

# 12P

Versió 1.1

## Teoremes vectorials II

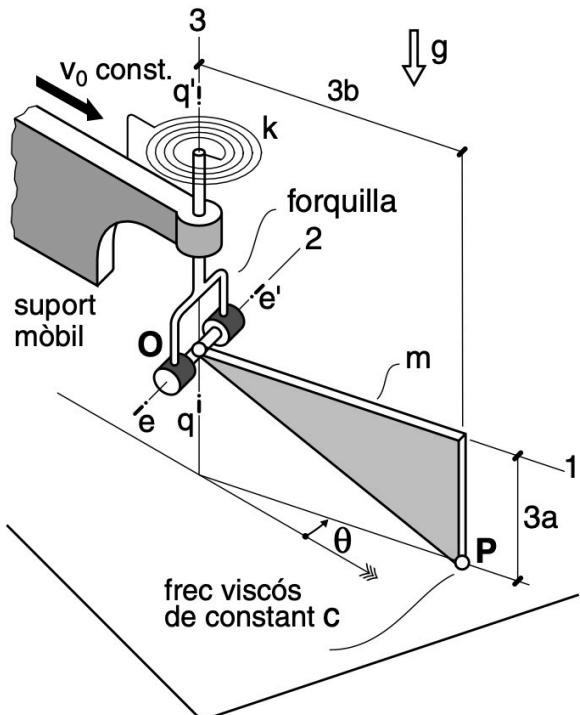
Problemes globals 3D

Lluís Ros

<https://luisros.github.io/mecanica>

## “Sistema en marxa enrere”

(ex. 8.19 MPSR)



8.19 La placa del sistema de la figura, en forma de triangle rectangle, homogènia i de massa  $m$ , està unida pel vèrtex  $O$  al suport mòbil per mitjà de les articulacions d'eixos  $e-e'$  i  $q-q'$ . La forquilla és de massa negligible i entre ella i el suport actua una molla torsional de constant  $k$  que per a  $\theta=0$  està distesa. Les resistències passives a les articulacions són negligibles. El vèrtex  $P$  lliosa sobre el pla horitzontal i entre ell i el pla hi ha un freq viscós de constant  $c$  independent de la força normal. El suport té moviment de translació rectilínia amb celeritat constant  $v_0$ . Determineu:

1. L'expressió de les components de la força de fricció que actua sobre la placa a  $P$ .
2. L'equació del moviment per a l'angle  $\theta$ .
3. L'expressió, en funció de  $\theta$  i  $\dot{\theta}$ , de la força normal d'enllaç que la placa rep del terra a  $P$ .
4. El valor mínim de  $k$  per tal d'estabilitzar les oscil·lacions al voltant de la configuració  $\theta_{eq} = 0$ .

(\*)

**Interès del problema:** si interpretem el suport mòbil com el xassís d'un vehicle que es mou marxa enrere amb  $\bar{v}_0 = ct$ , i veiem la placa com un model simple de remolc, l'objectiu és que el remolc es mantingui alineat amb el vehicle. Per aconseguir-ho possem una molla torsional entre suport i forquilla, que tendeixi a reduir les petites desviacions de  $\theta$ , retornant-les cap a  $\theta_{eq}=0$  quan n'hi hagi. És a dir, fent que  $\theta=0$  sigui una posició d'equilibri ESTABLE del sistema. Veurem que el valor de  $k$  necessari per garantir aquesta estabilitat depèn de  $v_0$ . A major  $v_0$  caldrà major  $k$ .

(\*) A classe no ho farem. Quedarà com a deures.

El sistema té 2 GL

$v_0$ (forçat perquè algun actuator el manté ct)	$\dot{\theta}$ (llibre)
No dibuixat	

### (1) Força de fricció sobre la placa a P

Ens diuen que és un freq viscós. Per tant serà una força de mateixa direcció que  $\bar{v}_T(P)$  però de sentit contrari, amb constant de proporcionalitat c:

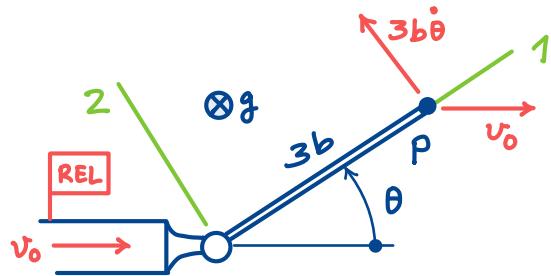
$$\bar{F}_{fv} = -c \bar{v}_T(P) \quad (\text{força formulable})$$

dada

Calculem  $\bar{v}_T(P)$ :

Fem composició  
de moviments  
amb  $|AB = T$   
 $REL = \text{Suport}$

$$B = (1, 2, 3)$$



$$\bar{v}_T(P) = \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P) =$$

$$= (\rightarrow v_0) + (\nwarrow 3b\dot{\theta}) = \left\{ \begin{array}{l} v_0 \cos \theta \\ -v_0 \sin \theta + 3b\dot{\theta} \end{array} \right\}_B$$

Ergo

en base B

$$\bar{F}_{fv} = -c \bar{v}_T(P) = \left\{ \begin{array}{l} -cv_0 \cos \theta \\ cv_0 \sin \theta - 3cb\dot{\theta} \end{array} \right\}_B \equiv \left\{ \begin{array}{l} F_{fv1} \\ F_{fv2} \end{array} \right\}_B \quad (0)$$

+ endavant ens caldrà  $F_{fv2}$  per formular l'eq. del moviment per a  $\theta$ .

## (2) Eq. mov. per la coord. $\theta$

L'orientació de la placa respecte T ve donada per  $\theta$ . El nostre objectiu serà trobar l'eq. del moviment per a  $\theta$  que tindrà la forma <sup>(\*)</sup>

$$\ddot{\theta}(t) = f(\theta(t), \dot{\theta}(t), \underbrace{\text{pars}}_{\substack{\text{paràmetres} \\ \text{constants}}}) \quad (1)$$

paràmetres	geomètrics (a, b)
constants	dinàmics ( $m, g, c, k$ )

Per què volem l'eq. del mov.?

Cal veure l'equació (1) com una EDO. La seva incògnita és la funció  $\theta(t)$  que descriu com es mourà la placa. Si ens donessin les condicions inicials de la placa

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

podriem determinar  $\theta(t)$  amb mètodes numèrics (Euler, Runge-Kutta, ...), però això, en aquest curs, no ho fem. El que sí fem és buscar les configuracions d'equilibri de (1). És a dir, els valors  $\theta = \theta_{\text{eq}}$  tals que, si deixem la placa en l'angle  $\theta_{\text{eq}}$ , amb velocitat zero ( $\dot{\theta}_{\text{eq}} = 0$ ), la placa es manté a  $\theta_{\text{eq}}$  ( $\ddot{\theta}_{\text{eq}} = 0$ ). Veurem que  $\theta = 0$  és una config. d'equilibri, però n'hi pot haver d'altres. Voldrem que  $\theta_{\text{eq}} = 0$  sigui d'equilibri estable. És a dir, que si alguna pertorbació ens desvia de  $\theta_{\text{eq}} = 0$ , el sistema torni a  $\theta_{\text{eq}} = 0$  espontàniament.

---

(\*) Sovint aquesta EDO l'escriuen sense expressar la dependència de t :  $\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}, \text{pars})$

Si se n'allunyés, l'equilibri seria **inestable**. Veurem que la constant  $K$  de molla que garanteix l'estabilitat és funció de  $\omega_0$ .

Per obtenir (1) aplicarem els teoremes vectorials. Com que a (1) no hi pot haver incògn. d'enllaç (en una equació del mov. mai n'hi ha !) l'estrategia consistirà en aplicar els teoremes vectorials de manera que interinquin com menys incògnites d'enllaç millor, i ... si pot ser, cap ! Si n'hi apareixen, les haurrem d'eliminar per arribar a (1). El **diagrama general d'interaccions** (DGI) és de gran ajut per trobar un **full de ruta** que ens permeti arribar a (1) el més ràpidament possible.

### Diagrama general d'interaccions

És una representació gràfica del sistema mecànic, útil per a l'aplicació dels teoremes vectorials.

Hi representem :

- Cadascun dels sòlids que integren el sistema mecànic

sòlid

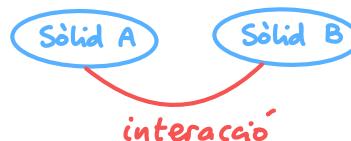
- Cadascuna de les interaccions entre parelles de sòlids :

- enllaços

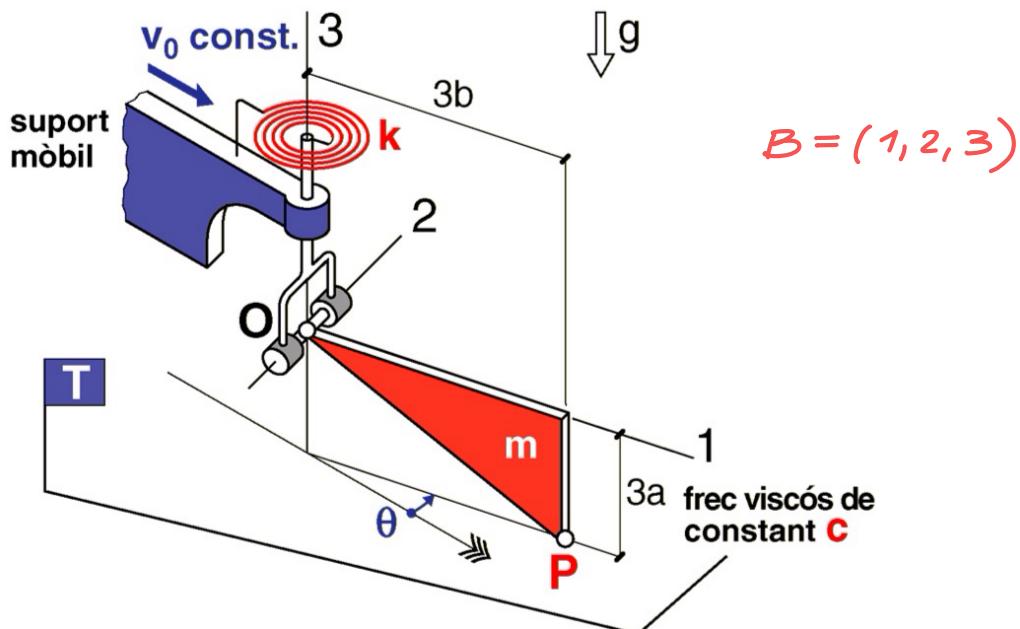
- forces formulables

Pes  
Molles  
Amortidors  
Fricció

- forces d'actuadors



Dibuixem-lo pel cas d'aquest exercici:



"art" = articulació

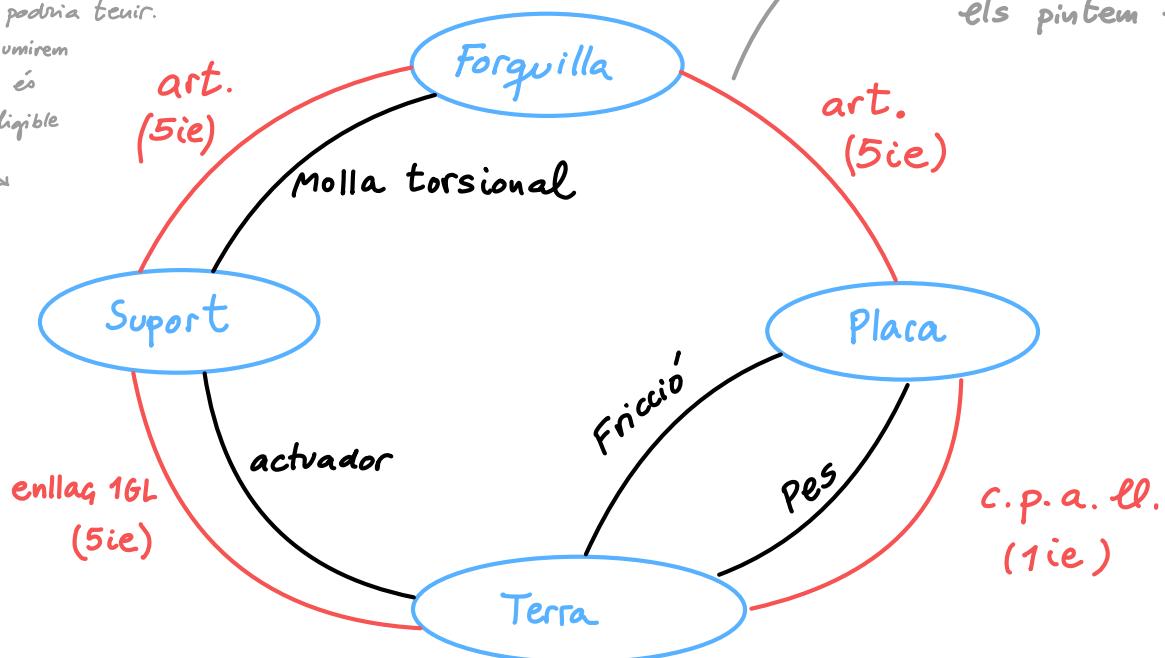
"c.p.a.ll." = "contacte puntual amb lliscament"

"5ie" = "5 incògnites d'eullag"

No hem pintat el pes del suport però en podríem tenir.

Assumirem que és negligible

Els arcs corresponents a incògnites d'eullag els pintem en vermell



L'eullag terra-suport no sabem ben bé què és<sup>(\*)</sup>, però té 1 GL ( $\bar{v}_0 = \text{constant}$ ). Per tant, té 5ie. El podem

<sup>(\*)</sup> Serà irrelevat en la resolució del problema

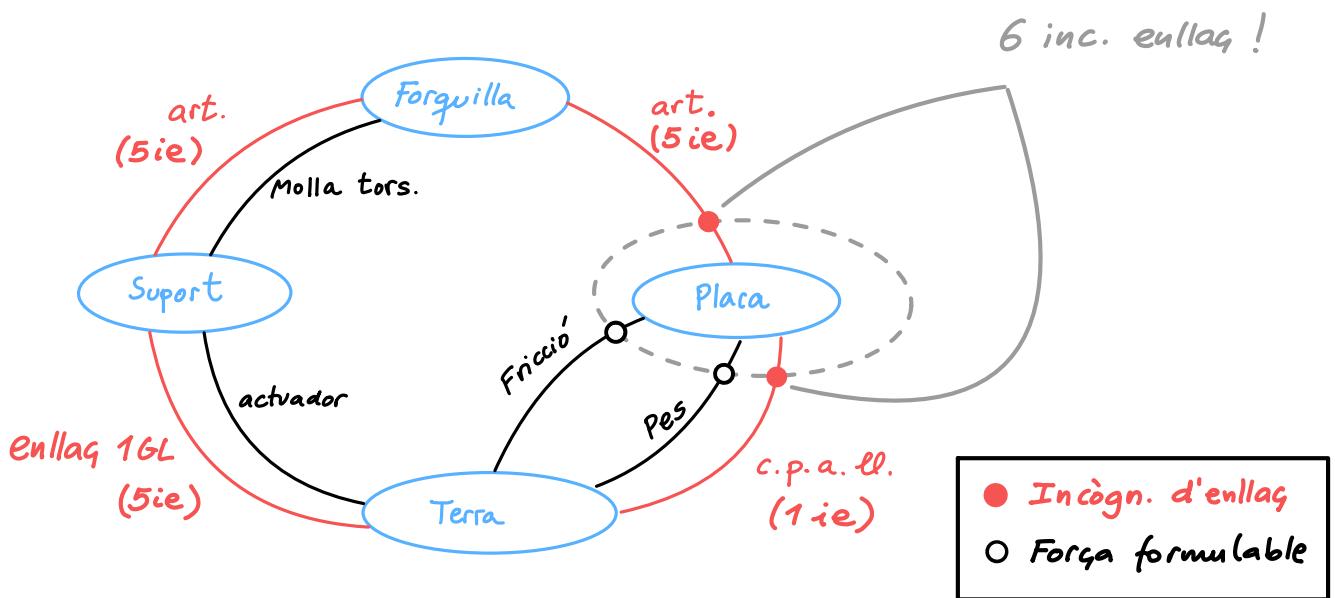
pensar com un vehicle que empeny, fent marxa enrere.  
 Com que el xassís d'aquest vehicle té una velocitat  $\vec{v}_0$  constant resp. el terra, ha de tenir un activador (pintat al DGI) que garanteix aquesta  $\vec{v}_0$ .

Full de ruta per obtenir l'eq. del mov.

Disposem de :

$$\left. \begin{array}{l} \text{TQM (3 eqs)} \\ \text{TMC (3 eqs)} \end{array} \right\} 6 \text{ eqs} \leftarrow \text{Però... A quin } \underline{\text{sistema}} \text{ les apliquem?}$$

Com que volem l'eq. mov. per a  $\theta$ , el sist. ha d'incloure la placa o bé la forquilla<sup>(\*)</sup>. Mirant el DGI veiem que si sist = placa, apareixerien 6 inc. eullag:



L'acceleració  $\ddot{\theta}$  seria una incògnita addicional (ja que la cinemàtica de la placa depèn de  $\theta$ )

determina l'eq. del moviment

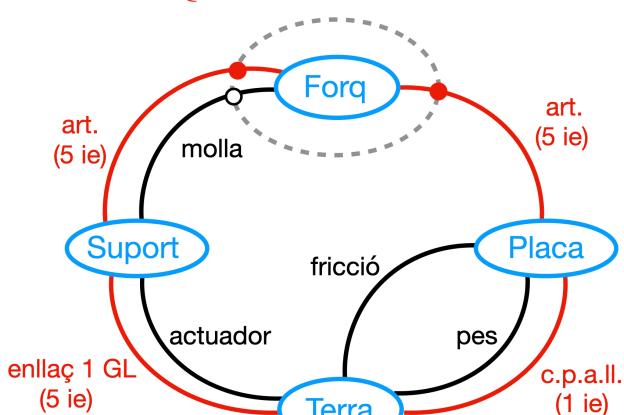
Per tant trobarem 7 incògnites (6 d'enllaç i  $\ddot{\theta}$ ) i només 6 eqs.  
 No sembla viable trobar  $\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}, \text{pars})$  per aquesta via.

Mirem altres opcions encerclant solids del DGI :

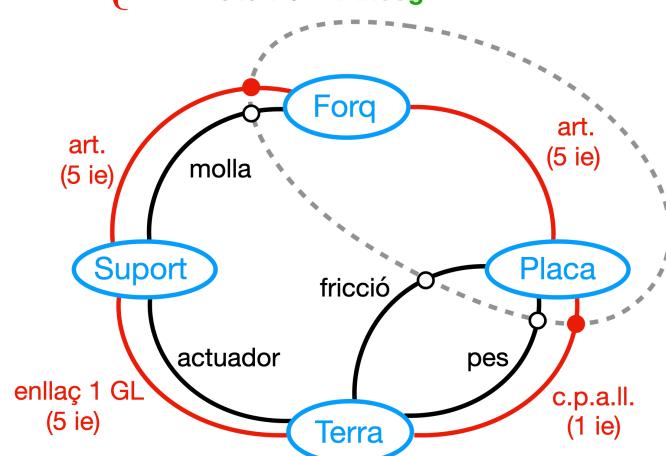
(\*) Només aquests dos solids involucren l'angle  $\theta$

**INDET**

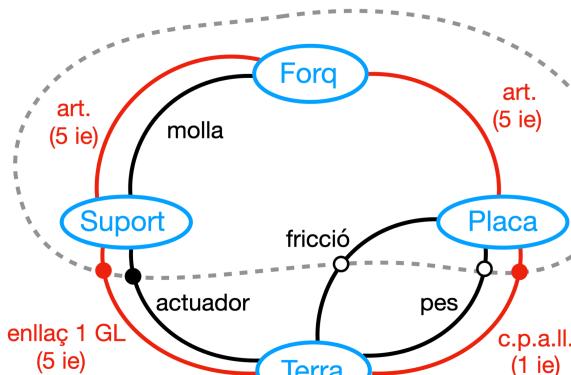
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sist} = \text{Forq} \\ 10 \text{ ie} + \ddot{\theta} = 11 \text{ incòg} \end{array} \right.$$

