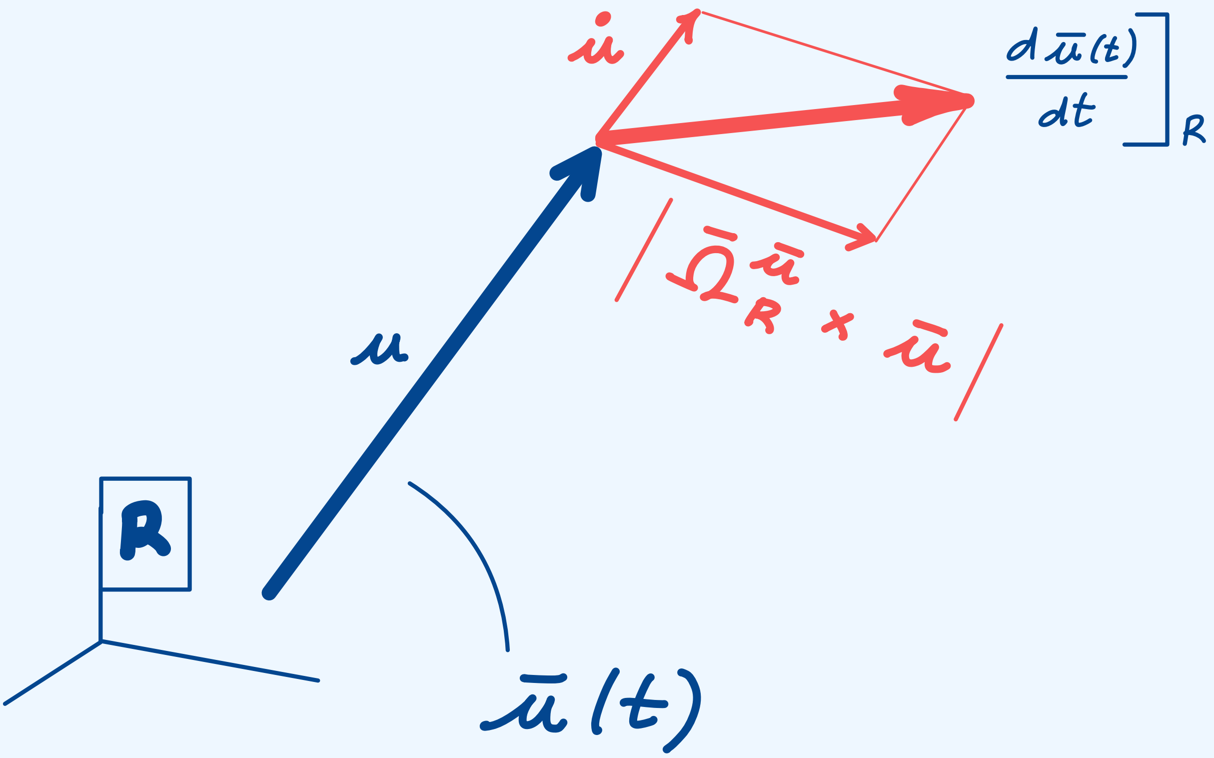
1

derivació geomètrica

Recordem derivació geomètrica

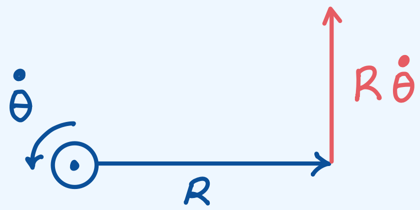
$$\left.\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt}\right]_R = \begin{bmatrix}\text{canvi de}\\ \text{valor}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{canvi de}\\ \text{direcció}\end{bmatrix}_R = \dot{u}\frac{\bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}|} + \bar{\Omega}_R^{\bar{\mathbf{u}}} \times \bar{\mathbf{u}}$$

