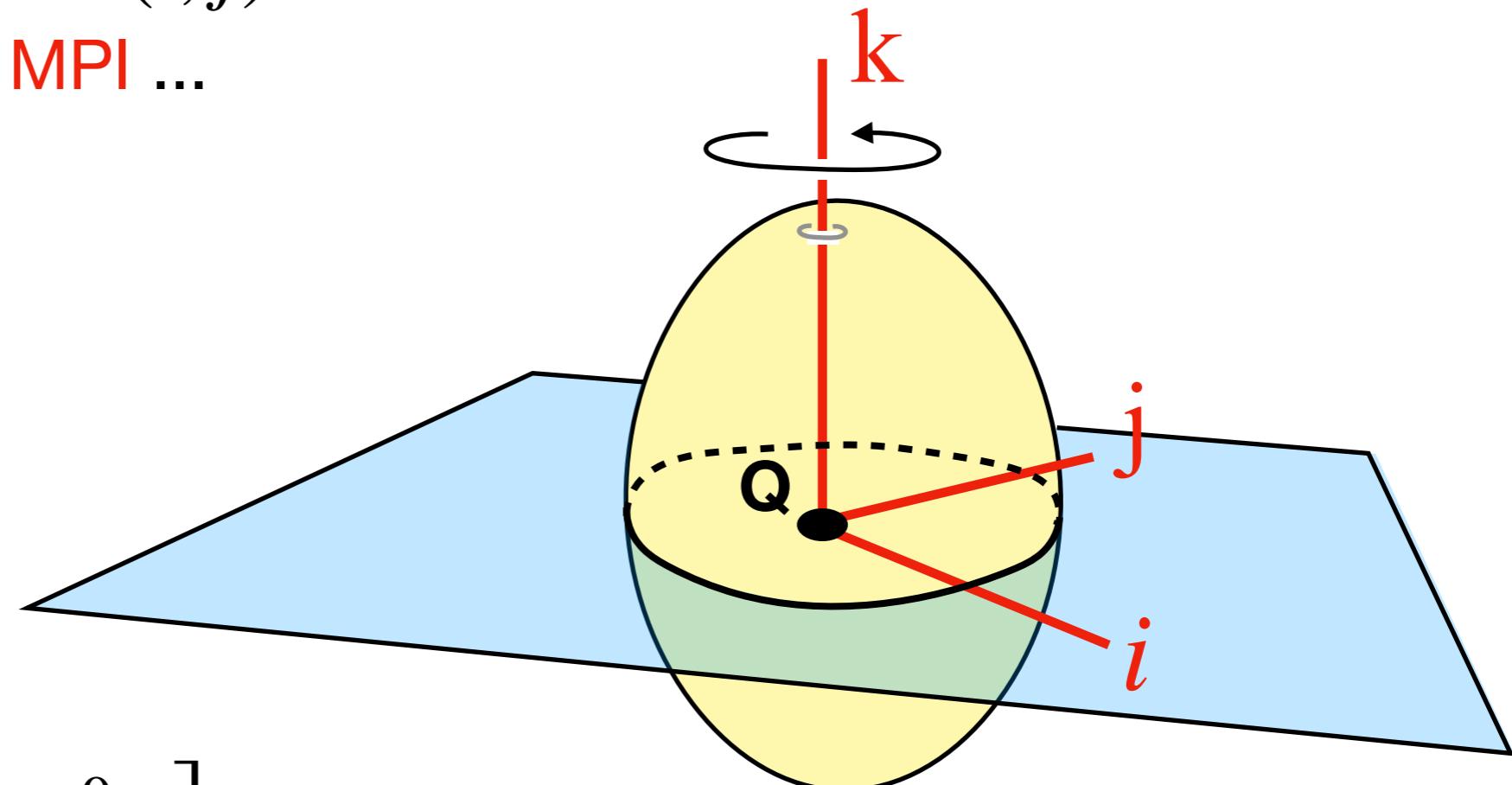


$$[\mathbb{II}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

no canvia si girem B avd dir. k

"Rotor simètric per \mathbf{Q} " en el pla (i, j)

Si per al punt \mathbf{Q} les dirs. (i, j)
són DPI amb mateix MPI ...

