

# 2P

Versió 1.3.1

## Derivació geomètrica i analítica

Lluís Ros  
<https://lluisros.github.io/mecanica>

## Recordatori

### Derivada temporal de $\bar{u}$ relativa a la ref. R

#### Derivació geomètrica

$$\left[ \frac{d\bar{u}}{dt} \right]_R = \begin{bmatrix} \text{canvi valor} \\ \text{canvi direcció} \end{bmatrix} = \underbrace{\dot{u} \cdot \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}}_{\text{canvi val. (}\parallel \text{ a }\bar{u}\text{)}} + \underbrace{\bar{\Omega}_R^B \times \bar{u}}_{\text{canvi dir. (}\perp \text{ a }\bar{u}\text{)}}$$

Ref. respecte la qual derivem

"òmega" del vector resp. R

#### Derivació analítica:

$$\left\{ \left[ \frac{d\bar{u}}{dt} \right]_R \right\}_B = \frac{d}{dt} \{ \bar{u} \}_B + \left\{ \bar{\Omega}_R^B \right\}_B \times \{ \bar{u} \}_B =$$

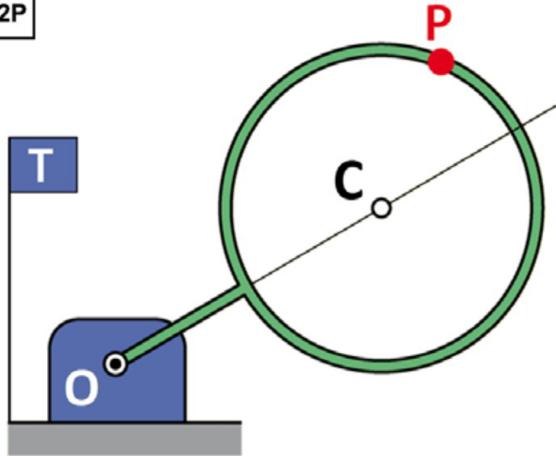
Base en la que expressem el resultat

Ref. respecte la qual derivem

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{derivada} \\ \text{de les} \\ \text{components} \\ \text{de } \bar{u} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{l} \text{òmega de} \\ \text{la base } B \\ \text{resp. R} \end{array} \right\}_B \times \left\{ \begin{array}{l} \text{vector} \\ \text{sense} \\ \text{derivar} \end{array} \right\}_B$$

"òmega" de la base resp. R

2P

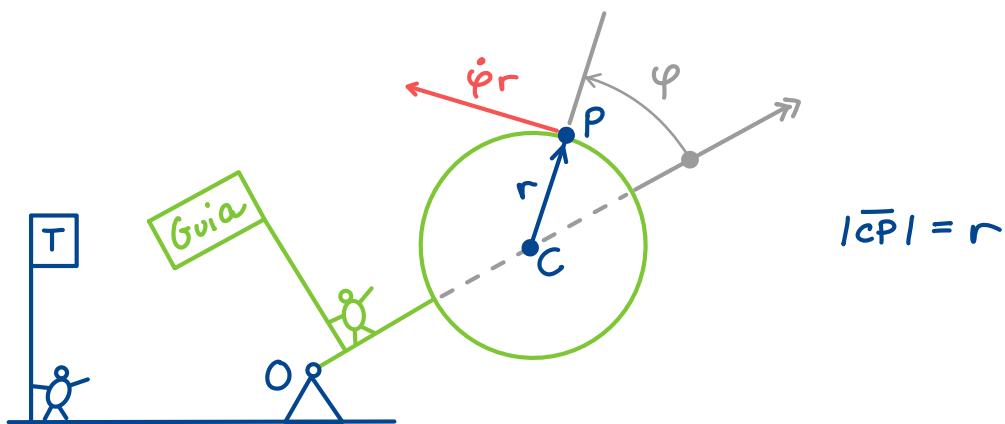


La guia circular està articulada al terra (T).  
La partícula P es mou dins la guia.  
Mitjançant la derivada geomètrica, calcula  
 $\bar{v}_{\text{guia}}(P)$ ,  $\bar{v}_T(P)$ ,  $\bar{\alpha}_T^{\text{guia}}$ ,  $\bar{\alpha}_T^{\bar{CP}}$ .

(Suposeu:  
 $r = |\bar{CP}|$   
 $R = |\bar{OC}|$ )

$\bar{v}_{\text{Guia}}(P)$

Derivem el vec. pos.  $\bar{CP}$  obtingut a TP (\*):



$$\bar{v}_{\text{Guia}}(P) = \frac{d\bar{CP}}{dt} \Big|_{\text{Guia}} = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} 0 \\ \text{canvi valor} \end{array} \right]}_{\bar{v}_{\text{Guia}}} + \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \bar{\Omega} \bar{CP} \times \bar{CP} \\ \text{canvi dir.} \end{array} \right]}_{\bar{\alpha}_{\text{Guia}} \times \bar{CP}} =$$

$$= (\hat{\circ} \dot{\varphi}) \times (\uparrow r) = (\leftarrow \dot{\varphi} r)$$

(I)

(\*\*)

Compara-la amb  
la de l'Eq. (I)  
de l'ex. seg. (són  
iguals!)

(\*)  $\bar{CP}$  és un vec. pos. vàlid per estudiar el moviment de P resp.  
la guia perquè C és fix a la guia.

(\*\*) Les direccions indicades a (I) són aproximades: cal haver fet  
el dibuix de dalt per deixar-les clares de manera precisa.

$$\bar{\alpha}_T^{\text{Guia}}$$

← Accel. angular de la guia resp. T

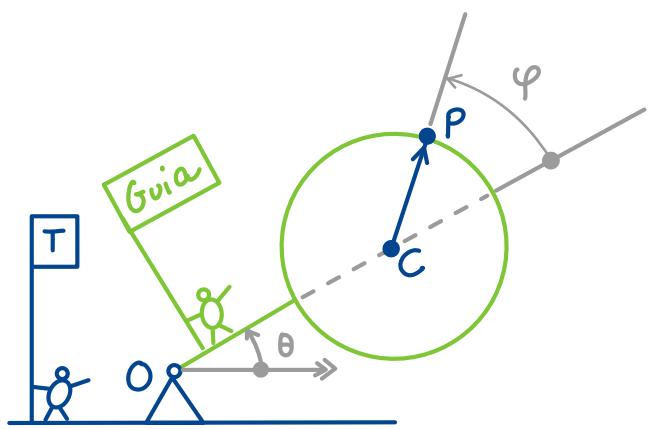
Clarament :

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Guia}} = (\odot \dot{\theta})$$

Per tant :

$$\bar{\alpha}_T^{\text{Guia}} = \frac{d \bar{\Omega}_T^{\text{Guia}}}{dt} \Big|_T =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \text{canvi} \\ \text{valor} \end{bmatrix}}_{\odot \ddot{\theta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \text{canvi} \\ \text{dir.} \end{bmatrix}}_{\parallel O \text{ perquè } \bar{\Omega}_T^{\text{Guia}} \text{ sempre té dir. } \odot} = (\odot \ddot{\theta})$$



$$\bar{\alpha}_T^{\bar{C}\bar{P}}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_T^{\bar{C}\bar{P}} &= \bar{\Omega}_{\text{Guia}}^{\bar{C}\bar{P}} + \bar{\Omega}_T^{\text{Guia}} = \\ &= (\odot \dot{\varphi}) + (\odot \dot{\theta}) = \boxed{(\odot (\dot{\varphi} + \dot{\theta}))} \end{aligned}$$

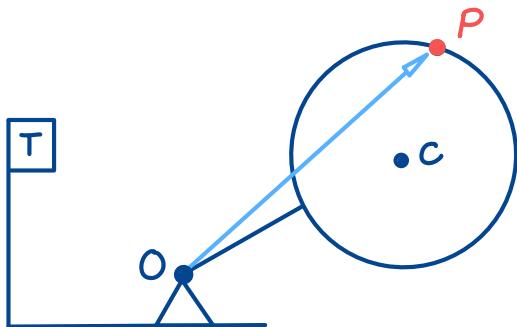
↑ v. dibuix anterior

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_T^{\bar{C}\bar{P}} &= \frac{d \bar{\Omega}_T^{\bar{C}\bar{P}}}{dt} \Big|_T = \begin{bmatrix} \text{canvi} \\ \text{valor} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{canvi} \\ \text{direcció} \end{bmatrix} = \\ &= \boxed{(\odot (\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}))} \end{aligned}$$

↑ Ja que  $\bar{\Omega}_T^{\bar{C}\bar{P}}$  sempre té dir.  $\odot$

$$\bar{v}_T(P)$$

A 1P ja vam obtenir un vec. de posició adient per a estudiar el moviment de P resp. T. Era  $\overline{OP}$  (pq o és fix a T<sup>(\*)</sup>):



Ara bé:  $\overline{OP}$  costa de derivar directament, perquè canvia tant en valor com en direcció.