**INDET**

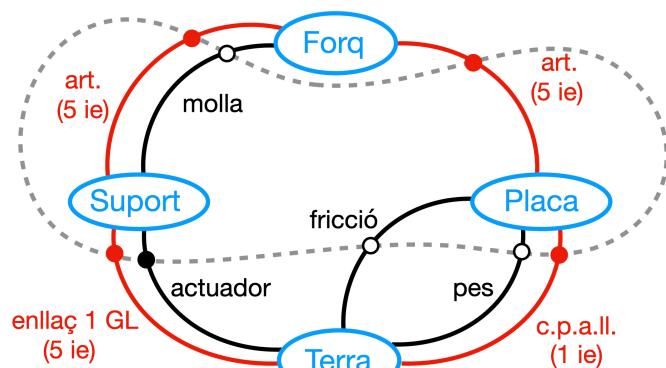
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sist} = \text{Placa} + \text{Forq} \\ 6 \text{ ie} + \ddot{\theta} = 7 \text{ incòg} \end{array} \right.$$

**INDET**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sist} = \text{Placa} + \text{Forq} + \text{Sup} \\ 6 \text{ ie} + \text{força actuador} + \ddot{\theta} = 8 \text{ incòg} \end{array} \right.$$

**INDET**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sist} = \text{Placa} + \text{Sup} \\ 16 \text{ ie} + \text{força actuador} + \ddot{\theta} = 18 \text{ incòg} \end{array} \right.$$



Com que TQM i TMC només proporcionen 6 equacions en total, i sempre tenim més de 6 incògnites, en tots els casos sortirà un sistema d'equacions indeterminat!

Sistema	Incògnites	#incagn. total
Placa	6 ie, $\ddot{\theta}$	7
Forq.	10 ie, $\ddot{\theta}$	11
Placa + forq	6 ie, $\ddot{\theta}$	7
Placa + forq + suport	6 ie, força actuador, $\ddot{\theta}$	8
Placa + suport	16 ie, força actuador, $\ddot{\theta}$	18

Sempre  
indet.

Quina  
ràbia!

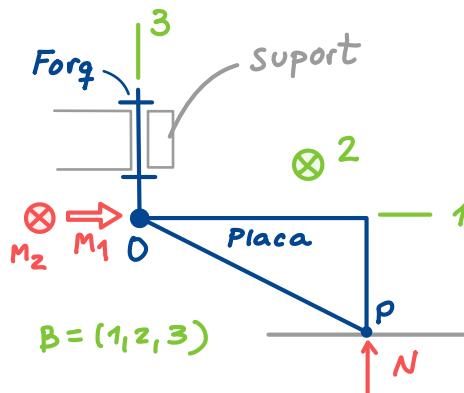
Sembla que no queda més remei que considerar més d'un sistema per obtenir més equacions... Però... un moment! Que un sistema d'eqs. surti indeterminat no impedeix que, per casualitat, pugui contenir una equació amb 1 sola incògnita (o, més en general, un subsistema d'eqs. determinat). Ums... I si passa això en algun dels sistemes que hem analitzat? Mirem-nos-en algun amb més calma. Com que en principi  $\theta$  hauria de dependre de  $K$  i  $m$ , hauria d'ésser forç i placa dius el sistema. I ni donem una oportunitat al  $sist = placa + forç$ ? Analitzem aquest sistema amb més cura:

El tensor d'eullag suport  $\rightarrow$  forç, a 0, és:

$$\{\bar{F}_{\text{sup} \rightarrow \text{forç}}\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad \{\bar{M}_{\text{sup} \rightarrow \text{forç}(0)}\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Que bé!  
Aquí hi  
ha un zero

Aplicant TMC a 0,  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$  no apareixeran, i només hi haurà els moments d'eullag  $M_1$ ,  $M_2$  en dirs. 1 i 2. En dir 3 no n'hi haurà!



No he pintat  $F_1, F_2, F_3$  aquí. Ens les imaginem aplicades a 0.

El freg viscos i el pes no els he pintat, tampoc, però són formulaables, i no introdueixen incògnites d'enllaç!

A més la normal del terra

sobre P només creará moment en dir. 2! Vol dir que la component 3 del TMC a 0 ens donarà l'eq. del mov. per a  $\theta$ ! Ja ho tenim! El full de ruta és:

Full ruta per l'eq. mov. per a $\theta$	$Sist = \text{Placa} + \text{forç}$ $TMC(0)$	Poseu-lo sempre a l'examen!
		$3 \leftarrow \text{"En dir. 3"}$

## Pregunta freqüent

I per què no apliquem el TMC a G, o a P?

L'aplicació a G requeria canviar el torsor d'enllaç sup  $\rightarrow$  forç de punt. Ara el tenim referit a O, i caldria passar-lo a G. Això introduiria  $F_1, F_2, F_3$  com a incògnites extra a la  $\sum \bar{M}_{ext}(G)$  ja que aquestes creen moment respecte G. Veiem-ho:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} -2b \\ 0 \\ a \end{Bmatrix}}_{\overline{GO}}_B \times \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}}_{\bar{F}_{sup \rightarrow forq}}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} -F_2 a \\ F_1 a + F_3 \cdot 2b \\ -F_2 \cdot 2b \end{Bmatrix}}_B$$

$B = (1, 2, 3)$

Apareixeria  $F_2$  com a incògnita a la  $\sum \bar{M}_{ext}(G)$  ]<sub>3</sub>

Per tant, no en trobarem prou amb aplicar  $TMC(G)]_3$  per trobar l'eq. del moviment.

L'aplicació a P tiindrà el mateix problema. A banda, a P hi tenim un contacte puntual entre dos sòlids i es recomana evitar l'aplicació del TMC a aquest tipus de punts (vegeu Wikimec D4.5  $\rightarrow$  "TMC en un punt de contacte entre dos sòlids").

En general procuren aplicar el TMC a:

- O bé un punt del sòlid
- O bé un punt fix a T

i, com dic, eviteu l'aplicació a punts que siguin de contacte puntual entre sòlids (amb o sense lliscament).

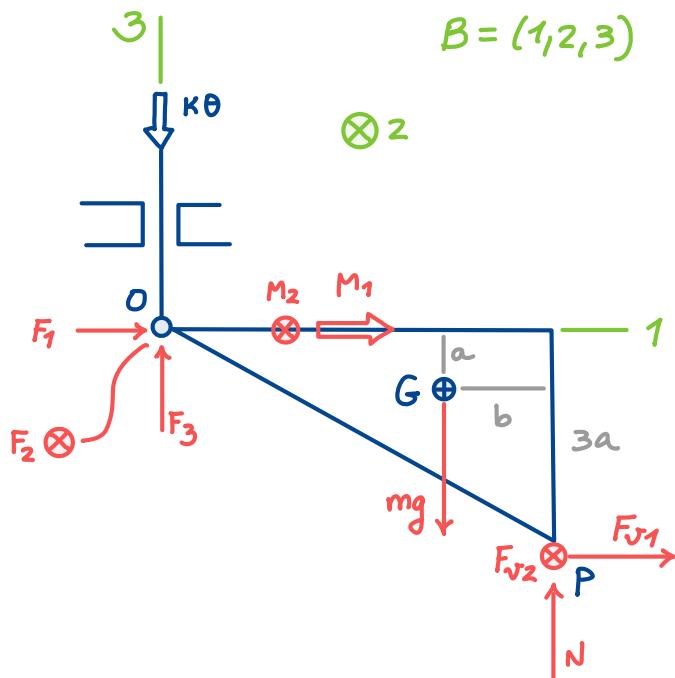
Seguim! Apliquem el full de nota:

$$TMC(O)_3$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(O) + \bar{o}_G \times m \underbrace{\bar{a}_T(O)}_{\bar{o}, ja que \bar{v}_T(O) = \bar{v}_o = ct} = \dot{\bar{H}}_{RTO}(O)$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(O) = \dot{\bar{H}}_{RTO}(O)$$

Només calcularem la comp. 3 d'aquesta equació



Només generen moment en dir. 3 el parell de la molla  $\Downarrow K\theta$  i la força de freqüència viscosa  $\vec{P}$

$$\sum \bar{M}_{ext}(O)$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(O) = (\Rightarrow M_1) + (\otimes M_2) + \bar{o}_G \times (\downarrow mg) +$$

$$+ \bar{o}_P \times \bar{N} + \underbrace{(\Downarrow K\theta) + \bar{o}_P \times \bar{F}_{fv}}_{=} = \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ -K\theta + 3bF_{fv2} \end{array} \right\}_B \quad (1)$$

Només aquests tenen comp. en dir. 3

$$\bar{o}_P \times \bar{F}_{fv} = \begin{Bmatrix} 3b \\ 0 \\ -3a \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} F_{fv1} \\ F_{fv2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ 3bF_{fv2} \end{array} \right\}$$

