7P

Versió 1.3

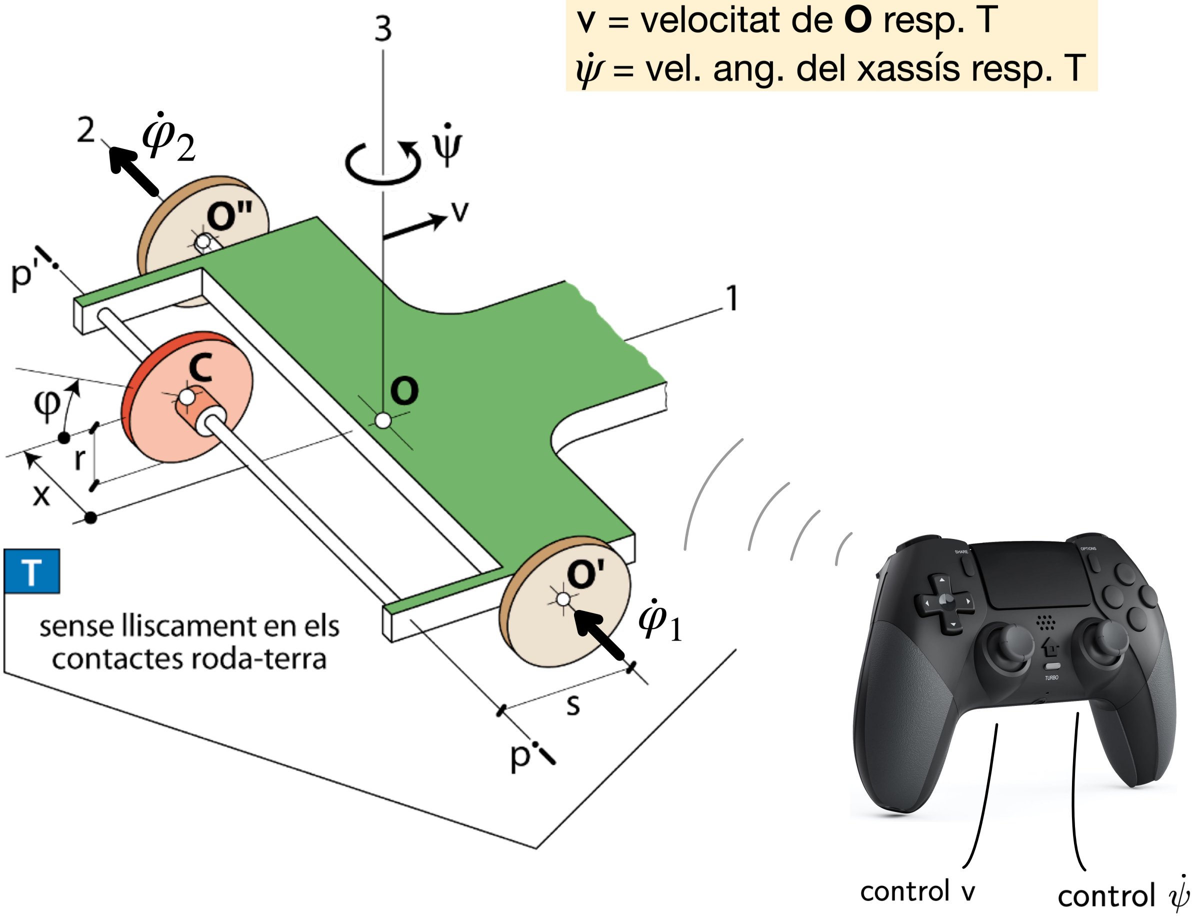
Exercicis i qüestions globals de cinemàtica

Lluís Ros
https://lluisros.github.io/mecanica

Les tres rodes del vehicle no llisquen respecte del terra (T). Les rodes a **O'** i **O''** estan articulades al xassís, mentre que la roda a **C** manté un enllaç cilíndric amb la barra p-p', paral·lela a **O'-O''**.

- Diagrama de moviments relatius?
- GL del sistema?
- Funcions $\dot{\varphi}_1 = f(\mathrm{v}, \dot{\psi})$ i $\dot{\varphi}_2 = f(\mathrm{v}, \dot{\psi})$?
- Funcions $\dot{\mathrm{x}} = f(\mathrm{v}, \dot{\psi})$ i $\dot{\varphi} = f(\mathrm{v}, \dot{\psi})$?

v = velocitat de **O** resp. T
$\dot{\psi}$ = vel. ang. del xassís resp. T



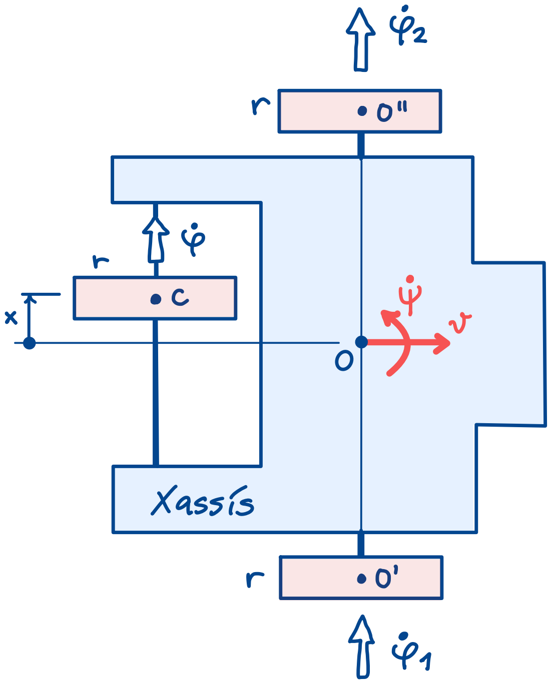
Aplicació a telecontrol del vehicle:

Aquest vehicle es pot utilitzar com a plataforma robòtica mòbil per a transport de càrrega. El vehicle es pot motoritzar de dues maneres:

- Amb dos motors que actuen les rotacions pròpies $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ de les rodes del davant respecte el xassís.
- Amb dos motors que actuen els graus de llibertat $\dot{\mathrm{x}}$ i $\dot{\varphi}$ de la roda del darrere.

Si suposem que v i $\dot{\psi}$ són consignes de velocitat donades per un *joystick*, les funcions que ens demanen permeten convertir v i $\dot{\psi}$ en les comandes de velocitat que hauran de satisfer els motors per assolir v i $\dot{\psi}$.