Però el podem descompondre així:

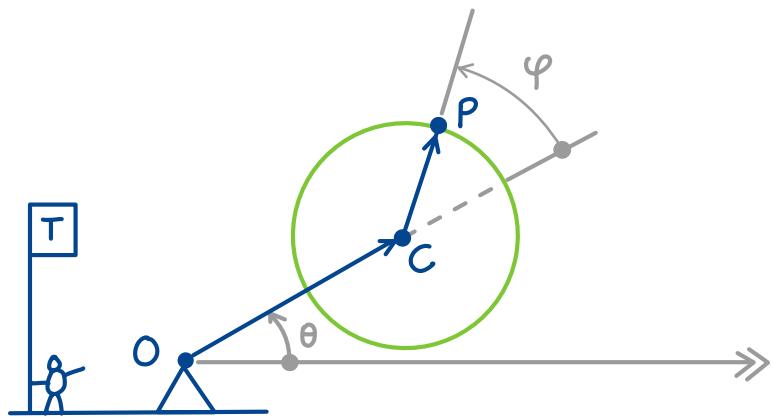
$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}.$$

$\overline{OC}$  i  $\overline{CP}$  són fàcils de derivar perquè només canvien de direcció, no de valor. Per tant, aprofitem-ho:

$$\bar{v}_T(P) = \left[ \frac{d\overline{OP}}{dt} \right]_T = \left[ \frac{d\overline{OC}}{dt} \right]_T + \left[ \frac{d\overline{CP}}{dt} \right]_T$$

Per derivar  $\overline{OC}$  i  $\overline{CP}$  ens cal tenir aquests vectors orientats resp. T. Així podem obtenir les seves velocitats angulars. Podem utilitzar aquests angles, que ja hem definit:

(\*) S'hi pot escriure "OET" per indicar que "O és fix a T".



Ara... Amb quina vel. angular gira  $\overline{OC}$  resp. T?

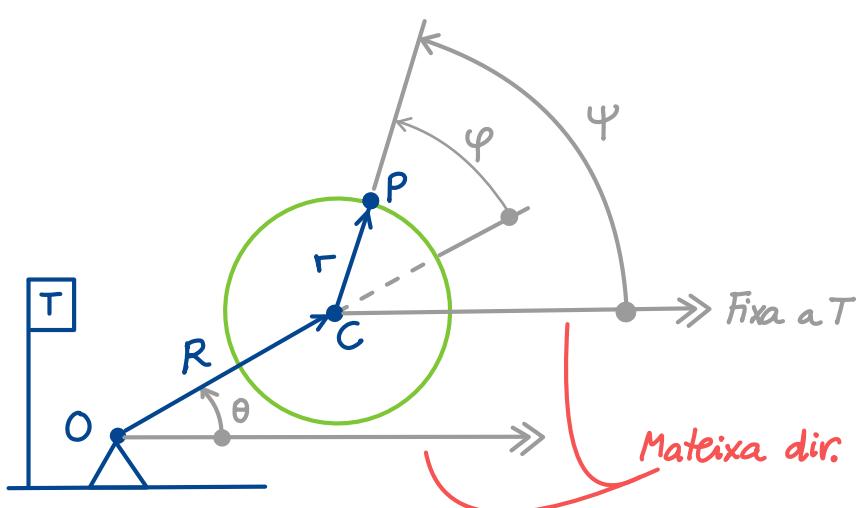
$$\bar{\Omega}_T^{\overline{OC}} = (\circ \dot{\theta}) \quad \leftarrow \text{Perfecte!}$$

I amb quina gira  $\overline{CP}$  resp. T?

$$\bar{\Omega}_T^{\overline{CP}} = (\circ \dot{\varphi}), \text{ oi?}$$

Doncs no! Estem observant el moviment de  $\overline{CP}$  resp. T, ergo eus cal veure com canvia l'orientació de  $\overline{CP}$  resp. una dir. fixa a T. Per fer-ho bé, doncs, orientarem  $\overline{CP}$  amb

$$\psi = \theta + \varphi$$



Conclusió<sup>(\*)</sup>:

$$\bar{\Omega}_T^{\overline{CP}} = (\circ \dot{\psi})$$

||

$$[\circ(\dot{\theta} + \dot{\varphi})]$$

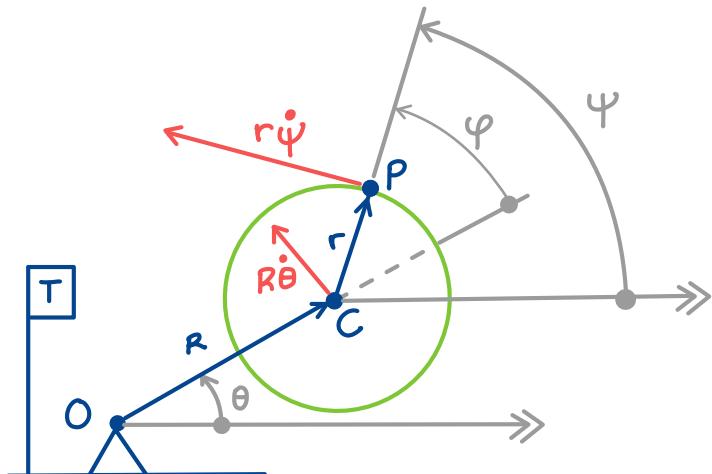
Ara sí que ho tenim bé!

(\*) Fixem-nos que  $\bar{\Omega}_T^{\overline{CP}} = [\circ(\dot{\theta} + \dot{\varphi})]$ , tal i com havíem obtingut abans, quan buscàvem  $\bar{\alpha}_T^{\overline{CP}}$

kinga, ja podem derivar:

$$\begin{aligned}
 \boxed{\bar{v}_T(P)} &= \left. \frac{d \bar{OP}}{dt} \right]_T = \left. \frac{d \bar{OC}}{dt} \right]_T + \left. \frac{d \bar{CP}}{dt} \right]_T = \\
 &= \bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \times \bar{OC} + \bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \times \bar{CP} = \\
 &= (\textcirclearrowleft \dot{\theta}) \times (\overrightarrow{r_R}) + (\textcirclearrowleft \dot{\psi}) \times (\overleftarrow{r}) = \\
 &\quad \text{L} \mid \bar{OC} \mid \\
 &= \overline{(\overleftarrow{r_R \dot{\theta}}) + (\overleftarrow{r \dot{\psi}})} \quad (\text{II})
 \end{aligned}$$

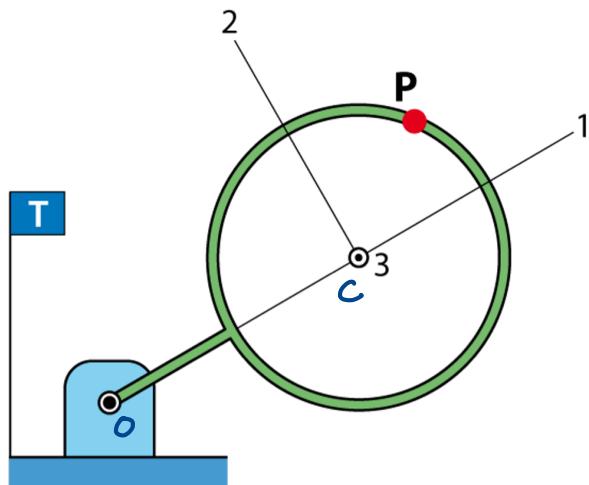
Podem dibuixar els vectors  $(\overleftarrow{r_R \dot{\theta}})$  i  $(\overleftarrow{r \dot{\psi}})$ :



Finalment, si volem, podem expressar (II) utilitzant una base vectorial. Hi ha 2 bases que faciliten la projecció de (II) perquè tenen almenys una direcció alineada amb un dels vectors de (II). Són:

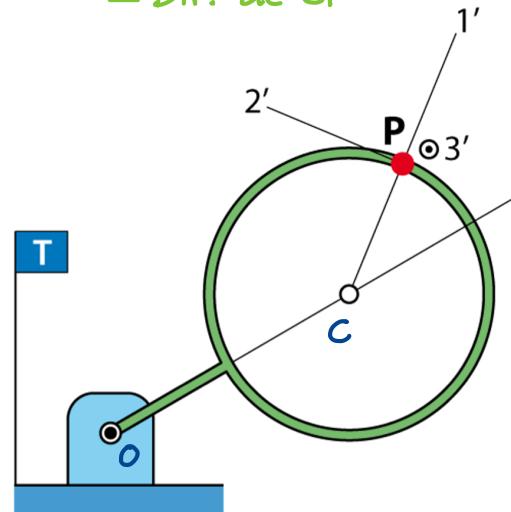
$$B = (1, 2, 3)$$

└ Dir. de  $\overline{OC}$



$$B' = (1', 2', 3')$$

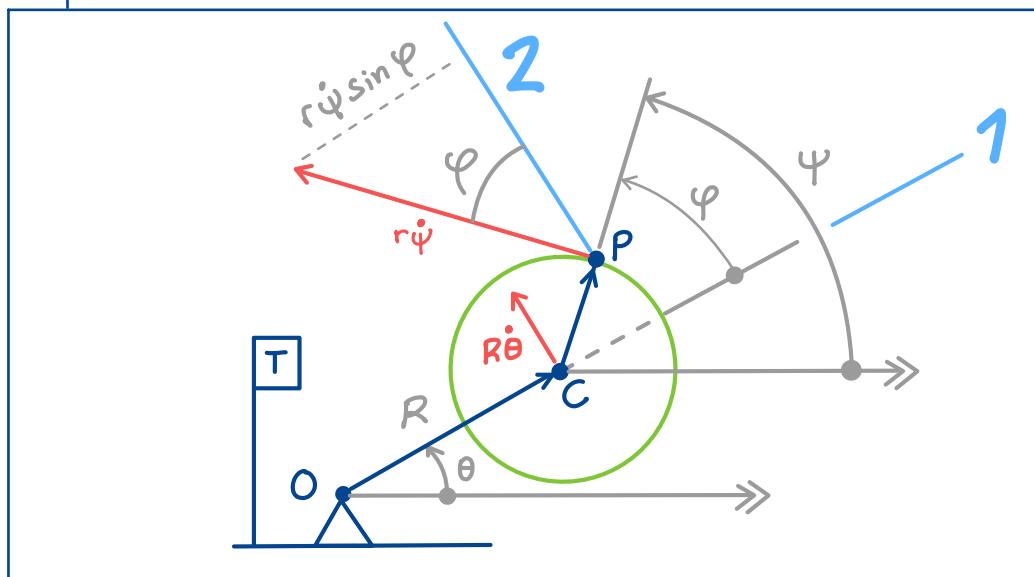
└ Dir. de  $\overline{CP}$



Utilitzant  $B$ , per exemple, tenim:

$$\bar{v}_T(P) = \left[ \begin{matrix} \rightarrow (-r\dot{\varphi} \sin \varphi) \\ \uparrow \end{matrix} \right] + \left[ \begin{matrix} \uparrow (R\dot{\theta} + r\dot{\varphi} \cos \varphi) \\ \downarrow \end{matrix} \right] \quad (\star)$$

versor de  $B$  en dir. 1                                  versor de  $B$  en dir. 2



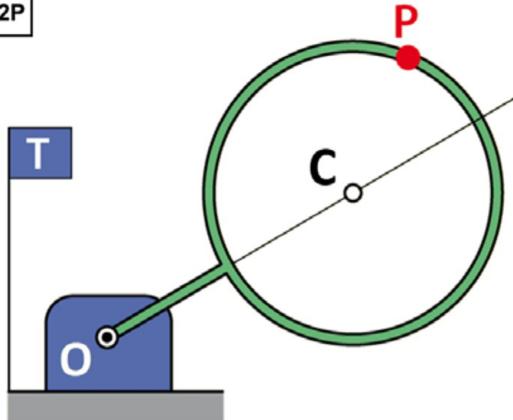
2 maneres equivalents d'escriure  $\bar{v}_T(P)$

També podem escriure  $(\star)$  com un vector de 3 components:

$$\left\{ \bar{v}_T(P) \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} -r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (\text{III})$$

base utilitzada (cal indicar-la!)

2P



La guia circular està articulada al terra (T).

La partícula P es mou dins la guia.

Mitjançant la derivada analítica, calcula

$\bar{v}_{\text{Guia}}(P), \bar{v}_T(P), \bar{a}_{\text{Guia}}(P), \bar{a}_T(P), \mathcal{R}_T(P)$  en  $\bar{O}\bar{C}\bar{P}$ .

$\bar{v}_{\text{Guia}}(P)$

Un vec. nos. adient és  $\bar{CP}$  (ja que  $C \in \text{Guia}$ )

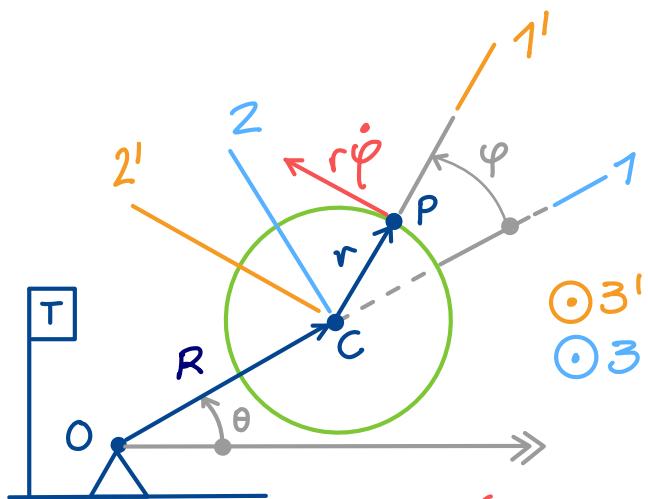
$\bar{CP}$  és fàcil de projectar  
en la base  $B' = (1', 2', 3')$

Dir. fixa a  $\bar{CP}$

Dir.  $\odot$

⇒ Treballarem en  $B'$

$$\{\bar{CP}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Ara és vel. ang.  
de la base, no de  $\bar{CP}$

$$\{\bar{v}_{\text{Guia}}(P)\}_{B'} = \left\{ \frac{d\bar{CP}}{dt} \right\}_{\text{Guia}} = \left\{ \frac{d\bar{CP}}{dt} \right\}_{B'} + \left\{ \bar{\omega}_{\text{Guia}}^{B'} \right\}_{B'} \times \{\bar{CP}\}_{B'} =$$

Derivem a ref. Guia!

Resultat en base  $B'$

Deriv. Components

òm. base  $B'$   
resp. Guia

vec.  
sense  
derivar

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I})$$

Coincideix amb l'obtingut geomètricament (v. Eq. (I) ex. anterior).

Extra: Tb podem fer els càlculs amb  $B = (1, 2, 3)$ :

$$\{\bar{CP}\}_B = \begin{Bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Mateix resultat  
que (I), però en  
base B  
↓

$$\boxed{\{\bar{v}_{\text{Guia}}(P)\}_B = \left\{ \frac{d\bar{CP}}{dt} \right\}_{\text{Guia}}}_B =$$

$$= \left\{ \frac{d\bar{CP}}{dt} \right\}_B + \cancel{\left\{ \bar{\omega}_{\text{Guia}}^B \right\}_B} \times \{\bar{CP}\}_B = \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ r\dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\bar{a}_{\text{Guia}}(P)$

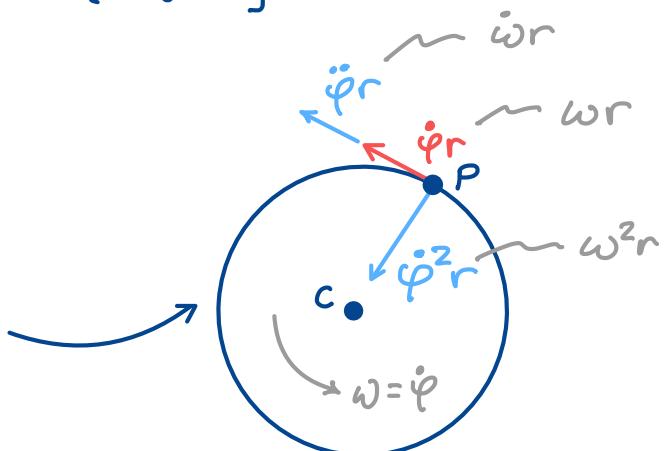
Derivem (I):

$$\{\bar{a}_{\text{Guia}}(P)\}_{B'} = \left\{ \frac{d\bar{v}_{\text{Guia}}(P)}{dt} \right\}_{\text{Guia}} \underset{\substack{\text{Tot en } B' \\ \leftarrow}}{=}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{derivada} \\ \text{components} \\ \bar{v}_{\text{Guia}}(P) \end{bmatrix} + \bar{\omega}_{\text{Guia}}^{B'} \times \bar{v}_{\text{Guia}}(P) =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}^2 r \\ \ddot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II})$$

Surten les components  
intrínseqües de l'acceleració  
típiques del moviment  
circular, com era d'esperar



$\bar{v}_T(P)$

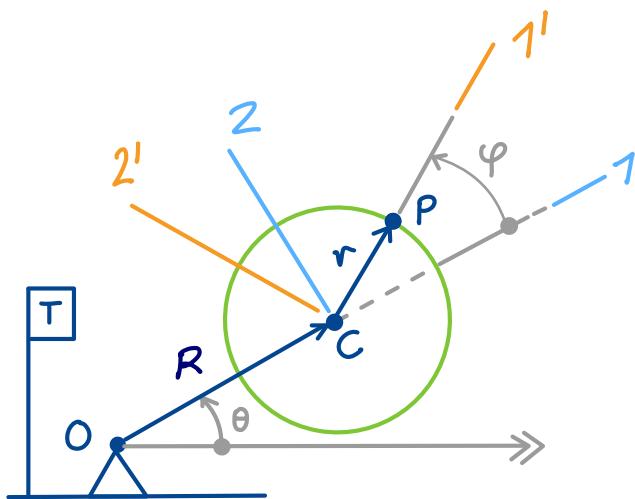
Un vec. pos. adient per a P és  $\overline{OP}$ , pq OET.