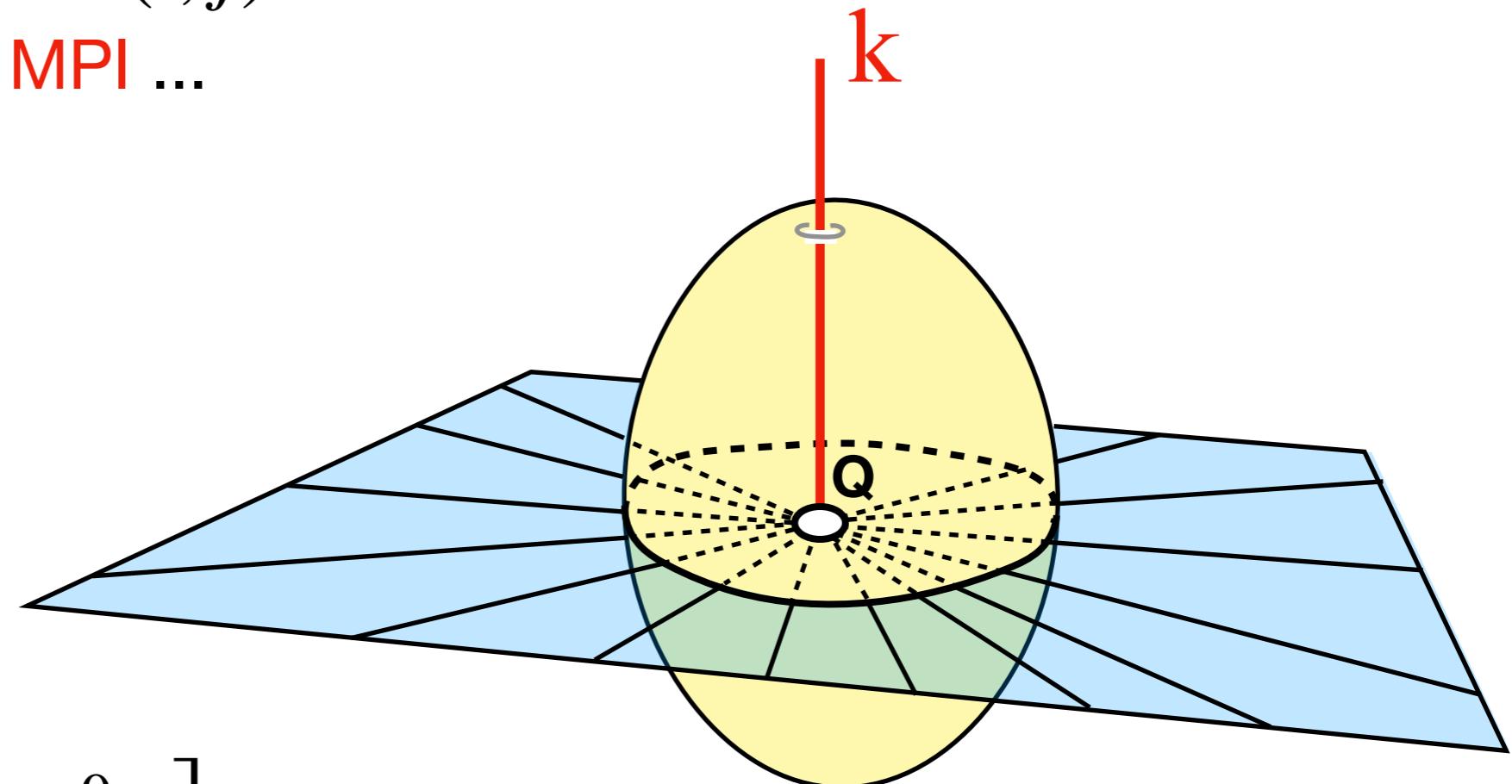


$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

no canvia si girem B avd dir. k

"Rotor simètric per \mathbf{Q} " en el pla (i, j)

Si per al punt \mathbf{Q} les dirs. (i, j)
són DPI amb mateix MPI ...

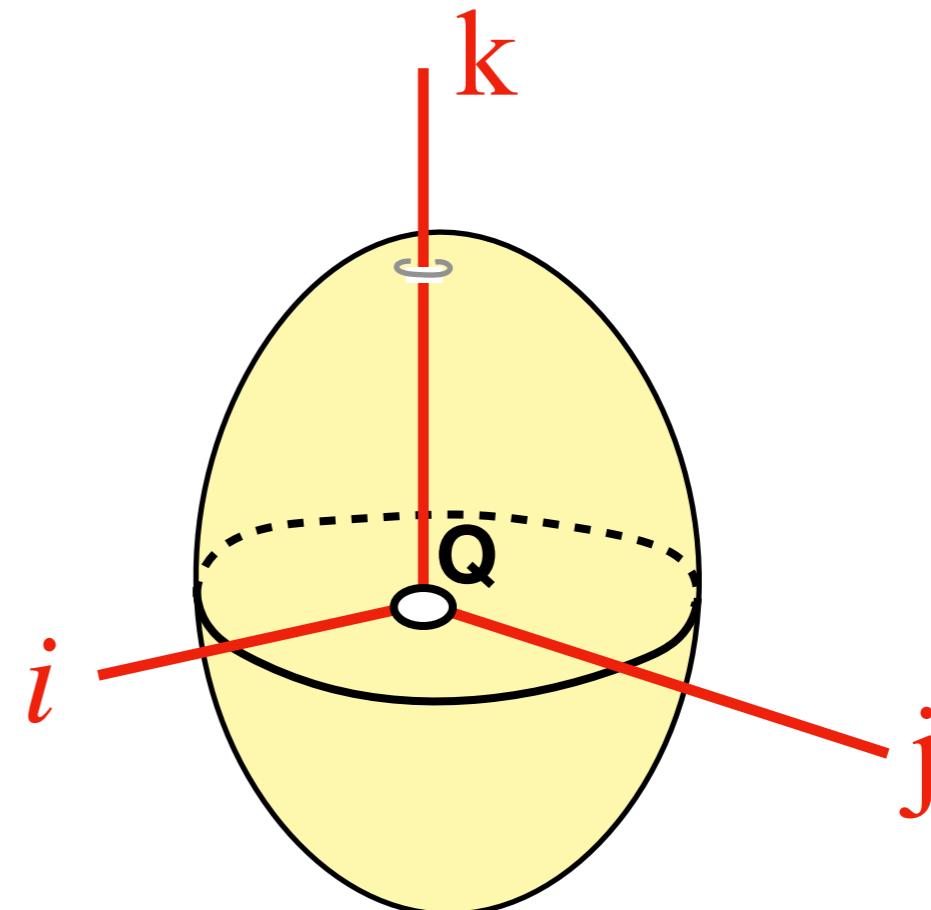


$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

Tota recta del pla (i, j) per \mathbf{Q} és **DPI**
(amb mom. inèrcia \mathbb{I} al seu voltant)

"Rotor esfèric per \mathbf{Q} "

Si per al punt \mathbf{Q} les dirs. (i, j, k)
són **DPI** amb **mateix MPI** ...



... el tensor a \mathbf{Q} té la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada

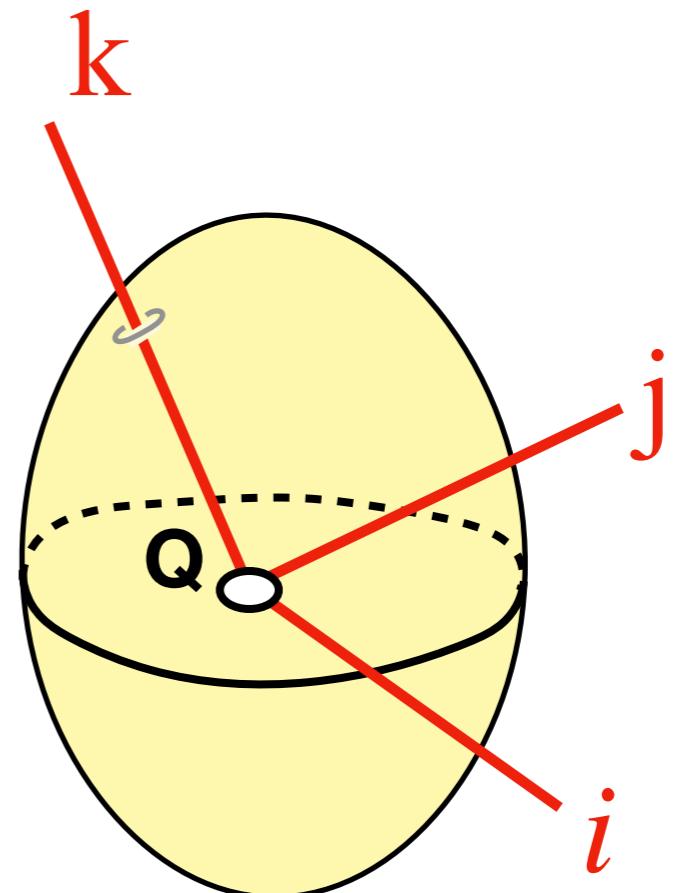
"Rotor esfèric per \mathbf{Q} "

Si per al punt \mathbf{Q} les dirs. (i, j, k)
són **DPI** amb **mateix MPI** ...