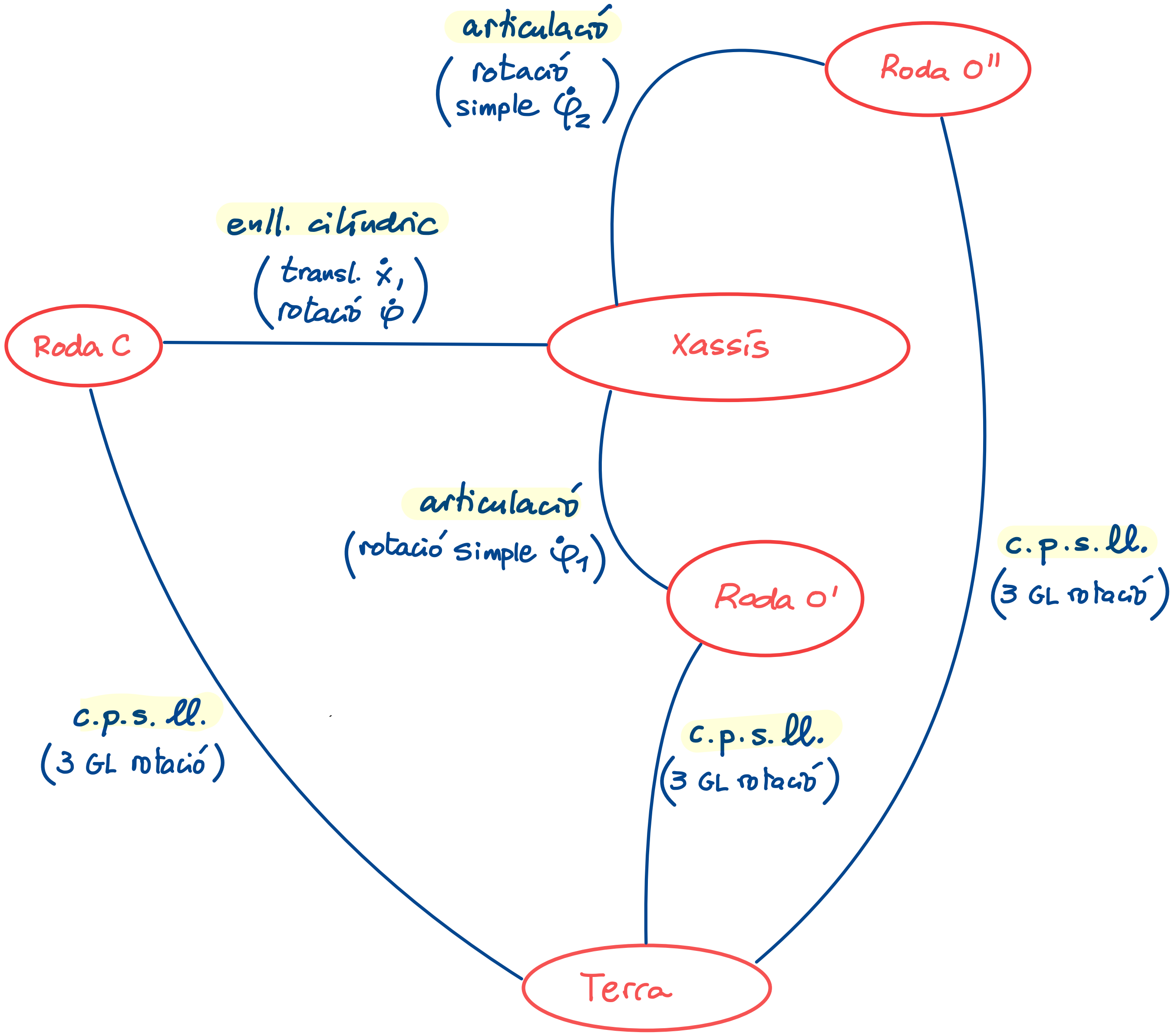
DMR



sòlids

enllaços (GL relatius) d'un sòlid resp. l'altre

c.p.s.ll. = contacte puntual sense lliscament



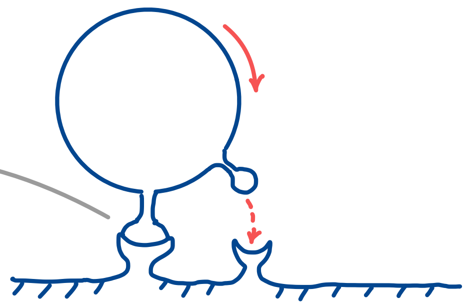
Per què el contacte roda-terra és un c.p.s.ll. ?

És el model que assumim d'acord amb les hipòtesis simplificadores de cinemàtica de vehicles (sessió 6P).

En ser primes les rodes, el contacte roda-terra és només en un punt, i assumim que aquest punt no llisca sobre el terra. Això facilita molt l'anàlisi cinemàtica del vehicle. Proporciona un model prou bo de com serà el moviment del sistema, almenys en primera aproximació.

Sota aquest model, la roda té 3 GL de rotació resp. el terra perquè, en cada instant, pot pivotar lliurement al voltant del punt de contacte. Podem imaginar que, en cada instant, la roda està enllaçada al terra amb una ròtula esfèrica (però és només un recurs mental per pensar-ho):

En cada instant, la roda te 3 GL de rotació resp. T

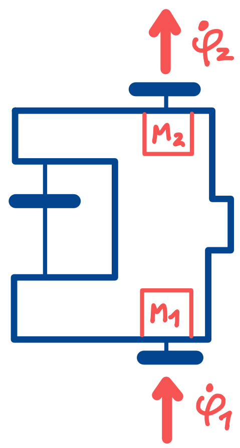


Tot i que, per hipòtesi de treball, el pla de la roda sempre es mantindria vertical, al DMR escrivim "c.p.s.ll. (3 GL rotació)" perquè en cada arc només considerem com és el moviment relatiu entre els dos sòlids enllaçats (sense tenir en compte les altres restriccions cinemàtiques del vehicle).

(*) Terreny pla, roda sense suspensions

Capacitats de moviment del sistema

Abans de comptar els GL del vehicle, entenguem primer com es pot moure. En la seva motorització més habitual s'instal·len dos motors al xassís, M_1 i M_2, que actuen $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ respectivament. La roda del darrere, en canvi, és deixa lliure, i es posa simplement per mantenir l'horitzontalitat del xassís. Com veurem ben aviat, aquesta roda s'adapta al moviment del xassís i, per tant, podem oblidar que hi és (almenys inicialment) i centrar-nos en analitzar com es pot moure el xassís quan imposem uns valors $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ amb els motors.



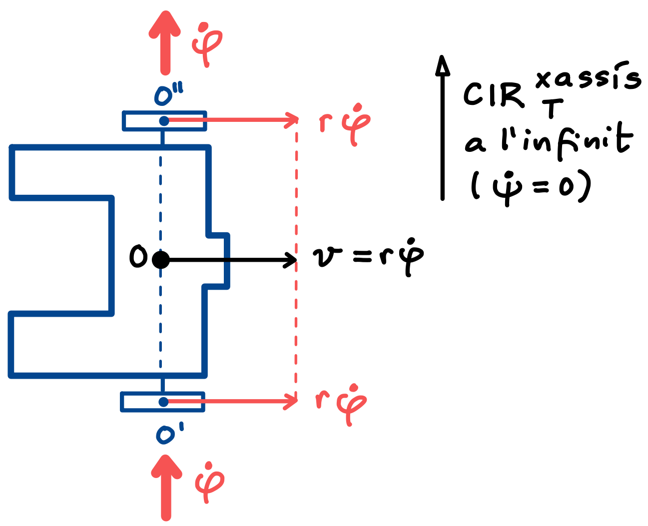
Fem-ho:

- Si $\bar{\dot{\varphi}}_1 = \bar{\dot{\varphi}}_2 = (\uparrow \dot{\varphi})$, els centres O' i O" de les rodes tindran la mateixa velocitat $(\rightarrow r\dot{\varphi})$ tots dos. Com que aquests punts són també del xassís, tindrem

$$\bar{v}_T(O'_{xassís}) = (\rightarrow r\dot{\varphi})$$

$$v_T(O''_{xassís}) = (\rightarrow r\dot{\varphi})$$

fent que el xassís es desplaci cap endavant sense girar $(\dot{\psi} = 0)$.



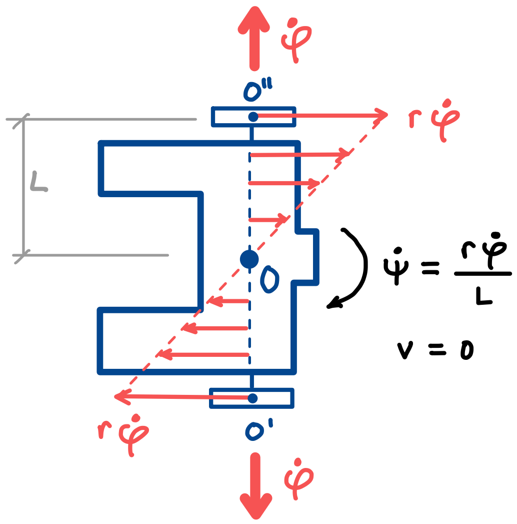
Tots els punts del xassís, i en particular O, tindran la mateixa velocitat $v = r\dot{\varphi}$ cap endavant.

▶ Si $\bar{\dot\varphi}_1 = (\Downarrow \dot\varphi)$ i $\bar{\dot\varphi}_2 = (\Uparrow \dot\varphi)$,

tindrem

$$\bar{v}_T(O') = (\leftarrow r\dot\varphi),$$
$$\bar{v}_T(O'') = (\rightarrow r\dot\varphi)$$

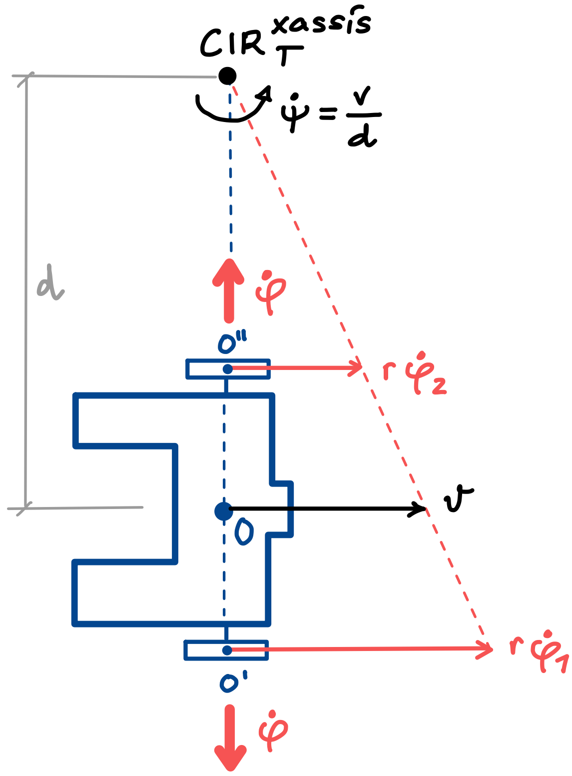
i la distribució triangular de velocitats de la figura.



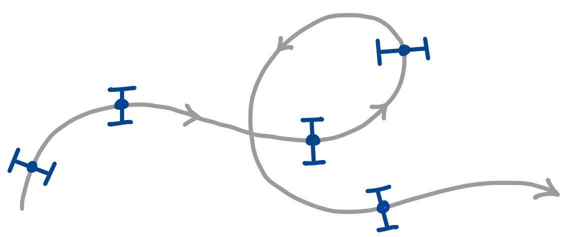
Clarament, $CIR_T^{xassís} = O$, $v = 0$, i el xassís girarà al voltant de O amb velocitat angular $\bar{\dot\psi} = (\otimes \frac{r\dot\varphi}{L})$ resp. T.