$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}$$

E's aconsellable

treballar en  $B$  o  $B'$  ja que faciliten la projecció de  $\overline{OC}$  i  $\overline{CP}$

respectivament. Descartem l'ús d'una base fixa a T perquè no aniria tan bé. Triem  $B$ , però  $B'$  seria bona tb:



$$\{\overline{OP}\}_B = \{\overline{OC}\}_B + \{\overline{CP}\}_B = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R+r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{v}_T(P)\}_B = \left\{ \frac{d\overline{OP}}{dt} \right\}_T = \begin{Bmatrix} \text{deriv.} \\ \text{comp.} \end{Bmatrix} + \bar{\omega}_T^B \times \begin{Bmatrix} \text{vec sense} \\ \text{derivar} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R+r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\theta}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\theta} + r\dot{\theta}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III})$$

$$\varphi + \theta = \psi \Rightarrow \dot{\varphi} + \dot{\theta} = \dot{\psi}$$

Quadra amb l'Eg. (III) de l'exercici anterior

$$\bar{a}_T(P)$$

Derivem (III) :

$$\begin{aligned}
 \{\bar{a}_T(P)\}_B &= \left\{ \frac{d \bar{v}_T(P)}{dt} \right\}_B = \left[ \begin{array}{c} \text{deriv.} \\ \text{comp} \end{array} \right] + \bar{\Omega}_T^B \times \left[ \begin{array}{c} \text{vec.} \\ \text{sense} \\ \text{deriv.} \end{array} \right] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} -r\ddot{\psi}\sin\varphi - r\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\varphi \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - r\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} -\ddot{\psi}r\sin\varphi - \dot{\varphi}r\dot{\psi}\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}r\dot{\psi}\cos\varphi \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\dot{\psi}\sin\varphi - \dot{\theta}r\dot{\psi}\sin\varphi \\ 0 \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} -\ddot{\psi}r\sin\varphi - (\dot{\varphi} + \dot{\theta})r\dot{\psi}\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - (\dot{\varphi} + \dot{\theta})r\dot{\psi}\sin\varphi \\ 0 \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} -\ddot{\psi}r\sin\varphi - r\dot{\psi}^2\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - r\dot{\psi}^2\sin\varphi \\ 0 \end{array} \right\} \quad (IV)
 \end{aligned}$$

Tot seguit ens demanen  $R_T(P)$ , que és el radi de curvatura de la trajectòria de P en un cert instant de temps.

Recordem primer aquest concepte, associat a les components intrínseqües de l'acceleració:

## Recordatori

### Components intrínseques de l'acceleració

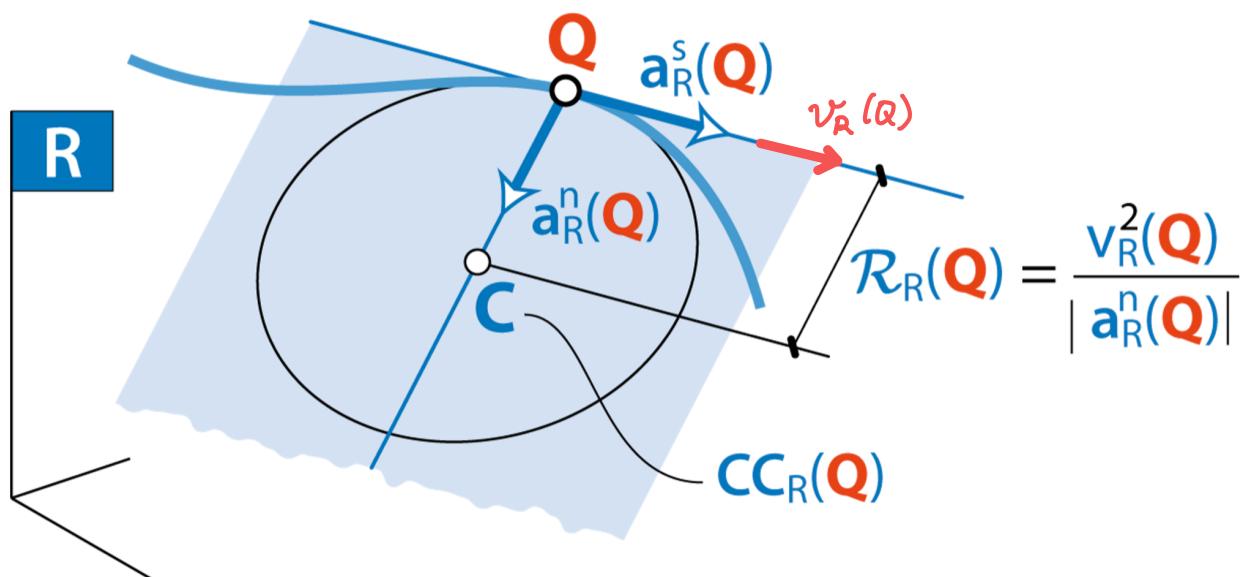
Signi una partícula Q que descriu una certa trajectòria en una referència R. En cada instant t, l'accel. de Q es pot descompondre en una component tangencial  $\bar{a}_R^s(Q)$ , paral·lela a  $\bar{v}_R(Q)$ , i una component normal  $\bar{a}_R^n(Q)$ , perpendicular a  $\bar{v}_R(Q)$ . A més, en aquest instant t, la trajectòria es pot aproximar localment per un cercle, anomenat "osculador". El radi d'aquest cercle és

$$R_R(Q) = \frac{v_R^2(Q)}{|\bar{a}_R^n(Q)|} \leftarrow \begin{matrix} \text{Valor de } \bar{v}_R(Q) \\ \left[ \text{Valor de } \bar{v}_R(Q) \right]^2 \end{matrix}$$

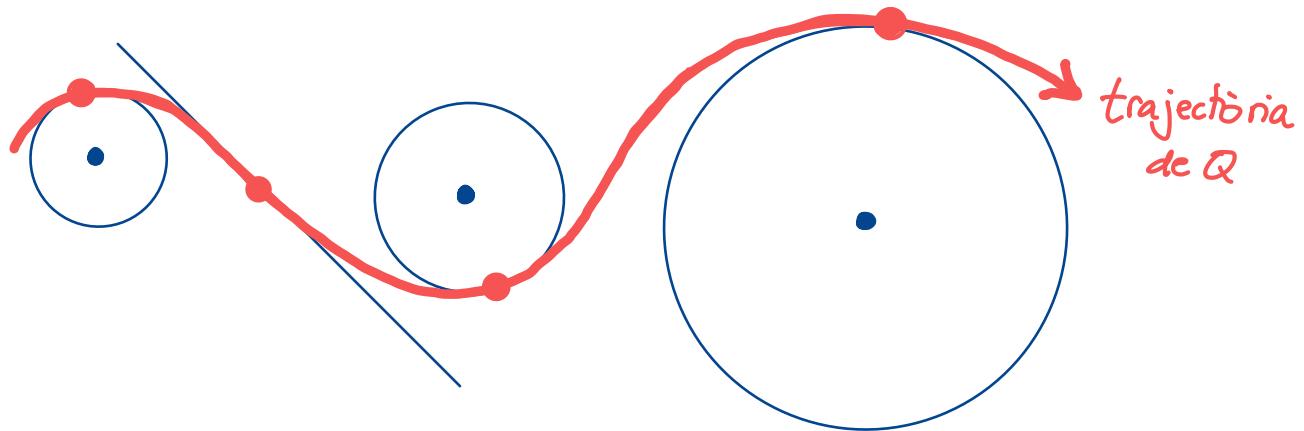
$\leftarrow$  Mòdul del valor de  $\bar{a}_R^n(Q)$

El centre del cercle s'anomena centre de curvatura de la trajectòria al punt Q (relatiu a la ref. R), i el denotem així

$$CC_R(Q)$$



$R_R(Q)$  i  $CC_R(Q)$  varien al llarg del temps perquè el cercle oscula al llarg de la trajectòria :



Recordeu :

- L'accel. tangencial  $\bar{a}_R^s(Q)$  és la responsable del canvi de valor de  $\bar{v}_R(Q)$
- L'accel. normal  $\bar{a}_R^n(Q)$  és la responsable del canvi de direcció de  $\bar{v}_R(Q)$

Calculem doncs el que ens demanaven:

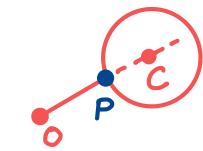
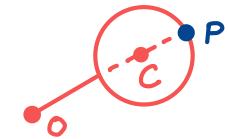
$$R_T(P) \quad \overline{OC} \parallel \overline{CP}$$

Vol dir, per a l'instant en que  $\overline{OC}$  és paral·lel a  $\overline{CP}$

És a dir | quan  $\varphi = 0$

| o quan  $\varphi = \pi$

COMPTA: això no vol dir que  $\varphi = 0$  vt. Només és nul quan P passa per aquesta situació



Només fem el cas  $\varphi = 0$ :

$$R_T(P) = \frac{\bar{v}_T^2(P)}{|\bar{a}_T^n(P)|} \quad \begin{matrix} (\text{Valor de } \bar{v}_T(P))^2 \\ \text{Mòdul del valor de } \bar{a}_T^n(P) \end{matrix}$$

