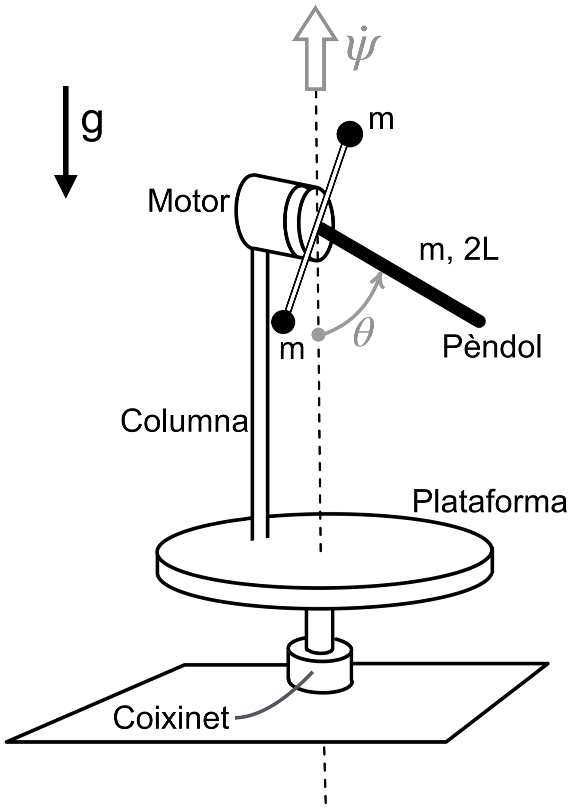
Velocitat angular final de plataforma

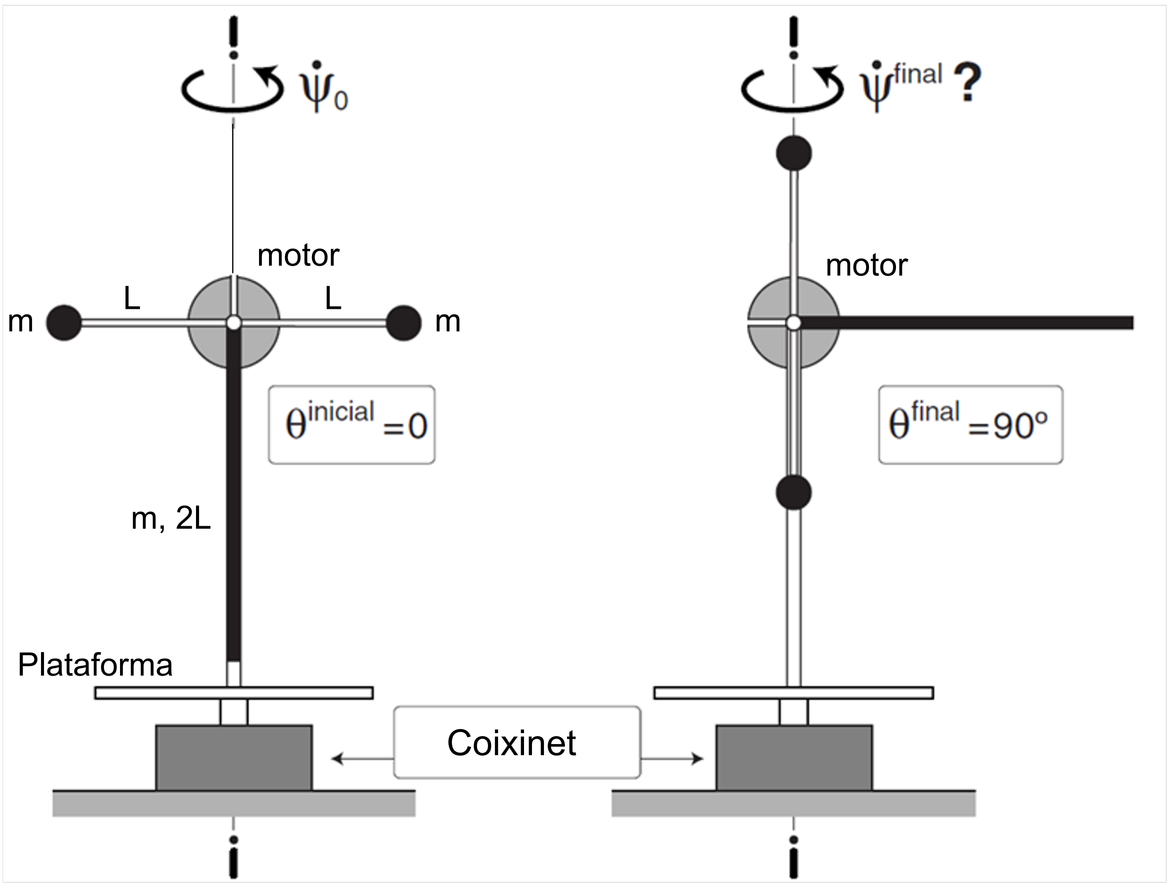
Variació de P1, gener 2015

El pèndol de la figura està format per una barra homogènia de massa m i longitud 2L unida a una barra de massa negligible i longitud 2L. Aquesta última té dues partícules de massa m unides als seus extrems.

El pèndol està articulat, amb eix horitzontal, a una columna vertical solidària a la plataforma, la qual, per la seva banda, està articulada amb el terra amb eix vertical, mitjançant un coixinet. Mentre que la velocitat