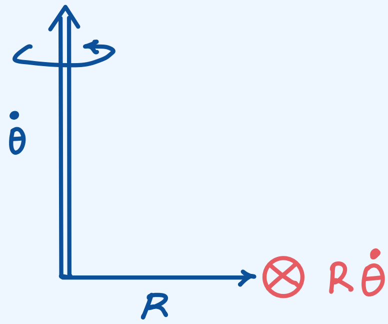


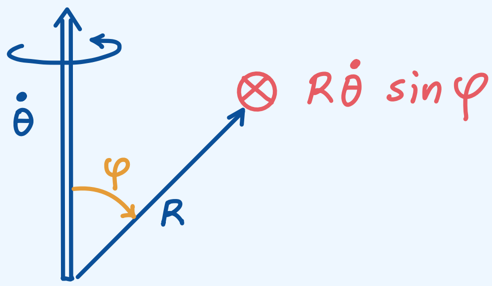
Exemples de producte vectorial $\underbrace{\bar{\Omega}}_{\text{Valor } \dot{\theta}} \times \underbrace{\bar{u}}_{\text{valor } R}$

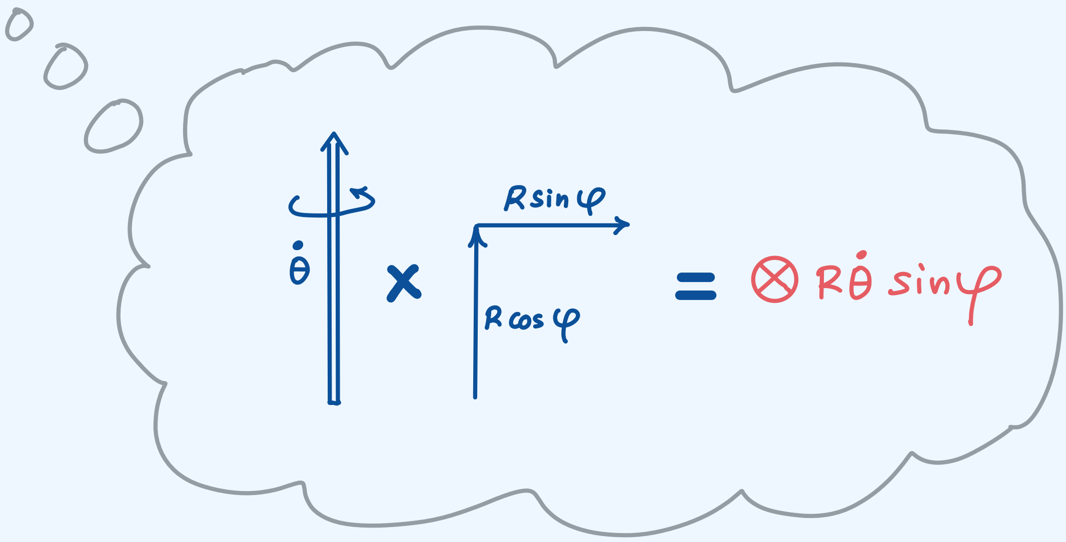
Suposem

1ª foto, 2ª foto ...



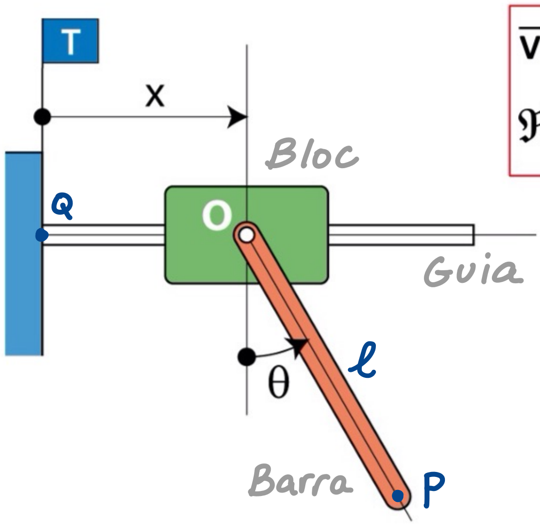






El pèndol d'Euler

En el sistema de la figura, el bloc es trasllada horitzontalment damunt la guia i el pèndol està unit al bloc mitjançant una articulació a O. Utilitzant les coordenades indicades, calculeu la velocitat i acceleració de P respecte del terra, i el radi de curvatura de P (també respecte el terra) quan l'angle theta és zero.



