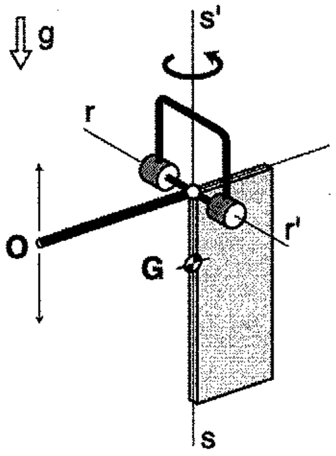
14P

Teoremes vectorials

Exemples 3D

Última lliçó

Sòlid en rotació



11 El sòlid de la figura -format per la placa rectangular i la barra d'extrem O- pot girar lliurement al voltant de l'eix r-r' de la forquilla. Inicialment es troba en repòs en la posició indicada. Per mitjà de la forquilla, se li comunica un moviment de rotació amb velocitat angular constant al voltant de la vertical s-s'. En quin sentit s'ha d'aplicar una força vertical a O per mantenir l'horitzontalitat de la barra en aquest moviment?

A No cal cap força ja que la velocitat angular és constant

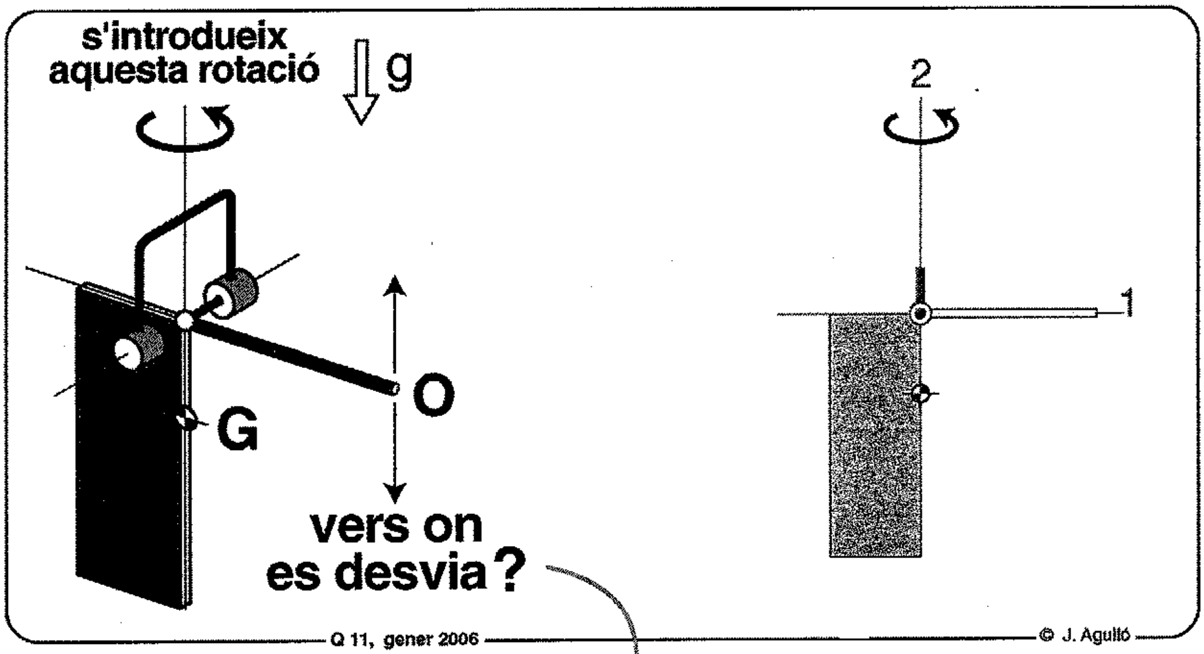
B Cal amb sentit amunt

C Cal amb sentit avall

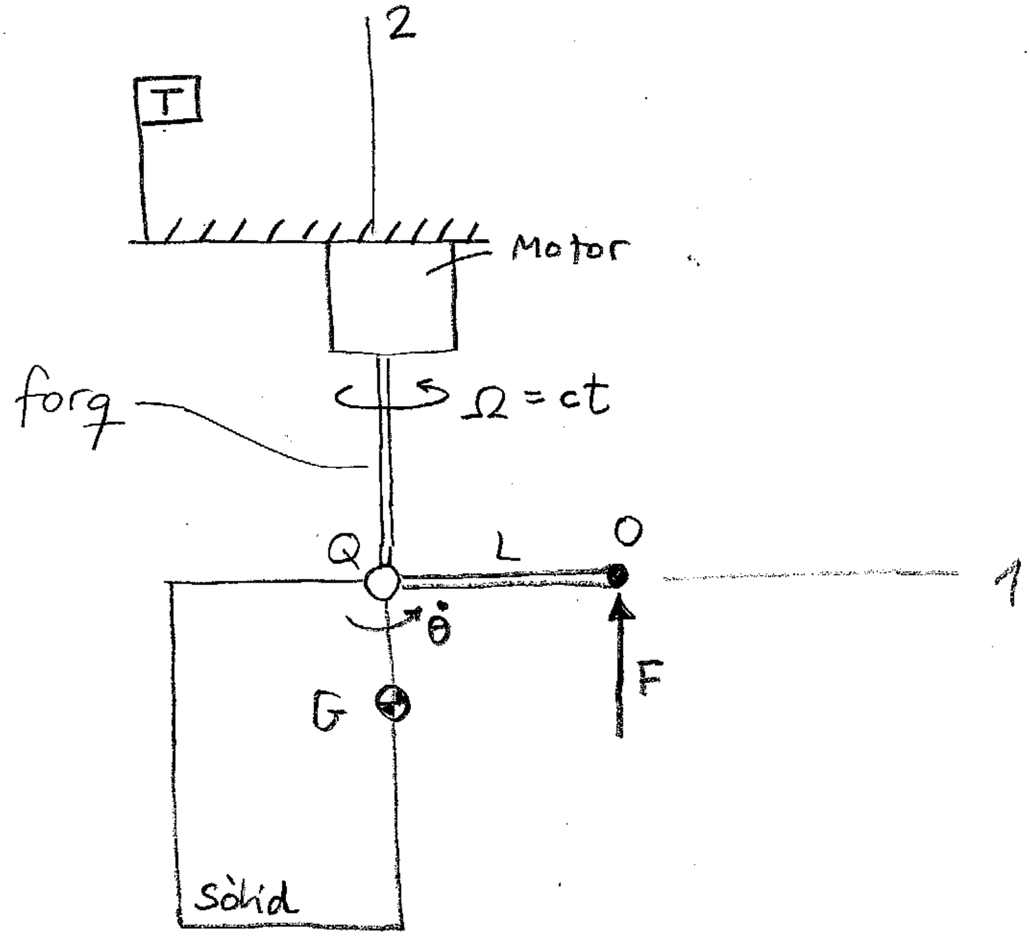
D Cal, amb sentit amunt només per damunt d'un cert valor de la velocitat de gir

E Cal, amb sentit avall només per damunt d'un cert valor de la velocitat de gir

Enunciat simbòlic equivalent



(suposant que no apliquem cap força a O)



El motor garanteix $\Omega = ct$, però

$$\bar{\Omega}^{\text{sòlid}}_{T} = (\Uparrow \Omega) + (\hat{\odot}\, \dot{\theta})$$

Com que volem mantenir l'horitzontalitat de la barra, volem que $\dot{\theta} = 0$. És a dir, que

$$\bar{\Omega}^{\text{sòlid}}_{T} = (\Uparrow \Omega) = ct$$

Quina força $\bar{F}$ cal aplicar a O per garantir-ho? Si determinem que $\bar{F}$, per exemple, ha de ser en sentit ↑, voldrà dir que el sòlid es desviarà ↩ en cas de no aplicar $\bar{F}$. Els 2 enunciats són equivalents.

