

# 3P

Versió 1.0

Exercicis de derivació  
geomètrica i analítica

+

Angles d'Euler

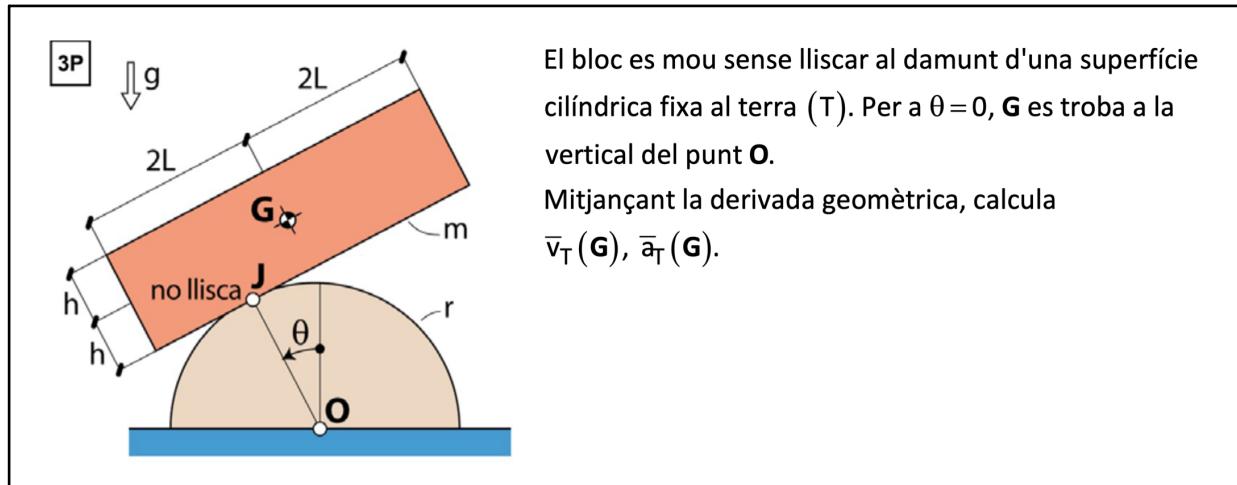
+

Qüestions pendents de 3T

Lluís Ros

<https://lluisros.github.io/mecanica>

# Exercicis de derivació geomètrica i analítica



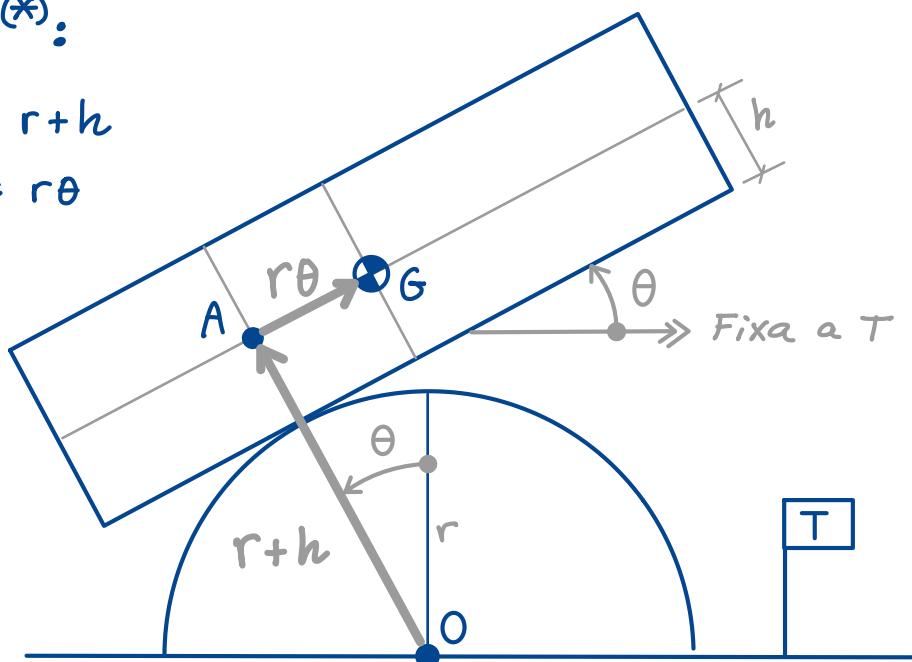
$\bar{v}_T(G)$

Triem  $\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{AG}$  com a vec. pos. de  $G$  (el derivarem).

Clarament (\*):

$$|\overline{OA}| = r+h$$

$$|\overline{AG}| = r\theta$$

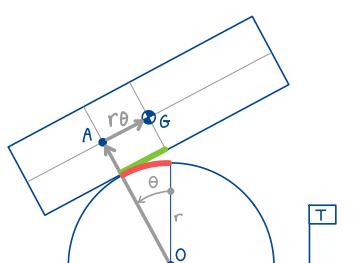


L'orient. de  $\overline{OA}$  resp.  $T$  ve donada per  $\theta$

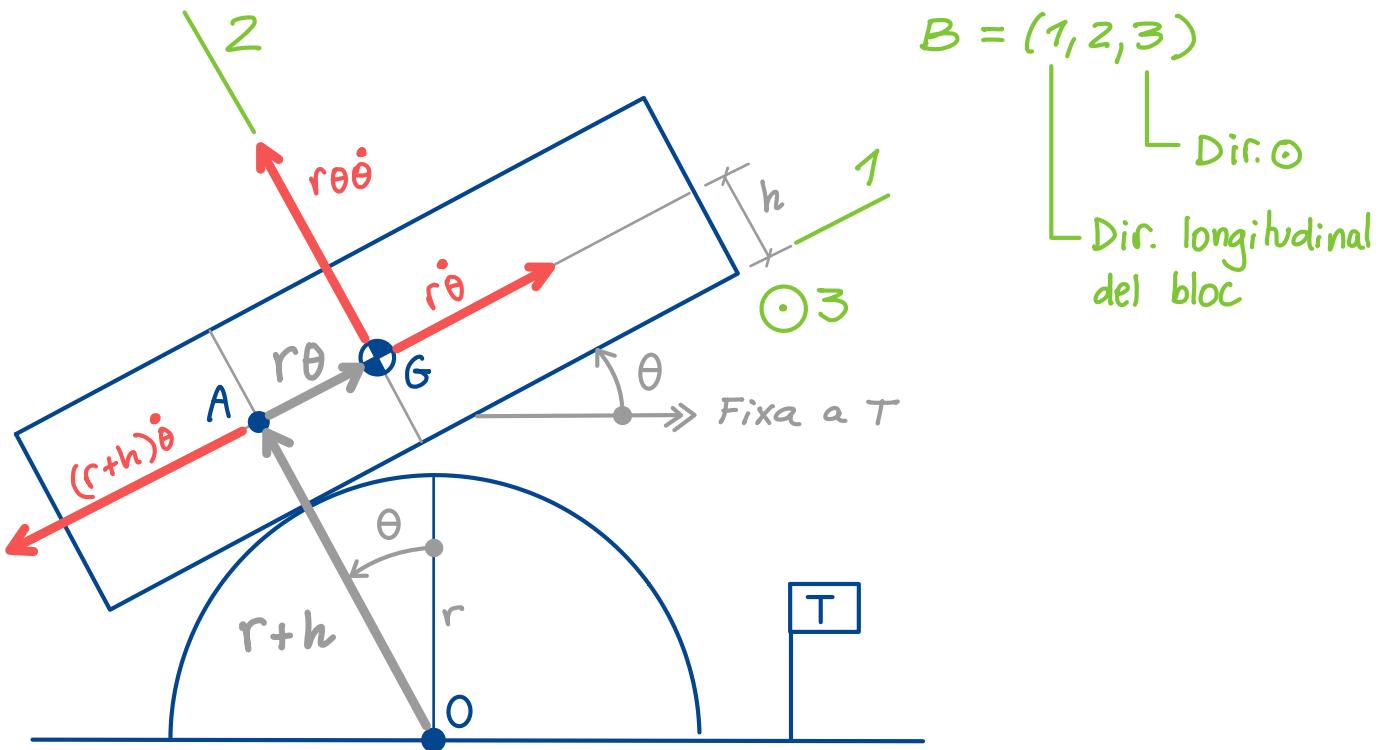
L'orient. del bloc i de  $\overline{AG}$ , també!

$\overline{OA}$  no canvia de valor, però si de dir. (amb  $\bar{\Omega}_T \overline{OA} = \dot{\Theta}$ )  
 $\overline{AG}$  canvia de valor ( $\theta$  varia), i tb. de dir. (amb  $\bar{\Omega}_T \overline{AG} = \dot{\Theta}$ )

(\*)  $|\overline{AG}| = r\theta$  perquè, si  $G$  és sobre la vertical de  $O$  quan  $\theta=0$ , vol dir que els trams verd i vermell coincideixen (i el vermell és  $r\theta$ )



Les derivades temporals de  $\overline{OA}$  i  $\overline{AG}$  són els següents vècs. vermells:



Ergo :

$$\begin{aligned} \boxed{\bar{v}_T(P)} &= (\rightarrow r\dot{\theta}) + \underbrace{[(r+h)\dot{\theta}]}_{(\leftarrow r\dot{\theta}) + (\leftarrow h\dot{\theta})} + (\uparrow r\theta\ddot{\theta}) = \\ &= \boxed{(\leftarrow h\dot{\theta}) + (\uparrow r\theta\ddot{\theta})} \quad (1) \end{aligned}$$

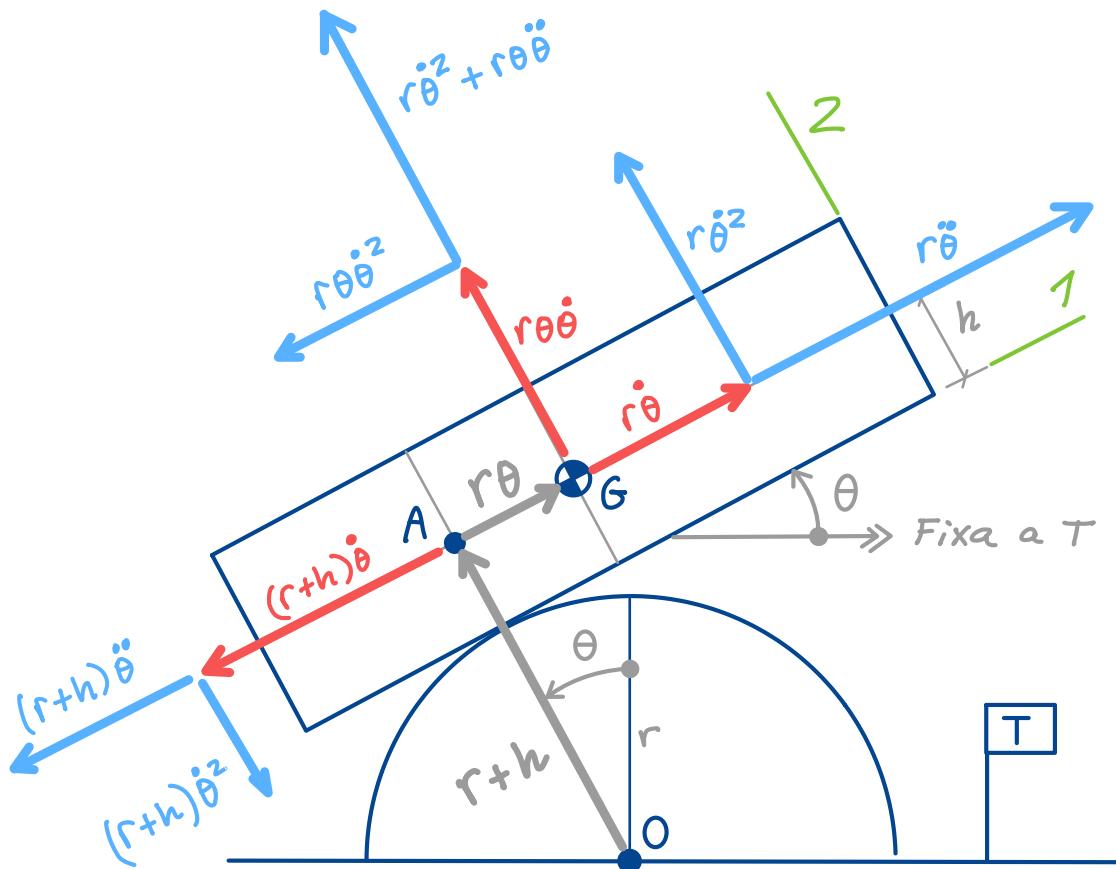
Si voleu, podem expressar  $\bar{v}_T(P)$  vectorialment mitjançant alguna base.  $B = (1, 2, 3)$  va molt bé, ja que té els versors en les dirs. que surten a l'Eq. (1):

$$\left\{ \bar{v}_T(P) \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} -h\dot{\theta} \\ r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

L'Eq. (2) ens anirà bé per comprovar els resultats obtinguts per derivació analítica (seg. exercici).

