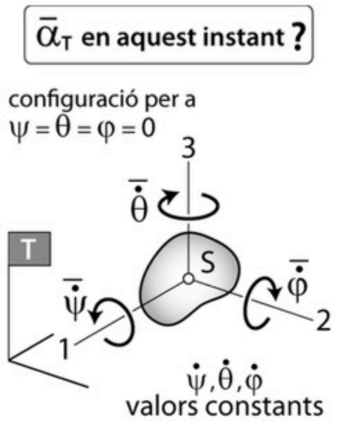
# 3P - Extra

Exercicis addicionals als de la col·lecció de classe, relacionats amb angles d'Euler

Versió 1.1

Comencem amb aquest interessant exercici:




**2** Per a la configuració $\psi = \theta = \varphi = 0$, les tres velocitats angulars d'un sòlid S a l'espai (associades a tres angles d'Euler) tenen valor constant i l'orientació indicada a la figura. Quina és l'acceleració angular del sòlid en aquest instant?

**A** $\left\{0 \quad \dot{\psi}\dot{\theta} \quad -\dot{\psi}\dot{\varphi}\right\}^T$

**B** $\left\{\dot{\theta}\dot{\varphi} \quad \dot{\psi}\dot{\theta} \quad \dot{\psi}\dot{\varphi}\right\}^T$

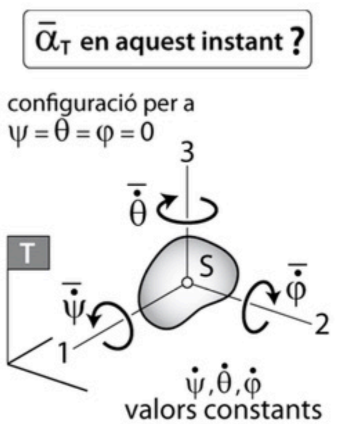
**C** $\left\{\dot{\theta}\dot{\varphi} \quad -\dot{\psi}\dot{\theta} \quad -\dot{\psi}\dot{\varphi}\right\}^T$

**D** $\left\{-\dot{\theta}\dot{\varphi} \quad \dot{\psi}\dot{\theta} \quad -\dot{\psi}\dot{\varphi}\right\}^T$

**E** $\left\{\dot{\theta}\dot{\varphi} \quad -\dot{\psi}\dot{\theta} \quad \dot{\psi}\dot{\varphi}\right\}^T$

És un bon exemple per veure que la derivada analítica pot ser traïdora: la temptació és projectar $\bar{\Omega}^S_T$ en la base $B = (1,2,3)$ indicada i derivar analíticament, però això seria erroni perquè $\bar{\Omega}^S_T$ s'ha obtingut per a la configuració particular del dibuix (i per tant és un "vector foto"). En canvi, si apliquem la derivació geomètrica, com que sabem de quines rotacions està afectada cada rotació d'Euler, encara que es treballi amb la configuració particularitzada, la derivada surt bé!

Us en passo la solució, però us deixo un exercici molt semblant al final, per tal que us poseu a prova vosaltres.




**2** Per a la configuració $\psi=\theta=\varphi=0$, les tres velocitats angulars d'un sòlid S a l'espai (associades a tres angles d'Euler) tenen valor constant i l'orientació indicada a la figura. Quina és l'acceleració angular del sòlid en aquest instant?

**A** $\{0 \quad \dot\psi\dot\theta \quad -\dot\psi\dot\varphi\}^T$

**B** $\{\dot\theta\dot\varphi \quad \dot\psi\dot\theta \quad \dot\psi\dot\varphi\}^T$

**C** $\{\dot\theta\dot\varphi \quad -\dot\psi\dot\theta \quad -\dot\psi\dot\varphi\}^T$

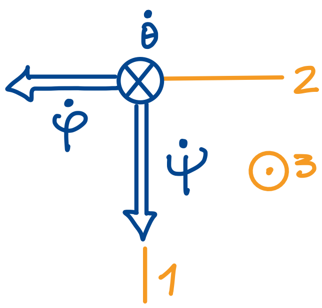
**D** $\{-\dot\theta\dot\varphi \quad \dot\psi\dot\theta \quad -\dot\psi\dot\varphi\}^T$

**E** $\{\dot\theta\dot\varphi \quad -\dot\psi\dot\theta \quad \dot\psi\dot\varphi\}^T$

**Solució:**

Ens fem un dibuix 2D (alerta amb els sentits de gir!)

dibuix mirant "des de $\bar{\dot\theta}$" (*)




Cap vec. canvia de valor perquè ens diuen que $\dot\psi, \dot\theta, \dot\varphi$ són ct.