angular $\dot{\theta}$ del pèndol respecte de la plataforma és forçada per un motor, la de la plataforma respecte del terra, $\dot{\psi}$, és lliure. En l'instant inicial, $\theta = \theta^{\text{inicial}} = 0$, i $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$. Si a partir d'aquest instant el motor incrementa progressivament l'angle θ, quin valor tindrà $\dot{\psi}$ quan $\theta = \theta^{\text{final}} = 90°$?

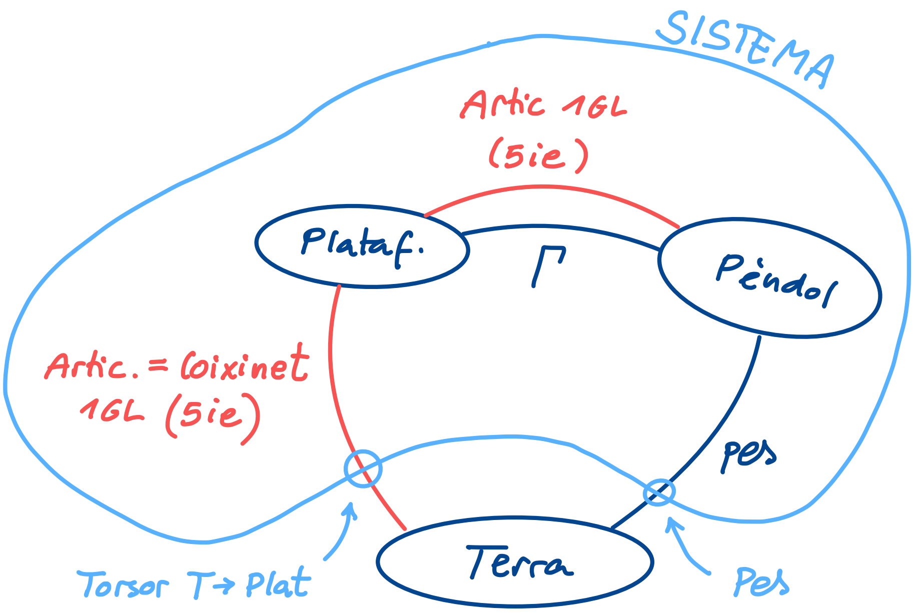
Les masses del motor, la columna i la plataforma, així com les friccions en tots els elements, són negligibles.