▶ En una situació general, $\dot\varphi_1$ i $\dot\varphi_2$ seran diferents, però el $CIR_T^{xassís}$ quedarà totalment determinat per la distribució lineal de velocitats al llarg de la recta O'O''. En particular, v serà la que toqui d'acord amb aquesta distribució i tindrem

$$\dot\psi = \frac{v}{d}$$



Dit d'altra manera: variant $\dot\varphi_1$ i $\dot\varphi_2$ podrem fer que v i $\dot\psi$ siguin qualssevol, i el punt O podrà descriure una trajectòria arbitrària sobre el pla



O pot descriure trajectòries arbitràries

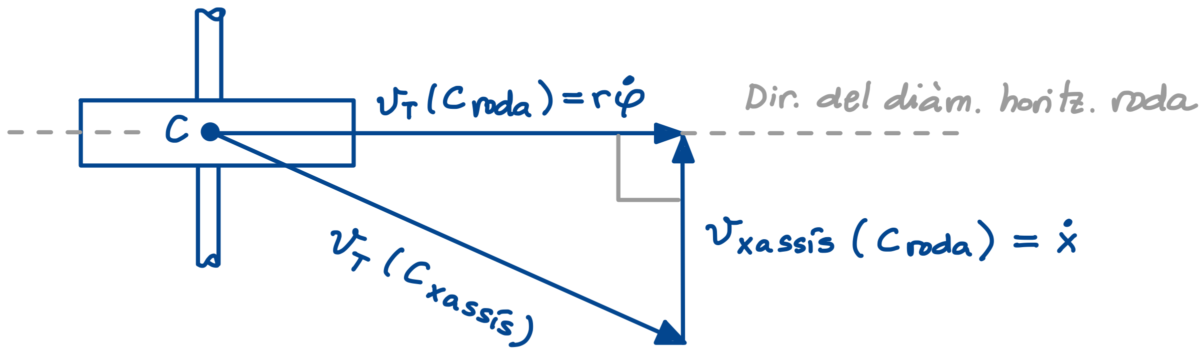
Comportament de la roda del darrere

A primer cop d'ull podria semblar que aquesta roda, encara que sigui passiva, pot restringir les velocitats del xassís, però és fàcil veure que no és així. Primer de tot cal entendre que l'enllaç cilíndric que hi ha entre aquesta roda i el xassís fa que C_{roda} no sigui fix al xassís ! En l'instant dibuixat C_{roda} i $C_{xassís}$ coincideixen, però poden tenir velocitats diferents, i un picosegon més tard es poden haver separat.

D'una banda, $\bar{v}_T(C_{roda}) = (\rightarrow r\dot{\varphi})$ per cinemàtica de roda. De l'altra, aplicant composició de moviments amb $AB = T$ i $REL = \text{xassís}$ tenim

$$\underbrace{\overbrace{\bar{v}_T(C_{roda})}^{\bar{v}_{AB}(C_{roda})}}_{(\rightarrow r\dot{\varphi})} = \underbrace{\overbrace{\bar{v}_{xassís}(C_{roda})}^{\bar{v}_{REL}(C_{roda})}}_{\text{La que toqui segons els valors } \dot{\varphi}_1,\, \dot{\varphi}_2} + \underbrace{\overbrace{\bar{v}_T(C_{xassís})}^{\bar{v}_{ar}(C_{roda})}}_{(\uparrow \dot{x})}$$

i es complirà el triangle de velocitats



Del triangle veiem que tant és el que valgui $\bar{v}_T(C_{xassís})$. Com que C_{roda} es pot desplaçar resp. el xassís amb $\uparrow \dot{x}$, $\dot{x}$ prendrà el valor que calgui per assegurar que la suma

$$\bar{v}_T(C_{xassís}) + \bar{v}_{xassís}(C_{roda})$$

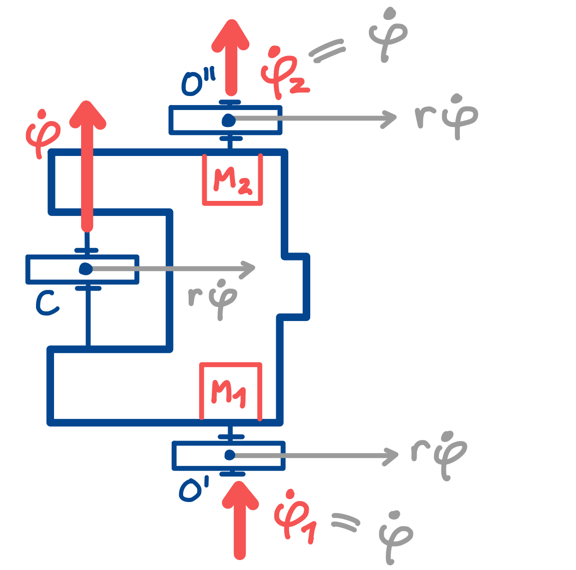
és en dir. → tal i com imposa la cinemàtica de roda. El valor $\dot{\varphi}$ també serà el que calgui per assegurar que $(\rightarrow r\dot{\varphi})$ coincideix amb la projecció de $\bar{v}_T(C_{xassís})$ sobre la dir del diàmetre horitz. de la roda.

El GL relatiu $\dot{x}$ és realment necessari?

Els arguments anteriors són suficients per a veure que $\dot{x}$ és un GL relatiu necessari si volem que la roda posterior s'adapti al moviment del xassís imposat per $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$. Però si tot i així no ho veiem, fixem-nos que si aturem $\dot{x}$, $x = ct$, i l'enllaç cilíndric passa a comportar-se com una articulació. Això fa que C_{roda} i $C_{xassís}$ coincideixin en cada instant, i per tant

$$\bar{v}_T(C_{xassís}) = (\rightarrow r\dot{\varphi})$$

Com que C, O' i O'' només es podran moure en dir →, el xassís només es podrà traslladar en aquesta dir. (CIR $^{xassís}_{T}$ a l'infinit i les velocitats de tots els punts del xassís hauran de ser iguals).



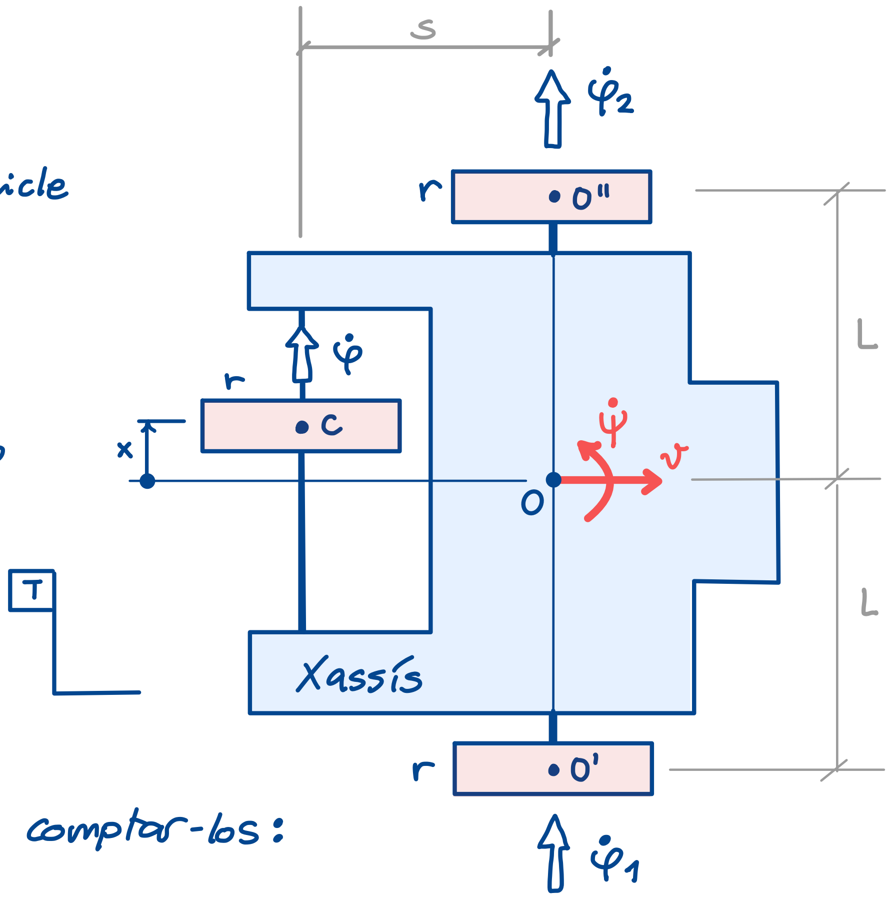
Amb $\dot{x}$ aturat, el vehicle només es pot moure en dir. ↔

<u>En conclusió</u>: el GL $\uparrow x$ és necessari, altrament el xassís només es podria traslladar en direcció longitudinal.

GL sistema

Dels arguments d'abans ja es veu que el vehicle té 2 GL!