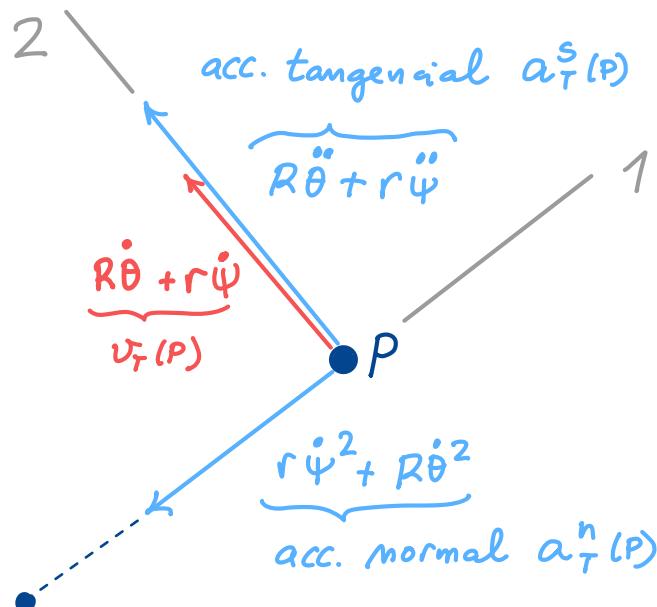
$$\left\{ \bar{v}_T(P) \right\}_{\varphi=0} = \begin{cases} 0 \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}$$

Particularitzant (III) per  $\varphi = 0$

$$\left\{ \bar{a}_T(P) \right\}_{\varphi=0} = \begin{cases} -r\dot{\psi}^2 - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi} \\ 0 \end{cases}$$

Particularitzant (IV) per  $\varphi = 0$

Per identificar la component normal de  $\bar{a}_T(P)$  sempre aconsello que us feu un dibuix:



$CC_T(P)$  = centre de curvatura de  $P$   
relatiu a  $T$

Per tant :

$$R_T(P) = \frac{(R\dot{\theta} + r\dot{\psi})^2}{r\dot{\psi}^2 + R\dot{\theta}^2} \quad (v)$$

## Aclariment

En relació a l'exercici que acabem de fer, alguns estudiants es fan la següent pregunta, del tot pertinent. N'adjunto una resposta, a veure si us conveng :

En l'exercici de la guia circular giratòria es demana que calculem la velocitat i acceleració de P relatives a les referències "Guia" i "T". En el resultat final, aquestes velocitats surten expressades en funció de les coordenades  $\theta, \varphi$  i les seves derivades  $\dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$  (també en funció de  $\psi = \theta + \varphi$ ). Qui determina què valen aquestes coordenades i les seves derivades?

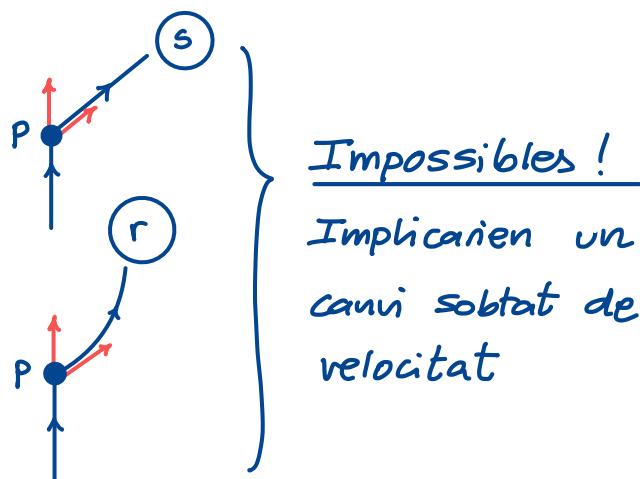
Per ara estem aprenent cinemàtica, i no ens preocupa gaire què valen  $\theta$  i  $\varphi$ , i les seves derivades, en cada instant de temps. Podeu imaginar, si voleu, que són valors coneguts. En realitat, aquests valors dependran de l'evolució concreta que tingui el sistema a partir d'unes condicions inicials, i de les forces aplicades des de llavors ençà, d'acord amb les lleis de la dinàmica. Quan entrem a dinàmica aprendrem a trobar les **equacions del moviment** que determinen aquesta evolució. També pot ser que alguna coordenada sigui "forçada", és a dir, que hi hagi un motor que en determini el seu valor en cada instant de temps. Per exemple, a l'articulació de la guia amb el terra hi podria haver un motor que fixés  $\theta(t)$  mitjançant un sistema de control adient.

És bo pensar les coordenades del sistema, i les seves derivades, com a "codificadors compactes" de la posició, velocitat i acceleració de tots els punts del sistema. Com veiem en aquest exercici, i en altres que farem, coneぐts els seus valors, sempre podrem calcular la posició, velocitat o acceleració de qualsevol punt del sistema. Aquest càlcul serà essencial per poder formular les equacions del moviment, que, com hem dit, determinen l'evolució del sistema.

Alerta: al dibuix canviu x per  $\beta$

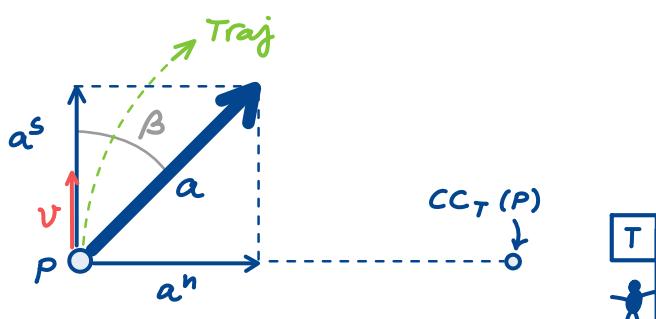
2P

La partícula  $P$  descriu una trajectòria rectilínia respecte del terra ( $T$ ). Quan té celeritat  $v$ , sobtadament s'accelera amb  $\bar{a}_T(P)$  de valor constant, i formant un angle  $\beta$  constant amb  $\bar{v}_T(P)$ . Quina trajectòria passa a fer?



Ara cal saber si serà  $P$ ,  $q$  o  $t$ .

A partir de l'instant dibuixat, tenim:



$$\begin{aligned} a^s &= \text{accel. tangencial} \\ a^n &= \text{" normal} \end{aligned} \quad ] \text{resp. } T$$

$$\left. \begin{aligned} a^s &= a \cos \beta \\ a^n &= a \sin \beta \end{aligned} \right\} \text{constants al llarg del temps (pq a i } \beta \text{ ho són)}$$

(\*) A menys que es produueixi una col·lisió, que no és el cas.

Com que  $a^n \neq 0$   $\Rightarrow$  La trajectòria serà curvada  $\Rightarrow$  Desartem P

El radi de curvatura  $R = R_T(P)$  creixerà amb el pas del temps:

$$R = \frac{v^2}{|a^n|}$$

v creixerà pq  $a^s = ct$

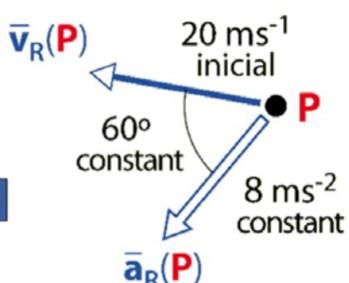
$a^n$  es manté  $ct$

$\Rightarrow R$  creixerà

Això descarta t, ja que té  $R = ct$

La traj. serà q pq és l'única de radi creixent.

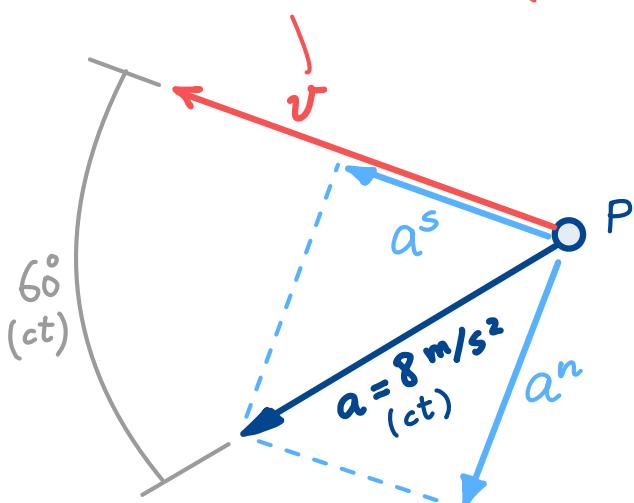
2P

 $t = 0$ 

R

En un cert instant, la partícula P té celeritat de 20 m/s respecte del terra (T). Si s'accelera amb  $\bar{a}_T(P)$  de valor constant, i formant un angle de  $60^\circ$  constant amb  $\bar{v}_T(P)$ , quina és la seva celeritat 10 segons més tard?

Celeritat de P (inicialment,  $v = 20 \text{ m/s}$ )



Només  $a^s$  pot canviar  $v$

$a^n$  canvia el radi de curvatura de la traj. de P, però no  $v$ .