$\bar{a}_T(G)$

Només cal derivar els vecs. vermells per obtenir els blaus:

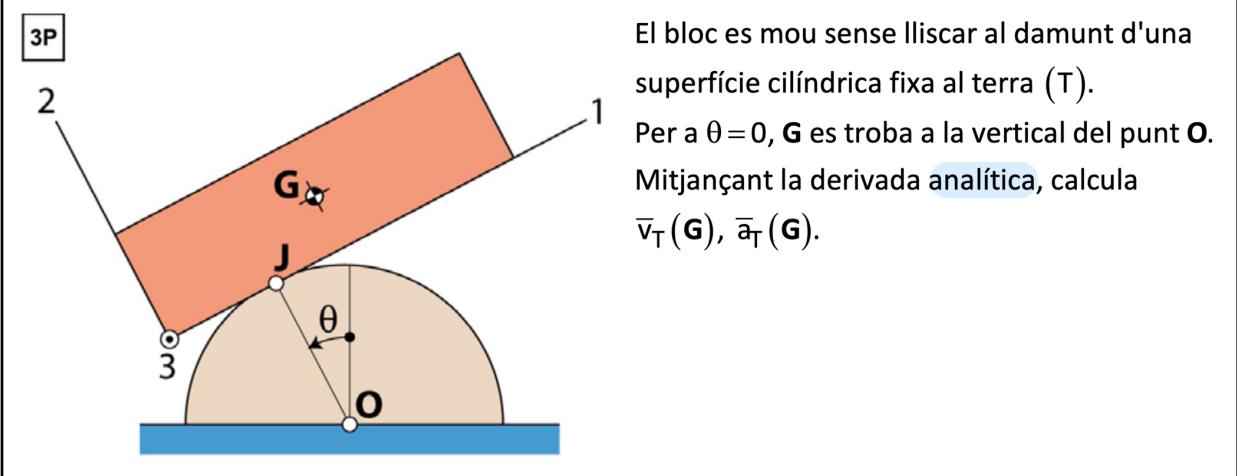


Sumant els vecs. blaus obtenim:

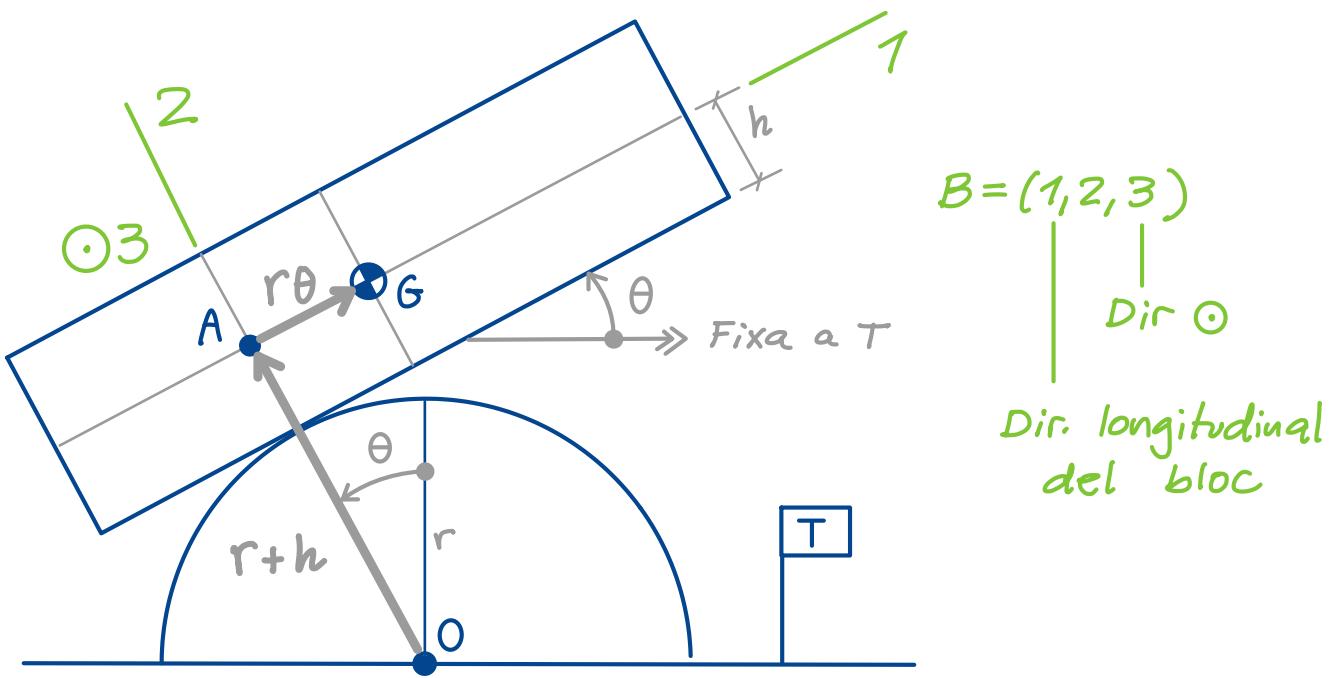
$$\bar{a}_T(G) = \left[ \leftarrow (h\ddot{\theta} + r\theta\dot{\theta}^2) \right] + \left[ \uparrow (r\ddot{\theta}^2 - h\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta}) \right],$$

que expressat en base  $B = (1, 2, 3)$  és

$$\{\bar{a}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} - r\theta\dot{\theta}^2 \\ r\dot{\theta}^2 - h\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$



$\bar{v}_T(G)$



$$\{\bar{OG}\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ r+h \\ 0 \end{Bmatrix}_{\bar{OA}} + \begin{Bmatrix} r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\bar{AG}} = \begin{Bmatrix} r\dot{\theta} \\ r+h \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Derivem  $\{\bar{OG}\}_B$  analiticament:

$$\{\bar{v}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} r\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r\dot{\theta} \\ r+h \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -r\ddot{\theta}-h\ddot{\theta} \\ r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} \\ r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Deriv. de les comp. de  $\{\bar{OG}\}_B$

Mateix resultat que a Eq. (2) de l'ex. aut.!

$$\bar{\alpha}_T(G)$$

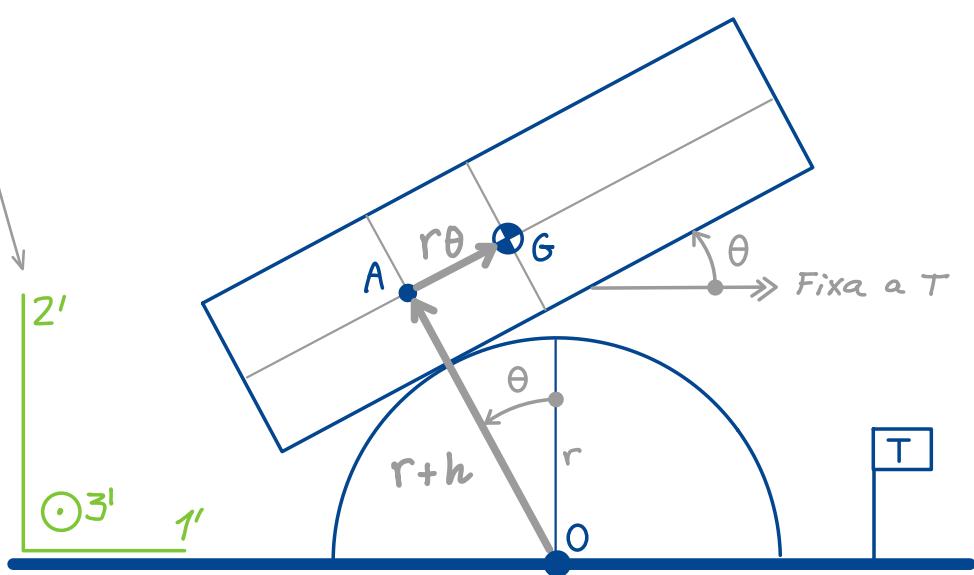
Derivem  $\bar{v}_T(G)$  respecte del temps:

$$\{\bar{\alpha}_T(G)\}_B = \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} \\ r\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -h\dot{\theta} \\ r\theta\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}} =$$

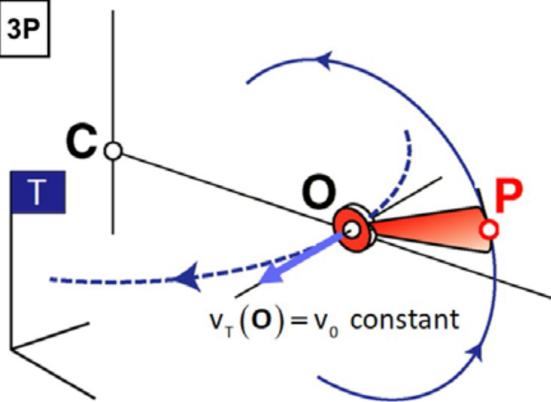
$$\begin{Bmatrix} -r\theta\dot{\theta}^2 \\ -h\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -h\ddot{\theta} - r\theta\dot{\theta}^2 \\ r\dot{\theta}^2 - h\dot{\theta}^2 + r\theta\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3) \leftarrow \text{Mataix resultat que a l'Eg. (3) de l'ex. anterior!}$$

Obs.: tb hauríem pogut utilitzar aquesta base  $B' = (1', 2', 3')$  fixa a  $T$  però l'expressió de  $\bar{G}$  seria més complexa, i la de  $\bar{v}_T(G)$  i  $\bar{\alpha}_T(G)$  també perquè  $B'$  no té els versors apuntant en les dirs. dels canvis de valor i dir. de  $\bar{OA}$  i  $\bar{AG}$ .