Però justifiquem-ho



2 maneres de comptar-los:

Aturant $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$

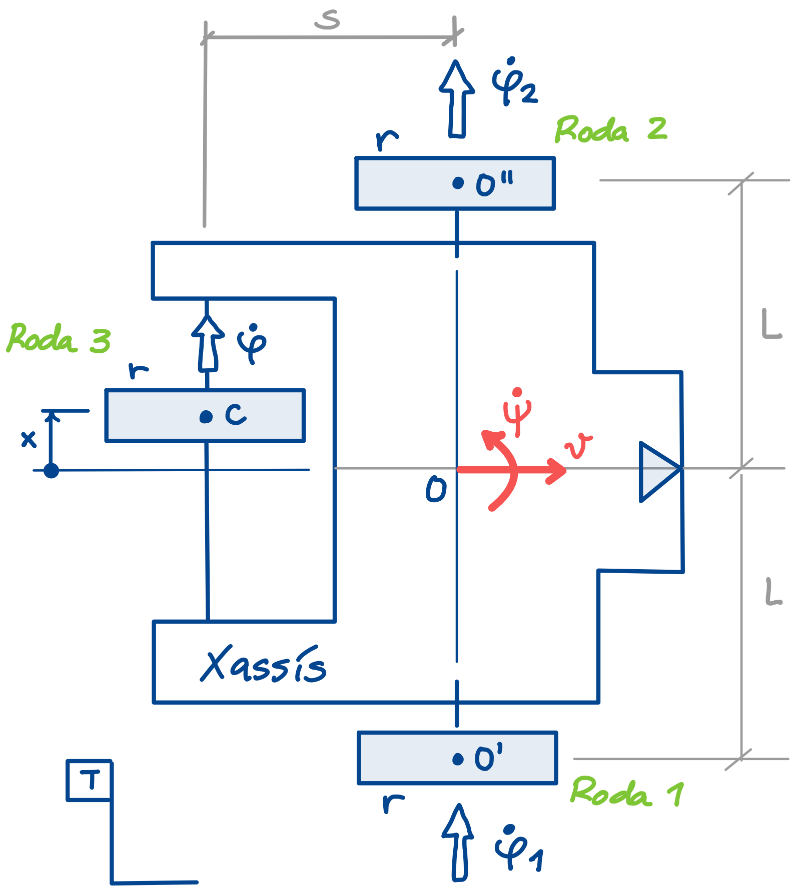
Si aturo $\dot{\varphi}_1$, $\bar{v}_T(O') = \bar{0} \Rightarrow CIR^{xassís}_T = O' \Rightarrow$ xassís pot girar avd O' amb 1 GL encara. Si ara bloquejo $\dot{\varphi}_2$, $\bar{v}_T(O'') = \bar{0}$ i el xassís queda completament aturat. La roda del darrere tampoc es pot moure pq no llisca en el contacte amb T. Ergo el sist. té 2GL (que podem associar a $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$).

Aturant $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$

Si aturo $\dot{x}$, C_{roda} passa a ser un punt del xassís també, amb vel. $\rightarrow$. Els punts O' i O'' són del xassís ja, i tenen vel. $\rightarrow$ també. Ergo $\bar{\Omega}^{xassís}_T = \bar{0}$ i $CIR^{xassís}_T$ és a l'∞. El vehicle es pot moure <u>només</u> en dir. $\rightarrow$. Si ara aturo $\dot{\varphi}$, tot queda aturat. Per tant el vehicle té 2 GL, que podem associar a $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$.

$\dot\varphi_1$ i $\dot\varphi_2$ en funció de $(v, \dot\psi)$

Suposem que φ_1 i φ_2 són actuats amb motors ($\dot x$ i $\dot\varphi$ no actuats) i que volem $\dot\varphi_1$ i $\dot\varphi_2$ en funció de $(v, \dot\psi)$:



Via cinemàt. de roda

$$\bar v_T(O') = (\rightarrow r\dot\varphi_1) \quad (\mathrm{I})$$

$$\bar v_T(O'') = (\rightarrow r\dot\varphi_2) \quad (\mathrm{II})$$

Via CSR xassís

$$\bar v_T(O') = \bar v(O) + \bar\Omega_T^{xas} \times \overline{OO'} =$$

$$= (\rightarrow v) + (\odot\,\dot\psi) \times (\downarrow L) = [\rightarrow (v + L\dot\psi)] \quad (\mathrm{I}')$$

$$\bar v_T(O'') = (\rightarrow v) + (\odot\,\dot\psi) \times (\uparrow L) = [\rightarrow (v - L\dot\psi)] \quad (\mathrm{II}')$$

Igualant $\mathrm{I} = \mathrm{I}'$, $\mathrm{II} = \mathrm{II}'$

$$r\dot\varphi_1 = v + L\dot\psi \quad \Rightarrow \quad \dot\varphi_1 = \frac{1}{r}(v + L\dot\psi)$$

$$r\dot\varphi_2 = v - L\dot\psi \quad \Rightarrow \quad \dot\varphi_2 = \frac{1}{r}(v - L\dot\psi)$$

Aplicació a control

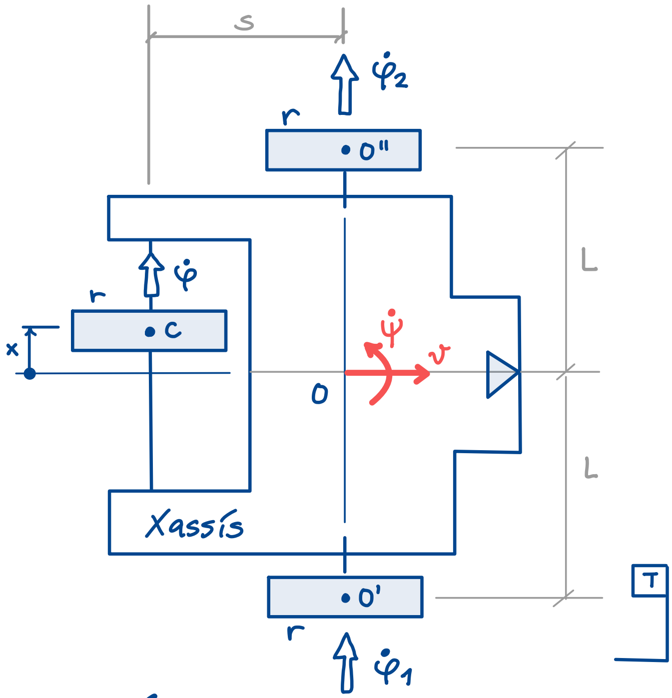
aquestes funcions permeten calcular les velocitats $\dot\varphi_1$ i $\dot\varphi_2$ a les que hauran de girar els motors per satisfer $(v, \dot\psi)$.

$\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ en funció de v i $\dot{\psi}$

Ara suposem que actuem $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ (deixant $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ lliures) i que, per tant, volem $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ en funció de $(v, \dot{\psi})$:

Veient C com de la roda:

$$\bar{v}_T(C_{roda}) = (\rightarrow r\dot{\varphi}) \qquad (\mathrm{III})$$



Intentem ara calcular $\bar{v}_T(C_{roda})$ a partir de v i $\dot{\psi}$ per igualar amb (I):

> Ara no podem aplicar CSR des de O directament perquè $C_{roda} \neq C_{xassís}$!

Però podem fer comp. mov. amb $\left| \begin{array}{l} REL = xassís \\ AB = T \end{array} \right.$

$$\bar{v}_T(C_{roda}) = \bar{v}_{REL}(C_{roda}) + \bar{v}_{ar}(C_{roda}) = \bar{v}_{REL}(C_{roda}) + \overbrace{\bar{v}_T(O) + \bar{\Omega}_T^{xas} \times \overline{OC}}^{ar} =$$

$$= (\uparrow \dot{x}) + (\rightarrow v) + \underbrace{(\odot \dot{\psi}) \times \left[(\leftarrow s) + (\uparrow x) \right]}_{(\downarrow \dot{\psi} s) + (\leftarrow \dot{\psi} x)} =$$

$$= \left[\uparrow (\dot{x} - \dot{\psi} s) \right] + \left[\rightarrow (v - \dot{\psi} x) \right] \qquad (\mathrm{III}')$$

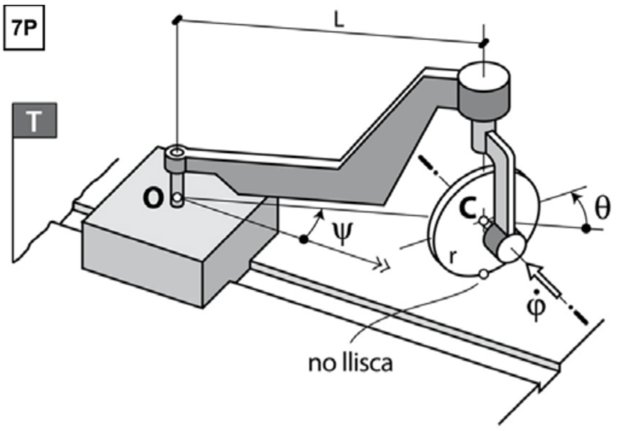
$(\mathrm{III}) = (\mathrm{III}')$:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \dot{x} - \dot{\psi} s \\ r\dot{\varphi} = v - \dot{\psi} x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \; \dot{x} = \dot{\psi} s \\ \longrightarrow \; \dot{\varphi} = \frac{1}{r}(v - \dot{\psi} x) \end{array}$$

Aplicació a control

Si piloto amb joystick que dóna comandes de v i $\dot{\psi}$, aquestes funcions proporcionen les velocitats $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ que hauran de satisfer els motors.

