

14P

Versió 1.2

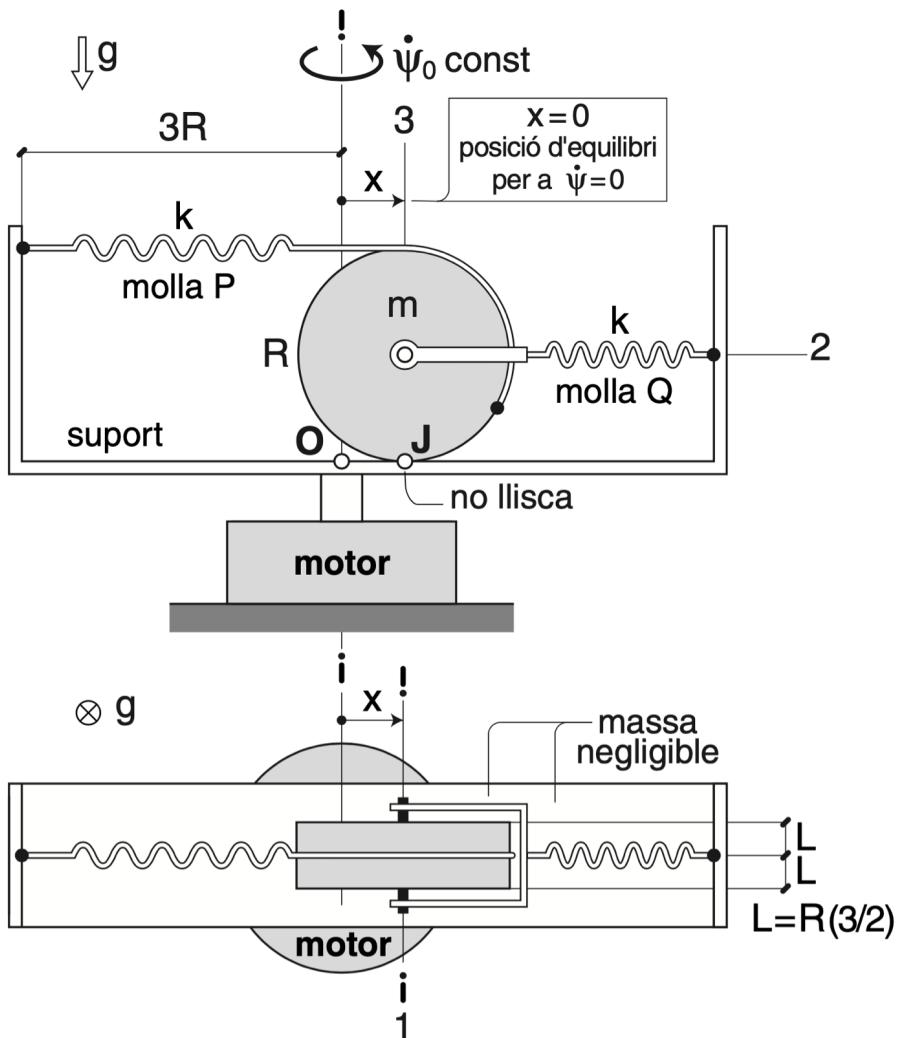
Teoremes vectorials IV

Lluís Ros

<https://luisros.github.io/mecanica>

Examen de REAVA, 7 de juliol 2015

El corró homogeni, de radi R , gruix $2L$ (amb $L=(3/2)R$) i massa m , manté contacte sense lliscar amb el suport, que té radi $3R$, massa negligible i gira amb velocitat angular $\dot{\psi}_0$ constant respecte del terra. Les dues molles tenen una constant de rigidesa k i un dels seus extrems fixos al suport. La molla Q té l'altre extrem fix al centre del corró, en tant que la molla P s'enrotlla a la perifèria del corró. Per a $x=0$, que és d'equilibri per a $\dot{\psi}_0=0$, la molla P està tensada amb una força F_0 .



Fes el diagrama general d'interaccions (DGI) i troba:

- L'equació del moviment per a la coordenada x .
- El parell motor Γ que garanteix $\dot{\psi}_0 = \text{ct}$.
- La força normal del suport sobre el corró.

GL del sistema i incògnites associades

El sistema té 2 GL:

$\dot{\psi}_0$ (forçat) $\Rightarrow \square$ és una incògnita del problema dinàmic.

\ddot{x} (lliure) $\Rightarrow \ddot{x}$ " " " " "

Caracterització del contacte suport - corró a J

És un contacte multipuntual sense lliscament (c.m.p.s.ll.)

Com que el corró només té 1 GL respecte del suport (rodola radialment sobre aquest), el torsor d'enllaç suport \rightarrow corró introduirà 5 ie.

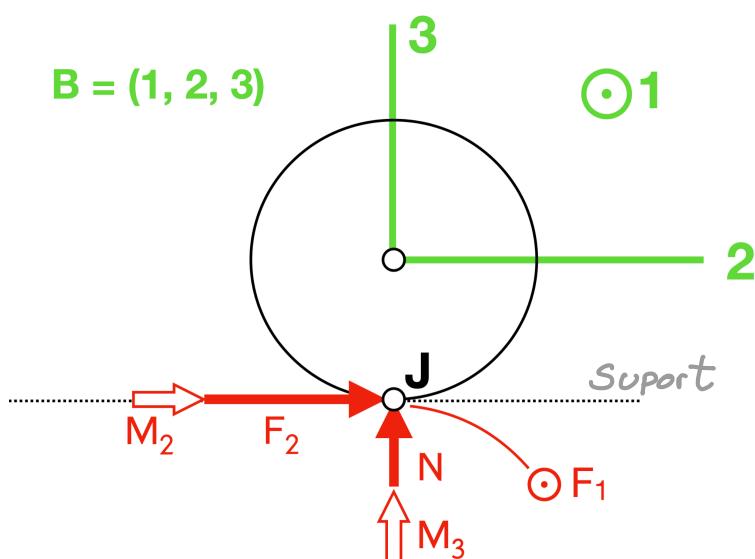
Caracteritzat a J, i en base B, aquest torsor és:

$$\left\{ \bar{F}_{\text{sup} \rightarrow \text{corro}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ N \end{Bmatrix}$$

$J_{\text{corró}}$ no llisca
respecte suport

$$\left\{ \bar{M}_{\text{sup} \rightarrow \text{corro}}(J) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

Corró només pot girar
en dir 1 resp suport



Formulació de la força de la molla Q

Ens diuen que per a $x=0$ i $\dot{\psi}_0=0$ el sistema es en equilibri, i la molla P està fent una força de tensió F_0
entre els seus extrems.



Suposarem que la config inicial de referència que determina la llargària s_0 és la donada per $x=0$.



Per trobar la força F'_0 que fa la molla Q en aquesta config. apliquem les condicions d'equilibri sobre sist = corró :

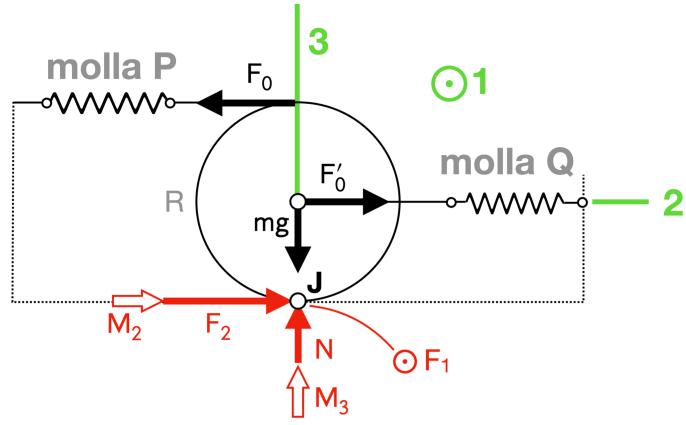
TMC (J)]₁, sist = corró :

$$\sum \bar{M}_{ext}(J)]_1 = \bar{0}$$

$$(\odot F_{02R}) + (\otimes F_{0'R}) = \bar{0}$$

$$F_{02R} = F_{0'R}$$

$$F'_0 = 2 F_0$$



Surt F'_0 atractiva \Rightarrow formulem la força de la molla Q amb el criteri d'atracció :

$$F_{mQ}^{at} = F'_0 + k \Delta g = 2 F_0 - k x$$

$$\Delta g = -x$$

(s'escurça en passar de la config de referència a la genèrica)

(*) Una molla inserida en fil inextensible (com la molla P) només pot fer força atractiva, no repulsiva, ja que el fil sols pot treballar en tensió

Pregunta freqüent

Acabem d'aplicar TMC a J, però J és un punt de contacte entre dos sòlids. No havíem quedat que es desaconsella aplicar el TMC en aquest tipus de punts?

Resposta

Cert, però només es desaconsella en situacions dinàmiques, on cal calcular el moment cinètic i potser el terme complementari del TMC, que són càlculs delicats en aquests punts. En situacions d'equilibri estàtic aquests termes no apareixen i podem aplicar el TMC a qualsevol punt sense preocupar-nos-en (serà $\sum \bar{M}_{ext}(\text{Punt}) = \bar{0}$ sobre el sistema).

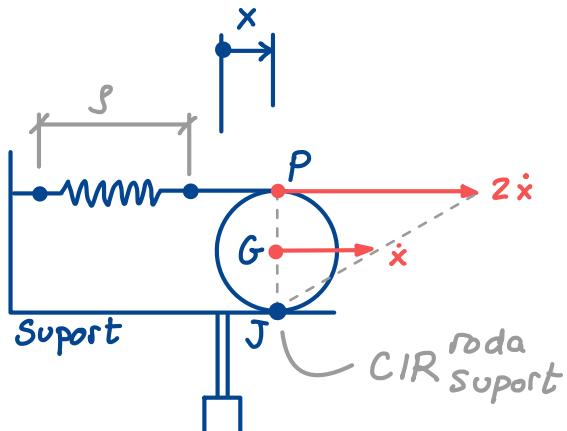
Formulació de la força de la molla P

A la ref. suport

$$\bar{v}_{\text{Sup}}(P) = (-2\dot{x})$$

Clarament,

$$\dot{p} = 2\dot{x}$$



Integrant

$$\Delta p = \int_0^t \dot{p} dt = \int_0^t 2\dot{x}(t) dt = 2 \left[x(t) \right]_0^t = 2 \left(x(t) - x(0) \right)$$

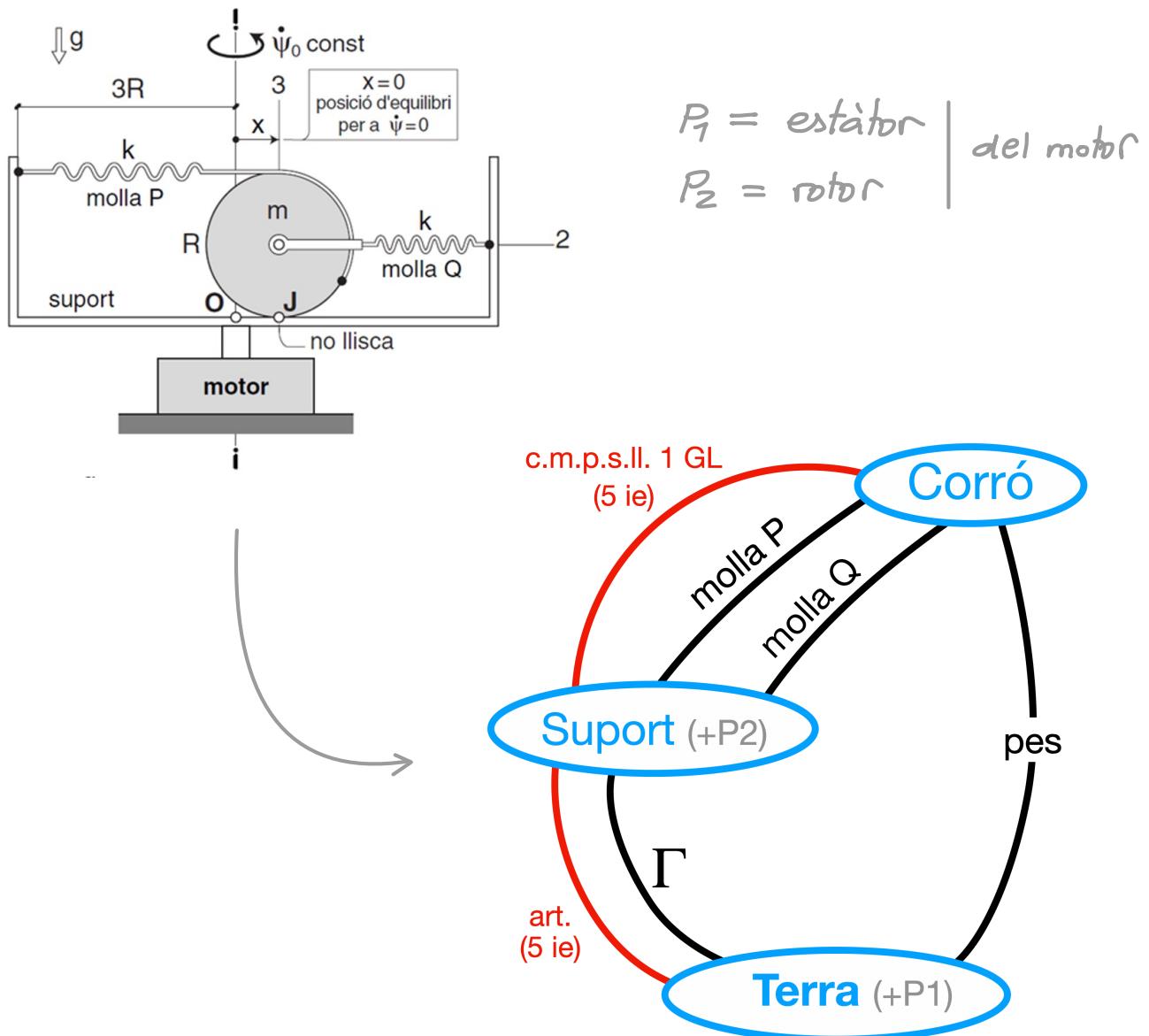
instant genèric del dibuix ↑
instant en que $x = 0$

En ser una molla inserida en fil inextensible només pot fer forces **atractives** \Rightarrow utilitzem el criteri d'atraçó:

Important

$$\boxed{\bar{F}_{mp}^{at}} = F_0 + K \Delta p = \boxed{F_0 + K 2x}$$

DGI i anàlisi del problema dinàmic global



Recompte d'incògn. i egs. del problema dinàmic global:

12 incògnites : 10 ie, Γ , \ddot{x}

12 equacions : 2 sòlids . $\frac{6 \text{ egs}}{\text{sòlid}}$



Problema **DETERMINAT**

Eq. mov. coord. x

x només afecta la cinemàtica del corró (no la del suport). Per tant, el sist. haurà d'incloure el corró obligadament. Les úniques opcions són

Sistema	Incòg.	#incòg.	Problema
Corró	5 ie, \ddot{x}	6	DET
Corró + sup	5 ie, \ddot{x}, Γ	7	INDET

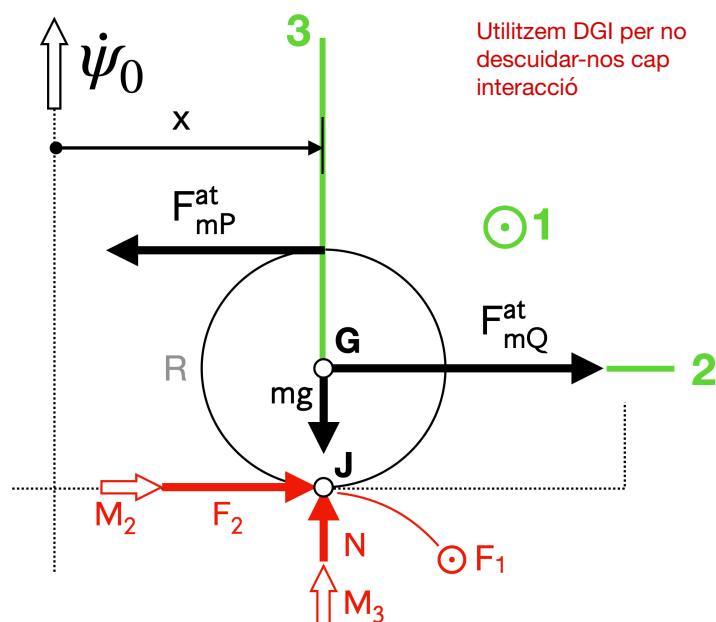
Per tant, explorem $\sum \bar{F}_{ext}$ i $\sum \bar{M}_{ext}$ sobre

sist = corró

per veure quines components del TMC i/o TQM caldran.

L'aplicació de TMC a J seria delicada, ja ho hem dit.

↓
Explorem TMC a G (i potser TQM)



$$\left\{ \sum \bar{M}_{ext}(G) \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} F_{mP}^{at} \cdot R + F_2 R \\ M_2 - F_1 R \\ M_3 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Cap component lliure d'ie } \text{ (I)}$$

$$\left\{ \sum \bar{F}_{ext} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} F_1 \\ F_{mQ}^{at} - F_{mP}^{at} + F_2 \\ N - mg \end{array} \right\} \leftarrow \text{Explorem } \sum \bar{F}_{ext} \text{ pensant en TQM } \text{ (II)}$$

Amb TMC no n'hi haurà prou!

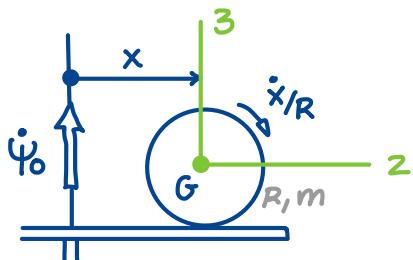
Veiem que les components $TMC(G)]_1$ i $TQM]_2$ sols contenen 1 ie (F_z) . També contindran \ddot{x} . Formaran un sistema d'eqs. lineal en 2 incògn. ($\ddot{x} : F_z$). Ergo:

Full rotat eq. mov. x ($i F_z$)	$TMC(G)]_1$ $TQM]_2$	sobre sist = corró (Aillarem \ddot{x} i F_z)
--	-------------------------	--

$TMC(G)]_1$, sist = corró

$$\sum \bar{M}_{ext}(G) = \dot{\bar{H}}_{RTG}(G)$$

$$\bar{H}_{RTG}(G) = \mathbb{I}(G) \cdot \bar{\Omega}_{RTG}^{\text{corró}}$$



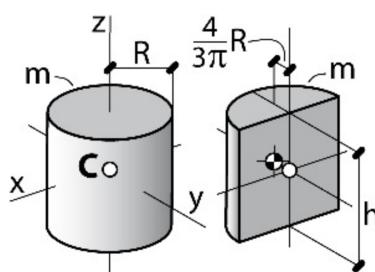
$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_T^{\text{corró}} &= \bar{\Omega}_{\text{sup}}^{\text{corró}} + \bar{\Omega}_T^{\text{sup}} = \\ &= \left(\otimes \frac{\dot{x}}{R} \right) + \left(\uparrow \dot{\psi}_0 \right) = \begin{Bmatrix} -\frac{\dot{x}}{R} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

$$\{\bar{H}_{RTG}(G)\}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I' & \\ & & I' \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}} \begin{Bmatrix} -\frac{\dot{x}}{R} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I \frac{\dot{x}}{R} \\ 0 \\ I' \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix}$$

Rotor simètric a G pel pla (2,3)

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

$$I' = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{(2L)^2}{12} \right)$$



II(C)

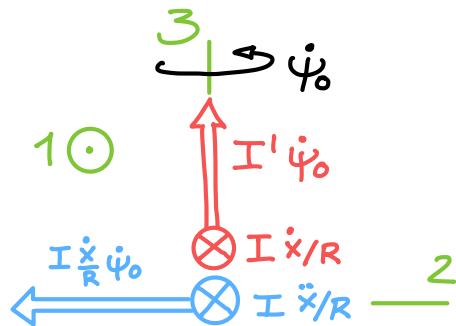
$$I_{xx} = m \left(\frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{12} h^2 \right)$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2} m R^2$$

rotor simètric a C

$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTG}(G) \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} -I \ddot{x}/R \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} + \left[\bar{\Omega}_T^B \right] \times \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} -I \dot{x}/R \\ 0 \\ I' \dot{\psi}_0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -I \ddot{x}/R \\ -I \dot{x}/R \dot{\psi}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (\text{III})$$

Quadra amb
deriv. analítica



$[I = \text{III}]_1 :$

$$F_{mp}^{at} \cdot R + F_2 R = -I \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$(F_0 + k_2 x) R + F_2 R = -\frac{m R^2}{z} \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$F_2 + F_0 + 2kx = -\frac{m \ddot{x}}{z}$$

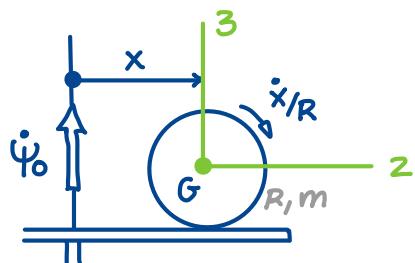
$$F_2 = -\frac{m \ddot{x}}{z} - F_0 - 2kx$$

(IV)

$TQM]_z$, sist = corò

$$\sum \bar{F}_{ext} = m \bar{a}_T(G)$$

$\bar{a}_T(G)$ via comp. mov. $\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = support \end{array} \right.$



$$\bar{a}_T(G) = \bar{a}_{REL}(G) + \bar{a}_{ar}(G) + 2 \bar{\Omega}_{AB}^{REL} \times \bar{v}_{REL}(G) =$$

$$= (\rightarrow \ddot{x}) + (\leftarrow \dot{\psi}_0^2 x) + z (\uparrow \dot{\psi}_0) \times (\rightarrow \dot{x}) =$$

$$= \left[\rightarrow (\ddot{x} - \dot{\psi}_0^2 x) \right] + (\otimes 2 \dot{\psi}_0 \dot{x}) = \left\{ \begin{matrix} -2 \dot{\psi}_0 \dot{x} \\ \ddot{x} - \dot{\psi}_0^2 x \\ 0 \end{matrix} \right\}_B \quad (\text{V})$$

$[(II) = m \cdot (v)]_z$:

$$F_{MQ}^{at} - F_{MP}^{at} + F_2 = m (\ddot{x} - \dot{\psi}_0^2 x)$$

$$2F_0 - kx - F_0 - 2kx + F_2 = m \ddot{x} - m \dot{\psi}_0^2 x$$

$$F_0 - 3kx + F_2 = m \ddot{x} - m \dot{\psi}_0^2 x$$

(VI)

Les eqs (IV) i (VI) formen el sistema lineal en \ddot{x} i F_2 que buscavem:

$$\left. \begin{array}{l} F_2 = -\frac{m}{2} \ddot{x} - F_0 - 2kx \quad (a) \\ F_0 - 3kx + F_2 = m \ddot{x} - m \dot{\psi}_0^2 x \quad (b) \end{array} \right\}$$

Finalment, substituint (a) en (b) tenim

$$\cancel{F_0} - 3kx - \frac{m\ddot{x}}{2} - \cancel{F_0} - 2kx = m \ddot{x} - m \dot{\psi}_0^2 x$$

i, per tant, l'equació del mov. per a la coordenada x es

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + (5k - m \dot{\psi}_0^2) x = 0$$

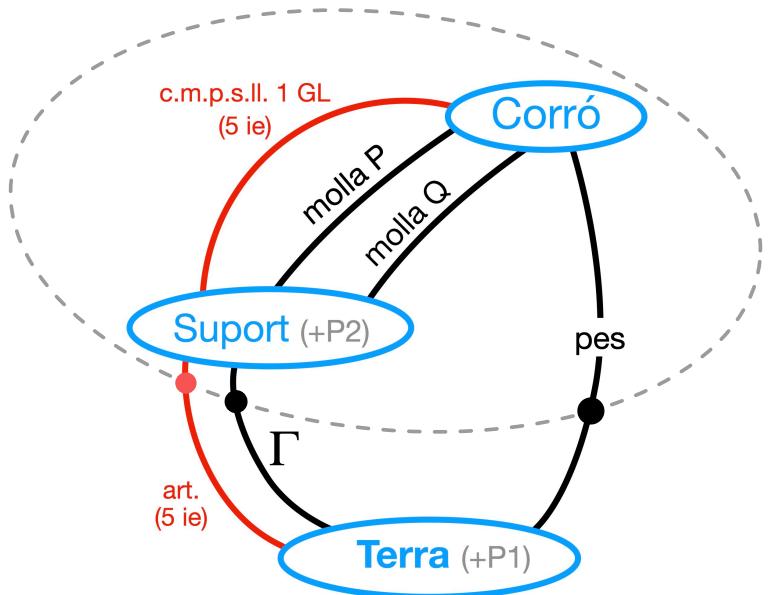
Forma implícita

O, en forma explícita:

$$\ddot{x} = \frac{2}{3m} (m \dot{\psi}_0^2 - 5k) x \quad (VII)$$

Forma explícita

Parell motor Γ per mantenir $\dot{\varphi}_0 = ct$



Ara \ddot{x} ja no és incògnita [la sabem de (VII)].

Per sist = corró + suport tindrem

$$5 \text{ ie} + \Gamma \rightarrow 6 \text{ incògn.}$$

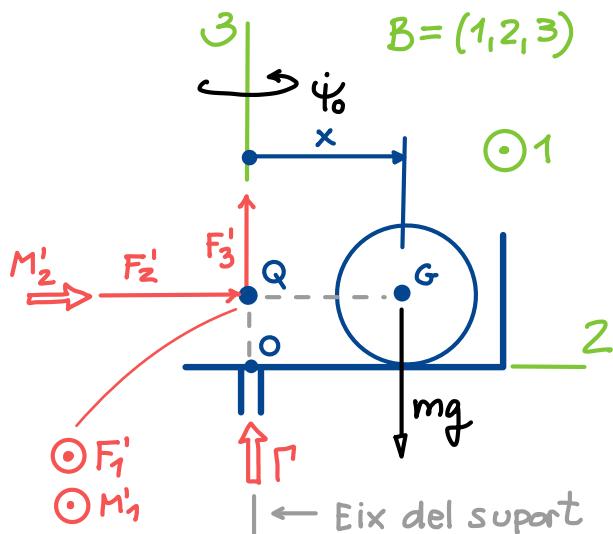
i el problema serà DETERMINAT

Mirem les forces i moments sobre sist = corró + suport :

Torsor enllaç T → sup a Q (*)

$$\left\{ \bar{F}_{T \rightarrow \text{sup}} \right\}_B = \left\{ F'_1 \atop F'_2 \atop F'_3 \right\}$$

$$\left\{ \bar{M}_{T \rightarrow \text{sup}}(Q) \right\}_B = \left\{ M'_1 \atop M'_2 \atop 0 \right\}$$



Si preuem moments resp. Q en dir. 3, només apareix Γ . Ergo:

Full ruta per Γ	$TMC(Q)]_3$ per sist = corró + suport
------------------------	---------------------------------------

(*) El podríem referir a qualsevol altre punt de l'eix vertical del motor. El referim a Q perquè aplicant $TMC(Q)$ sortirà una correcció baricèntrica més simple, en comparació amb la de $TMC(O)$, per exemple.

