



Versió 1.3

Molles i amortidors

Enllaç partícula-superfície i
condicions límit d'enllaç

Lluís Ros

<https://lluisros.github.io/mecanica>

La sessió d'avui combina petits blocs de teoria amb exercicis relacionats.

Contingut:

Introducció

Teoria sobre molles i amortidors

Exercicis de molles i amortidors

Teoria sobre enllaç partícula-superfície: forces d'enllaç, condicions límit d'enllaç, caracterització de forces d'enllaç, fregament versus fricció, i models de fregament sec i viscos.

Exercicis sobre dinàmica de la partícula

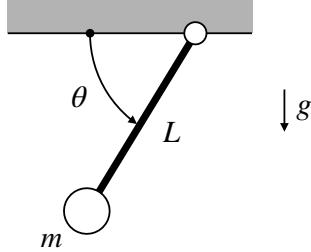
Introducció

Acabem de començar dinàmica i cal anticipar cap a on ens dirigim!

Al principi de curs vam comentar que l'objectiu principal d'aquesta assignatura és obtenir les equacions del moviment dels sistemes mecànics. És a dir, les equacions diferencials ordinàries (EDOs) que determinen com es mouen aquests sistemes a partir d'unes condicions inicials (c.i.).

Com veurem, l'evolució d'un sistema mecànic queda descrita per EDOS de 2n ordre expressades mitjançant les coordenades de configuració del sistema (les x , y , ψ , θ , ... que venim utilitzant en cada problema) i les seves derivades temporals de 1er i 2n ordre (\dot{x} , \dot{y} , $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, ..., i \ddot{x} , \ddot{y} , $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, ...).

Per il·lustrar-ho, pensem en un sistema senzill, com ara un pèndol amb tota la massa concentrada al seu extrem, només sotmès a la gravetat:



Veurem ben aviat que l'equació del moviment d'aquest pèndol és

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{g}{L} \cos \theta(t), \quad (1)$$

que clarament és una EDO de 2n ordre (involucra θ i les derivades temporals de θ fins a ordre 2, però no derivades d'ordre superior). De la teoria d'EDOs sabem que, en ser (1) de 2n ordre, l'evolució futura del pèndol queda determinada per (1) i per les condicions inicials

$$\theta(0), \dot{\theta}(0). \quad (2)$$

És a dir, hi ha una única funció $\theta(t)$ que satisfà (1) i (2) a la vegada. A les assignatures de matemàtiques us expliquen que (1) i (2) defineixen un problema de valor inicial (PVI), la solució del qual és la funció $\theta(t)$ esmentada. Així doncs, per saber l'evolució futura del pèndol cal resoldre aquest PVI. I com ho podem fer? Gairebé mai de manera analítica! En general haurem de recórrer a mètodes numèrics d'integració d'EDOs (com ara els mètodes d'Euler, del punt mig, o de Runge Kutta 4, per exemple). Podeu provar de resoldre (1) i (2) vosaltres mateixos amb MATLAB si voleu, via el mètode d'Euler. És fàcil de programar i molt instructiu!

En sistemes mecànics més complexos no tindrem una sola variable sinó vàries, i en lloc d'una EDO en tindrem vàries també (un sistema d'EDOs), però conceptualment caldrà fer el mateix: resoldre un PVI com el de (1) i (2) per saber com evoluciona el sistema partint de les condicions inicials (2).

Un punt clau a recordar és que, en quedar descrit per una EDO d'ordre 2, l'evolució futura del sistema queda determinada per les seves condicions inicials de posició i velocitat (2 nivells). Si fos d'ordre 3, les condicions inicials inclourien la posició, la velocitat i l'acceleració (3 nivells) però no és el cas! Amb 2 nivells n'hi ha prou! És per això que **l'estat mecànic** d'un sistema es defineix com la posició i velocitat de totes les seves partícules en un cert instant de temps. N'hi ha prou amb saber l'estat mecànic en un cert instant t_0 per predir com es mourà el sistema per $t > t_0$. Com hem fet a (2), típicament triem $t_0 = 0$.

L'estat mecànic d'un sistema es codifica de manera compacta mitjançant l'ús de coordenades. En el pèndol, per exemple, l'estat queda descrit per la parella $(\theta, \dot{\theta})$. Clarament, els valors de $(\theta, \dot{\theta})$ en un cert instant són suficients per determinar la posició i velocitat de qualsevol partícula del pèndol en aquest instant.

En aquest curs ens centrarem en obtenir equacions del moviment, però no les resoldrem numèricament. Sempre podeu aplicar els mètodes apresos a càcul numèric per fer-ho. El que sí que farem és estudiar el comportament dels sistemes al voltant de configuracions d'equilibri.

Sapigueu, però, que la capacitat de resoldre EDOs numèricament ha sigut, i segueix essent clau per als desenvolupaments tecnològics moderns. Abans de construir un sistema, primer caldrà simular-lo (predir com es mourà, per validar-lo o millorar-ne el disseny) i per això cal resoldre PVIIs definits per EDOs que en descriuen el comportament. Un cop construïts els sistemes, també els voldrem controlar, i novament caldrà resoldre PVIIs i altres problemes relacionats. Aquests coneixements són fonamentals en enginyeria.

I com obtindrem les equacions del moviment en el nostre cas? Doncs aplicant la 2a llei de Newton si el sistema és senzill, o els teoremes vectorials en casos més complexos. Per fer-ho, us caldran els coneixements previs de cinemàtica, i haureu d'identificar bé totes les forces que entren en joc en el sistema. A teoria ja us han explicat que aquestes forces poden ser de dos grans tipus:

- **D'interacció:** les que les partícules s'apliquen entre elles.
- **D'inèrcia:** les introduïdes per una referència no Galileana quan s'estudia el sistema des d'aquesta referència.

Les forces d'interacció, per la seva banda, poden ser:

- **Formulables:** són les que es poden expressar en funció de l'estat mecànic del sistema. Com a formulables que són, sempre en sabrem la seva expressió a priori, i mai seran incògnites a determinar. Això sí, les haureu de saber formular en funció de les coordenades que descriuen el sistema.
- **No formulables:** són les d'enllaç i les aplicades per actuadors.

La pàgina següent n'ofereix una classificació que haureu de tenir ben present i que ja s'ha començat a explicar a teoria. Avui veurem les forces generades per molles i amortidors i les d'enllaç entre partícula i superfície. També veurem les condicions límit d'enllaç que aquestes darreres introduceixen.

Classificació de les forces d'interacció entre dues partícules P i Q

Forces formulables

ρ = separació entre P i Q

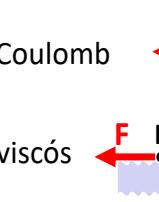
$$(1) \quad F_{Q \leftrightarrow P} = f(\rho)$$

Directes:  $F_{Q \leftrightarrow P} = G(m_P m_Q / \rho^2)$

Indirectes:  $\Delta F_{Q \leftrightarrow (EI) \leftrightarrow P} = k \Delta \rho$

$$(2) \quad F_{Q \leftrightarrow P} = f(\dot{\rho})$$

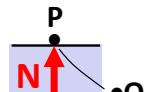
friccionis

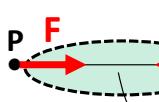
Directes:  $F_{Q \leftrightarrow P} = \mu N$ $F_{Q \rightarrow P} = c v_{RQ}(P)$

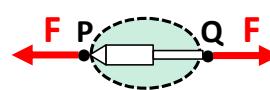
Indirectes:  $F_{Q \leftrightarrow (EI) \leftrightarrow P} = c \dot{\rho}$

Forces no formulables

$$(3) \quad \text{Enllaç } F_{Q \leftrightarrow P} = ??$$

Directes: 

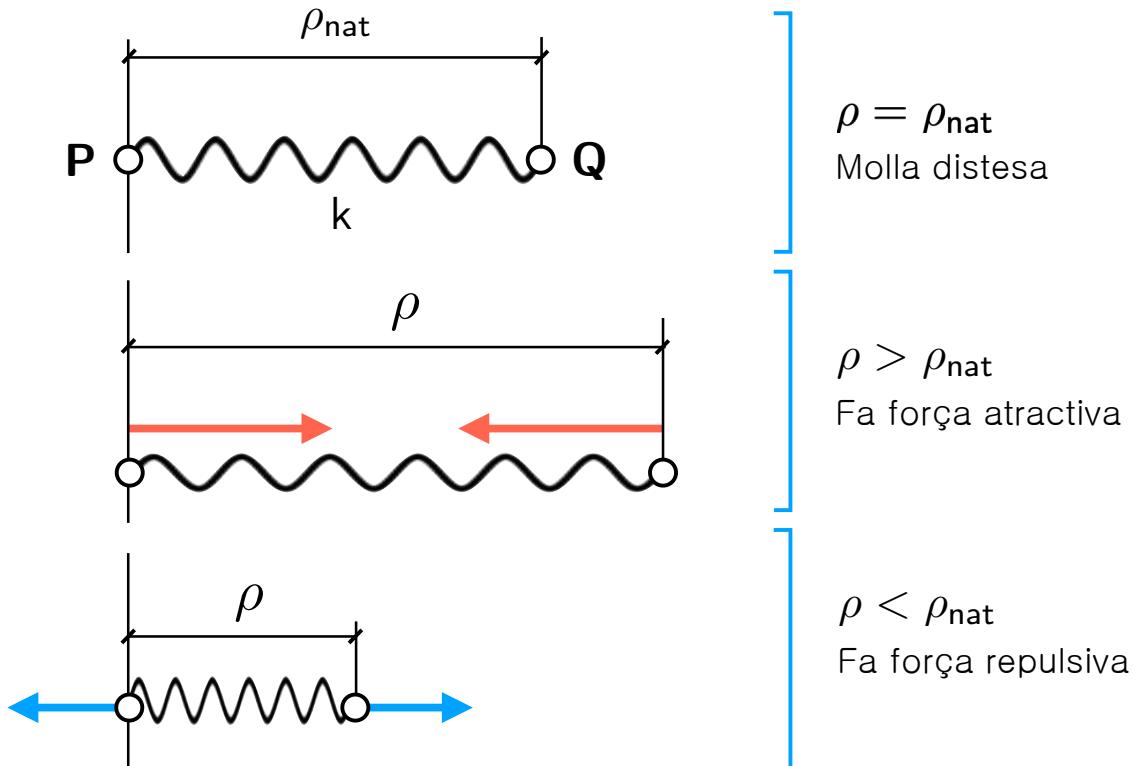
Indirectes:  *fil inextensible*

$$(4) \quad \text{Actuadors - Indirectes: } \begin{cases} F_{Q \leftrightarrow P} = ?? & \text{incògnita} \\ F_{Q \leftrightarrow P} = F(t) & \text{dada} \end{cases}$$


“??” = “són incògnita en el problema dinàmic”.

