

5P

Cinemàtica
del sòlid rígid
3D



← Recordatori de teoria



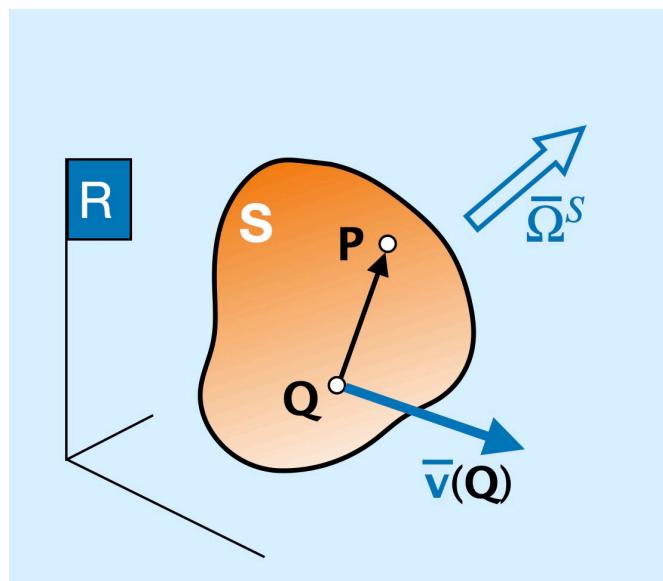
← Exercicis a resoldre

Avui practicarem:

Cinemàtica del sòlid rígid (CSR)

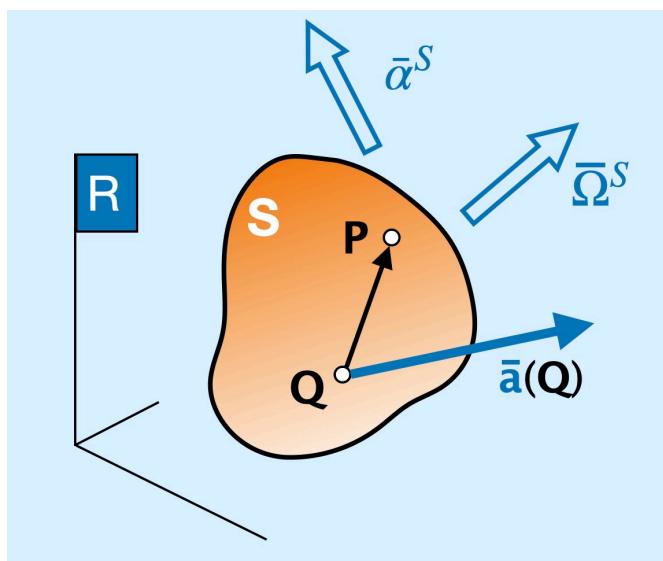
En ser tots els vectors i derivades relatius a la referència R, hem omès el subíndex R per simplificar

$$\bar{v}(P) = \bar{v}(Q) + \bar{\Omega}^S \times \bar{QP}$$



$$\bar{a}(P) = \bar{a}(Q) + \bar{\Omega}^S \times (\bar{\Omega}^S \times \bar{QP}) + \bar{\alpha}^S \times \bar{QP}$$

$= \frac{d\bar{\Omega}^S}{dt}$



Repasseu l'exemple de la bola sobre guia circular vist a teoria (pàg. següent). A classe vau veure com obtenir la velocitat angular de la bola. Nosaltres el treballarem a nivell d'acceleracions (1er exercici).

Resum de l'argument vist a teoria:

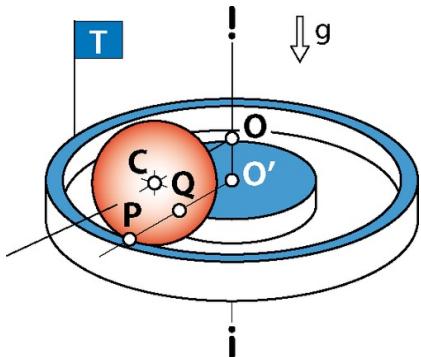
Entendre el moviment de la bola és complex. Si intentem definir uns angles d'Euler, d'entrada no podem, perquè la bola no té cap simetria especial, i costa definir-hi un eix “phipunt”. La solució passa per adonar-se de com evoluciona l'eix instantani de la bola al llarg del temps. El conjunt de rectes de la “referència bola” que en algun moment han sigut eix instantani és l'**axoideò móbil** (un con). El conjunt de rectes de la “referència terra” que en algun moment han sigut eix instantani és l'**axoideò fix** (un pla).