7P

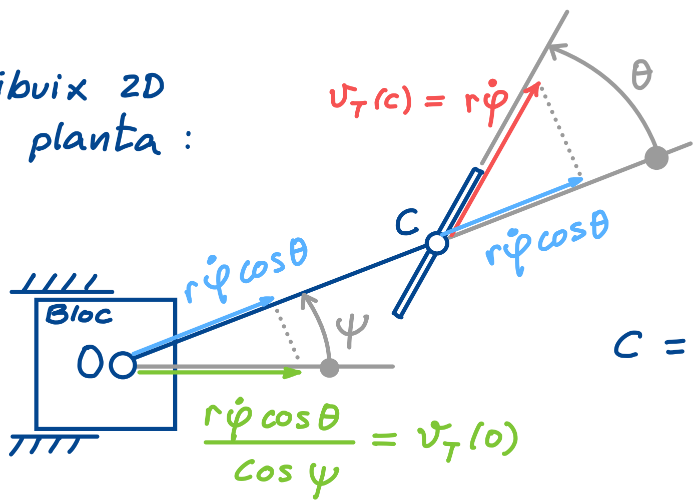


La roda no llisca al damunt del terra (T), i està articulada a un suport vertical. El suport està articulat a un braç, que està articulat a un bloc. El bloc pot lliscar dins la guia rectilínia fixa a terra.

Calcula $|\bar{v}_T(\mathbf{O})|$ en funció de θ i de $\dot\varphi$ (,ψ).

Es resol ràpidament aplicant equiprojectivitat :

Dibuix 2D en planta :



C = centre roda, és també un punt del xassís !

Passos :

1. Per cinemàtica de roda $\bar{v}_T(C) = (\nearrow r\dot\varphi)$.
2. La velocitat de O resp. T ha de ser en dir $\rightarrow$ degut a l'enllaç prismàtic bloc - terra
3. Les projeccions (blaves) de $\bar{v}_T(C)$ i $\bar{v}_T(O)$ sobre la recta OC han de ser iguals per equiprojectivitat (altrament O i C s'allunyarien o s'apropariem).
4. De la projecció blava de $\bar{v}_T(C)$ deduim la projecció blava de $\bar{v}_T(O)$, i d'aquesta darrera deduim $\bar{v}_T(O) = \left(\rightarrow \dfrac{r\dot\varphi\cos\theta}{\cos\psi}\right)$

Nota 1: Fixem-nos que l'anterior sistema té 2 GL. Hi ha vàries maneres de comptar-los. Veiem-ne dues:

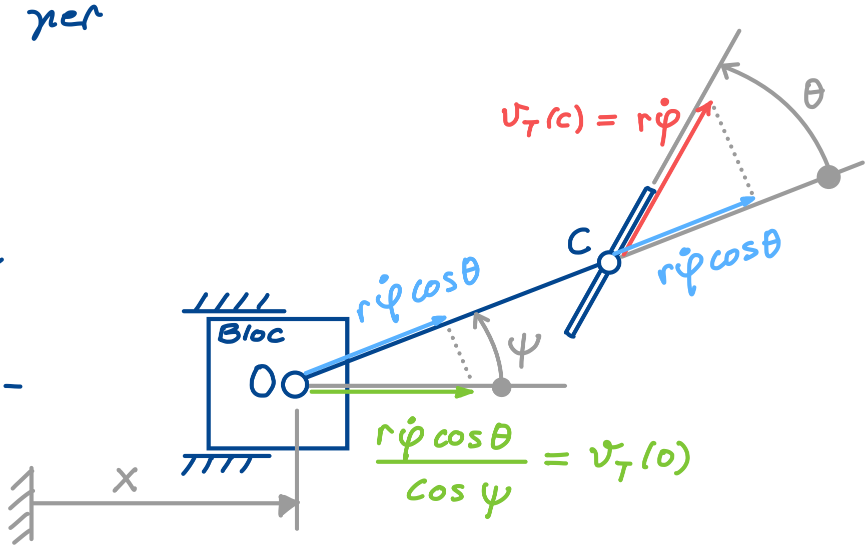
- Si aturem $\dot{\theta}$, el punt C encara es pot moure en la direcció del diàmetre horitzontal de la roda, fent desplaçar O al llarg de la dir. de la guia. Si ara aturem $\dot{\varphi}$, tot queda aturat. Per tant, el sistema té 2 GL que es poden descriure amb

$$\dot{\theta},\ \dot{\varphi}$$

- Si aturem $v_T(O)$, $\dot{\psi}=0$ necessàriament, ja que, si no fos així, la rotació $\dot{\psi}$ induiria una $\bar{v}_T(C)$ perpendicular a la direcció OC que seria incompatible amb la velocitat $\bar{v}_T(C) = (\nearrow R\dot{\varphi})$ dictaminada per la cinemàtica de roda. Ara, en ser $\dot{\psi}=0$, tenim $v_T(C)=0 \Rightarrow r\dot{\varphi}=0 \Rightarrow \dot{\varphi}=0$. Ja només queda 1 rotació per aturar, que és $\dot{\theta}$. L'aturem i ja tot el sistema queda aturat. Com que només hem aturat $v_T(O)$ i $\dot{\theta}$, el sistema té 2 GL, que es poden descriure per

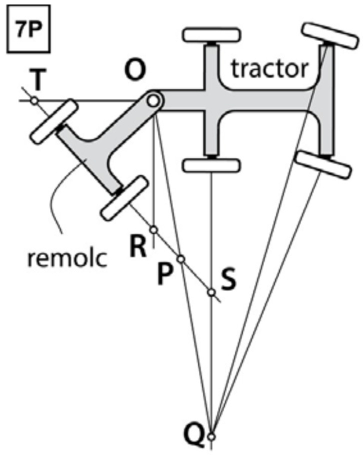
$$\underbrace{\dot{x}}_{=\,v_T(O)},\ \dot{\theta}$$

essent x una nova coordenada que ens posiciona O horitzontalment.



Nota 2: $\dot{\varphi}$ i $\dot{\psi}$ no són independents l'una de l'altra. Si $\dot{\varphi}>0$, C es mou en la dir. del diàmetre horitz. de la roda, el punt O vindrà cap a la dreta, i ψ augmentarà ($\dot{\psi}>0$).

7P

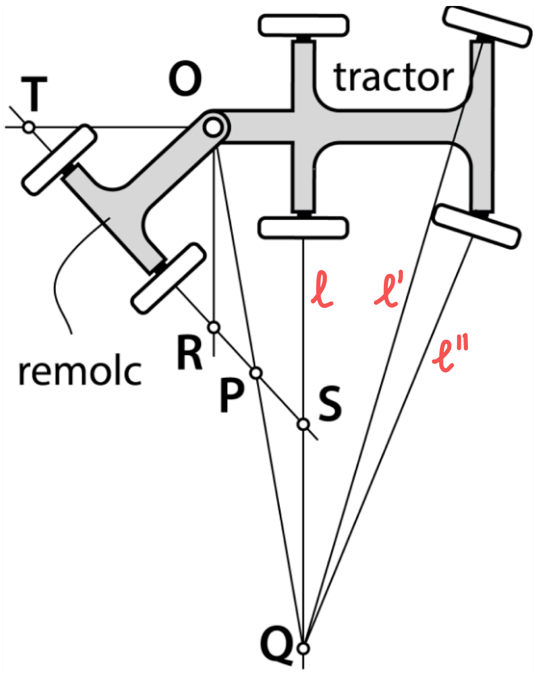


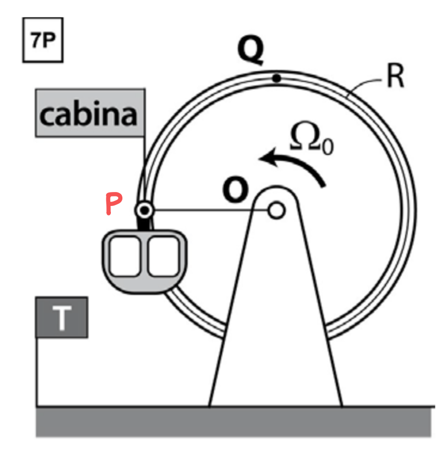
Les rodes del tractor i el remolc són identiques i no llisquen al damunt del terra (T). Determina el $\mathbf{CIR}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{remolc}}$.

$CIR_T^{tractor} = \ell \cap \ell' \cap \ell''$

$\bar{v}_T(O)$ té dir. $\perp$ a recta OQ

$CIR_T^{remolc} = \begin{pmatrix} \text{recta} \\ \text{eix} \\ \text{remolc} \end{pmatrix} \cap (\text{recta } OQ)$





L'anella de la sínia gira amb velocitat Ω_0 constant respecte del terra (T). La cabina està articulada a l'anella. El punt **Q** és fix a l'anella. Calcula $\bar{a}_{cabina}(\mathbf{Q})$.