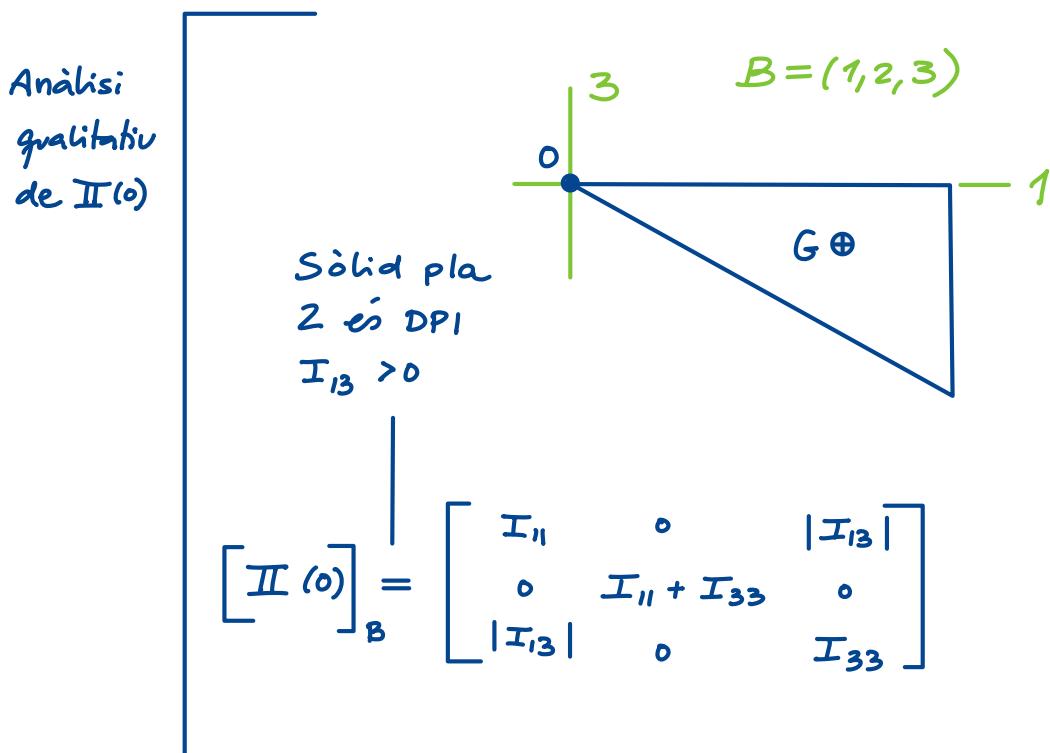
$$(\Downarrow K\theta) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -K\theta \end{Bmatrix}_B$$

$$\overline{H}_{RTO}(o) \Big]$$

E sistema conté 1 únic sòlid amb massa (la placa) (\*) :

$$\overline{H}_{RTO}(o) = \underbrace{\mathbb{II}(o)}_{\text{El de la placa}} \underbrace{\overline{\Omega}_T}_{\text{o} \in \text{Placa}}$$

$$\overline{\Omega}_T = \overline{\Omega}_{\text{Placa}} + \underbrace{\overline{\Omega}_{\text{Suprt}}}_{\overline{\Omega}_{\text{T}}} \quad \overline{\Omega}_{\text{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Millor treballar amb el tensor qualitatiu i retardar el càlcul precís dels  $I_{ii}$ ,  $I_{ij}$  perquè poter alguns no caldran!

- (\*) Si hi haguéssim més sòlids,  $\overline{H}_{RTO}(o)$  total seria la suma dels  $\overline{H}_{RTO}(o)$  dels sòlids individuals.

$$\left\{ \bar{H}_{RTO}(0) \right\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & |I_{13}| \\ 0 & I_{11} + I_{33} & 0 \\ |I_{13}| & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{13}\dot{\theta} \\ 0 \\ I_{33}\dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Aquest vec. l'hem de calcular senzillament

És de  $\bar{H}_{RTO}(0)$  que només ens caldrà la comp. 3

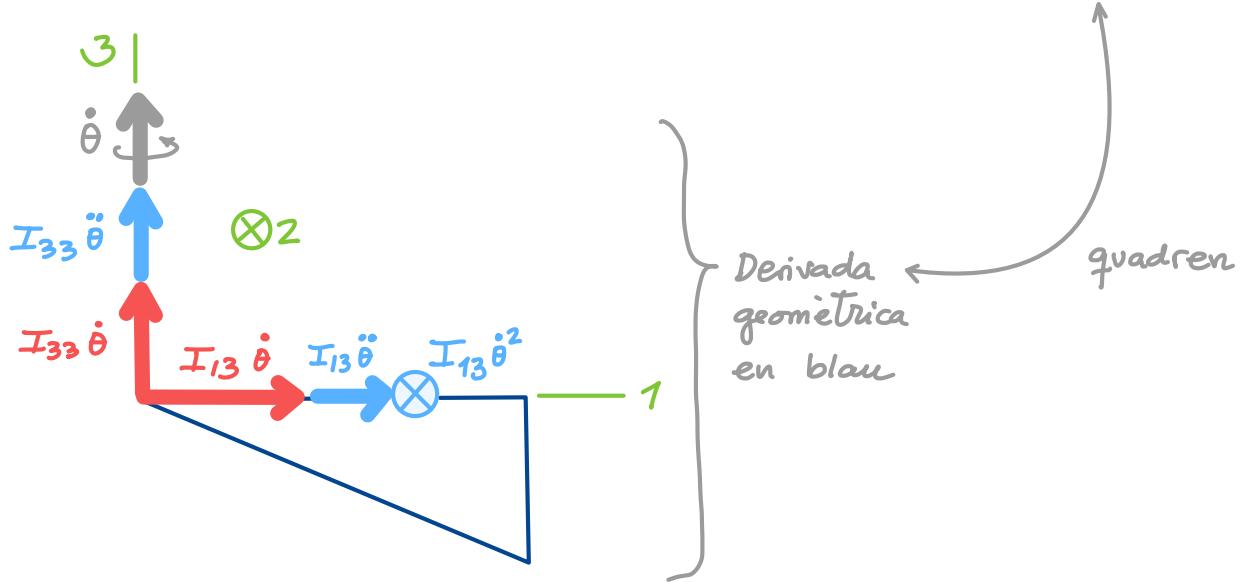
$$\left[ \dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \right]_3 :$$

Deriv. analítica en base B

$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \stackrel{\text{DEF}}{=} \frac{d}{dt} \bar{H}_{RTO}(0) \Big|_{RTO} = \begin{Bmatrix} I_{13}\ddot{\theta} \\ 0 \\ I_{33}\ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{13}\dot{\theta} \\ 0 \\ I_{33}\dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{13}\ddot{\theta} \\ I_{13}\dot{\theta}^2 \\ I_{33}\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\bar{\Omega}_{RTO}^B = \bar{\Omega}_T^B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

RTO no gira resp. T



Imposant (1) = (2) en dir. 3:

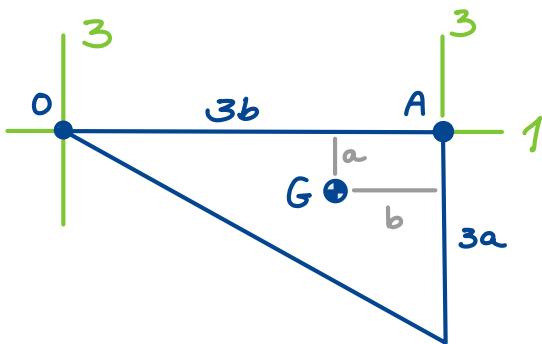
$$-K\theta + 3b F_{fvz} = I_{33}\ddot{\theta} \quad (3)$$

De (0)  $= c v_0 \sin \theta - 3cb\dot{\theta}$

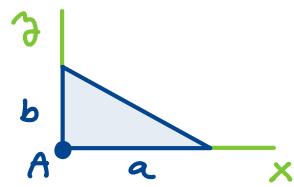
Ja és l'eq. del moviment periòdic  
ens falta  $I_{33}$

Fixem-nos que només ens cal  $I_{33}$ ! No tot el tensor  $\bar{H}(0)$ .  
Hem estalviat càlculs!

$I_{33}(0)$



Info taula



$$I_{xx}(A) = \frac{1}{6}mb^2$$

$$I_{xy}(A) = -\frac{1}{12}mab$$

De la taula podem saber  $I_{33}(A)$ , però ens cal  $I_{33}(0)$ .

Apliquem un "doble Steiner":

$$(a) \quad I_{33}(0) = I_{33}(G) + I_{33}^\oplus(0)$$

$$(b) \quad I_{33}(A) = I_{33}(G) + I_{33}^\oplus(A)$$


---

$$(a-b) \quad I_{33}(0) = I_{33}(A) + I_{33}^\oplus(0) - I_{33}^\oplus(A)$$

$$\boxed{I_{33}(0) = \frac{1}{6}m(3b^2) + m(2b)^2 - mb^2 = \\ = \frac{3}{2}mb^2 + 3mb^2 = \frac{9}{2}mb^2} \quad (4)$$

Expressió final de l'eq. del moviment:

$$-K\theta + 3b \left( cv_0 \sin \theta - 3cb\dot{\theta} \right) = \underbrace{\frac{9}{2}mb^2\ddot{\theta}}_{I_{33}}$$

$$\boxed{\frac{9}{2}mb^2\ddot{\theta} + 9b^2c\dot{\theta} + K\theta - 3bcv_0 \sin \theta = 0} \quad (5)$$

L'Eq. (5) proporciona l'EDO  $\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}, \text{pars})$  que dàiem al principi (si aïllem  $\ddot{\theta}$ ). Aquesta EDO és no lineal degut

al terme que conté  $\sin \theta \Rightarrow$  només es pot resoldre numèricament. Però en podem estudiar els punts d'equilibri.

### Determinació dels punts d'equilibri

Un valor  $\theta = \theta_{eq}$  és d'equilibri si deixant-hi el sistema amb  $\dot{\theta} = 0$ , s'hi queda ( $\ddot{\theta} = 0$ ). Per trobar aquests valors substituim  $\theta = \theta_{eq}$ ,  $\dot{\theta} = 0$  i  $\ddot{\theta} = 0$  a (5) i resolem l'equació algebraica resultant:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{9}{2}mb^2\ddot{\theta} + 9b^2c\dot{\theta} + K\theta - 3bcv_0\sin\theta = 0 \\ \theta = \theta_{eq} \\ \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{array} \right] \text{EDO}$$

$$\downarrow$$

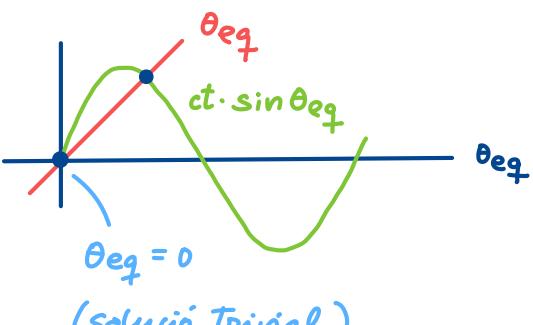
$$K\theta_{eq} - 3bcv_0\sin\theta_{eq} = 0 \quad (6) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Eq. algebraica} \\ (\text{no EDO!}) \end{array} \right]$$

$$\downarrow$$

$$\theta_{eq} = \underbrace{\frac{3bcv_0}{K}\sin\theta_{eq}}_{ct} \quad (6')$$

L'Eq. (6') és transcendent i només es pot resoldre numèricament, però té la solució trivial  $\theta_{eq} = 0$  anticipada a l'enunciat.