$\bar{v}_T(\mathbf{P}),\ \bar{a}_T(\mathbf{P})$?

$\Re_T(\mathbf{P})\big]_{\theta=0}$?

$\bar{v}_T(P)$

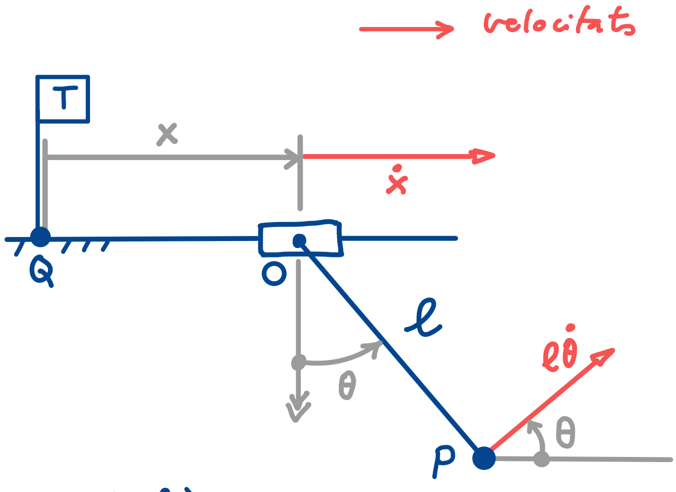
Pista: Deriveu el vector $\overline{QP} = \overline{QO} + \overline{OP}$. Penseu quins són el canvi de valor i el canvi de direcció de $\overline{QO}$ i $\overline{OP}$ per separat. Feu-vos una figura dibuixant aquests canvis.

La solució és a la pàg. seg. Intenteu no mirar-la!

$\bar{v}_T(P)$

Ref = T

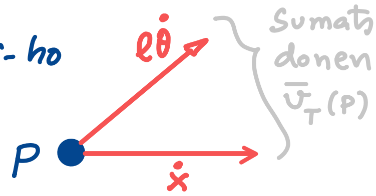
Q = origen vec. pos. de P
└ Fix a T!



$\overline{QP} = \overline{QO} + \overline{OP}$

$$\bar{v}_T(P) = \underbrace{\overbrace{\left.\frac{d\overline{QO}}{dt}\right]_T}^{\text{sols té c. val.}}}_{(\rightarrow \dot{x})} + \underbrace{\overbrace{\left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T}^{\text{sols té c. dir.}}}_{(\circlearrowleft \dot{\theta}) \times (\searrow \ell)} = (\rightarrow \dot{x}) + (\nearrow \ell\dot{\theta})$$

Cal pensar-ho així ⟶



$\bar{a}_T(P)$

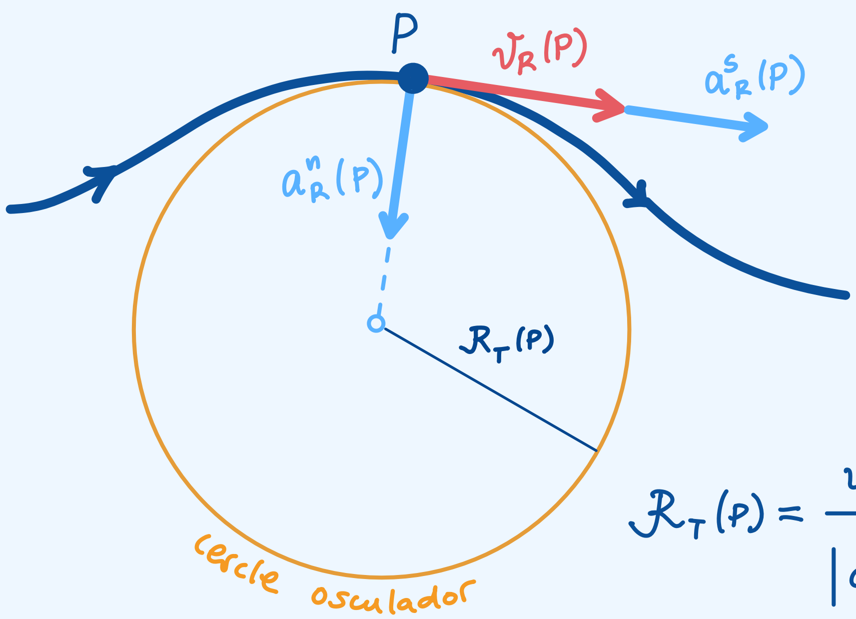
Es fa igual, però derivant els vecs. vermells