Apliquem el full de ruta:

$$\underbrace{\left[\sum \bar{M}_{ext}(Q) \right]_3}_{\Gamma} = \underbrace{\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)}_{?}_3$$

Calculem $\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$:

$\bar{H}_{RTQ}(Q) = \bar{H}_{RTG}(G) + \underbrace{\bar{Q}G \times m \bar{v}_{RTQ}(G)}_{\substack{\text{Q fix a T} \\ \parallel T}}$

"Correcció baricèntrica"

$\left\{ \bar{H}_{RTQ}(Q) \right\}_B = \begin{Bmatrix} -I \dot{x}/R \\ 0 \\ I' \dot{\psi}_o \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \dot{\psi}_o x^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I \dot{x}/R \\ 0 \\ I' \dot{\psi}_o + m \dot{\psi}_o x^2 \end{Bmatrix}$

d'abans

$$\left\{ \bar{Q}G \times m \bar{v}_T(G) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{Bmatrix} \times m \begin{Bmatrix} -\dot{\psi}_o x \\ \dot{x} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \dot{\psi}_o x^2 \end{Bmatrix}$$

Feta via comp. mov. $\rightarrow \bar{v}_T(Q)$
 $AB = T, REL = SUP$

$$\begin{aligned} \left\{ \dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q) \right\}_B &= \begin{Bmatrix} \vdots \\ 2m \dot{\psi}_o x \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_o \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -I \dot{x}/R \\ 0 \\ I' \dot{\psi}_o + m \dot{\psi}_o x^2 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} \vdots \\ 2m \dot{\psi}_o x \dot{x} \end{Bmatrix} \quad \bar{\Omega}_T^B \end{aligned}$$

Per tant

$$\Gamma = 2m \dot{\psi}_o x \dot{x}$$

Força normal a J

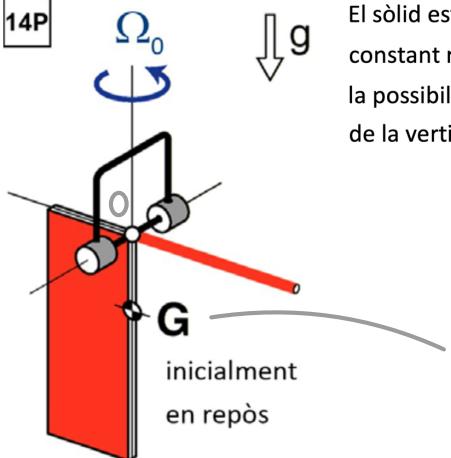
Del TQM $]_3$ per sist = corò, tenim:

$$N - mg = m \cdot 0$$



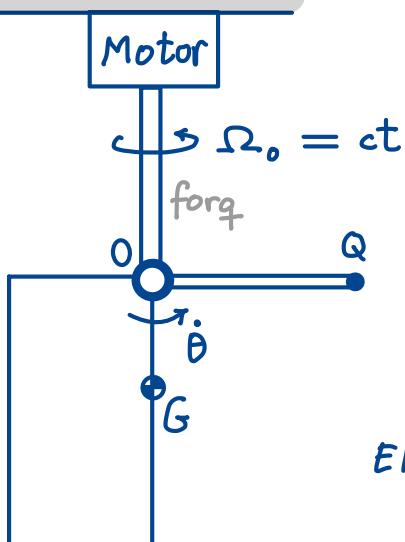
$$N = mg$$

14P



El sòlid està format per una barra i una placa rectangular, i gira amb Ω_0 constant respecte del terra (T) sota l'acció d'un motor. Investiga la possibilitat que el sòlid giri sense que el seu centre d'inèrcia G s'allunyi de la vertical que passa per O .

És el centre d'inèrcia del sòlid
(barra + placa)



Volem que la barra es mantingui horizontal

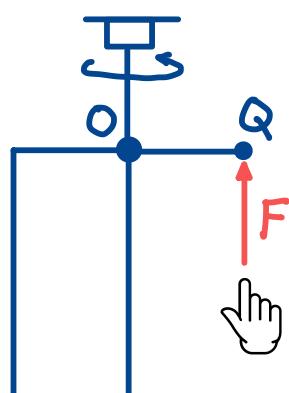
El motor garanteix $\Omega_0 = ct$, però

$$\bar{\Omega}_T^{\text{sòlid}} = \underbrace{(\ddot{\theta} \dot{\theta})}_{\bar{\Omega}_T^{\text{sòlid}}} + \underbrace{(\uparrow \Omega_0)}_{\bar{\Omega}_T^{\text{forg}}}$$

Per mantenir la barra horizontal caldrà que $\dot{\theta} = 0$. És a dir, que

$$\bar{\Omega}_T^{\text{sòlid}} = (\uparrow \Omega_0) = ct$$

Suposarem que $\bar{\Omega}_T^{\text{sòlid}}$ és aquesta i esbrinarem si cal aplicar una força ($\uparrow F$) a Q per garantir-la.



La velocitat angular $\bar{\Omega}_T^{\text{sòlid}} = (\uparrow \Omega_0)$ ha de ser compatible amb el TMC aplicat al sòlid. Formulem aquest teorema per trobar F .

Si ens surt Voldrà dir que

$$F = 0$$

El sòlid pot girar amb $(\uparrow \Omega_0)$, sense necessitat d'aplicar cap força ($\uparrow F$).

$$F > 0$$

Si no apliquem $\uparrow F$, el sòlid tendirà a girar així  respecte forç

$$F < 0$$

Si no apliquem $\uparrow F$, el sòlid tendirà a girar així  respecte forç

TMC (0), sist = sòlid

$$\underbrace{\sum \bar{M}_{\text{ext}}(0)}_{\text{o fix a } T} = \dot{H}_{RTO}(0) \quad \begin{array}{l} \text{o fix a } T \Rightarrow \text{terme complementari nul} \\ \text{fixa al sòlid} \end{array}$$

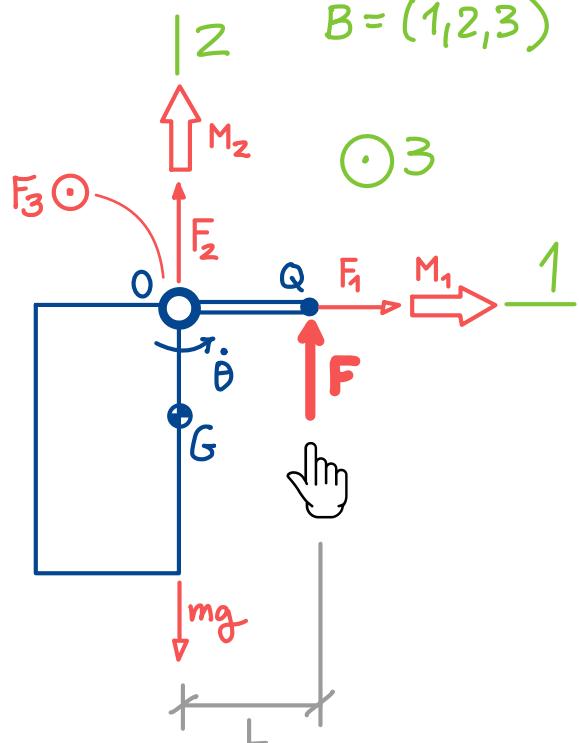
$$B = (1, 2, 3)$$

Per calcular-ho dibuixem forces i moments sobre el sòlid →

Torsor d'enllaç forç → sòlid a 0:

$$\left\{ \bar{F}_{\text{forç} \rightarrow \text{sòlid}} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{M}_{\text{forç} \rightarrow \text{sòlid}(0)} \right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\left\{ \sum \bar{M}_{ext}(o) \right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ FL \end{Bmatrix} \quad (\text{I})$$

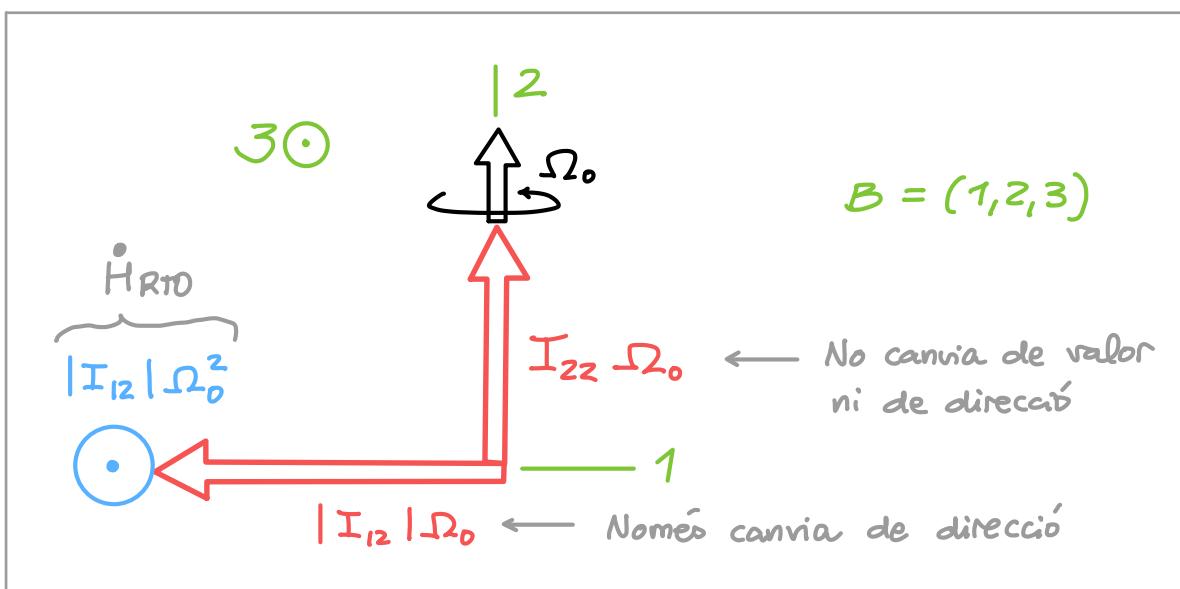
$$\left\{ \bar{H}_{RTO}(o) \right\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & -|I_{12}| & 0 \\ -|I_{12}| & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -|I_{12}|\Omega_0 \\ I_{22}\Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\bar{\Omega}_{solid}(o)}$

$\bar{\Omega}_{RTO}^{solid} = \bar{\Omega}_T^{solid}$

Fig plana \Rightarrow 3 és DPI

$I_{12} < 0$ ja que la massa és al 3er quadrant de o
(la massa de la barra no contribueix a I_{12})



$$\left\{ \dot{H}_{RTO}(o) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ |I_{12}|\Omega_0^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II})$$

(I) = (II)

$$M_1 = 0$$

$$M_2 = 0$$

$$FL = |I_{12}|\Omega_0^2 \Rightarrow$$

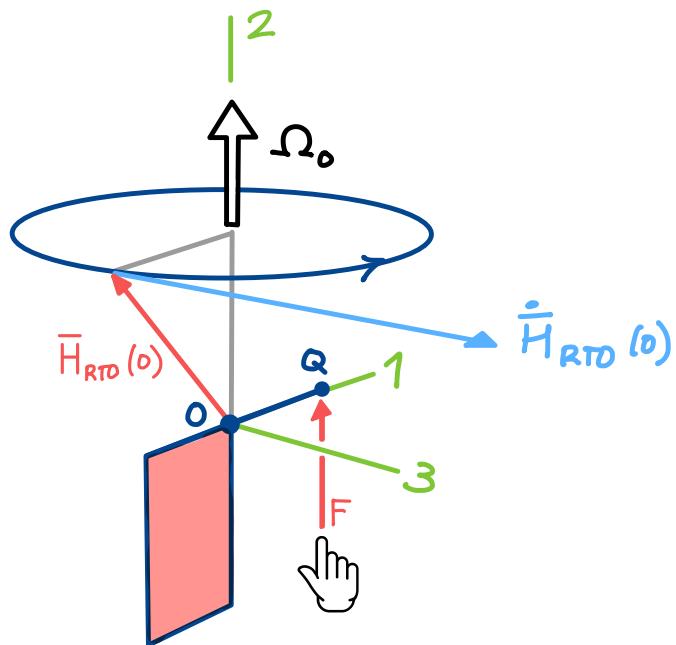
$$F = \frac{|I_{12}|\Omega_0^2}{L} \quad (\text{III})$$

$F > 0$

Conclusió

El sólid girarà en sentit horari si no apliquem F

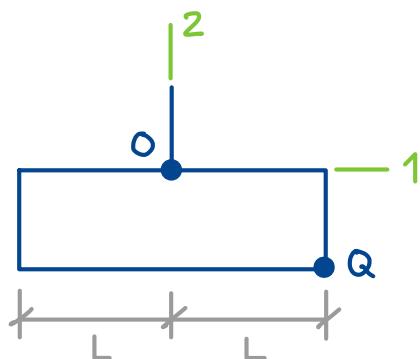
Per a mantenir $\dot{\theta} = 0$ caldrà aplicar $\uparrow F$ durant tot el moviment del sólid



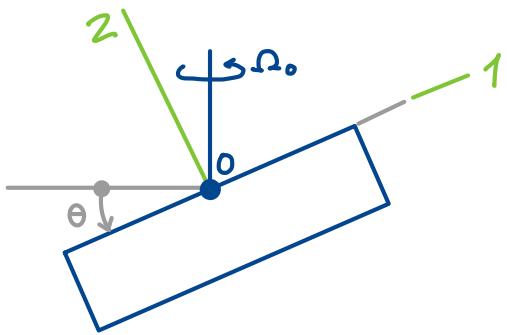
$(\uparrow F)$ crea el moment necessari, en dir. 3, que fa que la component 3 del $TMC(0)$ es compleixi.

Què passaria si la dir. 2 fos DPI per al punt O ?

Un exemple de sólid on la dir. 2 és DPI és



En aquest cas, $I_{12} = 0 \Rightarrow \bar{H}_{RTD}$ i $\dot{\bar{H}}_0$ serien paral·lels, i de l'Eq. (III) veiem que $F=0$. No caldrà aplicar cap força sobre Q per mantenir $\dot{\theta}=0$. Dit d'una altra manera, si definim l'angle θ així



la posició $\theta = 0$ seria d'equilibri.

Però, ... seria estable? Per esbrinar-ho cal analitzar l'equació del mov. per a θ , que de teoria sabem que és

$$I_{33} \ddot{\theta} + [mgl + (I_{zz} - I_{11})\Omega_0^2 \cos \theta] \sin \theta = 0 \quad (\text{IV})$$

Per trobar les configuracions d'equilibri substituim

$$\theta = \theta_{eq}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \ddot{\theta} = 0$$

a (IV):

$$[mgl + (I_{zz} - I_{11})\Omega_0^2 \cos \theta_{eq}] \sin \theta_{eq} = 0 \quad (\text{V})$$

Clarament $\theta_{eq} = 0$ és d'equilibri ja que satisfa (V).

Per veure si $\theta_{eq} = 0$ és d'equilibri estable obtenim l'EDO de l'error associada a (IV)

$$I_{33} \ddot{\varepsilon} + [mgl + (I_{zz} - I_{11})\Omega_0^2 \cos \varepsilon] \sin \varepsilon = 0$$

La linearitzem al voltant de $\varepsilon = 0$:

$$\underbrace{I_{33} \ddot{\varepsilon}}_A + \underbrace{[mgl + (I_{zz} - I_{11})\Omega_0^2]}_B \varepsilon = 0$$

Identifiquem K :

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{B}{A}\varepsilon \quad K$$

I veiem que

$$K > 0 \Leftrightarrow \frac{B}{A} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{mgl + (I_{22} - I_{11})\Omega_0^2}_{\text{sempre} > 0} > 0$$

Equilibri estable

Ergo:

Si $I_{22} > I_{11} \Rightarrow \theta_{eq} = 0^\circ$ és d'equilibri estable $\forall \Omega_0$

Si $I_{22} < I_{11} \Rightarrow \theta_{eq} = 0^\circ$ és d'equilibri estable per $\Omega_0 < \Omega_{c\text{rítica}}$, altrament inestable.