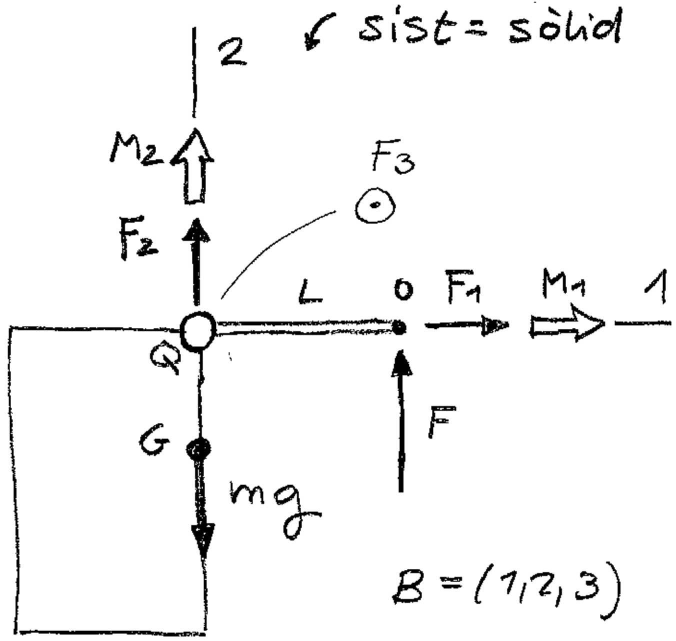
TMC (Q), sist = sòlid

Q és fix a T $\Rightarrow$ terme complementari = 0 en el TMC

$$\sum \overline{M}_{ext}(Q) = \dot{\overline{H}}_{RTQ}(Q)$$

Forces sobre sist = sòlid

$$\left\{\sum \overline{M}_{ext}(Q)\right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ FL \end{Bmatrix} \quad (I)$$

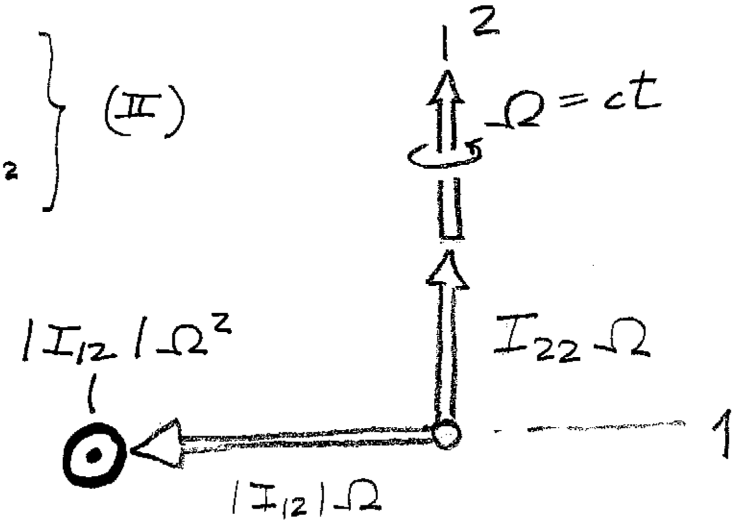


$$\overline{H}_{RTQ}(Q) = \mathbb{I}(Q)\,\overline{\Omega}^{\text{sòlid}}_{T}$$

$Q \in$ sòlid

$$\left\{\overline{H}_{RTQ}(Q)\right\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & -|I_{12}| & 0 \\ -|I_{12}| & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -|I_{12}|\Omega \\ I_{22}\Omega \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\dot{\overline{H}}_{RTQ}(Q)\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ |I_{12}|\Omega^2 \end{Bmatrix} \quad (II)$$



(I) = (II) :

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ FL \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ |I_{12}|\,\Omega^2 \end{Bmatrix}$$

De la 3ª component veiem que el valor d'F ha de ser positiu (*)

$$F = \frac{|I_{12}|\,\Omega^2}{L}$$

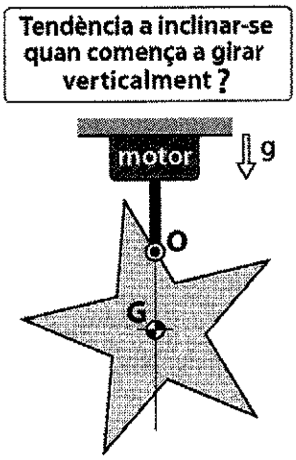
Per tant, aplicant una F d'aquest valor a O, en dir ↑, garantim $\overline{\Omega}^{\text{sòlid}}_{T} = (\Uparrow \Omega)$ $\forall t$.

És a dir, si deixem d'aplicar F, O es desviarà cap avall, activant la rotació $\dot{\theta}$.

Si tinguéssim un sòlid amb $I_{12} = 0$, la dir. 2 seria DPI ⇒ el moment cinètic seria $\Uparrow I_{22}\Omega$, i no caldria aplicar cap força a O per mantenir $\dot{\theta} = 0$. El sòlid no s'inclinaria en cap sentit.

(*) Si I_{12} hagués estat un valor positiu, ens hauria sortit $\dot{\overline{H}}_{RTQ}(Q) = (\otimes\ |I_{12}|\,\Omega)$ i el valor d'F hauria sortit negatiu ⇒ F en sentit ↓

Tendència a inclinar-se (Q9 juliol 2018)



9 La placa homogènia es troba articulada a **O** al rotor d'un motor d'eix vertical (amb estator fix a terra). Quina és la tendència inicial de la placa quan comença a girar al voltant de la direcció vertical?

A Inclinar-se en sentit horari.

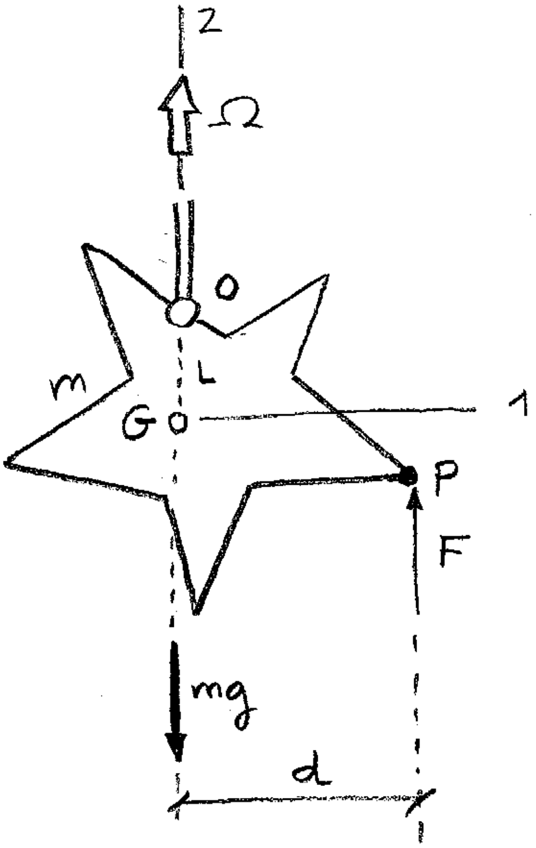
B Inclinar-se en sentit antihorari.

C No s'inclina en cap sentit.

D Inclinar-se en sentit horari si la velocitat angular vertical és cap a baix.

E Inclinar-se en sentit horari si la velocitat angular vertical és cap a dalt.

Podem repetir la mateixa anàlisi que en l'exemple anterior. Quina $\bar{F}$ cal aplicar a P per evitar la rotació?



En aquest cas veiem que:

$$[\mathbb{I}(O)]_B = \overbrace{[\mathbb{I}(G)]_B}^{\text{rotor simètric a } G} + [\mathbb{I}^{\oplus}(O)]_B =$$

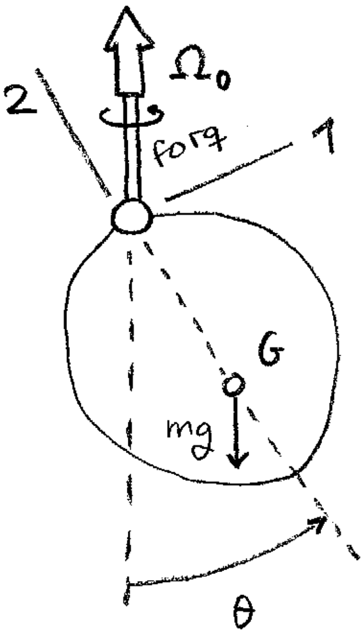
$$= \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mL^2 & & \\ & 0 & \\ & & mL^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I+mL^2 & & \\ & I & \\ & & 2I+mL^2 \end{bmatrix}$$

Com que $\overbrace{\text{la dir. 2 és DPI}}^{\text{perquè } I_{12} = 0}$, pels arguments que hem donat al final de l'exercici anterior, el sòlid <u>no tindrà</u> tendència inicial a inclinar-se. Mantindrà la seva orientació, com a mínim per velocitats angulars baixes.

Extra

Què passarà a mida que Ω augmenti? A teoria hem vist que per un sòlid com el de la figura, →

si la dir. 2 és DPI, alesh. $\theta = 0$ és posició d'equilibri estable per Ω_0 baixes(*), ja que l'EDO de l'error és



$$\underbrace{I_{33}}_{A}\ddot{\varepsilon} + \underbrace{\left[mgL + (I_{22} - I_{11})\Omega_0^2\right]}_{B}\varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{B}{A}\varepsilon$$

(*) com a mínim

Equilibri estable $\Leftrightarrow$ $\frac{B}{A} > 0 \Leftrightarrow B > 0 \Leftrightarrow$

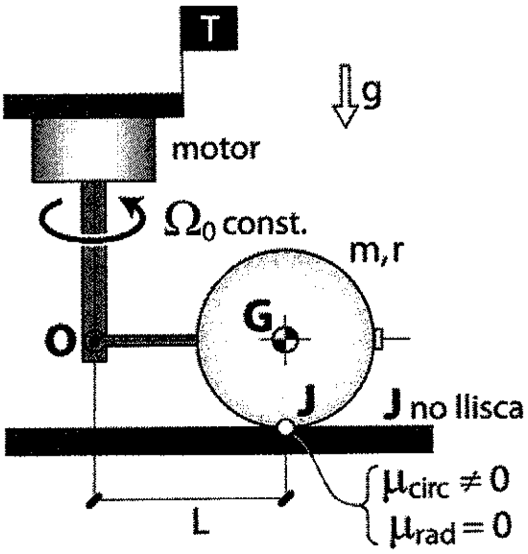
$$mgL + (I_{22} - I_{11})\Omega_0^2 > 0$$

Com que en el nostre cas $I_{22} < I_{11}$, l'equilibri $\theta = 0$ només serà estable per valors baixos d'Ω_0. Hi ha una Ω_0 crítica per sobre de la qual l'equilibri serà INESTABLE.