Fem comp. movim. amb $\left| \begin{array}{l} AB = T \\ Rel = Cabina \end{array} \right.$

$$\boxed{\bar{a}_{REL}(Q)} = \bar{a}_{AB}(Q) - \bar{a}_{ar}(Q) - \underbrace{\bar{a}_{cor}(Q)}_{\bar{0} \text{ perquè } \bar{\Omega}^{REL}_{AB} = 0} =$$

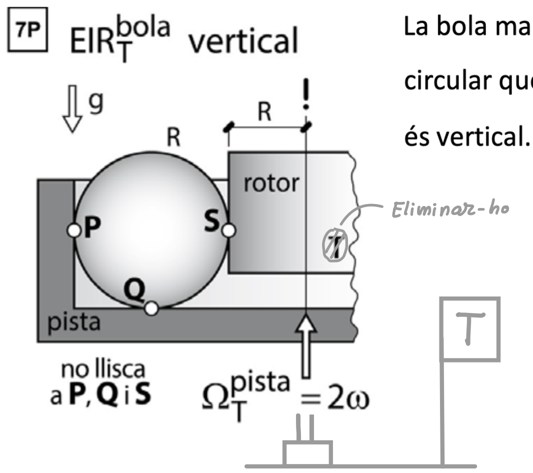
$$= (\downarrow \Omega_0^2 R) + (\rightarrow \Omega_0^2 R) = \boxed{(\swarrow \Omega_0^2 R\sqrt{2})}$$

$$\bar{a}_{AB}(Q) = (\downarrow \Omega_0^2 R)$$

$$\bar{a}_{ar}(Q) = \bar{a}_{AB}(Q \in Cabina) = \bar{a}_{AB}(P) = (\rightarrow \Omega_0^2 R)$$

$\bar{\Omega}^{cabina}_{T} = \bar{0} \Rightarrow$ la cabina es trasllada (fa una translació circular). Tots els seus punts tenen igual vel. i accel. resp. T $\Rightarrow \bar{a}_{AB}(Q_{cabina}) = \bar{a}_{AB}(P) = (\rightarrow \Omega_0^2 R)$

<u>Obs</u>: Respecte T, Q_{cabina} desciu una trajectòria circular igual a la de P, però desplaçada amb el vector $\overline{PQ}$. Sabeu veure on es $CC_T(Q_{cabina})$?



La bola manté contacte sense lliscar amb un rotor i una pista circular que gira amb 2ω respecte del terra (T). L'EIRL$_T^{bola}$ és vertical. Calcula $\bar{\Omega}_T^{rotor}$.

Solució 1: Via determinar EI_T^{Bola}

Adonem-nos que, com que P i Q no llisquen, P_{Bola} i Q_{Bola} tindran la mateixa velocitat que P_{pista} i Q_{pista}:

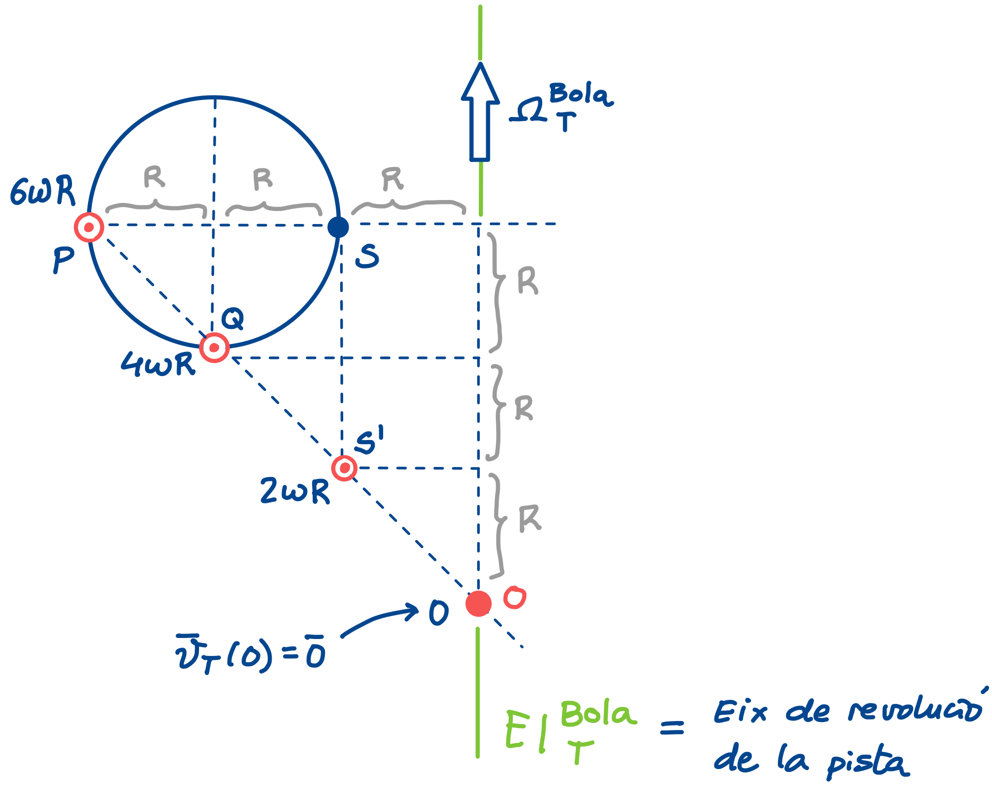
$$\bar{v}_T(P_{Bola}) = \bar{v}_T(P_{pista}) = (\odot\, 2\omega \cdot 3R) = (\odot\, 6\omega R)$$
$$\bar{v}_T(Q_{Bola}) = \bar{v}_T(Q_{pista}) = (\odot\, 2\omega \cdot 2R) = (\odot\, 4\omega R)$$

Com que EI_T^{Bola} ha de ser vertical, necessàriament serà en el pla del dibuix i $\bar{v}_{EI} = \bar{0}$ (*), altrament les velocitats de P i Q no serien ⊥ al pla del dibuix.

Ara, al llarg de la recta PQ hi ha d'haver una distribució lineal de velocitats, proporcionals a la distància a EI_T^{Bola}. Per tant, sobre aquesta recta, a la dreta de Q, hi ha d'haver un punt O de la bola amb velocitat nul·la resp. T.

El dibuix de la pàg. seg. fa palès que O ha de ser la intersecció de la recta PQ amb l'eix de revolució de la pista.

(*) La vel. de lliscament al llarg de l'eix, $\bar{v}_{EI}$, serà zero.



Amb aquesta informació deduïm ràpidament que

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = \left(\Uparrow \frac{4\omega R}{2R}\right) = \left(\Uparrow 2\omega\right)$$

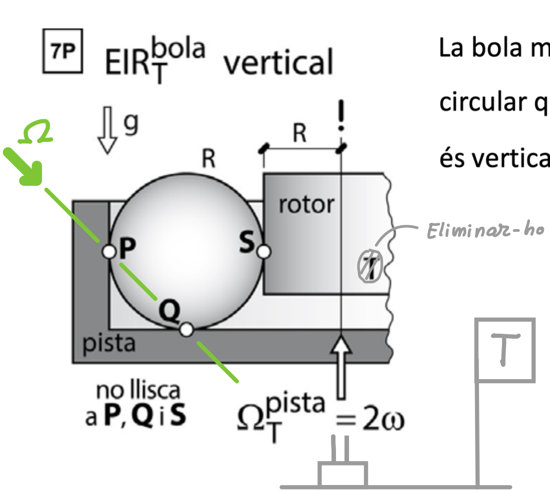
i, per tant,

$$\bar{v}_T(S_{Bola}) = \bar{v}_T(S_{Rotor}) = \left(\Uparrow 2\omega\right) \times \left(\leftarrow R\right) = \left(\odot\, 2\omega R\right)^{(*)}$$

Clarament, per induir aquesta velocitat sobre S, el rotor ha de girar amb

$$\boxed{\bar{\Omega}_T^{Rotor} = \left(\Uparrow 2\omega\right)}$$

(*) Aquesta velocitat es podia anticipar poc abans observant la de S' ($\bar{v}_T(S) = \bar{v}_T(S')$ perquè S i S' són sobre una recta // a EI_T^{Bola}).



La bola manté contacte sense lliscar amb un rotor i una pista circular que gira amb 2ω respecte del terra (T). L'$EIRL_T^{bola}$ és vertical. Calcula $\bar{\Omega}_T^{rotor}$.

Solució 2, via composició de moviments

$$EI^{Bola}_{Pista} = \text{recta } PQ \Rightarrow \underbrace{\bar\Omega^{Bola}_{Pista} = (\searrow \Omega)}_{\text{Ha de tenir aquesta forma, amb } \Omega \text{ per determinar}}$$

Com que

$$\bar\Omega^{Bola}_{T} = \bar\Omega^{Bola}_{Pista} + \bar\Omega^{Pista}_{T} = (\searrow \Omega) + (\Uparrow 2\omega)$$

si $\bar\Omega^{Bola}_{T}$ ha de ser vertical, necessàriament serà $\Omega = 0$, i per tant

$$\bar\Omega^{Bola}_{T} = (\Uparrow 2\omega)$$

Podem calcular $\bar v_T(S_{Bola})$ fent comp. movim. $\left|\begin{array}{l} AB = T \\ REL = Pista \end{array}\right.$

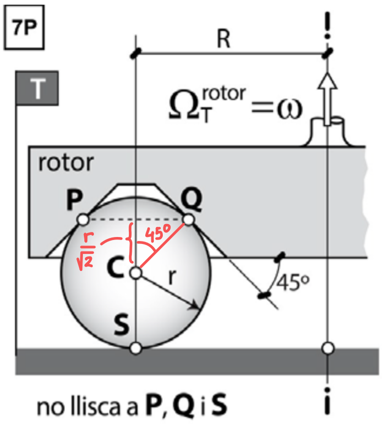
$$\bar v_{AB}(S) = \bar v_{REL}(S) + \bar v_{ar}(S) =$$

$$= \underbrace{(\searrow \Omega) \times (\overline{QS})}_{\bar 0 \text{ perquè } \Omega = 0} + (\odot\, 2\omega R) = \overbrace{(\odot\, 2\omega R)}^{\bar v_T(S_{Bola})} \quad (\square)$$

Com que $S_{Bola} = S_{rotor}$, el rotor ha de girar amb

$$\bar\Omega^{rotor}_{T} = (\Uparrow 2\omega)$$

per a provocar la velocitat $\bar v_T(S_{Bola})$ de $(\square)$.