Interacció per mitjà de molles

Les molles introduceixen forces atractives o repulsives entre els seus extrems en funció de la seva deformació. A partir de la seva llargària natural ρ_{nat} (per a la qual no es produeix força entre els extrems de la molla), un allargament ($\rho - \rho_{\text{nat}} > 0$) provoca forces atractives, mentre que un escurçament ($\rho - \rho_{\text{nat}} < 0$) en provoca de repulsives:



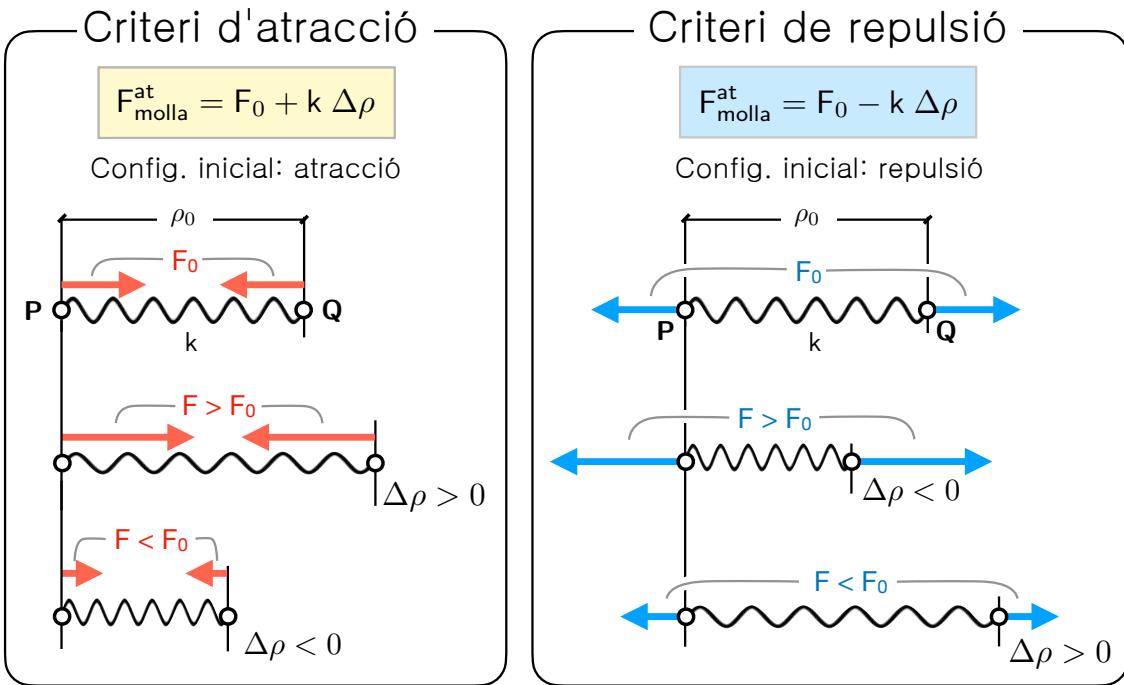
La formulació matemàtica d'aquestes forces s'obté de manera empírica a partir d'assajos que mesuren la força en funció del canvi de llargària. Habitualment es parteix d'una configuració inicial de referència¹ on la llargària ρ_0 de la molla no coincideix necessàriament amb la natural, de manera que la molla està fent, en aquesta configuració, una certa força F_0 entre els seus extrems. Si $\rho_0 > \rho_{\text{nat}}$, la força F_0 és atractiva. En cas contrari ($\rho_0 < \rho_{\text{nat}}$), és repulsiva.

Les molles que es consideren en aquest curs són de comportament lineal: la variació de força ΔF a partir del valor de referència ($\Delta F = F - F_0$) és proporcional a la variació de llargària $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ per mitjà d'una constant k .

Una molla que forma part d'un sistema mecànic pot introduir forces que poden ser atractives o repulsives al llarg del temps. Tot i així, aquestes forces es dibuixen amb un criteri únic (atractives o repulsives), i es formulen de manera que el seu valor pugui canviar de signe durant l'evolució del sistema. D'aquesta manera, amb un únic dibuix es poden representar forces que poden canviar de sentit.

¹Típicament es tria una configuració en la que el sistema es troba en equilibri estàtic.

Si per a la llargària inicial ρ_0 la força F_0 és atractiva, dibuixarem la força de la molla com atractiva, i la formularem amb el criteri d'atracció. Si, en canvi, F_0 és repulsiva, la dibuixarem com a repulsiva i la formularem amb el criteri de repulsió.



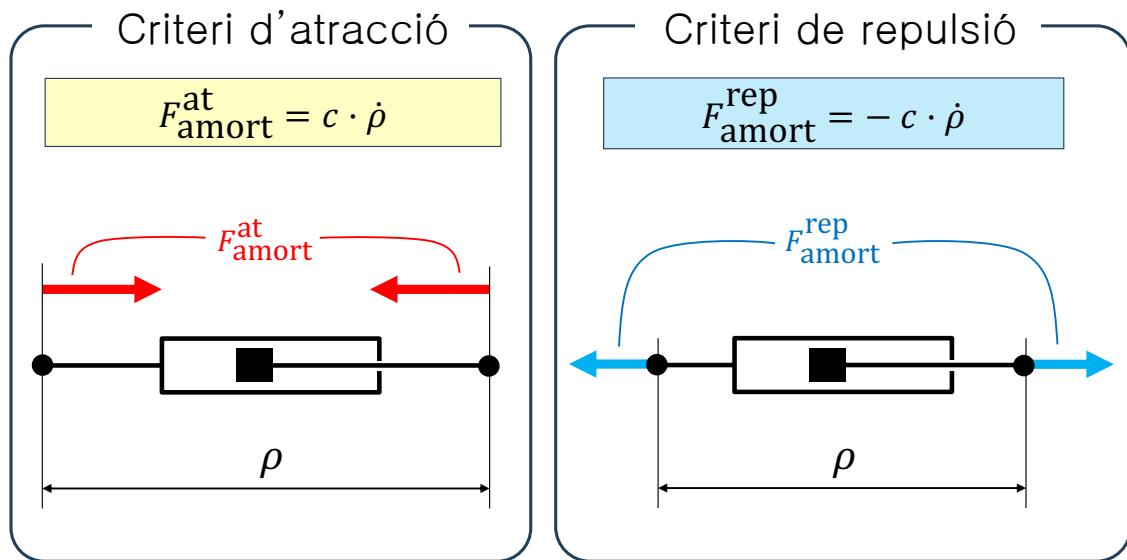
IMPORTANT:

En cada problema, caldrà expressar els increments $\Delta\rho$ en funció de les coordenades utilitzades per descriure la configuració del sistema.

Interacció per mitjà d'amortidors

Els amortidors lineals introduceixen forces atractives o repulsives entre els seus extrems en funció de la seva velocitat de deformació $\dot{\rho}$. Quan els extrems de l'amortidor s'allunyen, la força és atractiva; quan s'apropen, és repulsiva. A diferència de les molles, els amortidors no exerceixen cap之力 entre els seus extrems en situacions estàtiques.

La força associada als amortidors de comportament lineal és proporcional a $\dot{\rho}$ per mitjà d'un coeficient c de freq viscós. Si decidim dibuixar la força com atractiva, la formularem amb el criteri d'atracció. Si, en canvi, decidim dibuixar-la com repulsiva, la formularem amb el criteri de repulsió:



En els sistemes mecànics, els amortidors apareixen sovint muntats en paral·lel amb una molla. En aquest cas, formularem la força de l'amortidor amb el mateix criteri que haguem triat per a la molla (d'atracció o de repulsió).

Quan un amortidor no formi part d'un grup molla-amortidor, el criteri es fixa arbitràriament.

IMPORTANT:

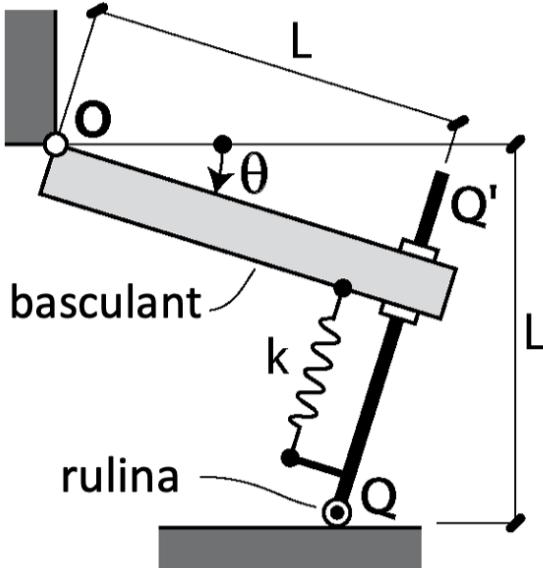
Anàlogament al cas de les molles, en cada problema caldrà expressar $\dot{\rho}$ en funció de les coordenades d'estat del sistema.

Exercicis de molles i amortidors

El basculant està articulat amb el terra en el punt **O**. La barra prima **QQ'** té un enllaç prismàtic amb el basculant, i el seu extrem **Q** és en contacte amb el terra mitjançant una rulina de radi negligible. Per $\theta = 0$ el sistema es troba en equilibri i la molla fa una força F_0 .

Formuleu la força de la molla en funció de θ .

Equilibri per a $\theta = 0$, $F_m(\theta = 0) = F_0$



$F_{\text{rep}}^{\text{molla}}(\theta)?$

En els problemes de formulació de molles sempre començarem:

- Identificant la configuració inicial (de referència) que defineix F_0 . En aquest cas és la que correspon a $\theta = 0^\circ$, que ens diuen que és d'equilibri.
- Esbrinant si F_0 és una dada o no: en aquest cas no es, ja que l'enunciat la proporciona. En altres casos potser no ens donaran F_0 però, en canvi, tindrem els valors que calquin (com ara masses dels solids) per a deduir-ne el valor imposant les condicions d'equilibri estàtic (ja que, típicament, la config. inicial de referència serà d'equilibri).
- Determinant si F_0 és atractiva o repulsiva: en aquest cas és repulsiva, ja que si per $\theta = 0$ tallem la molla, el basculant cau.

Solució

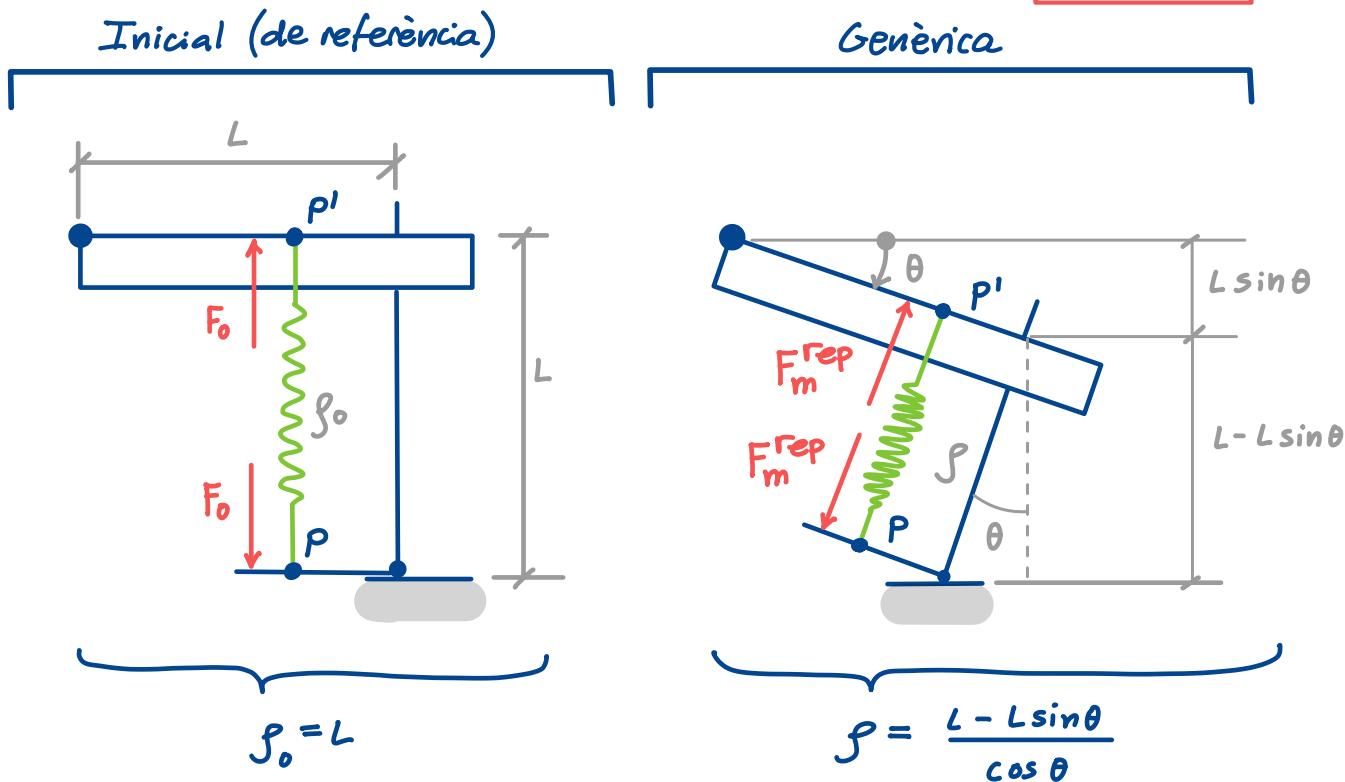
Podem suposar que la molla està enganxada als punts P i P' ja que l' Δg serà igual al que es produueix entre els extrems reals Q i Q' de la molla (les distàncies constants no afecten l' Δg).

