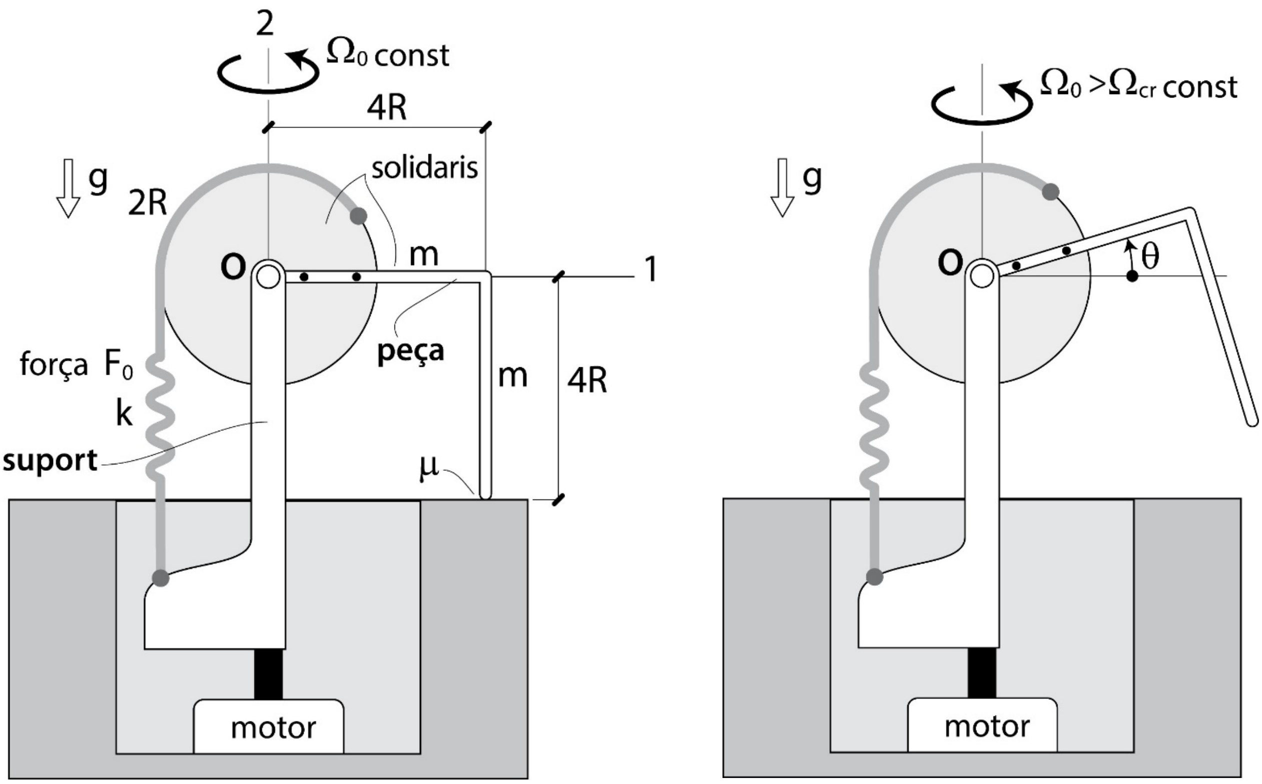
MECÀNICA **ETSEIB, 16 de juny de 2025** **Curs 2024-25 QP**

PROBLEMA GLOBAL (1h 45min)

La peça està formada per dues barres homogènies, de massa m i longitud 4R cadascuna d'elles, solidàries a una politja de radi 2R. La politja està articulada a un suport que gira amb velocitat angular Ω_0 constant respecte del terra sota l'acció d'un motor.

Una molla lineal de constant k està inserida en un fil que té un extrem lligat al suport i un altre a la politja. Per a la configuració $\theta = 0$, la molla està estirada amb una força F_0, i la peça recolza sobre el terra. Entre terra i peça hi ha frec sec de coeficient μ.

Es negligeixen totes les masses (tret de la de la peça), i les friccions associades a les articulacions.