La bola manté contacte sense lliscar amb el terra (T) i amb un rotor que gira amb ω respecte del terra. Calcula $\bar{v}_T(\mathbf{C})$.

Solució :

$EI^{Bola}_{Rotor} = \text{recta } PQ \;\Big|\; \Rightarrow \bar{\Omega}^{Bola}_{Rotor} = (\Rightarrow \overset{\text{pdet}}{\Omega})$, i per tant

$$\bar{\Omega}^{Bola}_{T} = \bar{\Omega}^{Bola}_{Rotor} + \bar{\Omega}^{Rotor}_{T} = (\Rightarrow \Omega) + (\Uparrow \omega) \quad (I)$$

Per determinar Ω, podem plantejar l'equació de composició de velocitats pel punt S, amb $AB = T$, $REL = Rotor$:

$$\bar{v}_{AB}(S) = \bar{v}_{REL}(S) + \bar{v}_{ar}(S)$$

$$\underbrace{\bar{0}}_{AB} = \underbrace{(\Rightarrow \Omega) \times \left[\downarrow \left(r + \frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right]}_{REL} + \underbrace{(\odot \omega R)}_{ar}$$

1 equació en 1 incògnita (Ω)

$$\bar{0} = \left[\otimes \Omega \left(r + \frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right] + (\odot \omega R)$$

$$\Omega\left(r + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) = \omega R \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = \frac{\omega R \sqrt{2}}{r(1+\sqrt{2})}} \quad (II)$$

I finalment :

$$\boxed{\bar{v}_T(C)} = \overset{\bar{0}}{\cancel{\bar{v}_T(S)}} + \bar{\Omega}^{Bola}_{T} \times \overline{SC} =$$

utilitzant (I)

$$= \left[(\Rightarrow \Omega) + (\Uparrow \omega)\right] \times (\uparrow r) =$$

$$= (\odot \Omega r) = \boxed{\odot \, \frac{\omega R \sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$$

Substituint (II)

Extra: Trobeu EI^{Bola}_{T}

Amb la reducció prèvia, EI^{Bola}_{T} ja queda identificat: és la recta que passa per S i té vector director

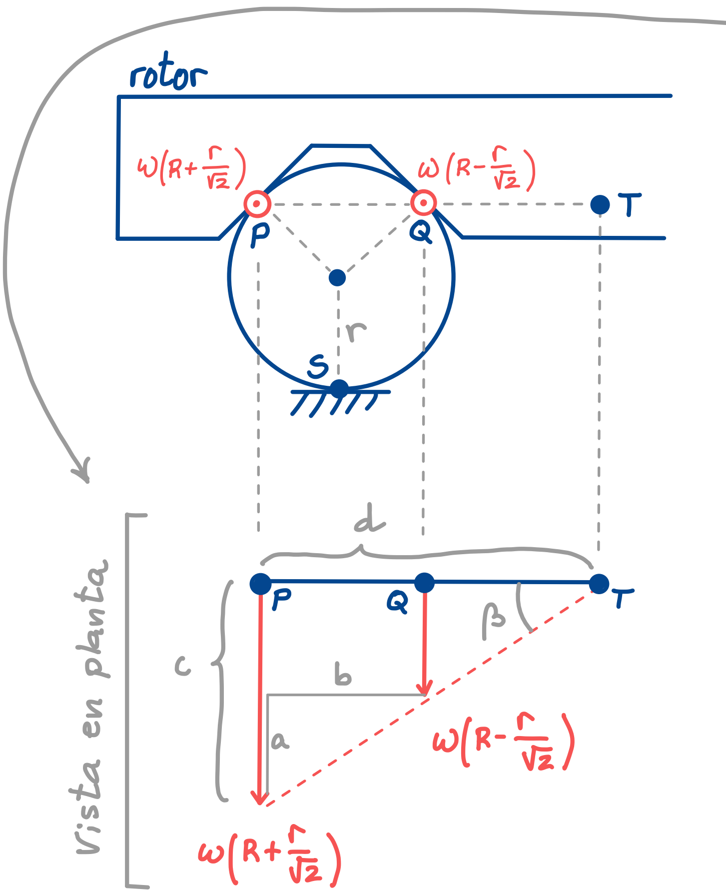
$$\bar{\Omega}^{Bola}_{T} = \left(\Rightarrow \frac{\omega R\sqrt{2}}{r(1+\sqrt{2})}\right) + (\Uparrow \omega)$$

Però busquem-lo partint de zero, amb les dades de l'enunciat. Com que $\bar{v}_T(S_{Bola}) = \bar{0}$, EI^{Bola}_{T} ha de passar per S i la velocitat de lliscament en la dir. de l'eix ha de ser zero.

A més, veiem que:

$$\bar{v}_T(P) = \left[\odot\, \omega\left(R+\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right] \qquad \bar{v}_T(Q) = \left[\odot\, \omega\left(R-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Que ambdues velocitats siguin $\odot$ indica que EI^{Bola}_{T} ha de ser en el pla del dibuix(*). Al llarg de la recta PQ, la distribució ha de ser lineal (triangular).



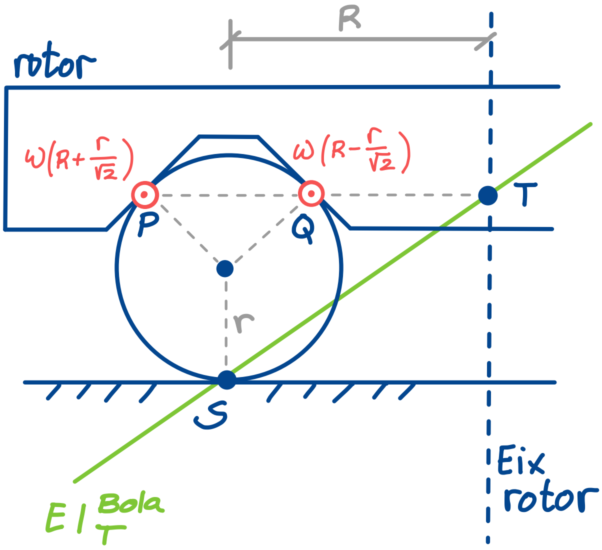
Del triangle de velocitats veiem que hi ha d'haver un punt T de velocitat nul·la a la dreta de Q. Busquem la seva distància d a P:

$$d = \frac{c}{tg\,\beta} = \frac{\omega\left(R+\frac{r}{\sqrt{2}}\right)}{\omega} = R+\frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{tg\,\beta = \frac{a}{b} = \frac{\frac{2\omega r}{\sqrt{2}}}{\frac{2r}{\sqrt{2}}} = \omega}$$

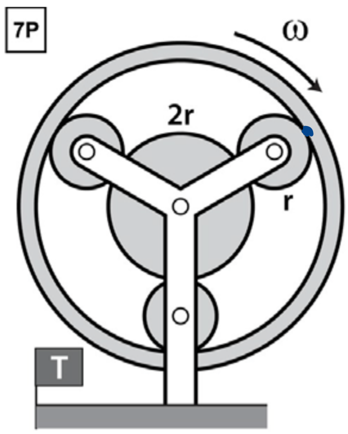
(*) Si no fos així, $\bar{v}_T(P)$ i $\bar{v}_T(Q)$ tindrien components addicionals, ⊥ al pla del dibuix

$d = R + \frac{r}{\sqrt{2}}$ és justament la distància de P a l'eix del rotor. Per tant, el punt T és la intersecció de la recta PQ amb l'eix del rotor:



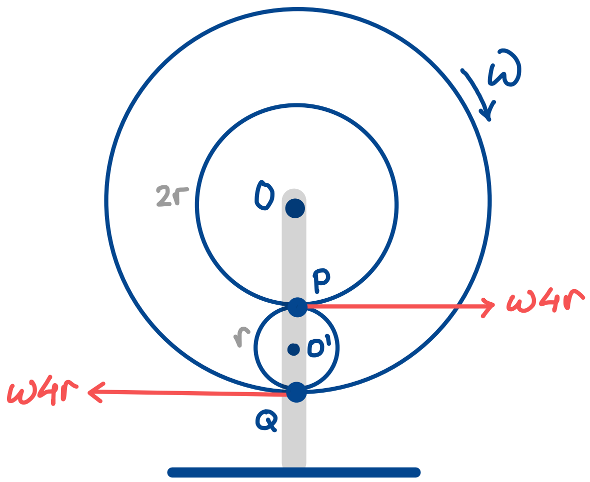
És a dir:

$$\boxed{EI_{T}^{Bola} = \text{recta } ST}$$



Les tres rodetes de radi r no llisquen en el seu contacte amb la de radi 2r ni en el contacte amb la corona exterior, que gira amb ω respecte del terra (T). Totes les rodes estan articulades al terra. Calcula $\bar{\Omega}_T^{\text{roda 2r}}$.