En un sòlid amb $I_{22} > I_{11}$, l'equilibri $\theta = 0$ seria estable $\forall \Omega_0$, ja que tindríem $B > 0 \ \forall \Omega_0$.

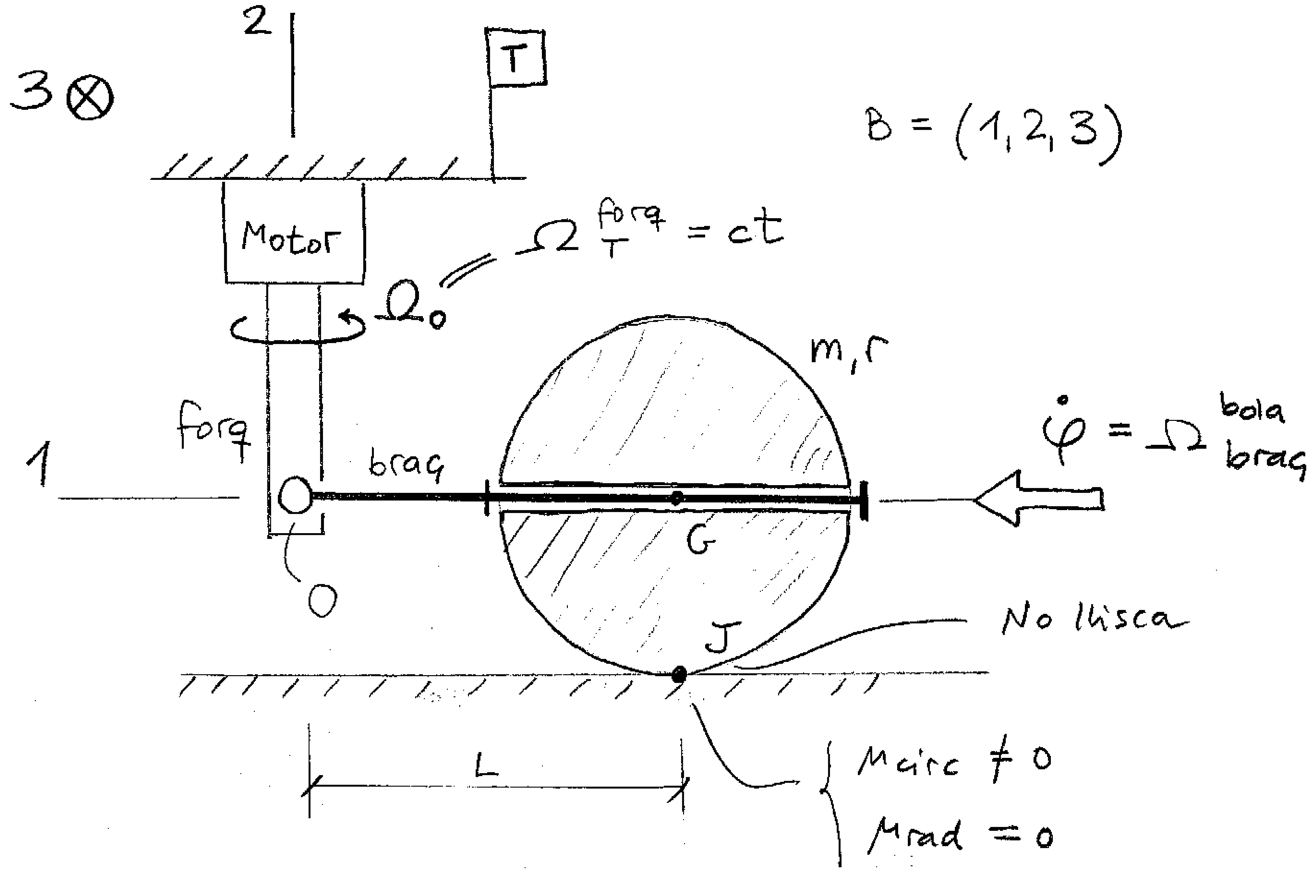
Bola giratòria (Q8, juny 2016)

Exemple resolt D7.4 de Wikimec



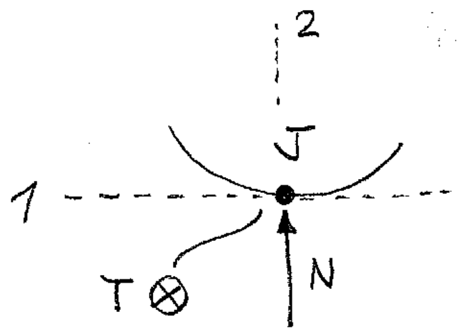
La bola, de massa m i radi r, manté un contacte puntual sense lliscament amb el terra i està articulada a un braç horitzontal. El braç està articulat a una forquilla que gira amb velocitat angular constant sota l'acció d'un motor. Braç i forquilla tenen massa negligible. El coeficient de fricció en direcció radial entre bola i terra és nul ($\mu_{\mathrm{rad}} = 0$). Es tracta d'investigar si la rotació Ω_0 pot provocar la pèrdua de contacte entre bola i terra.

Nota: La solució de Wikimec utilitza el concepte de sòlid auxiliar d'enllaç (SAE) que en aquesta edició del curs s'ha omès del temari. La solució que incloc tot seguit és molt semblant, però evita l'ús de SAEs.



$B = (1, 2, 3)$

Caracterització del contacte a J



A J, el terra aplica sobre bola:

- La normal ↑N
- Força tangencial ⊗ T
  (només en dir ⊗ i no en dir ← perquè $\mu_{rad} = 0$)

Graus llibertat sist

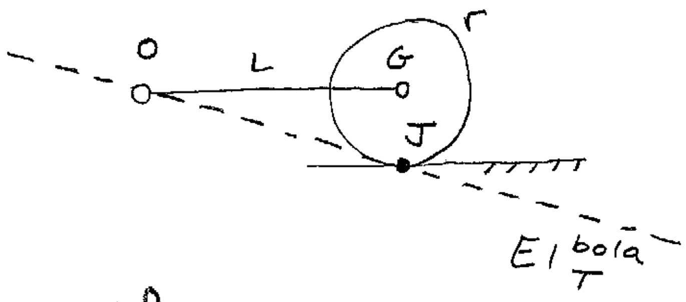
1 GL: $\dot{\psi} = \Omega_0 = ct$ (forçat pel motor a valdre Ω_0)

La rotació $\dot{\varphi}$ es pot posar en funció d'Ω_0

($\dot{\varphi}$ és indirectament forçat)

Estudi cinemàtic ($\dot{\varphi}$ i $\overline{\Omega}^{Bola}_{T}$ en funció d'Ω_0)

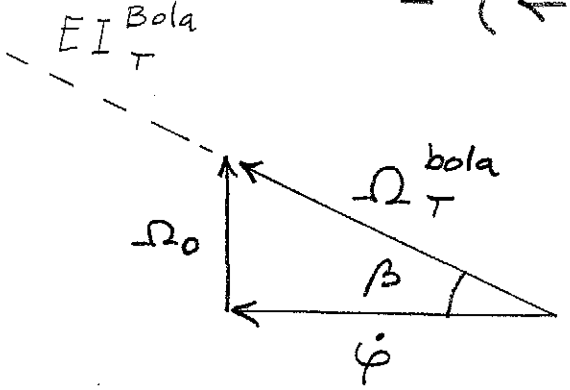
$$EI^{bola}_{T} = OJ$$



$$\overline{\Omega}^{bola}_{T} \parallel EI^{bola}_{T} \; !$$

$$\overline{\Omega}^{bola}_{T} = \overline{\Omega}^{bola}_{braç} + \cancelto{0}{\overline{\Omega}^{braç}_{forq}} + \overline{\Omega}^{forq}_{T} =$$

$$= (\Leftarrow \dot{\varphi}) + (\Uparrow \Omega_0)$$

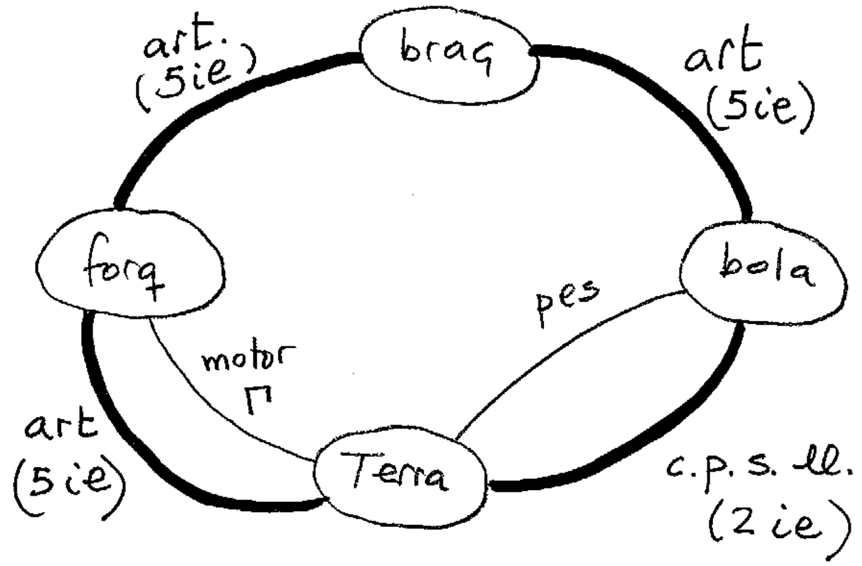


$$\Longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{\Omega_0}{tg\,\beta} = \frac{\Omega_0}{r/L} = \frac{L}{r}\,\Omega_0$$