Sol:

$$\bar{a}_T(P) = \left[\nearrow (\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta)\right] + \left[\nwarrow (\ell\dot{\theta}^2 - \ddot{x}\sin\theta)\right]$$

$$\mathcal{R}_T(P)\Big]_{\theta=0}$$

Recordem :



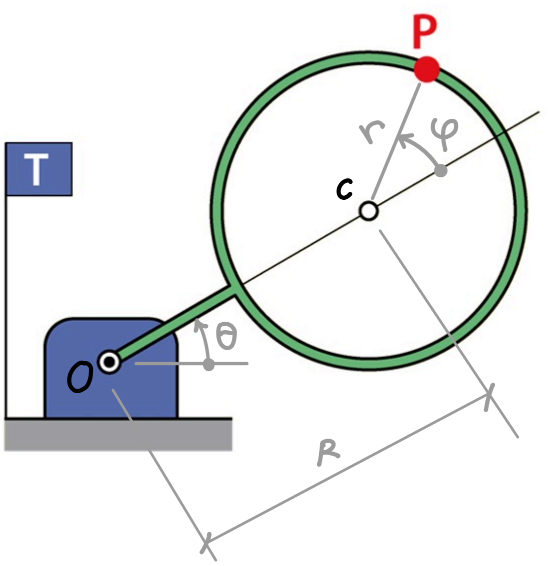
$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a^n_T(P)|}$$

Sol:

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{(\ell\dot{\theta}+\dot{x})^2}{\ell\dot{\theta}^2}$$

Ex. 2.7 RBK (adaptat): Partícula sobre guia circular

La massa puntual P es mou lliurement sobre el suport circular de radi r. El suport gira al voltant del punt O fix a T. Trobeu $\bar{v}_T(P)$, $\bar{a}_T(P)$ i $\mathfrak{R}_T(P)\big]_{\theta=0}$ en funció de $\theta, \dot\theta, \varphi$ i $\dot\varphi$.



$\bar{v}_T(P)$?

$\bar{a}_T(P)$?

$\mathfrak{R}_T(P_\theta)\big]_{\varphi=0}$?

$\bar{v}_T(P)$

Pista : Deriveu $\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{PC}$

Utilitzeu les coord. θ i φ per expressar-ho tot.

Sol. (agrupant en les dir. indicades):

$$\bar{v}_T(P) = \left[\nwarrow (R\dot\theta + r\dot\psi\cos\varphi)\right] + \left[\swarrow r\dot\psi\sin\varphi\right]$$

$$(\text{on } \dot\psi = \dot\theta + \dot\varphi)$$

$\bar{a}_T(P)$

Sol:

$$\bar{a}_T(P) = \left[\nwarrow\left(R\ddot{\theta} - r\dot{\psi}^2\sin\varphi + r\ddot{\psi}\cos\varphi\right)\right] + \left[\swarrow\left(R\dot{\theta}^2 + r\dot{\psi}^2\cos\varphi + r\ddot{\psi}\sin\varphi\right)\right]$$

on:

$$\dot{\psi} = \dot{\theta} + \dot{\varphi}, \quad \ddot{\psi} = \ddot{\theta} + \ddot{\varphi}$$

$\mathcal{R}_T(P)\Big]_{\varphi=0}$

Sol:

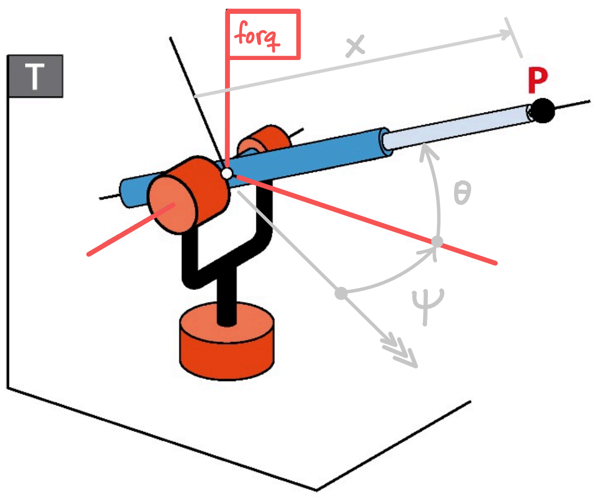
$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{\left(r\overbrace{\dot{\psi}}^{\dot{\theta}+\dot{\varphi}} + R\dot{\theta}\right)^2}{R\dot{\theta}^2 + r\dot{\psi}^2}$$

Problema 2.3 MPSR, pàg. 57 (Antena telescòpica)

Una antena telescòpica és orientada per mitjà de les rotacions motoritzades $\psi(t)$ i $\theta(t)$. Un altre accionament fa variar la longitud x.

Determineu:

$$\bar{v}_T(P),\ \bar{a}_T(P),\ \bar{v}_{forq}(P),\ \bar{a}_{forq}(P)$$



$\bar{v}_{forq}(\mathbf{P}),\ \bar{a}_{forq}(\mathbf{P})?$
$\bar{v}_T(\mathbf{P}),\ \bar{a}_T(\mathbf{P})?$

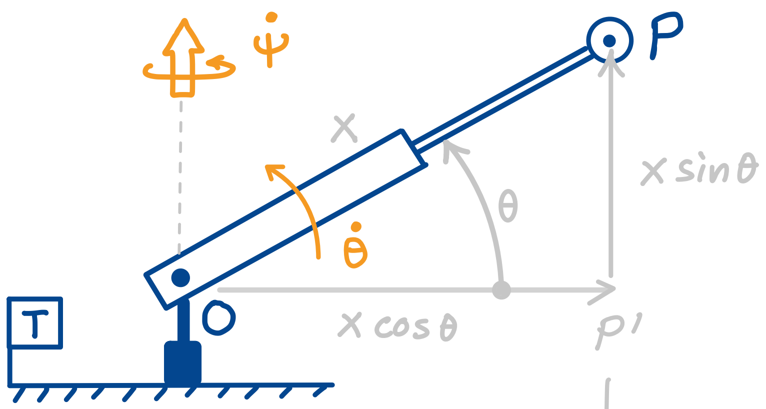
Aquest és llarg. A classe prioritzarem el càlcul de $\bar{v}_T(P)$ i deixaré la resta de coses x vosaltres

$\bar{v}_T(P)$

Aquí podem descompondre $\overline{OP}$ en suma de les seves comp. // i $\perp$ a $\dot{\bar{\psi}}$: $\overline{OP} = \overline{OP'} + \overline{P'O}$.

Així, $\overline{OP'}$ només queda afectat per $\dot{\bar{\psi}}$ (ens mantenim en el terreny de les rotacions simples) i $\overline{P'O}$ només canvia de valor

Dibuixeu-hi les d/dt de OP' i P'P



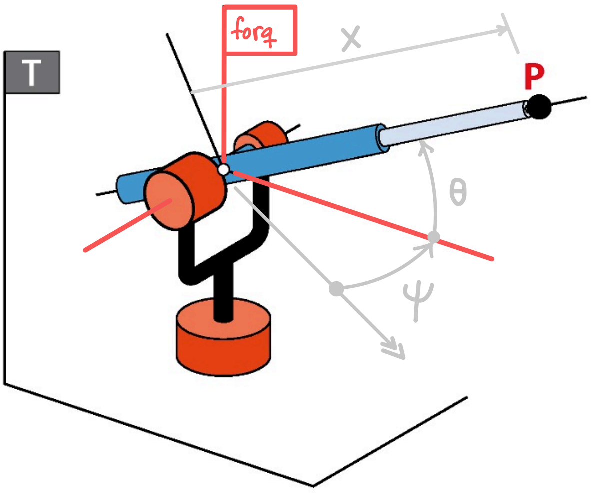
projecció vertical de P sobre pla horitz. per O