Les solucions de (6') són la intersecció de les corbes vermella i verda



Estudiarem l'estabilitat de les petites oscil·lacions al voltant de  $\theta_{eq} = 0$ .

(4) Estabilitat de  $\theta_{eq}=0$ : valor mínim de  $K$  per a que  $\theta=0^\circ$  sigui estable

Mateixos 3 passos que en el pèndol simple de la lligó d'oscil·lacions.

### 1 Obtenim EDO de l'error

Com que estudiem petites oscil·lacions al voltant de  $\theta_{eq}$ , aplicarem la substitució  $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$  a l'eq. (5), on  $\varepsilon$  és un valor molt petit, amb  $|\varepsilon| \ll 1$  (això implica fer també les substitucions  $\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}$ ,  $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$ ):

$$\frac{9}{2}mb^2\ddot{\varepsilon} + 9b^2c\dot{\varepsilon} + K\varepsilon - 3bcv_0\sin\varepsilon = 0 \quad (7)$$

Eq. mov.  
per a  $\theta$

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_{eq} + \varepsilon = 0 + \varepsilon = \varepsilon \\ \dot{\theta} &= \dot{\varepsilon} \\ \ddot{\theta} &= \ddot{\varepsilon}\end{aligned}$$

$$\frac{9}{2}mb^2\ddot{\varepsilon} + 9b^2c\dot{\varepsilon} + K\varepsilon - 3bcv_0\sin\varepsilon = 0$$

(8) EDO de l'error  $\varepsilon$

### 2 La linearitzem

$\sin\varepsilon \approx \varepsilon$  (quan  $|\varepsilon| \ll 1$ ):

$$\underbrace{\frac{9}{2}mb^2\ddot{\varepsilon}}_M + \underbrace{9b^2c\dot{\varepsilon}}_A + \underbrace{(K - 3bcv_0)\varepsilon}_B = 0$$

(9) EDO error  
linearitzada

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{B}{M}\varepsilon - \frac{A}{M}\dot{\varepsilon}$$

Només  $K$  determina l'estabilitat (veure lligó d'oscil·lacions i punts d'equilibri).

### 3 Mirem quan és $K > 0$

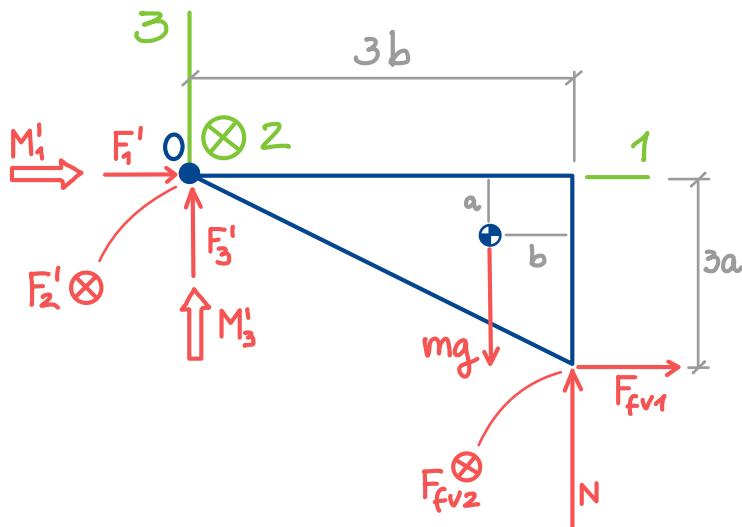
$$K = \frac{B}{M} = \frac{K - 3bcv_0}{M} > 0 \Leftrightarrow K - 3bcv_0 > 0 \Leftrightarrow K > 3bcv_0$$

Ergo estudiem oscil·lacions estables sempre i quan  $K > K_{min} = 3bcv_0$

A major  $v_0$ , cal una  $K$  més gran per mantenir l'estabilitat.

### (3) Força normal del terra sobre P

La força normal  $N$  està aplicada sobre la placa. Per tant, el sistema ha d'incloure la placa. Examinem les forces i moments sobre la placa a veure si tenim sort:



$$\{\bar{F}_{\text{forq} \rightarrow \text{placa}}\}_B = \begin{Bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{M}_{\text{forq} \rightarrow \text{placa}(O)}\} = \begin{Bmatrix} M_1' \\ 0 \\ M_3' \end{Bmatrix}$$

$N$  crea moment resp. 0 en dir. 2. Cap altra força o moment d'eulla en crea en aquesta direcció. Per tant:

Full de nota per a $N$	Sist = Placa $TMC(O)_2$
---------------------------	----------------------------

No us el  
descuideu  
a l'examen

### $TMC(O)$

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}(O)} - \cancel{\bar{O}G \times m \bar{a}_T(O)} = \dot{H}_{RTO}(O) \quad \leftarrow \text{Només volem la component 2}$$

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}(O)}_2$$

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}(O)}_2 = (\otimes mg 2b) + (\odot N 3b) + (\odot \overbrace{F_{fv1}}^{-cv_0 \cos \theta} \cdot 3a) =$$

$$= [\otimes (mg 2b - N 3b + 3a cv_0 \cos \theta)] \quad (10)$$

$$\underline{\dot{H}_{RTO}(0)}_2$$

De l'eq. (2) d'abans

$$\left\{ \dot{H}_{RTO}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} I_{13}\ddot{\theta} \\ I_{13}\dot{\theta}^2 \\ I_{33}\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{\dot{H}_{RTO}(0)}_2 = (\otimes I_{13}\dot{\theta}^2)$$

i calculant  $I_{13}$  obtenim

$$\underline{\dot{H}_{RTO}(0)}_2 = \left( \otimes \frac{9}{4}mab\dot{\theta}^2 \right) \quad (11)$$

$$I_{13}(0) = I_{13}(A) + I_{13}^\oplus(0) - I_{13}^\oplus(A) =$$

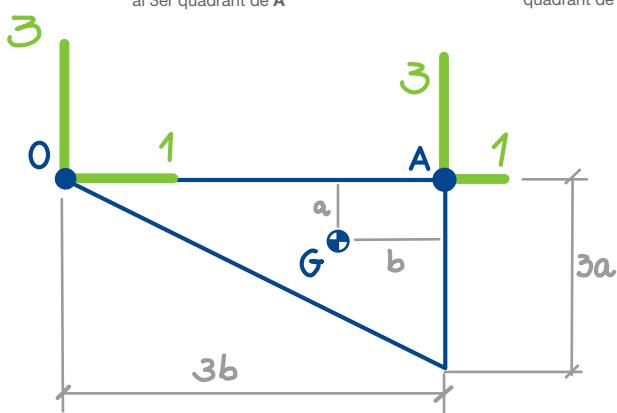
$$= -\frac{1}{12}m(3a)(3b) + m \cdot 2b \cdot a - (-mab) = \frac{9}{4}mab$$

Negatiu perquè tota la massa de la placa és al 3er quadrant de A

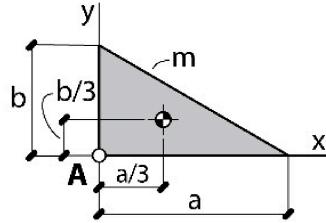
Positiu perquè la massa concentrada a G és al 4rt quadrant de O

Negatiu perquè la massa concentrada a G és al 3er quadrant de A

Surt positiu perquè tota la massa de la placa és al 4rt quadrant de O



### Taules



**II(A)**

$$I_{xx} = \frac{1}{6}mb^2$$

$$I_{xy} = -\frac{1}{12}mab$$

Negatiu perquè la massa és al primer quadrant de A  
(cal adaptar el signe al cas de l'exercici)

$$(10) = (11)$$

$$mg2b - N3b + 3acv_0 \cos\theta = \frac{9}{4}mab\dot{\theta}^2$$

↓ aillant N

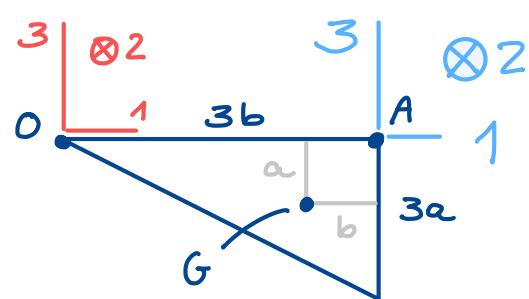
$$N = \frac{2}{3}mg + \frac{ac}{b}v_0 \cos\theta - \frac{3}{4}ma\dot{\theta}^2$$

Calculeu-lo, per practicar

## Tensor d'inèrcia complet de la placa

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(O) &= \mathbb{I}(G) + \mathbb{I}^{\oplus}(O) \\ \mathbb{I}(A) &= \mathbb{I}(G) + \mathbb{I}^{\oplus}(A) \end{aligned} \quad \left| \quad \mathbb{I}(O) = \mathbb{I}(A) + \mathbb{I}^{\oplus}(O) - \mathbb{I}^{\oplus}(A) \right.$$

$$\mathbb{I}(A) = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & I_{13} \\ 0 & I_1 + I_3 & 0 \\ I_{13} & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$



$$I_1 = \frac{1}{6}m(3a)^2 = \frac{3}{2}ma^2$$

$$I_3 = \frac{1}{6}m(3b)^2 = \frac{3}{2}mb^2$$

$$I_{13} = -\frac{1}{12}m(3a)(3b) = -\frac{3}{4}mab$$

$$\mathbb{I}(A) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}ma^2 & 0 & -\frac{3}{4}mab \\ 0 & \frac{3}{2}m(a^2+b^2) & 0 \\ -\frac{3}{4}mab & 0 & \frac{3}{2}mb^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}^{\oplus}(O) = \begin{bmatrix} ma^2 & 0 & 2mab \\ 0 & m(a^2+4b^2) & 0 \\ 2mab & 0 & 4mb^2 \end{bmatrix}$$