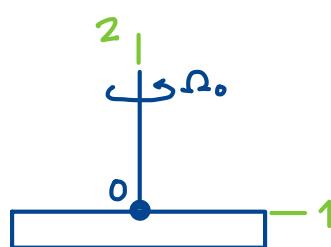
Càlcul de $\Omega_{c\text{rítica}}$

$$mgl + (I_{22} - I_{11})\Omega_0^2 > 0 \Rightarrow \Omega_0 < \sqrt{\frac{mgl}{I_{11} - I_{22}}} \quad \Omega_{c\text{rítica}}$$

En resum:

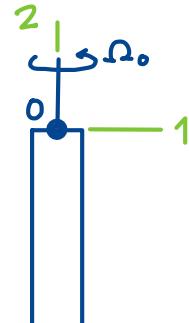
$I_{22} > I_{11}$	$I_{11} > I_{22}$
-------------------	-------------------

$\theta_{eq} = 0^\circ$ ESTABLE $\forall \Omega_0$

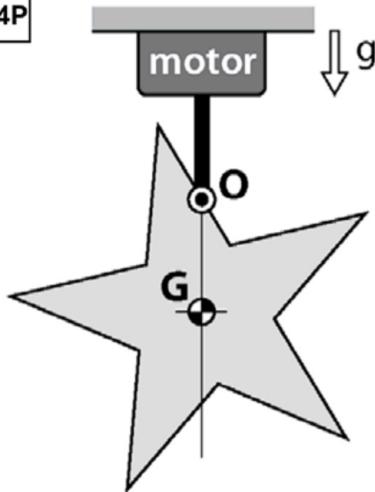


$I_{11} > I_{22}$

$\theta_{eq} = 0^\circ$ | EST si $\Omega_0 < \Omega_{c\text{rítica}}$
| INEST altrament



14P



El sòlid homogeni en forma d'estrella gira amb Ω_0 constant respecte del terra (T) sota l'acció d'un motor. Investiga la possibilitat que el sòlid giri que el seu centre d'inèrcia G s'allunyi de la vertical que passa per O .
(sense)

Podem aplicar la mateixa tècnica que en l'exercici anterior.



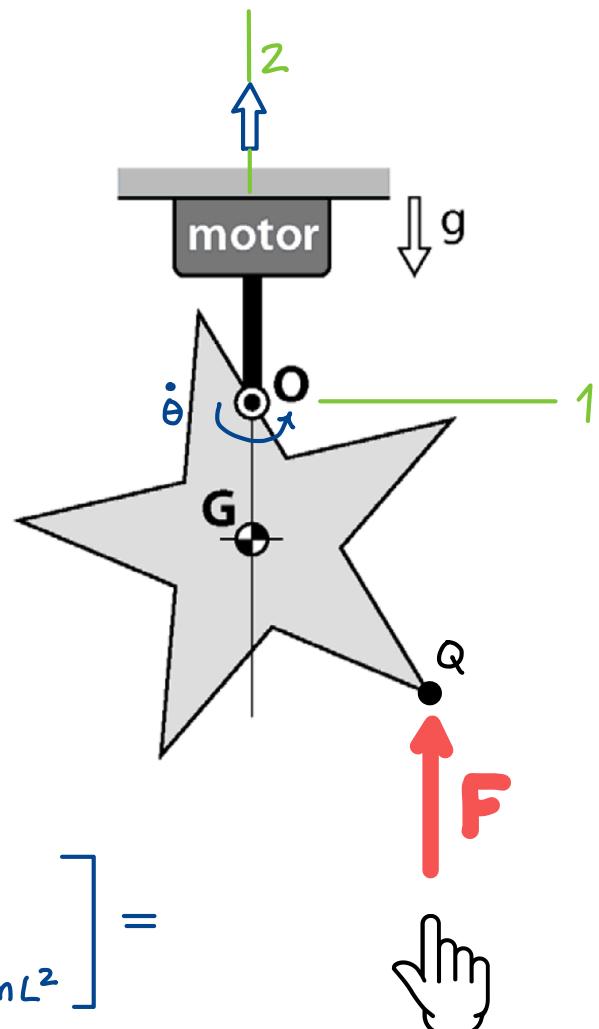
Quina ($\uparrow F$) cal aplicar a Q per evitar la rotació $\bar{\Omega}_{\text{forç}} = (\odot \dot{\theta})$?

En aquest cas

$$[\mathbb{I}(O)]_B = [\mathbb{I}(G)]_B + [\mathbb{I}^\oplus(O)]_B =$$

Steiner

$$= \left[\begin{array}{cc} I & \\ & I \\ \hline & zI \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} mL^2 & \\ & 0 \\ \hline & mL^2 \end{array} \right] =$$



Sòlid és rotor simètric a G . No sabem I però no cal.

$$= \left[\begin{array}{cc} I + mL^2 & \\ I & \\ \hline & 2I + mL^2 \end{array} \right]$$

I_{11}

I_{22}

Clarament $I_{22} < I_{11}$

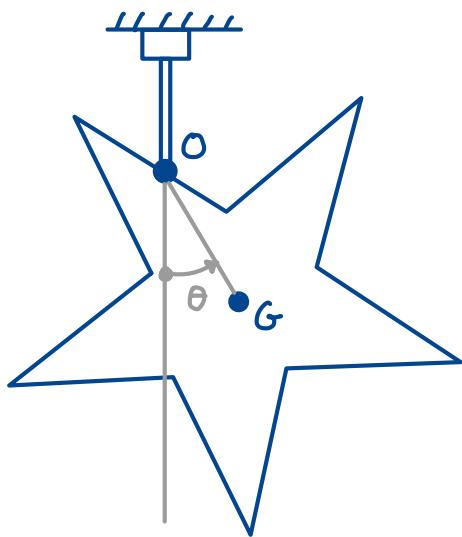
Com que la dir. z és DPI, per l'anàlisi que hem fet a l'exercici anterior (o a classe de teoria) el sólid no tindrà tendència inicial a inclinar-se

De l'anàlisi del tensor d'inèrzia hem vist que

$$I_{22} < I_{11}$$

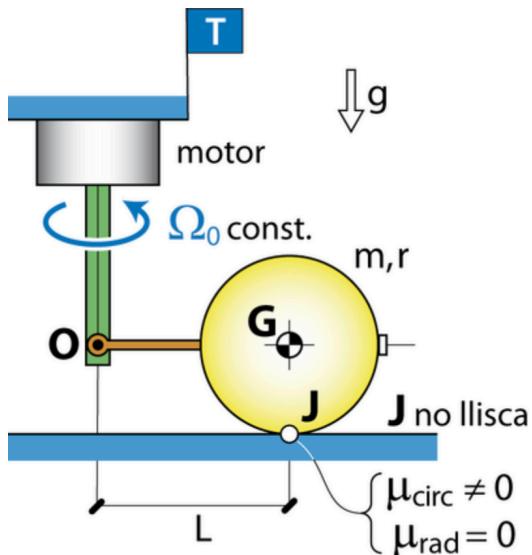
Per tant, $\theta_{eq} = 0^\circ$ serà posició d'equilibri estable per a valors de Ω_0 inferiors a una certa $\Omega_{c\text{rítica}}$.

Per $\Omega_0 > \Omega_{c\text{rítica}}$, la posició $\theta_{eq} = 0$ serà d'equilibri inestable.

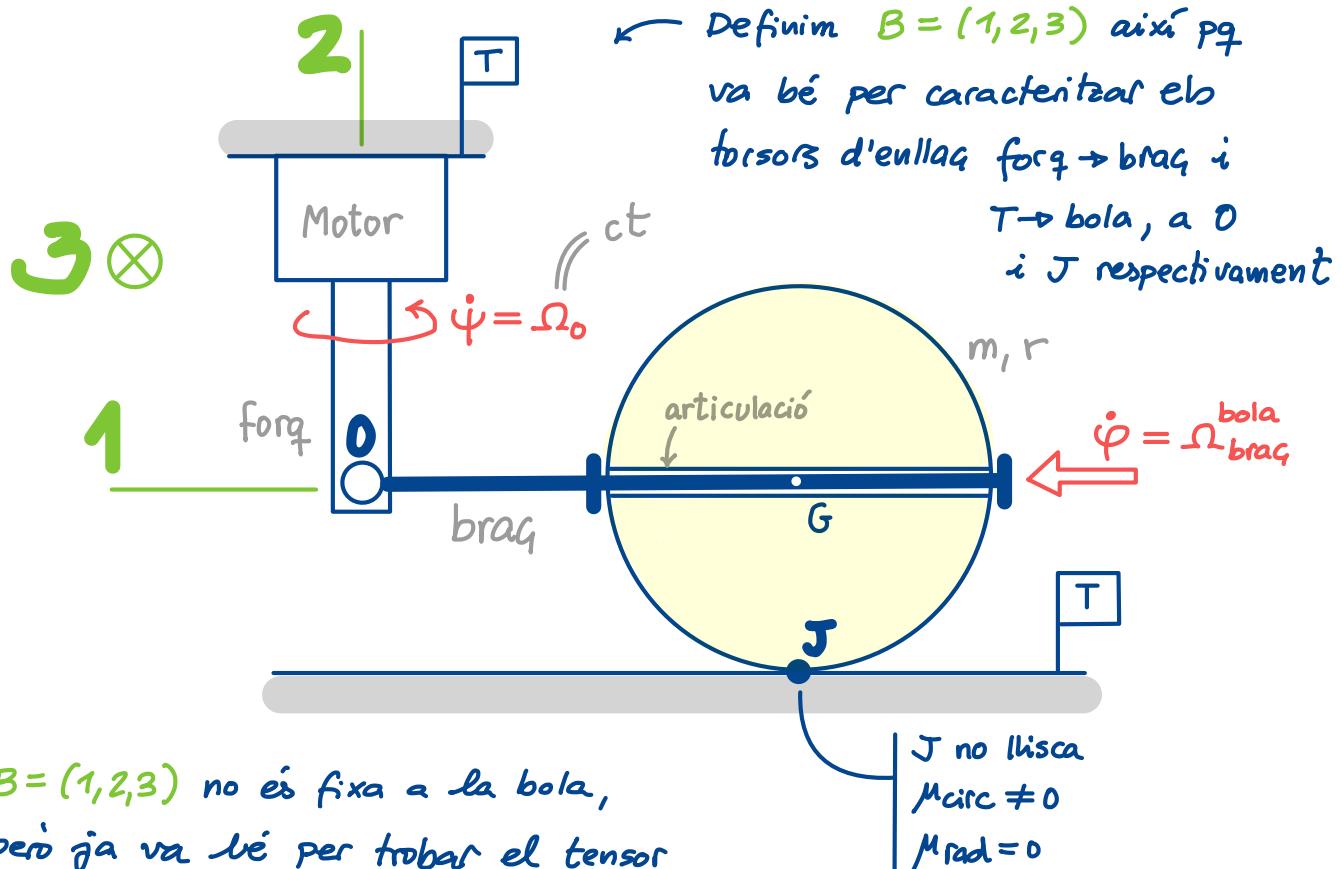


Bola giratòria (Q8, juny 2016)

Exemple resolt D7.4 de Wikimec



La bola, de massa m i radi r , manté un contacte puntual sense lliscament amb el terra i està articulada a un braç horitzontal. El braç està articulat a una forquilla que gira amb velocitat angular constant sota l'acció d'un motor. Braç i forquilla tenen massa negligible. El coeficient de fricció en direcció radial entre bola i terra és nul ($\mu_{\text{rad}} = 0$). Es tracta d'investigar si la rotació Ω_0 pot provocar la pèrdua de contacte entre bola i terra.



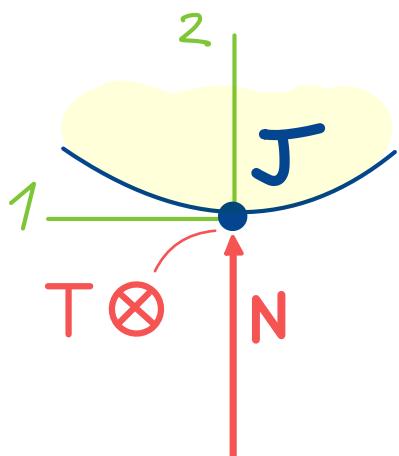
Caracterització de l'enllaç Terra \rightarrow Bola

A J hi tenim un contacte puntual sense lliscament (c.p.s.ll.)

En aquests contactes típicament hi ha la força normal N i dues components tangencials T_1 i T_2 , però en aquest cas ens diuen

$$\begin{array}{l} \mu_{\text{circ}} \neq 0 \\ \mu_{\text{rad}} = 0 \end{array} \Rightarrow \text{Sols hi ha rugositat en dir. circumferencial, no radial}$$

Per tant, sols hi haurà component tangencial en la dir. circumferencial^(*), i el tensor d'enllaç $T \rightarrow$ Bola a J serà:

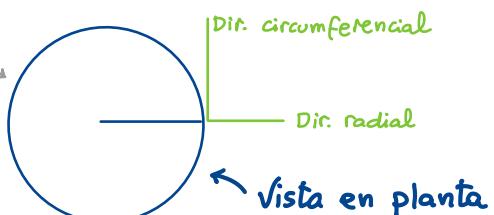


$$\left\{ \bar{F}_{T \rightarrow \text{Bola}} \right\}_B = \begin{cases} 0 \\ N \\ T \end{cases} \quad \begin{matrix} \leftarrow N > 0 \\ \leftarrow \text{Component en dir. circumferencial} \end{matrix}$$

$$\left\{ \bar{M}_{T \rightarrow \text{Bola}}(J) \right\}_B = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Per veure si el contacte a J es pot perdre, cal investigar si N es pot fer zero per algun valor Ω_0 .

(*) J_{geom} descriu una circumferència sobre el terra.