F_0 és repulsiva \Rightarrow Utilitzarem criteri de repulsió.

Cal trobar Δg i escriure'l en funció de θ .

La coordenada
de configuració

$$F_{\text{molla}}^{\text{rep}} ?$$

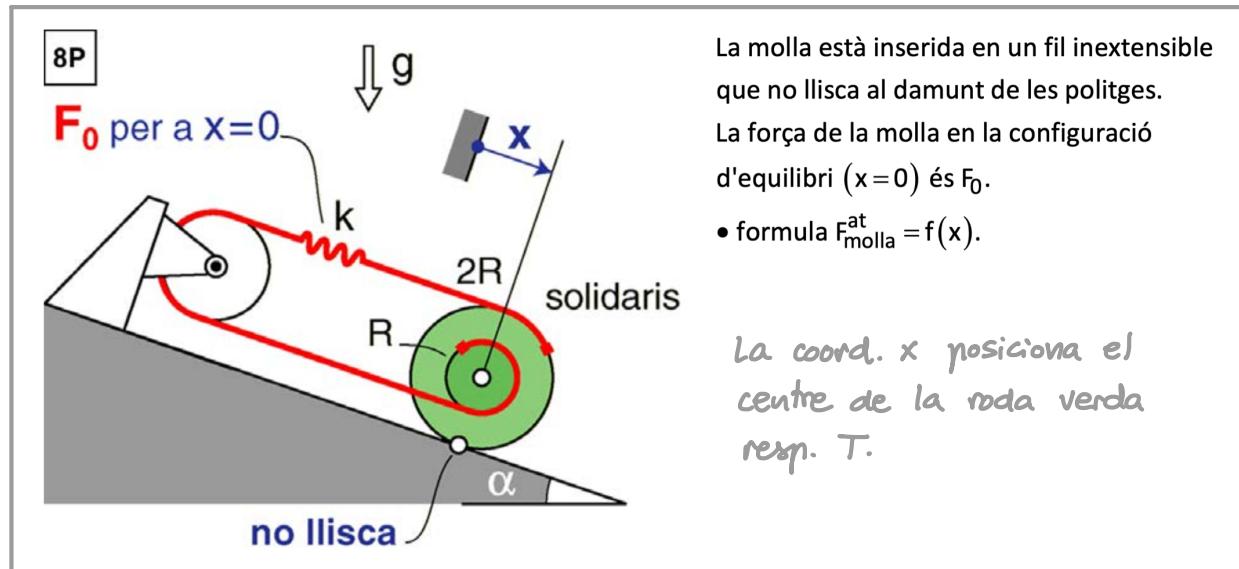


$$\Delta g = g - g_0 = \frac{L - L \sin \theta}{\cos \theta} - L = L \left(\frac{1 - \sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta} \right)$$

$$F_m^{\text{rep}} = F_0 - K \Delta g =$$

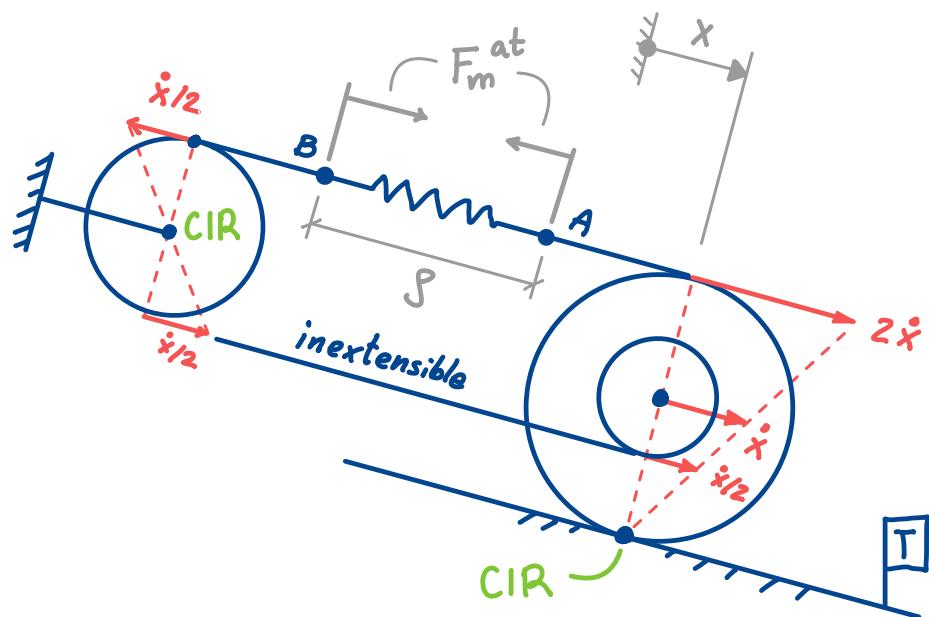
$$F_0 - K L \left(\frac{1 - \sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta} \right) = F_0 + K L \left(\frac{\cos \theta + \sin \theta - 1}{\cos \theta} \right)$$

(*) Ja quadra: Δg serà negatiu en passar de la config. inicial de referència a la genèrica $\Rightarrow -K \Delta g$ serà un increment positiu que fa augmentar F_m^{rep}

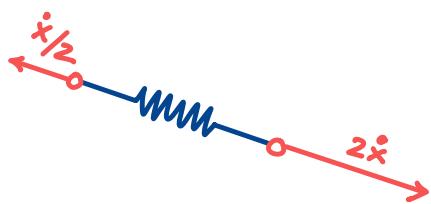


Sist. amb 1 GL. La config. inicial de referència és $x=0$. F_0 és una dada pq l'enunciat la dona. F_0 és atractiva pq si en la situació d'equilibri ($x=0$) tallem la molla, el carro cau.

En exercicis com aquest, en els que tenim una molla inserida a un fil inextensible que s'enrotlla sobre corrons, calcularem Δg buscant primer \dot{g} i integrant-lo en el temps des de $t=0$ (instant de la config. inicial) a $t=t$ (instant genèric "actual" del dibuix). Per trobar \dot{g} ens cal primer buscar les velocitats dels extrems A i B de la molla en alguna referència on aquests tinguin la direcció de la molla. En aquest exemple ja ens va bé la ref. T (en altres no !):



De l'anàlisi de velocitats anterior veiem que les velocitats dels extrems A i B de la molla són:



Ergo la molla s'allarga a ritme

$$\dot{f} = 2\dot{x} + \frac{\dot{x}}{2} = \frac{5}{2}\dot{x}$$

Calculem Δp integrant \dot{f} des de $t=0$ (config. inicial de referència) fins a $t=t$ (instant genèric actual):

$$\begin{aligned} \boxed{\Delta p} &= \int_0^t \dot{f}(t) dt = \int_0^t \frac{5}{2} \dot{x}(t) dt = \\ &= \frac{5}{2} \int_0^t \dot{x}(t) dt = \frac{5}{2} \left[x(t) \right]_0^t = \\ &= \frac{5}{2} \left[x(t) - \underbrace{x(0)}_0 \right] = \boxed{\frac{5}{2} x} \end{aligned}$$

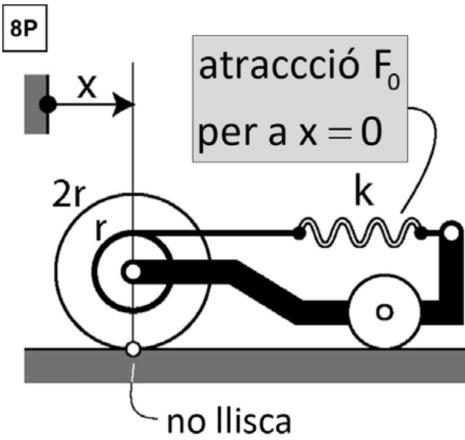
Ho sabem de l'enunciat
(la config. de referència és $x=0$)

Já no posem
la dependència de t

Ara ja es fàcil:

$$\boxed{F_m^{at} = F_0 + K \Delta p = F_0 + K \frac{5}{2} x}$$

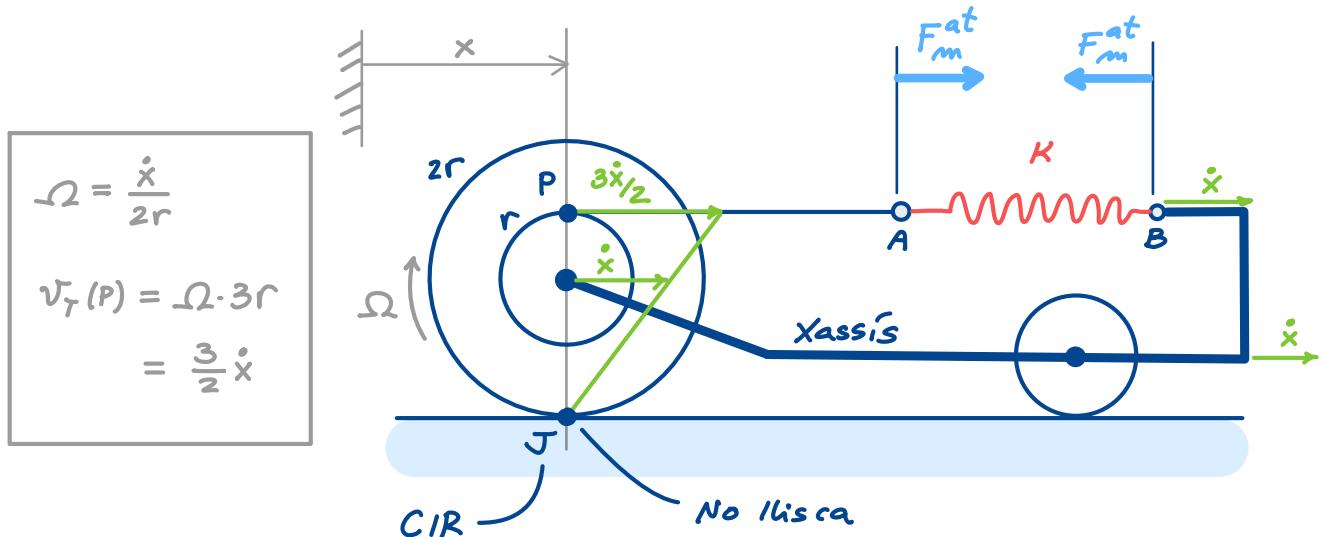
Expressió de la força de la molla
en funció de la variable de
configuració x del sistema



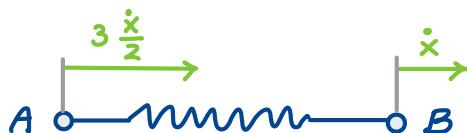
La molla està inserida en un fil inextensible amb un extrem lligat al xassís del carro i l'altre al contorn d'una politja. La coordenada x posiciona el centre de la roda posterior respecte del terra (T).