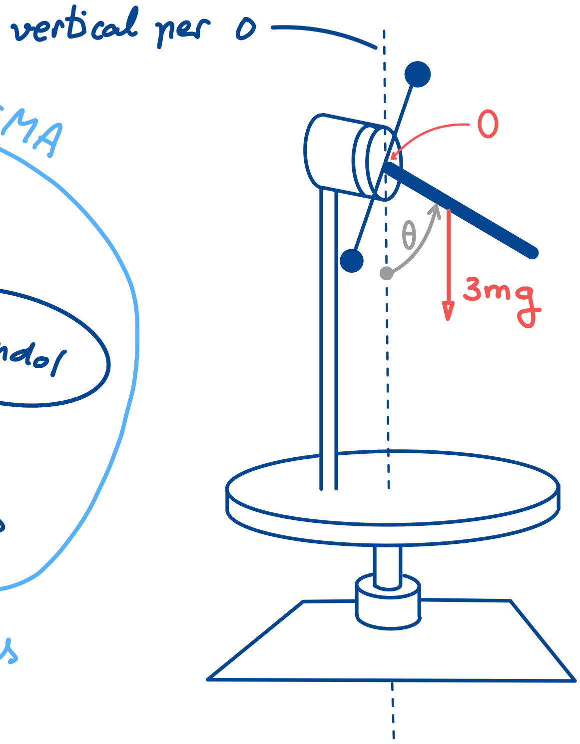




Aquest exercici il·lustra com es pot invocar la conservació d'una magnitud dinàmica (en aquest cas el moment cinètic) per determinar el valor d'una variable d'estat (en aquest cas $\dot{\varphi}$) en un cert instant de temps.

DG1





Prenent sistema = Plataf + Pèndol, les úniques interaccions externes són el torsor Terra → Plataf. i el pes. Quina forma té l'esmentat torsor, referit a O? (*) Independentment de la base triada per representar-lo la component vertical del seu moment ha de ser zero perquè l'articulació del coixinet no pot transmetre moment en aquesta direcció. Per altra banda, el pes del pèndol no genera moment en dir. vertical. Per tant, aplicant TMC a O, tenim

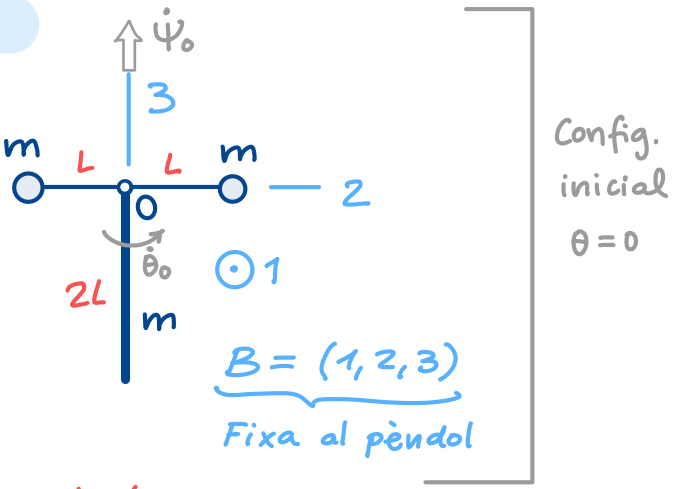
$$\underbrace{\left[\sum \bar{M}_{ext}(O)\right]_{vertical}}_{0} = \left[\dot{\bar{H}}_{RTO}(O)\right]_{vertical} \Rightarrow \underbrace{\left[\bar{H}_{RTO}(O)\right]_{vertical}}_{\text{Es conserva!}} = ct$$

(*) En ser O sobre l'eix del motor, és de caracterització immediata

La component vertical del $\overbrace{\text{mom. cinètic}}^{MC}$ del sistema s'ha de conservar. Calcularem el MC inicial i el final, en dir. vertical, i els igualarem. D'aquí en sortirà una relació entre $\dot{\psi}_0$ i $\dot{\psi}_f$ que permetrà determinar $\dot{\psi}_f$.

L'únic sòlid amb massa és el pèndol. Per tant, és l'únic que contribueix al MC del sistema.