Anàlisi de GL i incògnites associades

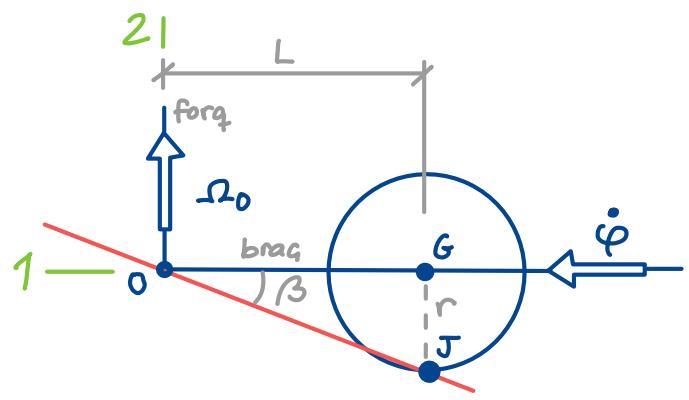
El sistema té 1 GL, que podem associar a $\dot{\psi} = \Omega_0$ (si aturem $\dot{\psi}$, tot queda aturat pq a J no hi ha lliscament)

És un GL forgat: el motor aplica el parell Γ que calqui per garantir que $\dot{\psi} = \Omega_0 = \text{ct}$. Com que $\ddot{\psi} = 0 \forall t$, la incògnita associada al GL no és $\ddot{\psi}$, sinó Γ .

Estudi cinemàtic

La rotació $\dot{\psi}$ de la bola resp. braç es pot posar efd Ω_0 :

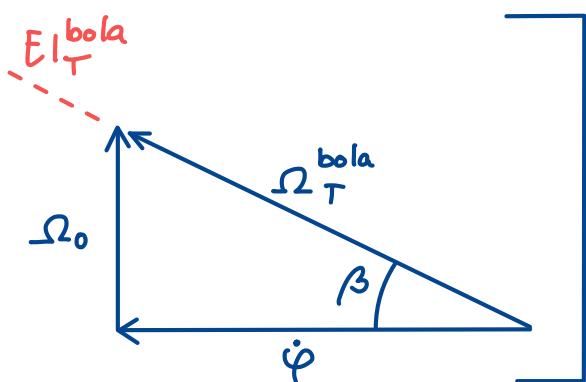
$$EI_T^{\text{bola}} = \text{recta } OJ$$



$$\bar{\Omega}_T^{\text{bola}} = \bar{\Omega}_{\text{braç}}^{\text{bola}} + \underbrace{\bar{\Omega}_{\text{forg}}^{\text{bola}}}_{\bar{\Omega}_0} + \bar{\Omega}_T^{\text{forq}}$$

$$= (\leftarrow \dot{\psi}) + (\uparrow \Omega_0)$$

La suma ha de tenir la dir. de EI_T^{bola}



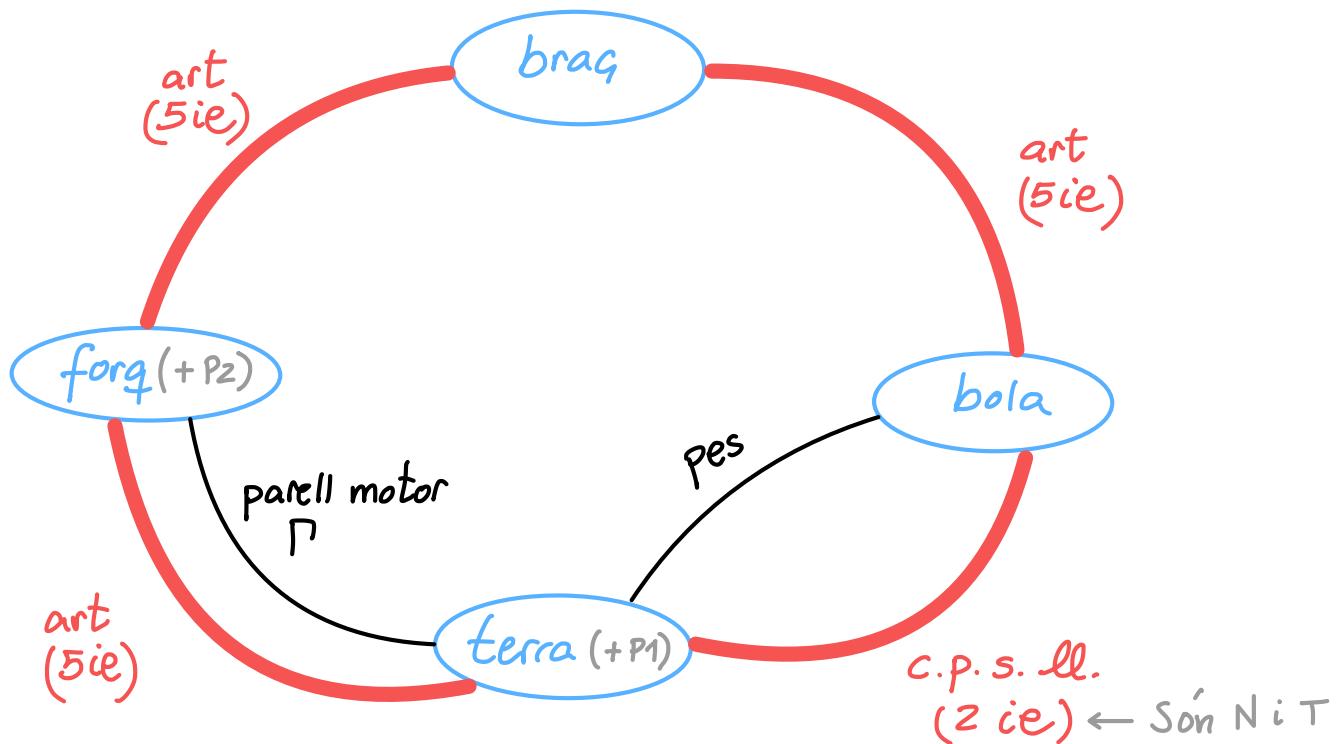
$$\dot{\psi} = \frac{\Omega_0}{\tan \beta} = \frac{\Omega_0}{r/L} = \frac{L}{r} \Omega_0$$

D'aquí veiem que $\dot{\psi}$ depèn linealment de Ω_0 (és indirectament forçada pel motor)

Per tant:

$$\bar{\Omega}_T^{\text{bola}} = \left(\leftarrow \frac{L}{r} \Omega_0 \right) + \left(\uparrow \Omega_0 \right) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{r} \Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{array} \right\}_B \quad (\text{I})$$

DGI i anàlisi global del problema dinàmic



18 incògnites : $\underbrace{17 \text{ ie}}_{\text{d'enllaç}}, \underbrace{\Gamma}_{\text{incògn. associada al GL}}$

18 equacions: 3 sòlids. $\frac{6 \text{ egs}}{\text{sòlid}}$

Problema
DETERMINAT

Full de ruta per calcular N (sense eliminar SAEs)

veure via alternativa més avall ↓

Com que N és una incògn. del c.p.s.ll. :

- ▷ El sistema ha d'incloure la bola
- ▷ L'arc del c.p.s.ll. ha de ser interacció externa (tallem per aquest arc)

Les úniques opcions són (encerclant al DGI) :

El braç ho és !

Sistema	Incògn.	#incògn.	Problema
Bola	7 ie	7	INDET
Bola + braç	7 ie	7	INDET
Bola + braç + forq	7 ie, 7	8	INDET
Bola + forq	17 ie, 7	18	INDET

Tots els problemes associats surten indeterminats. Què podem fer? → Explorar l'aplicació dels teoremes vectorials als de menys variables. Si ho fem, veurem que:

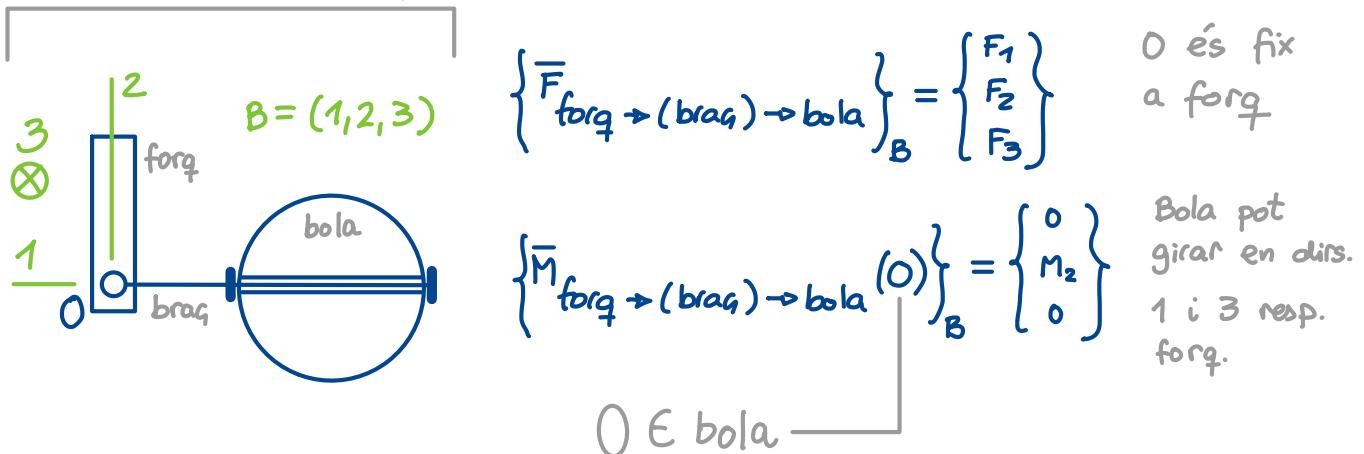
Full ruta per N	Sistema = Bola + braç TMC(0)] ₃	Exercici pel lector veure-ho!
Full ruta per T	Sistema = Bola TMC(G)] ₁	No demanen T però la podem buscar per practicar

Anem a veure un full de ruta alternatiu via eliminar el SAE.

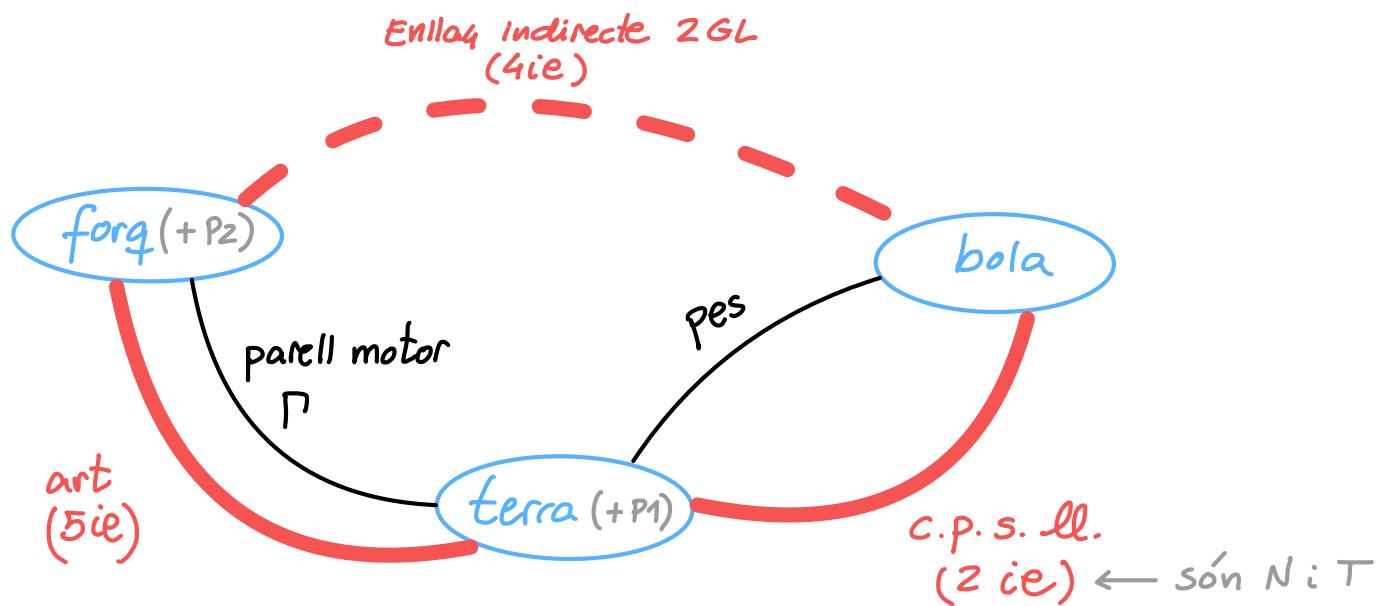
Full de ruta per N eliminant SAEs del DGI

E) braç és un SAE (té massa nulla i només està sotmès a forces i mom. d'eullaq). Podem alleugerir el DGI substituint-lo pel torsor indirecte forq → (braç) → bola:

Bola té 2 GL resp forq ⇒ El torsor tindria 4 ie:



El DGI alleugerit queda així:



Recompte global

12 incògnites: 11 ie, Γ

12 equacions: 2 solids. $\frac{6 \text{ eqs}}{\text{solid}}$

Problema global
DETERMINAT

Ara hi ha menys opcions per a la tria d'un subsistema.
Només "Bola" o "Bola + forq", però no "Forq" ja que l'arc de N ha de ser interacció externa:

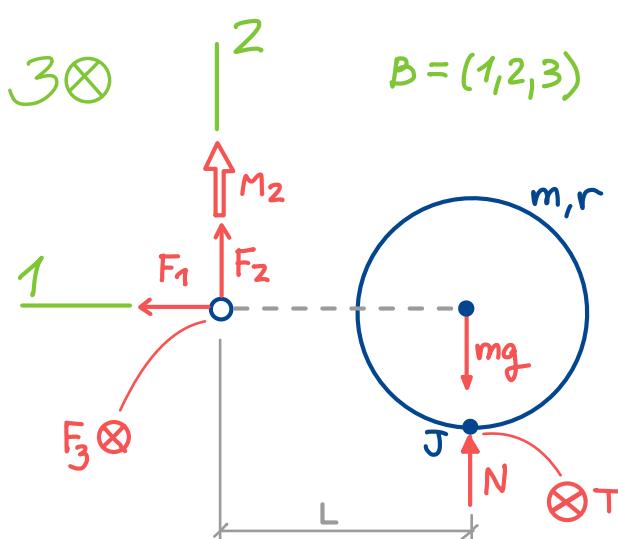
Sistema	Incògn.	#incògn.	Problema
Bola	6 ie	6	DET
Bola + forq	7 ie, Γ	8	INDET

L'eliminació del SAE ens il·lumina el camí!