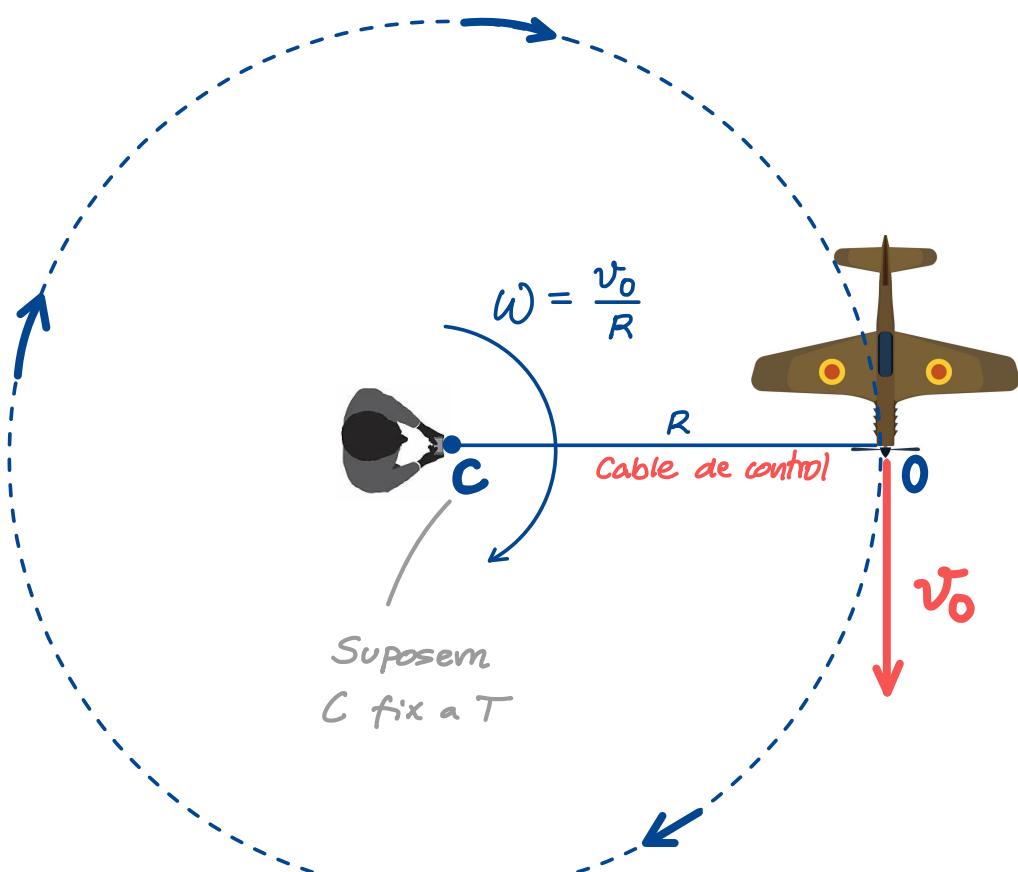
3P



Un avió gira respecte del terra de manera que la punta de la cabina (**O**) descriu una trajectòria circular respecte del terra (**T**) amb celeritat constant  $v_0$ . L'hèlix està articulada a **O**. Mitjançant la derivada analítica, calcula  $\bar{v}_T(P)$ ,  $\bar{a}_T(P)$ ,  $\bar{\alpha}_T^{\text{hèlix}}$ .

*Exercici inspirat en el pilotatge d'aeromodels amb línia de control ("control line flying"):*

<https://youtu.be/wZavLFRsMHg?si=wueZ1sArJ49wwCWp&t=179>



Definim :

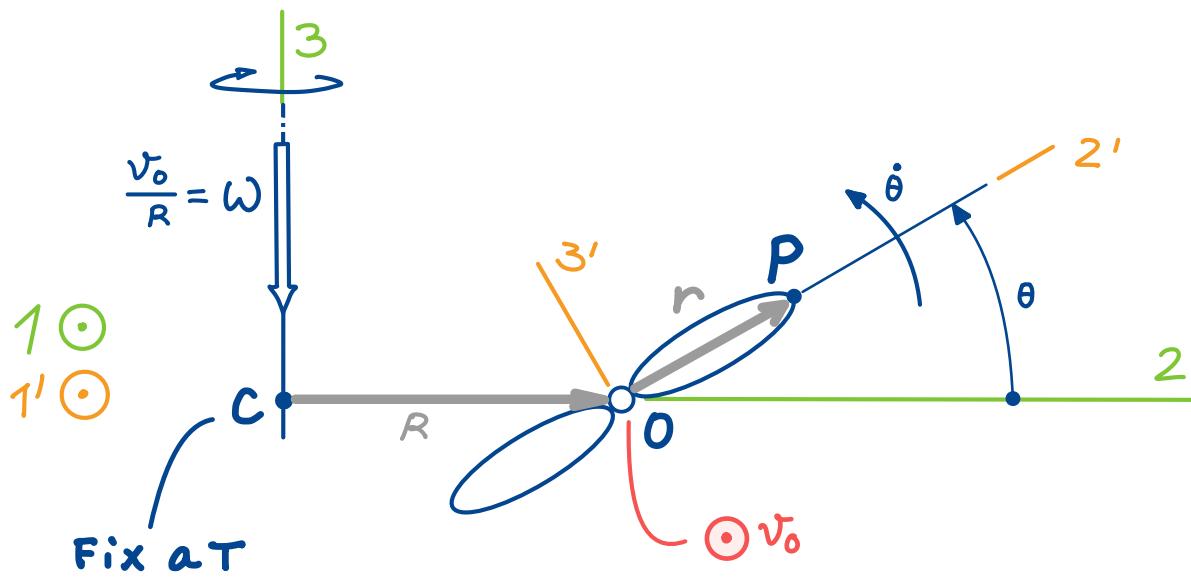
$$R = |\overline{CO}|$$

$$r = |\overline{OP}|$$

$$\omega = \Omega_T^{\overline{CO}} = \underbrace{\frac{v_0}{R}}_{\text{CONSTANT!}}$$

valor de la vel. angular de  $\overline{CO}$  resp. T

Derivarem  $\overline{CP} = \overline{CO} + \overline{OP}$  analíticament.



Cal triar una base per fer els càlculs.

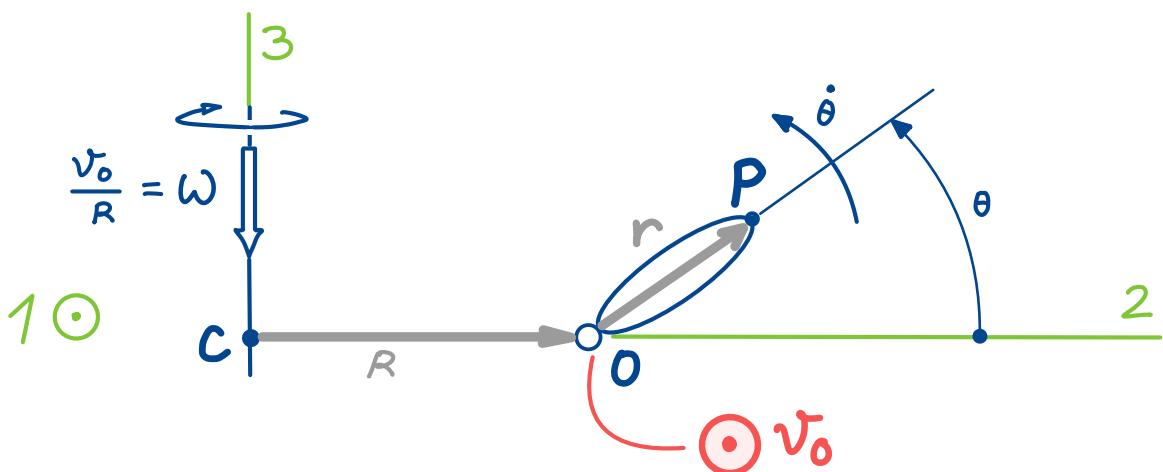
Ens adonem que aquestes dues bases van bé:

$$B = (1, 2, 3) \leftarrow \begin{array}{l} \text{Dir. } \overline{CO} \\ \text{Dir. } \odot \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{facilita la} \\ \text{projeció de } \overline{CO} \end{array} \quad \left| \quad \bar{\Omega}_T^B = (\downarrow \omega) \right.$$

$$B' = (1', 2', 3') \leftarrow \begin{array}{l} \text{Dir. } \overline{OP} \\ \text{Dir. } \odot \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{facilita la} \\ \text{proj. de } \overline{OP} \end{array} \quad \left| \quad \bar{\Omega}_T^{B'} = (\downarrow \omega) + (\odot \dot{\theta}) \right.$$

Farem els càlculs en ambdues bases, per practicar.

En base  $B = (1, 2, 3)$



$\bar{v}_T(P)$

$$\{\bar{CP}\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\cos\theta \\ rsin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R+r\cos\theta \\ rsin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}_T^B} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ R+r\cos\theta \\ rsin\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega R + \omega r\cos\theta \\ -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Anàlisi dimensional:

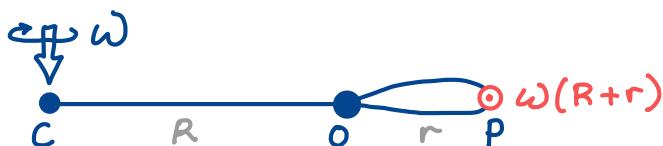
► Tot surt en m/s ✓

Anàlisi de casos particulars (suposant  $\theta=0$ )

► Si aturem el motor de l'hèlix, però no la cabina:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{\theta}=0 \quad \forall t \text{ (aturem } \dot{\theta}) \\ \theta=0 \quad (\text{suposem}) \end{array}} \Rightarrow \{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} \omega(R+r) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \checkmark$$

Particularitzant (1)

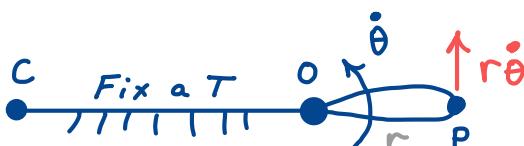


Comprovacions

► Si aturem la cabina, però no l'hèlix:

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega=0 \quad \forall t \text{ (aturem } \omega) \\ \theta=0 \quad (\text{suposem}) \end{array}} \Rightarrow \{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r\dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad \checkmark$$

Particularitzant (1)



$\bar{a}_T(P)$

Recordem que  $\omega = ct$

$$\left\{ \bar{a}_T(P) \right\}_B = \begin{Bmatrix} -wr\dot{\theta}\sin\theta \\ -r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \\ r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} wR + wr\cos\theta \\ -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} -wr\dot{\theta}\sin\theta \\ -\omega^2 R - r\omega^2 \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$


---


$$= \begin{Bmatrix} -2\omega r\dot{\theta}\sin\theta \\ -r\ddot{\theta}\sin\theta - \omega^2 R - r(\dot{\theta}^2 + \omega^2)\cos\theta \\ r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \end{Bmatrix}$$

Anàlisi dimensional:

► Tot surt en  $m/s^2$



Anàlisi de casos particulars (suposant  $\theta = 0$ ):

► Si aturem motor de l'hèlix, però no la cabina:

$$\begin{array}{l} \dot{\theta} = 0 \quad \forall t \quad (\text{aturem } \dot{\theta}) \\ \theta = 0 \quad (\text{suposem } \theta = 0) \end{array} \Rightarrow \left\{ \bar{a}_T(P) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega^2(R+r) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

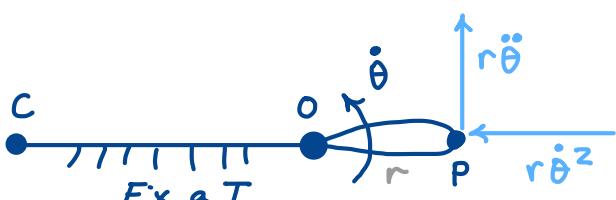


► Si aturem la cabina però no l'hèlix:

$$\begin{array}{l} \omega = 0 \quad \forall t \quad (\text{aturem } \omega) \\ \theta = 0 \quad (\text{suposem } \theta = 0) \end{array} \Rightarrow \left\{ \bar{a}_T(P) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