L'enunciat del problema podria ser simplement "determina l'equació del moviment per a la coordenada θ". No obstant, se suggereixen els següents passos intermedis:

1. Fes el Diagrama General d'Interaccions del sistema per a la configuració $\theta = 0$. En les interaccions d'enllaç, indica quantes incògnites introdueixen. Es tracta d'un problema determinat o indeterminat? Raona la resposta. **[1p]**

2. Fes una avaluació qualitativa del tensor d'inèrcia $\mathrm{II}(\mathbf{O})$, i fes-ne després l'avaluació quantitativa. **[1,5p]**

3. Per a quin valor crític (Ω_{cr}) de Ω_0 la peça perd contacte amb el terra? **[2p]**

4. Quin valor màxim pot tenir F_0 per tal que, amb el motor aturat, la peça recolzi sobre el terra? **[0,5p]**

5. Quin és el valor del parell motor que garanteix Ω_0 constant mentre la peça toca a terra? **[1p]**

6. Per a $\Omega_0 > \Omega_{cr}$ (i peça sense tocar a terra), quina és l'acceleració del centre d'inèrcia del sistema respecte del terra? **[1p]**

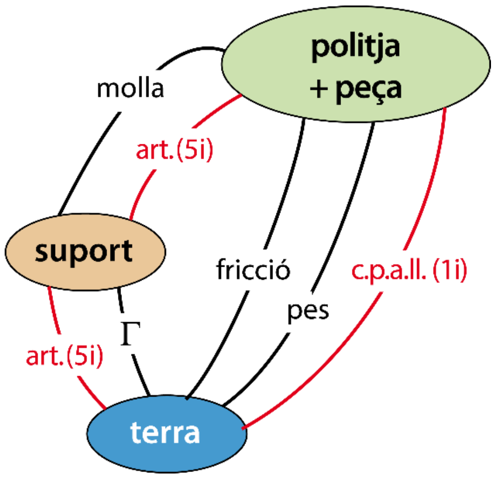
7. Formula la força de la molla en funció de θ. **[0,5p]**

8. Per a $\Omega_0 > \Omega_{cr}$ (i peça sense tocar a terra), determina l'equació del moviment per a la coordenada θ. **[2p]**

9. Quina és l'equació que defineix les configuracions d'equilibri θ_{eq} de la peça respecte del suport? **[0,5p]**

TOTES LES RESPOSTES HAN D'ESTAR TOTALMENT JUSTIFICADES.

1. Fes el Diagrama General d'Interaccions del sistema per a la configuració $\theta=0$. En les interaccions d'enllaç, indica quantes incògnites introdueixen. Es tracta d'un problema determinat o indeterminat? Raona la resposta. **[1p]**



c.p.a.ll. = contacte puntual amb lliscament

1 GL: rotació del suport respecte del terra (forçat)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nombre d'eqs.}=2\text{ sòlids}\times\dfrac{6\text{eqs.}}{\text{sòlid}}=12\text{ eqs.}\\ \text{Nombre d'incs.}=1\text{ associada al GL + 11 d'enllaç}=12\text{ incs.}\end{array}\right\}\text{ DETERMINAT}$$

2. Fes una avaluació qualitativa del tensor d'inèrcia $\mathrm{II}(\mathbf{O})$, i fes-ne després l'avaluació quantitativa. **[1,5p]**

Avaluació qualitativa:

Barra horitzontal: $\left[\mathrm{II}_{\text{hor}}(\mathbf{O})\right]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{I} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{I}\end{bmatrix}$

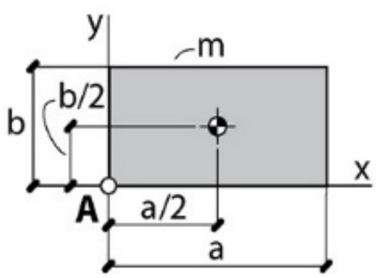
Barra vertical: $\left[\mathrm{II}_{\text{vert}}(\mathbf{O})\right]=\begin{bmatrix}\mathrm{I}'_{11} & +|\mathrm{I}_{12}| & 0\\ +|\mathrm{I}_{12}| & \mathrm{I}'_{22}(>\mathrm{I}'_{11}) & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{I}'_{11}+\mathrm{I}'_{22}\end{bmatrix}$

$$\left[\mathrm{II}(\mathbf{O})\right]=\left[\mathrm{II}_{\text{hor}}(\mathbf{O})\right]+\left[\mathrm{II}_{\text{vert}}(\mathbf{O})\right]\ \Rightarrow\ \boxed{\left[\mathrm{II}(\mathbf{O})\right]=\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{11} & +|\mathrm{I}_{12}| & 0\\ +|\mathrm{I}_{12}| & \mathrm{I}_{22}(>\mathrm{I}_{11}) & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{11}+\mathrm{I}_{22}\end{bmatrix}}$$