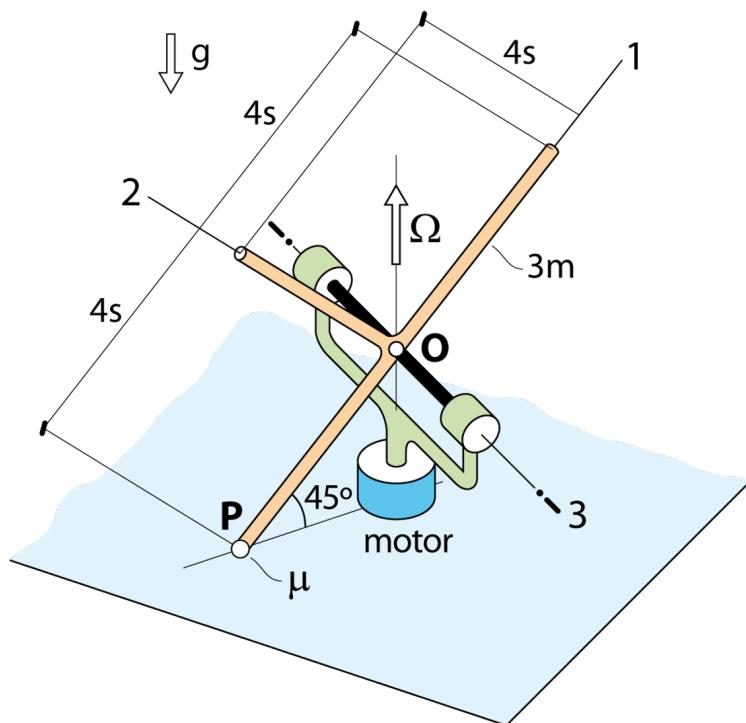
$$\mathbb{I}^{\oplus}(A) = \begin{bmatrix} ma^2 & 0 & -mab \\ 0 & m(a^2+b^2) & 0 \\ -mab & 0 & mb^2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbb{I}(O) = \mathbb{I}(A) + \mathbb{I}^{\oplus}(O) - \mathbb{I}^{\oplus}(A) =}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}ma^2 & 0 & \frac{9}{4}mab \\ 0 & \frac{3}{2}m(a^2+3b^2) & 0 \\ \frac{9}{4}mab & 0 & \frac{9}{2}mb^2 \end{bmatrix}$$

## Sòlid en contacte amb el terra

Problema I, examen final 1997-98



El sòlid de la figura està format per tres barres idèntiques, primes i homogènies, unides en la forma indicada.

El sòlid recolza a  $P$  sobre el terra, amb inclinació de  $45^\circ$ , i està articulat a la forquilla giratòria per mitjà d'un enllaç de revolució d'eix horitzontal perpendicular al pla del sòlid. La forquilla gira amb velocitat angular constant  $\Omega$  al voltant de l'eix vertical que passa per  $O$  impulsada per un motor.

Entre el sòlid i el terra hi ha freq sec de coeficient  $\mu$ .

La forquilla i el motor tenen massa negligible.

Determineu:

- L'expressió de la força normal  $N$  que rep el sòlid a  $P$ .
- Valor crític d' $\Omega$  a partir del qual es perd el contacte.
- El parell  $\Gamma$  que fa el motor per a garantir  $\Omega$  constant.
- L'equació del moviment per a l'angle  $\theta$  entre el sòlid i la forquilla, en la situació en la que s'ha perdut el contacte a  $P$ .

L'enllaç a  $P$  (c.p.a.ll.) és unilateral. D'entrada posarem en dubte que es mantingui. Farem la hipòtesi que es manté ( $N > 0$ ), calcularem  $N$  efd  $\Omega$ , i si veiem que  $N$  no fer-se zero caldrà estudiar el sistema per al cas en que  $P$  ha perdut contacte amb  $T$ .

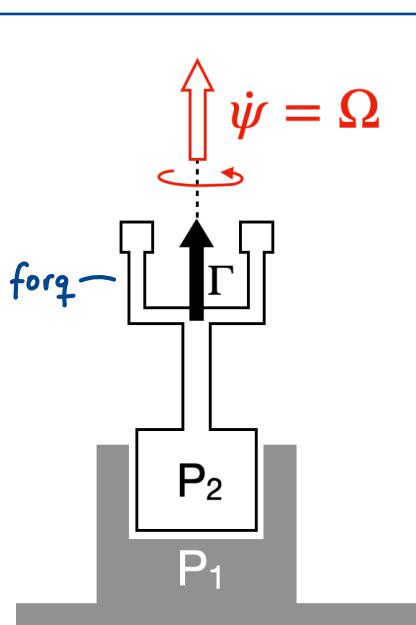
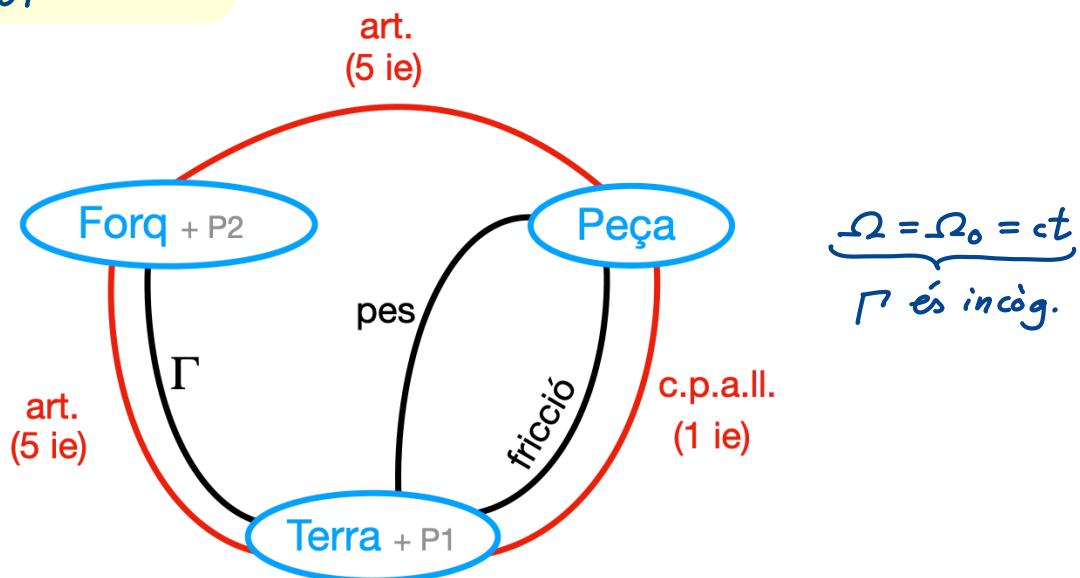
Suposant que l'enllaç a  $P$  es manté:

$$\Rightarrow \Omega > \Omega_{\text{crítica}}$$

Sistema amb 1 GL forçat ( $\dot{\psi} = \Omega$ ). El motor fa el parell  $\Gamma$  que calgui per garantir  $\dot{\psi} = \Omega = \text{ct}$ . Clarament tindrem  $\ddot{\psi} = 0$ , i per tant  $\ddot{\psi}$  no és una incògnita. En canvi,  $\Gamma$  sí que ho és.

(a) Força normal que rep el sólid a  $P$  + (b) Valor  $\Omega_{\text{crític}}$

DG1

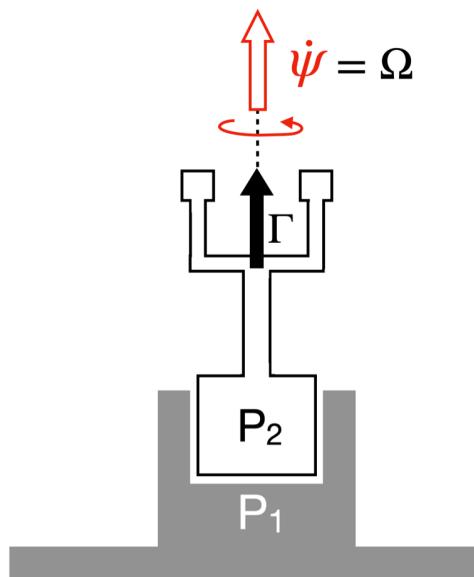


Cal pensar el motor així: Com dues peces  $P_1$  i  $P_2$  (estator i rotor) solidàries al terra i a forq., respectivament. L'enllaç entre  $P_1$  i  $P_2$  és una articulació. El motor aplica un parell  $\Gamma$  a forq. (\*) que garanteix  $\dot{\psi} = \Omega = \text{ct}$ . En aq. exercici, per tant,  $\ddot{\psi}$  no és incògnita (val 0), i  $\Gamma$  sí que ho és. En altres exercicis podria ser a l'inrevés: ens donen  $\Gamma$ , i  $\ddot{\psi}$  seria una incògnita.

(\*) No a la pega amb forma de T !

Recordeu:

## En un motor



Recordeu

$\Gamma$  conegit  $\Rightarrow \dot{\psi}$  és incògnita

$\ddot{\psi}$  coneguda  $\Rightarrow \Gamma$  és incògnita

En aquest exercici

$\dot{\psi} = \Omega = ct \Rightarrow \dot{\psi} = 0$  (coneiguda)

$\Gamma$  serà incògnita

## Full ruta per calcular $N$

Volem  $N$  del terra sobre P. Ergo el sist. ha d'incloure la pega com a mínim. Analitzant el DGI veiem:

Sist.	Incògnites	# incòg. total	Problema
Pega + forq	6 ie, $\Gamma$	7	INDETERMINAT
Pega	6 ie	6	DETERMINAT!

