

# 2P

Versió 0.9

Exercicis de derivació  
geomètrica i analítica

+

Angles d'Euler

+

Qüestions pendents de 3T

Lluís Ros

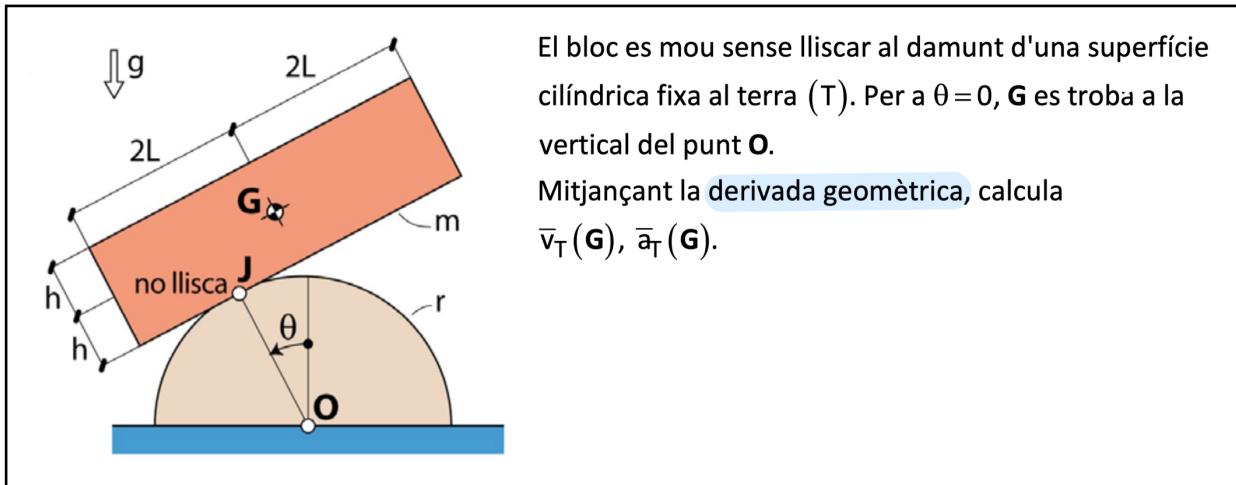
<https://lluisros.github.io/mecanica>

2025-26 Q2

# Exercicis de derivació geomètrica i analítica



Aquest exercici no estava programat, però l'incloc per a que en pogueu comparar els resultats amb el següent, fet per la via analítica



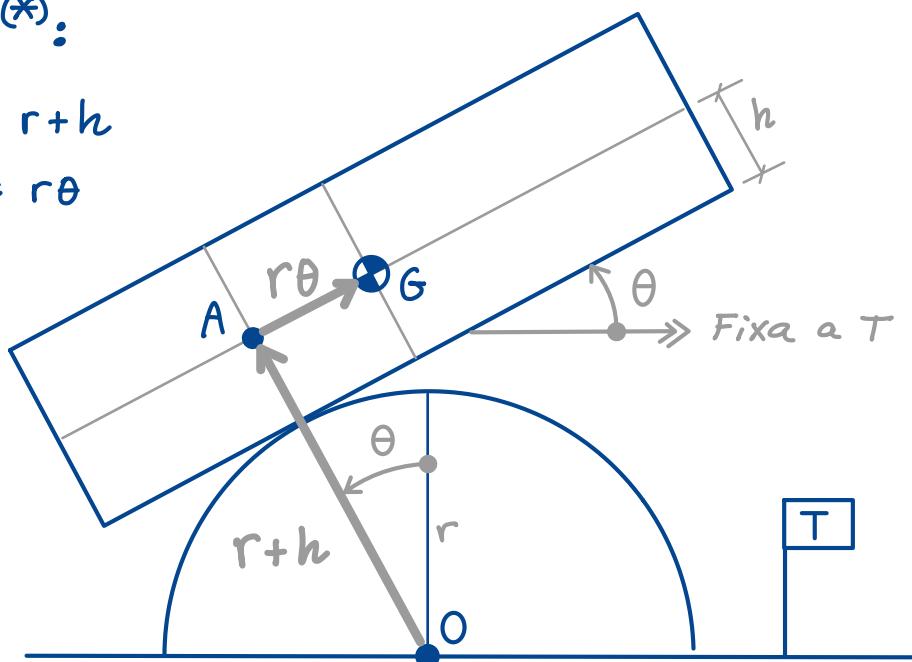
$\bar{v}_T(G)$

Triem  $\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{AG}$  com a vec. pos. de  $G$  (el derivarem).

Clarament (\*):

$$|\overline{OA}| = r+h$$

$$|\overline{AG}| = r\theta$$

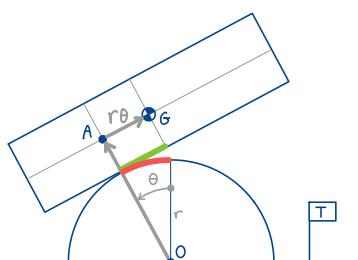


L'orient. de  $\overline{OA}$  resp.  $T$  ve donada per  $\theta$

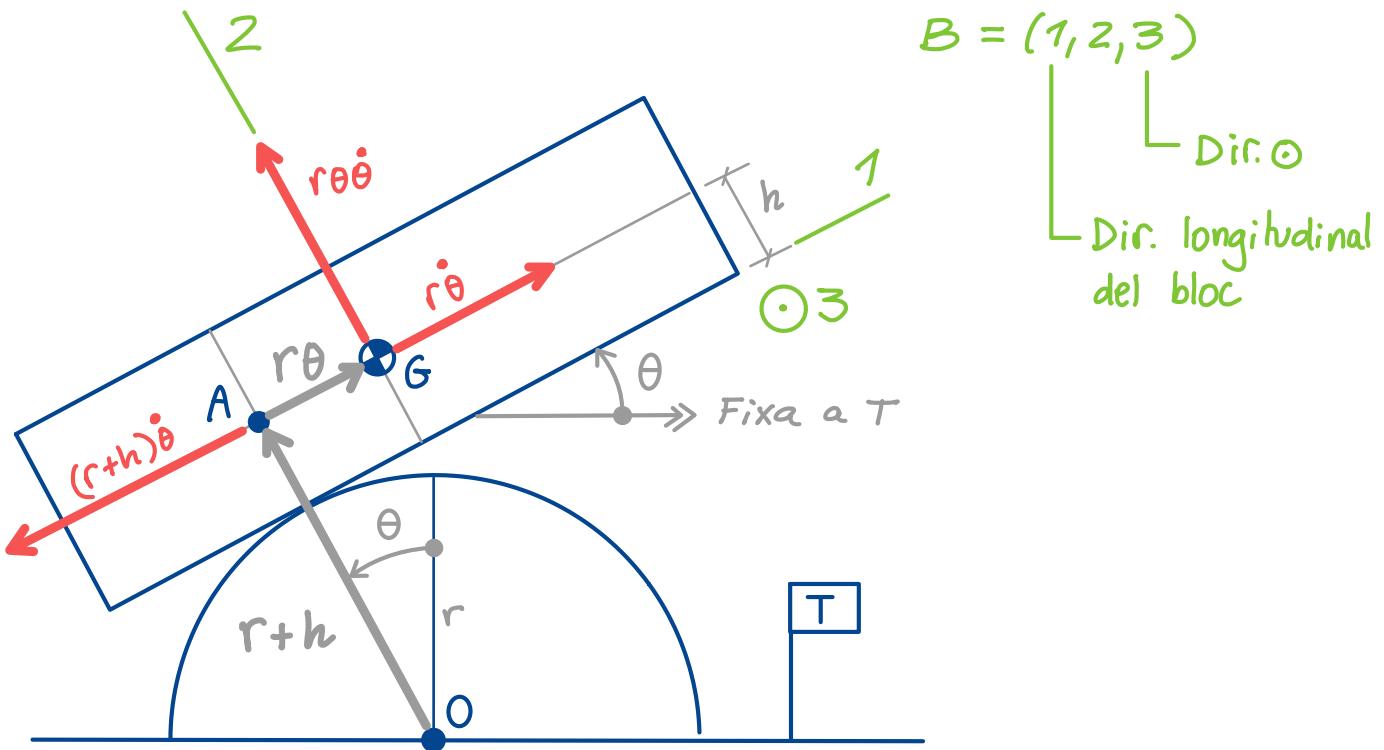
L'orient. del bloc i de  $\overline{AG}$ , també!

$\overline{OA}$  no canvia de valor, però si de dir. (amb  $\bar{\Omega}_T^{\overline{OA}} = \dot{\theta}$ )  
 $\overline{AG}$  canvia de valor ( $\theta$  varia), i tb. de dir. (amb  $\bar{\Omega}_T^{\overline{AG}} = \dot{\theta}$ )

(\*)  $|\overline{AG}| = r\theta$  perquè, si  $G$  és sobre la vertical de  $O$  quan  $\theta=0$ , vol dir que els trams verd i vermell coincideixen (i el vermell és  $r\theta$ )



Les derivades temporals de  $\overline{OA}$  i  $\overline{AG}$  són els següents vècs. vermells:



$$B = (1, 2, 3)$$

Dir.  $\odot$

Dir. longitudinal  
del bloc

Ergo :

$$\begin{aligned} \overline{\vec{v}_T(P)} &= (\rightarrow r\dot{\theta}) + \underbrace{[(r+h)\dot{\theta}]}_{(\leftarrow r\dot{\theta}) + (\leftarrow h\dot{\theta})} + (\uparrow r\theta\ddot{\theta}) = \\ &= \boxed{(\leftarrow h\dot{\theta}) + (\uparrow r\theta\ddot{\theta})} \quad (1) \end{aligned}$$

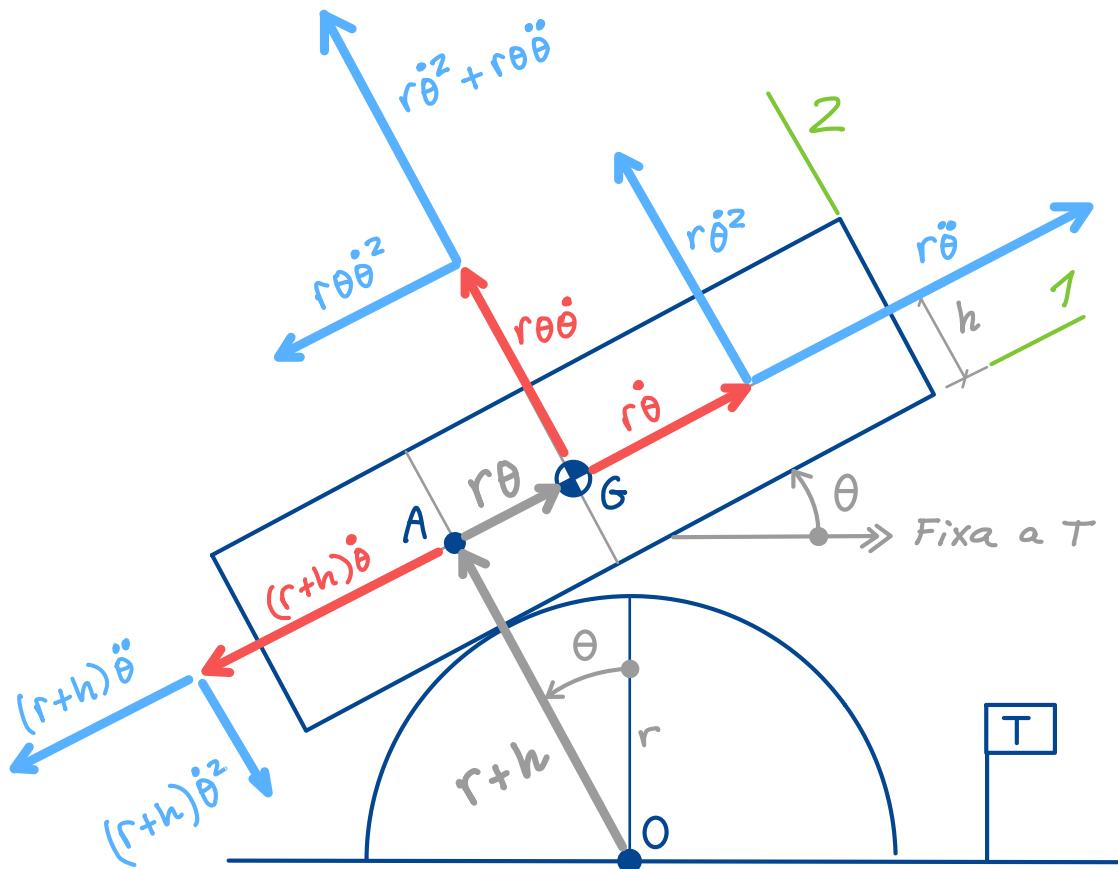
Si voleu, podem expressar  $\overline{v}_T(P)$  vectorialment mitjançant alguna base.  $B = (1, 2, 3)$  va molt bé, ja que té els versors en les dirs. que surten a l'Eq. (1):

$$\left\{ \overline{\vec{v}_T(P)} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} -h\dot{\theta} \\ r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

L'Eq. (2) ens anirà bé per comprovar els resultats obtinguts per derivació analítica (seg. exercici).