Per tant:

$$\overline{\Omega}^{bola}_{T} = \left(\Leftarrow \frac{L}{r}\Omega_0\right) + \left(\Uparrow \Omega_0\right) = \begin{Bmatrix} \frac{L}{r}\Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_B \quad \textbf{(I)}$$

DG1



Incògnites :

- 17 ie
- Γ

} 18 incògn

Eqs

3 sòlids · 6 eqs/sòlid } 18 eqs

] Problema DET

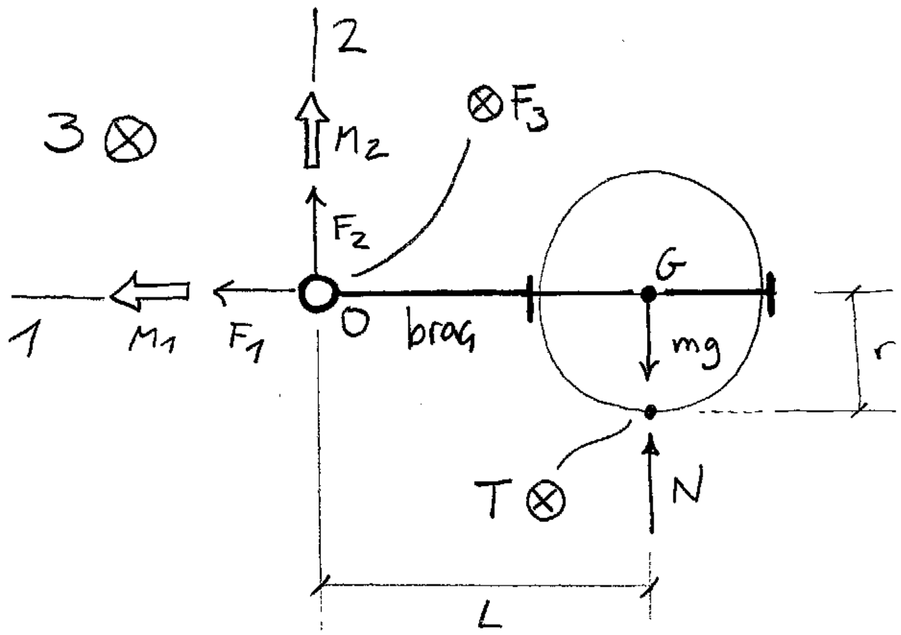
Full de ruta per calcular N

El sistema ha d'incloure la bola, ja que N és una incògnita del c.p.s. ll. (tallem per aquest arc). Comptem incògnites en els sistemes que incloven la bola :

Sist	incògn.	#incògn	problema
Bola	7 ie	7	indet.
Bola + braç	7 ie	7	"
Bola + braç + forq	7 ie, Γ	8	"

Comencem explorant "bola + braç" i "bola" ja que són els de menys incògnites (tot i ser indet)

Provem bola + braç (*)



$$\left\{\bar{F}_{forq \to braç}\right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{forq \to braç}(0)\right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

N és l'única ie que crea moment en dir. 3 $\Rightarrow$

Full ruta per N

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sist} = \text{Bola + braç} \\ \text{TMC}(0)]_3 \end{array}}$$

(*) El sist = bola va bé pel càlcul de T (deures!)

Apliquem full nta a

Sist = bola + braç, TMC (0)$]_3$

O és fix a T $\Rightarrow$ RTO = T , $\nexists$ terme complementari al TMC

$$\sum \overline{M}_{ext}(O) = \dot{\overline{H}}_{RTO}(O)$$

$$\sum \overline{M}_{ext}(O) = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mgL \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -L \\ -r \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ N \\ T \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} M_1 - rT \\ M_2 + LT \\ mgL - LN \end{Bmatrix} \quad \textbf{(II)}$$

2 maneres de calcular $\overline{H}_{RTO}(O)$

- O $\in$ bola $\Rightarrow$ podem calcular $\overline{H}_{RTO}(O)$ així (*)

$$\overline{H}_{RTO}(O) = \mathbb{I}(O) \cdot \overline{\Omega}^{bola}_{\underset{\llcorner T}{RTO}}$$

(requereix passar tensor de G a O via Steiner)

- També podem calcular $\overline{H}_{RTO}(O)$ via descomposició baricèntrica, que sempre és aplicable:

$$\overline{H}_{RTO}(O) = \overline{H}_{RTG}(G) + \overline{H}^{\oplus}_{RTO}(O)$$

Fem-ho de les dues maneres, per practicar.

(*) Només la bola té massa $\Rightarrow$ $\overline{H}_{RTO}(O)$ és el de la bola

$\dot{\overline{H}}_{RTO}(O)$ via descomp. baricènt. i deriv. geomètrica

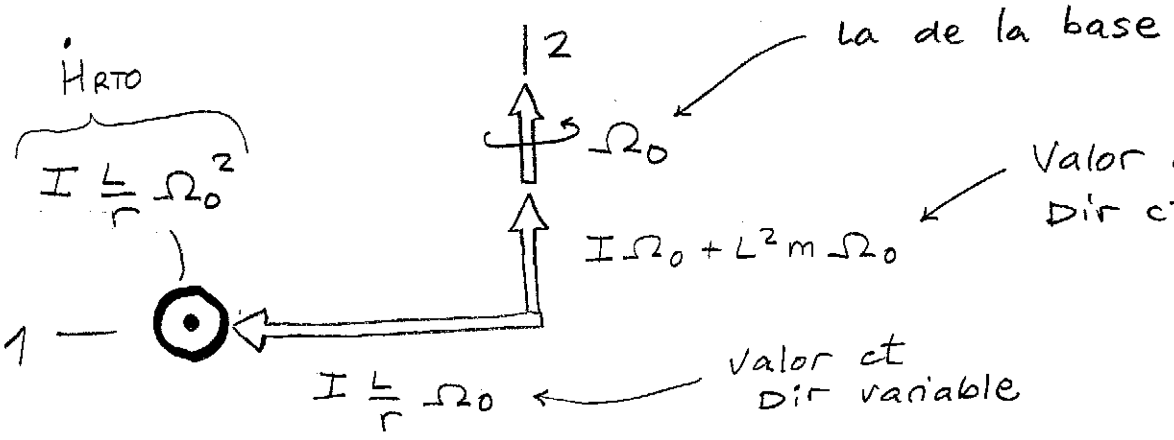
$$\overline{H}_{RTO}(O) = \overline{H}_{RTG}(G) + \overline{OG}\times m\,\overline{v}_{\underbrace{RTO}_{T,\text{ perquè } O \text{ fix a } T}}(G) \overset{\text{en base } B^{(*)}}{=}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{\mathbb{II}(G)} \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{L}{r}\Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\overline{\Omega}_T^{\text{bola}}} + \begin{Bmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m\Omega_0 L \end{Bmatrix} =$$

Rotor esfèric a G amb $I = \frac{2}{5}mr^2$ → $\mathbb{II}(G)$

$\overline{\Omega}_T^{\text{bola}}$ ← Eq.(I)

$$= \begin{Bmatrix} I\frac{L}{r}\Omega_0 \\ I\Omega_0 + L^2 m\Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\dot{\overline{H}}_{RTO}(O) = \left(\odot\ \underbrace{\tfrac{2}{5}mr^2}_{I}\,\frac{L}{r}\Omega_0^2\right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5}mrL\Omega_0^2 \end{Bmatrix}_B \quad \textbf{(III)}$$

(*) B no és fixa al sòlid, però $\mathbb{II}(G)$ és constant i igual a $\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I\end{bmatrix}$ perquè el sòlid és rotor esfèric per a G.