- formula $F_{\text{molla}}^{\text{at}} = f(x)$.

$F_{\text{molla}} \text{ atractiva per } x = 0 \Rightarrow \text{Utilitzem criteri d'atracció (CA).}$



J no llisca \Rightarrow Tenim la distribució de velocitats verda a la la roda esquerra. Als extrems de la molla tenim les velocitats:



Per tant, la molla s'escura amb velocitat

$$\dot{f} = \dot{x} - \frac{3\dot{x}}{2} = -\frac{\dot{x}}{2} \quad \text{Negativa perquè s'escura!}$$

Ergo:

$$\Delta f = \int_0^t \dot{f} dt = \int_0^t \left(-\frac{\dot{x}}{2}\right) dt = -\left[\frac{x}{2}\right]_0^t = -\frac{x}{2}$$

I per tant

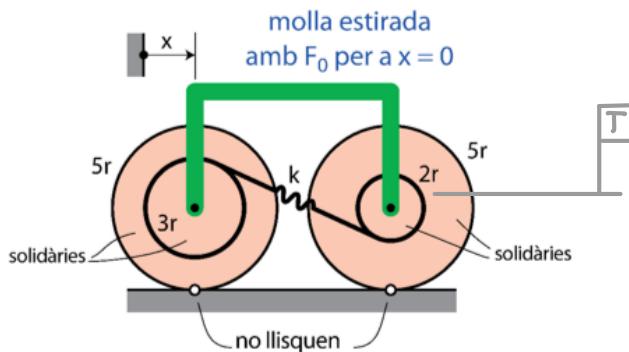
$$F_m^{\text{at}} = F_0 + K \Delta f = F_0 - K \frac{x}{2}$$

Cal dibuixar-la atractiva a la figura, tal i com he fet

En exercicis de molles inserides en fils inextensibles que s'enrotllen a corrons, hi pot haver casos en que calgui calcular les velocitats dels extrems de la molla en una referència diferent de T, ja que si les calculem a T no surten longitudinals a la molla (cosa que no permet determinar $\dot{\theta}$). El següent exemple ho il·lustra:

TP-G10, 3 abril 2025

Quina és l'expressió de la força d'atracció de la molla en funció de x ?



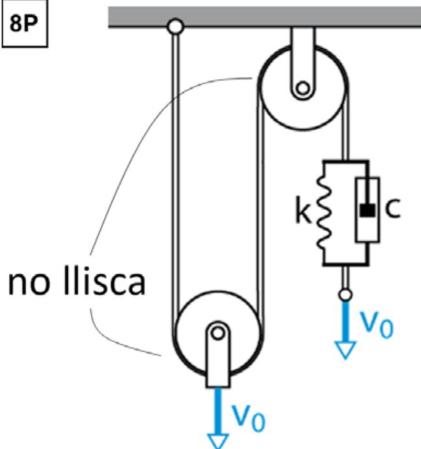
Pista:

Calculeu $\dot{\theta}$ buscant les velocitats dels extrems de la molla en la referència xassís (barra verda).

Solució:

https://lluisros.github.io/mecanica/problemes/8P_extra.pdf

8P

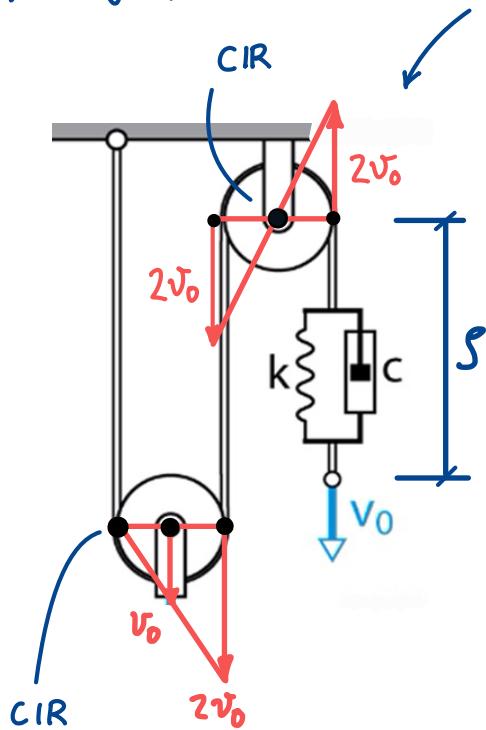


El grup molla-amortidor està inserit en un fil inextensible que no llisca al damunt de les politges. El centre de la politja inferior i el d'un extrem de l'amortidor respecte del terra (T) és v_0 .

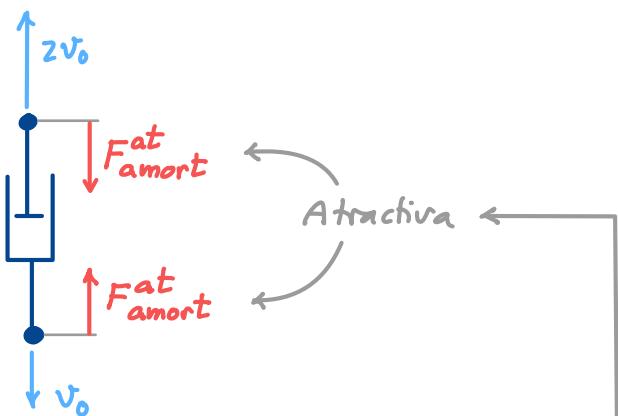
- formula $F_{\text{amort}} = f(v_0)$.

Formulació de $F_{\text{amort}}(v_0)$

Per cinemàtica plana, tenint en compte els CIRs de les politges, tenim les velocitats



Per tant, als extrems de l'amortidor tenim les velocitats blaves:



Clarament, quan $v_0 > 0$, l'amortidor s'allarga a ritme

$$\dot{s} = 2v_0 + v_0 = 3v_0$$

i aplica una força atractiva entre els seus extrems. Formulant aquesta força amb el criteri d'atracció queda

$$F_{\text{at}}^{Famort}(v_0) = c \cdot 3v_0$$

— Al dibuix pintem la força attractiva

Hauríem pogut formular $F_{\text{amort}}(v_0)$ amb el criteri de repulsió?

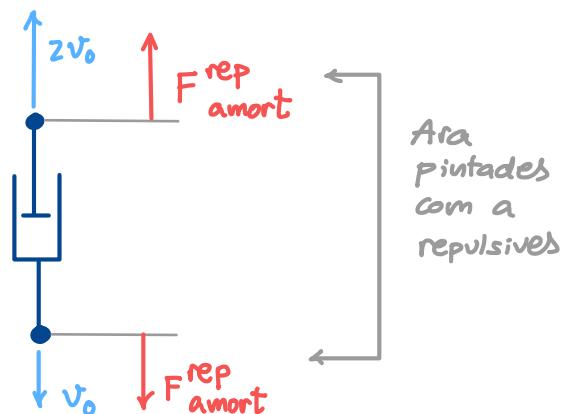
Sí! Tenim llibertat per triar el criteri perquè no ens demanen de formular també la força de la molla que hi ha en paral·lel amb l'amortidor. Si ens ho haguessin demanat, no tindriem aquesta llibertat: caldria haver triat el mateix criteri que per a la molla (que seria d'atracció si la F_0 de la molla fos atractiva, o de repulsió contràriament).

Com es formula $F_{\text{amort}}(v_0)$ amb el criteri de repulsió?

Simplement així

$$F_{\text{amort}}^{\text{rep}} = -c_3 v_0$$

Però aleshores, al dibuix, cal dibuixar la força com a repulsiva



I això ja quadra?

Sí! Vegeu-ho:

Quan $v_0 > 0$, l'amortidor s'allarga a ritme $\dot{x} = 3v_0$. El valor $F_{\text{amort}}^{\text{rep}}$ valdrà $-c_3 v_0$, que és negatiu. Per tant la força real entre els extrems serà de sentit contrari al dibuixat.

I ja és el que cal perquè l'amortidor, en allargar-se fa una força atractiva entre els seus extrems (no repulsiva).

I no és més natural el criteri d'atracció en aquest cas?

Sí, perquè tendim a voler dibuixar la força en el sentit que el valor v_0 positiu provoca. Però els dos criteris serien vàlids sempre que dibuixem les forces amb el sentit que en cada un d'ells toca al dibuix.

Teoria sobre enllaç partícula - superfície

Forces d'enllaç ("constraint forces" en anglès)

Els enllaços

- Restringeixen el movim. relatiu entre
 - partícules
 - " i superfícies
 - sòlids
- Apliquen forces que prenen el valor que calgui per garantir les restriccions d'enllaç

Quan parlem de "partícula," sovint volem dir "model partícula".

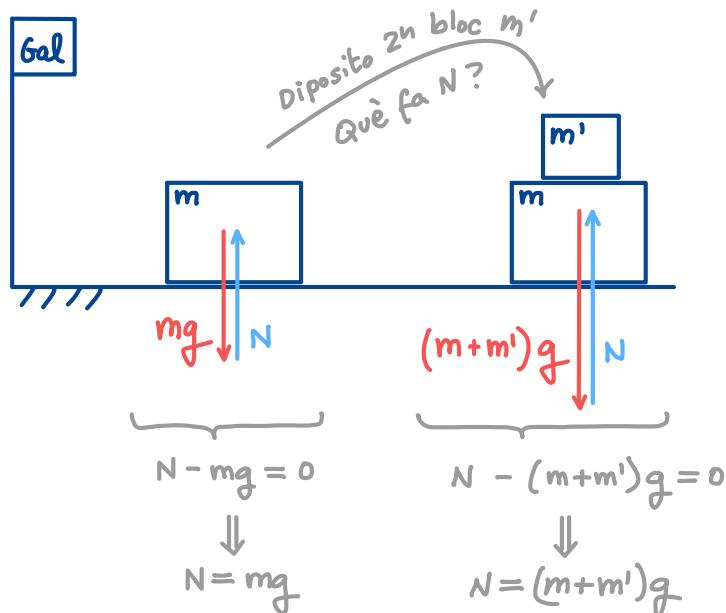
Sovint tractem un sòlid com si fos una partícula, si la seva mida és irrelevante en un cert context.

Exemple de força d'enllaç

Considerem un bloc estàtic a terra, de massa m . Repassem el catàleg de forces, mirant quines li són aplicades (✓) i quines no (✗):

- ✓ Pes
- ✗ Molles
- ✗ Amortidors
- ✗ Fricció (*)
- ✓ Forces d'enllaç

La normal N és força d'enllaç: el bloc no pot anar avall \downarrow , ergo algú l'apreta cap \uparrow .



En ser N d'enllaç, pren el valor que calgui per garantir l'enllaç.

Si diposito un 2ⁿ bloc de massa m' , N augmenta!

N no és formulable en funció de variables d'estat (com el pes, o les forces de molles o amortidors). És una incògnita i només podem deduir el seu valor aplicant la 2^a Llei de Newton (2^aLN), tal i com hem fet en aquest exemple.

(*) Veurem que fricció = fregament amb lliscament. Com que el bloc està estàtic, no llisca sobre el terra \Rightarrow no hi ha fricció aplicada.