Explorarem $SIST = Bola$:

Dibuixen les interaccions externes sobre sist = bola:
 (encerclen sist = bola mentalment al DGI per no descuidar-nos-en cap!)



Veiem que

- N crea moment en dir. 3 , i cap altra ie en crea!
 - T crea moment en dir. 1 i cap altra ie en crea!
- (no demanen T però la podem buscar per practicar)

Ergo:

Full nota per N	$TMC(0)]_3$ sobre sist = bola
Full nota per T	$TMC(0)]_1$ sobre sist = bola

No demanen T
 però la podem
 buscar x practicar

N via $TMC(0)]_3$ sobre sist = bola

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) - \overline{OG} \times m \times \bar{a}_T(0) = \dot{\bar{H}}_{RTO}(0)$$

$$\left\{ \sum \bar{M}_{ext}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} -Tr \\ M_2 + TL \\ mgL - NL \end{Bmatrix} \quad (\text{II})$$

Calcularem $\dot{\bar{H}}_{RTO}(0)$ de dues maneres per practicar:

$\dot{\bar{H}}_{RTO}(0)$ via tensor a G , Steiner, i derivada analítica

$$\bar{H}_{RTO}(0) = \underbrace{\mathbb{II}(0)}_{\substack{O \in \text{bola}}} \underbrace{\bar{\Omega}_T^{\text{bola}}}_{\substack{\bar{\Omega}_T^{\text{bola}} \text{ de l'Eg. (I)}}}$$

$$\left\{ \bar{H}_{RTO}(0) \right\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{L}{r} \Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{11} \frac{L}{r} \Omega_0 \\ I_{22} \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbb{II}(0)]_B = [\mathbb{II}(G)]_B + [\mathbb{II}^\oplus(0)]_B =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Rotor esfèric a } G \\ I = \frac{2}{5}mr^2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & mL^2 & \\ & mL^2 & \end{bmatrix}}_{\substack{1 \\ O \\ z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix}}_{\substack{I_{11} = \frac{2}{5}mr^2 \\ I_{22} = I_{33} = \frac{2}{5}mr^2 + mL^2}}$$



$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{11} \frac{L}{r} \Omega_0 \\ I_{22} \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{11} \frac{L}{r} \Omega_0^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5}mrL\Omega_0^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III})$$

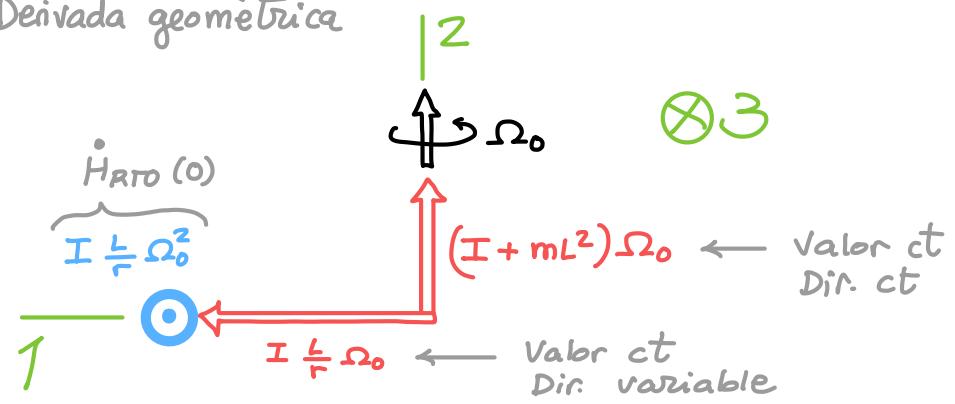
$\dot{\bar{H}}_{RTD}(0)$ na descomp. baricèntrica i derivada geomèt.

$$\bar{H}_{RTD}(0) = \underbrace{\bar{H}_{RTG}(G)}_{\parallel \quad \text{II}(G) \cdot \bar{\Omega}_T^{\text{bola}}} + \overline{OG} \times m \bar{\omega}_{RTD}(G) \quad \text{L}_T(0 \text{ fix a } T)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{H}_{RTD}(0)\}_B &= \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{\text{Rotor esfèric a } G} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{L}{r} \Omega_0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\Omega}_T^{\text{bola}} \text{ de l'Eg. (I)}} + \begin{bmatrix} -L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \Omega_0 L \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{IL}{r} \Omega_0 \\ I \Omega_0 + m \Omega_0 L^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{IL}{r} \Omega_0 \\ (I + m L^2) \Omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(*)

Derivada geomètrica



$$\dot{\bar{H}}_{RTD}(0) = \left(\odot \frac{2}{5} mr^2 \frac{L}{r} \Omega_0^2 \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} mrL \Omega_0^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III})$$

(*) B no és fixa a bola, però $\text{II}(G)$ és constant i igual a $\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}$ perquè la bola és rotor esfèric per a G

$$[\mathbf{II} = \mathbf{III}]_3 :$$

$$\cancel{mgL - N} = -\frac{2}{5}mrL\cancel{\Omega_0^2}$$

$$N = mg + \frac{2}{5}mr\Omega_0^2$$



Conclusió: N sempre és positiva i la bola mai perdrà contacte a J independentment del valor Ω_0

T via $TMC(0)$], sobre sist = bola

$$[\mathbf{II} = \mathbf{III}]_1 :$$

$$-Tr = 0 \Rightarrow T=0$$

Arribats aquí ens preguntem: pot lliscar a J ?

Resposta: per a que llisi a J cal $T > \cancel{N}$ però aquesta condició mai es compleix ja que $T=0$ sempre, i $\cancel{N} > 0$ (els coefs de freqüència tenen valor positiu sempre).



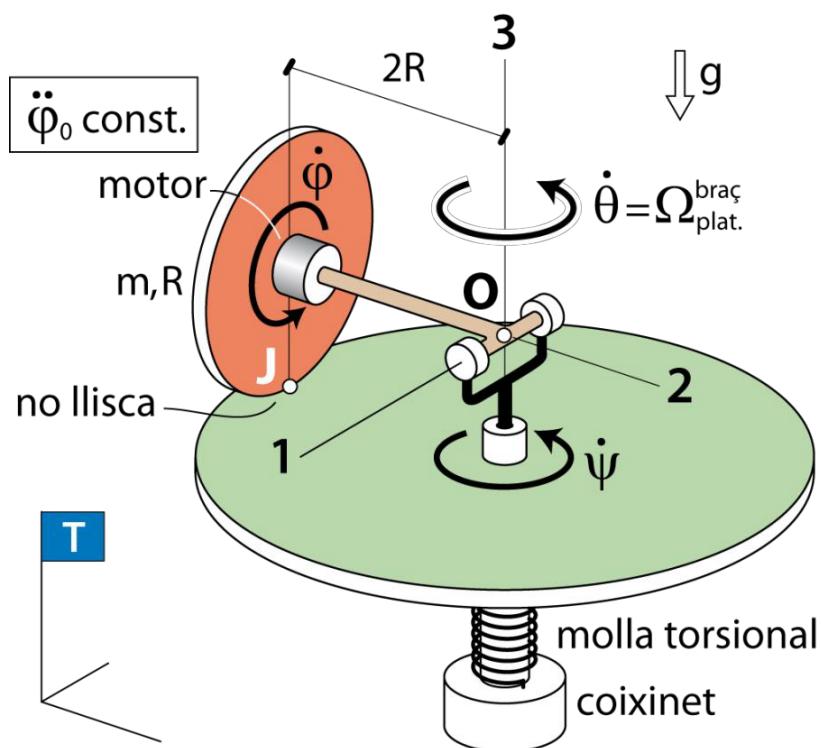
La bola mai lliscarà a J

Disc rodant sobre plataforma

Versió adaptada del problema global de l'examen final de juny 2024

El disc, de massa m i radi R , roda sense lliscar sobre una plataforma, impulsat per un motor que actua entre braç i disc i controla la rotació pròpia $\dot{\phi}(t)$ de manera que el valor de l'acceleració angular associada és constant ($\ddot{\phi} = \ddot{\phi}_0 = \text{const.}$) El braç està articulat a una forquilla que pot girar lliurement **respecte de la plataforma** amb velocitat angular $\dot{\theta}$. La plataforma gira amb velocitat angular $\dot{\psi}$ respecte del terra. Entre ella i el terra hi ha una molla torsional de constant k que, per a $\psi = 0$, està distesa.

Es negligeixen les fricions associades als enllaços i la massa de tots els elements (tret del disc).



1. Quants graus de llibertat té el sistema? Justifica la resposta.
2. Determina la velocitat angular del braç $\dot{\theta}$ respecte de la plataforma en funció de $\dot{\psi}$ i $\dot{\phi}$.
3. Determina la velocitat angular del disc respecte del terra en funció de $\dot{\psi}$ i $\dot{\phi}$.
4. Fes el diagrama general d'interaccions (DGI) del sistema. En les interaccions d'enllaç, indica quantes incògnites introduceixen.
5. De quantes equacions independents podem disposar per resoldre el problema dinàmic? Es tracta d'un problema determinat o indeterminat?

6. Caracteritza tots els enllaços del sistema.
7. Un full de ruta adequat per obtenir l'equació del moviment per a la coordenada ψ consisteix en l'aplicació dels teoremes vectorials al sistema "Disc + Plataforma + Braç + Forquilla". Justifica per què.
8. Determina aquesta equació del moviment.
9. Determina la posició d'equilibri de la coordenada ψ . És estable? Com és l'evolució temporal de ψ ?
10. Proposa un full de ruta per calcular el parell motor Γ .
11. Calcula Γ .

Observació:

En la versió no adaptada d'aquest problema (disponible a Atenea) s'utilitza el concepte de sòlid auxiliar d'enllaç (SAE). En aquesta versió adaptada s'evita l'ús d'aquest concepte perquè al curs 2024-2025 Q2 no es va poder explicar (degut a la gran apagada).

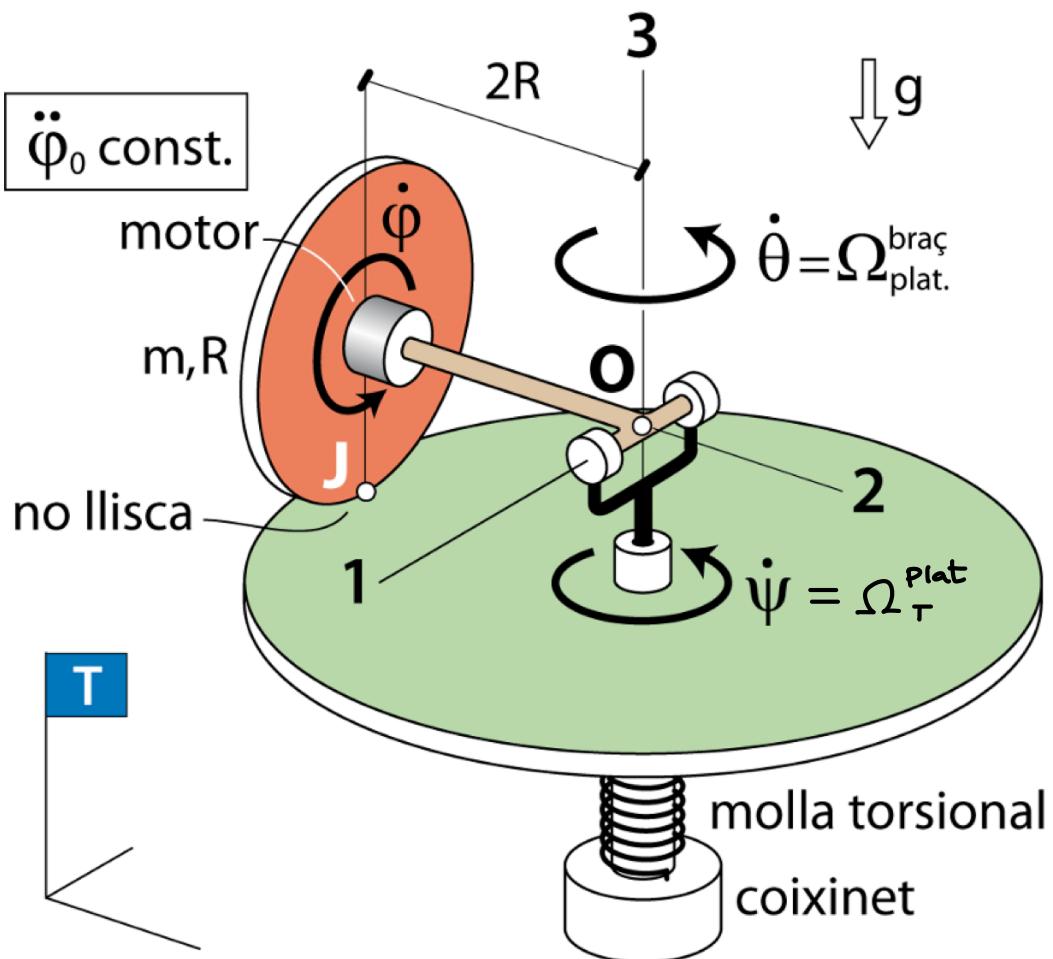
(1) Quants GL té el sistema?

Si aturem $\dot{\varphi}$, el disc encara pot rodar. Si, a més, aturem $\dot{\theta}$, ja tot queda en repòs.