L'axoideò móbil rodola sobre el fix al llarg del temps, i es pot veure com una baldufa caiguda! El seu eix de simetria ens proporciona l'eix phipunt que volíem, i ara entenem el moviment de la bola. És com el d'una baldufa amb nutació constant! Finalment veiem que els vectors phipunt i psipunt no són independents: sumats han de donar un vector horitzontal, que és la velocitat angular de la bola.

Repassem : Exemple de la bola sobre pista circular

Exm. C4-3.2 Wikimec

Aplicarem cinemàt. sólid rígid x entendre movim. bola sobre pista circular.



Sup. \nexists lliscament a P, Q

Com és el moviment de la bola?

Sembra complicat! P.e.:



Intentem entendre el mov. pensant en 3 rotacions d'Euler:

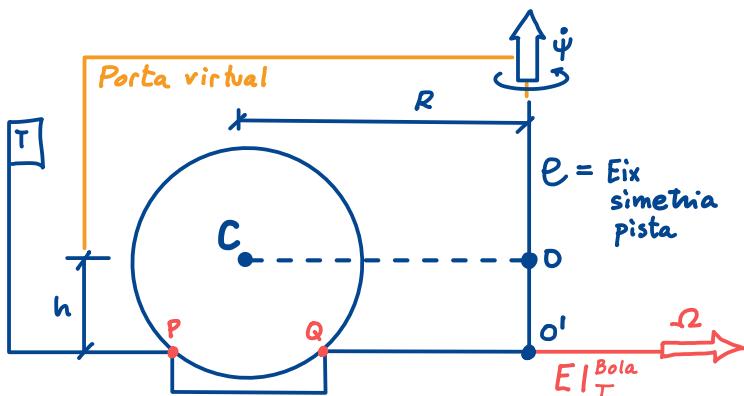
$$\bar{\Omega}^s = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\varphi}$$

Quins eixos d'Euler triar?

la dir. vertical
de $\dot{\varphi}$, ok!

Difícil triar un eix fix a la bola
P.g. \nexists cap dir. privilegiada a l'esfera.

Que complicat x ag. via! Eix instantani (EI) al rescat!



$$v(P) = v(Q) = 0$$

$$EI_T^{Bola} = \overbrace{P \quad Q}^e$$

$$\bar{v}_{llisc} = \bar{\Omega}!$$

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = (\rightarrow \Omega)$$

vec. horizontal

\rightarrow algun punt de traj. circular? Sí: C! Traça un cercle de radi R centrat al punt O de l'eix vertical e.

Ara puc imaginar que C \in Porta giratòria definida x C : e. Puc pensar que aquesta porta gira amb v. ang. $\dot{\psi}$ al voltant de e, resp. de T.

$$\bar{v}_T(C \in porta) = (\odot R \dot{\psi})$$

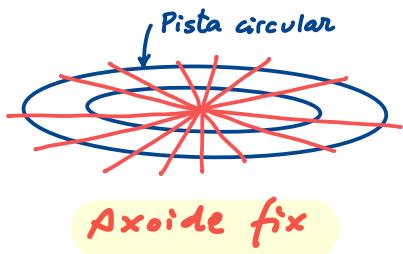
$$\text{Però... com que } \bar{\Omega}_T^{Bola} = (\Rightarrow \Omega)$$

$$\bar{v}_T(C \in bola) = (\odot \Omega h)$$

$$\Omega = \frac{R}{h} \cdot \dot{\psi}$$

Com que C \in porta i C \in bola
sempre coincideixen

Ara pensem en el lloc geomètric de les rectes del terra escombrades per l' EI_T^{Bola} . Formen...