$\bar{a}_T(G)$

Només cal derivar els vecs. vermells per obtenir els blaus:

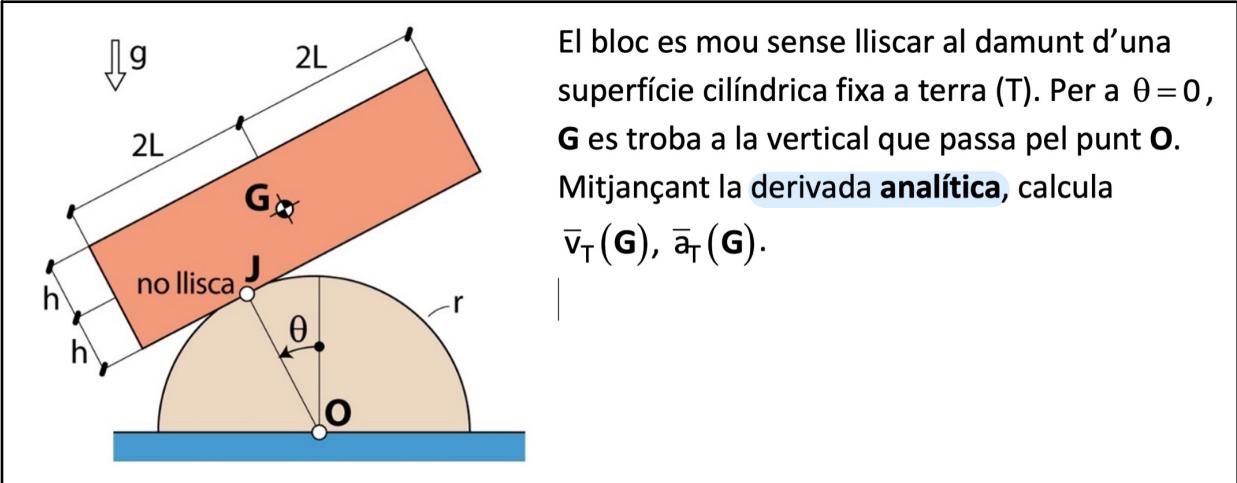


Sumant els vecs. blaus obtenim:

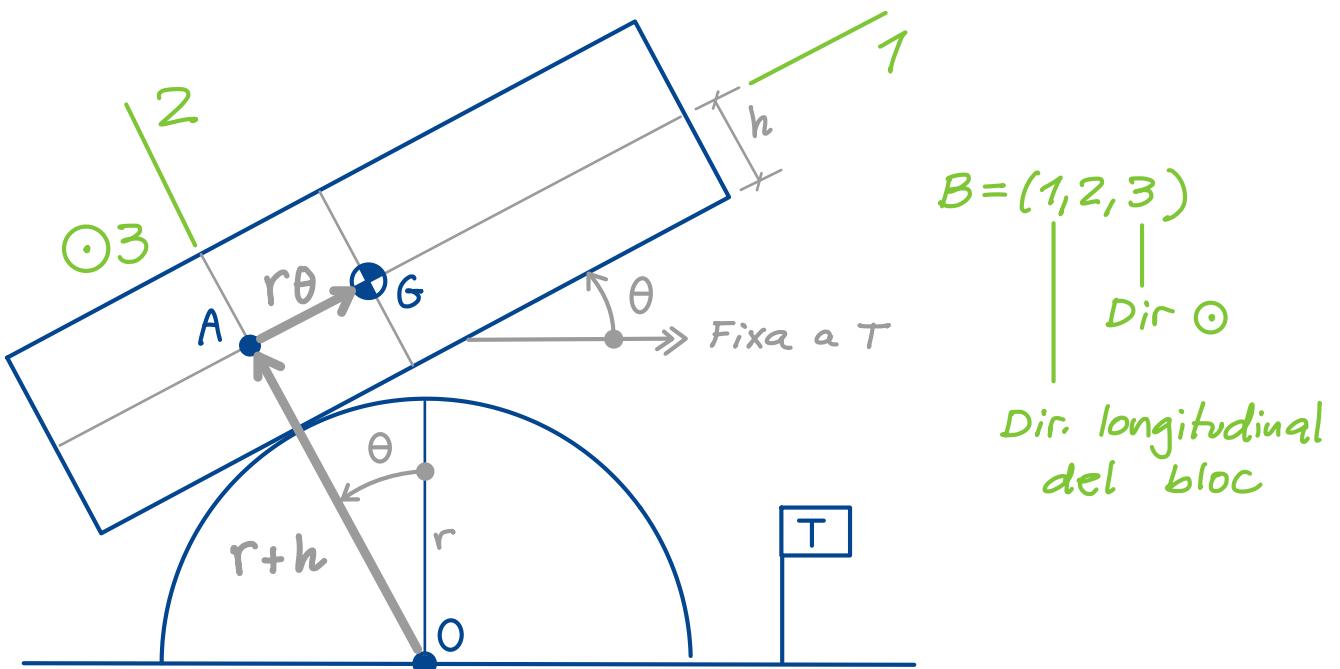
$$\bar{a}_T(G) = \left[ \leftarrow (h\ddot{\theta} + r\theta\ddot{\theta}^2) \right] + \left[ \uparrow (r\ddot{\theta}^2 - h\ddot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta}) \right],$$

que expressat en base  $B = (1, 2, 3)$  és

$$\{\bar{a}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} - r\theta\ddot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta}^2 - h\ddot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$



$\bar{v}_T(G)$



$$\{\bar{OG}\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ r+h \\ 0 \end{Bmatrix}_{\bar{OA}} + \begin{Bmatrix} r\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\bar{AG}} = \begin{Bmatrix} r\theta \\ r+h \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Derivem  $\{\bar{OG}\}_B$  analiticament:

$$\{\bar{v}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r\theta \\ r+h \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -r\dot{\theta}-h\dot{\theta} \\ r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} -h\dot{\theta} \\ r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Derv. de les comp. de  $\{\bar{OG}\}_B$

Matix resultat que a Eq. (2) de l'ex. aut.!

$$\bar{\alpha}_T(G)$$

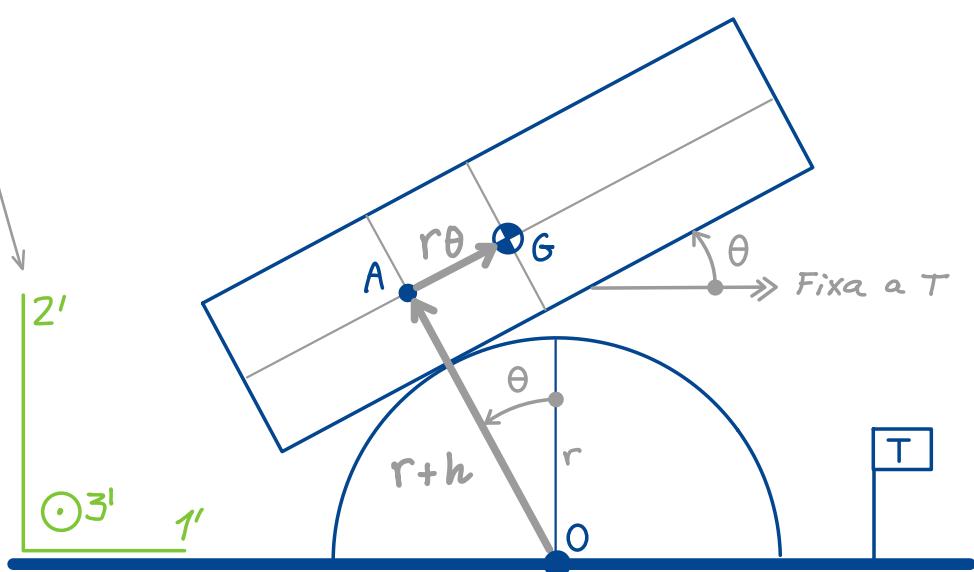
Derivem  $\bar{v}_T(G)$  respecte del temps:

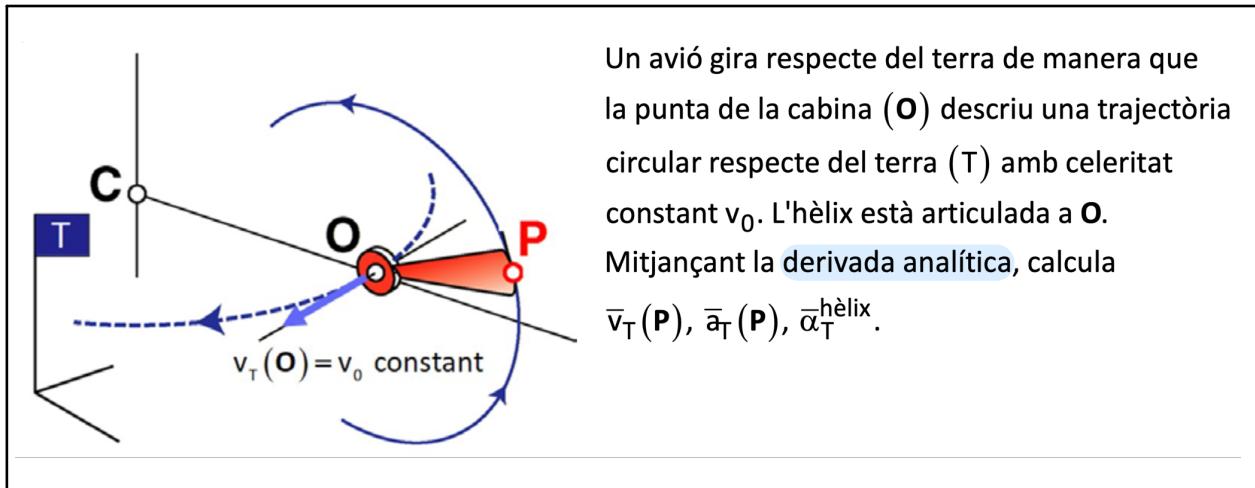
$$\{\bar{\alpha}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} \\ r\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -h\dot{\theta} \\ r\theta\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}} =$$

$$\begin{Bmatrix} -r\theta\ddot{\theta}^2 \\ -h\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} - r\theta\ddot{\theta}^2 \\ r\dot{\theta}^2 - h\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3) \leftarrow \text{Mataix resultat que a l'Eg. (3) de l'ex. anterior!}$$