Avaluació quantitativa:

$$\left[\mathrm{II}_{\text{hor}}(\mathbf{O})\right]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{I}_{\mathrm{O}} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{\mathrm{O}}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}m(4R)^2\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

El moment d'inèrcia I_{O} de la barra coincideix amb el d'un rectangle de gruix zero $(b=0, a=4R)$.



$\mathrm{II}(\mathbf{A})$

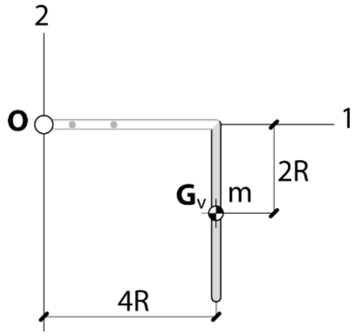
$\mathrm{I}_{xx}=\frac{1}{3}mb^2$

$\mathrm{I}_{xy}=-\frac{1}{4}mab$

Teorema de Steiner:

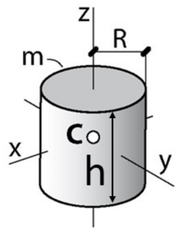
$$\left[\mathrm{II}_{vert}(\mathbf{O})\right]=\left[\mathrm{II}_{vert}(\mathbf{G}_{vert})\right]+\left[\mathrm{II}^{\oplus}_{vert}(\mathbf{O})\right]$$

$$\left[\mathrm{II}_{vert}(\mathbf{G}_{vert})\right]=\begin{bmatrix} I_{Gvert} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gvert} \end{bmatrix}$$



El moment d'inèrcia I_{Gvert} de la barra vertical coincideix amb el d'un cilindre de radi zero $(R=0, h=4R)$.

$$\left[\mathrm{II}_{vert}(\mathbf{G}_{vert})\right]=\frac{1}{12}m(4R)^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\frac{4}{3}mR^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$\mathrm{II}(\mathbf{C})$