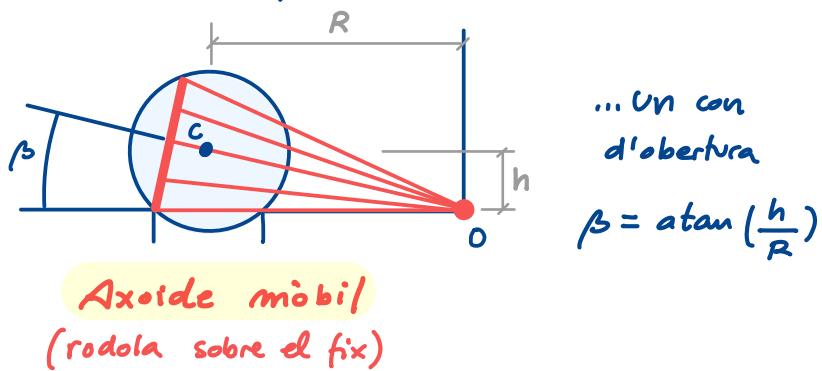


... un con
d'obertura 90°
(1 pla)

Vegen
vídeo

C4.3
Wikimec

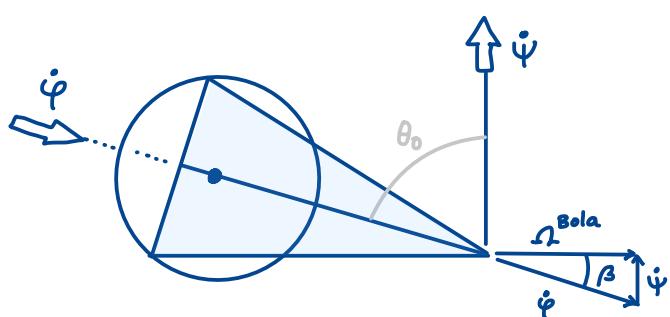
El mateix lloc geomètr. però sobre la bola es ...



... un con
d'obertura
 $\beta = \arctan\left(\frac{h}{R}\right)$

Ara oblidem la bola i pensem en l'axoide mòbil.
Té el mateix moviment que el de la bola!
(Bola i axoide mòbil tenen els mateixos punts)

Ara sí que podem triar eix $\bar{\phi}$ per la bola. L'eix de l'ax. mòbil!



I quin és l'eix $\bar{\theta}$? És
el \perp a $\bar{\phi} + \bar{\psi}$. Només
que $\dot{\theta} = 0$, p.q. $\theta = \theta_0 = \text{ct.}$
Estem veient una
baldufa caiguda,
rodolant sobre el pla,
amb $\theta = \text{ct.}$! (nutació = ct)

Ara entenem el moviment!

últim
detall
important

$\bar{\psi}$ i $\bar{\phi}$ no són indep. Han de
sumar $\bar{\Omega}_{Bola}$, q. és horitz.

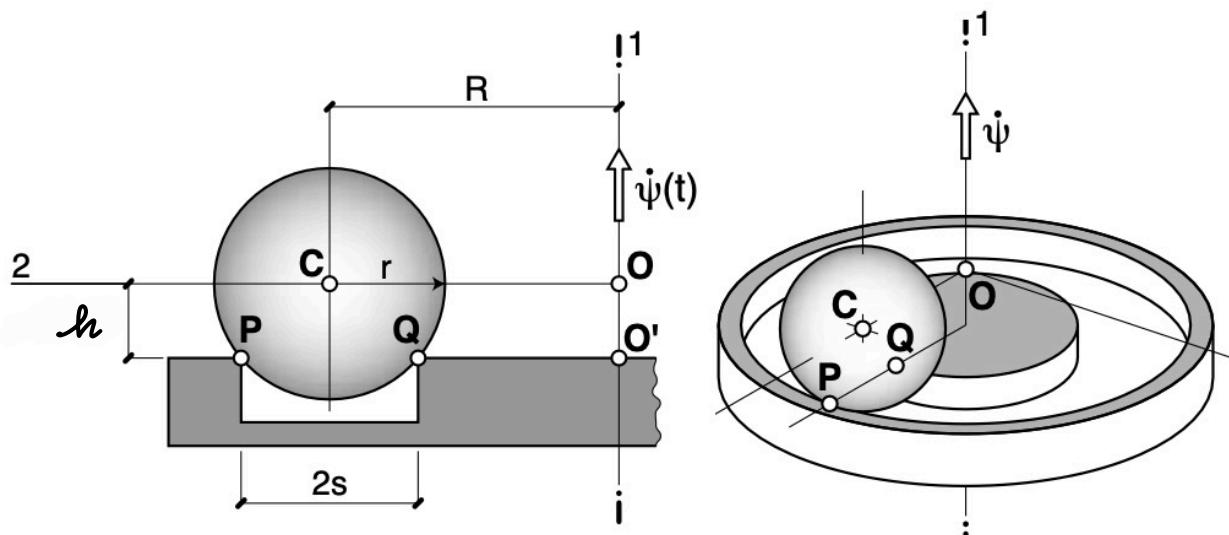


$$\dot{\psi} = \dot{\phi} \sin \beta$$

Bola sobre pista circular

3.5 La bola de la figura manté contacte sense lliscar, en els punts P i Q, amb una pista anular fixa. El centre C de la bola recorre una trajectòria circular de radi R amb velocitat angular $\psi(t)$. Determineu les components, en la base indicada, de:

1. La velocitat angular i l'acceleració angular de la bola. Com són els axoides fix i mòbil?
2. La velocitat i l'acceleració del punt O' de la bola.
3. La velocitat i l'acceleració del punt O de la bola.
4. L'acceleració del punt P de la bola.
5. Quin és el conjunt de punts de la bola que entren en contacte amb la guia?



Solucions a completar : 3 pàgs. reg.

Important

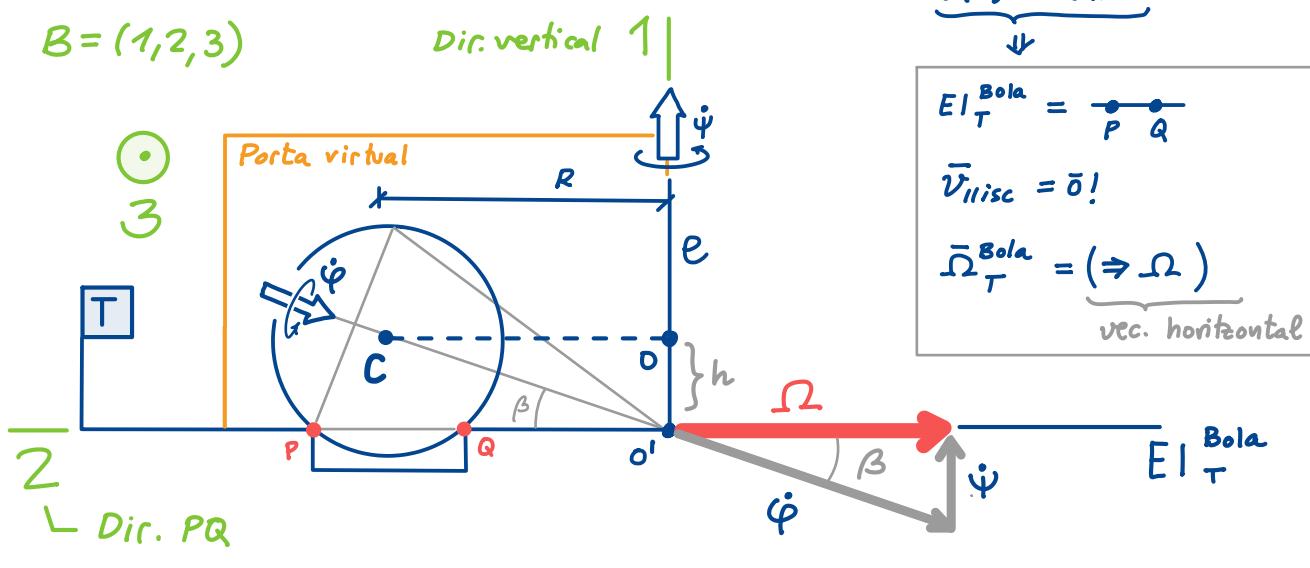
Veure que $\mathbf{O}_{\text{terra}} \neq \mathbf{O}_{\text{bola}}$

Veure que $\mathbf{O}'_{\text{terra}} = \mathbf{O}'_{\text{bola}}$

Vel. ang. de la bola i axoides

És la teoria ja vista. Només la resumim:

$$B = (1, 2, 3)$$



$$\underline{v(P)} = \underline{v(Q)} = 0$$

$$EI_T^{\text{Bola}} = \frac{\bullet}{P} \bullet \frac{\bullet}{Q}$$

$$\bar{v}_{\text{llisc}} = \bar{o}!$$

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = (\Rightarrow \Omega) \quad \text{vec. horizontal}$$

Axoide móbil ← con d'obertura $\beta = \tan^{-1} \frac{h}{R}$

Axoide fix ← con d'obertura 90°

Cal veure la bola com una baldufa caiguda, amb eix de simetria donat per $\dot{\varphi}$.