D'on surten les f. eullag?

De les deformacions microscòpiques en els contactes!



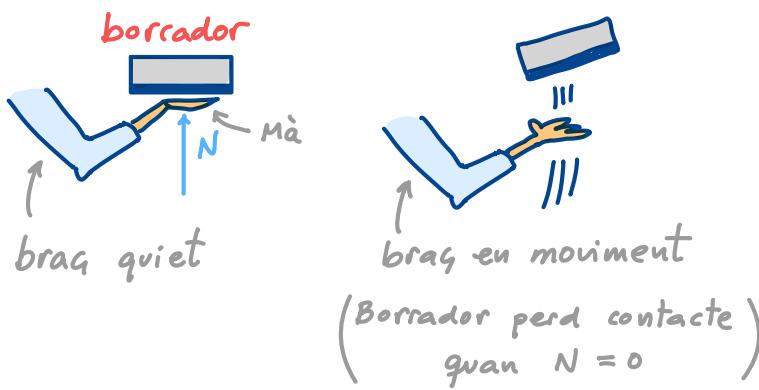
A nivell microscòpic podem pensar el contacte com format per petites molles i amortidors, a milers.

En realitat aquests molles i amortidors fan forces formulables però com que les volem tractar a nivell macroscòpic, no les podem formular a priori.

Condicions límit d'eullag

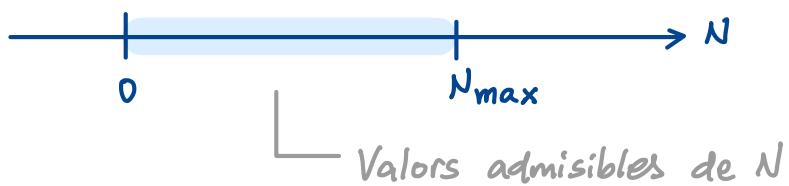
Tot i que les forces d'eullag s'adapten per valdre el que calqui, només ho poden fer dins un rang. A l'anterior exemple, si continuem afegint massa al bloc, potser trenarem el terra i el bloc caurà al pis de sota! Cal, $N < N_{\max}$, on N_{\max} és la força màxima suportable pel terra.

Podem tenir desaparició de l'eullag sense tenir rotura física? Sí! Si l'anterior bloc és el borrador i l'aixecó, pot perdre contacte amb la meva mà:



Cal $N > 0$ per garantir l'eullag.

Les condicions límit d'eullag són $N = 0$ i $N = N_{\max}$:

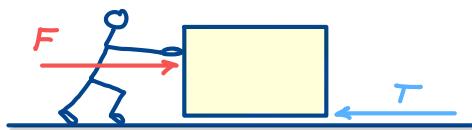


Forces tangencials de fregament

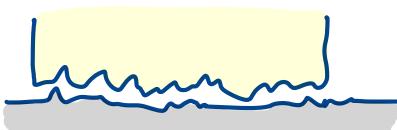
Nou experiment:

Inicialment, bloc estàtic.

Apliquem F de valor creixent.

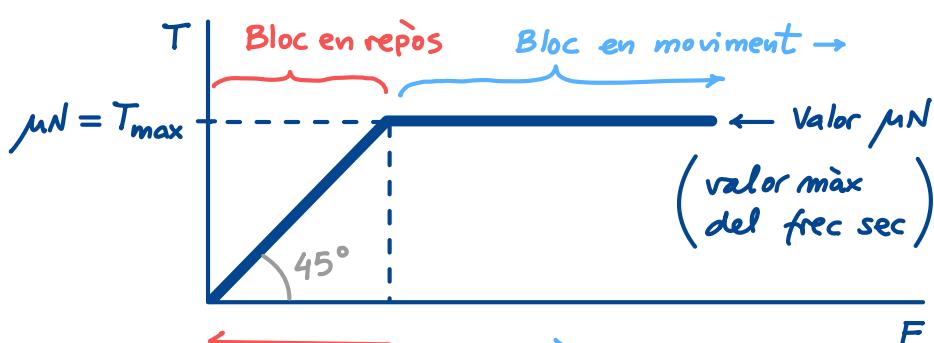


Per F baix, el terra respon amb $T = F$ sobre bloc, impedint el moviment. Si F augmenta, T també (s'adapta). T es un fregament degut a les rugositats del contacte.



A partir d'un cert F , el bloc es mourà cap → !

Cal algun model per descriure què passa. Si suposem el model de freq sec de Coulomb tindrem:



Cond. límit d'enllaç:
 $T = \mu N$

\exists fregament sense movim. relatiu

T és d'enllaç
(adapta el seu valor)

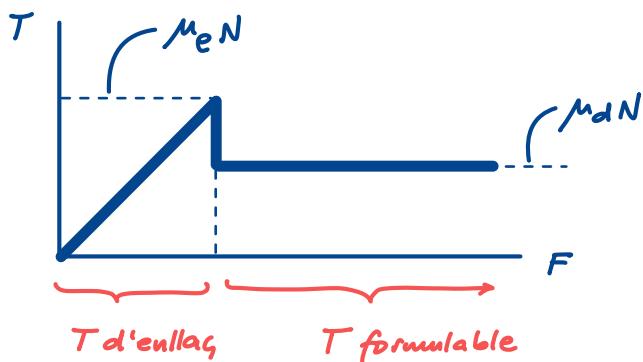
No és formulable

\exists fregament amb movim. relatiu
" fricció "

T no és d'enllaç,

És formulable: $T = \mu N$

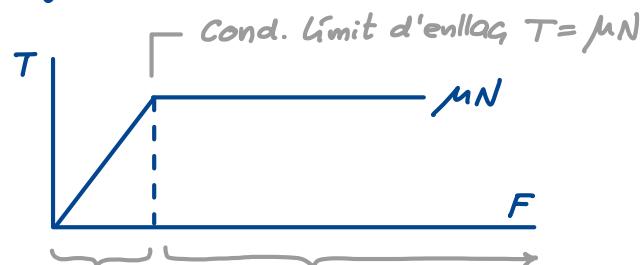
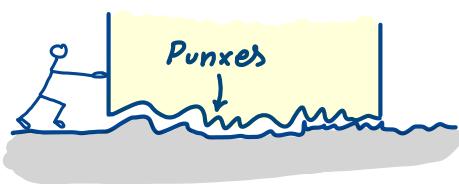
La següent versió del model és més acurada:



μ_e = coef. freq. estàtic
 μ_d = " " dinàmic

D'on surten les forces de fregament?

De les rugositats al contacte!



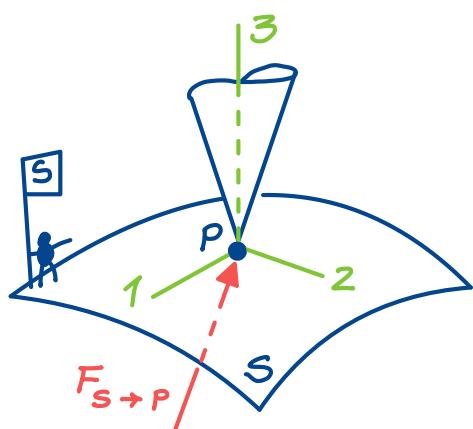
Aquí cal aixafar les punxes per iniciar el movim.

Un cop aixafades, el bloc ja llisca cap a la dreta →.

Important: En sistemes que impliquin forces tangencials de fregament, com a l'anterior exemple, típicament farem la hipòtesi inicial de que \nexists lliscament en el contacte, i que per tant T serà una força d'enllaç, incògnita del problema. Si ens surt un valor de T que supera la condició límit d'enllaç ($T = \mu N$), refarem el problema novament suposant que \exists lliscament, i que T passa a ser formulable ($T = \mu N$), deixant de ser incògnita.

Caracterització de forces d'enllaç partícula - superfície

Quan hi ha un contacte entre una partícula P i una superfície S cal saber identificar la forma genèrica que tindrà la força $\bar{F}_{S \rightarrow P}$ que fa S sobre P (quines components seran zero i quines no en les direccions d'una base):



força que S aplica a P
(S = superfície d'un sólid)

Quina forma tindrà el vector

$$\left\{ \bar{F}_{S \rightarrow P} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

$$B = (1, 2, 3)$$

Quines components
seran zero i quines no?

?

Caracteritzar l'enllaç vol
dir determinar això

Aquesta caracterització és necessària
per poder aplicar bé la 2a Llei de Newton
(ja ho veurem)

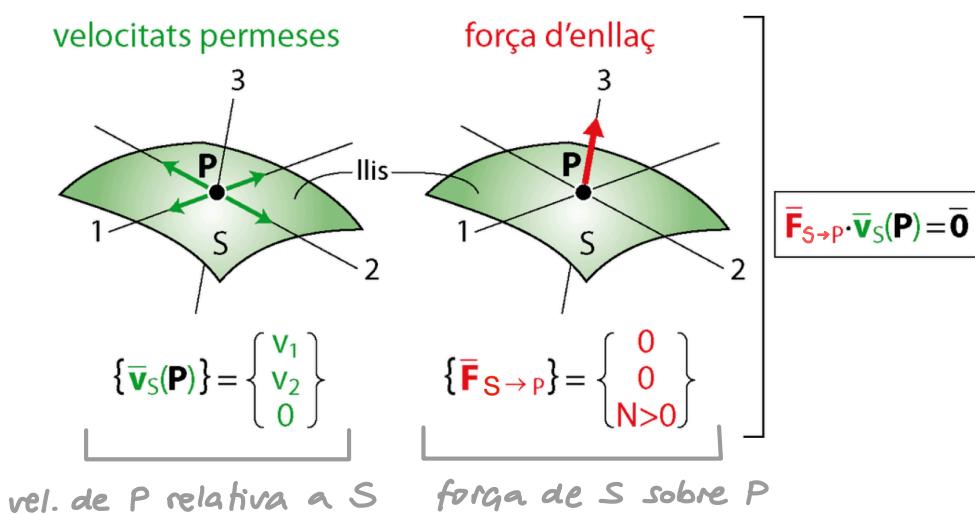
Per caracteritzar un enllaç cal pensar en quines velocitats permet S a P, vistes des de S (relatives a S). Hi haurà zeros de força en les direccions en les que hi hagi velocitat permesa.

Considerarem 2 casos :

- P en contacte amb una superfície S llisa
- " " " " " rugosa

Partícula sobre superfície llisa

S li permet a P de tenir components en les direccions 1 i 2 del pla tangent a S en el punt P, però no en dir. 3 negativa (altrament P penetraria S i no pot) :



Per tant, la forma genèrica de $\bar{v}_S(P)$ i $\bar{F}_{S \rightarrow P}$ serà la indicada a la figura ↗ [en la base $B = (1, 2, 3)$]. La força $\bar{F}_{S \rightarrow P}$ serà $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{Bmatrix}$, amb $N > 0$, ja que S només pot empènyer P en dir. 3 positiva, no estirar-la cap ↘.

Fixeu-vos que sempre es complirà

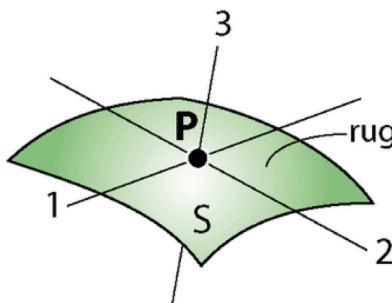
$$\bar{F}_{S \rightarrow P} \cdot \bar{v}_S(P) = \bar{0}$$

Aquesta equació "caracteritza l'enllaç P-S", i + endavant la generalitzarem per poder caracteritzar enllaços sólid-sòlid.