Per tant triarem sist = Pega

O és bon punt per aplicar TMC  
(filtra les forces forq  $\rightarrow$  pega)

$N$  crea moment en dir. 3

Cap altra ie crea moment  
en dir. 3<sup>(\*)</sup>, ja que el  
torsor forq  $\rightarrow$  pega a O té,  
en la part de moments:

$$\{\bar{M}_{\text{forq} \rightarrow \text{pega}}(O)\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

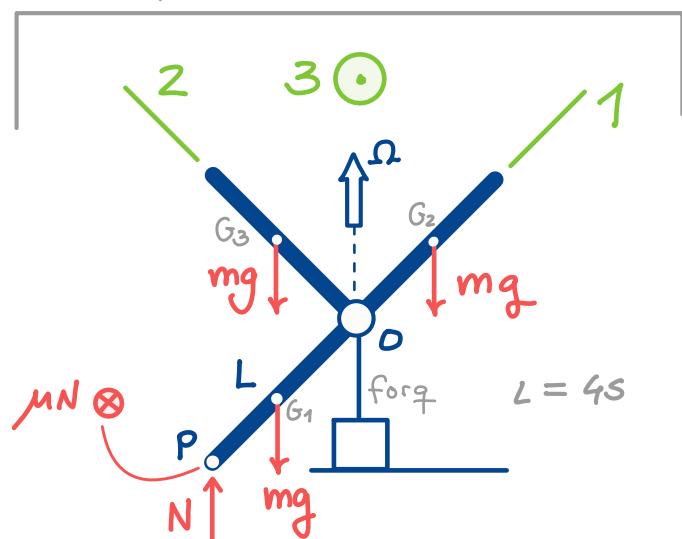
Ja ho tenim!  $\longrightarrow$

FULL RUTA  
per obtenir  $N$

SIST = Pega, TMC(O)]<sub>3</sub>

## Forces sobre la pega

(per no complicar el dibuix, ometo  
les del torsor forq  $\rightarrow$  pega)



## TMC a O (fix a T)

Forces forq  $\rightarrow$  pega  
no dibuixades

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(O) \Big|_3 = \dot{\bar{H}}_{\text{RTO}}(O) \Big|_3$$

$$\left( \overline{OP} \times (\uparrow N) \right) + \left( \overline{OG_1} \times (\downarrow mg) \right) \quad (I)$$

El torsor  
forq  $\rightarrow$  pega  
a O, en base B,  
no té moment  
en dir. 3

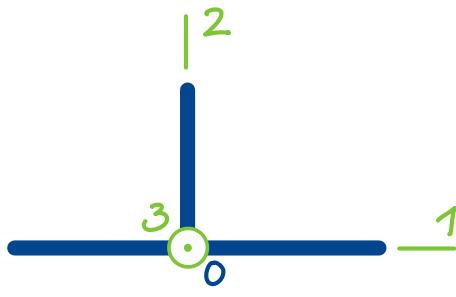
(\*) El pes en crea però no és ie. És formulable!

$$O \in \text{Pega} \Rightarrow \bar{H}_{RTO}(o) = \bar{\Omega}(o) \bar{\Omega}_{RTO}^{\text{Pega}} = T \text{ aquí}$$

$\bar{\Omega}(o)$  qualitativ

Sòlid pla | 3 és DPI  
 $I_{33} = I_{11} + I_{22}$

Clarament |  $I_{12} = 0$   
 $I_{22} > I_{11}$   
 (De fet:  
 $I_{22} = 2 I_{11}$ )

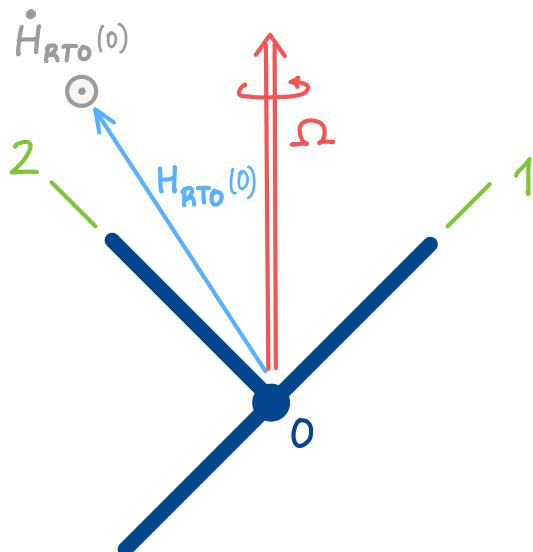


$$[\bar{\Omega}(o)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & 2I & \\ & & 3I \end{bmatrix} \quad (\text{Ja calcularem } I \text{ després})$$

$\bar{H}_{RTO}(o)$

$$\{\bar{H}_{RTO}(o)\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & 2I & \\ & & 3I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega/\sqrt{2} \\ \Omega/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} I \\ 2I \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II})$$

$\bar{H}_{RTO}(o)$  té valor ct. Sols té canvi de dir. si é en dir. 3:



$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(o) = \dot{\bar{\Omega}} \underline{\bar{H}_{RTO}(o)}$$

valor de  $\dot{\bar{H}}_{RTO}(o)$

Progressem de moment  
 sense calcular el valor  
 $\dot{\bar{H}}_{RTO}(o)$  explícitament, i  
 a veure què podem  
 deduir!

$TMC(0)]_3$  queda

$$\left(\vec{\otimes} NL \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\vec{\odot} mg \frac{L}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \vec{\odot} \dot{H}_{RTO}(0)$$

$$NL \frac{\sqrt{2}}{2} - mg \frac{L}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\dot{H}_{RTO}(0)$$

$$N = \frac{mg}{2} - \frac{\dot{H}_{RTO}(0)}{L/\sqrt{2}} \quad (\text{III})$$

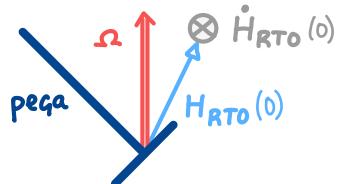
D'aquí confirmem que  $N$  tendeix a reduir-se quan  $\Omega$  augmenta, ja que

$$\Omega = 0 \Rightarrow \dot{H}_{RTO}(0) = 0 \Rightarrow N = mg/2$$

$$\Omega > 0 \Rightarrow \dot{H}_{RTO}(0) > 0 \Rightarrow N < mg/2$$

Fixem-nos que si hagués estat  $I_{22} < I_{11}$

Hauríen tingut



i  $N$  tendiria a augmentar quan augmentem  $\Omega$ .

Hi ha una  $\Omega$  crítica per sobre de la qual  $N=0$  i el contacte es perd. ( $N=0$  és la cond. límit d'enllaç).

Deixat com a deures

Derivem el vec.  $\bar{H}_{RTO}(0)$  de l'eq (II) analíticament per trobar l'expressió d' $\Omega$  crítica:

$$\left\{ \dot{\bar{H}}_{RTO}(0) \right\}_B = \underbrace{\frac{d}{dt} \text{(components)}}_{\Omega^B} + \underbrace{\frac{\Omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{vec. sense derivar}} \times \underbrace{\frac{\Omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I \\ 2I \\ 0 \end{pmatrix}}_{\dot{H}_{RTO}(0)} = \frac{I\Omega^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

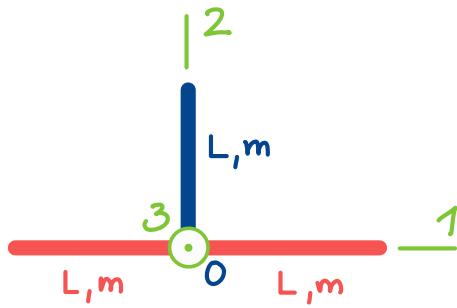
$$N = \frac{mg}{2} - \frac{\frac{I\Omega^2}{2}}{L/\sqrt{2}} = \frac{mg}{2} - \frac{I\Omega^2\sqrt{2}}{2L} \quad (\text{IV})$$

$$N > 0 \Leftrightarrow mgL - I\Omega^2\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow \Omega^2 < \frac{mgL}{I\sqrt{2}}$$

$$\Omega_{\text{crítica}} = \sqrt{\frac{mgL}{I\sqrt{2}}} \quad (\text{V})$$

## Valor del mom. inèrcia I

$$2I = \text{mom. inèrcia barra vermella resp. eix 2}$$



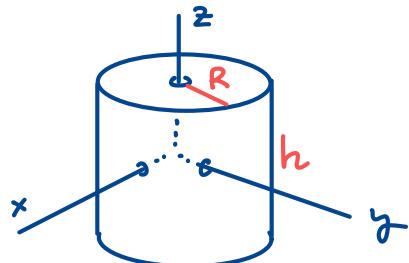
Cilindre  $| R = 0 \quad h = 2L$

$$2I = 2m \left( \frac{0^2}{4} + \frac{(2L)^2}{12} \right) = \frac{2}{3} mL^2$$

$$I = \frac{mL^2}{3} = \frac{m(4s)^2}{3} = \frac{16}{3} ms^2$$

$$I = \frac{16}{3} ms^2 \quad (\text{VI})$$

A taules tenim



$$I_{xx} = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

## N utilitzant I quantitatiu

$$\boxed{N = \frac{mg}{2} - \frac{16}{3} ms^2 \cancel{\frac{\Omega^2 \sqrt{2}}{2 \cdot (4s)}} = \frac{mg}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} ms \Omega^2} \quad (\text{VII})$$

## $\Omega_{\text{càtica}}$ utilitzant I quantitatiu:

$$\boxed{\Omega_{\text{càtica}} = \sqrt{\frac{mgL}{\sqrt{2} I}} = \sqrt{\frac{\cancel{mg} 4s}{\sqrt{2} \cancel{\frac{16}{3} ms^2}}} = \sqrt{\frac{3g}{4\sqrt{2}s}}} \quad (\text{VIII})$$

(c) Parell motor  $\Gamma$  per mantenir  $\Omega = \text{ct}$

Ens adonem que triant

Full  
de nota

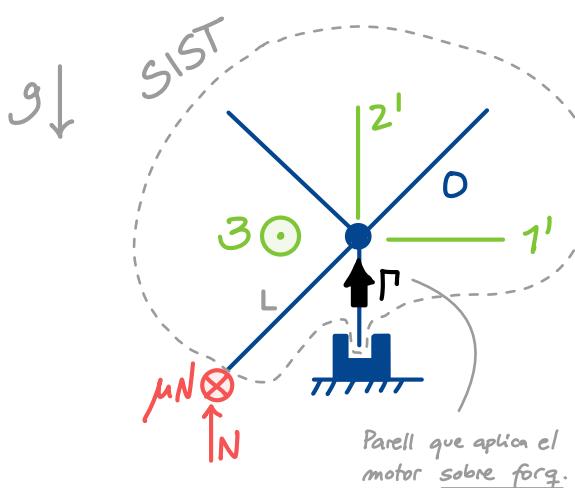
$$\boxed{\text{Sist} = \text{forq} + \text{pega}, \quad TMC(0)} \quad \text{vertical}$$

obtindrem una equació on l'única incògnita és  $\Gamma$ , ja

que el motor no pot aplicar moments d'eixos en dir 2' sobre forq (només  $\Gamma$ ).