Solució



$$CIR_T^{\text{Corona}} = O$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{v}_T(Q) = (\leftarrow \omega 4r)$$

$$CIR_T^{\text{Roda r}} = O'$$

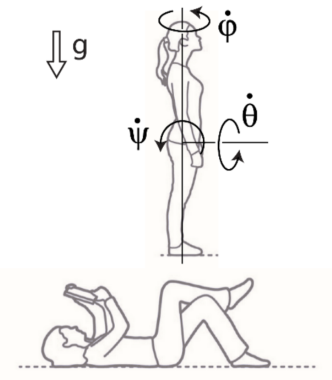
$$\Downarrow$$

$$\bar{v}_T(P) = (\rightarrow \omega 4r)$$

Com que $CIR_T^{\text{Roda 2r}} = O$, ha de ser

$$\boxed{\bar{\Omega}_T^{\text{Roda 2r}} = \left(\odot\ \frac{\omega 4r}{2r}\right) = \left(\odot\ 2\omega\right)}$$

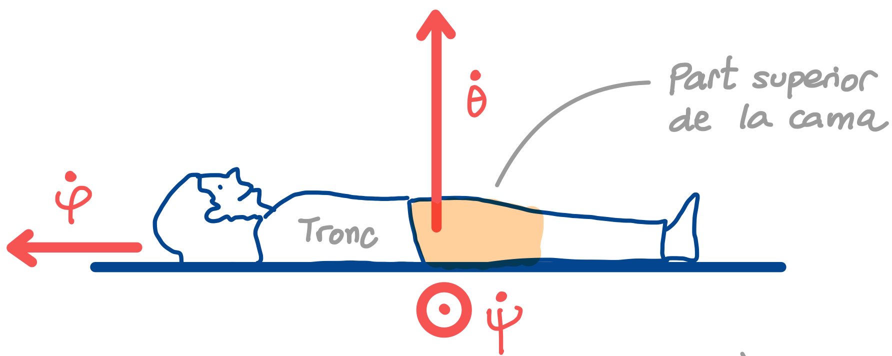
$\bar{\Omega}^{cama}_{tronc}$ en la posició de la figura inferior?



1 La part superior de la cama dreta (la que conté el fèmur) s'orienta <u>respecte del tronc d'una persona</u> mitjançant tres angles d'Euler. Quan la persona està dreta, les tres velocitats angulars associades tenen l'orientació indicada a la figura. Quina és l'orientació de les velocitats angulars associades als angles d'Euler d'aquesta mateixa cama respecte al tronc en la posició indicada a la figura inferior?

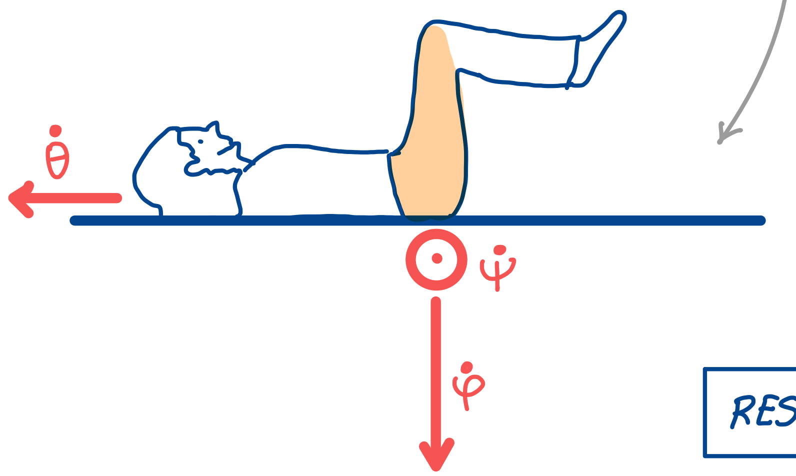
A $(\odot\dot{\psi}),(\Uparrow\dot{\theta}),(\Leftarrow\dot{\varphi})$
B $(\odot\dot{\psi}),(\Downarrow\dot{\theta}),(\Leftarrow\dot{\varphi})$
C $(\odot\dot{\psi}),(\Downarrow\dot{\theta}),(\Rightarrow\dot{\varphi})$
D $(\odot\dot{\psi}),(\Leftarrow\dot{\theta}),(\Downarrow\dot{\varphi})$
E $(\odot\dot{\psi}),(\Leftarrow\dot{\theta}),(\Uparrow\dot{\varphi})$

Orientació de $\bar{\dot{\psi}}$, $\bar{\dot{\theta}}$, $\bar{\dot{\varphi}}$ abans de flexionar

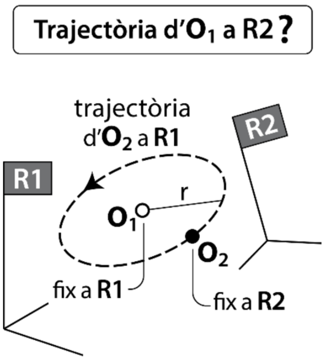


Després de flexionar:

Es produeix una rotació de 90° avd eix $\bar{\dot{\psi}}$ que afecta $\bar{\dot{\theta}}$ i $\bar{\dot{\varphi}}$ (però no $\bar{\dot{\psi}}$)



$\boxed{RESP = D}$



2 El punt $\mathbf{O_2}$, fix a R2, descriu una trajectòria circular de radi r i centre $\mathbf{O_1}$ respecte de R1. Què es pot dir de la trajectòria d'$\mathbf{O_1}$, fix a R1, respecte de R2?

A Pot tenir qualsevol forma menys rectilínia

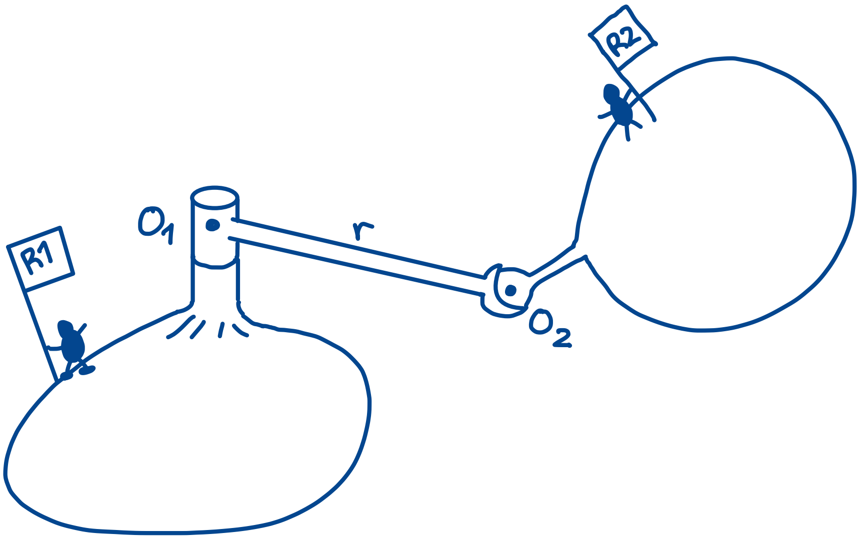
B És circular amb radi $\neq$ r

C Pot tenir qualsevol forma sobre una esfera de radi r

D És circular amb radi $=$r

E Depèn de la base vectorial que es faci servir per descriure el vector de posició d'$\mathbf{O_1}$ a R2

Podem pensar el segment O_1O_2 com una barra rígida articulada a R_1:



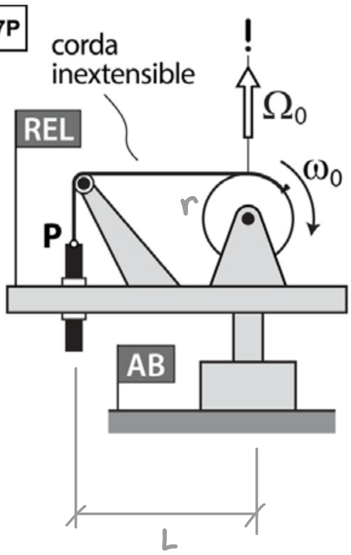
Com que l'extrem O_2 de la barra ha de ser fix a R2, l'imaginem enllaçat a R2 mitjançant una ròtula esfèrica.

No hi ha més restriccions al moviment, apart de les dibuixades. Per tant:

Respecte l'observador d'R_2 O_1 es pot moure lliurement sobre una esfera de radi r centrada a O_2.

$\boxed{\text{RESP} = \text{C}}$

7P



La politja està articulada a una plataforma, i gira respecte d'ella amb ω_0 constant. La plataforma gira amb Ω_0 constant respecte del terra (T). Una corda inextensible està enrotllada a la politja, i una pesa P penja de l'altre extrem. Calcula $\bar{a}_{ar}(\mathbf{P})$, $\bar{a}_{Cor}(\mathbf{P})$.

REL = Plat

AB = T

$$\bar{a}_{ar}(P) = \boxed{(\rightarrow \Omega_0^2 L)}$$

$$\bar{a}_{cor}(P) = 2\,\bar{\Omega}^{REL}_{AB} \times \bar{v}_{REL}(P) = 2\,(\Uparrow \Omega_0) \times (\uparrow \omega_0 r) = \boxed{\bar{0}}$$