$\dot{\bar{H}}_{RTO}(O)$ via tensor a G, Steiner, i deriv. analítica

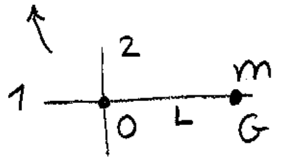
$$\bar{H}_{RTO}(O) = \mathbb{I}(O)\cdot\bar{\Omega}^{bola}_{T} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{L}{r}\Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{11}\frac{L}{r}\Omega_0 \\ I_{22}\Omega_0 \\ 0\end{Bmatrix}$$

Steiner

$$[\mathbb{I}(O)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I\end{bmatrix}}_{\mathbb{I}(G)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & \\ & mL^2 & \\ & & mL^2\end{bmatrix}}_{\mathbb{I}^{\oplus}(O)} = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33}\end{bmatrix}$$

Rotor esfèric amb $I = \frac{2}{5}mr^2$



$$I_{11} = I = \frac{2}{5}mr^2$$

$$I_{22} = I_{33} = I + mL^2 = \frac{2}{5}mr^2 + mL^2$$

$$\{\dot{\bar{H}}_{RTO}\}_B = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\ \Omega_0 \\ 0\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix} I_{11}\frac{L}{r}\Omega_0 \\ I_{22}\Omega_0 \\ 0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\ -I_{11}\frac{L}{r}\Omega_0^2\end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix}0\\0\\ -\frac{2}{5}m\cancel{r^2}\frac{L}{\cancel{r}}\Omega_0^2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\ -\frac{2}{5}mrL\Omega_0^2\end{Bmatrix}_B \quad (\mathrm{III}')$$

$[\mathrm{II} = \mathrm{III}]_3$:

$$m g \cancel{\ell} - \cancel{\ell} N = - \frac{2}{5} m r \cancel{\ell} \Omega_0^2$$

$$N = mg + \frac{2}{5} m r \Omega_0^2$$

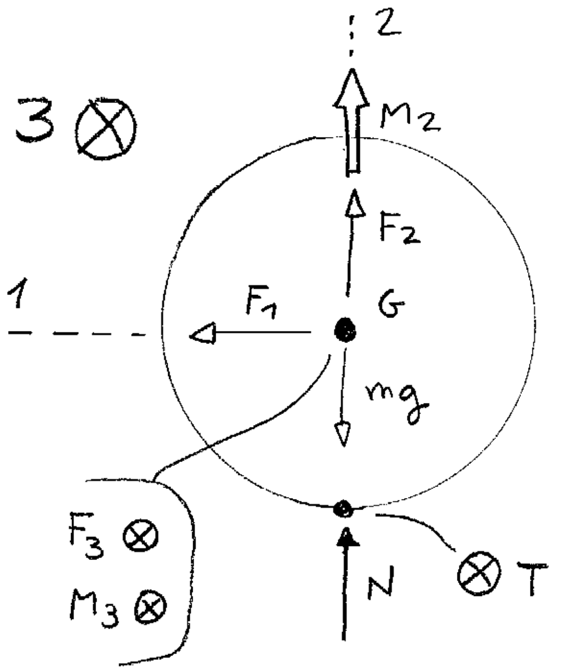
$$\boxed{N = m\left(g + \frac{2}{5} r \Omega_0^2\right)}$$

Conclusió: N sempre és positiva i el sòlid mai perdrà contacte a J independentment del valor d'Ω_0.

DEURES

- Full ruta per calcular T
- Calculen T
- Analitzeu per quins valors de μ_{circ} hi haurà lliscament a J

Full ruta per calcular T



Forces i moments sobre sistema = bola.

El torsor braç → bola s'ha caracteritzat a G (G és a l'eix de l'articulació braç-bola i per tant és de caracterització immediata)

T és l'única incògn. d'enllaç que crea moment respecte G en dir. 1, per tant:

Full ruta per T

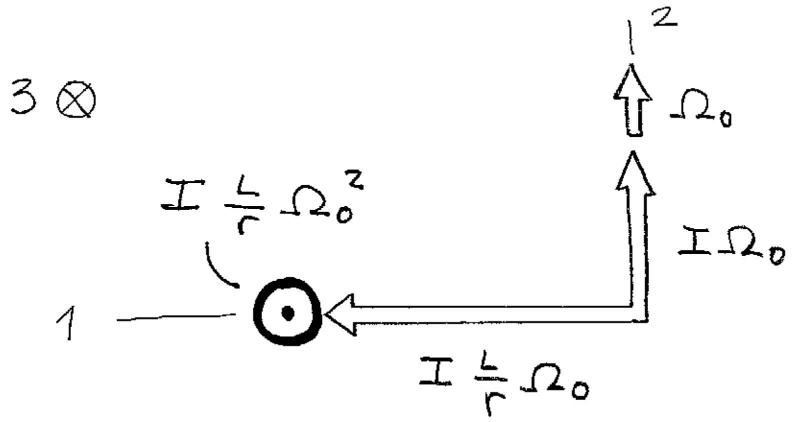
$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Sist} = \text{bola} \\ \text{TMC}(G)\big]_1 \end{array}}$$

Sist = Bota, TMC(G)]$_1$

$$\sum \overline{M}_{ext}(G) = \dot{\overline{H}}_{RTG}(G)$$

$$\left\{ \sum \overline{M}_{ext}(G) \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} -Tr \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix} \right\} \quad \textbf{(IV)}$$

$$\left\{ \overline{H}_{RTG}(G) \right\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \frac{L}{r}\Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} I\frac{L}{r}\Omega_0 \\ I\Omega_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$



$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

$$\dot{\overline{H}}_{RTG}(G) = \odot\ \underbrace{\frac{2}{5}mr^{\cancel{2}}}_{I}\ \frac{L}{\cancel{r}}\ \Omega_0^2 =$$

$$= \odot\ \frac{2}{5}mrL\Omega_0^2 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5}mrL\Omega_0^2 \end{matrix} \right\} \quad \textbf{(V)}$$

(IV) = (V) en dir 1 :

$$-Tr = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 0}$$

Lliscarà a J? Per a quins valors de μ_{circ}?

Per a que llisqui, cal que $T > \mu_{circ} \cdot N$

$$T \overset{?}{>} \mu_{circ} \cdot N$$

$$0 \overset{?}{>} \mu_{circ} \cdot \overbrace{m\left(g + \frac{2}{5} r \Omega_0^2\right)}^{N}$$

Com que $\mu_{circ} > 0$, el membre dret de l'anterior inequació és sempre positiu, i per tant la inequació mai es complirà

$$\underbrace{\text{Per tant, mai } T > \mu N}$$

$$\Downarrow$$

La bola mai lliscarà a J

Pèndol anular giratori (adaptat de P2, juliol 2016)