L'única força d'eixos que crea moment en dir 2' és  $\otimes \mu N$  (i ja sabem  $N$  d'abans).

El pes de la pega crea mom. en dir. 3



$$\sum \overline{M}_{\text{ext}}(0)_{2'} = \dot{\overline{H}}_{RTO}(0)_{2'} \quad \begin{matrix} \text{Abans hem vist que} \\ \dot{\overline{H}}_{RTO} \text{ te dir } \odot \end{matrix}$$

$$\underbrace{\left( \downarrow MN \frac{L}{\sqrt{2}} \right) + (\uparrow \Gamma) = 0}_{\parallel}$$

$$MN \frac{L}{\sqrt{2}} - \Gamma = 0 \quad \text{Eq. (VII)}$$

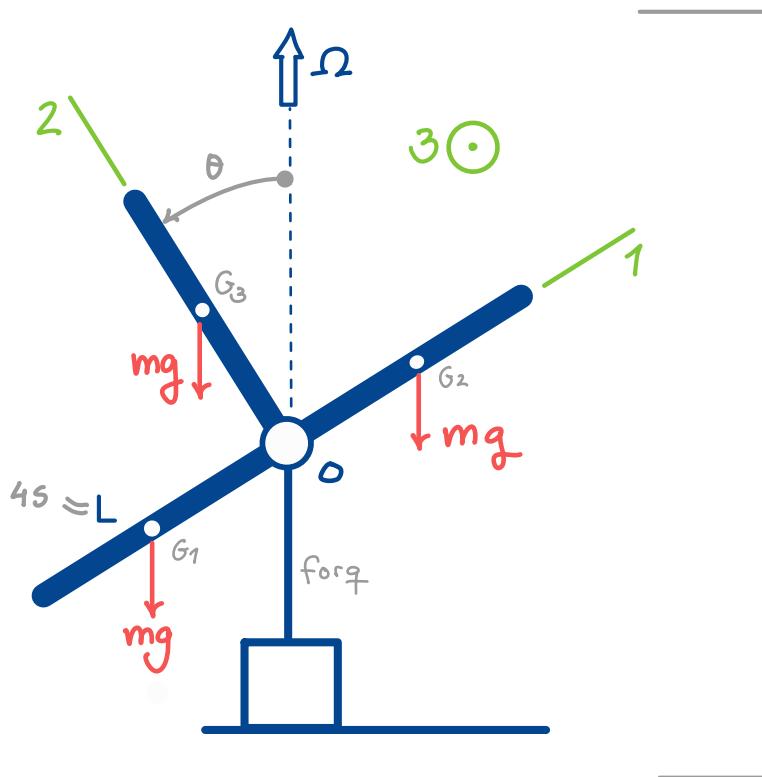
$$\boxed{\Gamma = \frac{\mu L}{\sqrt{2}} \cdot N = \frac{M^4 s}{\sqrt{2}} N =}$$

$$= \mu s 2\sqrt{2} \left( \frac{mg}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} ms \Omega^2 \right)$$

(d) Eg. del mov. per a  $\theta$  quan s'ha perdut el contacte

Ara el sist. té 2 GL. |  $\Omega$  (forçat, com abans)  
 $\theta$  (lliure)

Definim  $\theta$  així:



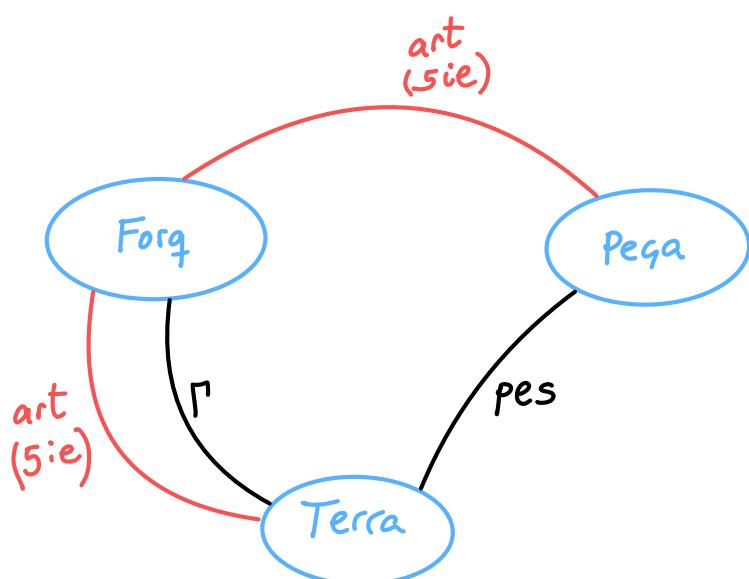
Torsor forq  $\rightarrow$  pega:

[no dibuixat per no complicar-ho]

$$\{F_{\text{forq} \rightarrow \text{pega}}\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{M}_{\text{forq} \rightarrow \text{pega}(b)}\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El DGI és:



$\theta$  solo afecta la cinemàtica de la pega  $\Rightarrow$  Examinem subsistemes que continguin la pega i veiem que:

Sistema	Incògnites	#incògn. total	Problema
Pega	5 ie, $\ddot{\theta}$	6	DET
Pega + Forq.	5 ie, $\Gamma$ , $\ddot{\theta}$	7	INDET

Pel sist = pega  $\rightarrow$  Problema determinat  $\Rightarrow$  Començem explorant aquest sist. Tenint en compte que el tensor forq  $\rightarrow$  pega a 0 no té moment en dir. 3, i que la resta de forces sobre la pega són formulables (els pesos) ens adonem que aplicant el TMC a 0, la comp. en dir. 3 no contingrà ie!

Per tant



Full de ruta per a l'eq. mov. coord  $\theta$

SIST = Pega  
 $TMC(0)]_3$

$TMC(0)]_3$  (0 fix a pega)

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) = \dot{\bar{H}}_{RTD}(0)$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ mg \frac{L}{2} \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (\square)$$

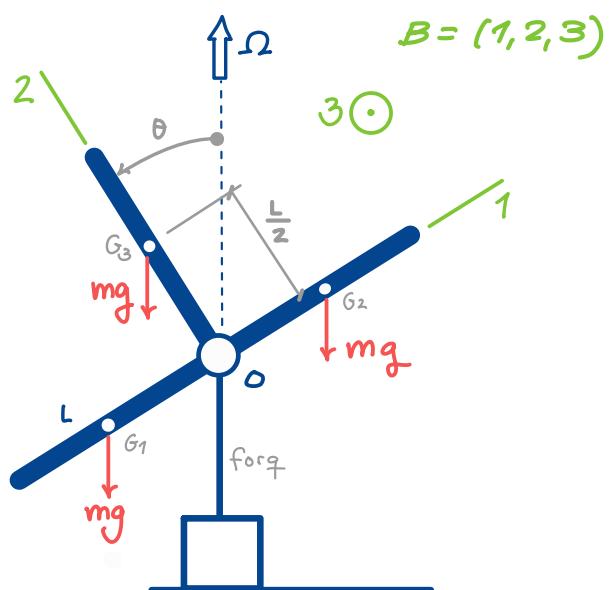
$$\left\{ \bar{H}_{RTD}(0) \right\}_B = \begin{bmatrix} I & 2I & 3I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega \sin \theta \\ \Omega \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} =$$

↓  
 Ω RTD  
 ↓  
 Ω pega

$$= \begin{Bmatrix} I \Omega \sin \theta \\ 2I \Omega \cos \theta \\ 3I \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{F}_{forq \rightarrow pega} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{M}_{forq \rightarrow pega}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Només cal 3<sup>a</sup> comp.

$$\dot{H}_{RTO}(0) = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ 3I\ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Omega \sin \theta \\ \Omega \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I\Omega \sin \theta \\ 2I\Omega \cos \theta \\ 3I\dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ 3I\ddot{\theta} + I\Omega^2 \sin \theta \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (0)$$

Igualant  $[0 = 0]_3$ :

$$mg \frac{L}{2} \sin \theta = 3I\ddot{\theta} + I\Omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$3I\ddot{\theta} + (I\Omega^2 \cos \theta - mg \frac{L}{2}) \sin \theta = 0$$

Eq. mov. per a la  
coordenada  $\theta$

Si la volem precisar més, recordem d'abans que

$$I = \frac{16}{3} \text{ ms}^2$$

$$L = 4s$$

Substituint aquests valors a l'equació queda així:

$$16 \cancel{\text{ms}^2} \ddot{\theta} + \left( \frac{16}{3} \cancel{\text{ms}^2} \Omega^2 \cos \theta - \cancel{mg} \cancel{2s} \right) \sin \theta = 0$$

$$48s \ddot{\theta} + (16s \Omega^2 \cos \theta - 6g) \sin \theta = 0$$

$$24s \ddot{\theta} + (8s \Omega^2 \cos \theta - 3g) \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{1}{3} \Omega^2 \cos \theta - \frac{g}{8s} \right) \sin \theta = 0$$

Eq. mov. per a la  
coordenada  $\theta$   
(precisada!)