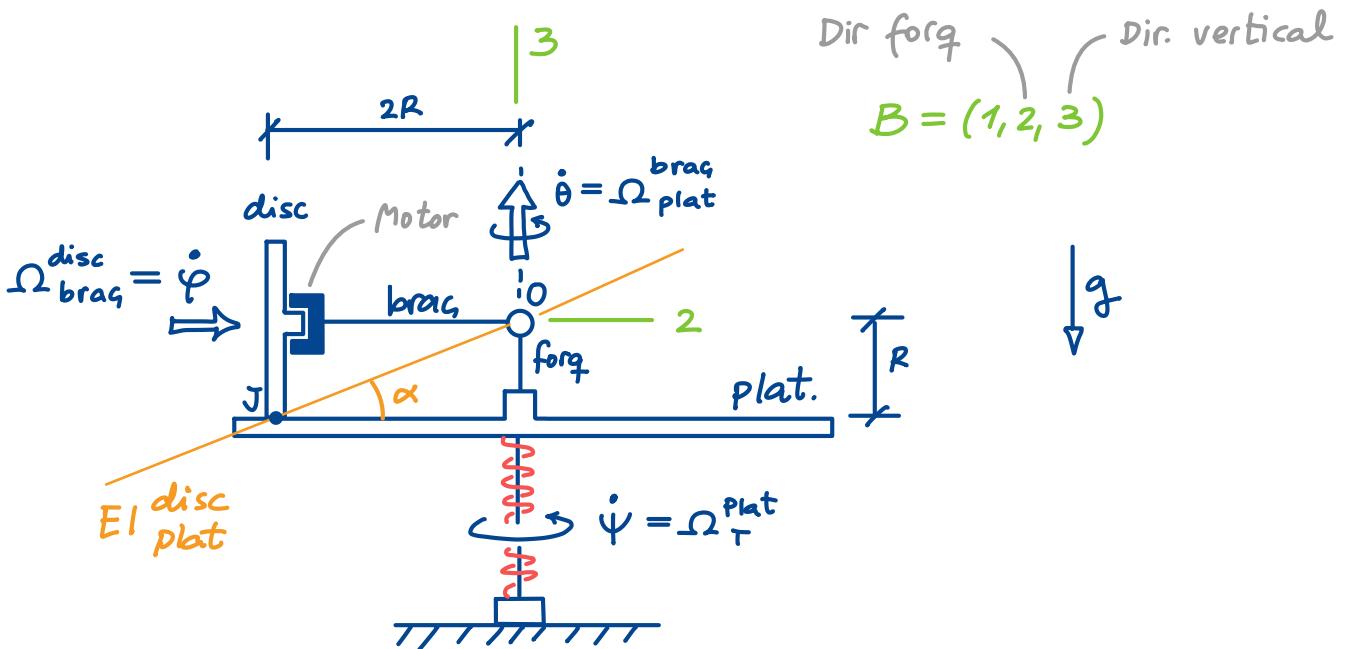
Per tant, el sist. té 2 GL, que es poden descriure així:

- Rotació $\dot{\varphi}$ de la plataf. respecte el terra (GL lliure)
- Rotació $\dot{\theta}$ del disc respecte el braç (GL forçat)

També podríem descriure els 2 GL mitjançant les rotacions $\dot{\varphi}$ i $\dot{\theta}$, que també són independents l'una de l'altra, però no mitjançant $\dot{\varphi}$ i $\dot{\theta}$, ja que aquestes són dependents entre elles: si aturem $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ queda aturada! Tot seguit veurem que $\dot{\theta}$ depèn linealment de $\dot{\varphi}$.

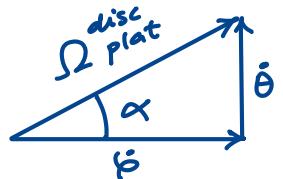


(2) $\dot{\theta}$ en funció de $\dot{\psi}$ i $\dot{\varphi}$



$$\overline{\Omega}_{\text{plat}}^{\text{disc}} = \overline{\Omega}_{\text{brag}}^{\text{disc}} + \overline{\Omega}_{\text{plat}}^{\text{brag}} = (\Rightarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \dot{\theta})$$

Ha de tenir la dir. de l' $EI_{\text{disc plat}}$



$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}} = \frac{R}{2R} \rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{\dot{\varphi}}{2}}$$

(I)

Clarament, $\dot{\theta}$ ve determinada per $\dot{\varphi}$. Ergo $\dot{\theta}$ és un GL indirectament forçat pel motor (indirectament activat).

(3) $\overline{\Omega}_T^{\text{disc}}$ en funció de $\dot{\psi}$ i $\dot{\varphi}$

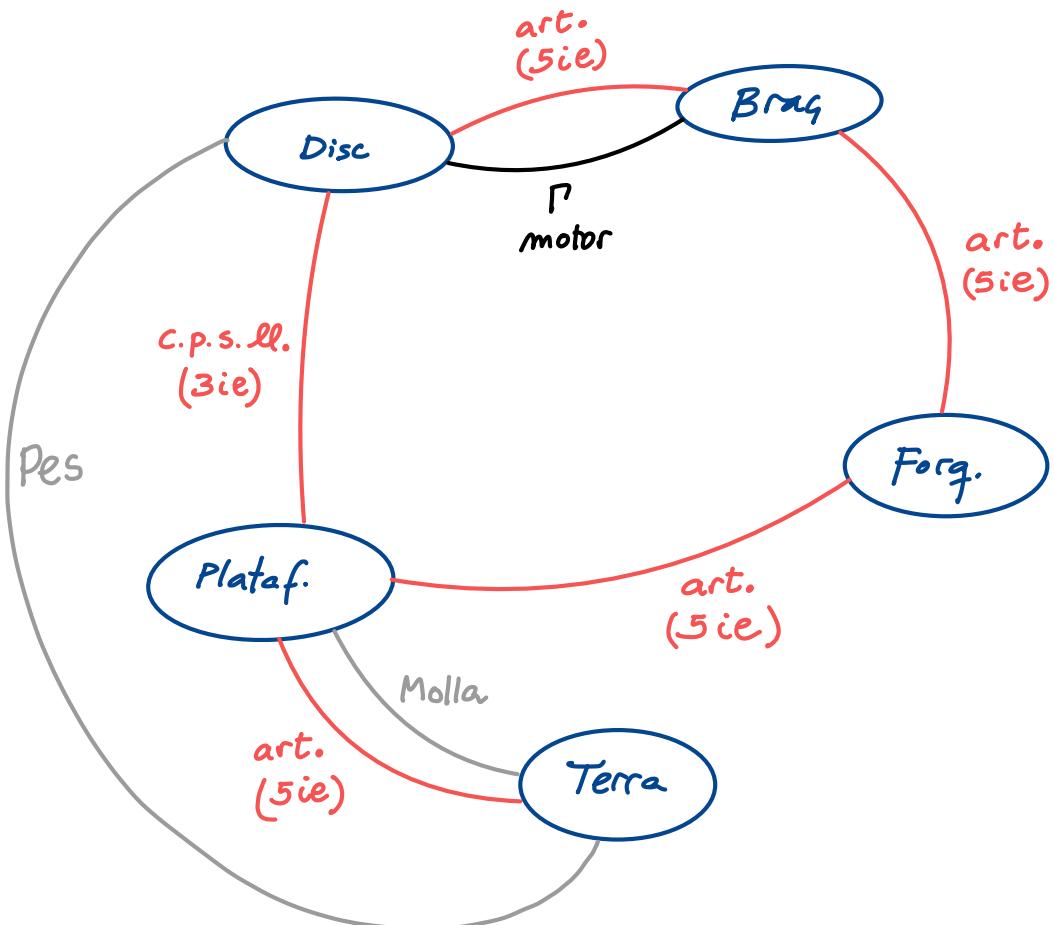
La necessitarem per al TMC. Calculem-la :

$$\overline{\Omega}_T^{\text{disc}} = \overline{\Omega}_{\text{brag}}^{\text{disc}} + \overline{\Omega}_{\text{plat}}^{\text{brag}} + \overline{\Omega}_T^{\text{plat}} =$$

$$= (\Rightarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \frac{\dot{\varphi}}{2}) + (\uparrow \dot{\psi}) = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} \\ \frac{\dot{\varphi}}{2} + \dot{\psi} \end{array} \right\}$$

(II)

(4) Diagrama general d'interaccions



(5) #eqs independents per resoldre el probl. dinàmic

Si apliquem els teor. vectorials a tots els sòlids per separat tindrem :

Incògnites :	
23 ie	
$\ddot{\psi}$ ($\dot{\psi}$ és lliure)	25 incògn.
Γ ($\dot{\varphi}$ és forçat)	
Equacions :	
4 sòlids . $\frac{6 \text{ eqs}}{\text{sòlid}}$	24 eqs. (*)

Problema indeterminat

Podrem trobar $\ddot{\psi}$ (l'eq. mov.) segur, però no és segur que poguem determinar totes les ie.

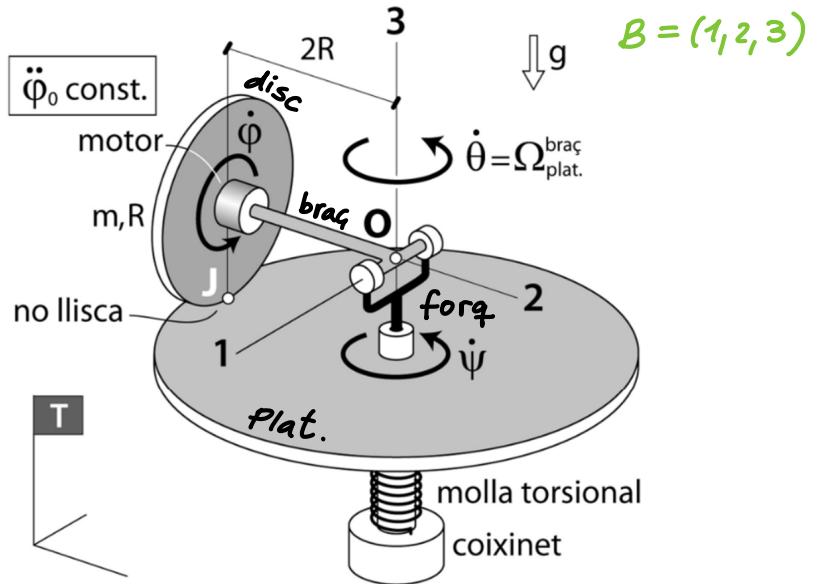
(*) El # màxim d'eqs. independents de les que podrem disposar en qualsevol problema dinàmic es sempre $\# \text{sòlids} \cdot \frac{6 \text{ eqs}}{\text{sòlid}}$

(6) Caracterització de tots els torsors d'eullaq

Tots els torsors es poden caracteritzar de manera immediata.

Tots donats en la $B = (1, 2, 3)$

Tots els torsors són de caracterització immediata a 0, tret del plat \rightarrow disc que ho és a J.



$$B = (1, 2, 3)$$

Terra \rightarrow plat, a 0:

$$\left\{ \bar{F}_{Terra \rightarrow Plat} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{M}_{Terra \rightarrow Plat}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Plat \rightarrow disc, a J:

$$\left\{ \bar{F}_{Plat \rightarrow Disc} \right\}_B = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ N \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{M}_{Plat \rightarrow Disc}(J) \right\}_B = \bar{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Disc \rightarrow braç, a 0:

$$\left\{ \bar{F}_{Disc \rightarrow braç} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{M}_{Disc \rightarrow braç}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1' \\ 0 \\ M_3' \end{Bmatrix}$$

Forq \rightarrow plat a 0:

$$\left\{ \bar{F}_{Forq \rightarrow Plat} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1'' \\ F_2'' \\ F_3'' \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{M}_{Forq \rightarrow Plat}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1'' \\ M_2'' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Braç \rightarrow forq a 0:

$$\left\{ \bar{F}_{Braç \rightarrow Forq} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1''' \\ F_2''' \\ F_3''' \end{Bmatrix} \quad \left\{ \bar{M}_{Braç \rightarrow Forq}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2''' \\ M_3''' \end{Bmatrix}$$

(7) Justificació del full de ruta per trobar eq. mov. coord. ψ

Si considerem el sistema = Disc + Plataf + Bras + forq, l'únic tensor d'eullas que intervié és el del terci sobre la plataforma, que no té component de moment vertical. Com que l'equació del moviment no pot contenir incògnites d'eullas, és clar que una bona opció per obtenir-la és plantejar

$$TMC(0) \Big]_{\text{vertical}} = \text{dir. } 3$$

Com que l'acceleració angular $\ddot{\psi}$ és també vertical, sortirà en aquesta equació, cosa que volem. Quant a variables d'acceleració, aquesta equació pot contenir $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$, i $\ddot{\psi}$, però

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_0 = ct \quad (\text{per l'enunciat})$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\varphi}}{2} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{\varphi}}{2} = \frac{\ddot{\varphi}_0}{2} = ct$$

Per tant, l'única incògnita d'acceleració serà $\ddot{\psi}$, tal i com volem.

En conclusió:

Full ruta :

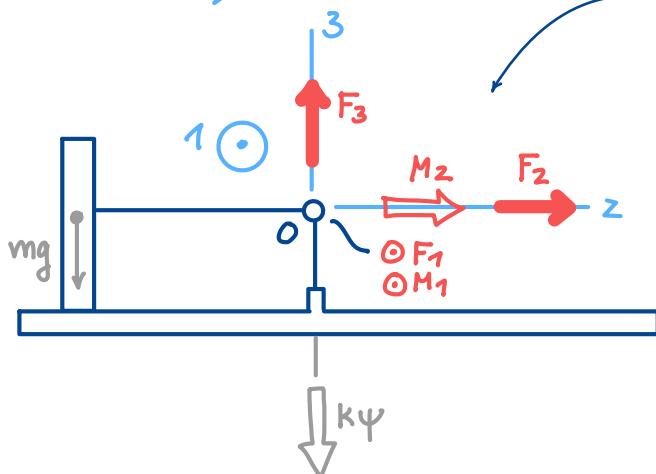
$$SIST = \text{Disc} + \text{Plataf} + \text{Bras} + \text{forq}$$

$$TMC(0) \Big]_3$$

(8) Càlcul de l'eq. mov. aplicant full rata

Les forces i moments exteriorment aplicats són:

$$B = (1, 2, 3)$$



Dibuixat en vermell

$$\{\bar{F}_{\text{terra} \rightarrow \text{plat}}\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{M}_{\text{terra} \rightarrow \text{plat}(O)}\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(O) = \dot{H}_{RTO}(O) \quad \leftarrow \begin{array}{l} RTO = T \text{ perquè } O \in T \\ \text{term complementari perquè } O \text{ fix a } T. \\ \text{Només ens cal la dir. 3} \end{array}$$

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(O) = \begin{Bmatrix} \vdots \\ -k\psi \end{Bmatrix} \quad (\text{III})$$

$$\bar{H}_{RTO}(O) = \underbrace{\mathbb{II}(O)}_{\text{del disc}} \bar{\Omega}_T^{\text{disc}} \quad (\text{només el disc té massa, i } O \in \text{disc})$$

$$I = I' + I'' = \frac{17}{4}mR^2$$

$$[\mathbb{II}(O)]_B = [\mathbb{II}(G)]_B + [\mathbb{II}^\oplus(O)]_B = \begin{bmatrix} I' & 2I' \\ 2I' & I' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I'' & 0 \\ 0 & I'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 2I' \\ 2I' & I'' \end{bmatrix}$$

2 és DPI
Rotor simètric a G

$$2I' = \frac{mR^2}{2} \Rightarrow I' = \frac{mR^2}{4}$$

$$I'' = m(2R)^2 = 4mR^2$$

$$\left\{ \bar{H}_{RTO}(0) \right\}_B = \begin{bmatrix} I & 2I' \\ 2I' & I \end{bmatrix} \overbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{Bmatrix}}^{\bar{\Omega}_T^{Disc}, \text{ de (II)}} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ 2I' \dot{\varphi} \\ I(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ 2I' \ddot{\varphi} \\ I(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} + \ddot{\theta} \end{Bmatrix}}_{\dot{\varphi}/2} \times \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \\ 2I' \dot{\varphi} \\ I(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\dot{\psi} + \frac{\dot{\varphi}}{2}) 2I' \dot{\varphi} \\ 2I' \ddot{\varphi} \\ I(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) \end{Bmatrix} \quad (IV)$$

Igualem comp. 3 de (III) i (IV):

$$\begin{aligned} -K\psi &= I\left(\frac{\ddot{\varphi}}{2} + \ddot{\psi}\right) & I = \frac{17}{4}mR^2 \text{ (d'abans)} \\ -K\psi &= \frac{17}{4}mR^2 \left(\frac{\ddot{\varphi}_0}{2} + \ddot{\psi}\right) & \ddot{\psi} = \ddot{\varphi}_0 \text{ (enunciat)} \\ -\frac{4K\psi}{17mR^2} &= \frac{\ddot{\varphi}_0}{2} + \ddot{\psi} \end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{\psi} + \frac{4K}{17mR^2} \psi + \frac{\ddot{\varphi}_0}{2} = 0} \quad \begin{array}{l} \text{Eq. mov. per la} \\ \text{coord. } \psi \end{array} \quad (V)$$

EDO Lineal a coefs ct.