Moment cinètic inicial $(\theta = 0°)$



$$\overline{H}^{ini}_{RTO}(0) = \mathbb{I}(0)\,\overline{\Omega}^{pènd,ini}_{T}$$

El tensor d'inèrcia del pèndol és:

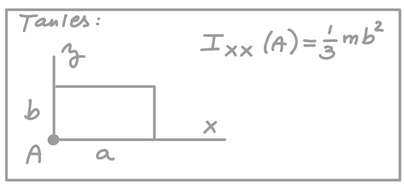
$$\left[\mathbb{I}(0)\right]_B = \overbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 0 \end{bmatrix}}^{\text{barra}} + \overbrace{\begin{bmatrix} I' & & \\ & 0 & \\ & & I' \end{bmatrix}}^{\text{masses puntuals}} = \begin{bmatrix} I+I' & & \\ & I & \\ & & I' \end{bmatrix}$$

on:

$$I = \underbrace{\frac{m\,(2L)^2}{12}}_{\substack{\text{mom. inèrcia}\\ \text{barra prima}\\ \text{resp. el seu}\\ \text{centre inèrcia}\\ \text{(taules)}}} + \underbrace{m \cdot L^2}_{\substack{\text{correcció}\\ \text{d'Steiner}}} = \frac{mL^2}{3} + mL^2 = \underbrace{\frac{4}{3}mL^2}$$

També es pot obtenir a partir del moment d'inèrcia d'un rectangle prim (v. taules), així:

$$I = \frac{1}{3}m\,b^2 = \frac{1}{3}m\,(2L)^2 = \frac{4}{3}mL^2$$



$$I' = \underbrace{2mL^2}$$

mom. inèrcia de les masses puntuals resp. eixos 1 o 3 que passen per O vel. ang. inicial del pèndol (*)

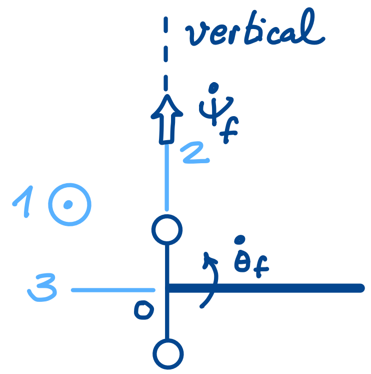
$$\left\{\bar{H}^{ini}_{RTO}\right\}_B = \begin{bmatrix} I+I' & & \\ & I & \\ & & I' \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot\theta_0 \\ 0 \\ \dot\psi_0 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ I'\dot\psi_0 \end{Bmatrix} \leftarrow \text{Dir. vertical}$$

Per tant:

$$\left.\bar{H}^{ini}_{RTO}\right]_{vertical} = \left(\Uparrow I'\dot\psi_0\right) = \left(\Uparrow 2mL^2\dot\psi_0\right) \qquad (I)$$

Moment cinètic final ($\theta = 90°$)

Per a l'instant final utilitzem novament la base solidària al pèndol $B=(1,2,3)$ que ara ha girat 90° $\longrightarrow$



Config. final $\theta = 90°$

Ara la dir. vertical és la 2!

Mateix que abans perquè B és la mateixa

vel. ang. final del pèndol en base B

$$\left\{\bar{H}^{fin}_{RTO}(0)\right\}_B = \begin{bmatrix} I+I' & & \\ & I & \\ & & I' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot\theta_f \\ \dot\psi_f \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ I\dot\psi_f \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \frac{4}{3}mL^2\dot\psi_f \\ \cdot \end{Bmatrix} \leftarrow \text{Dir. vert.}$$

$$\left.\bar{H}^{fin}_{RTO}(0)\right]_{vertical} = \left(\Uparrow \frac{4}{3}mL^2\dot\psi_f\right) \qquad (II)$$

Igualant (I) = (II)

$$2\cancel{mL^2}\dot\psi_0 = \frac{4}{3}\cancel{mL^2}\dot\psi_f \Rightarrow \boxed{\dot\psi_f = \frac{3}{2}\dot\psi_f}$$

(*) $\bar{\Omega}^{Pèndol}_{T} = \bar{\Omega}^{Pèndol}_{Plataf} + \bar{\Omega}^{Plataf}_{T}$

<u>Observació</u>: De l'enunciat no queda clar quins valors tenen $\dot{\theta}_0$ i $\dot{\theta}_f$. Potser són zero, o potser no. Hem assumit que no eren zero, però com veiem a la solució aquesta assumpció no té cap efecte en el resultat. Això es deu a que la figura és plana $\Rightarrow$ la dir. 1 és DPI $\Rightarrow [\mathbb{I}(O)]_B$ té zeros que anul·len l'efecte de $\dot{\theta}_0$ i $\dot{\theta}_f$.