Clarament:

$$a^s = a \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}}$$



$v$  augmenta a ritme de 4 m/s cada segon

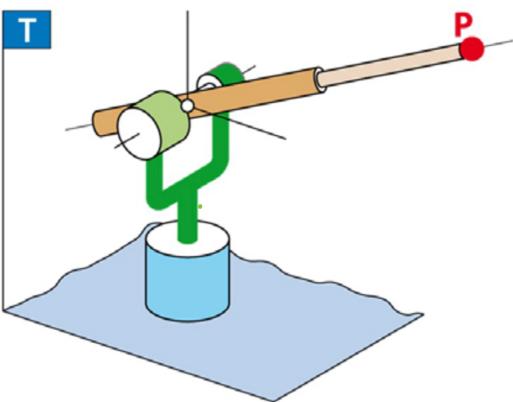


En 10"  $v$  haurà augmentat 40 m/s.



Com que inicialment  $v = 20 \text{ m/s}$ , al cap de 10s  $v$  serà de  $20 + 40 = 60 \text{ m/s}$ .

2P



La forquilla (forq) gira respecte del terra (T).  
 La primera part de l'antena telescopica (ant.1) està articulada a la forquilla.  
 Mitjançant la derivada geomètrica, calcula  
 $\bar{v}_{\text{ant.1}}(P)$ ,  $\bar{a}_{\text{ant.1}}(P)$ ,  $\bar{v}_{\text{forq}}(P)$ ,  $\bar{a}_{\text{forq}}(P)$ .

En aquest exercici i el següent utilitzarem les coords.  
 $\psi, \theta, x$  ja defiuides a  $^1P$ .

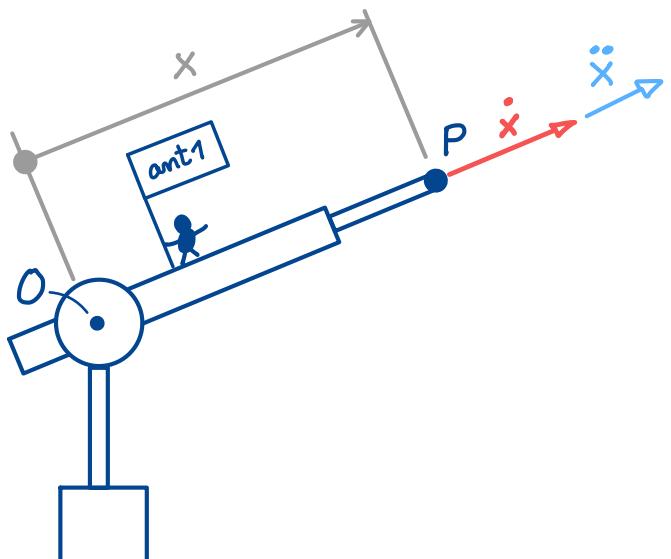
$\bar{v}_{\text{ant1}}(P)$  i  $\bar{a}_{\text{ant1}}(P)$

Derivem geomètricament  $\overline{OP}$ .

Vist des d'ant1,  $\overline{OP}$  sols canvia de valor, no de direcció. Ergo:

$$\bar{v}_{\text{ant1}}(P) = (\rightarrow \ddot{x})$$

Derivant geomètricament  
 $\bar{v}_{\text{ant1}}(P)$  obtenim



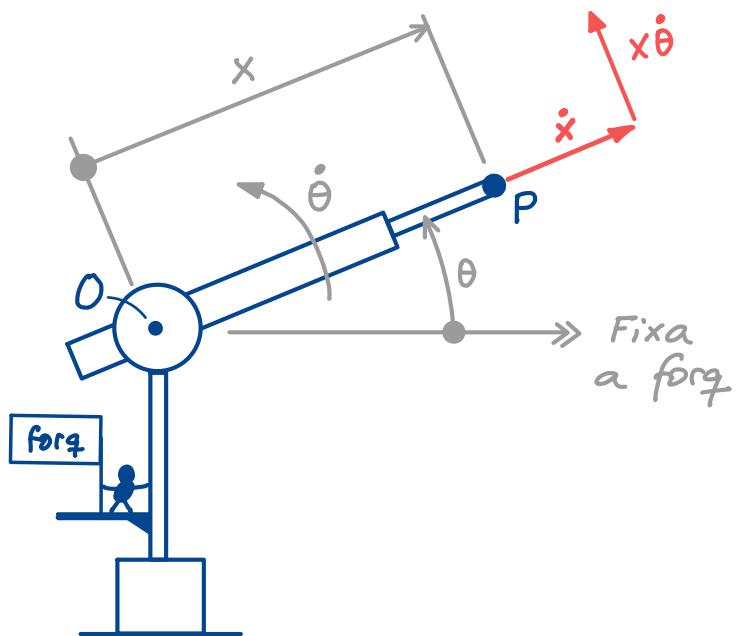
$$\bar{a}_{\text{ant1}}(P) = (\rightarrow \ddot{x})$$

└  $\bar{v}_{\text{ant1}}(P)$  tampoc  
 mateix canvis de dir.  
 només de valor

$$\bar{v}_{\text{forg}}(P)$$

Ara cal avaluar els canvis de  $\bar{OP}$  des de forg!

Des de forg,  $\bar{OP}$  varia per causa de  $x$  i  $\theta$ :



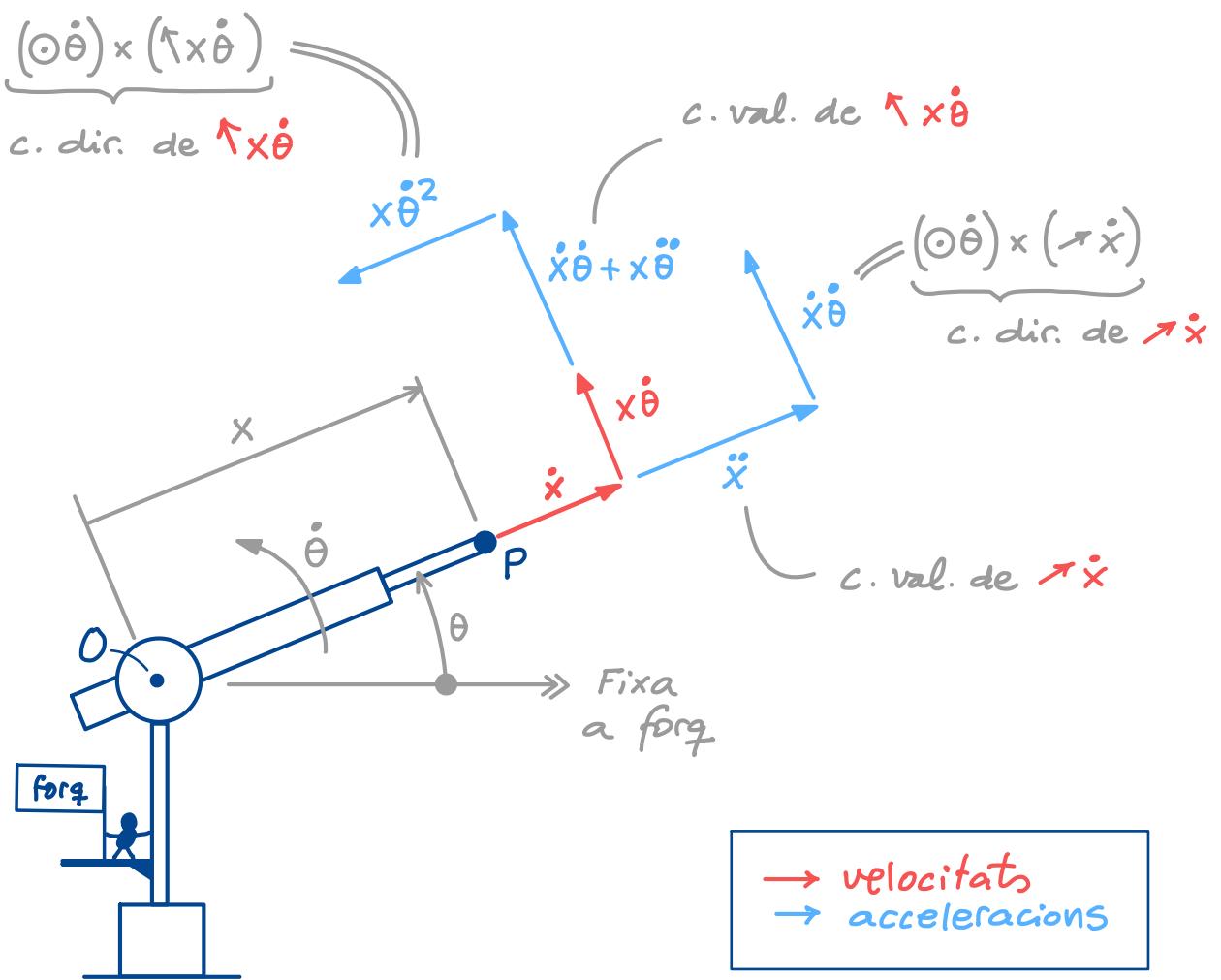
$\bar{OP}$  s'estira quan  $x$  varia, i  $\dot{\theta}$  el fa canviar de direcció. Ergo:

$$\bar{v}_{\text{forg}}(P) = \underbrace{(\rightarrow \dot{x})}_{\text{c. val.}} + \underbrace{(\uparrow \times \dot{\theta})}_{\text{c. dir.}} = \bar{\Omega}_{\text{forg}}^{\bar{OP}} \times \bar{OP} = (\dot{\theta} \dot{x}) \times (\rightarrow x)$$

vecs. vermells indicats al dibuix

$\bar{a}_{\text{forg}}(P)$

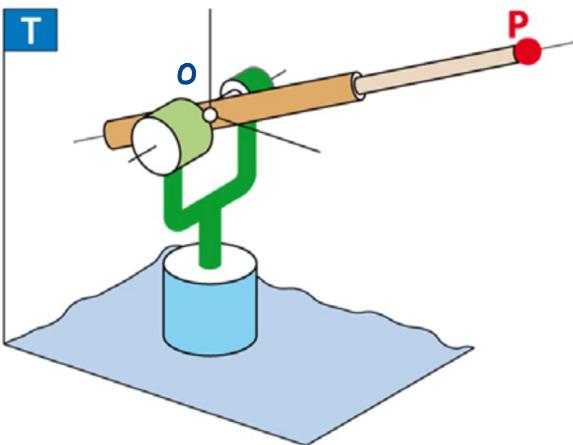
Per calcular  $\bar{a}_{\text{forg}}(P)$  derivem els vecs. vermells anteriors, adonant-nos que tots canviem de valor i també de dir. (per causa de  $\dot{\theta}$  nouament). El resultat són els vecs. blaus :



Agrupant els vecs. blaus queda :

$$\bar{a}_{\text{forg}}(P) = \underbrace{\left[ \rightarrow (\ddot{x} - x\dot{\theta}^2) \right] + \left[ \uparrow (z\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta}) \right]}_{\text{vecs. blaus}}$$

2P

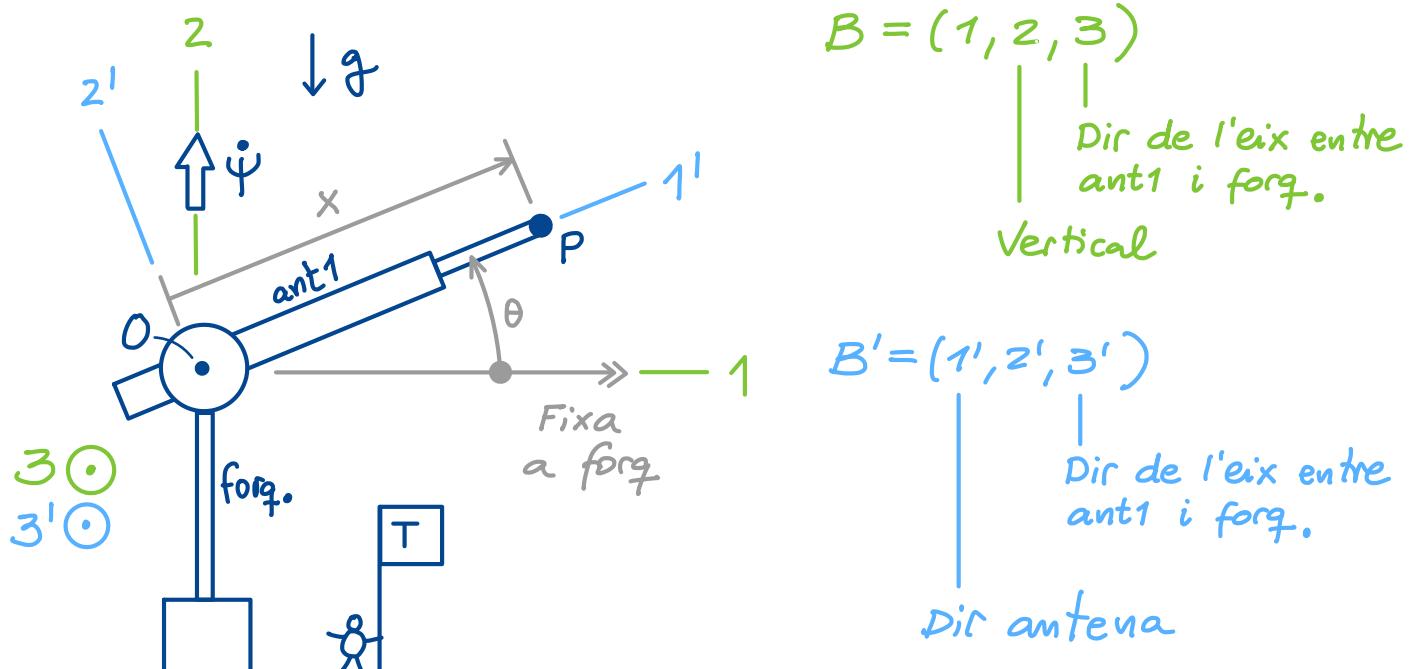


La forquilla gira respecte del terra (T).

La primera part de l'antena telescopica (ant.1) està articulada a la forquilla.

Mitjançant la derivada analítica, calcula  $\bar{v}_T(P)$ ,  $\bar{a}_T(P)$ ,  $\bar{\alpha}_T^{\text{ant.1}}$ .

Derivarem  $\bar{OP}$ . Aquest vector és fàcil de projectar en les següents bases:



La projecció de  $\bar{OP}$  sobre  $B'$  és trivial, però la vel. angular de  $B'$  és  $\bar{\omega}_T^{B'} = (\uparrow \dot{\psi}) + (\odot \dot{\theta})$ . En canvi, la vel. angular de  $B$  és més senzilla, ja que

$$\bar{\omega}_T^B = (\uparrow \dot{\psi})$$

Per aquest motiu, triarem  $B$ , però  $B'$  també seria una bona opció. El que sí evitarem és treballar en una base fixa a T perquè dificultaria la projecció de  $\bar{OP}$ .

## $\bar{v}_T(P)$

$$\{\bar{OP}\}_B = \begin{Bmatrix} x \cos \theta \\ x \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Derivada de les comp.

$$\begin{aligned} \{\bar{v}_T(P)\}_B &= \left\{ \frac{d\bar{OP}}{dt} \right\}_T = \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} \cos \theta - x \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{x} \sin \theta + x \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{array} \right\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x \cos \theta \\ x \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} \cos \theta - x \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{x} \sin \theta + x \dot{\theta} \cos \theta \\ -x \dot{\psi} \cos \theta \end{array} \right\} \quad (\blacksquare) \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x \dot{\psi} \cos \theta \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

A la pàg. següent hem calculat  $\bar{v}_T(P)$  derivant  $\bar{OP}$  geomètricament. Es pot comprovar que són els mateixos!

## $\bar{a}_T(P)$

Deriv. de les comp.

$$\{\bar{a}_T(P)\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x} \cos \theta - \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta - \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta - x \ddot{\theta} \sin \theta - x \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{x} \sin \theta + \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + x \ddot{\theta} \cos \theta - x \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ -\dot{x} \dot{\psi} \cos \theta - x \ddot{\psi} \cos \theta + x \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\} +$$

$$\begin{aligned} &+ \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left\{ \begin{array}{c} \dot{x} \cos \theta - x \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{x} \sin \theta + x \dot{\theta} \cos \theta \\ -x \dot{\psi} \cos \theta \end{array} \right\} = \\ &\quad \left\{ \begin{array}{c} -x \dot{\psi}^2 \cos \theta \\ 0 \\ -\dot{\psi} \dot{x} \cos \theta + \dot{\psi} x \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\} \end{aligned}$$

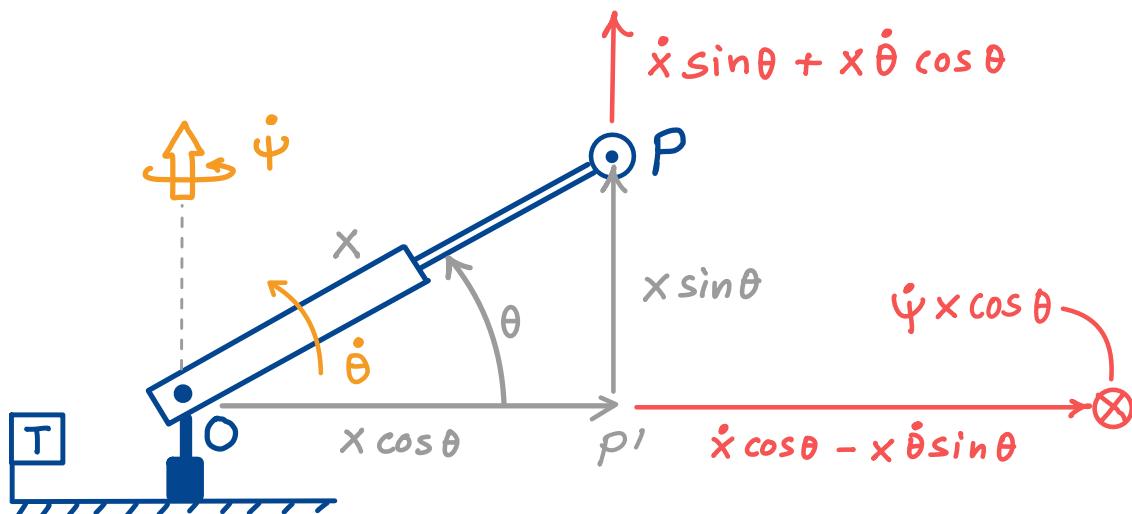
$$= \left\{ \begin{array}{c} \ddot{x} \cos \theta - \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{x} \dot{\theta} \sin \theta - x \ddot{\theta} \sin \theta - x \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{x} \sin \theta + \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + x \ddot{\theta} \cos \theta - x \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ -2 \dot{x} \dot{\psi} \cos \theta - x \ddot{\psi} \cos \theta + 2 x \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\}$$