... el tensor a \mathbf{Q} té la forma

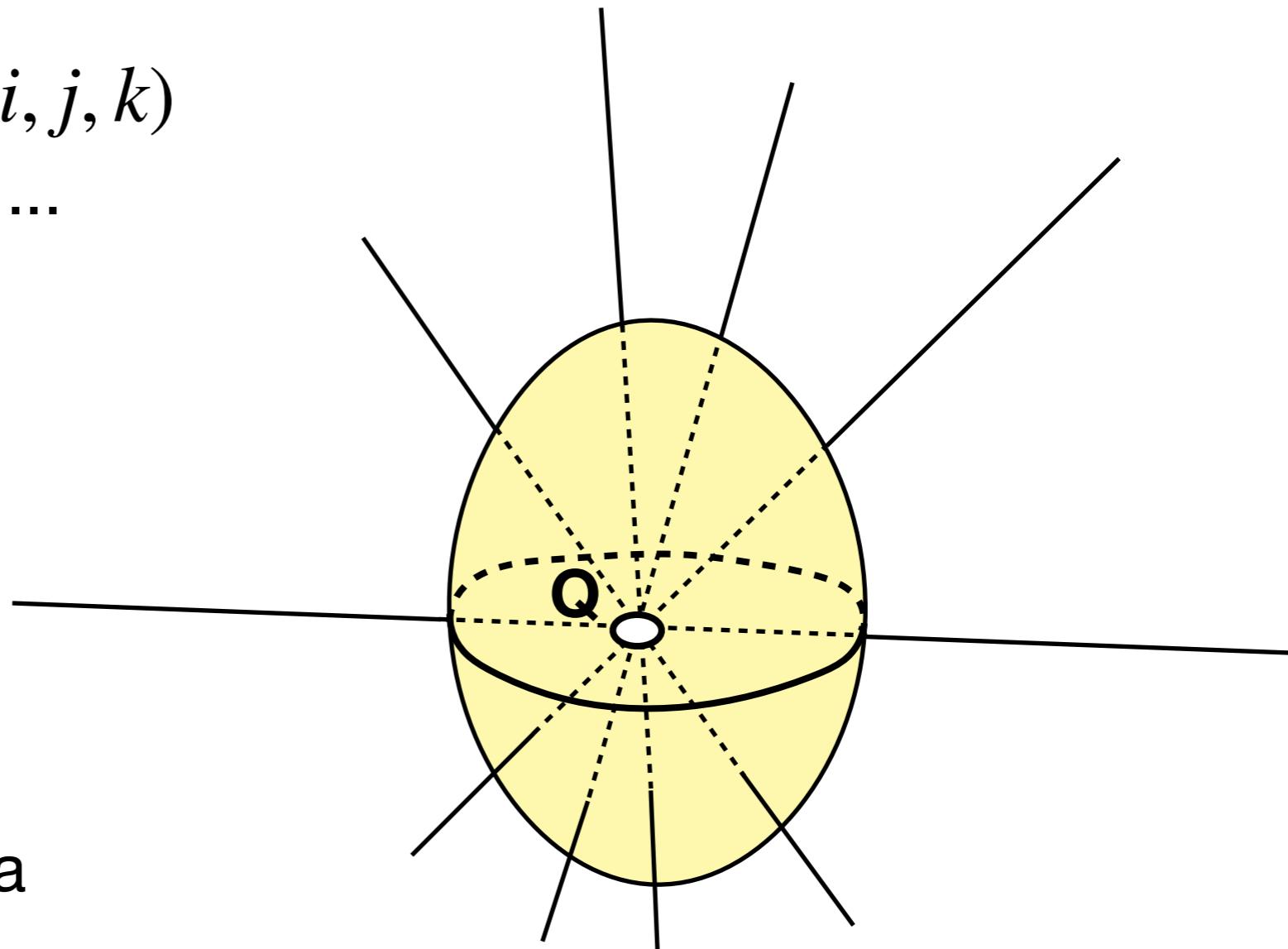
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada



"Rotor esfèric per \mathbf{Q} "

Si per al punt \mathbf{Q} les dirs. (i, j, k)
són **DPI** amb **mateix MPI** ...



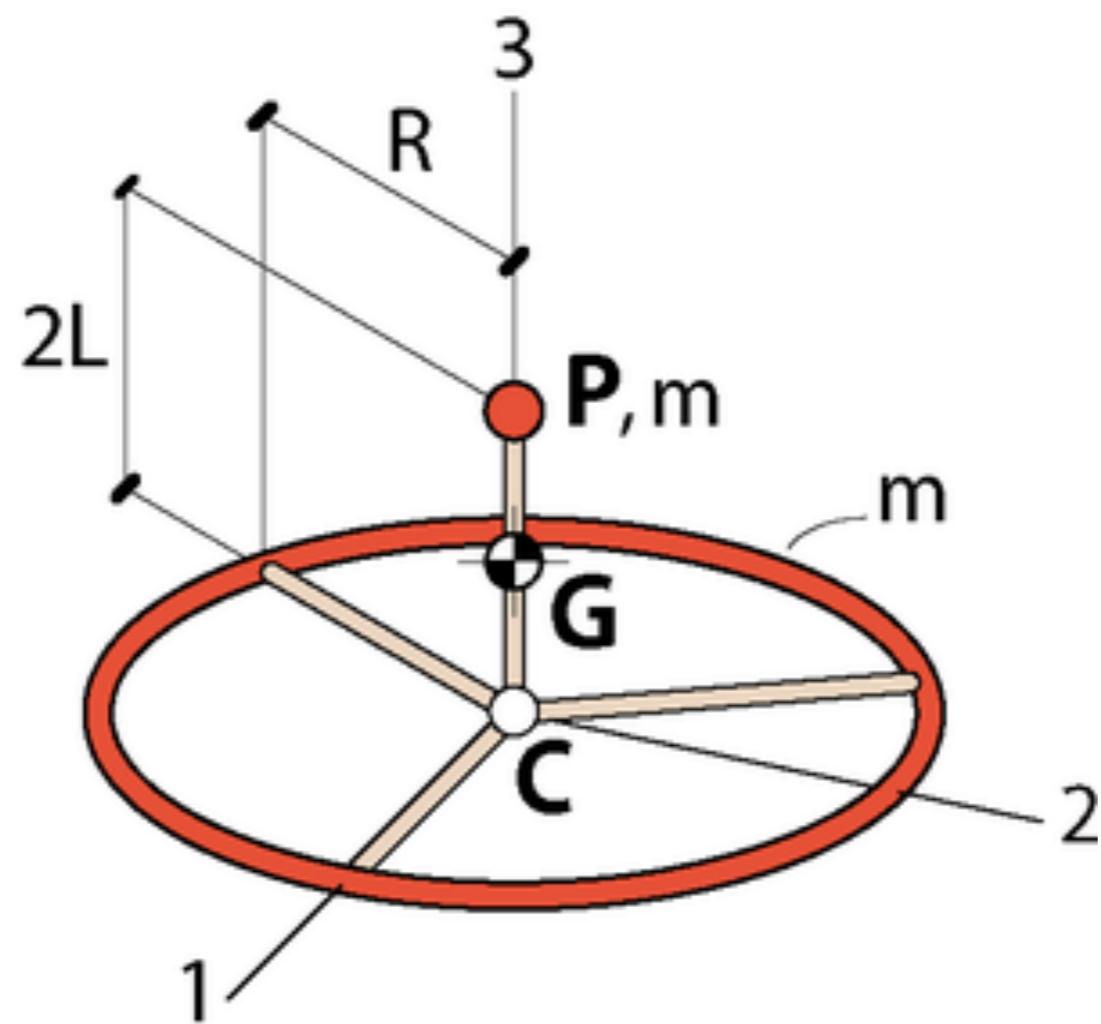
... el tensor a \mathbf{Q} té la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Qualsevol recta per \mathbf{Q} és **DPI**
(amb moment inèrcia \mathbf{I})