$I_{xx}=m(\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{12}h^2)$

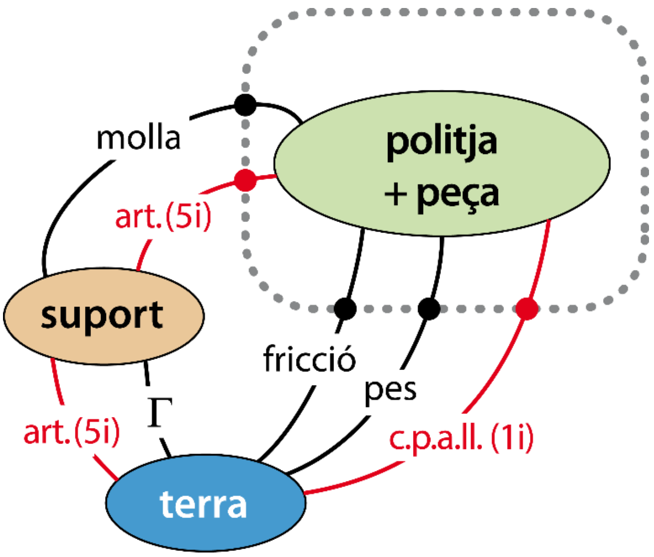
$I_{zz}=\frac{1}{2}mR^2$

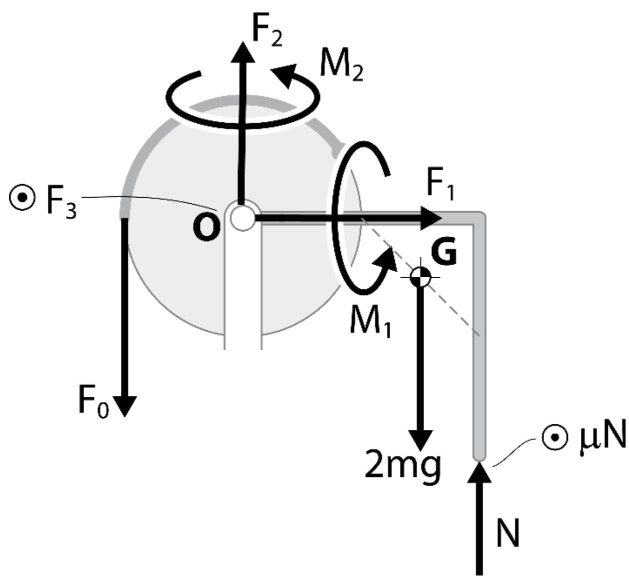
$$\left[\mathrm{II}^{\oplus}_{vert}(\mathbf{O})\right]=\begin{bmatrix} m(2R)^2 & -m(4R)(-2R) & 0 \\ -m(4R)(-2R) & m(4R)^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(2R)^2+m(4R)^2 \end{bmatrix}=4mR^2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathrm{II}_{vert}(\mathbf{O})\right]=\frac{4}{3}mR^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+4mR^2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}=\frac{8}{3}mR^2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathrm{II}(\mathbf{O})\right]=\left[\mathrm{II}_{hor}(\mathbf{O})\right]+\left[\mathrm{II}_{vert}(\mathbf{O})\right] \Rightarrow \boxed{\left[\mathrm{II}(\mathbf{O})\right]=\frac{8}{3}mR^2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}}$$

3. Per a quin valor crític (Ω_{cr}) de Ω_0 la peça perd contacte amb el terra?. **[2p]**





La pèrdua de contacte implica l'anul·lació de la força normal N del terra sobre la peça.

Full de ruta:

SISTEMA: peça+politja; TMC a $\mathbf{O}]_3$ $\quad \left[\sum \bar{M}_{ext}(\mathbf{O})\right]_3 = \left.\dot{\bar{H}}_{RTO}(\mathbf{O})\right]_3$

$$\sum \bar{M}_{ext}(\mathbf{O}) = \dot{\bar{H}}_{RTO}(\mathbf{O}) \text{ , } \left.\sum \bar{M}_{ext}(\mathbf{O})\right]_3 = (\odot F_0 2R) + (\otimes 2mg3R) + (\odot N4R) = \left[\otimes 2R(3mg - F_0 - 2N)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{O} \in \text{peça} \\ \text{RTO} = \text{terra (T)}\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{H}_{RTO}(\mathbf{O}) = \mathrm{II}(\mathbf{O})\bar{\Omega}^{peça}_{RTO} = \mathrm{II}(\mathbf{O})\bar{\Omega}_0$$

$$\left\{\bar{H}_{RTO}(\mathbf{O})\right\} = \frac{8}{3}mR^2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{8}{3}mR^2\Omega_0 \begin{Bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{H}_{RTO}(\mathbf{O}) = \left(\Uparrow \frac{64}{3}mR^2\Omega_0\right) + \left(\Rightarrow 8mR^2\Omega_0\right)$$

Derivada geomètrica:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\Uparrow \frac{64}{3}mR^2\Omega_0\right): \text{ valor i direcció constants} \\ \left(\Rightarrow 8mR^2\Omega_0\right): \text{ valor constant, direcció variable per causa de } \Omega_0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\dot{\bar{H}}_{RTO}(\mathbf{O})\right]_3 = \left(\otimes 8mR^2\Omega_0^2\right)$$

$$(\odot 2F_0) + (\otimes 6mg) + (\odot 4N) = \left(\otimes 8mR\Omega_0^2\right) \Rightarrow \boxed{N = \frac{1}{2}\left(3mg - F_0 - 4mR\Omega_0^2\right)}$$

$$\text{Pèrdua de contacte: } \Omega_0 = \Omega_{cr} \Rightarrow N = 0 \Rightarrow \boxed{\Omega_{cr} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{R} - \frac{F_0}{mR}}}$$