## $\bar{v}_T(P)$ derivant geomètricament

Podem descompondre<sup>(\*)</sup>  $\overline{OP} = \overline{OP'} + \overline{P'P}$

- $\overline{OP'}$  només queda afectat per  $\dot{\psi}$  (una rotació simple).
- $\overline{P'P}$  només canvia de valor

$P'$  = projecció vertical de  $P$  sobre pla horitz. per O



Per tant, tenim:

$$\boxed{\bar{v}_T(P) = \frac{d\overline{OP}}{dt}}_T = \underbrace{\frac{d\overline{OP'}}{dt}}_T + \underbrace{\frac{d\overline{P'P}}{dt}}_T =$$

Canvia de val. i dir.      Solo canvia de valor

$$= \left[ \rightarrow (\dot{x} \cos \theta - x \dot{\theta} \sin \theta) \right] + \left[ \otimes \dot{\psi} \times \cos \theta \right] +$$

$$+ \left[ \uparrow (\dot{x} \sin \theta + x \dot{\theta} \cos \theta) \right]$$

Quadra amb (■)  
de la pàg.  
anterior

(\*) Aquesta descomposició no és estrictament necessària, però facilita la derivada perquè, aleshores, sols apareix un canvi de direcció degut a una rotació simple.

$$\bar{\alpha}_T^{\text{ant1}}$$

La velocitat angular de ant1 resp. T és

$$\bar{\Omega}_T^{\text{ant1}} = \bar{\Omega}_{\text{forg}}^{\text{ant1}} + \bar{\Omega}_T^{\text{forg}}$$

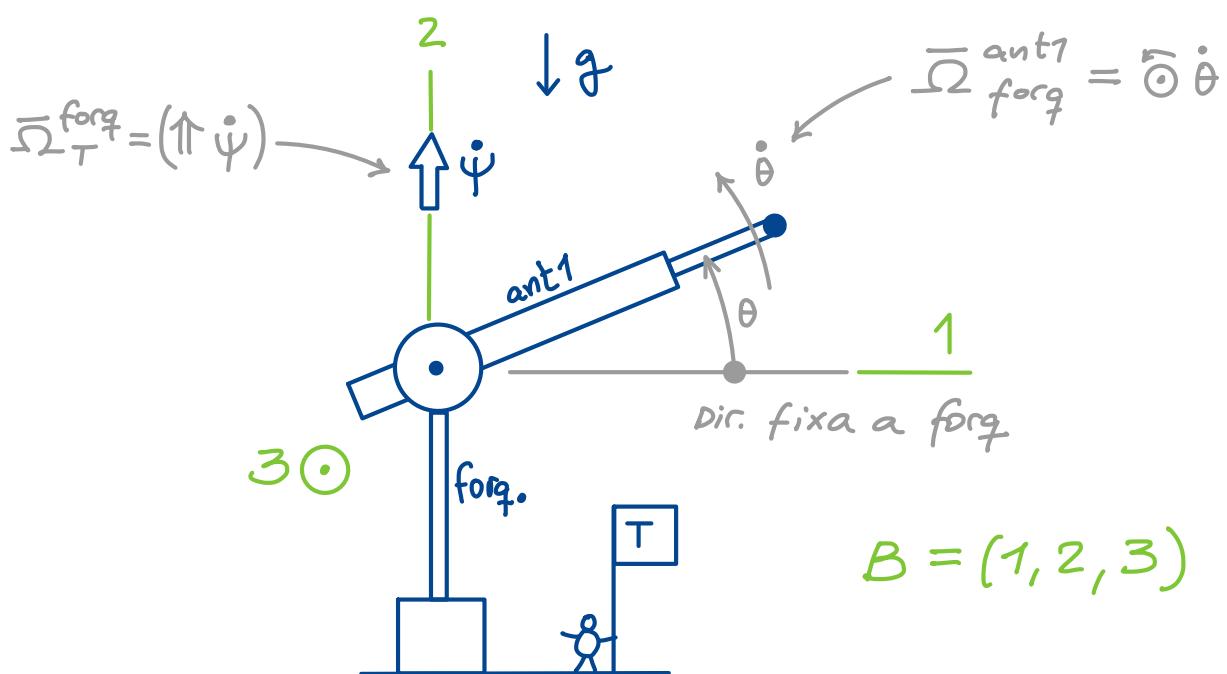
i, expressant-la en base B (vegeu dibuix de baix):

$$\left\{ \bar{\Omega}_T^{\text{ant1}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} (\bullet)$$

Per obtenir l'accel. angular  $\bar{\alpha}_T^{\text{ant1}}$ , derivem ( $\bullet$ ) respecte el temps:

$$\boxed{\left\{ \bar{\alpha}_T^{\text{ant1}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}\ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}} (\ddot{\bullet})$$

Derivada  
de les  
comp.



Si volem, podem derivar  $\bar{\Omega}_T^{\text{ant1}}$  geomètricament també, i veure que s'obté el mateix resultat que a ( $\ddot{\bullet}$ ). Fem-ho!

Del dibuix anterior tenim

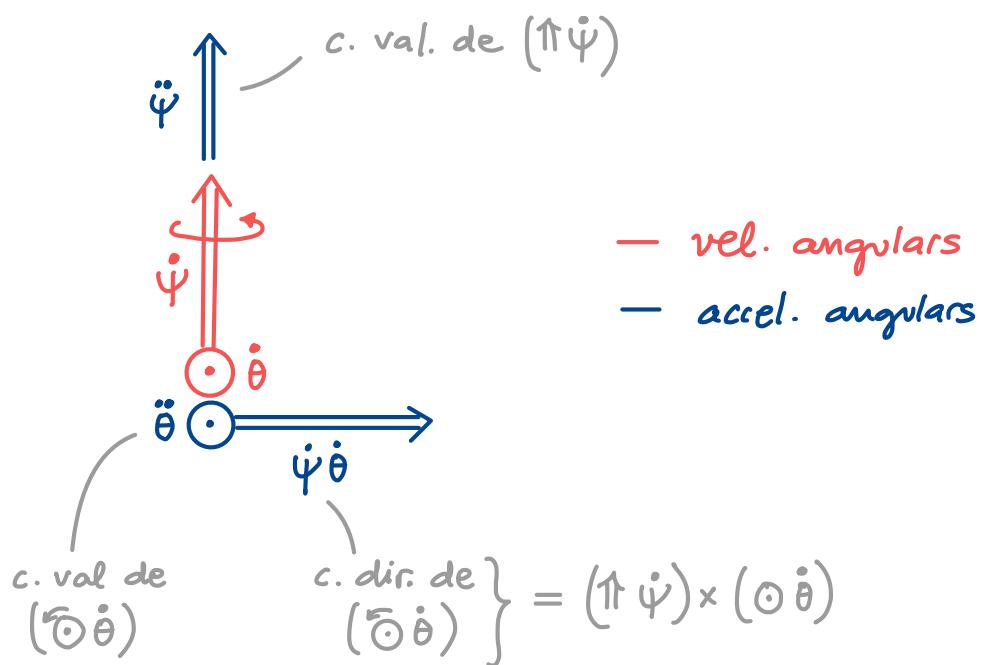
$$\bar{\Omega}_T^{\text{aut1}} = \bar{\Omega}_{\text{forg}}^{\text{aut1}} + \bar{\Omega}_T^{\text{forg}} = (\overset{\circ}{\odot} \ddot{\theta}) + (\uparrow \dot{\psi}),$$

i, imaginant el sistema en moviment, veiem que:

$(\uparrow \dot{\psi})$  només canvia de valor (no gira)

$(\overset{\circ}{\odot} \ddot{\theta})$  canvia de valor i direcció (gira amb  $\uparrow \dot{\psi}$ )

Dibuixem els canvis, suposant mateixa vista que al dibuix anterior:



Per tant,  $\bar{\alpha}_T^{\text{aut1}}$  és la suma dels vecs. blaus:

$$\bar{\alpha}_T^{\text{aut1}} = (\uparrow \ddot{\psi}) + (\overset{\circ}{\odot} \ddot{\theta}) + (\Rightarrow \dot{\psi}\dot{\theta})$$

El resultat és idèntic a l'obtingut a l'Eq. (10) per la via analítica.