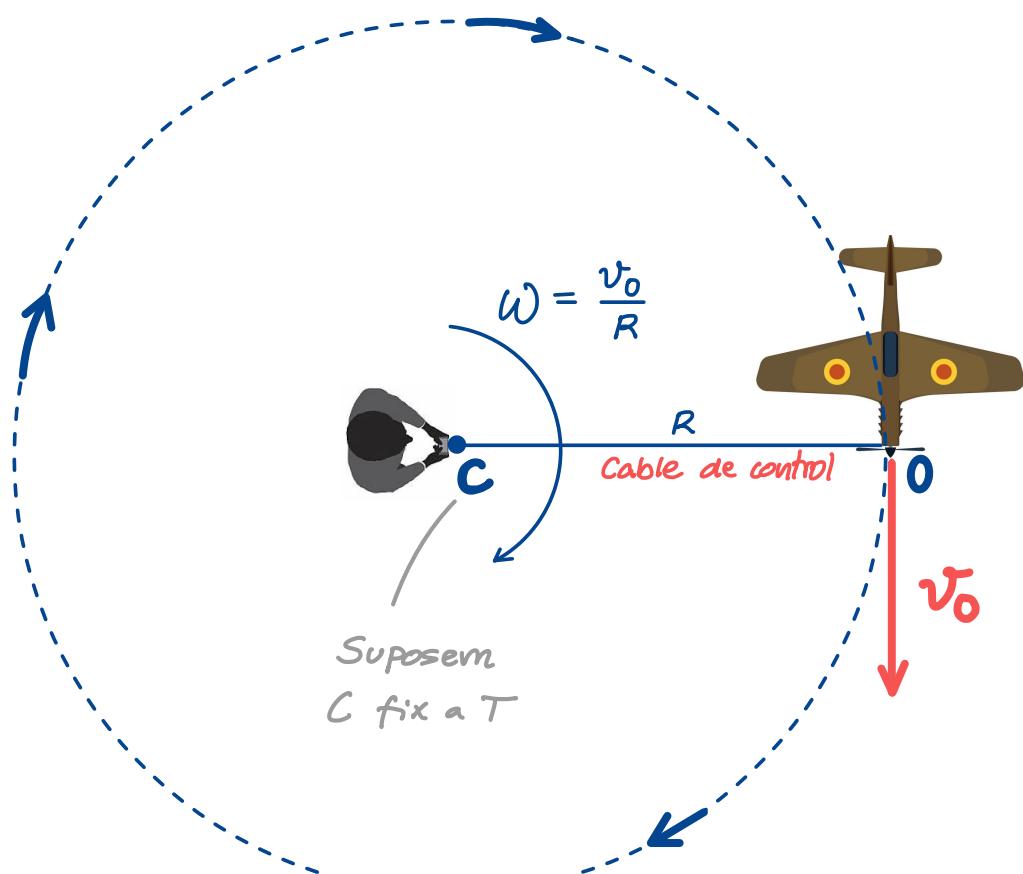
Obs.: tb hauríem pogut utilitzar aquesta base  $B' = (1', 2', 3')$  fixa a  $T$  però l'expressió de  $\bar{G}$  seria més complexa, i la de  $\bar{v}_T(G)$  i  $\bar{\alpha}_T(G)$  també perquè  $B'$  no té els versors apuntant en les dirs. dels canvis de valor i dir. de  $\bar{OA}$  i  $\bar{AG}$ .





*Exercici inspirat en el pilotatge d'aeromodels amb línia de control ("control line flying"):*

<https://youtu.be/wZavLFRsMHg?si=wueZ1sArJ49wwCWP&t=179>



Definim :

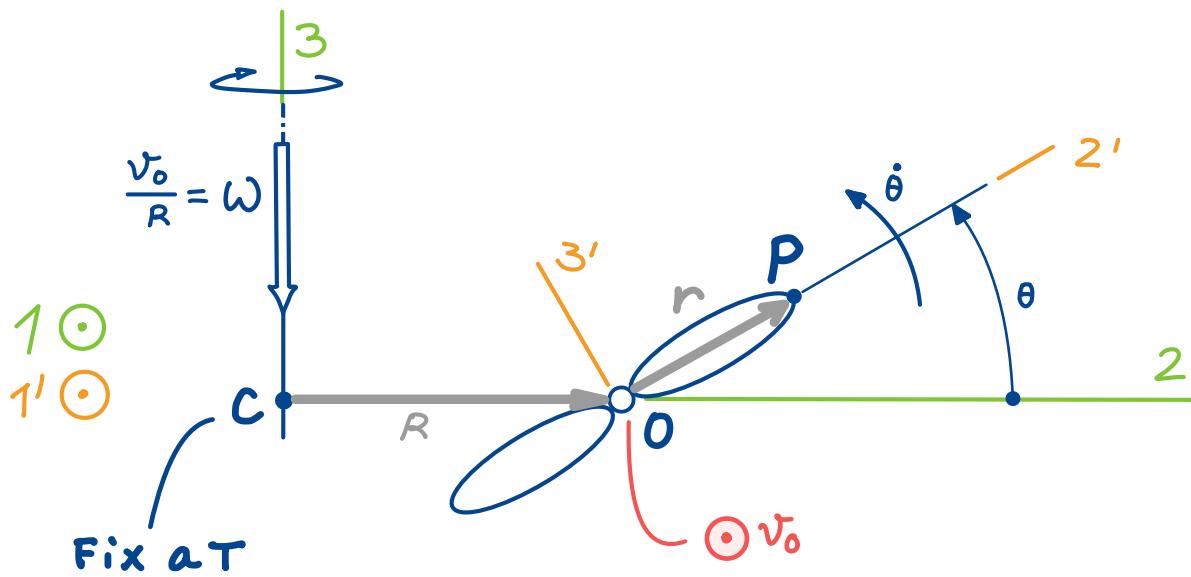
$$R = |\overline{CO}|$$

$$r = |\overline{OP}|$$

$$\omega = \Omega_T^{\overline{CO}} = \underbrace{\frac{v_0}{R}}_{\text{CONSTANT!}}$$

valor de la vel. angular de  $\overline{CO}$  resp. T

Derivarem  $\bar{CP} = \bar{CO} + \bar{OP}$  analíticament.



Cal triar una base per fer els càlculs.

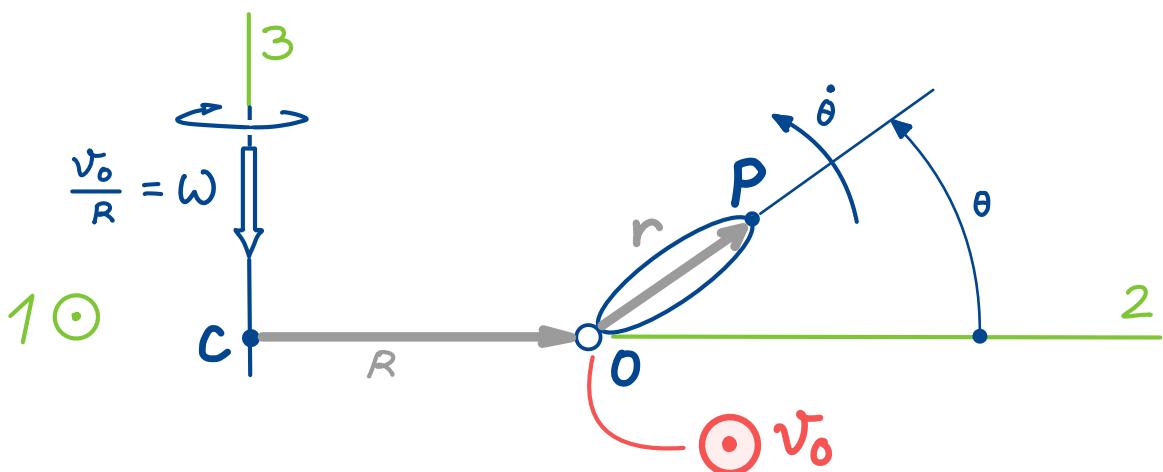
Ens adonem que aquestes dues bases van bé:

$$\boxed{B = (1, 2, 3)} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Dir. } \bar{CO} \\ \text{Dir. } \odot \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{facilita la} \\ \text{projeció de } \bar{CO} \end{array} \quad \boxed{\bar{\Omega}_T^B = (\downarrow \omega)}$$

$$\boxed{B' = (1', 2', 3')} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Dir. } \bar{OP} \\ \text{Dir. } \odot \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{facilita la} \\ \text{proj. de } \bar{OP} \end{array} \quad \boxed{\bar{\Omega}_T^{B'} = (\downarrow \omega) + (\odot \dot{\theta})}$$

Farem els càlculs en ambdues bases, per practicar.

En base  $B = (1, 2, 3)$



$\bar{v}_T(P)$

$$\{\bar{CP}\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\cos\theta \\ rsin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R+r\cos\theta \\ rsin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}_T^B} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ R+r\cos\theta \\ rsin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega R + \omega r\cos\theta \\ -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Anàlisi dimensional:

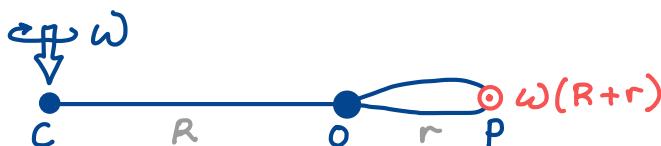
► Tot surt en m/s ✓

Anàlisi de casos particulars (suposant  $\theta=0$ )

► Si aturem el motor de l'hèlix, però no la cabina:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{\theta}=0 \quad \forall t \text{ (aturem } \dot{\theta}) \\ \theta=0 \quad (\text{suposem}) \end{array}} \Rightarrow \{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} \omega(R+r) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \checkmark$$

Particularitzant (1)

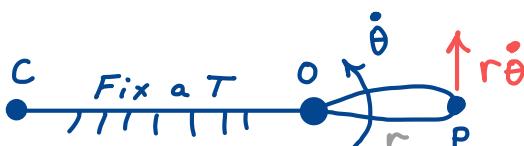


Comprovacions

► Si aturem la cabina, però no l'hèlix:

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega=0 \quad \forall t \text{ (aturem } \omega) \\ \theta=0 \quad (\text{suposem}) \end{array}} \Rightarrow \{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r\dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad \checkmark$$

Particularitzant (1)



$\bar{a}_T(P)$

Recordem que  $\omega = ct$

$$\left\{ \bar{a}_T(P) \right\}_B = \begin{Bmatrix} -wr\dot{\theta}\sin\theta \\ -r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \\ r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} wR + wr\cos\theta \\ -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} -wr\dot{\theta}\sin\theta \\ -\omega^2 R - r\omega^2 \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$


---


$$= \begin{Bmatrix} -2\omega r\dot{\theta}\sin\theta \\ -r\ddot{\theta}\sin\theta - \omega^2 R - r(\dot{\theta}^2 + \omega^2)\cos\theta \\ r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \end{Bmatrix}$$

Anàlisi dimensional:

► Tot surt en  $m/s^2$



Anàlisi de casos particulars (suposant  $\theta = 0$ ):

► Si aturem motor de l'hèlix, però no la cabina:

$$\begin{array}{l} \dot{\theta} = 0 \quad \forall t \text{ (aturem } \dot{\theta}) \\ \theta = 0 \quad (\text{suposem } \theta = 0) \end{array} \Rightarrow \left\{ \bar{a}_T(P) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega^2(R+r) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

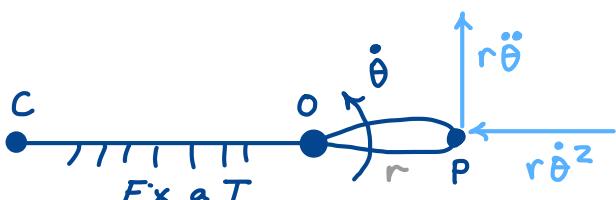


► Si aturem la cabina però no l'hèlix:

$$\begin{array}{l} \omega = 0 \quad \forall t \text{ (aturem } \omega) \\ \theta = 0 \quad (\text{suposem } \theta = 0) \end{array} \Rightarrow \left\{ \bar{a}_T(P) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