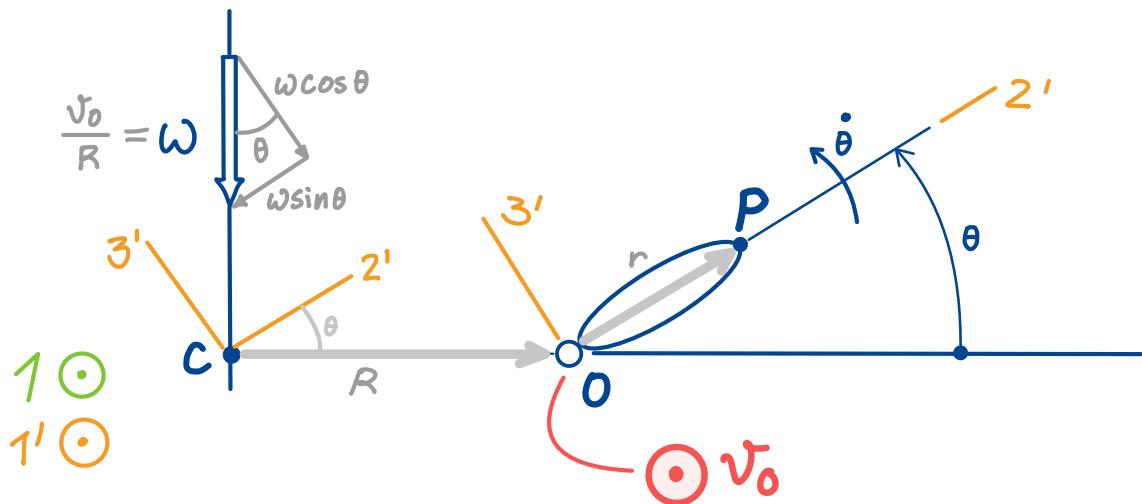


Comprovacions



## En base $B'$

$\bar{v}_T(P)$



$$\{\bar{v}_T(P)\}_{B'} = \bar{v}_O + \bar{v}_{OP} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \cos \theta \\ -R \sin \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \cos \theta + r \\ -R \sin \theta \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\Omega}_T^{B'} = (\Downarrow \omega) + (\odot \dot{\theta})$$

$$\boxed{\{\bar{v}_T(P)\}_{B'}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R \dot{\theta} \sin \theta \\ -R \dot{\theta} \cos \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -\omega \sin \theta \\ -\omega \cos \theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ R \cos \theta + r \\ -R \sin \theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -R \dot{\theta} s \\ -R \dot{\theta} c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cancel{WR} \\ R \dot{\theta} s \\ R \dot{\theta} c + \dot{r} r \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} \cancel{WR + wr \cos \theta} \\ 0 \\ \dot{r} r \end{Bmatrix}}$$

$$\left| \begin{array}{l} S = \sin \theta \\ C = \cos \theta \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \leftarrow \text{Per abreviar} \end{array} \right.$$

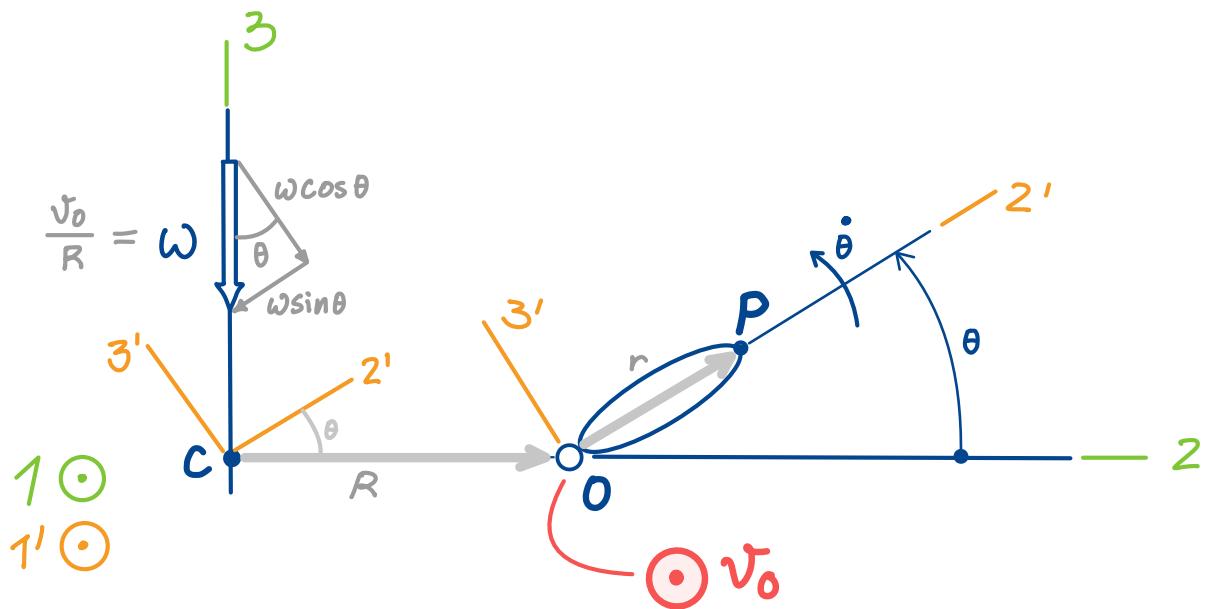
$\bar{a}_T(P)$

$$\boxed{\{\bar{a}_T(P)\}_{B'}} = \begin{Bmatrix} -wr \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \\ \ddot{r} r \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -\omega \sin \theta \\ -\omega \cos \theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \cancel{WR + wr \cos \theta} \\ 0 \\ \dot{r} r \end{Bmatrix}}_{\{\}} =$$

$$= \boxed{\begin{Bmatrix} -2wr \dot{\theta} \sin \theta \\ -w^2 \cos \theta (R + r \cos \theta) - \dot{\theta}^2 r \\ \ddot{r} r + w^2 \sin \theta (R + r \cos \theta) \end{Bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} -wr \dot{\theta} \sin \theta \\ -w^2 R \cos \theta - w^2 r \cos^2 \theta - \dot{\theta}^2 r \\ w^2 R \sin \theta + w^2 r \sin \theta \cos \theta \end{Bmatrix}}$$

$\bar{\alpha}_T^{\text{hélix}}$



$$\bar{\Omega}_T^{\text{hélix}} = \bar{\Omega}_{\text{cabina}}^{\text{hélix}} + \bar{\Omega}_T^{\text{cabina}} = (\odot \dot{\theta}) + (\downarrow \omega)$$

En base B

$$\{\bar{\Omega}_T^{\text{hélix}}\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} \quad \text{variable, en ppi.}$$

$$\{\bar{\alpha}_T^{\text{hélix}}\}_B = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix}} \times \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ -\omega \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En base B'

$$\{\bar{\Omega}_T^{\text{hélix}}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -w \sin \theta \\ -w \cos \theta \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\alpha}_T^{\text{hélix}}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ -w \dot{\theta} \cos \theta \\ w \dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix} + \{\bar{\Omega}_T^{\text{hélix}}\}_{B'} \times \{\bar{\Omega}_T^{\text{hélix}}\}_{B'}$$

# Angles d'Euler

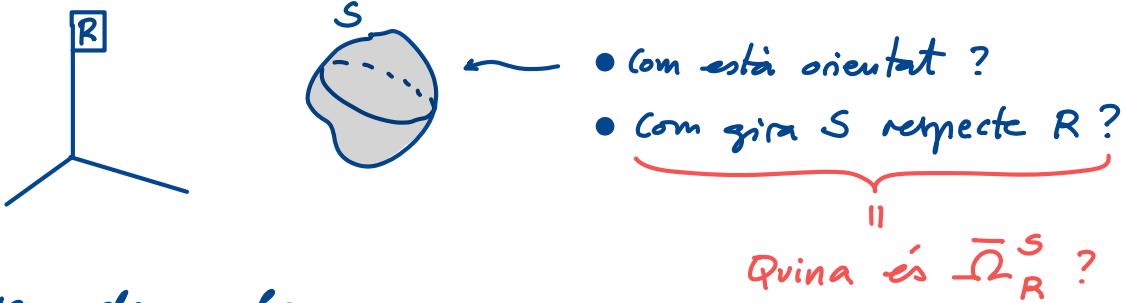
Repàs de teoria

+

Exercicis

# Repàs d'angles d'Euler

Permeten orientar un sòlid respecte una ref. i expressar la vel. angular del sòlid respecte aquesta ref.

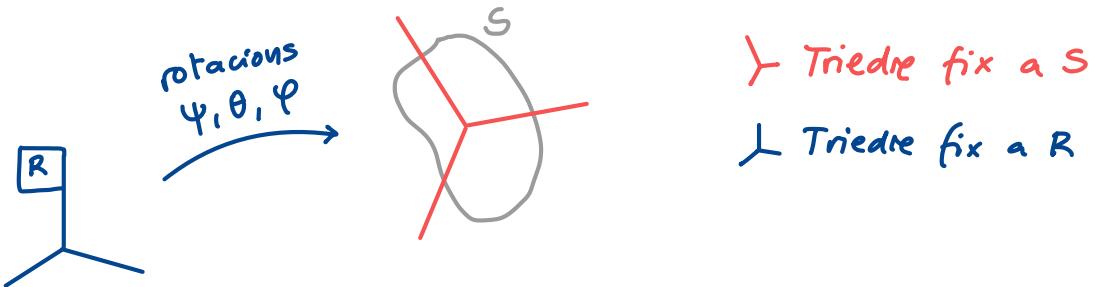


Recordem els angles

$\psi$	$\theta$	$\varphi$
psi	theta	phi
precessió	nutació	spin

Sempre en aquest ordre !

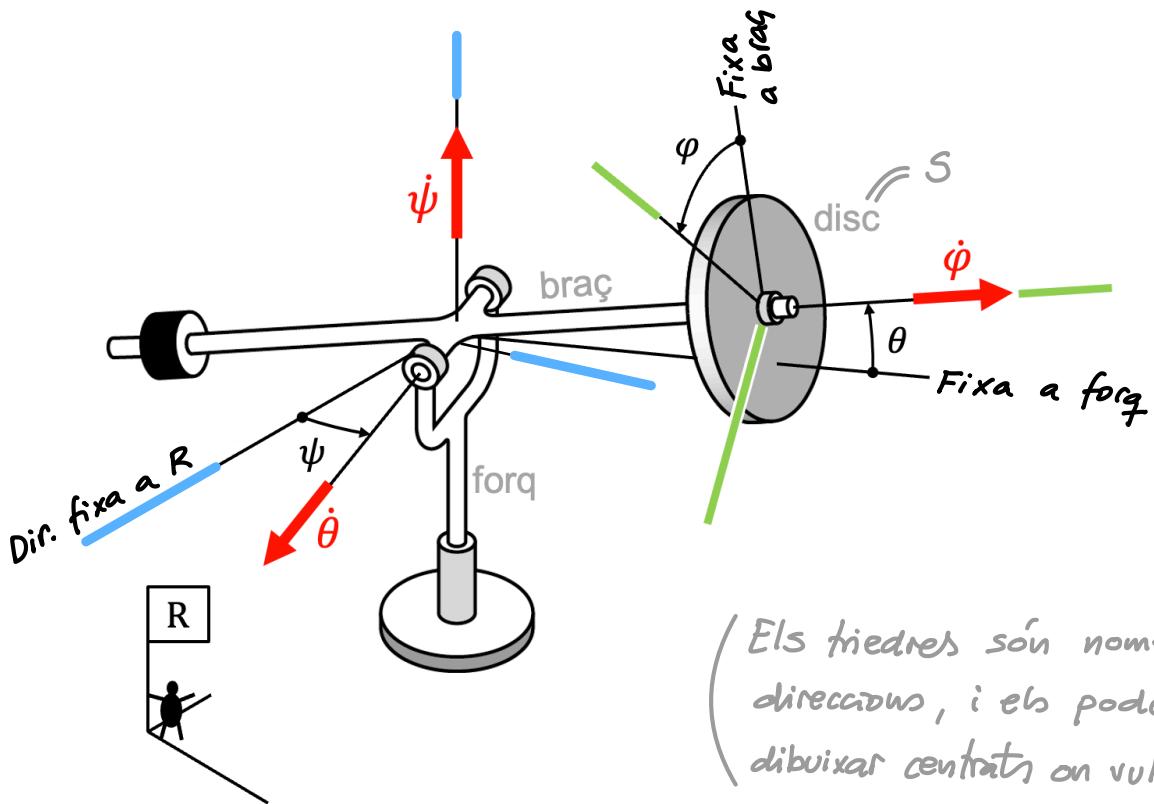
Sigui un sòlid  $S$  amb un triedre fix a ell. Les rotacions d'Euler són 3 rotacions encadenades (en sèrie), al voltant de 3 eixos, que permeten definir l'orientació del triedre fix a  $S$  relativa a un triedre fix a  $R$ :



A teoria heu vist com són aquestes rotacions en el cas del giroscopi. Vegeu apartat C1.4 de [mec.etscib.edu](#) wikimec

Però una cosa és com queda orientat aquest triedre fix al sòlid, i una altra és com queden els eixos de rotació després de cada gir.