(9) Configuració d'equilibri per a ψ

Substituim $\psi = \psi_{eq}$, $\dot{\psi} = 0$, $\ddot{\psi} = 0$ a (V) i queda

$$K \cdot \psi_{eq} + F = 0 \Rightarrow \boxed{\psi_{eq} = -\frac{F}{K} = -\frac{\frac{\ddot{\varphi}_0}{2}}{\frac{4K}{17mR^2}} = -\frac{17mR^2}{8K} \ddot{\varphi}_0}$$

Només hi ha aquesta configuració d'equilibri per a ψ .

Analitzem ara si $\Psi_{eq} = -F/K$ és estable o no:

$$\ddot{\Psi} + K \Psi + F = 0$$

Eq. movim.
per a Ψ

(VI)

$$\Psi = \Psi_{eq} + \varepsilon$$

$$\dot{\Psi} = \dot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\Psi} = \ddot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\varepsilon} + K(\Psi_{eq} + \varepsilon) + F = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + K\left(-\frac{F}{K} + \varepsilon\right) + F = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + K\varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} = -K\varepsilon$$

EDO de l'error ε
associada

(VII)

L'angle $\Psi_{eq} = -\frac{F}{K}$ serà d'equilibri estable si $K > 0$

↓ Estudiem quan $K > 0$

$$K = \frac{4K}{17mR^2} > 0 \text{ sempre!}$$

↓

$\Psi_{eq} = -\frac{F}{K}$ és d'equilibri estable sempre.

Naturalesa
de l'evolució
temporal $\Psi(t)$

La plataforma tindrà un moviment
oscil·latori al voltant de Ψ_{eq} , de
freqüència \sqrt{K} .

(10) Full ràta per calcular el parell motor Γ

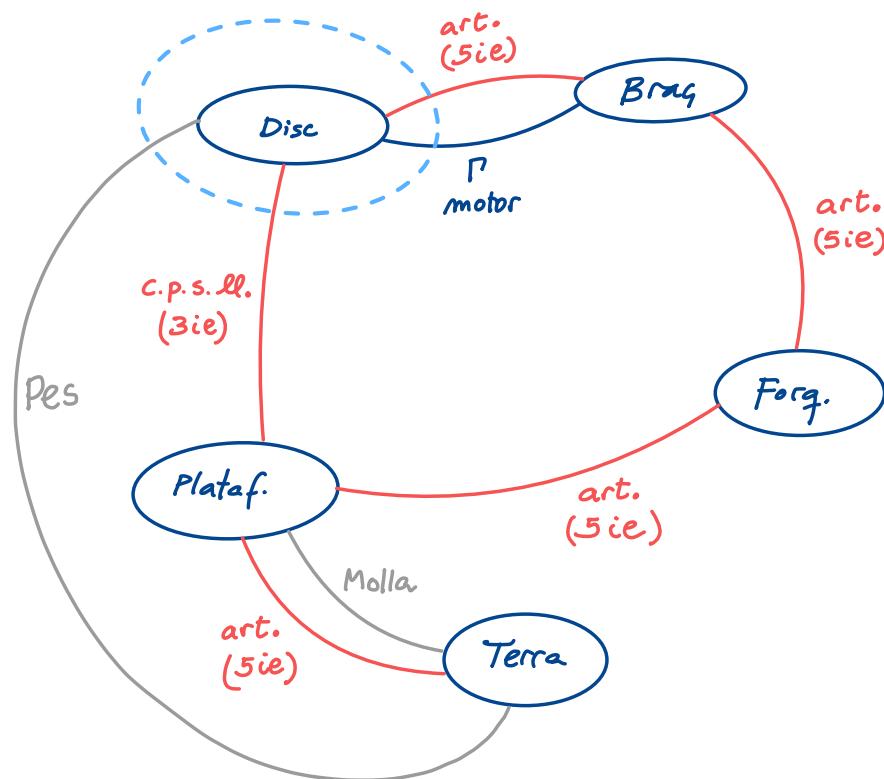
Com que hem de trobar un parell (Γ) \Rightarrow cal aplicar TMC

Els sistemes han d'incloure Γ com a interacció externa \Rightarrow els possibles sistemes són:

Sistema	Incògn. ^(*)	#incògn	Problema
Disc	8 ie, Γ	9	Indet
Disc + plat.	10 ie, Γ	11	"
Disc + plat + forq.	10 ie, Γ	11	"
Brag	10 ie, Γ	11	"
Brag + forq.	10 ie, Γ	11	"
Brag + forq + plat	8 ie, Γ	9	"

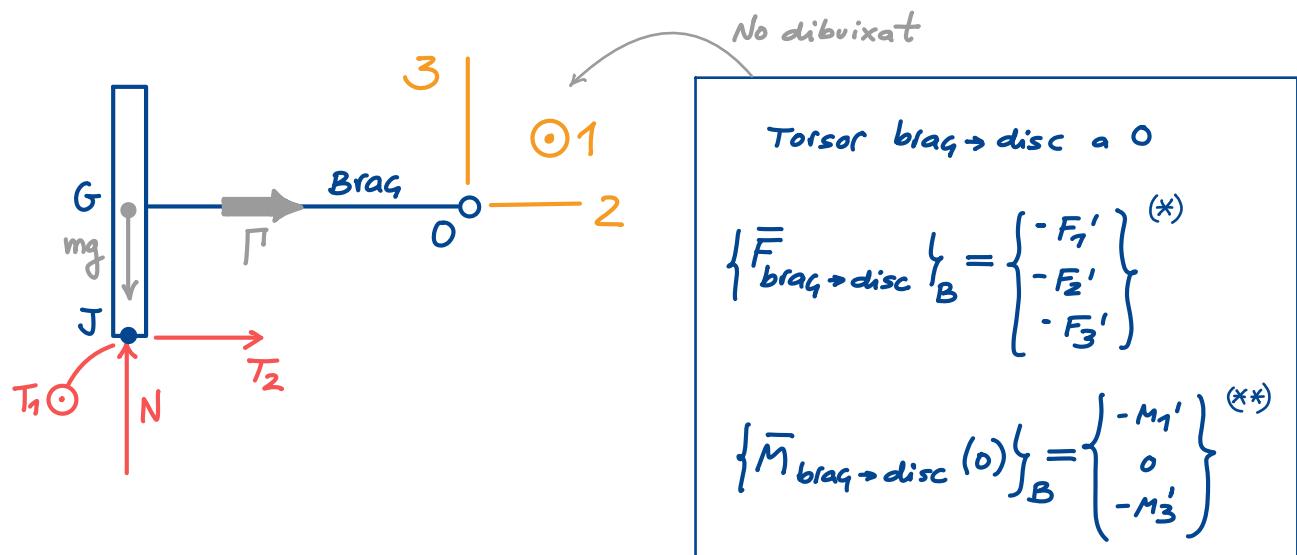
Explorem els sistemes marcats per ser els de menys incògnites.

Comencem pel sist = disc i posterior ja ens en sortim:



(*) Ara $\dot{\psi}$ ja no és una incògnita (ja en sabem el valor, donat per l'eq. del moviment (v))

Interaccions externes sobre sist = Disc



Cal aplicar $TMC(0)]_2$ per a que sorti P !

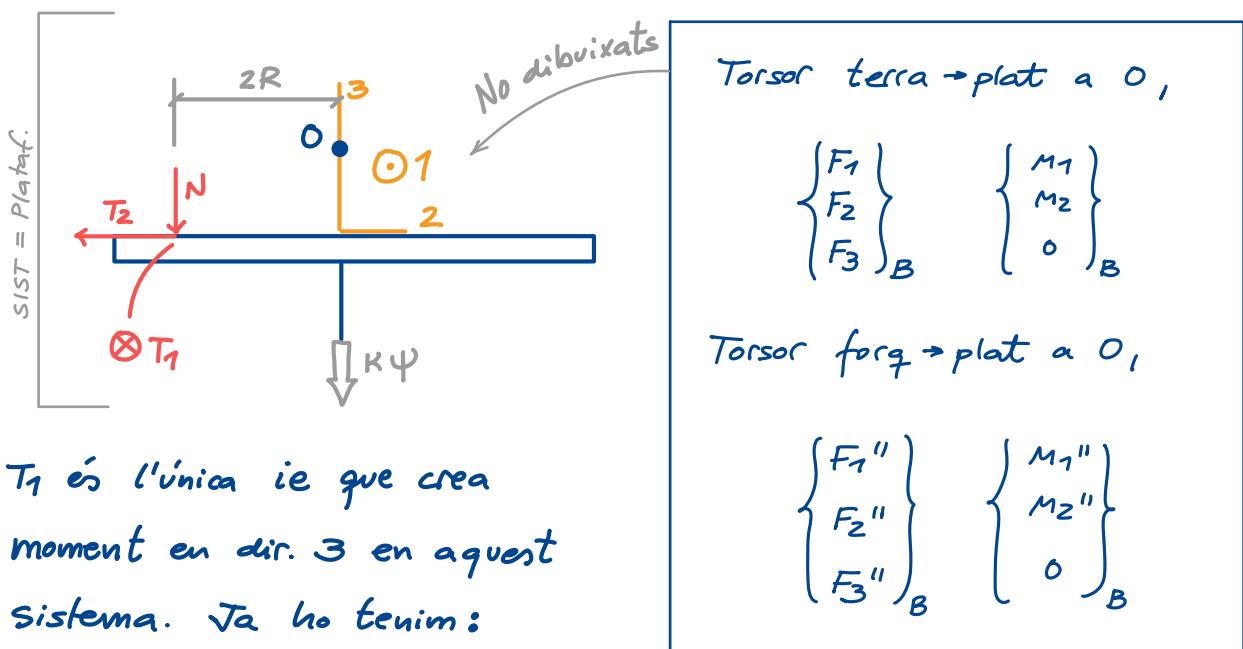
Però això fa intervenir l'ie T_1 (crea moment en dir. 2)

Les altres ie no creen moment en dir. 2

Caldria una altra equació per determinar T_1

$TQM]$, no va bé perquè introduïria F_1' (incògnita extra)

Com que T_1 intervé en sist = plataf, estudiem aquest sist:



T_1 és l'única ie que crea moment en dir. 3 en aquest sistema. Ja ho tenim:

(*) Amb signes "-" per com hem definit el torsor disc \rightarrow braq abans (apartat 6)

(**) Idem!

Full nota per
a Γ

$$sist = disc : TMC(0) \Big|_2^{(*)}$$

$$sist = plataf : TMC(0) \Big|_3$$

(10) Calculen Γ

$$\underline{TMC(0) \Big|_2, sist = disc}$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) \Big|_2 = \dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \Big|_2$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) \Big|_2 = (\Rightarrow \Gamma) + (\leftarrow T_1 R) = \left[\Rightarrow (\Gamma - T_1 R) \right] \quad (a)$$

$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \Big|_2 = (\Rightarrow 2 I' \ddot{\varphi}_o) \quad (b)$$

De (IV) i recordant que $\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_o$

Ignant (a) i (b):

$$\Gamma - T_1 R = 2 I' \ddot{\varphi}_o \quad (VIII)$$

$$\underline{TMC(0) \Big|_3, sist = plat}$$

$$(\downarrow T_1 2R) + (\downarrow K \psi) = 0$$

$$T_1 2R + K \psi = 0 \Rightarrow T_1 = -\frac{K \psi}{2R} \quad (IX)$$

Substituint (IX) a (VIII)

$$\Gamma = \frac{-K \psi}{2R} \cdot R + 2 \frac{m R^2}{I'} \cdot \ddot{\varphi}_o = -\frac{K}{2} \psi + \frac{m R^2}{2} \ddot{\varphi}_o \quad (X)$$

(*) També podríem aplicar $TMC(G) \Big|_2$ pel $sist = disc$ (utilitzant el tensor braç \rightarrow disc caracteritzat a G que és formalment igual al caracteritzat a 0) i donaria el mateix. La $\sum \bar{M}_{ext}(G)$ és la mateixa, i $\dot{\bar{H}}_{RTO}(G) \Big|_2$ també. Ex. pel lector!

Comentari final

Ens ha faltat explorar

$$SIST = braç + forq + plat$$

El càlcul de ρ hagués sigut + fàcil sobre aquest sistema?
 Ràpidament veiem que no, perquè $TMC(0)]_2$ introduceix
 T_1 i M_2 (apart de ρ) \Rightarrow aquesta ruta requeria buscar
 2 egs addicionals i no una (com a mínim):