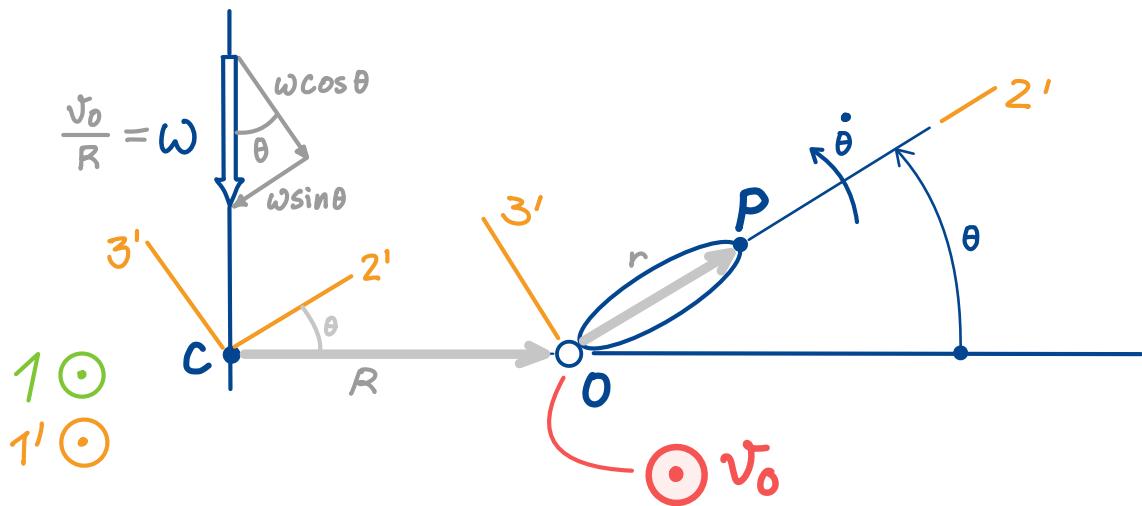


Comprovacions



## En base $B'$

$\bar{v}_T(P)$



$$\{\bar{v}_T(P)\}_{B'} = \bar{v}_O + \bar{v}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ R\cos\theta \\ -R\sin\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R\cos\theta + r \\ -R\sin\theta \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\Omega}_T^{B'} = (\Downarrow \omega) + (\odot \dot{\theta})$$

$$\boxed{\{\bar{v}_T(P)\}_{B'}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R\dot{\theta}\sin\theta \\ -R\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -w\sin\theta \\ -w\cos\theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ R\cos\theta + r \\ -R\sin\theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -R\dot{\theta}s \\ -R\dot{\theta}c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cancel{WR} \\ \cancel{R\dot{\theta}s} \\ \cancel{R\dot{\theta}c + \dot{r}} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \cancel{R\cos\theta + r} \\ \cancel{-R\sin\theta} \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{r} \end{Bmatrix}}$$

$$\left| \begin{array}{l} s = \sin\theta \\ c = \cos\theta \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \leftarrow \text{Per abreviar} \end{array} \right.$$

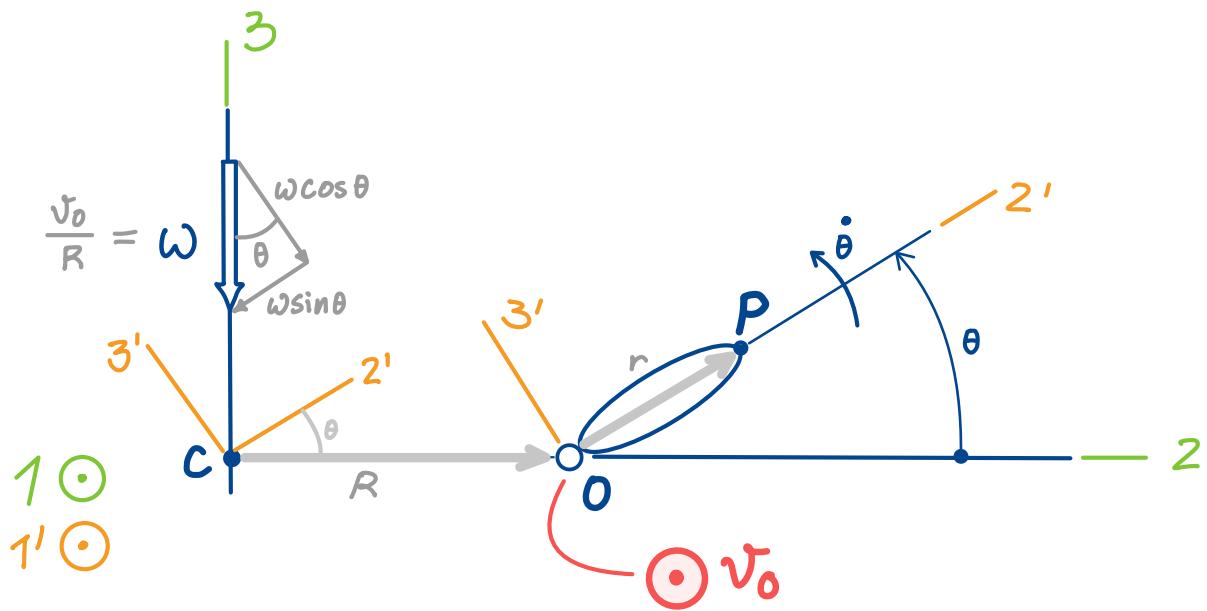
$\bar{a}_T(P)$

$$\boxed{\{\bar{a}_T(P)\}_{B'}} = \begin{Bmatrix} -wr\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \\ \ddot{r} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -w\sin\theta \\ -w\cos\theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} wr + wrcos\theta \\ 0 \\ \dot{r} \end{Bmatrix}}_{\{\bar{a}_T(P)\}_{fixed}} =$$

$$= \boxed{\begin{Bmatrix} -2wr\dot{\theta}\sin\theta \\ -w^2\cos\theta(R + r\cos\theta) - \dot{\theta}^2r \\ \ddot{r} + w^2\sin\theta(R + r\cos\theta) \end{Bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} -wr\dot{\theta}\sin\theta \\ -w^2R\cos\theta - w^2r\cos^2\theta - \dot{\theta}^2r \\ w^2R\sin\theta + w^2rsin\theta\cos\theta \end{Bmatrix}}$$

$\bar{\alpha}_T^{\text{hèlix}}$



$$\bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}} = \bar{\Omega}_{\text{cabina}}^{\text{hèlix}} + \bar{\Omega}_T^{\text{cabina}} = (\odot \dot{\theta}) + (\downarrow \omega)$$

En base B

$$\{\bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}}\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix}$$

variable, en ppi.  
ct

$$\{\bar{\alpha}_T^{\text{hèlix}}\}_B = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix}} \times \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ -\omega \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En base B'

$$\{\bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -\omega \sin \theta \\ -\omega \cos \theta \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\alpha}_T^{\text{hèlix}}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ -\omega \dot{\theta} \cos \theta \\ \omega \dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix} + \boxed{\{\bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}}\}_{B'}} \times \boxed{\{\bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}}\}_{B'}}$$

pq B' és fixa a hèlix

$$\bar{\Omega}_T^{B'} = \bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}}$$

$\parallel$

$\bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}}$

# Angles d'Euler

Repàs de teoria

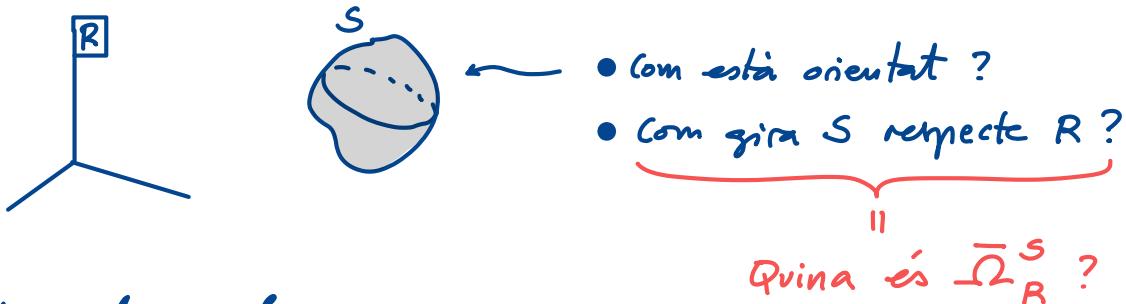
+

Exercicis

# Repàs d'angles d'Euler

(Recomano estudiar-ho de Wikimec: C1.4, secció "angles d'Euler")

Permeten orientar un sòlid respecte una ref. i expressar la vel. angular del sòlid respecte aquesta ref.

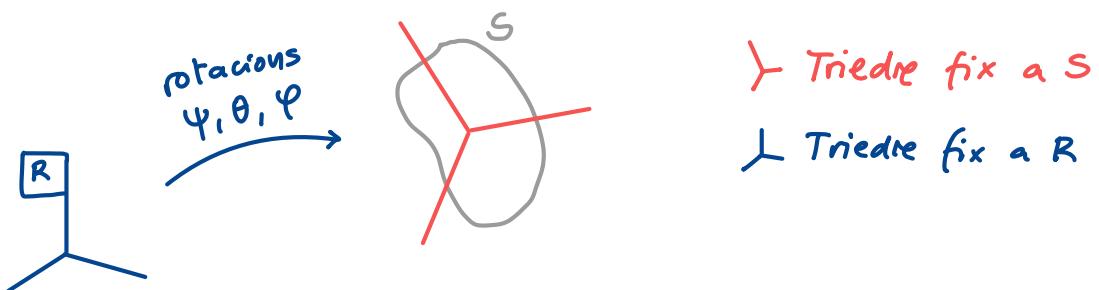


Recordem els angles

$\psi$	$\theta$	$\varphi$
psi	theta	phi
precessió	nutació	spin

Sempre en aquest ordre!

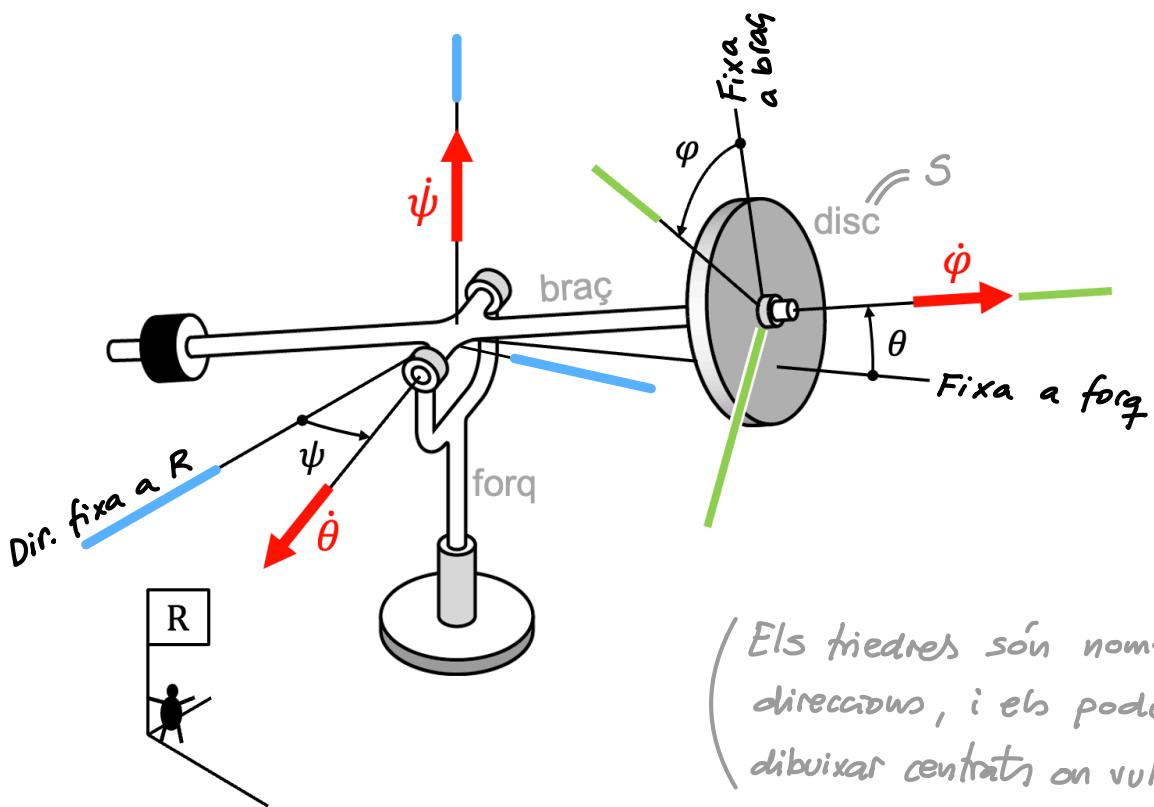
Sigui un sòlid  $S$  amb un triedre fix a ell. Les rotacions d'Euler són 3 rotacions encadenades (en sèrie), al voltant de 3 eixos, que permeten definir l'orientació del triedre fix a  $S$  respecte a un triedre fix a  $R$ :



A teoria hem vist com són aquestes rotacions en el cas del ginoscopi. Vegeu apartat C1.4 de mec. etseib. edu Wikimec

Però una cosa és com queda orientat aquest triedre fix al sòlid, i una altra és com queden els eixos de rotació després de cada gir.