Tot això es veu clar al giroscopi, on  $S = \text{disc}$ :



- Triedre fix a  $R$ ? → El blau! (Dir.  $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$  per  $\psi = \theta = \varphi = 0$ )
- Triedre fix a  $S$ ? → El verd!
- Eixos d'Euler? → Els dels vecs. vermellos!  $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$

Recordeu sempre això:

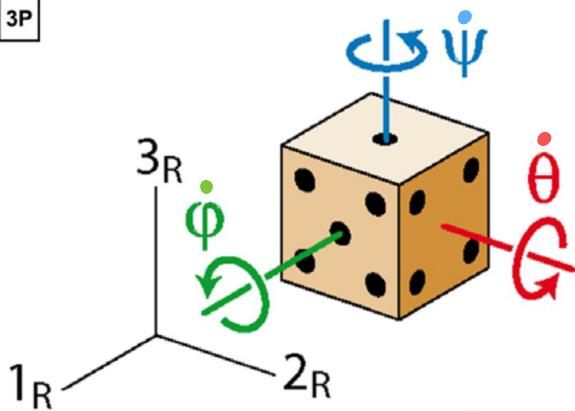
Eix	Com queda?	Gira amb vel. angular
$\bar{\psi}$ A $90^\circ$	Fix a $R$ $\perp$ a $\bar{\psi}$ i $\bar{\varphi}$	$\bar{\theta}$ (no gira) $\bar{\varphi}$
$\bar{\theta}$ A $90^\circ$	Fix a $S$	$\bar{\psi} + \bar{\theta}$

$$\text{Eix } \bar{\theta} = (\text{Pla } \perp \bar{\psi}) \cap (\text{Pla } \perp \bar{\varphi})$$

Especificació rigorosa de la posició del 2<sup>o</sup> eix

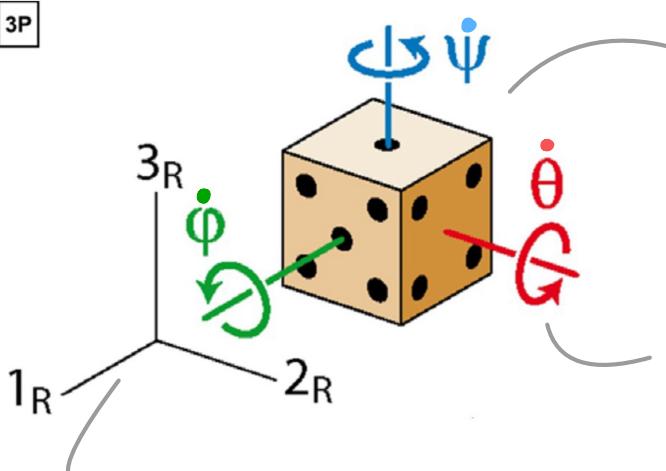
L'angle entre  $\bar{\psi}$  i  $\bar{\varphi}$  pot ser qualsevol!

3P



El dau s'orienta mitjançant tres angles d'Euler respecte del terra ( $R$ ).  
Per a la configuració  $\psi = \theta = \varphi = 0$ , els eixos d'Euler són els indicats.  
 $1_R 2_R 3_R$  són tres direccions fixes a terra.  
Determina l'orientació del dau i la direcció de les rotacions d'Euler si s'introdueixen  $\Delta\psi = \Delta\theta = \Delta\varphi = 90^\circ$ .

3P



Configuració inicial  
del dau (per  
 $\psi = \theta = \varphi = 0$ )

Fixeu-vos bé en els  
sentits de gir!

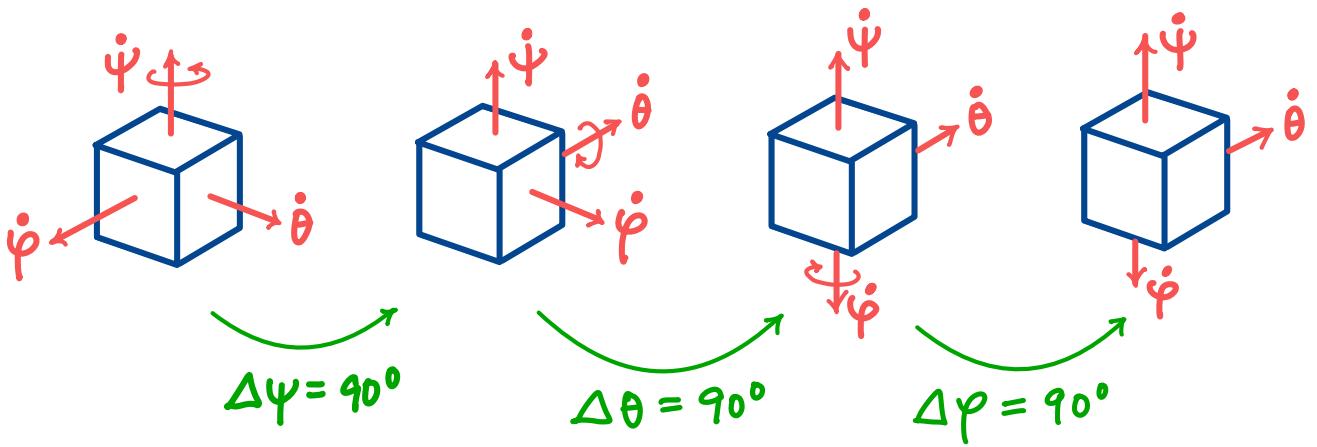
Triedre fix a  $R = T$  (terra)

Per resoldre l'exercici:

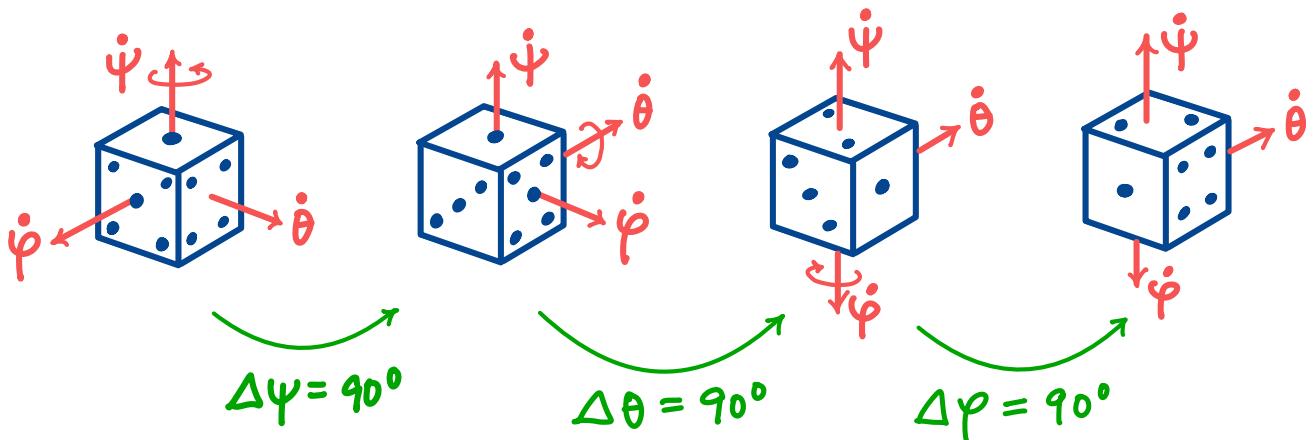
- Dibuixarem com queden els eixos  $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$  després de cada rotació
- Deduirem com queden les cares tenint en compte que les oposades sumen 7.
- Comprovaranem que :

•  $\bar{\psi}$  roman fix a la ref.      ←  
 A  $90^\circ$       ←  
 A  $90^\circ$       ←  
 •  $\bar{\theta}$  " en el pla  $\perp$  a  $\bar{\psi}$   
 •  $\bar{\varphi}$  " fix a la cara original del dau      ←  
en aq. cas  
Angle entre  $\bar{\psi}$  i  $\bar{\varphi}$  pot ser qualsevol

Com queden els eixos  $\bar{\psi}, \dot{\theta}, \bar{\varphi}$ :



Com queden les cares:

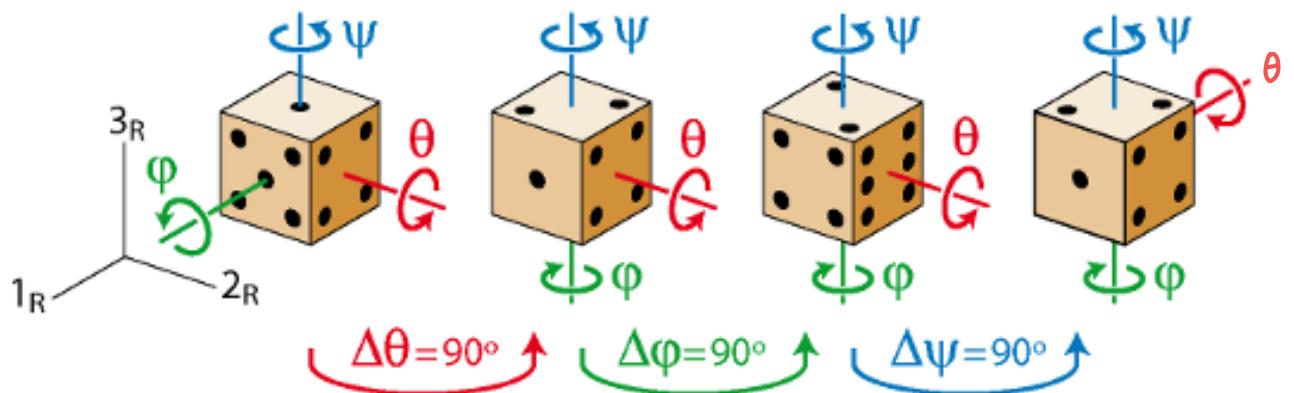
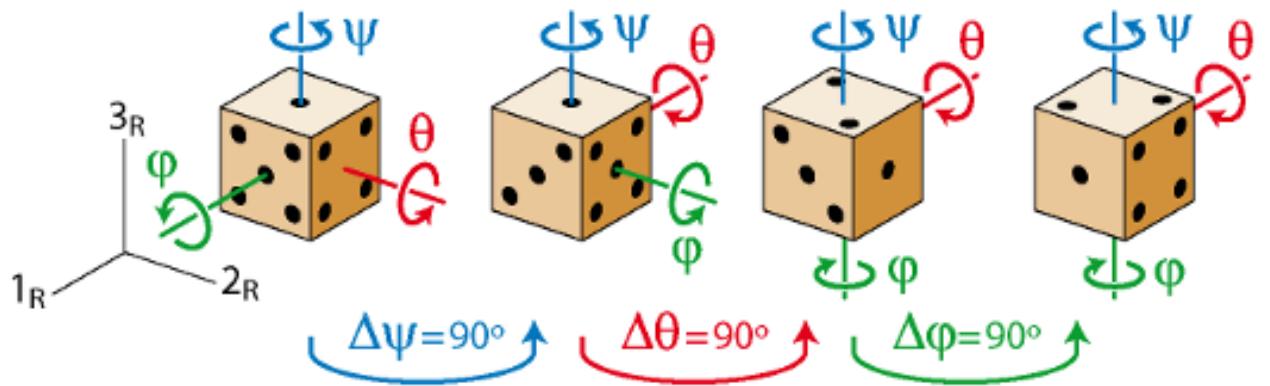


Comprovacions :