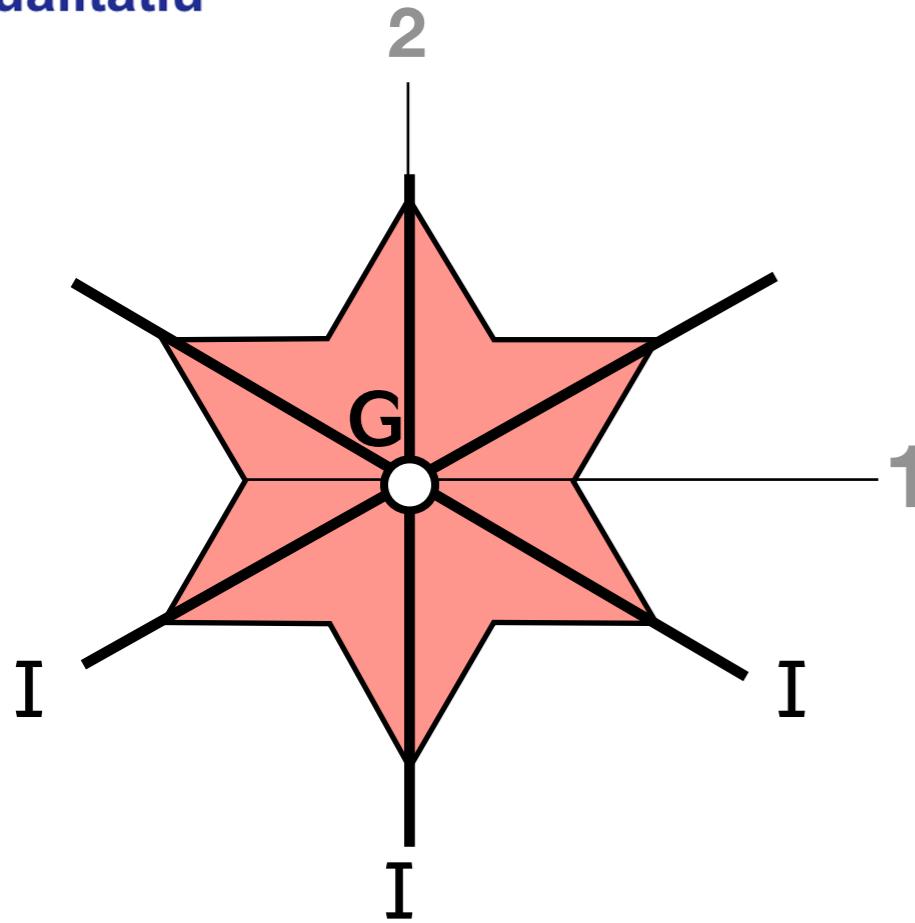
independentment de la base triada

Exemple D5.9 - Wikimec



[II(G)] ?

qualitatiu



Sòlid pla i eix 2 de simetria

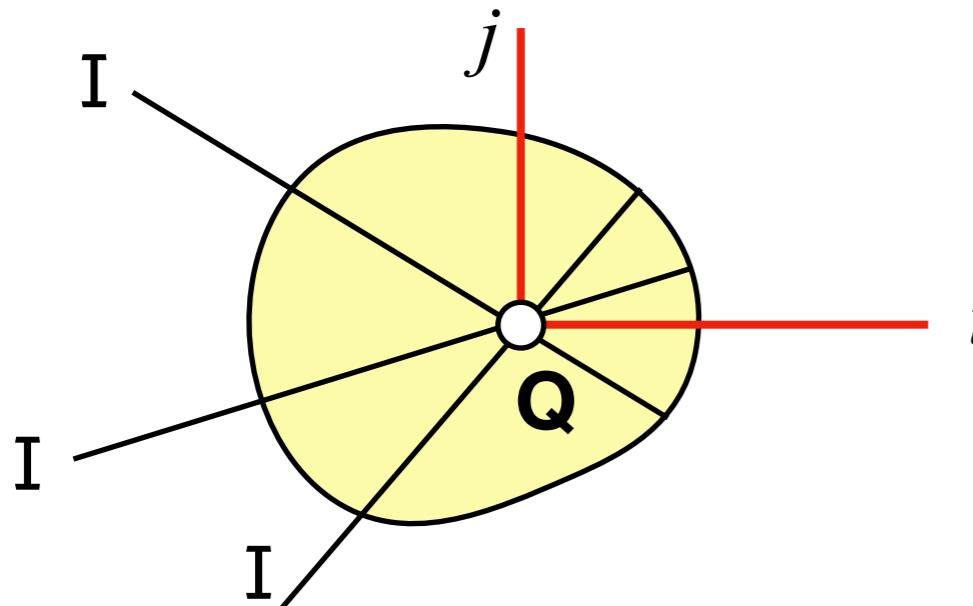
$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

I_{11}, I_{22} ? ← Són iguals!

3 moments en
pla (1,2) iguals \Rightarrow Rotor simètric a **G**
per aquest pla!

$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

Si 3 o més moments d'inèrcia resp. eixos d'un **mateix pla** (i,j) són iguals ...