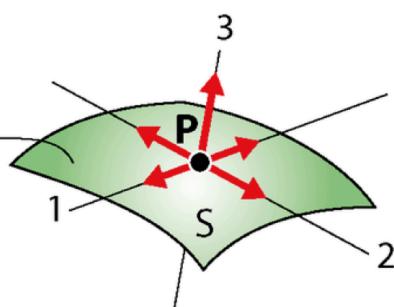
Partícula sobre superfície rugosa, sense lliscar-hi

Quan S és rugosa, S oposa al moviment de P no només en la dir. 3 - sinó també en les direccions tangencials 1 i 2. El fregament degut a les rugositats no permetrà a P de lliscar en aquestes direccions (a menys que hi hagi forces sobre P suficientment grans com per forçar el lliscament). Per tant, si P no llisca sobre S (és en repòs respecte S) tindrem, en base $B = \{1, 2, 3\}$:

velocitats permeses
(sense lliscament)



força d'enllaç



$$\{\bar{v}_S(P)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{F}_{S \rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ N > 0 \end{Bmatrix}, \sqrt{F_1^2 + F_2^2} < F_{\max}$$

Novament tenim:

$$\bar{F}_{S \rightarrow P} \cdot \bar{v}_S(P) = \bar{0}$$

P està en repòs
respecte S

S farà una força $\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ N \end{Bmatrix}$ sobre P , amb:

- $N > 0$

- $\sqrt{F_1^2 + F_2^2} < F_{\max}$

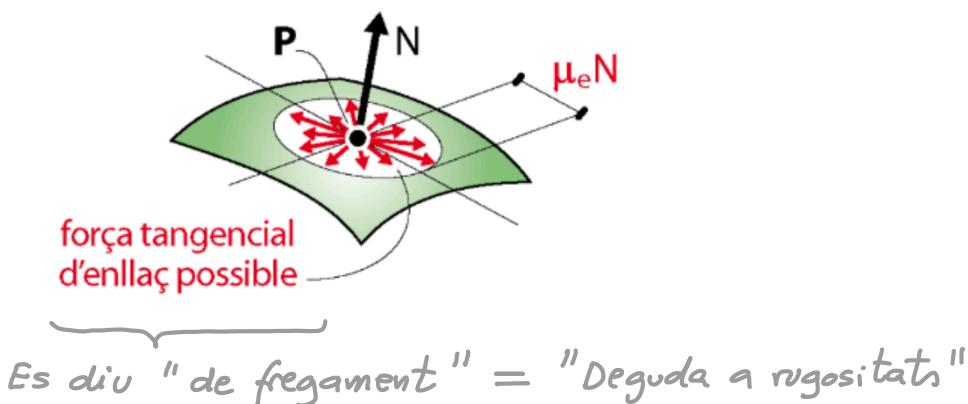
Aquí, F_{\max} és el valor màxim que pot tenir la força tangencial abans no s'aixafin les rugositats i P comenci a lliscar sobre S . En aquesta assignatura assumirem:

- O bé $F_{\max} = \mu N$ (quan suposem $\mu_e = \mu_d = \mu$)
- O bé $F_{\max} = \mu_e N$ (quan suposem $\mu_e \neq \mu_d$)

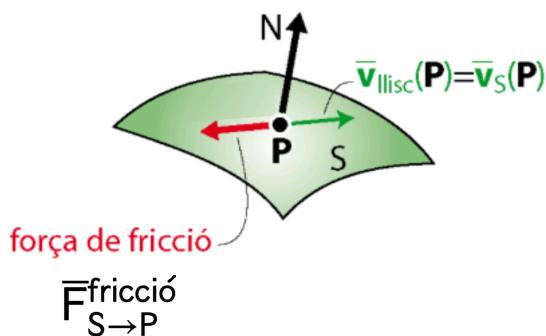
Forces de fricció (fregament amb lliscament)

I què passa si P llisca sobre S rugosa?

La imatge a retenir és la següent. Mentre no hi hagi lliscament, la força tangencial de contacte de S sobre P és d'enllaç (pren el valor q. calgui x impedir el lliscament, sempre i quan aquest valor sigui inferior a $\mu_e N$):



En canvi, si la força d'enllaç tangencial arriba al valor $\mu_e N$, l'enllaç tangencial es trenca, P comença a lliscar sobre S i la força tangencial passa a ser de fricció, (fregament amb lliscament). Aquesta força, denotada $\bar{F}_{S \rightarrow P}^{\text{fricció}}$, es ara formulable, i sempre va dirigida en sentit oposat al de la velocitat de lliscament de P respecte S:



Hi ha diversos models per formular el valor de $\bar{F}_{S \rightarrow P}^{\text{fricció}}$ segons les característiques del contacte entre P i S. Els principals són el model de freg sec de Coulomb, ja anticipat prèviament, i el model de freg viscos.

En el model de freq sec de Coulomb el valor de la fricció és proporcional a N :

$$F_{S \rightarrow P}^{\text{fricció}} = \mu_d N$$

(típicament $\mu_d = \mu_e = \mu$, però no sempre)

En el model de freq viscós, en canvi, aquest valor és proporcional al de la velocitat $v_s(P)$:

$$F_{S \rightarrow P}^{\text{fricció}} = c \cdot v_s(P)$$

└ coef. de freq viscós ($\frac{Ns}{m}$)

Aquest darrer model és molt adequat quan entre P i S hi ha una certa lubricació.

En els problemes que fem hi pot haver fricció del primer tipus, del segon, o de tots dos. L'enunciat, el context, o el dibuix ho hauran de deixar clar.

Alerta amb el vocabulari

" \exists lliscament" = " \exists velocitat relativa al contacte"

Expressió de
cinemàtica, no
de dinàmica

Però l'expressió no diu res sobre
si el terra és llis o rugós !

" \exists fregament" = " \exists rugositat que s'oposa al lliscament"

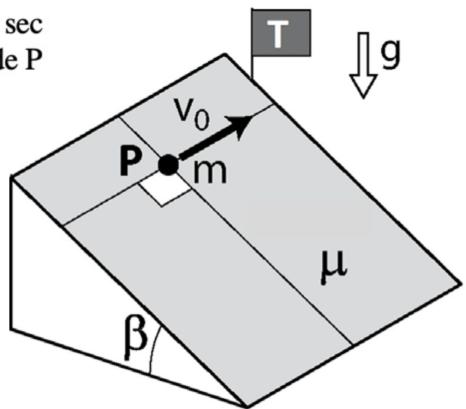
Però no vol dir que hi hagi lliscament !

" \exists fricció" = " \exists fregament i lliscament"

de P sobre S

Exercicis de dinàmica de la partícula

La partícula P de massa m, que es mou sobre un pla inclinat, passa per la posició indicada amb velocitat v_0 perpendicular a la línia de màxim pendent del pla. Entre partícula i pla hi ha freq sec de coeficient μ . Quant val el radi de curvatura de la trajectòria de P sobre el pla a la posició indicada?



Atenció: aquí acostumeu a preguntar per què cal dinàmica per obtenir $R_T(P)$, quan fins ara, a cinemàtica, no calia. Però no calia perquè preguntarem $R_T(P)$ en sistemes d'un sol GL, en els quals la trajectòria de P quedava unívocament determinada. La partícula de la figura, en canvi, té 2 GL sobre el pla, i ens cal aplicar la 2^a Llei de Newton per determinar $\bar{a}_T(P)$ (i $\bar{a}_n(P)$).

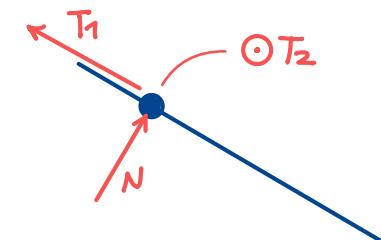
Solució

Volem $R_T(P) = \frac{v_0^2}{a_T^n(P)}$. Calcularem $a_T^n(P)$ aplicant 2^a LN.

Forces d'enllaç sobre P

El pla és rugós pq ens diuen que hi ha freq sec de coef. μ . Si P no es mogués resp. el pla tindriem (*)

$$\bar{F}_{\text{Pla} \rightarrow P}^{\text{Enllaç}} = (\uparrow N) + (\leftarrow T_1) + (\odot T_2)$$



Forces d'enllaç del pla sobre P si $\bar{v}_T(P)$ fos zero

però com que es mou amb $\bar{v}_T(P) = (\otimes v_0)$, s'han superat les condicions límit d'enllaç tangencial i P està sotmesa a una força de fricció ($\odot \mu N$) en aquest pla (oposada a $\bar{v}_T(P)$). Aquesta força ($\odot \mu N$) no és d'enllaç!

(*) El sentit de \bar{T}_1 i \bar{T}_2 és arbitrari a priori

Per tant, l'única força d'eulla que actua sobre P és la normal del pla sobre P:

$$\bar{F}_{\text{pla} \rightarrow P}^{\text{eulla}} = (\uparrow N)$$

Forces formulables aplicades a P

- La fricció ($\odot \mu_N$) que deiem
- El pes ($\downarrow mg$)

Acceleració de P

P té una acceleració desconeguda sobre el pla, que podem descompondre en components tangencial ($\odot a^s$) i normal ($\rightarrow a^n$)

2^a Llei de Newton sobre P

$$\text{En dir. 1: } (\rightarrow mg \sin \beta) = m (\rightarrow a^n) \quad (\text{I})$$

$$\text{En dir. 2: } (\odot \mu_N) = m (\odot a^s) \quad (\text{II})$$

$$\text{En dir. 3: } (\uparrow N) + (\downarrow mg \cos \beta) = \bar{0} \quad (\text{III})$$

Com que volem a^n , l'àïllem de (I):

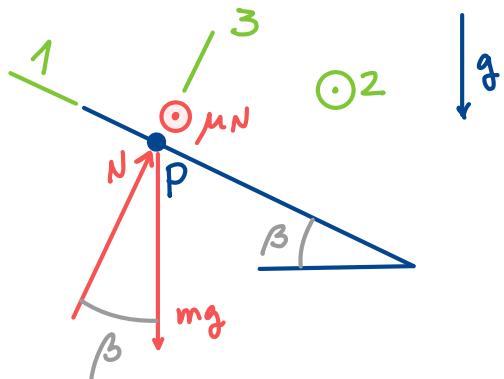
$$a^n = g \sin \beta$$

$R_T(P)$

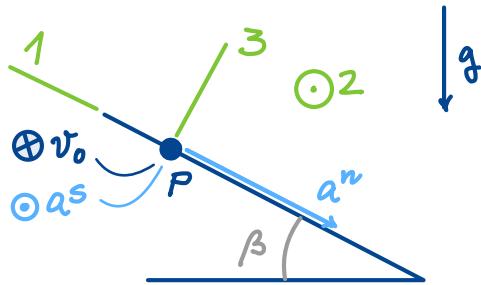
Finalment:

$$R_T(P) = \frac{v_0^2}{g \sin \beta}$$

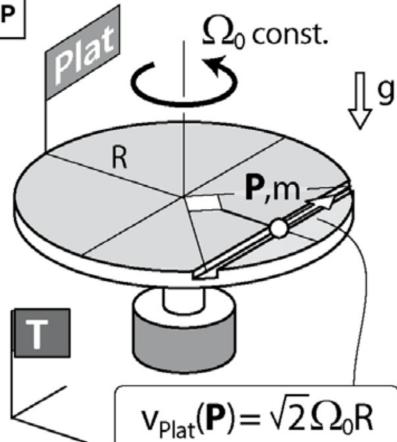
Forces realment aplicades a P



Velocitat i acceleració de P



8P



Una partícula P de massa m es mou dins una guia d'una plataforma giratòria de radi R. En la posició indicada, la seva velocitat respecte de la plataforma és $\sqrt{2}\Omega_0 R$. Troba:

- la força de la guia sobre P a la posició indicada.