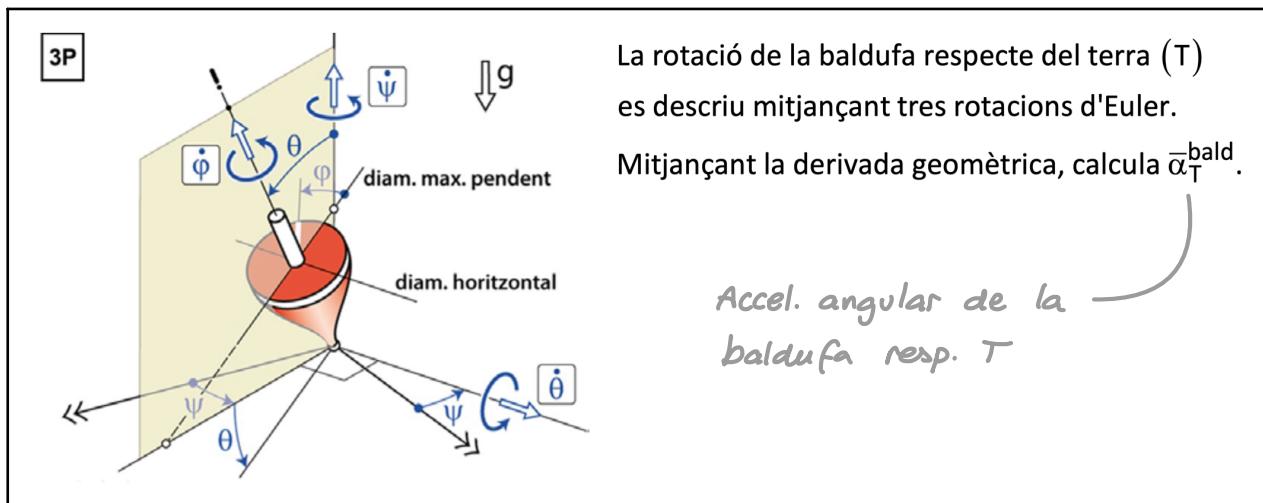
- $\bar{\psi}$  roman fix a ref? Si! ✓
- $\dot{\theta}$  roman al pla  $\perp$  a  $\bar{\psi}$ ? Si! ✓
- $\dot{\varphi}$  roman  $\perp$  a cara ? Si! ✓

Deures : Introduiu les rotacions en l'ordre  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\psi$  i comproueu que surt el mateix !

Solució en els dos ordres :

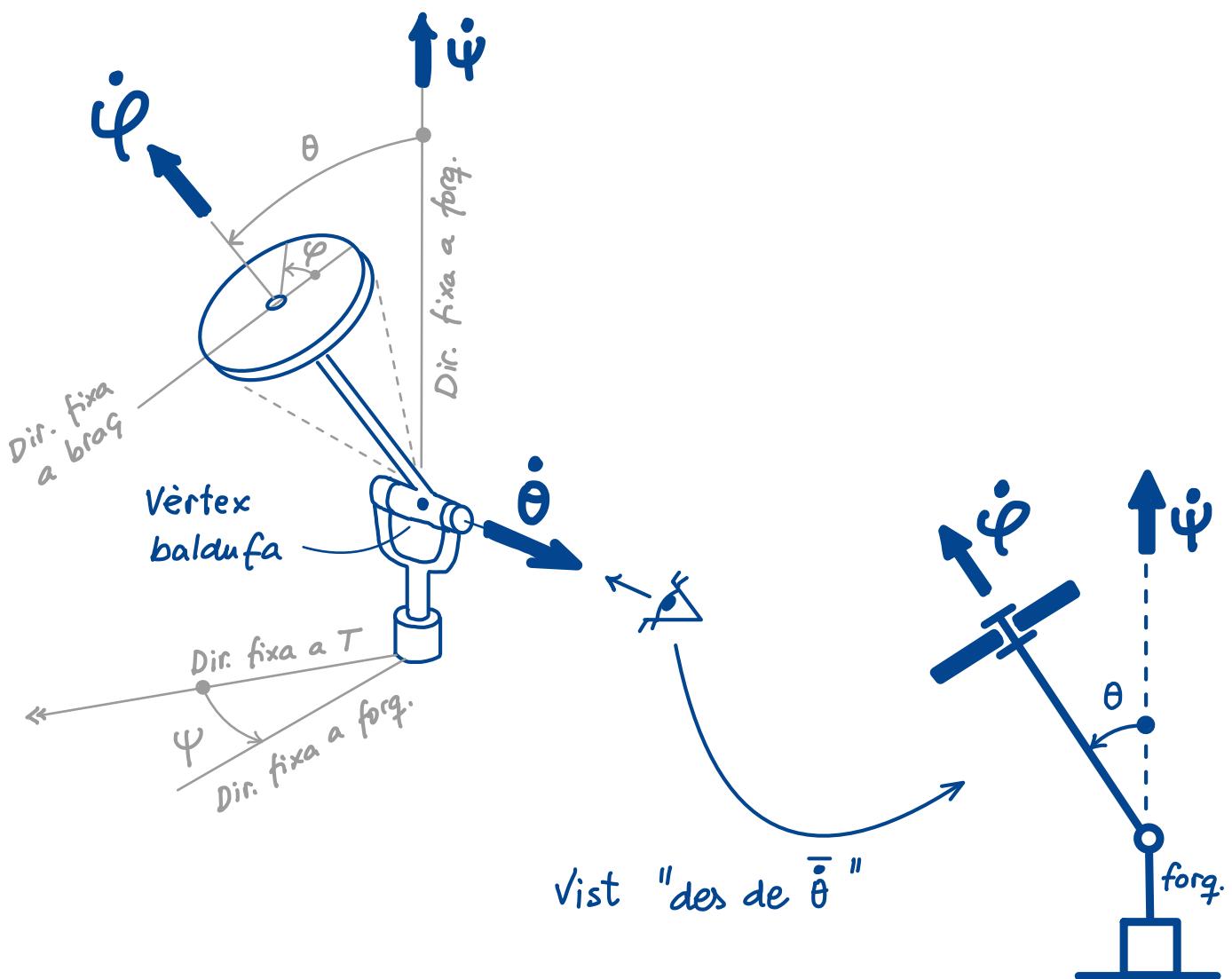


Ha de donar el mateix, ja que l'orientació per mitjà d'angles d'Euler és invariant a l'ordre en que s'introdueixen les rotacions.

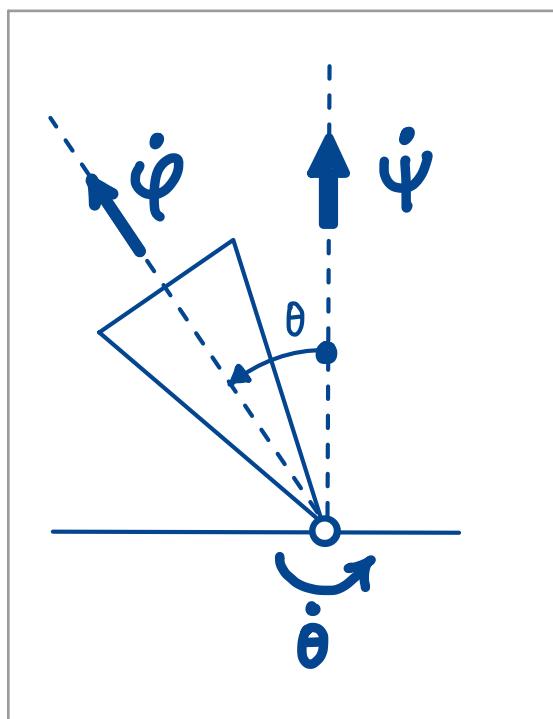


Cal derivar  $\bar{\Omega}_T^{\text{bald}} = \bar{\psi} + \bar{\theta} + \bar{\varphi}$  geomètricament.

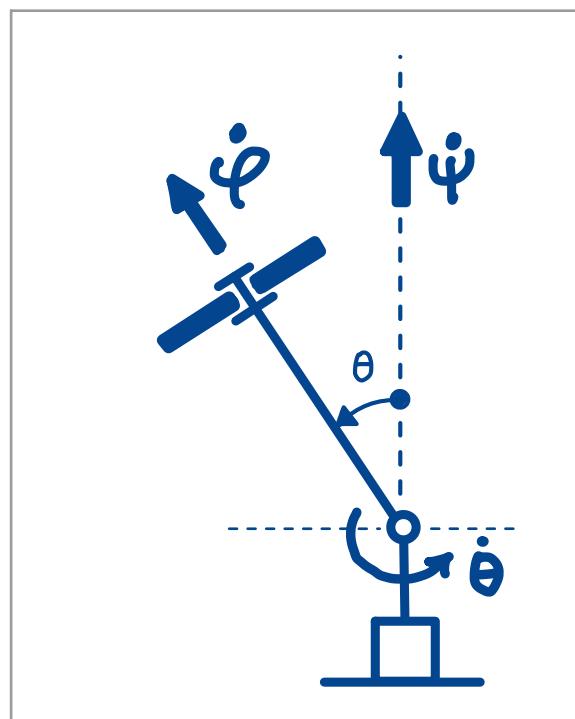
Tot i que no cal estrictament, podem pensar la baldufa com un giroscopi. Això ens ajudarà a entendre com varien  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{\varphi}$ :



Baldufa

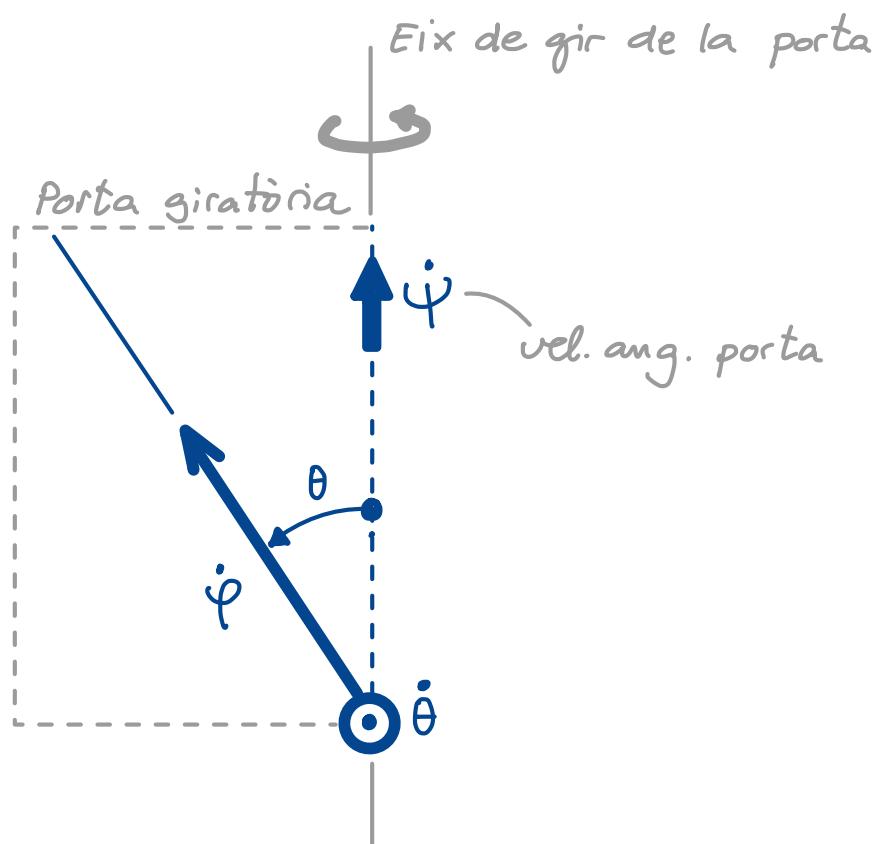


Giroscopi equivalent



Podem pensar el pla definit per  $\dot{\psi}$  i  $\dot{\phi}$  com una "porta" que gira amb vel. angular  $\dot{\psi}$