... el sòlid és **rotor simètric a Q**
per aquest pla

Avaluació quantitativa

[$\mathbb{II(O)}$] ?

qualitatiu
quantitatiu

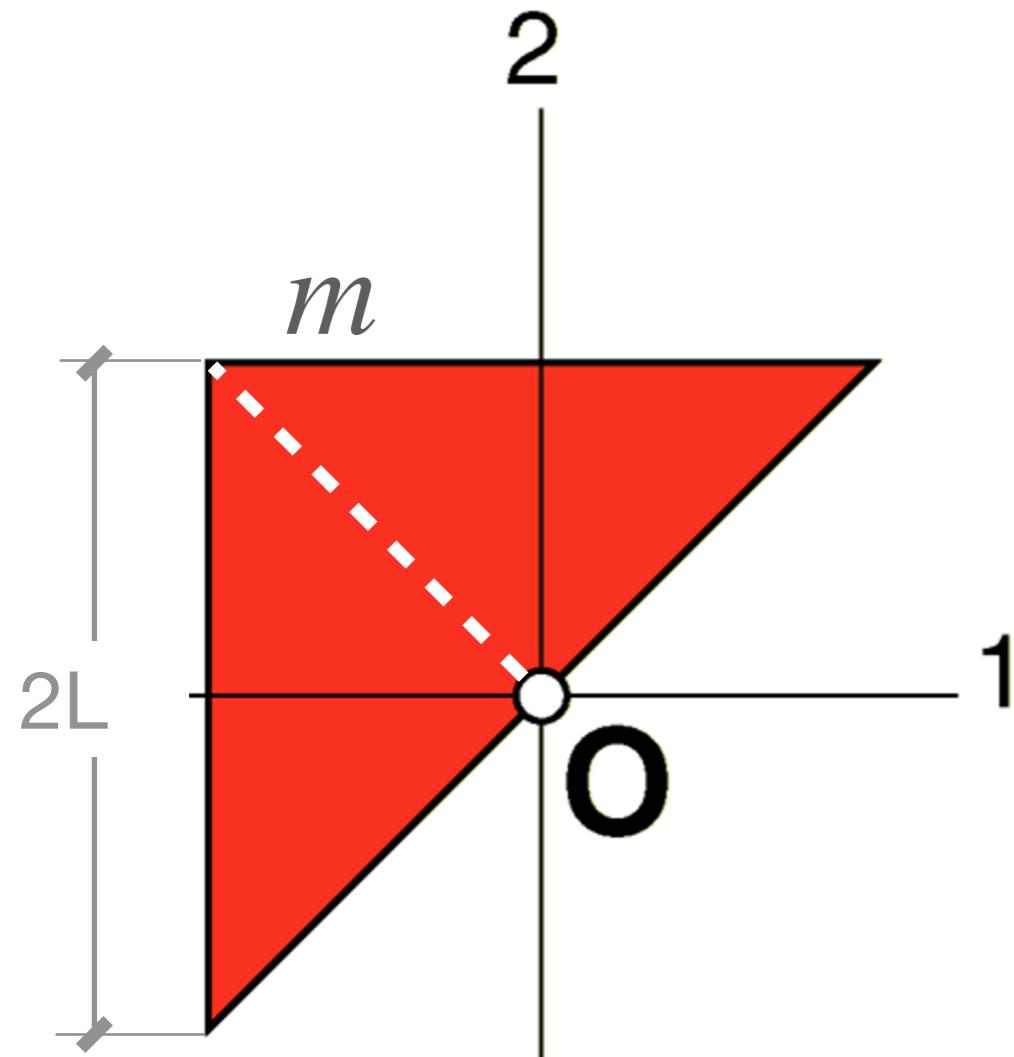


Fig. plana \implies 3 és DPI

I_{12} ? \leftarrow És zero!

$$[\mathbb{II(O)}]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

[$\mathbb{II(O)}$] ?

qualitatiu
quantitatiu

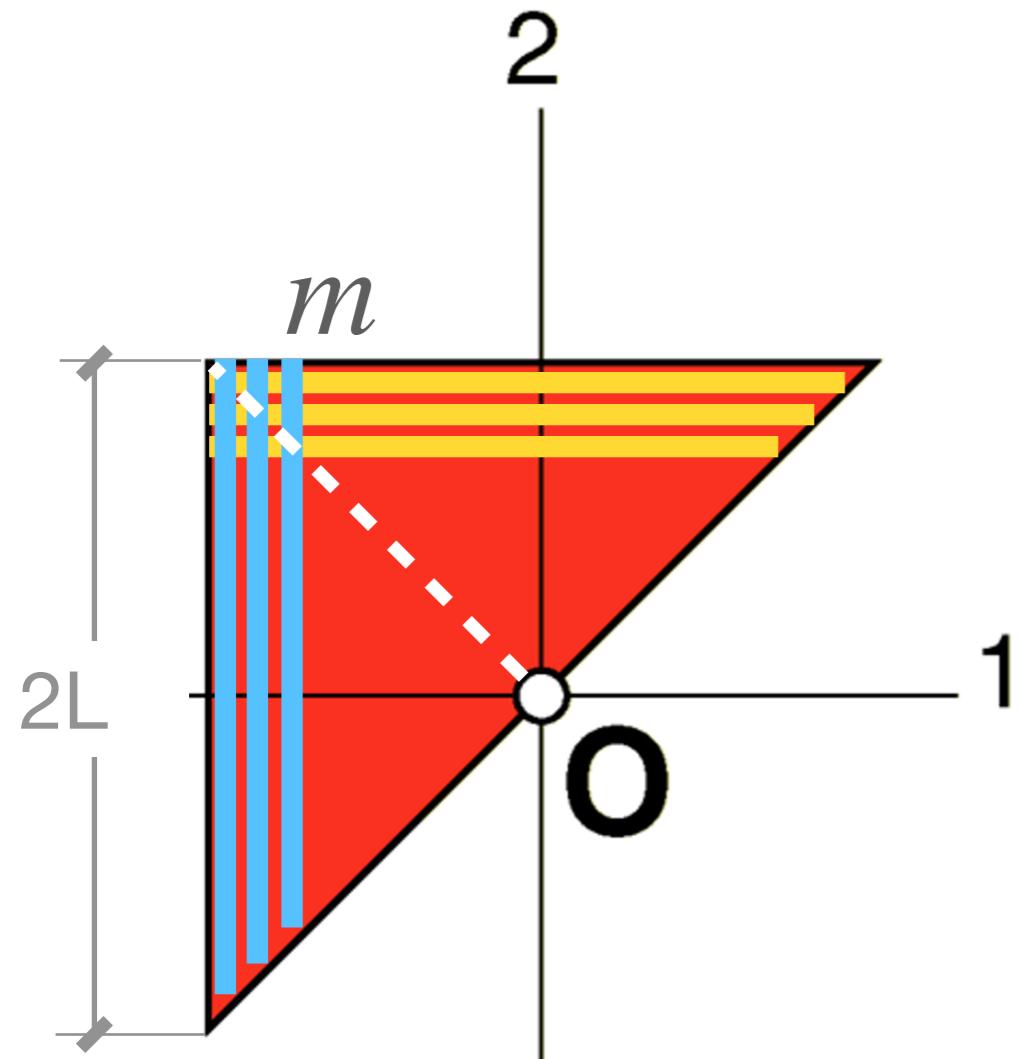


Fig. plana \implies 3 és DPI

I_{12} ? \leftarrow És zero!