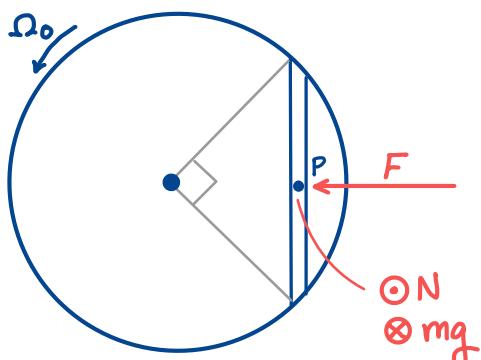
Aplicarem la 2a LN a P : $\sum \bar{F}_P = m_P \cdot \bar{a}_T(P)$

$\sum \bar{F}_P$

Quines forces rep P ? Hi ha

- Les d'enllaç Plat - P
- El pes

Forces d'enllaç sobre P



El moviment \leftrightarrow de P relativ a la guia no és possible, ergo la guia aplica una força F sobre P en dir. radial (no sabem si en sentit \leftarrow o \rightarrow a priori, però la dibuixem com ($\leftarrow F$) i ja veurem si F surt > 0 o < 0).

A banda, la guia aplica una força normal ($\odot N$) sobre P, ja que el moviment de P en dir \otimes està impedit.

P no rep cap força d'enllaç en dir. ∇ perquè el moviment de P al llarg de la guia no està impedit.

Per tant, la força d'enllaç Guia \rightarrow P té la forma

$$\bar{F}_{\text{Guia} \rightarrow P} = \underbrace{(\leftarrow F) + (\odot N)}$$

Caracterització de la força d'enllaç Guia \rightarrow P
(F i N són incògnites d'enllaç (no formulables))

Força pes

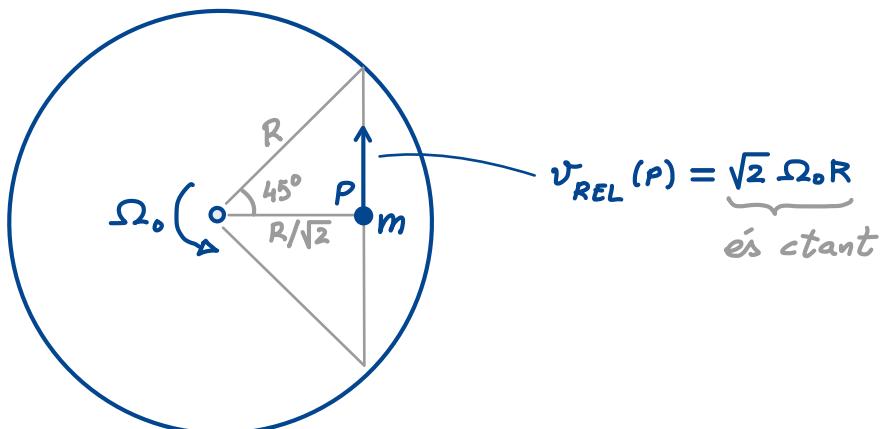
És $\otimes mg$ (única força formulable aplicada a P)

Sumatori de forces

$$\sum \bar{F}_{\rightarrow P} = (\leftarrow F) + (\odot N) + (\otimes mg)$$

Acceleració $\bar{a}_T(P)$

Apliquem comp. movim. amb $\begin{array}{l|l} AB = T \\ REL = Plat \end{array}$



$$\begin{aligned}
 \bar{a}_T(P) &= \underbrace{\bar{0}}_{REL} + \underbrace{(\leftarrow \Omega_0^2 \frac{R}{\sqrt{2}})}_{ar} + \underbrace{2 \left[(\odot \Omega_0) \times (\uparrow \sqrt{2} \Omega_0 R) \right]}_{Coriolis} = \\
 &= \left(\leftarrow \Omega_0^2 R \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} \right)}_{5/\sqrt{2}} \right) = \left(\leftarrow \frac{5}{\sqrt{2}} \Omega_0^2 R \right)
 \end{aligned}$$

2a llei de Newton

$$(\leftarrow F) + (\odot N) + (\otimes mg) = m \left(\leftarrow \frac{5}{\sqrt{2}} \Omega_0^2 R \right)$$

equació vectorial que dóna lloc a 2 eqs. escalars

En dir vertical:

$$(\odot N) + (\odot mg) = 0 \Rightarrow (\odot N) = (\odot mg) \Rightarrow N = mg$$

En dir. radial:

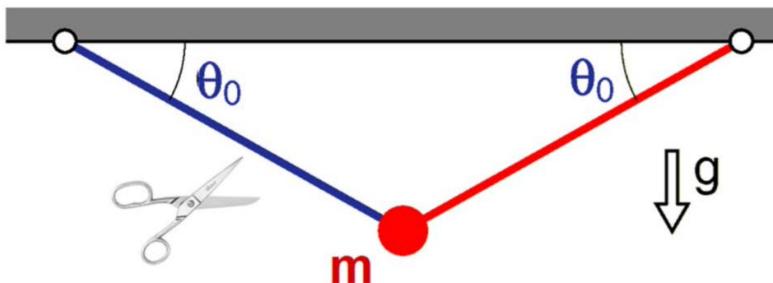
$F_{\text{surf}} > 0 \Rightarrow \bar{F}$ té el sentit \leftarrow dibuixat abans

$$(\leftarrow F) = \left(\leftarrow \frac{5}{\sqrt{2}} \Omega_0^2 R \right) \Rightarrow F = \frac{5}{\sqrt{2}} \Omega_0^2 R$$

Per tant:

$$\bar{F}_{\text{Guia} \rightarrow P} = (\odot mg) + \left(\leftarrow \frac{5}{\sqrt{2}} \Omega_0^2 R \right)$$

8P

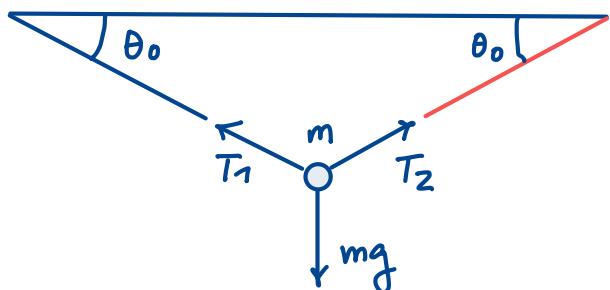


Una partícula P de massa m penja del sostre per mitjà de dos fils inextensibles.
Troba:

- el canvi de tensió del fil de la dreta just després de tallar el de l'esquerra.
- l'equació del moviment per la coordenada θ .

Canvi de tensió

Tensió abans de tallar



Formulem la 2^a llei de Newton per a la partícula de massa m en direccions vertical i horitzontal :

$$(I) \quad (\downarrow mg) + (\uparrow T_1 \sin \theta_0) + (\uparrow T_2 \sin \theta_0) = 0$$

$$(II) \quad (\leftarrow T_1 \cos \theta_0) + (\rightarrow T_2 \cos \theta_0) = 0$$

$$(II) \Rightarrow \underbrace{T_1 = T_2}_{\text{Anomenem-los } T}$$

Anomenem-los T

$$(I) \Rightarrow mg - 2T \sin \theta_0 = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{mg}{2 \sin \theta_0}$$

Tensió abans
de tallar

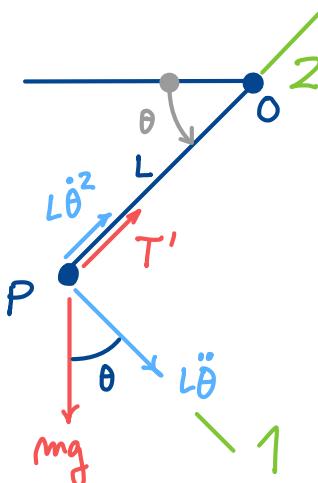
Tensió després de tallar

Sobre P, tenim les forces i acceleracions de la figura.

No sabem T' . No és la d'abans!

Degut al cable, P descriura traject. circular avd O, amb les acceleracions blaves

2^a LN sobre P, dir. 2:



$$T' - mg \sin \theta = m L \ddot{\theta}^2$$

↓

Apliquem c.i. $\left| \begin{array}{l} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{P en repòs inicialment})$

$$T' = mg \sin \theta_0$$

L'increment de tensió és

$$T' - T = mg \sin \theta_0 - \frac{mg}{2 \sin \theta_0} = mg \underbrace{\left(\sin \theta_0 - \frac{1}{2 \sin \theta_0} \right)}_D$$

Serà positiu quan $D > 0$. És a dir, quan

$$\sin^2 \theta_0 > \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \theta_0 > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta_0 > 45^\circ$$

Equació del moviment per a la coordenada θ

2^a LN en dir. 1

~~$mg \cos \theta = m L \ddot{\theta}$~~



$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \cos \theta$$

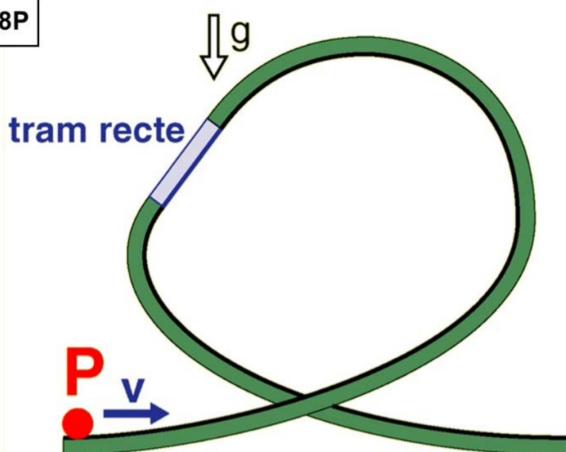
Equació del moviment per la coordenada θ

Recordeu d'Equacions Diferencials:

Permet saber l'evolució futura del sistema resolent el problema de valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta}(t) = \frac{g}{L} \cos \theta(t) \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \end{array} \right.$$

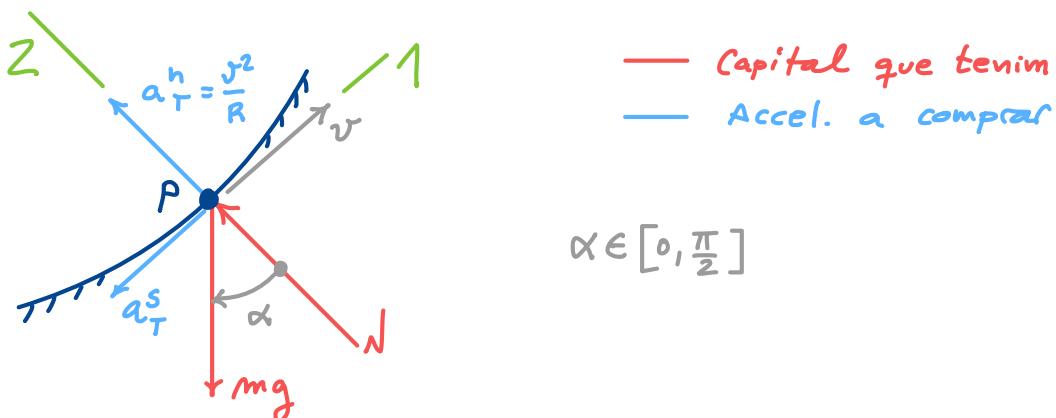
8P



- Una partícula P de massa m llisa al llarg d'un *looping* fix a terra (T). Troba:
- $v_{\min}(P)$ per tal que arribi al punt més alt.
 - $v_{\min}(P)$ per tal que recorri tot el *looping*.