4. Quin valor màxim pot tenir F_0 per tal que, amb el motor aturat, la peça recolzi sobre el terra? **[0,5p]**

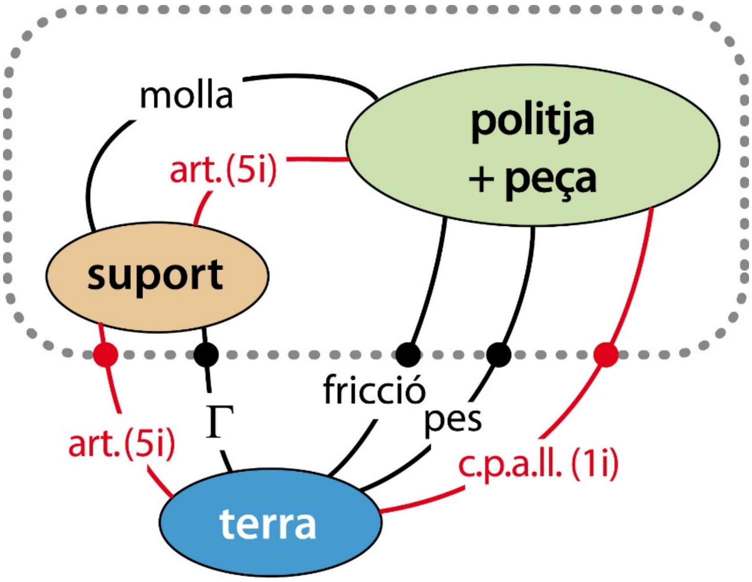
Perquè la peça recolzi al terra, cal que $N > 0$.

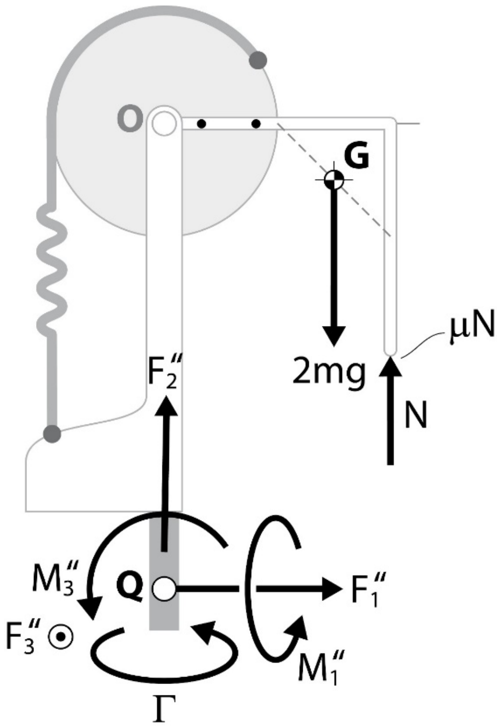
La força normal s'ha calculat a l'apartat 3: $N = \frac{1}{2}\left(3mg - F_0 - 4mR\Omega_0^2\right)$

Amb el motor aturat $(\Omega_0 = 0)$: $N = \frac{1}{2}(3mg - F_0)$

El valor màxim de F_0 correspon a la condició límit $N = 0 \Rightarrow \boxed{F_{màx} = 3mg}$

5. Quin és el valor del parell motor que garanteix Ω_0 constant mentre la peça toca a terra? **[1p]**





Full de ruta:

SISTEMA: tot

TMC a $\mathbf{O}]_{\text{vert}}$ $\quad \sum \bar{M}_{\text{ext}}(\mathbf{O})\big]_2 = \dot{\bar{H}}_{\text{RTO}}(\mathbf{O})\big]_2$

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(\mathbf{O})\big]_2 = (\Uparrow \Gamma) + (\Downarrow \mu N 4R)$$