Tot això es veu clar al giroscopi, on  $S = \text{disc}$ :



- Triedre fix a  $R$ ?  $\rightarrow$  El blau! (Dir.  $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$  per  $\psi = \theta = \phi = 0$ )
- Triedre fix a  $S$ ?  $\rightarrow$  El verd!
- Eixos d'Euler?  $\rightarrow$  Els dels vecs. vermellos!  $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$

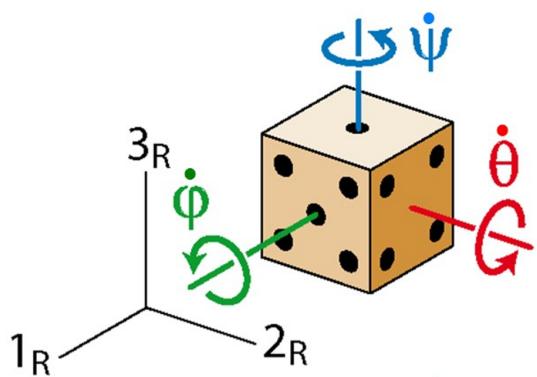
Recordeu sempre això:

Eix	Com queda?	Gira afectat per	Té vel. angular
A $90^\circ$ $\bar{\psi}$	Fix a $R$	Res (no gira)	$\bar{\theta}$
A $90^\circ$ $\bar{\theta}$	$\perp$ a $\bar{\psi}$ i $\bar{\phi}$	$\psi$	$\bar{\psi}$
A $90^\circ$ $\bar{\phi}$	Fix a $S$	$\psi + \theta$	$\bar{\psi} + \bar{\theta}$

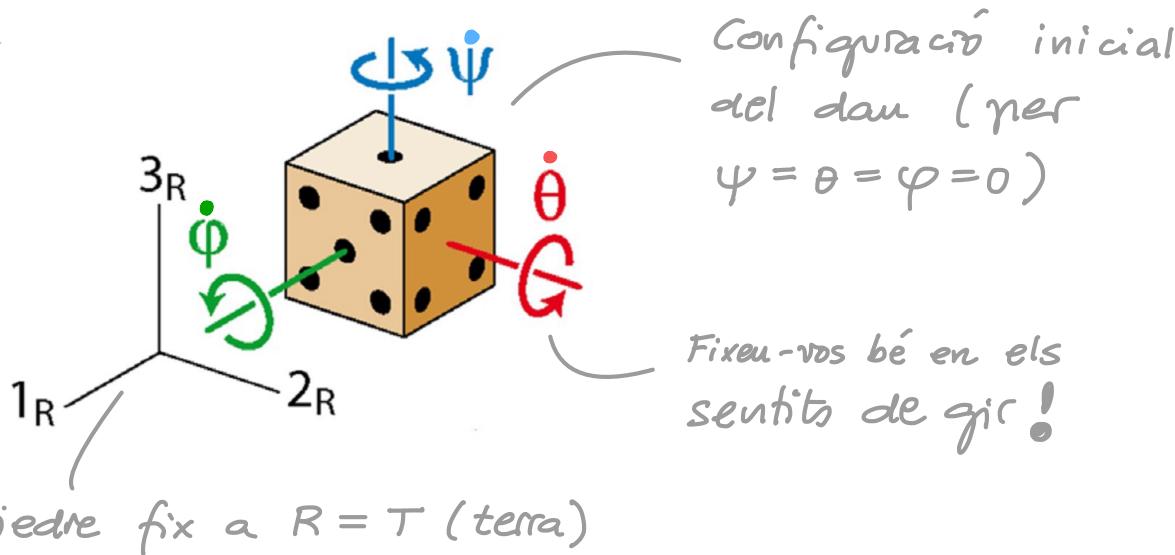
$$\text{Eix } \bar{\theta} = (\text{Pla } \perp \bar{\psi}) \cap (\text{Pla } \perp \bar{\phi})$$

Especificació rigorosa de la posició del 2<sup>o</sup> eix

L'angle entre  $\bar{\psi}$  i  $\bar{\phi}$  pot ser qualsevol!



El dau s'orienta mitjançant tres angles d'Euler respecte del terra ( $R$ ). Per a la configuració  $\psi = \theta = \varphi = 0$ , els eixos d'Euler són els indicats.  $1_R 2_R 3_R$  són tres direccions fixes a terra. Determina l'orientació del dau i la direcció de les rotacions d'Euler si s'introdueixen  $\Delta\psi = \Delta\theta = \Delta\varphi = 90^\circ$ .



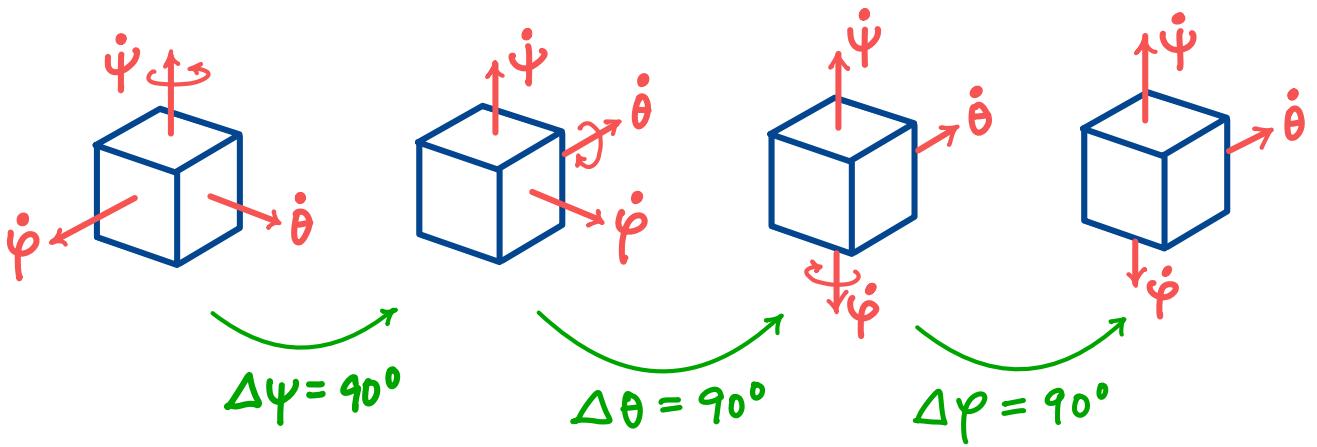
Triedre fix a  $R = T$  (terra)

Per resoldre l'exercici:

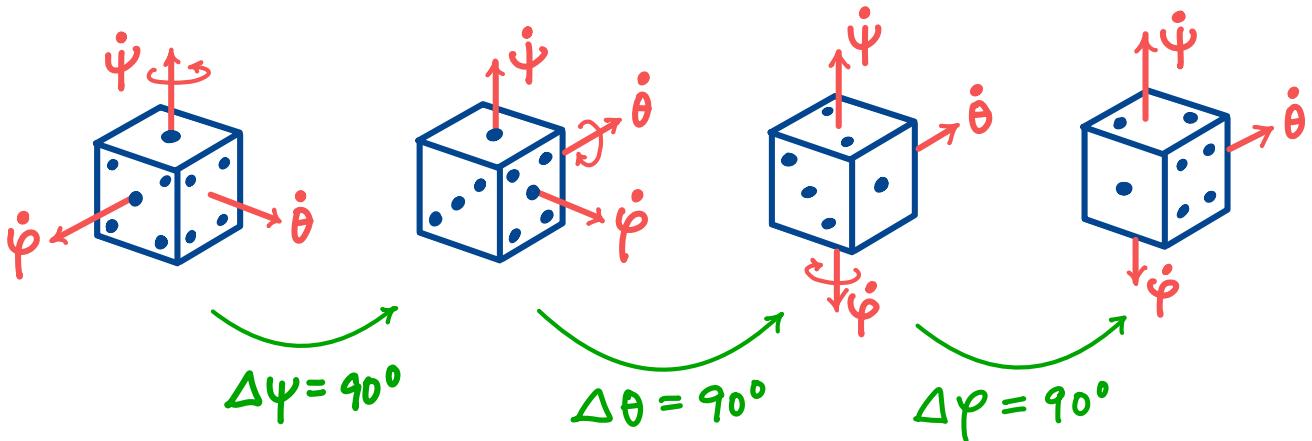
- Dibuixarem com queden els eixos  $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$  després de cada rotació
- Deduirem com queden les cares tenint en compte que les oposades sumen 7.
- Comprovaranem que :

$\bullet \bar{\psi}$  roman fix a la ref.       $\leftarrow$   
 A  $90^\circ$        $\leftarrow$   
 A  $90^\circ$        $\leftarrow$   
 $\bullet \bar{\theta}$  " en el pla  $\perp$  a  $\bar{\psi}$   
 $\bullet \bar{\varphi}$  " fix a la cara original del dau       $\leftarrow$   
Angle entre  $\bar{\psi}$  i  $\bar{\varphi}$  pot ser qualsevol  
en aq. cas

Com queden els eixos  $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$ :



Com queden les cares:

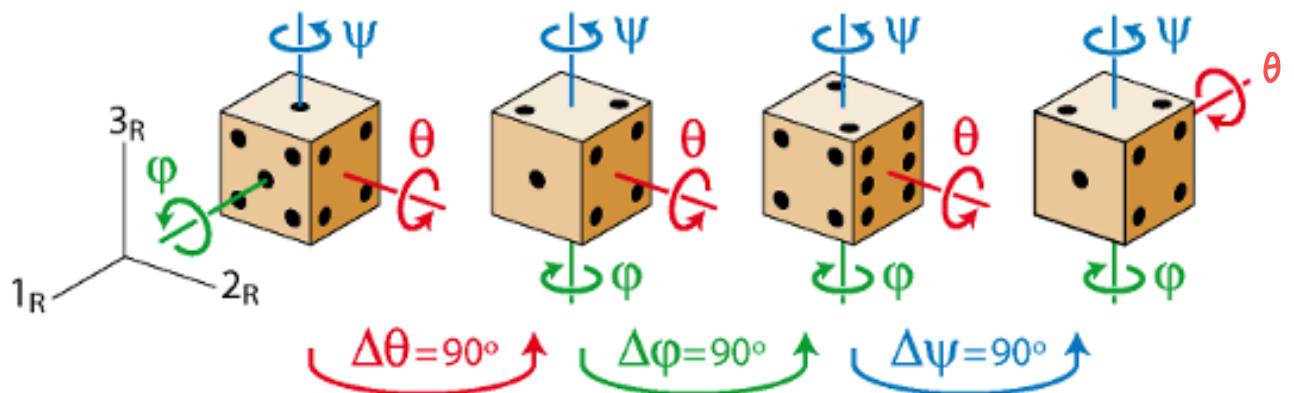
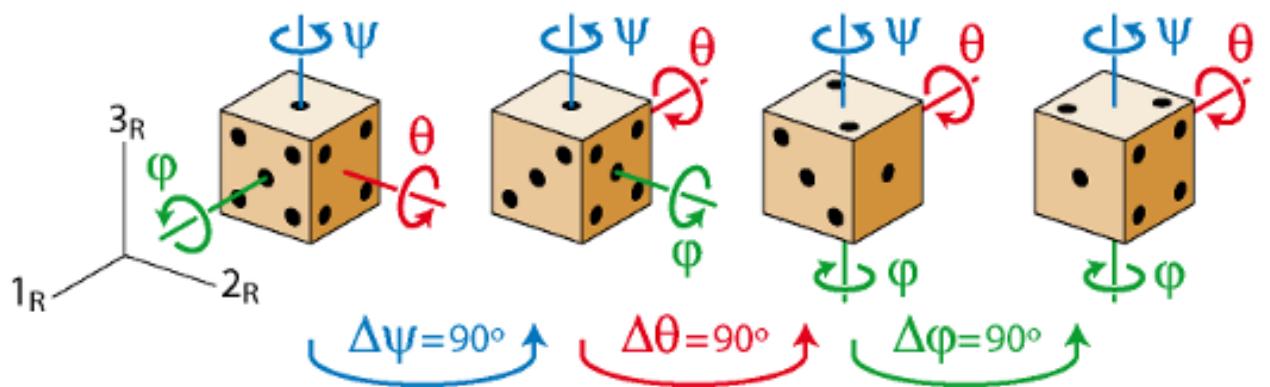


Comprovacions :

- $\bar{\psi}$  roman fix a ref?      Si ✓
- $\bar{\theta}$  roman | al pla  $\perp$  a  $\bar{\psi}$ ?      Si ✓  
| al pla  $\perp$  a  $\bar{\varphi}$ ?      Si ✓
- $\bar{\varphi}$  roman  $\perp$  a cara ?      Si ✓

Deures : Introduiu les rotacions en l'ordre  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\psi$  i comproueu que surt el mateix !