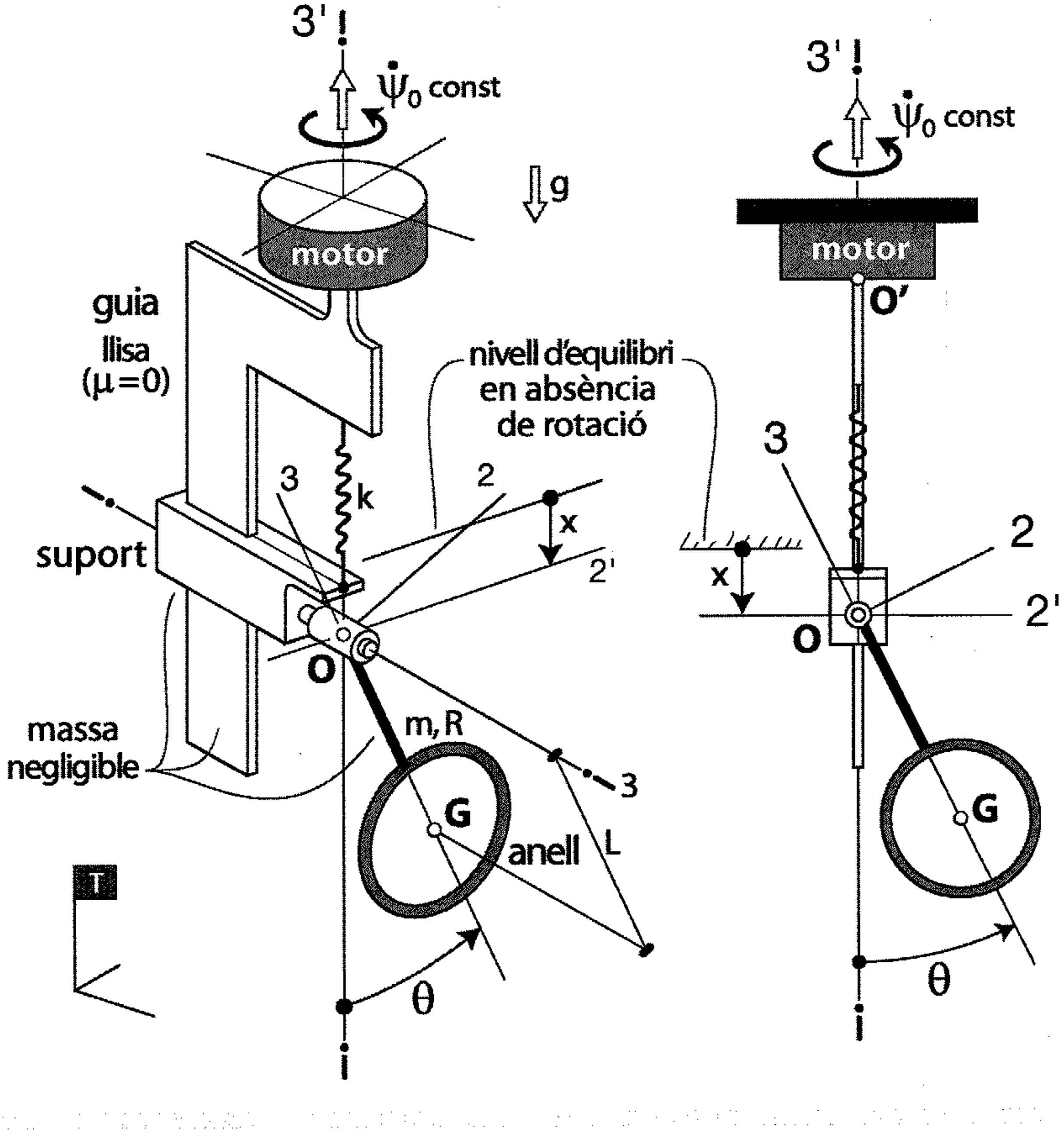
Exemple resolt D7.6 de Wikimec

El pèndol, format per un anell homogeni de massa m i radi R i una barra de longitud (L-R), està articulat al punt **O** del suport, el qual llisca dins d'una guia llisa de secció rectangular. Entre suport i guia hi ha una molla lineal de constant k. Tot el conjunt es mou amb velocitat angular constant $\overline{\dot\psi}_0$ respecte al terra **sota l'acció d'un motor**.

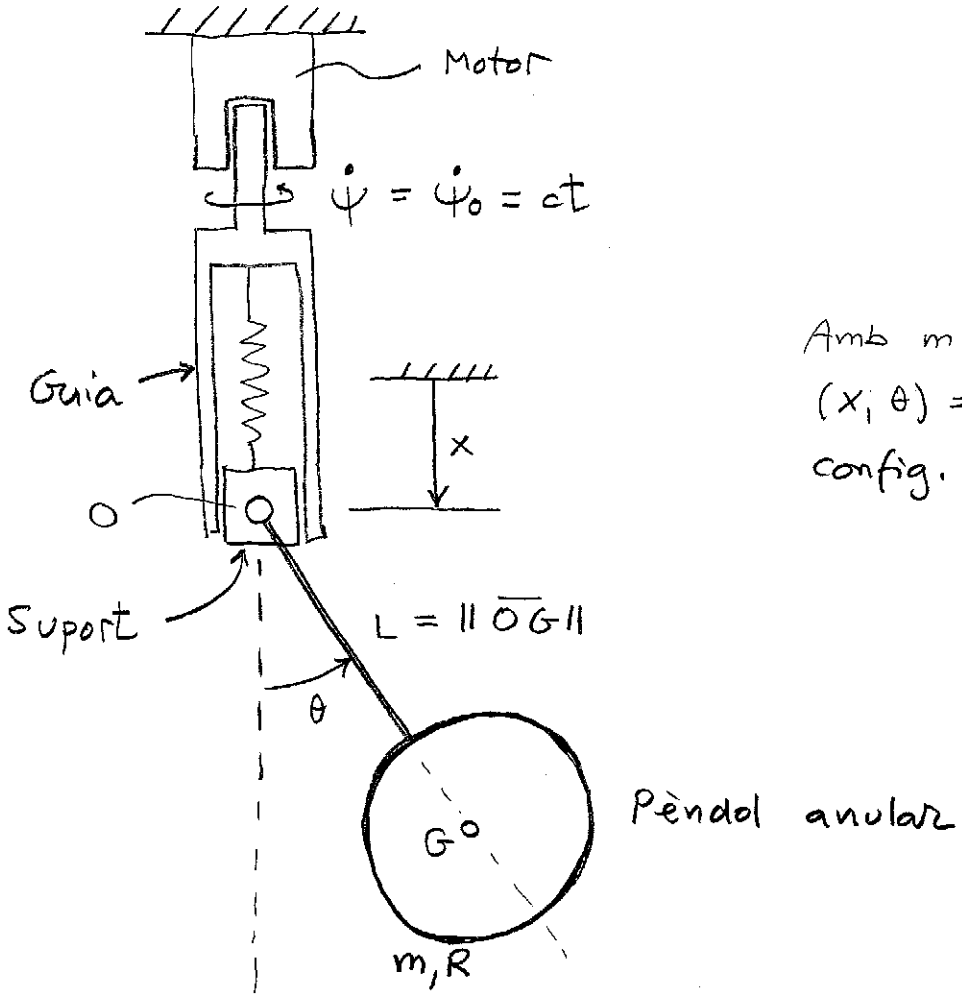
Amb el motor aturat, la configuració $(x=0,\ \theta=0)$ és d'equilibri.

Les masses de la barra, el suport i la guia, i les friccions associades a les articulacions són negligibles.

Determineu les equacions del moviment per a les coordenades x i θ



Dibuix esquemàtic equivalent



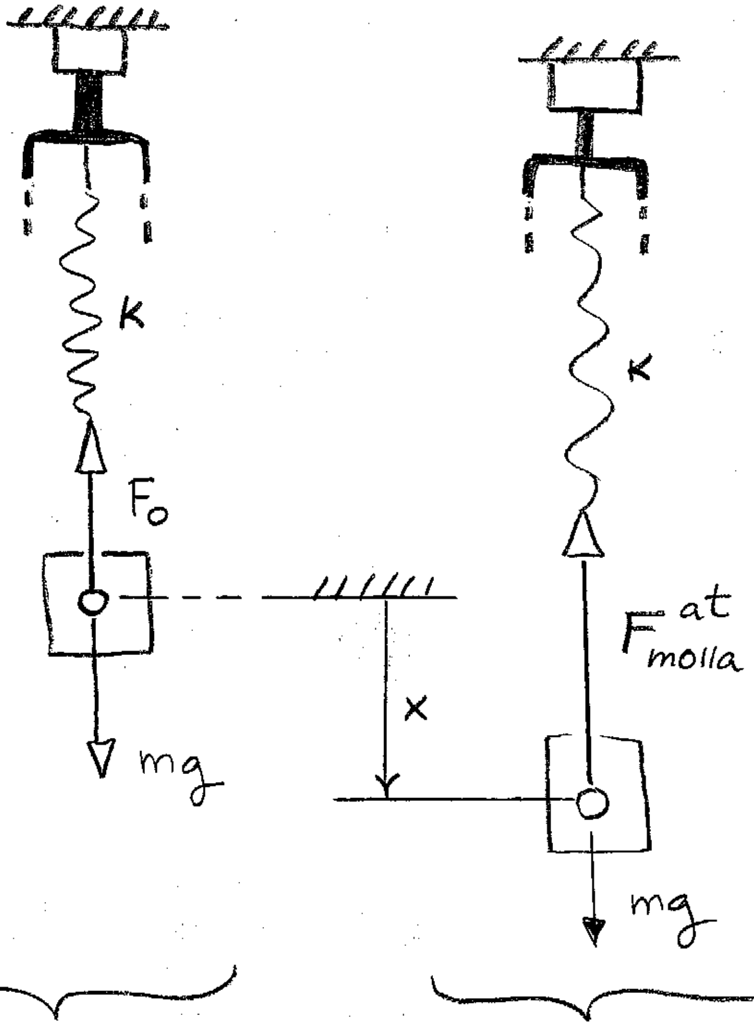
Amb motor aturat $(x, \theta) = (0,0)$ és config. equilibri

GL sistema

Sist amb 3 GL
$$\begin{cases} \dot{\psi}, \text{ forçat } (\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = ct) \\ \dot{x}, \text{ lliure} \\ \dot{\theta}, \text{ lliure} \end{cases}$$

Força molla → suport

Com que la necessitarem, la formulem



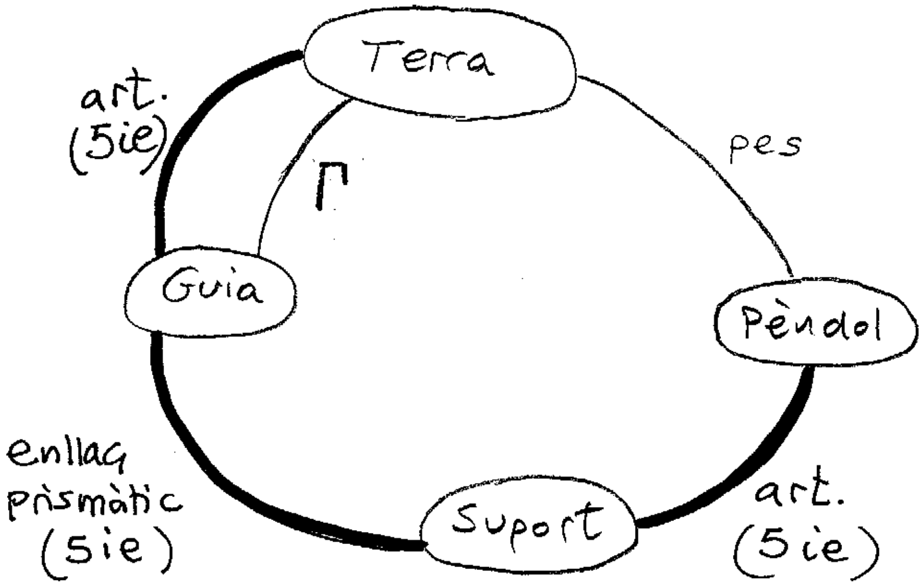
Config. equilibri
($F_0 = mg$)