Només hi ha canvis de direcció:

- $\bar{\dot\psi}$ no canvia de dir
- $\bar{\dot\theta}$ canvia de dir. amb $\bar{\dot\psi}$
- $\bar{\dot\varphi}$ " " " " $\bar{\dot\psi}+\bar{\dot\theta}$

Ho sabem de teoria d'angles d'Euler

$$\bar{\alpha}_T^S = \overbrace{\underbrace{(\Downarrow\dot\psi)\times(\otimes\dot\theta)}_{(\Rightarrow\dot\psi\dot\theta)}}^{\text{Canvi dir. de } \bar{\dot\theta}} + \overbrace{\underbrace{\left[(\Downarrow\dot\psi)+(\otimes\dot\theta)\right]\times(\Leftarrow\dot\varphi)}_{\text{Distributiva del producte vectorial}}}^{\text{Canvi dir. de } \bar{\dot\varphi}} =$$

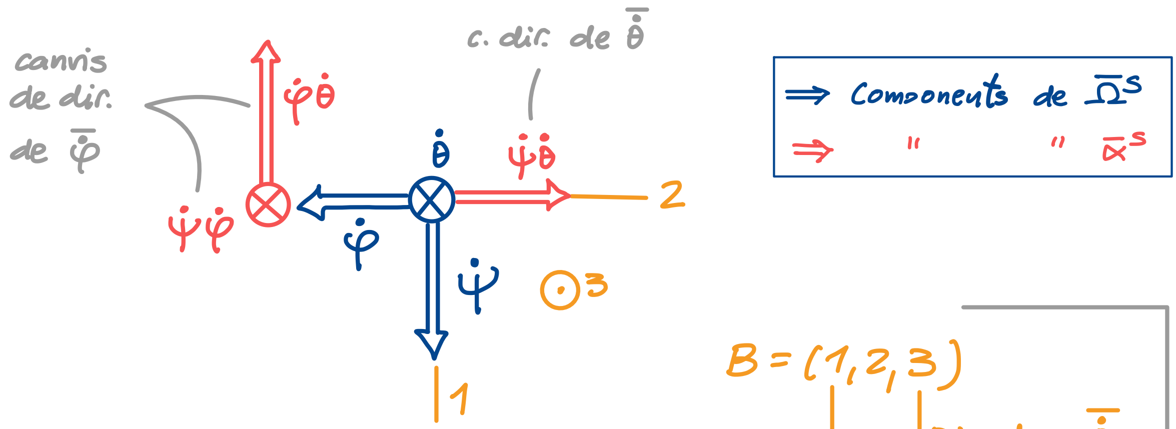
$$\underbrace{(\Downarrow\dot\psi)\times(\Leftarrow\dot\varphi)}_{(\otimes\dot\psi\dot\varphi)} + \underbrace{(\otimes\dot\theta)\times(\Leftarrow\dot\varphi)}_{(\Uparrow\dot\theta\dot\varphi)}$$

$$= (\Rightarrow\dot\psi\dot\theta) + (\otimes\dot\psi\dot\varphi) + (\Uparrow\dot\varphi\dot\theta) = \boxed{\begin{Bmatrix} -\dot\varphi\dot\theta \\ \dot\psi\dot\theta \\ -\dot\psi\dot\varphi \end{Bmatrix}_B} \qquad (1)$$

(*) Com és habitual en angles d'Euler fem el dibuix mirant des de $\bar{\dot\theta}$, tot i que aquí no és estrictament necessari.

## Observació 1: càlcul ràpid

Quan es té prou pràctica (i es té clar amb quina vel angular gira cada vector) el càlcul d'$\bar{\alpha}_T^S$ es pot fer directament sobre el dibuix. Es faria així:




$B = (1, 2, 3)$

Dir. de $\bar{\dot{\psi}}$

Dir de $-\bar{\dot{\theta}}$

La base només l'utilitzo per expressar el resultat final

D'on deduïm que:

$$\left\{\bar{\alpha}_T^S\right\}_B = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\dot{\theta} \\ -\dot{\psi}\dot{\varphi} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

## Observació 2: Inaplicabilitat de la derivada analítica

Com hem dit al principi, en aquest exercici ens podríem sentir temptats a derivar