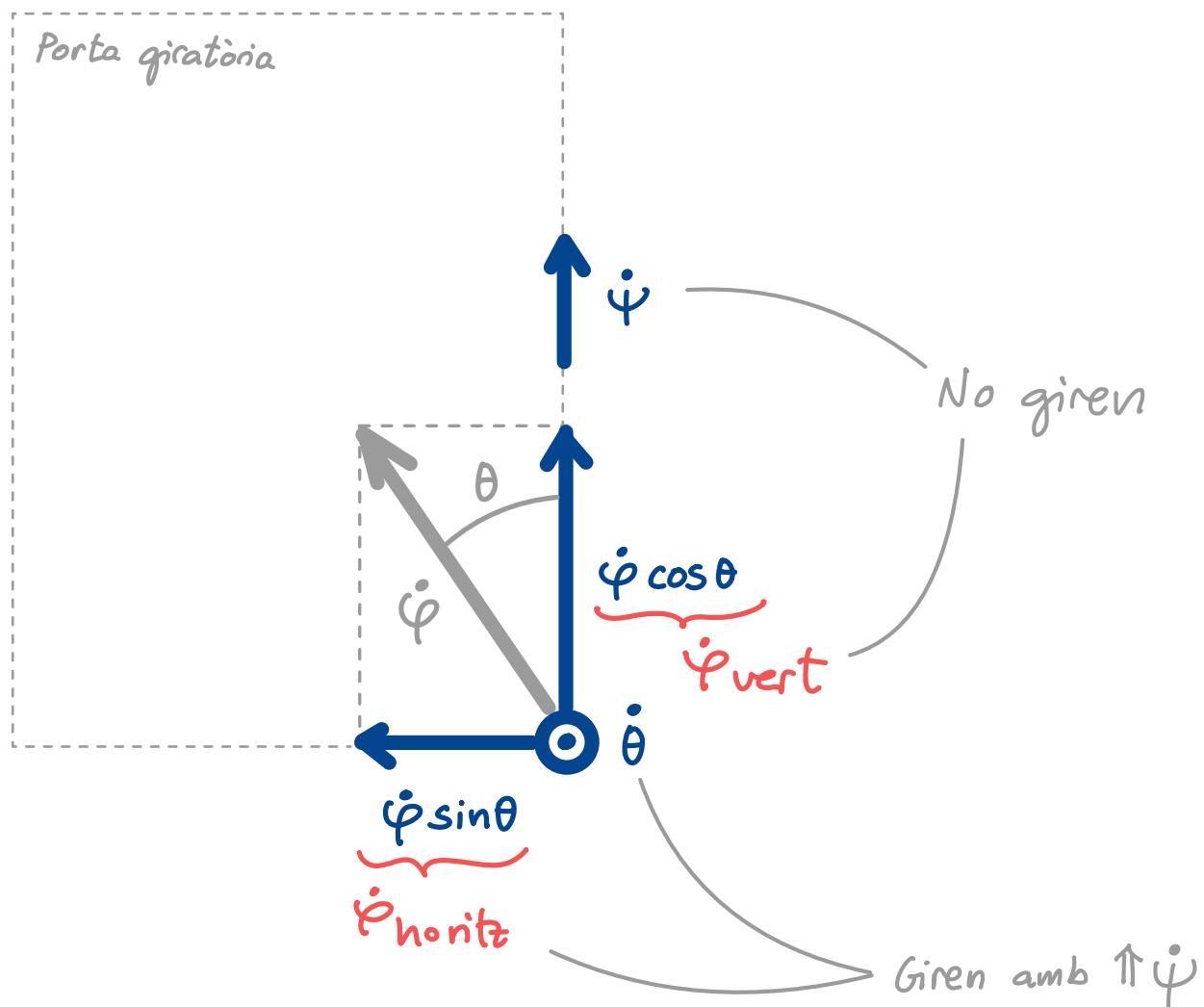
Els vectors  $\dot{\psi}$  i  $\dot{\phi}$  són sobre aquest pla, i  $\dot{\theta}$  és  $\perp$  al pla:



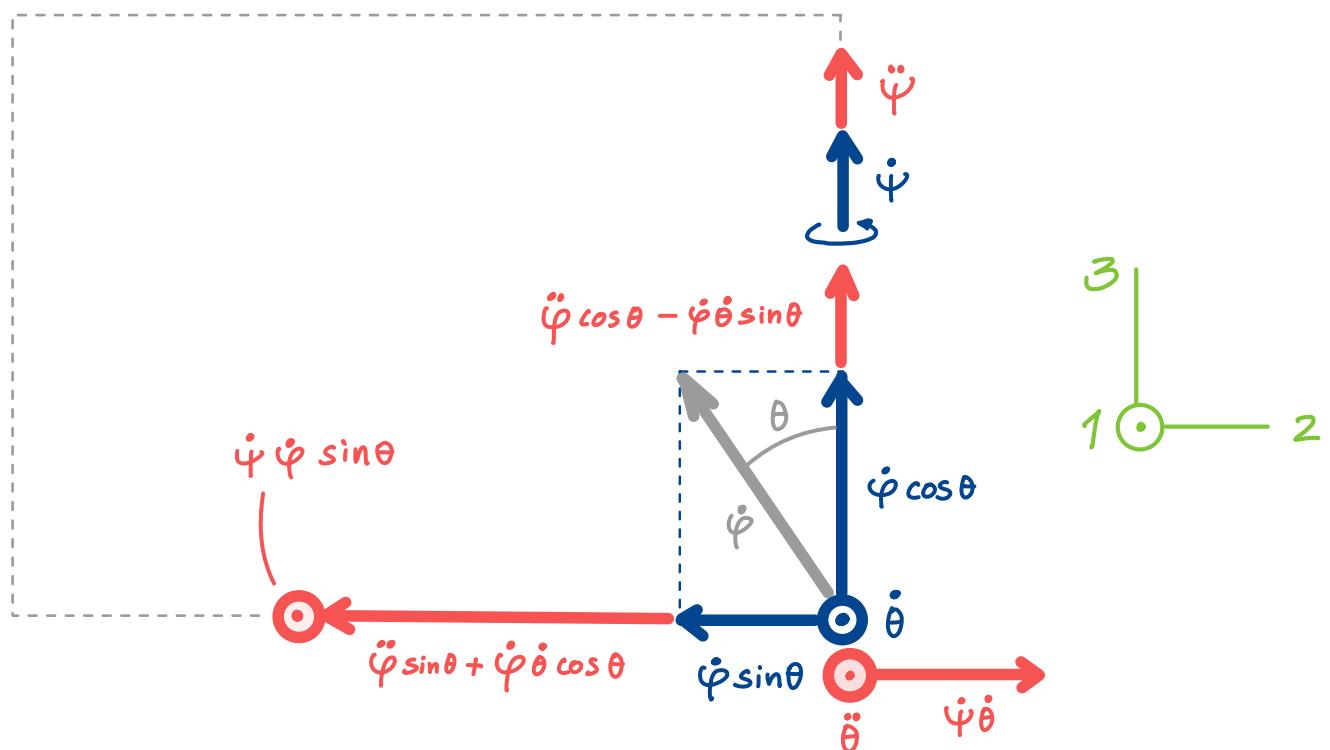
Per derivar geomètricament aquests tres vectors podem aplicar un truc: podem substituir  $\dot{\varphi}$  per

$$\underbrace{\dot{\varphi}_{\text{vert.}} + \dot{\varphi}_{\text{horitz}}}_{\begin{array}{l} \text{component} \\ \text{vertical de } \dot{\varphi} \end{array}} + \underbrace{\dot{\varphi}_{\text{horitz}}}_{\begin{array}{l} \text{component} \\ \text{horizontal de } \dot{\varphi} \end{array}}$$

Això simplifica la derivació, perquè, ara, els vectors que giren ho faran amb rotació simple només:

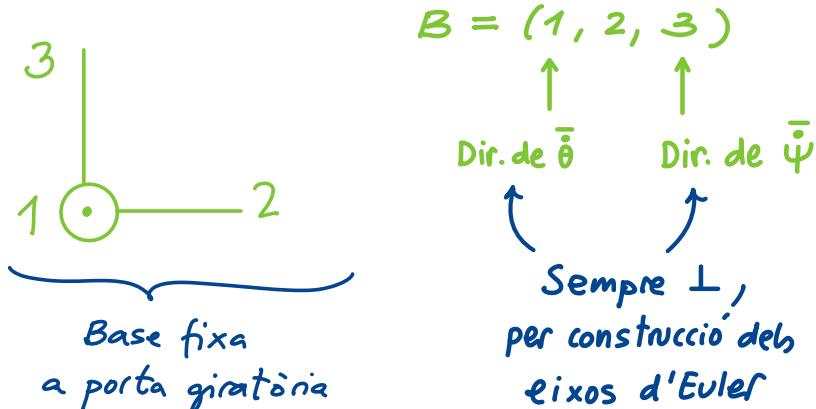


Ara derivem els vecs. blaus i obtenim els vermells :



$\bar{\alpha}_T^{Bald}$  és la suma dels vecs vermells ! Ja no la pintem!

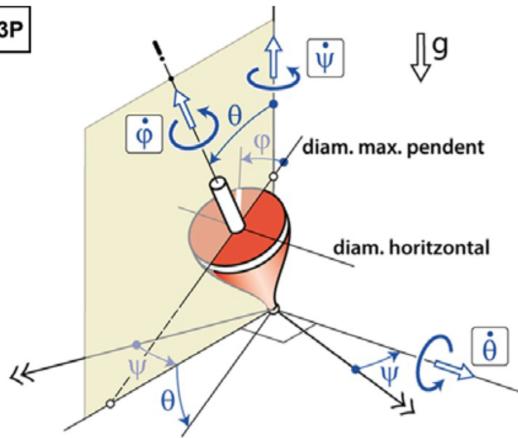
Serà + pràctic expressar  $\bar{\alpha}_T^{Bald}$  mitjançant la base :



Queda així :

$$\left\{ \bar{\alpha}_T^{bald} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \dot{\theta} - \ddot{\phi} \sin \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\}_B \quad (A)$$

3P



La rotació de la baldufa respecte del terra (T) es descriu mitjançant tres rotacions d'Euler.

Mitjançant la derivada analítica, calcula  $\bar{\alpha}_T^{\text{bald}}$ .

En base B

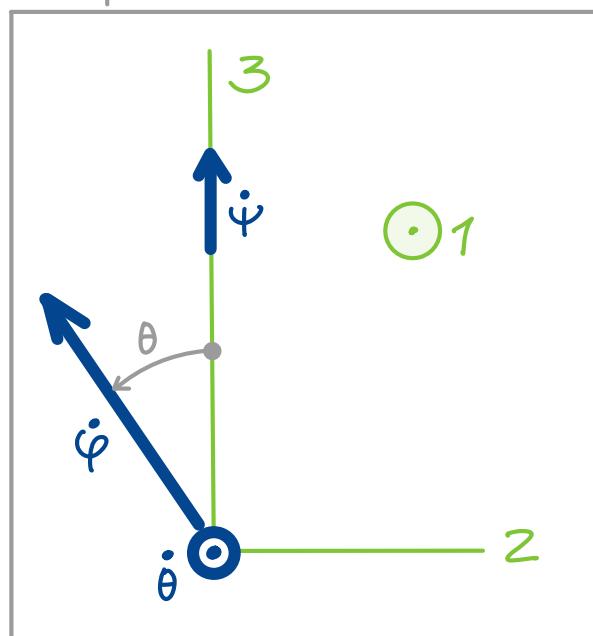
$$\underbrace{B = (1, 2, 3)}$$

Es la d'abans

(gira amb  $\uparrow \bar{\psi}$ )

$$\left\{ \bar{\omega}_T^{\text{bald}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{Bmatrix}$$

Pla "porta"



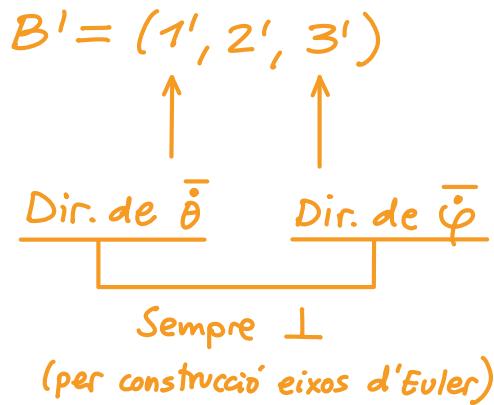
$$\boxed{\left\{ \bar{\alpha}_T^{\text{bald}} \right\}_B} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} \\ -\ddot{\varphi} \sin \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\varphi} + \ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{array} \right\}}_{\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \\ 0 \end{array} \right\}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \\ -\ddot{\varphi} \sin \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \\ \ddot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\} \quad (A'')$$

Quadra amb Eq.(A)  
de l'exercici anterior !