Config. genèrica

$$\boxed{F^{at}_{molla} = F_0 + K\Delta\rho = mg + Kx}$$

DGI

Γ = parell motor



18 incògnites:

15 ie

Γ ($\dot{\psi}$ és forçat i sabem $\ddot{\psi} = 0$)

$\ddot{x}$ (GL lliure)

$\ddot{\theta}$ (GL lliure)

assoc. a GL

18 eqs:

$3 \text{ sòlids} \cdot \frac{6 \text{ eqs}}{\text{sòlid}}$

Problema DET (*)

(*) Podrem determinar les 18 incògnites

Full ruta eqs. mov. coords x i θ

x i θ només afecten el movim. de $\begin{cases} \text{pèndol} \\ \text{suport} \end{cases}$

Mirem #incògn. sistemes q incloguin o pèndol o suport

sist	incògn	#incògn.	Problema
pèndol	5 ie, $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$	7	IND.
pènd + suport	5 ie, $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$	7	IND.
pènd + sup + guia	5 ie, $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$, Γ	8	IND.
suport	10 ie	10	IND.
sup + guia	10 ie, Γ	11	IND.

Cap sistema surt DETERMINAT ☹ (*)

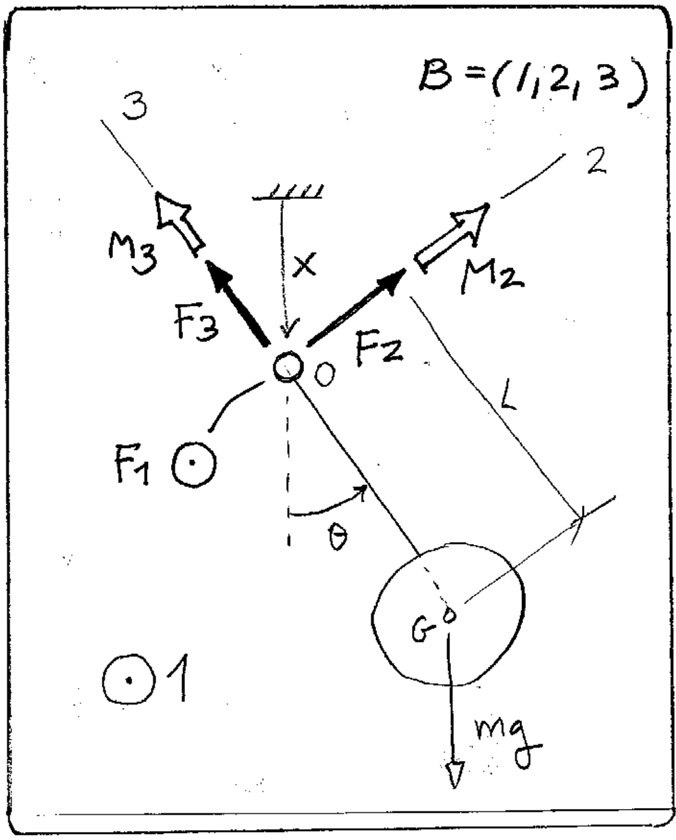
Explorem aplicació de TQM / TMC als dos sistemes amb menys incògn:

- pèndol
- pendol + suport

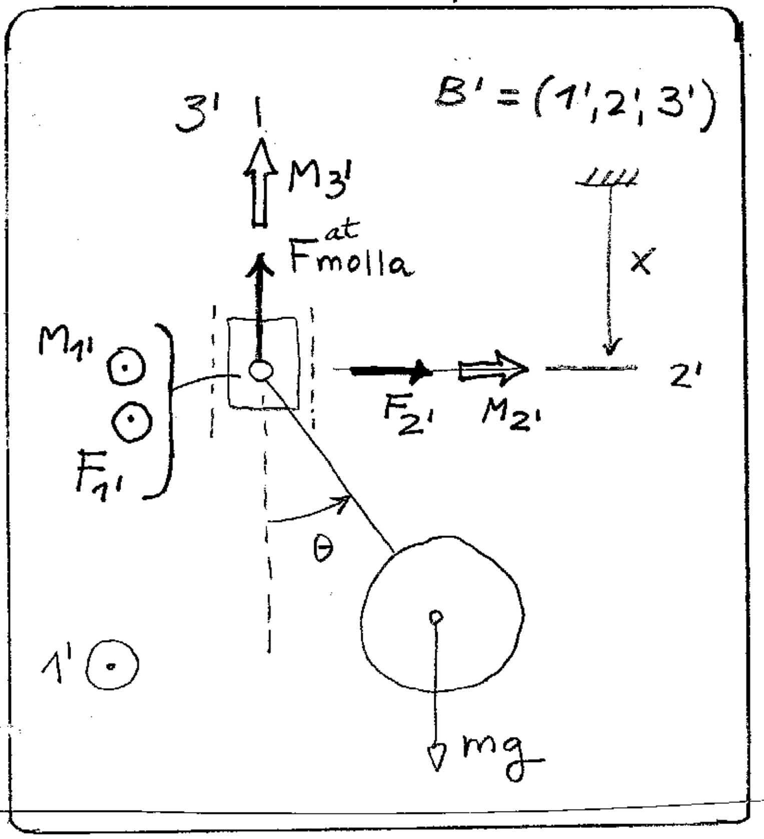
(*) Que no cunda el pánico!

Forces i moments externs sobre ambdós sistemes:

Pèndol (*)



Pèndol + Suport



↑ Aquí $TMC(O)]_1$ està lliure d'ie !

↑ Aquí, $TQM]_{3'}$ està lliure d'ie

Full ruta eqs. mov. x i θ

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sist} = \text{Pèndol}, \ TMC(O)]_1 \\ \text{Sist} = \text{Pènd} + \text{Sup}, \ TQM]_{3'} \end{array}}$$

(*) Triem la base indicada perquè és fixa al sòlid (i així $[\mathrm{II}(O)]_B$ serà constant) i alhora permet la caracterització immediata del torsor suport → pèndol a O.

TMC (O) $]_1$ sobre sist = pèndol

O es mou resp. T $\Rightarrow \exists$ terme complementari!

$$\sum \overline{M}_{ext}(O) \underbrace{- \overline{OG} \times m\,\overline{a}_T(O)}_{\text{terme complem.}} = \dot{\overline{H}}_{RTO}(O)$$

$$\left\{\sum \overline{M}_{ext}(O)\right\}_B = \begin{Bmatrix} -mgL\sin\theta \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(I)}$$

$$\overline{OG} \times m\,\overline{a}_T(O) = (\searrow L) \times (\downarrow m\ddot{x}) =$$

$$= \left[(\downarrow L\cos\theta) + (\rightarrow L\sin\theta)\right] \times (\downarrow m\ddot{x}) =$$

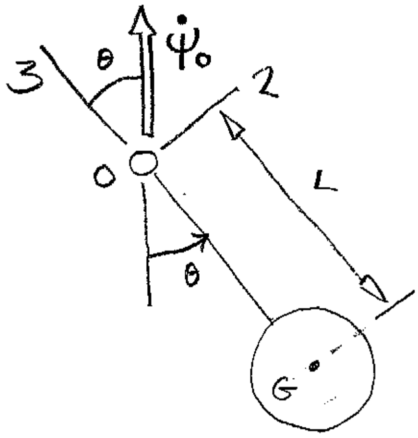
$$= \otimes\, mL\ddot{x}\sin\theta = \begin{Bmatrix} -mL\ddot{x}\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_B \qquad \textbf{(II)}$$

$$\overline{H}_{RTO}(O) \underset{\text{O} \in \text{pèndol}}{=} \overbrace{\mathbb{I}(O)}^{\text{Del pèndol}} \cdot \underbrace{\overline{\Omega}^{\text{pèndol}}_{RTO}} = \mathbb{I}(O)\,\underbrace{\overline{\Omega}^{\text{pèndol}}_{T}}$$

iguals!