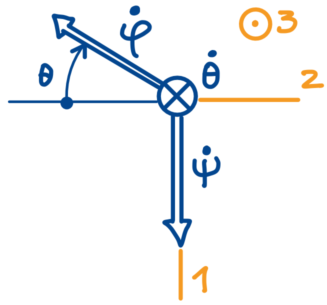
$$\left\{\bar{\Omega}_T^S\right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ -\dot{\varphi} \\ -\dot{\theta} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

analíticament, però el resultat seria incorrecte, perquè (2) no és un vector general (vec. "pel·lícula") sinó particularitzat ("foto"). És una expressió de $\bar{\Omega}_T^S$ vàlida només per a l'instant del dibuix. Per tant, (2) no es pot derivar analíticament. Geomètricament sí que podem perquè <u>sabem com gira cada vector resp. T.</u>

Pregunta: i no hi ha cap manera d'obtenir $\bar{\alpha}_T^S$ analíticament?

Sí que hi és! La manera correcta consistiria en: (a) considerar una configuració general del sòlid; (b) escriure $\bar{\Omega}_T^S$ per aquesta configuració; (c) derivar $\bar{\Omega}_T^S$ analíticament (perquè ara serà un vec. pel·lícula); i (d) particularitzar el resultat per a la configuració de l'enunciat. Fem-ho, i veureu que aquesta via és més feixuga:

(a) Sòlid en config. general:




$B = (1, 2, 3)$

Dir. de $\bar{\dot{\theta}}$ (apuntant en el sentit de $-\bar{\dot{\theta}}$)

Dir. de $\bar{\dot{\varphi}}$

Per definició són sempre $\perp$

(b) Del dibuix:

$$\left\{\bar{\Omega}_T^S\right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\psi} - \dot{\varphi}\sin\theta \\ -\dot{\varphi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

(c) Derivem analíticament:

$$\left\{\bar{\alpha}_T^S\right\}_B = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{\psi} - \dot{\varphi}\sin\theta \\ -\dot{\varphi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta} \\ -\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta \end{Bmatrix}$$

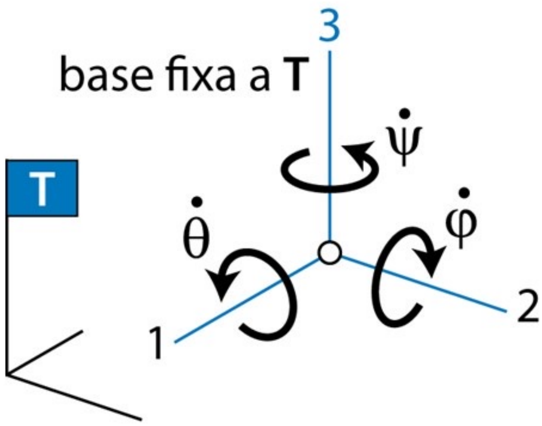
(d) Particularitzem per $\theta = 0$:

$$\left.\left\{\bar{\alpha}_T^S\right\}_B\right]_{\theta=0} = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\dot{\theta} \\ -\dot{\psi}\dot{\varphi} \end{Bmatrix} \longleftarrow$$

Coincideix amb el resultat de l'eq. (1) com era d'esperar!

*Ara intenteu aquest !*

$\left\{\overline{\alpha}_{T}^{s}\right\}$ ?




$\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$: valors constants

| | |
|---|---|
| **A** | $\left\{-\dot{\varphi}\dot{\psi} \quad +\dot{\theta}\dot{\psi} \quad +\dot{\varphi}\dot{\theta}\right\}^{T}$ |
| **B** | $\left\{+\dot{\varphi}\dot{\psi} \quad +\dot{\theta}\dot{\psi} \quad +\dot{\varphi}\dot{\theta}\right\}^{T}$ |
| **C** | $\left\{-\dot{\varphi}\dot{\psi} \quad -\dot{\theta}\dot{\psi} \quad +\dot{\varphi}\dot{\theta}\right\}^{T}$ |
| **D** | $\left\{-\dot{\varphi}\dot{\psi} \quad +\dot{\theta}\dot{\psi} \quad -\dot{\varphi}\dot{\theta}\right\}^{T}$ |
| **E** | $\left\{+\dot{\varphi}\dot{\psi} \quad +\dot{\theta}\dot{\psi} \quad -\dot{\varphi}\dot{\theta}\right\}^{T}$ |