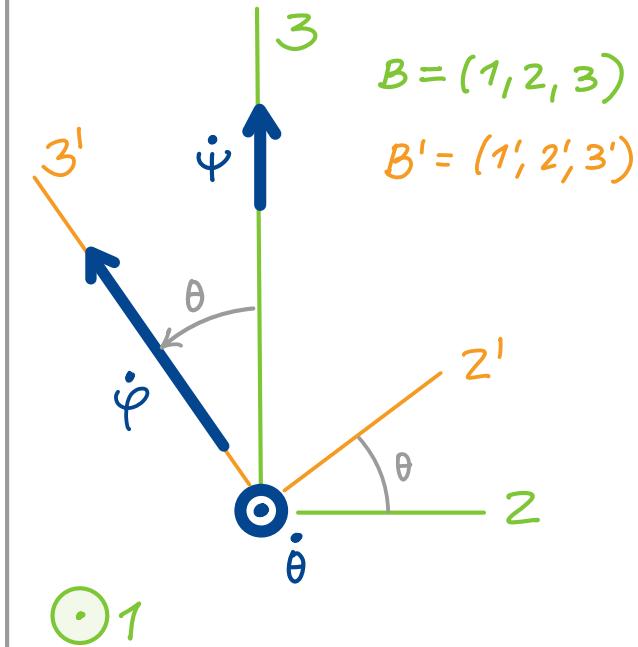
Ara en base  $B' = (1', 2', 3')$  que també va bé

$B'$  definida així:



$$\left\{ \bar{\Omega}_T^{bal'd} \right\}_{B'} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{array} \right\}$$

Pla "porta"



$d/dt$

$$\boxed{\left\{ \bar{\Omega}_T^{bal'd} \right\}_{B'}} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\varphi} \end{array} \right\}$$

$$\bar{\Omega}_T^{B'} = \bar{\psi} + \bar{\theta} \leftarrow \text{No intervé } \bar{\varphi}$$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{array} \right\}}_{+} \times \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{array} \right\} =$$

$$\parallel \leftarrow \bar{a} \times (\bar{a} + \bar{b}) = \underbrace{(\bar{a} \times \bar{a})}_{\circ} + (\bar{a} \times \bar{b})$$

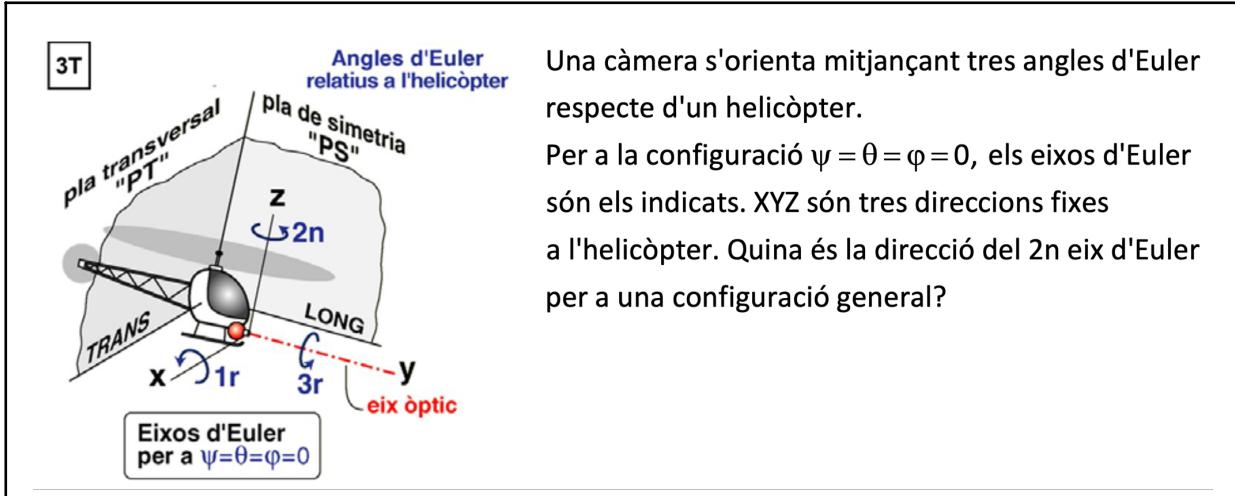
$$= \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\psi} \sin \theta \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\varphi} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \dot{\psi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} \dot{\varphi} \\ 0 \end{array} \right\}$$

# Extra

Qüestions pendents de 3T



Una càmera s'orienta mitjançant tres angles d'Euler respecte d'un helicòpter.

Per a la configuració  $\psi = \theta = \phi = 0$ , els eixos d'Euler són els indicats. XYZ són tres direccions fixes a l'helicòpter. Quina és la direcció del 2n eix d'Euler per a una configuració general?

Compte: estem orientant la càmera resp. l'helicòpter, no el terra.

Siguin | PP el "pla pel·lícula" ← El pla  $\perp$  a l'eix òptic, on es forma la imatge de la càmera

PS el "pla de simetria" de l'helicòpter.

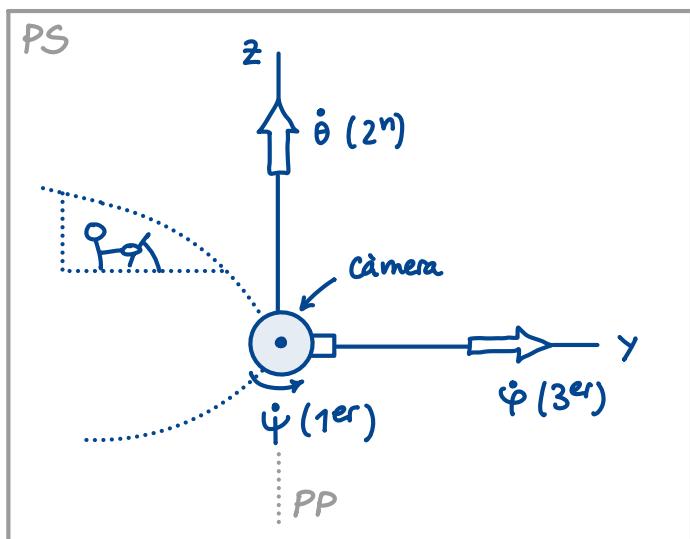
De teoria d'angles d'Euler sabem que

2<sup>n</sup> eix d'Euler es manté  $\left\{ \begin{array}{l} \perp \text{ al 1er eix } \Rightarrow E \text{ PS} \\ \perp \text{ al 3er eix } \Rightarrow E \text{ PP} \end{array} \right.$

Per tant, en una config. general:

Dir. del 2<sup>n</sup> eix d'Euler = PS  $\cap$  PP

Tot i que no caldria afegir més explicacions, ho intento explicar amb dibuixos tot seguit:

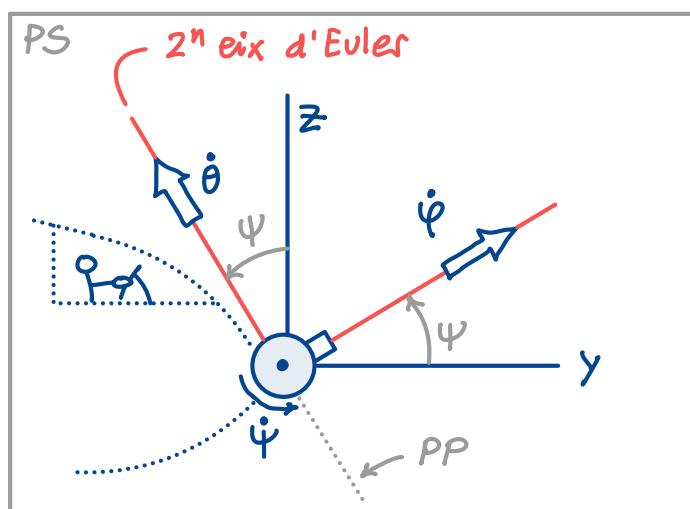


Situació inicial

(Triedre xyz és fix a l'helicòpter (és "el de referència"))

Clarament:

$$2^{\text{a}} \text{ eix Euler} = PS \cap PP$$



Situació després de la 1^{\text{a}} rotació ( $\psi$ )

Clarament:

$$2^{\text{a}} \text{ eix Euler} = PS \cap PP$$

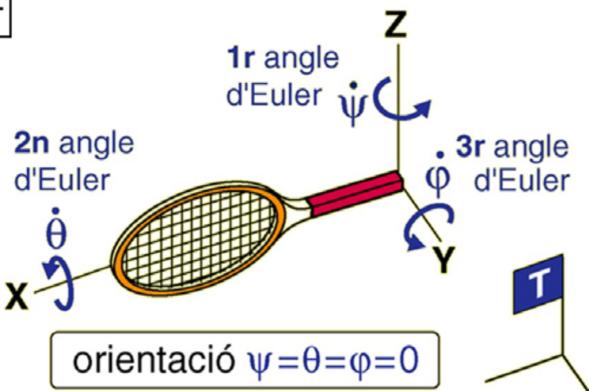
Després de la 2^{\text{a}} rotació ( $\dot{\theta}$ ), PP s'abat, però seguim tenint:

$$2^{\text{a}} \text{ eix Euler} = PS \cap PP$$

Després de la 3^{\text{a}} rotació ( $\dot{\varphi}$ ), PP gira around l'eix  $\dot{\varphi}$ , però seguim tenint

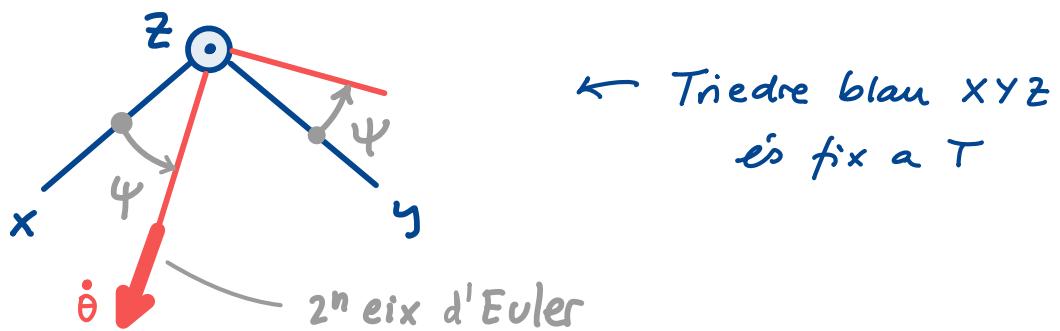
$$2^{\text{a}} \text{ eix Euler} = PS \cap PP$$

3T



La raqueta s'orienta mitjançant tres angles d'Euler respecte del terra (T). Per a la configuració  $\psi = \theta = \varphi = 0$ , els eixos d'Euler són els indicats. XYZ són tres direccions fixes a terra. Quina és la direcció del 2n eix d'Euler per a una configuració general?

2<sup>n</sup> eix es mou en el pla horizontal de T:



2<sup>n</sup> eix d'Euler es manté

$\perp$  al 1er eix  $\implies$  2<sup>n</sup> eix  $\in$  pla horizontal  
" Dir. vertical (la gravetat) PH

$\perp$  al 3er eix  $\implies$  2<sup>n</sup> eix  $\in$  pla raqueta  
Dir.  $\perp$  pla raqueta PR

Ergo, a una config. general:

$$2^n \text{ eix} = PH \cap PR$$