Sol:

$$\bar{v}_T(P) = \left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T = \dots = \left[\uparrow \left(\dot{x}\sin\theta + x\dot{\theta}\cos\theta\right)\right] + \left[\rightarrow \left(\dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\sin\theta\right)\right] + \left[\otimes\ x\dot{\psi}\cos\theta\right]$$

<u>Ex. per a vosaltres:</u> Calculeu $\bar{a}_T(P)$

$\bar{v}_{forq}(P)$



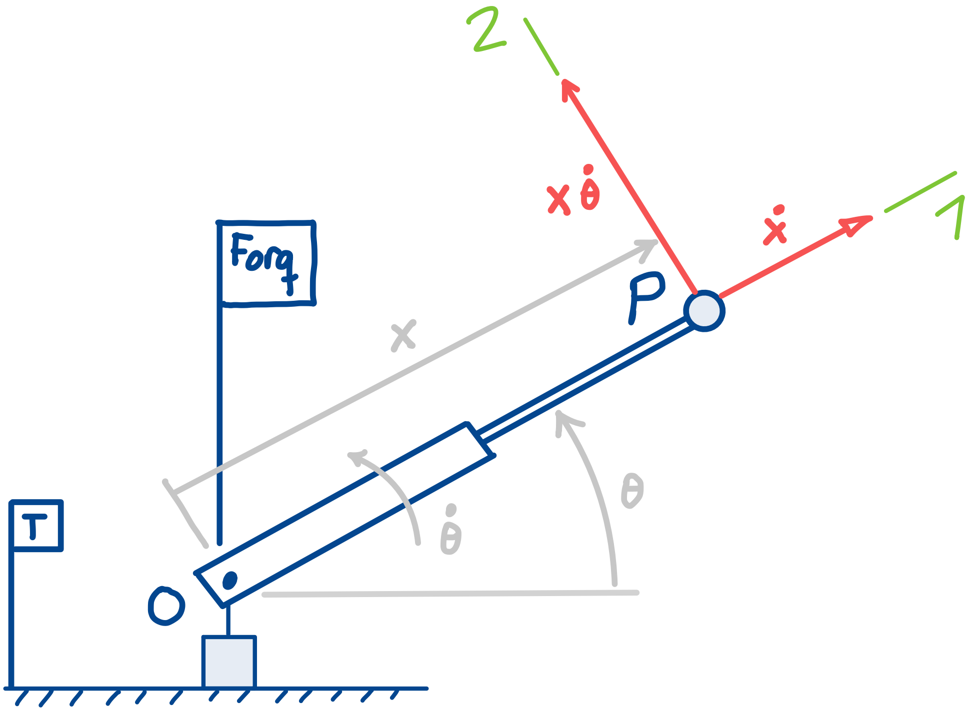
$\bar{v}_{forq}(\mathbf{P})$, $\bar{a}_{forq}(\mathbf{P})$?

$\bar{v}_{T}(\mathbf{P})$, $\bar{a}_{T}(\mathbf{P})$?

Des de ref. Forq. sols veiem movim. degut a $\theta(t)$ i $x(t)$:

O és fix a $\left\{ \begin{array}{l} \text{Forq.} \\ T \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ Serveix com origen vecs. pos. tant a Forq. com a T

$$\bar{v}_{Forq}(P) = \left.\frac{d\,\overline{OP}}{dt}\right]_{Forq} = (\nearrow \dot{x}) + (\nwarrow x\dot{\theta})$$



$\bar{a}_{Forq}(P)$

Pista: pinteu les derivades temporals dels vectors vermells sobre el dibuix anterior. Agrupant els vectors en les dirs. 1 i 2 del dibuix, ha de sortir:

$$\bar{a}_{Forq}(P) = \left[\nearrow \left(\ddot{x} - x\dot{\theta}^2 \right) \right] + \left[\nwarrow \left(2\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta} \right) \right]$$