Analitzarem què passa a tot el *looping*. No ens diuen si la pista és llisa o rugosa. D'entrada assumirem que és llisa i deixem com a deutes comprovar que els resultats no canvién si és rugosa. Anem per trams:

Ascens rampa



Es perdria el contacte si $N=0$. És el cas? No! Com que el camí és curvat, $a_T^n = (\kappa \frac{v^2}{R})$ (on R és sabut pq. és el radi de curvatura de la pista a P). Del dibuix veiem que N s'adaptarà per a compensar $mg \cos \alpha$ i alhora produir $a_T^n = \frac{v^2}{R}$. Ho pot fer? Sí, pq. és una força d'eusses unilateral q. s'adapta en dir κ .

El capital de forces possibles ens permet comprar l' a_T^n que desitjo.

L'anàlisi pren es pot fer analíticament aplicant la 2^a LN] dir. 2:

$$(\nwarrow N) + (\downarrow mg \cos \alpha) = m (\nwarrow \frac{v^2}{R})$$



$$N - mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R}$$



$$N = mg \cos \alpha + m \frac{v^2}{R}$$

└ R = radi de curvatura
del looping en el
punt analitzat

Veiem que $N > 0$ sempre, fins i tot si $v=0$. Per tant,
en el tram d'ascens, on $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, mai es perde el contacte.

De la 2^a LN] dir. 1 què en deduïm?

$$\begin{aligned} (\nwarrow mg \sin \alpha) &= m \bar{a}_T^s \\ \downarrow \\ \bar{a}_T^s &= (\nwarrow g \sin \alpha) \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{Deduïm que } \bar{a}_T^s \text{ és de frenada. Fa minvar la velocitat } v.$$

Ascens sostre (descens sostre es pot tractar així també)

2^a LN] dir. 2:

$$(\nwarrow N) + (\downarrow mg \cos \alpha) = m (\nwarrow \frac{v^2}{R})$$

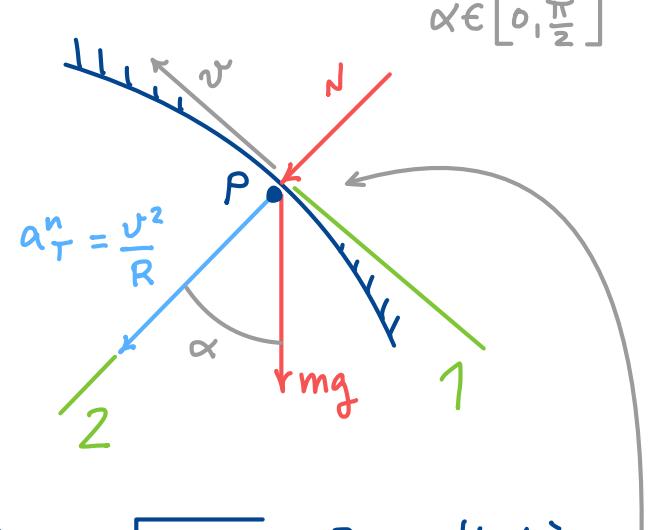
$$N + mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

$$N = \frac{mv^2}{R} - mg \cos \alpha$$

$$N > 0 \Leftrightarrow \frac{v^2}{R} - g \cos \alpha > 0 \Leftrightarrow$$



$$v > \sqrt{R g \cos \alpha}$$



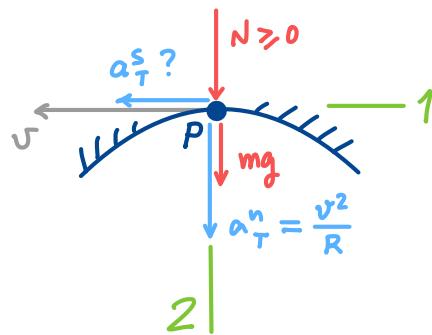
Si $v > \sqrt{R g \cos \alpha}$, P mantindrà contacte amb la pista en aquest punt.

Com que $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ al llarg d'aquest tram $\Rightarrow \cos \alpha \in [0, 1] \Rightarrow$
caldrà que $v > v_{\min} = \sqrt{R_{\max} g}$ per a superar tot el tram.

Radi de curvatura màxim en aquest tram.

Cas particular de l'anterior (es podria ometre)

Punt més alt



2^a LN] dir. 2 :

$$(\downarrow N) + (\downarrow mg) = m(\downarrow \frac{v^2}{R})$$

$$N + mg = m \frac{v^2}{R}$$

$$N = m \left(\frac{v^2}{R} - g \right)$$

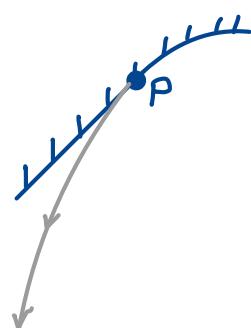
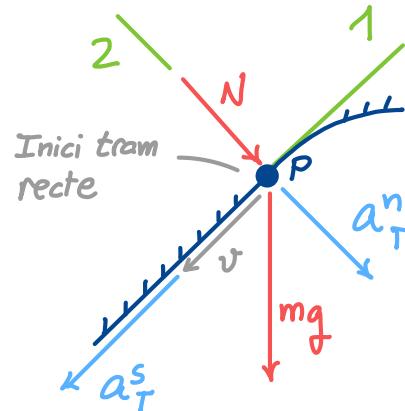
Radi curvatura
del looping al
punt més alt

$$N > 0 \Rightarrow \frac{v^2}{R} - g > 0 \Rightarrow v > \sqrt{Rg} \Rightarrow$$

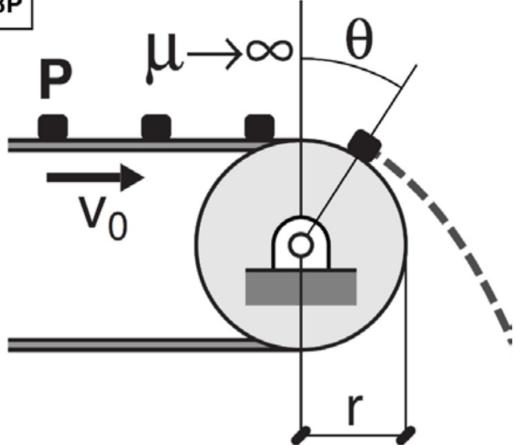
Si $v > v_{\min} = \sqrt{R_{\max} g}$, P arriba al punt més alt de la pista i no li perd contacte (R_{\max} = el màxim del tram d'ascens).

Entrada tram recte

Ara null "comprar" una $a_T^n = 0$ perquè volria fer el tram recte. No puc "comprar-la" pq. el balanc met de forces sobre P en la dir. 2 apunta cap a \rightarrow . Esgo a_T^n serà $\neq 0$ i cap a \rightarrow . P perdrà contacte amb la pista a l'inici del tram recte i començarà una trajectòria parabòlica de caiguda independentment de la velocitat v amb la que entri en el tram.



8P



- 2 Les partícules P es troben en repòs respecte a la cinta transportadora que avança amb velocitat v_0 constant. Si el coeficient de freqüència entre cinta i partícules és ∞ , en quina posició angular θ les partícules perdren contacte amb la cinta?

Cas $\theta = 0^\circ$

Podria P perdre contacte per $\theta = 0^\circ$? Cal estudiar el valor d' N .
Per a que es mantingui el contacte cal $N > 0$!

Per trobar N apliquem 2a LN en dir. vert

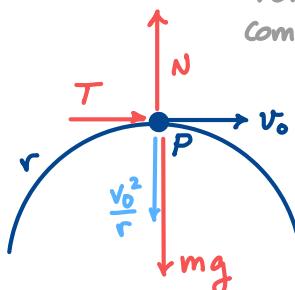
$$\sum \bar{F}_{\text{P}} \Big|_{\text{vert}} = m \bar{a}_T(P) \Big|_{\text{vert}}$$

$$(\uparrow N) + (\downarrow mg) = (\downarrow m \frac{v_0^2}{r})$$

$$N - mg = -m \frac{v_0^2}{r}$$

$$N = mg - m \frac{v_0^2}{r}$$

Veiem el problema com de dinàmica 2D

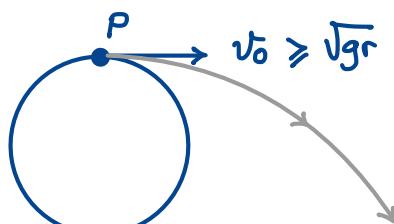


P està en contacte amb la cinta, que és rugosa. Ergo $\bar{F}_{\text{cinta} \rightarrow P}^{\text{enllaç}} = (\rightarrow T) + (\uparrow N)$.

T pot valdre el que calgui perquè $\mu = \infty$ (no hi ha condició límit d'enllaç per a T).

$$N > 0 \Rightarrow \cancel{mg} > \cancel{m} \frac{v_0^2}{r} \Rightarrow v_0 < \sqrt{gr} \quad (\square)$$

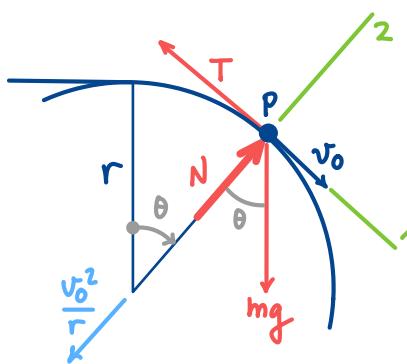
Si per $\theta = 0^\circ$ tenim $v_0 \geq \sqrt{gr}$, P perdria contacte i sortiria projectada endavant en caiguda lliure parabòlica:



Per $\theta > 0^\circ$

Suposem ara que $v_0 < \sqrt{gr}$, de manera que P ha superat $\theta = 0^\circ$ sense perdre contacte.

Sobre P hi actuen les forces del dibuix adjunt. La força d'enllig cinta-P segueix tenint una component normal ($\nearrow N$) i una tangencial ($\nwarrow T$). Com que el coef. de fregament μ és ∞ , T pot valdre el que volgui (no hi ha condició límit d'enllig per a T , ja que $T \leq \mu N = \infty$ sempre). La partícula P es desprendrà de la cinta quan N passi a ser zero. Obtinguem N per veure quan passarà això.



2^a LN en dir. 2 (radial):

$$(\nearrow N) + (\nwarrow mg \cos \theta) = m \underbrace{\left(\nwarrow \frac{v_0^2}{r} \right)}_{\bar{a}_T(P)}$$

$$N - mg \cos \theta = -m \frac{v_0^2}{r}$$

$$N = m \left(g \cos \theta - \frac{v_0^2}{r} \right)$$

Es mantindrà el contacte mentre:

$$N > 0 \Rightarrow g \cos \theta - \frac{v_0^2}{r} > 0 \Rightarrow \cos \theta > \frac{v_0^2}{gr}$$

Per tant, es produirà $N=0$, i la pèrdua de contacte, quan

$$\cos \theta = \frac{v_0^2}{gr} \Rightarrow \boxed{\theta = \arccos \left(\frac{v_0^2}{gr} \right)} \quad (\bullet)$$

Cal que $\frac{v_0^2}{gr} \leq 1$ per a que $\arccos \left(\frac{v_0^2}{gr} \right)$ estigui definit. És a dir, cal $v_0 \leq \sqrt{gr}$. Però hem començat assumint que $v_0 < \sqrt{gr}$. Per tant, la condició (\bullet) està ben definida.