Calculem $\overline{H}_{RTO}(O)$ en la base B perquè en aquesta base, en ser fixa al pèndol, el tensor $\mathbb{I}(O)$ serà constant.

$$[\mathbb{I}(O)]_B = [\mathbb{I}(G) + \mathbb{I}^{\oplus}(O)] =$$



$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{} + \underbrace{\begin{bmatrix} I' & & \\ & I' & \\ & & 0 \end{bmatrix}}_{} =$$

$$2I = mR^2 \qquad I' = mL^2$$

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Amb} \begin{cases} I_{11} = 2I + I' = m(R^2 + L^2) \\ I_{22} = I + I' = m\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right) \\ I_{33} = I = \frac{mR^2}{2} \end{cases}$$

$$\{\overline{H}_{RTO}(O)\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}_0 \sin\theta \\ \dot{\psi}_0 \cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{11}\dot{\theta} \\ I_{22}\dot{\psi}_0 \sin\theta \\ I_{33}\dot{\psi}_0 \cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\{\dot{\overline{H}}_{RTO}(O)\}_B = \begin{Bmatrix} I_{11}\ddot{\theta} \\ I_{22}\dot{\psi}_0\dot{\theta}\cos\theta \\ -I_{33}\dot{\psi}_0\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}_0 \sin\theta \\ \dot{\psi}_0 \cos\theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{11}\dot{\theta} \\ I_{22}\dot{\psi}_0 \sin\theta \\ I_{33}\dot{\psi}_0 \cos\theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} I_{11}\ddot{\theta} + (I_{33} - I_{22})\dot{\psi}_0^2 \sin\theta\cos\theta \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad \textbf{(III)}$$

Imposant $\mathrm{I} - \mathrm{II} = \mathrm{III}$ en comp. 1 :

$$-\cancel{m}gL\sin\theta + \cancel{m}L\ddot{x}\sin\theta = \underbrace{I_{11}}_{\cancel{m}(R^2+L^2)}\ddot{\theta} + \underbrace{(I_{33}-I_{22})}_{-\cancel{m}L^2}\dot{\psi}_0^{\,2}\sin\theta\cos\theta$$

$$\boxed{(R^2+L^2)\,\ddot{\theta} + \left(g - \ddot{x} - L\dot{\psi}_0^{\,2}\cos\theta\right)L\sin\theta = 0}$$

Versió Wikimec

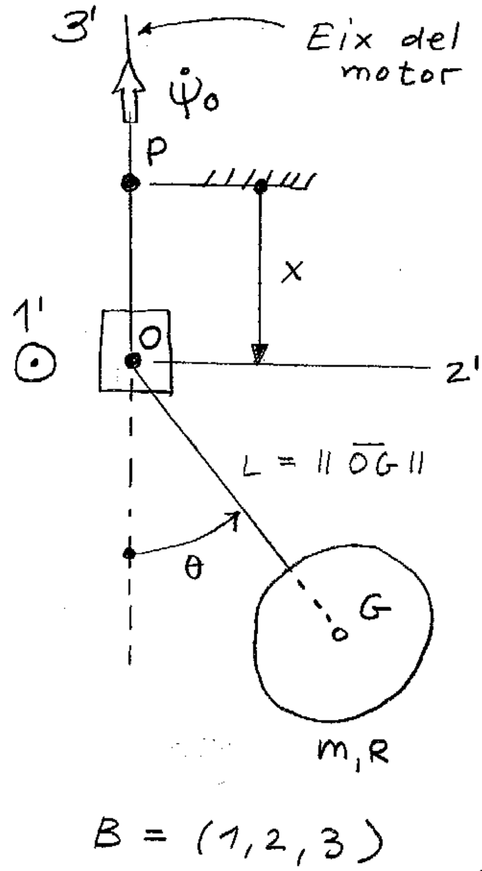
$$\boxed{(R^2+L^2)\,\ddot{\theta} - L\sin\theta\,\ddot{x} = \left(L\dot{\psi}_0^{\,2}\cos\theta - g\right)L\sin\theta} \quad \text{(IV)}$$

Versió que m'agrada a mi perquè permet identificar la matriu de masses (aquest concepte no l'hem explicat en aquest curs, i per tant "no entra", però al final de l'exercici identifico aquesta matriu i explico per a què serveix).

Sist = pèndol + suport, TQM$]_{3'}$

$$\sum \overline{F}_{ext} = m\, \overline{a}_T(G)$$

Podem calcular $\overline{a}_T(G)$ derivant dues vegades el vector de posició $\overline{PG}$ respecte el temps, on P és el punt de l'eix del motor que queda a l'altura de l'origen de la coordenada x.



$$\{\overline{PG}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L\sin\theta \\ -x - L\cos\theta \end{Bmatrix}$$

$\frac{d}{dt}$ tenint en compte que B gira amb $(\Uparrow \dot\psi_0)$ resp. T

$$\{\overline{v}_T(G)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L\dot\theta\cos\theta \\ -\dot x + L\dot\theta\sin\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ L\sin\theta \\ -x - L\cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L\dot\psi_0\sin\theta \\ L\dot\theta\cos\theta \\ -\dot x + L\dot\theta\sin\theta \end{Bmatrix}$$

d/dt

$$\{\overline{a}_T(G)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} -L\dot\psi_0\dot\theta\cos\theta \\ L\ddot\theta\cos\theta - L\dot\theta^2\sin\theta \\ -\ddot x + L\ddot\theta\sin\theta + L\dot\theta^2\cos\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -L\dot\psi_0\sin\theta \\ L\dot\theta\cos\theta \\ -\dot x + L\dot\theta\sin\theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -2L\dot\psi_0\dot\theta\cos\theta \\ L\ddot\theta\cos\theta - L\dot\theta^2\sin\theta - L\dot\psi_0^2\sin\theta \\ -\ddot x + L\ddot\theta\sin\theta + L\dot\theta^2\cos\theta \end{Bmatrix} \quad \text{(V)}$$

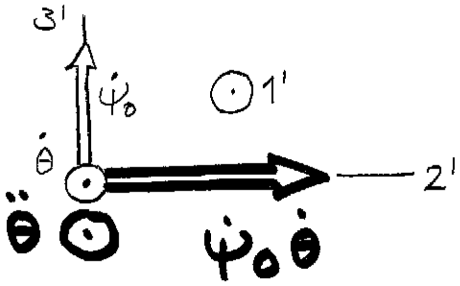
Via alternativa per calcular $\bar{a}_T(G)$

Com que $O \in$ Pèndol, podem aplicar cinemàtica del sòlid rígid d'acceleracions:

$$\bar{a}_T(G) = \bar{a}_T(O) + \bar{\Omega}^{\text{pènd}}_T \times \left(\bar{\Omega}^{\text{pènd}}_T \times \overline{OG}\right) + \bar{\alpha}^{\text{pènd}}_T \times \overline{OG}$$

$$\bar{\Omega}^{\text{pènd}}_T \overset{(*)}{=} (\Uparrow \dot{\psi}_0) + (\odot \dot{\theta}) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix}_{B'}$$

Derivant geomètricament



$$\bar{\alpha}^{\text{pènd}}_T = (\odot \ddot{\theta}) + (\Rightarrow \dot{\psi}_0 \dot{\theta}) = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\psi}_0 \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{B'}$$

$$\left\{\bar{a}_T(G)\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ L\sin\theta \\ -L\cos\theta \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\psi}_0 \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ L\sin\theta \\ -L\cos\theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \ldots = \begin{Bmatrix} -2L\dot{\psi}_0 \dot{\theta} \cos\theta \\ L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2 \sin\theta - L\dot{\psi}_0^2 \sin\theta \\ -\ddot{x} + L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta \end{Bmatrix}$$

(*) D'acord amb dibuix de pàg. anterior

veure dibuix pàg. 5, dreta

$$\left\{\sum \overline{F}_{ext}\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} F_{1'} \\ F_{2'} \\ \underbrace{\cancel{mg} + Kx}_{F^{at}_{molla}} - \cancel{mg} \end{Bmatrix} \qquad \text{(VI)}$$

Imposant (VI) = m (V) en dir. 3' obtenim

$$Kx = m\left(-\ddot{x} + L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x - L\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) = 0}$$ Versió Wikimec

$$\boxed{\ddot{x} - (L\sin\theta)\ddot{\theta} = -\frac{K}{m}x + L\dot{\theta}^2\cos\theta} \qquad \text{(VII)}$$

Material extra que no entra en aquest curs

(IV) i (VII) formen l'EDO vectorial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R^2+L^2 & -L\sin\theta \\ -L\sin\theta & 1 \end{bmatrix}}_{M \,\leftarrow\, \text{Matriu de masses}} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (L\dot{\psi}_0^2\cos\theta - g)L\sin\theta \\ -\frac{K}{m}x + L\dot{\theta}^2\cos\theta \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}}$$

M és invertible perquè $\det(M) = R^2 + L^2 - L^2\sin^2\theta > 0$

Per tant, multiplicant per M^{-1} podem aillar $\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{M^{-1} \cdot \mathcal{F}}$$

Aquest terme depèn de les variables d'estat mecànic $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x})$

Així doncs, obtenim una EDO de 2n ordre amb dues variables, de la forma

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}) \qquad \text{(VIII)}$$

on

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} \qquad \left(q \text{ és una tupla de 2 variables} \right)$$

L'equació (VIII) és la que us permetria simular l'evolució del sistema aplicant, per exemple, el mètode d'Euler, o Runge-Kutta IV, a una reducció de l'eq. (VIII) a sistema de primer ordre.

Si algú en vol més detalls, pregunteu-m'ho!

Material extra que no entra