Solució en els dos ordres :



Ha de donar el mateix, ja que l'orientació per mitjà d'angles d'Euler és invariant a l'ordre en que s'introdueixen les rotacions.



Compte: estem orientant la càmera resp. l'helicòpter, no el terra.

Siguin | PP el "pla pel·lícula" ← El pla  $\perp$  a l'eix òptic, on es forma la imatge de la càmera

PS el "pla de simetria" de l'helicòpter.

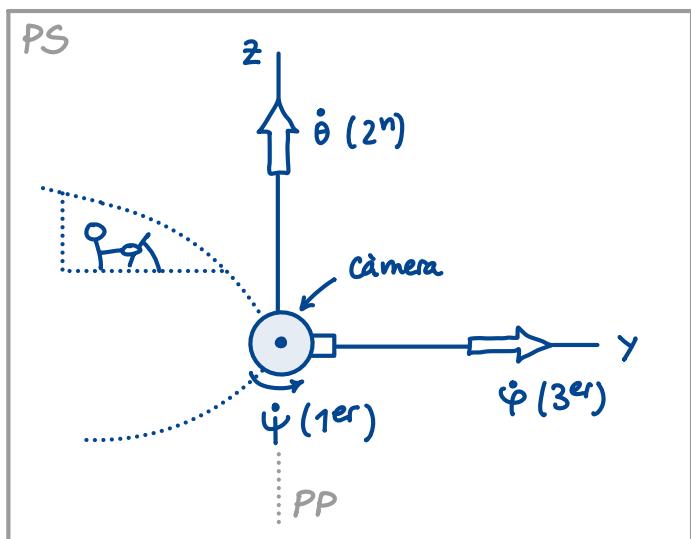
De teoria d'angles d'Euler sabem que

$2^{\text{a}}$  eix d'Euler es manté  $\left\{ \begin{array}{l} \perp \text{ al } 1^{\text{er}} \text{ eix} \Rightarrow E \text{ PS} \\ \perp \text{ al } 3^{\text{er}} \text{ eix} \Rightarrow E \text{ PP} \end{array} \right.$

Per tant, en una config. general:

Dir. del  $2^{\text{a}}$  eix d'Euler = PS  $\cap$  PP

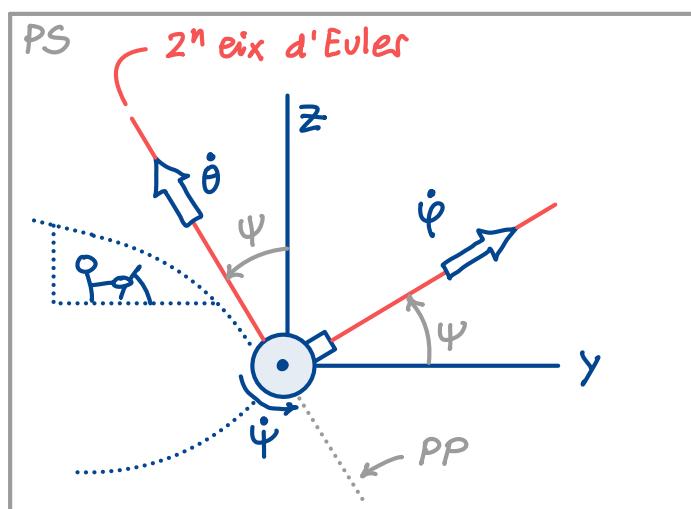
Tot i que no caldria afegir més explicacions, ho intento explicar amb dibuixos tot seguit:



Situació inicial  
 (Triedre xyz és fix a l'helicòpter (és "el de referència"))

Clarament:

$$2^{\text{a}} \text{ eix Euler} = PS \cap PP$$



Situació després de la 1^{\text{a}} rotació ( $\psi$ )

Clarament:

$$2^{\text{a}} \text{ eix Euler} = PS \cap PP$$

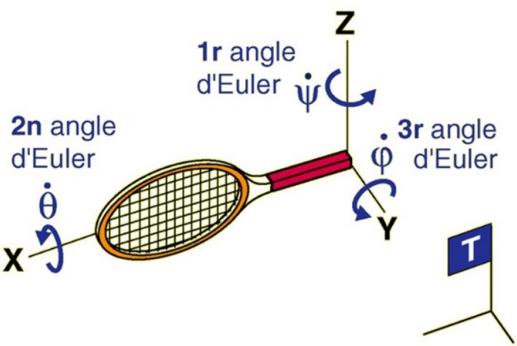
Després de la 2^{\text{a}} rotació ( $\dot{\theta}$ ), PP s'abat, però seguim tenint:

$$2^{\text{a}} \text{ eix Euler} = PS \cap PP$$

Després de la 3^{\text{a}} rotació ( $\dot{\varphi}$ ), PP gira around l'eix  $\dot{\varphi}$ , però seguim tenint

$$2^{\text{a}} \text{ eix Euler} = PS \cap PP$$

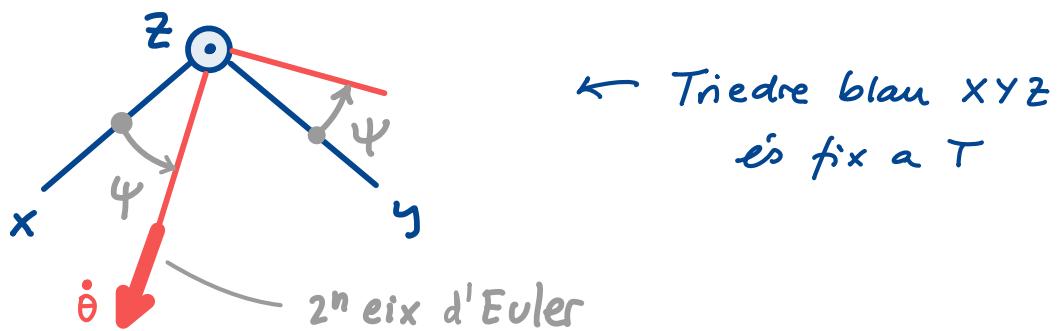
orientació  $\psi = \theta = \phi = 0$



La raqueta s'orienta mitjançant tres angles d'Euler respecte del terra (T). Per a la configuració  $\psi = \theta = \phi = 0$ , els eixos d'Euler són els indicats. XYZ són tres direccions fixes a terra.

Quina és la direcció del 2n eix d'Euler per a una configuració general?

2<sup>n</sup> eix es mou en el pla horizontal de T:



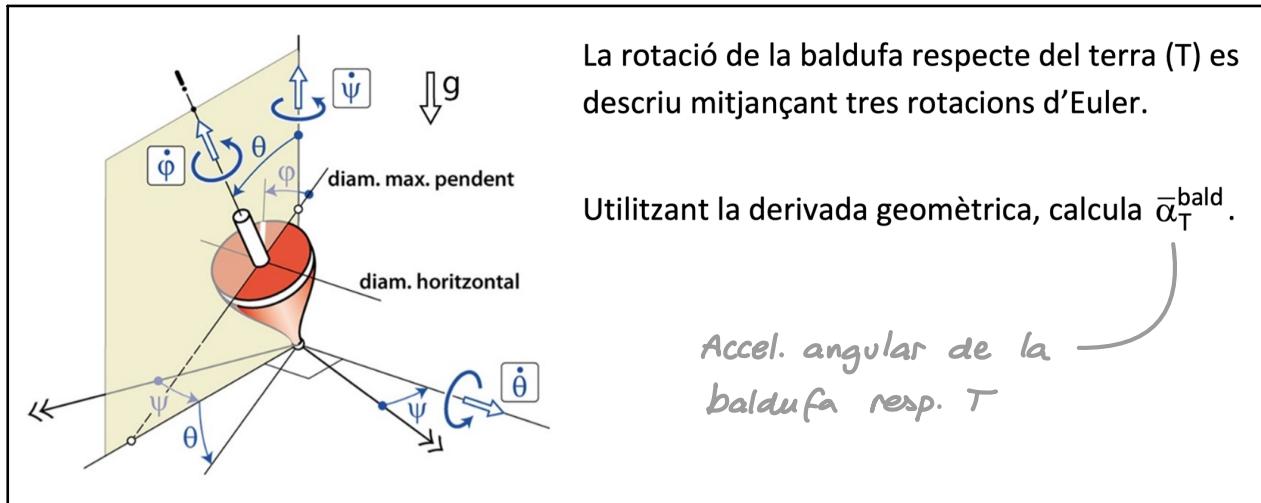
2<sup>n</sup> eix  
d'Euler  
es manté

$\perp$  al 1er eix  $\implies$  2<sup>n</sup> eix  $\in$  pla horizontal  
" Dir. vertical  
(la gravetat) PH

$\perp$  al 3er eix  $\implies$  2<sup>n</sup> eix  $\in$  pla raqueta  
Dir.  $\perp$  pla raqueta PR