La força normal N ja s'ha calcult a l'apartat (3), i la derivada del moment cinètic també:

$$\left.\begin{array}{l} N = \dfrac{1}{2}\left(3mg - F_0 - 4mR\Omega_0^2\right) \\ \dot{\bar{H}}_{\text{RTO}}(\mathbf{O}) = \left(\otimes 8mR^2\Omega_0^2\right) \;\Rightarrow\; \dot{\bar{H}}_{\text{RTO}}(\mathbf{O})\big]_{\text{vert}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Gamma = 2\mu R\left(3mg - F_0 - 4mR\Omega_0^2\right)}$$

6. Per a $\Omega_0 > \Omega_{cr}$ (i peça sense tocar a terra), quina és l'acceleració del centre d'inèrcia del sistema respecte del terra? **[1p]**

Quan $\Omega_0 > \Omega_{cr}$, el sistema té un grau de llibertat addicional que és lliure $(\dot{\theta})$: $\bar{\Omega}_T^{\text{peça}} = \bar{\Omega}_0 + \bar{\dot{\theta}}$

Cinemàtica del Sòlid Rígid (CSR):

$$\bar{a}_T(\mathbf{G}) = \bar{a}_T(\mathbf{O}) + \bar{\Omega}_T^{\text{peça}} \times \left(\bar{\Omega}_T^{\text{peça}} \times \overline{\mathbf{OG}}\right) + \bar{\alpha}_T^{\text{peça}} \times \overline{\mathbf{OG}}$$

$$\left\{\bar{\Omega}_T^{\text{peça}}\right\} = \begin{Bmatrix} \Omega_0 \sin\theta \\ \Omega_0 \cos\theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad , \quad \left\{\bar{\alpha}_T^{\text{peça}}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\bar{\Omega}_T^{\text{peça}}\right\} + \left\{\bar{\Omega}_T^{B} \times \bar{\Omega}_T^{\text{peça}}\right\}$$

La base està orientada igual que la peça, per tant $\bar{\Omega}_T^B = \bar{\Omega}_T^{peça}$, i $\bar{\Omega}_T^B \times \bar{\Omega}_T^{peça} = \bar{0}$:

$$\left\{\bar{\alpha}_T^{peça}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\bar{\Omega}_T^{peça}\right\} = \begin{Bmatrix} \Omega_0\dot{\theta}\cos\theta \\ -\Omega_0\dot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{a}_T(\mathbf{G})\right\} = \begin{Bmatrix} \Omega_0\sin\theta \\ \Omega_0\cos\theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} \Omega_0\sin\theta \\ \Omega_0\cos\theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 3R \\ -R \\ 0 \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} \Omega_0\dot{\theta}\cos\theta \\ -\Omega_0\dot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 3R \\ -R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

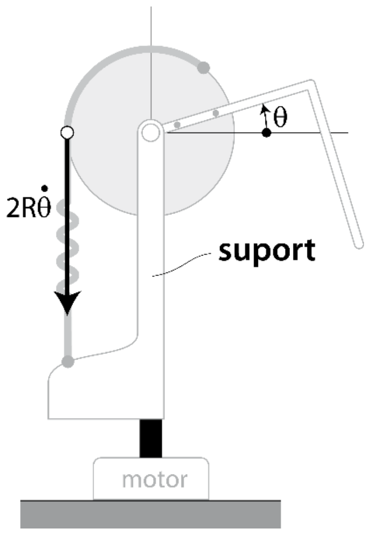
$$\boxed{\left\{\bar{a}_T(\mathbf{G})\right\} = \begin{Bmatrix} R\ddot{\theta} - 3R\dot{\theta}^2 - R\Omega_0^2(\sin\theta + 3\cos\theta)\cos\theta \\ 3R\ddot{\theta} + R\dot{\theta}^2 + R\Omega_0^2(\sin\theta + 3\cos\theta)\sin\theta \\ 2R\Omega_0\dot{\theta}(3\sin\theta - \cos\theta) \end{Bmatrix}}$$

7. Formula la força de la molla en funció de θ. **[0,5p]**

$F_m^{at} = F_0 + k\Delta\rho$

L'anàlisi de velocitats dels extrems de la molla respecte del suport condueix a:

$\dot{\rho} = -2R\dot{\theta} \Rightarrow \Delta\rho = -2R\theta = \Rightarrow \boxed{F_m^{at} = F_0 - 2kR\theta}$