$$[\mathbb{II(O)}]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

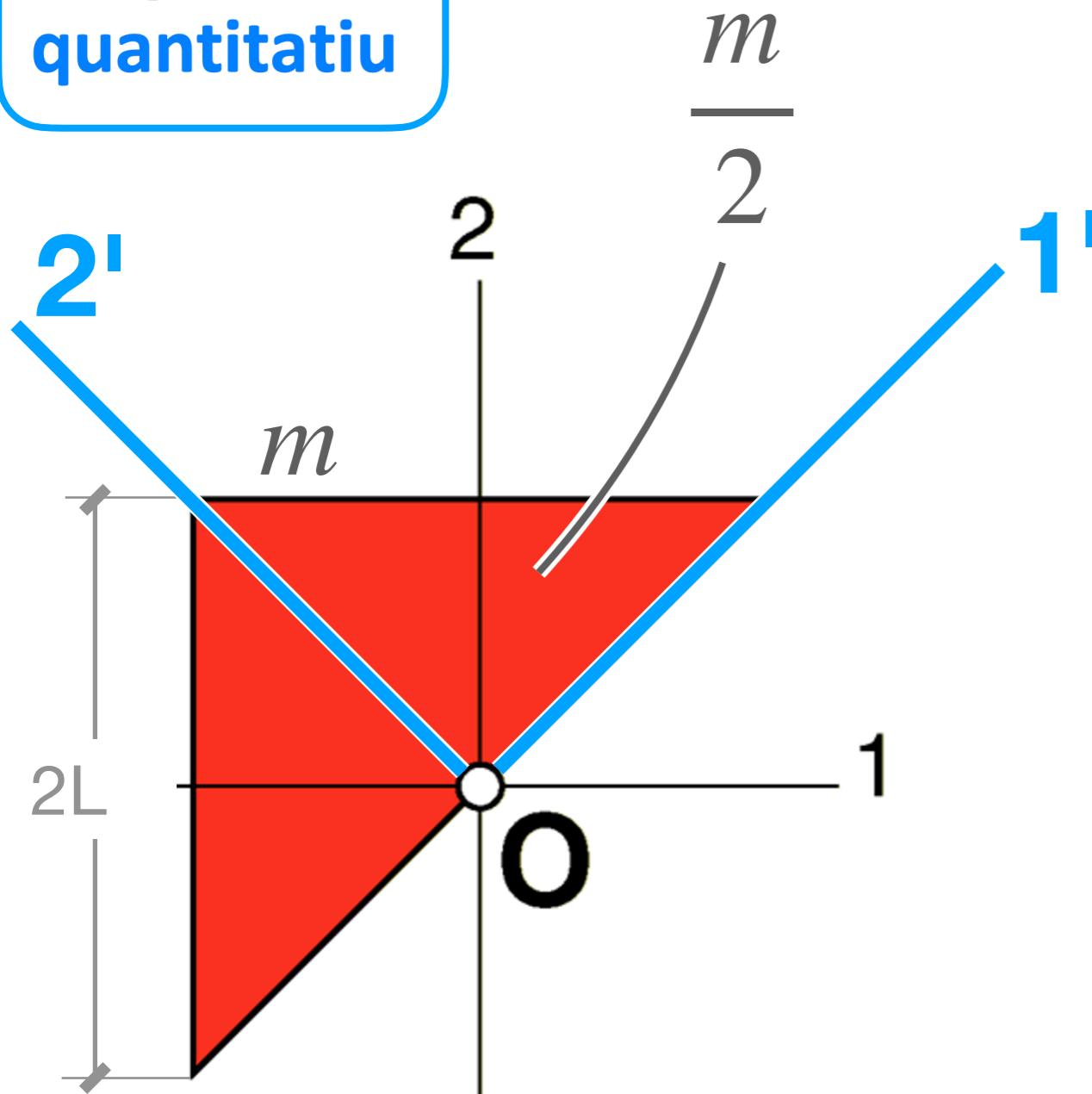
I_{11}, I_{22} ? \leftarrow Són iguals!

$$[\mathbb{II(O)}]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

Rotor simètric a O

[II(O)] ?