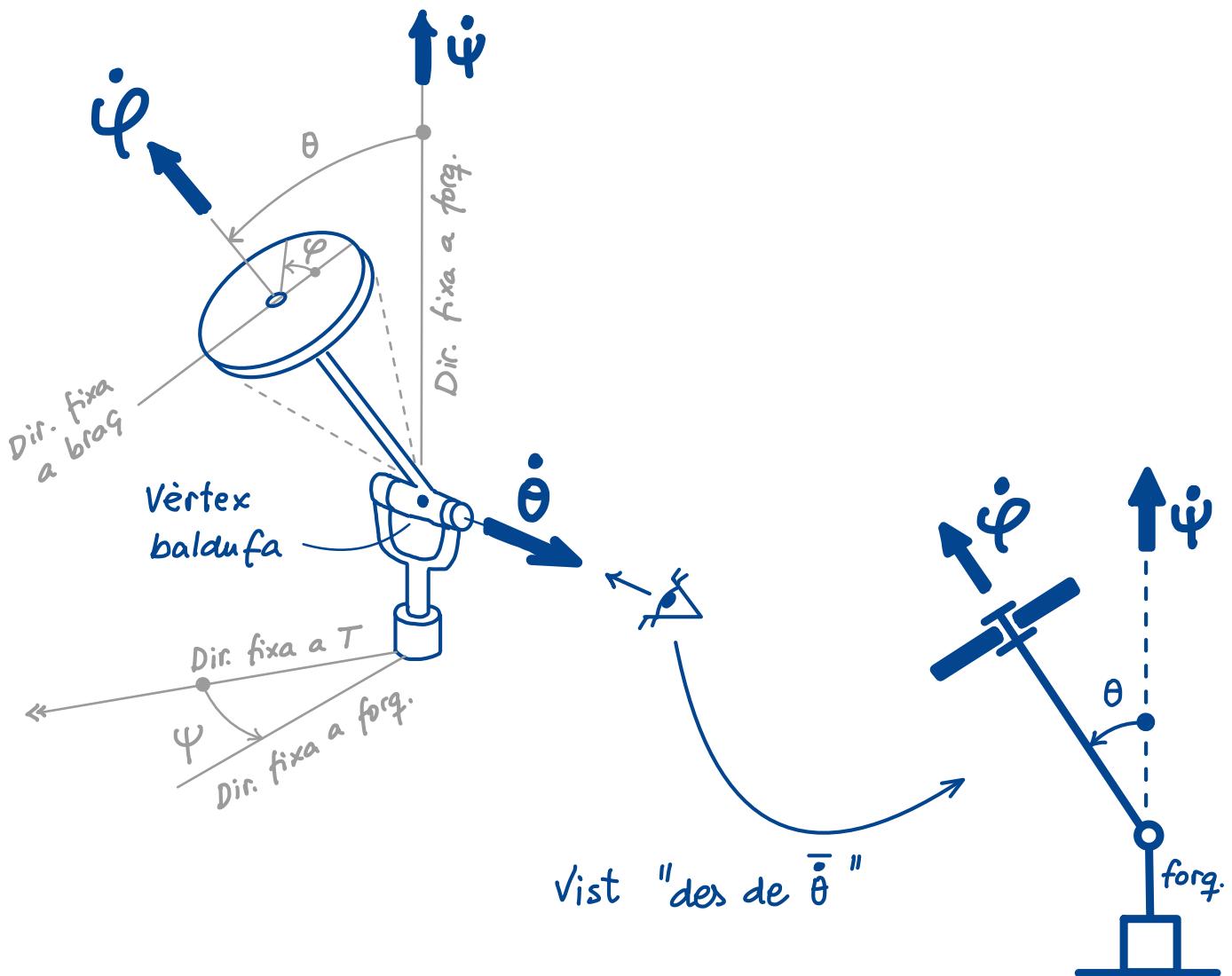
Ergo, a una config. general:

$$2^n \text{ eix} = PH \cap PR$$

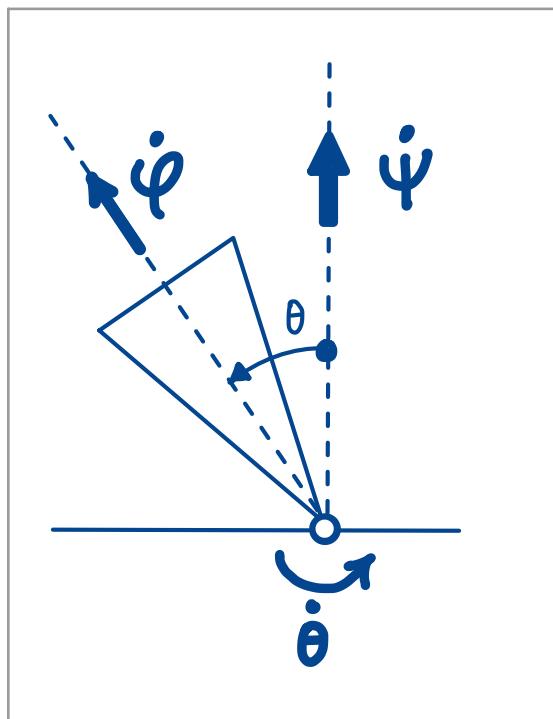


Cal derivar  $\bar{\Omega}_T^{\text{bald}} = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\varphi}$  geomètricament.

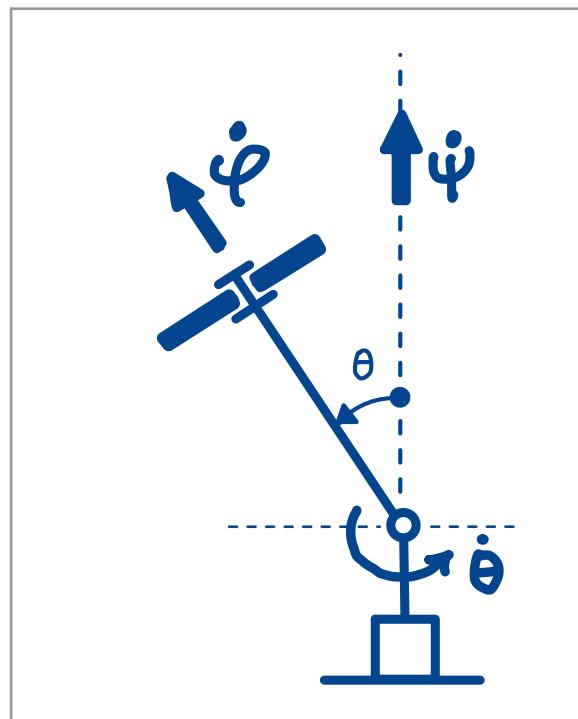
Tot i que no cal estrictament, podem pensar la baldufa com un giroscopi. Això ens ajudarà a entendre com varien  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ :



Baldufa

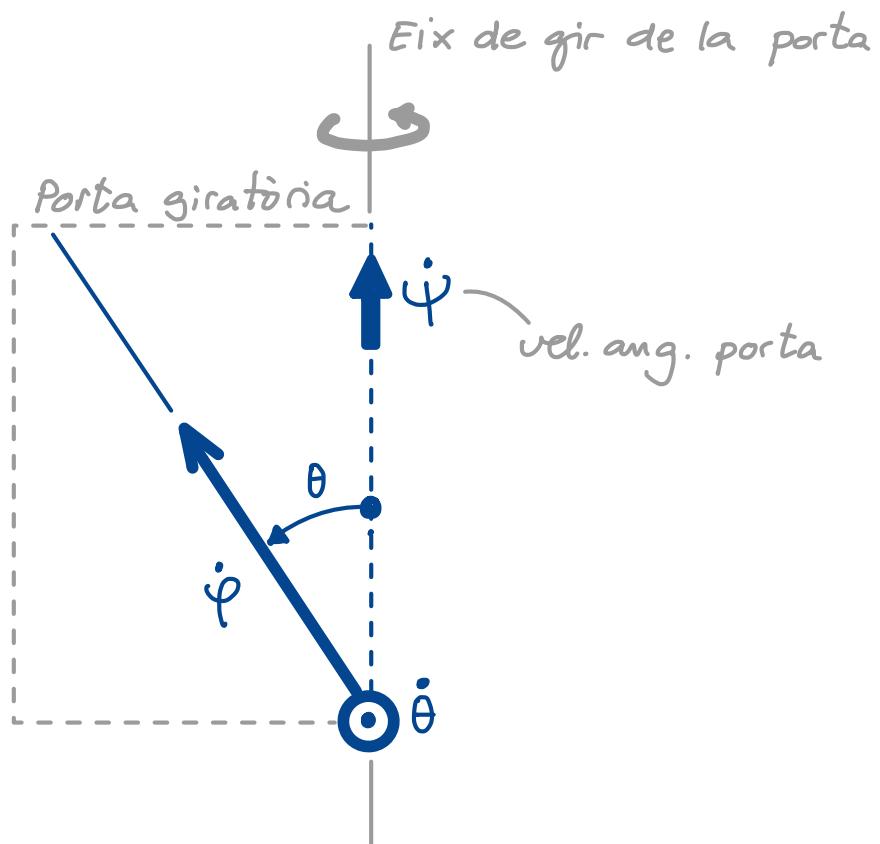


Giroscopi equivalent



Podem pensar el pla definit per  $\bar{\psi}$  i  $\bar{\phi}$  com una "porta" que gira amb vel. angular  $\dot{\bar{\psi}}$

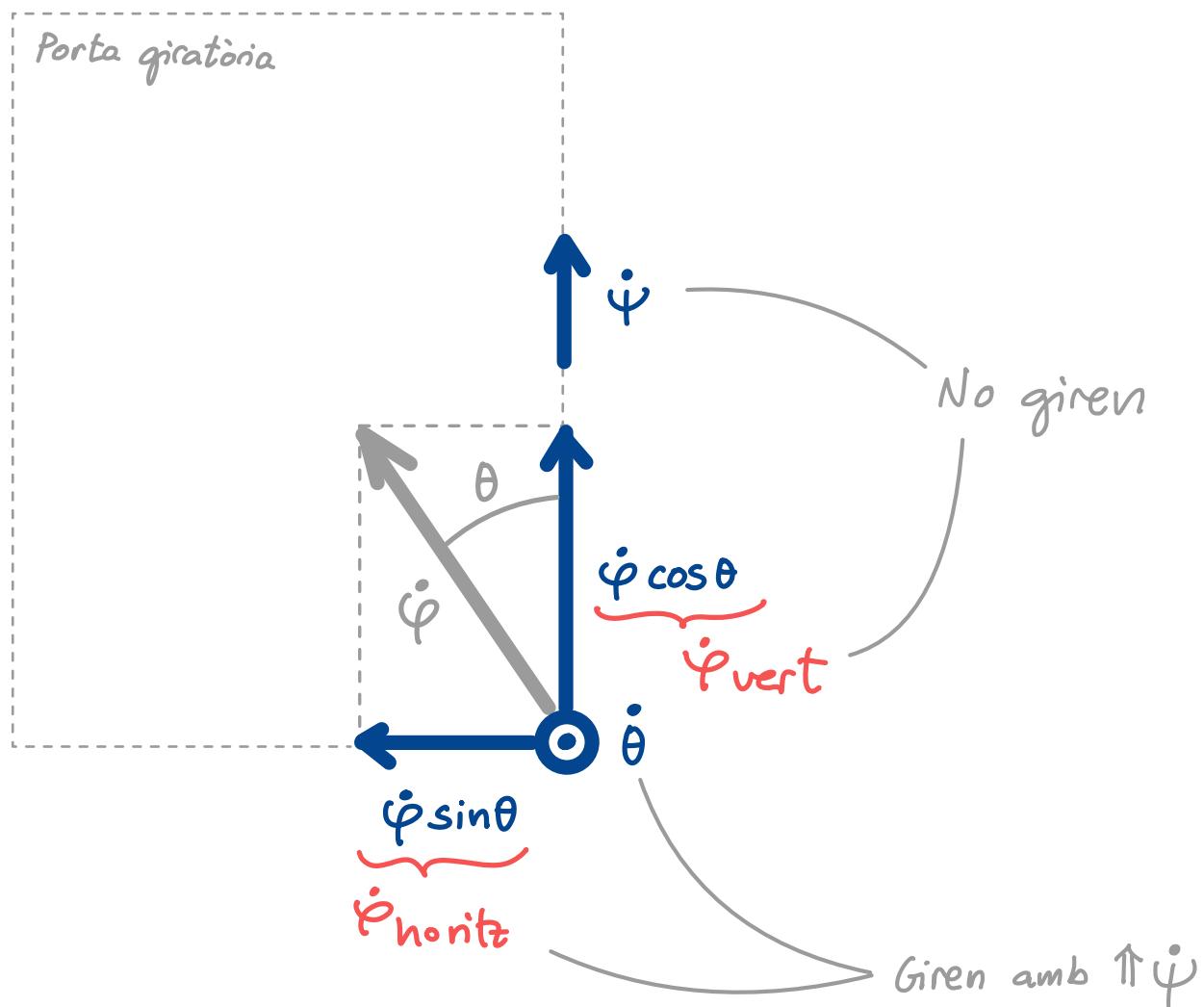
Els vectors  $\bar{\psi}$  i  $\bar{\phi}$  són sobre aquest pla, i  $\dot{\theta}$  és  $\perp$  al pla:



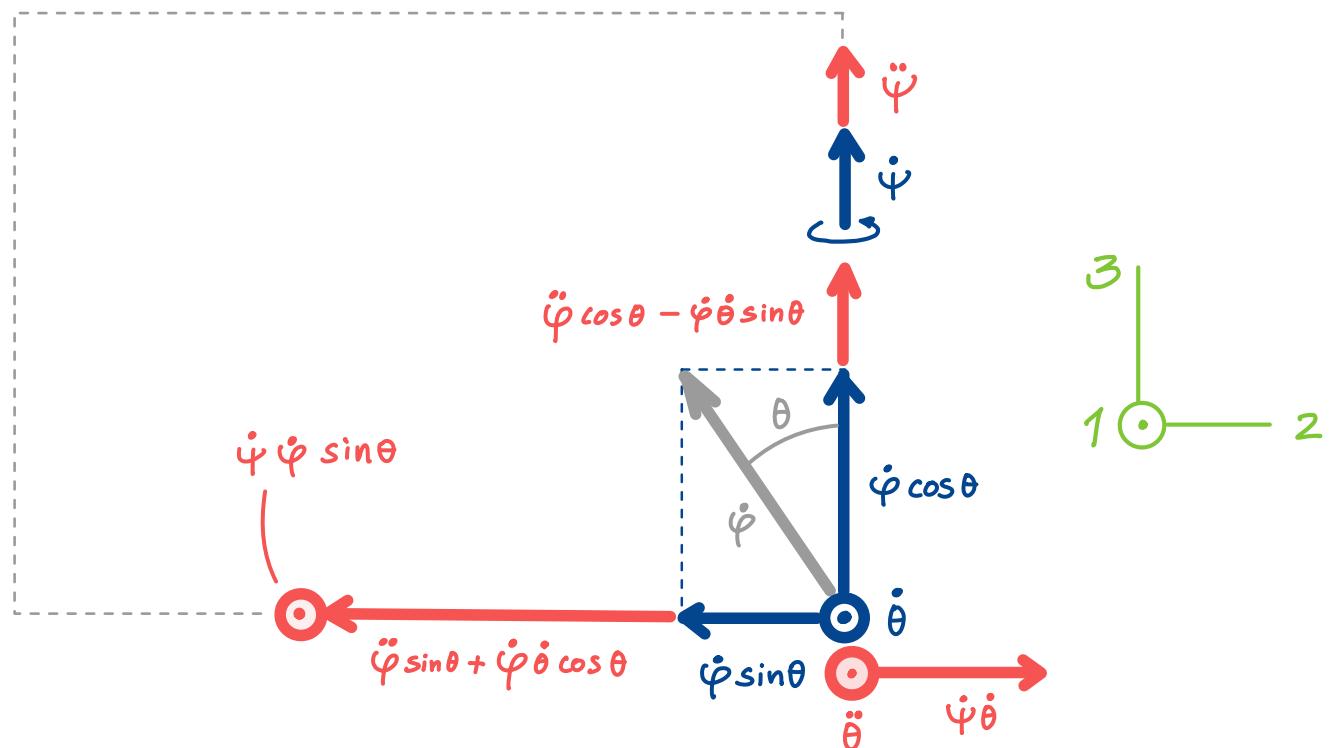
Per derivar geomètricament aquests tres vectors podem aplicar un truc: podem substituir  $\dot{\varphi}$  per

$$\underbrace{\dot{\varphi}_{\text{vert.}} + \dot{\varphi}_{\text{horitz}}}_{\begin{array}{l} \text{component} \\ \text{vertical de } \dot{\varphi} \end{array}} + \underbrace{\dot{\varphi}_{\text{horitz}}}_{\begin{array}{l} \text{component} \\ \text{horizontal de } \dot{\varphi} \end{array}}$$

Això simplifica la derivació, perquè, ara, els vectors que giren ho faran amb rotació simple només:

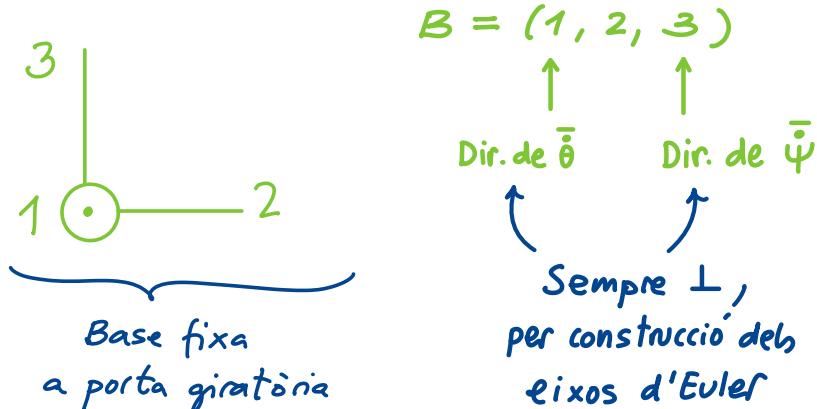


Ara derivem els vecs. blaus i obtenim els vermells:



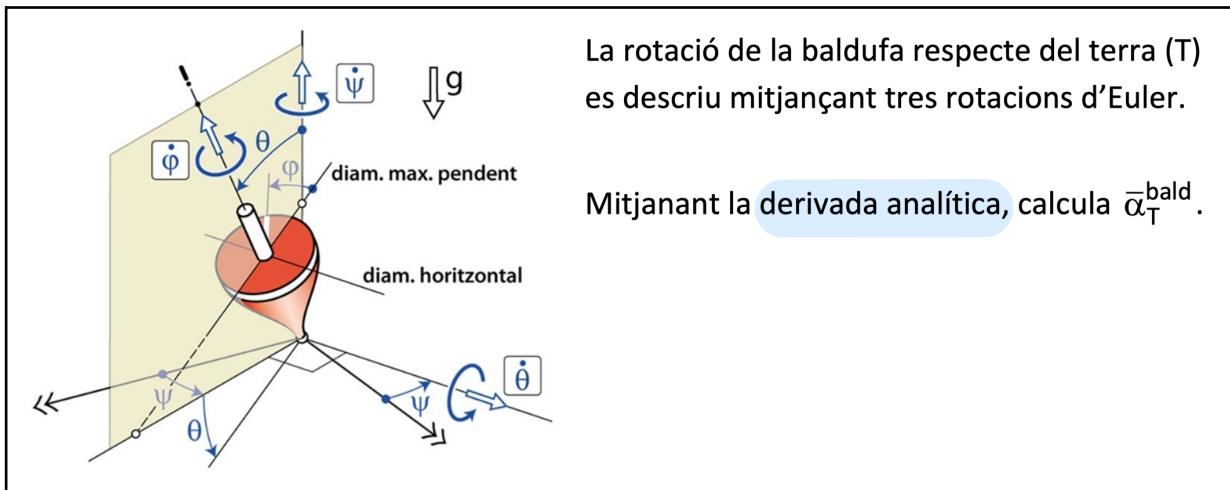
$\bar{\alpha}_T^{\text{Bald}}$  és la suma dels vecs vermellos! Ja no la pintem!

Serà + pràctic expressar  $\bar{x}_T^{\text{Bald}}$  mitjançant la base:



Queda així:

$$\left\{ \ddot{\bar{\alpha}}_T^{\text{bald}} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \dot{\theta} - \ddot{\varphi} \sin \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\psi} + \ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\}_B \quad (A)$$



La rotació de la baldufa respecte del terra (T) es descriu mitjançant tres rotacions d'Euler.

Mitjanant la derivada analítica, calcula  $\bar{\alpha}_T^{\text{bald}}$ .

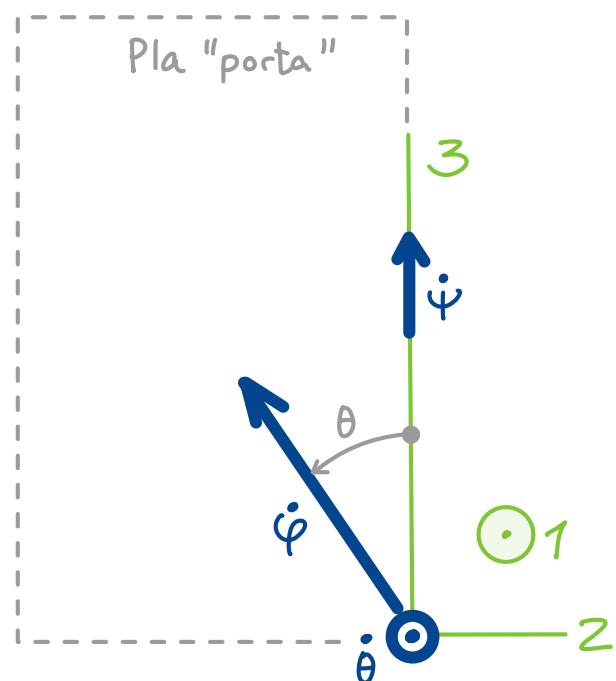
En base B

$$B = (1, 2, 3)$$

Es la d'abans

(gira amb  $\uparrow \bar{\psi}$ )

$$\left\{ \bar{\alpha}_T^{\text{bald}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{Bmatrix}$$



$$\boxed{\left\{ \bar{\alpha}_T^{\text{bald}} \right\}_B} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} \\ -\ddot{\varphi} \sin \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\varphi} + \ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{array} \right\}}_{\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \\ 0 \end{array} \right\}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \\ -\ddot{\varphi} \sin \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \\ \ddot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\} \quad (A'')$$

Quadra amb Eq. (A)  
de l'exercici anterior !

Ara en base  $B' = (1', 2', 3')$  que també va bé

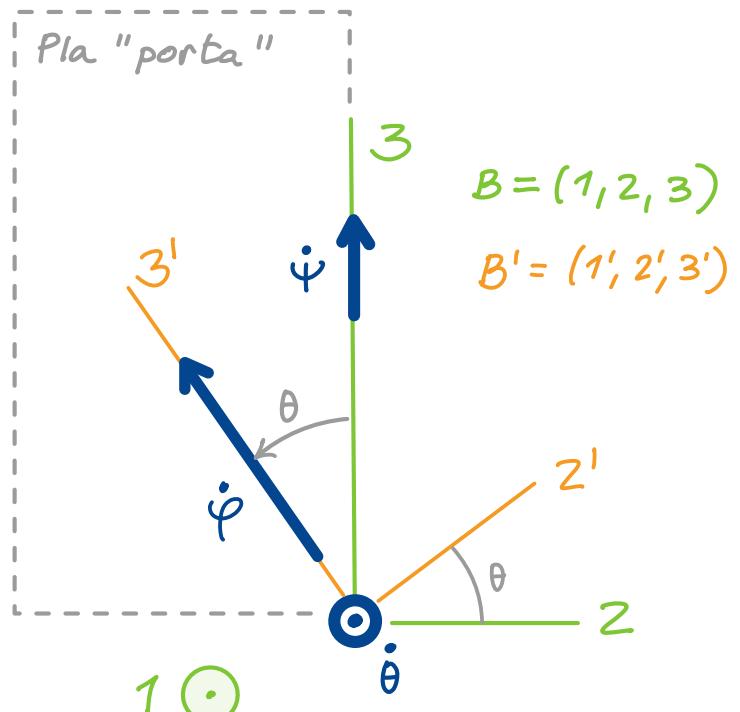
$B'$  definida així:

$$B' = (1', 2', 3')$$

$\uparrow$        $\uparrow$

Dir. de  $\bar{\theta}$       Dir. de  $\bar{\varphi}$

Sempre  $\perp$   
(per construcció eixos d'Euler)



$$\left\{ \bar{\Omega}_T^{bal'd} \right\}_{B'} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{array} \right\}$$

$$\downarrow \frac{d}{dt}$$

$$\boxed{\left\{ \bar{\alpha}_T^{bal'd} \right\}_{B'}} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\varphi} \end{array} \right\} +$$

$$\bar{\Omega}_T^{B'} = \bar{\psi} + \bar{\theta} \leftarrow \text{No intervé } \bar{\varphi}$$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{array} \right\}}_{\times} \times \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{array} \right\} =$$

$$\parallel \leftarrow \bar{a} \times (\bar{a} + \bar{b}) = \underbrace{(\bar{a} \times \bar{a})}_{\circ} + (\bar{a} \times \bar{b})$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\psi} \sin \theta \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\varphi} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \dot{\psi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} \dot{\varphi} \\ 0 \end{array} \right\}$$