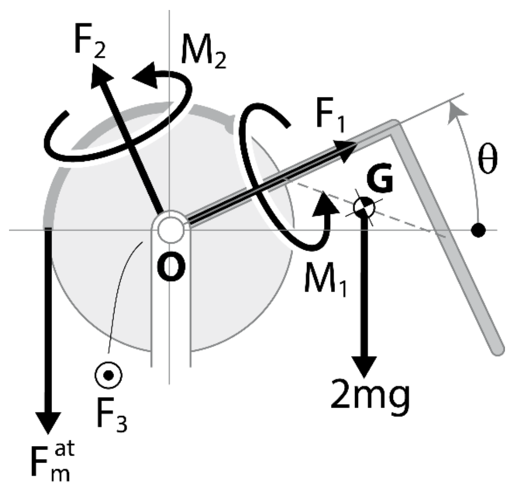


8. Per a $\Omega_0 > \Omega_{cr}$ (i peça sense tocar a terra), determina l'equació del moviment per a la coordenada θ. **[2p]**

<u>Full de ruta:</u>

$$\left.\begin{array}{l}\text{SISTEMA: peça+politja} \\ \text{TMC a } \mathbf{O}]_3\end{array}\right\} \quad \sum \bar{M}_{ext}(\mathbf{O})\Big]_3 = \dot{\bar{H}}_{RTO}(\mathbf{O})\Big]_3$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(\mathbf{O})\Big]_3 = \left[\otimes 2mgR(\sin\theta + 3\cos\theta)\right] + \left(\odot 2RF_m^{at}\right)$$



$$\bar{H}_{RTO}(\mathbf{O}) = \mathrm{II}(\mathbf{O})\left(\bar{\Omega}_0 + \bar{\dot{\theta}}\right)$$

$$\left\{\bar{H}_{RTO}(\mathbf{O})\right\} = \frac{8}{3}mR^2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Omega_0 \sin\theta \\ \Omega_0 \cos\theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \frac{8}{3}mR^2\begin{Bmatrix} \Omega_0(2\sin\theta + 3\cos\theta) \\ \Omega_0(3\sin\theta + 8\cos\theta) \\ 10\dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\dot{\bar{H}}_{RTO}(\mathbf{O})\right\} = \frac{8}{3}mR^2\begin{Bmatrix} \Omega_0\dot{\theta}(2\cos\theta - 3\sin\theta) \\ \Omega_0\dot{\theta}(3\cos\theta - 8\sin\theta) \\ 10\ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Omega_0 \sin\theta \\ \Omega_0 \cos\theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \frac{8}{3}mR^2\begin{Bmatrix} \Omega_0(2\sin\theta + 3\cos\theta) \\ \Omega_0(3\sin\theta + 8\cos\theta) \\ 10\dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\left.\dot{\bar{H}}_{RTO}(\mathbf{O})\right]_3 = \frac{80}{3}mR^2\ddot{\theta} + 8mR^2\Omega_0^2\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(\mathbf{O})\Big]_3 = \left.\dot{\bar{H}}_{RTO}(\mathbf{O})\right]_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{40}{3}\ddot{\theta} + 4\Omega_0^2\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta\right) + \frac{g}{R}(\sin\theta + 3\cos\theta) + 2\frac{k}{m}\theta = \frac{F_0}{mR}$$

Tenint en compte que $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ i $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$,

$$\boxed{\frac{40}{3}\ddot{\theta} + 4\Omega_0^2\left[\sin(2\theta) - \cos(2\theta)\right] + \frac{g}{R}(\sin\theta + 3\cos\theta) + \frac{2k}{m}\theta = \frac{F_0}{mR}}$$

9. Quina és l'equació que defineix les configuracions d'equilibri θ_{eq} de la peça respecte del suport? **[0,5p]**

Imposant $\ddot{\theta}_{eq} = 0$ en l'equació del moviment:

$$\boxed{4\Omega_0^2\left[\sin(2\theta_{eq}) - \cos(2\theta_{eq})\right] + \frac{g}{R}\left(\sin\theta_{eq} + 3\cos\theta_{eq}\right) + \frac{2k}{m}\theta_{eq} = \frac{F_0}{mR}}$$