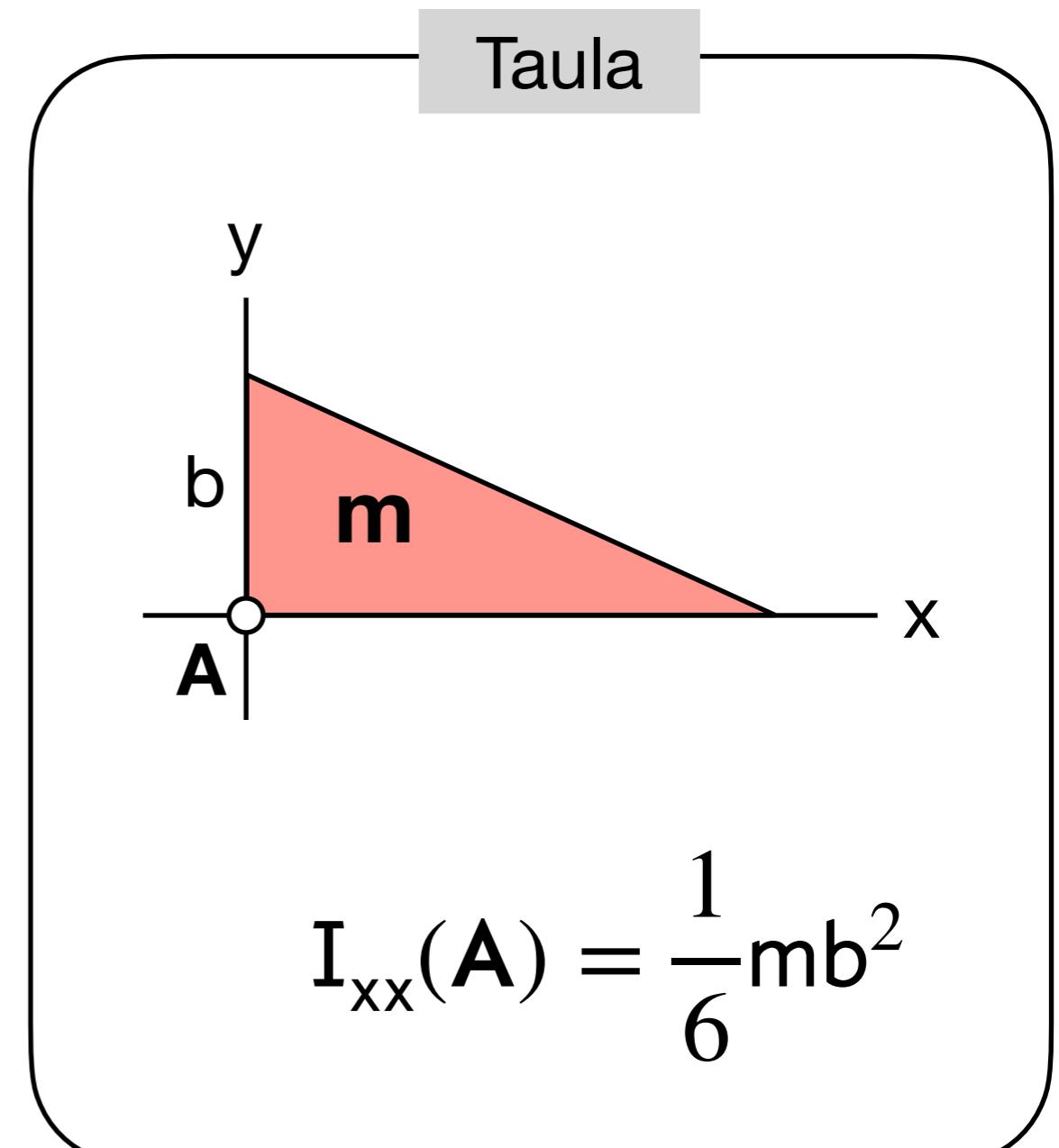
qualitatiu
quantitatiu



$$I = 2 \left[\frac{1}{6} \frac{m}{2} \left(\frac{2L}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \frac{mL^2}{3}$$

$$[II(O)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

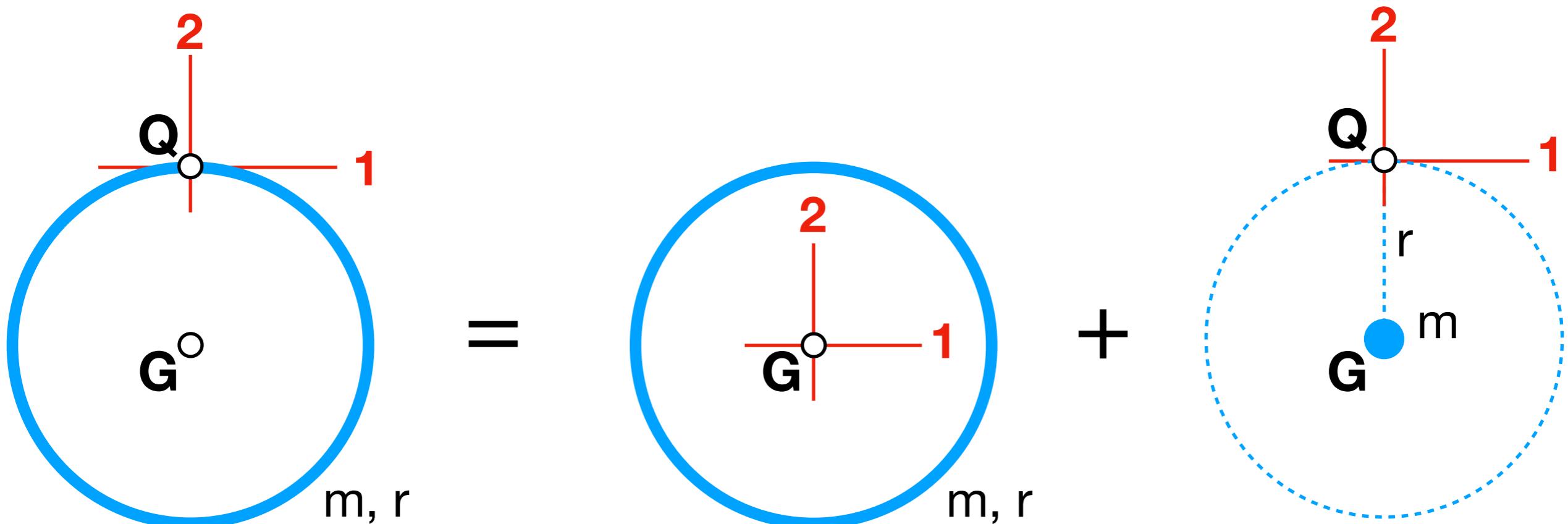
Rotor simètric a O



Teorema de Steiner

$$\underbrace{\mathbb{I}(Q)}_{\text{Tensor a } Q} = \underbrace{\mathbb{I}(G)}_{\text{Tensor a } G} + \underbrace{\mathbb{I}^\oplus(Q)}_{\text{Tensor a } Q \text{ de tota la massa concentrada a } G}$$

Exm: anell homogeni
[$\mathbb{I}(Q)$]_B ?



Tensor a G és fàcil:

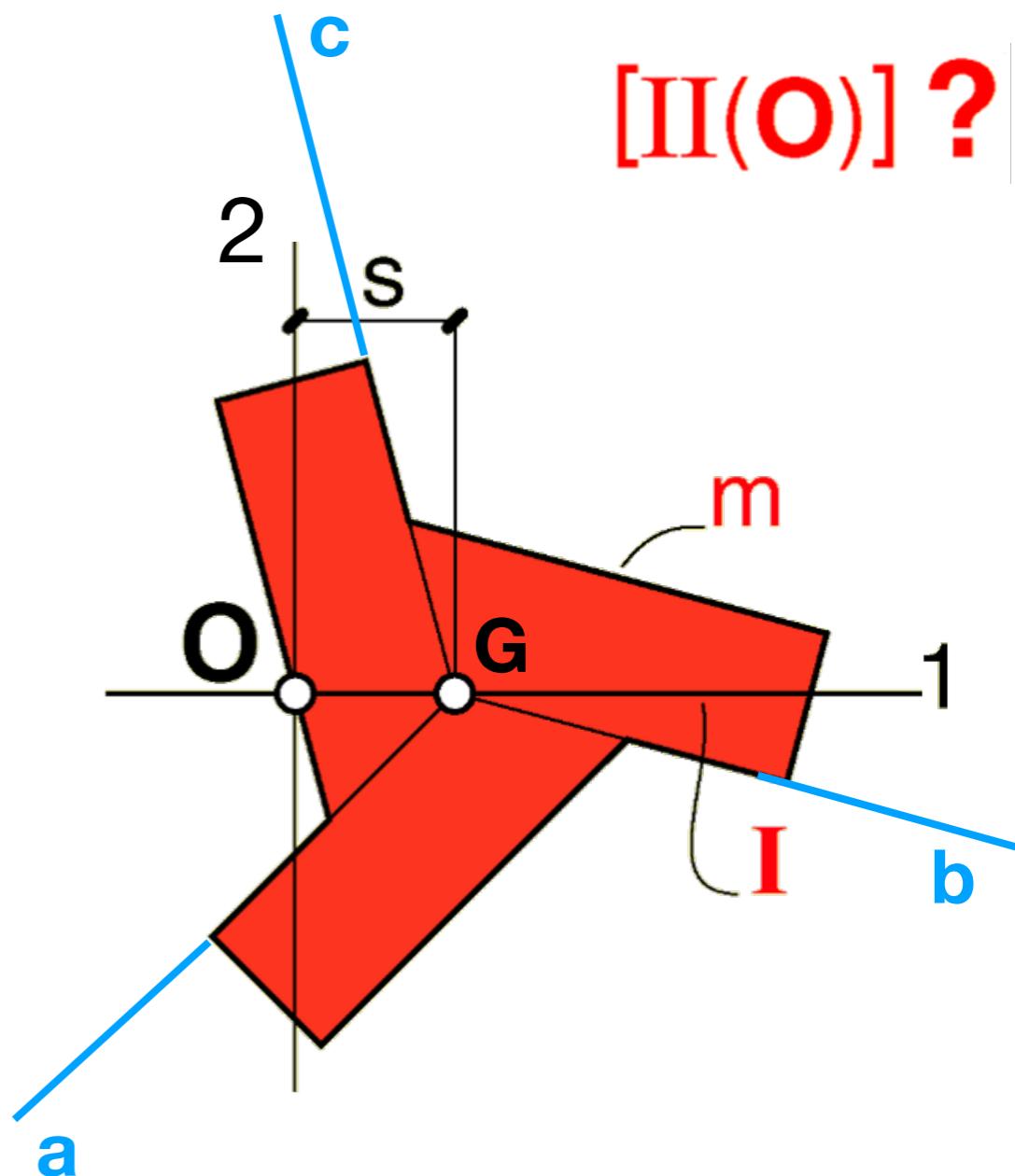
[$\mathbb{I}(O)$] ?

Sòlid pla \Rightarrow 3 és DPI

$$\underbrace{I_{aa} = I_{bb} = I_{cc}}_{\text{rotor simètric per a } G} = I$$

rotor simètric per a G

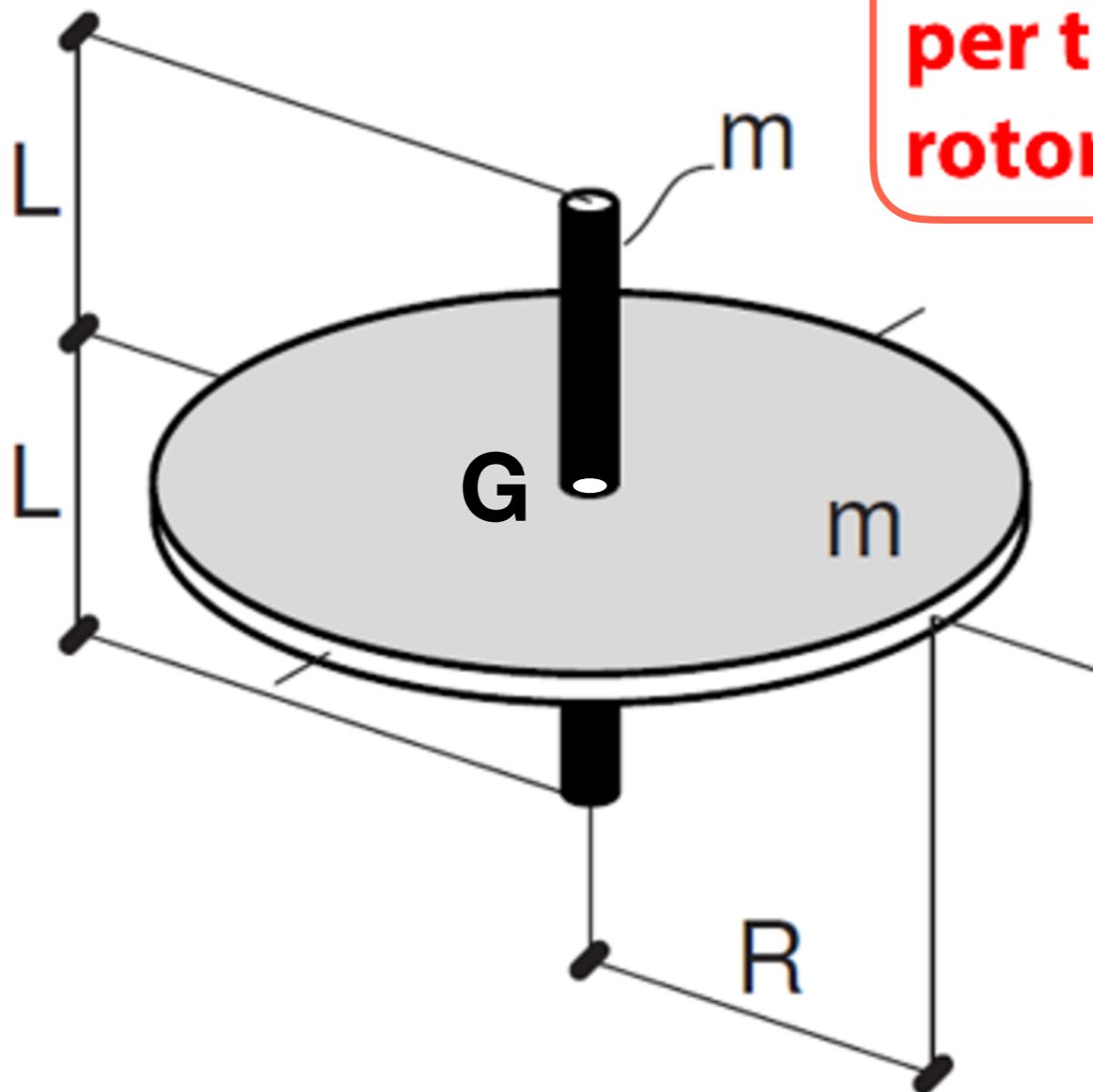
$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$



Canvi a O via Steiner:

$$[\mathbb{I}(O)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & I & 2I \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}(G)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & ms^2 & ms^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}^\oplus(O)}$$

Relació entre L i R
per tal que sigui
rotor esfèric a G ?



II(**O**)?