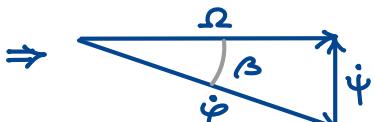
Com que d'una banda

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = (\Rightarrow \Omega)$$

i de l'altra

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = \bar{\psi} + \bar{\varphi} = (\Rightarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \dot{\psi})$$

Tenim el triangle



i això vol dir que $\dot{\varphi}$ i $\dot{\psi}$ no són independents, ja que:

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} \sin \beta$$

En particular podem expressar Ω en funció de $\dot{\varphi}$ o $\dot{\psi}$.

Fem-ho en funció de $\dot{\psi}$:

$$\Omega = \frac{\dot{\psi}}{\tan \beta} = \frac{\dot{\psi}}{h/R} = \frac{R}{h} \dot{\psi} \Rightarrow$$

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = \left(\Rightarrow \frac{R}{h} \dot{\psi} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Els tres vectors} \\ \text{de la línia} \end{array} \right\}_B$$

És vec. pel·lícula

$$\bar{\alpha}_T^{\text{Bola}}$$

Derivant geomètricament $\bar{\omega}_T^{\text{Bola}}$

$$\bar{\alpha}_T^{\text{Bola}} = \underbrace{\left(\Rightarrow \text{ (yellow circle)} \right)}_{\text{canvi valors}} + \underbrace{\left(\otimes \text{ (yellow circle)} \right)}_{\text{canvi dir.}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{(yellow rectangle)} \\ \text{(yellow rectangle)} \\ \text{(yellow rectangle)} \end{array} \right\}_B \quad B = (1, 2, 3)$$

$$= \bar{\psi} \times \bar{\omega}_T^{\text{Bola}}$$

$$\bar{v}_T(O'_\text{Bola}) \text{ i } \bar{\alpha}_T(O'_\text{Bola})$$

O'_Bola és l'extrem de l'axoide mòbil, que roman fix a T.

Per tant $\bar{v}_T(O'_\text{Bola}) = \bar{\alpha}_T(O'_\text{Bola}) =$

Així doncs $O'_\text{Bola} = O'_\text{Terra}$

$$\bar{v}_T(O_\text{Bola}) \text{ i } \bar{\alpha}_T(O_\text{Bola})$$

Clarament $O_\text{Bola} \neq O_\text{Terra}$, perquè O_Bola té velocitat no nulla $\odot \underline{\Omega h}$! Mentre que O_Terra és fix a T (per definició). $R\dot{\psi}$ ← a vista ja es veu, però en detall seria?

$$\bar{v}_T(O_\text{Bola}) = \underbrace{\bar{v}_T(O'_\text{Bola})}_{\bar{o}} + \underbrace{\bar{\omega}_T^{\text{Bola}} \times \bar{o}'o}_{\left(\text{ (yellow circle)} \right) \left(\text{ (yellow circle)} \right)} = \odot R\dot{\psi} = \left\{ \begin{array}{c} \text{(yellow circle)} \\ \text{(yellow circle)} \\ \text{(yellow circle)} \end{array} \right\}_B$$

Ara, per trobar $\bar{\alpha}_T(O_\text{Bola})$ potser estem temptats de derivar $\bar{v}_T(O_\text{Bola})$ respecte el temps (geomètricament o analítica). Seria un error! Fixem-nos que $\odot R\dot{\psi}$ només és la velocitat de O_Bola en l'instant en que O_Bola passa pel punt més alt. Un picosegon + tard, O_Bola tindrà una vel. diferent, amb components $\odot, \downarrow, \rightarrow$, que no sabem quines seran. Per tant, $\odot R\dot{\psi}$ és un vector particularitzat (o "foto") i no el podem derivar. Com calculararem $\bar{\alpha}_T(o)$, doncs? Aplicant CSR:

$$\bar{a}_T(0) = \bar{a}_T(C) + \bar{\alpha}_T^{Bola} \times \bar{CO} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Bola} \times (\bar{\Omega}_T^{Bola} \times \bar{CO})}_{\bar{o}, \text{ per què?}} =$$

$(\odot \text{ } \textcolor{yellow}{\bullet}) + (\rightarrow \text{ } \textcolor{yellow}{\bullet})$

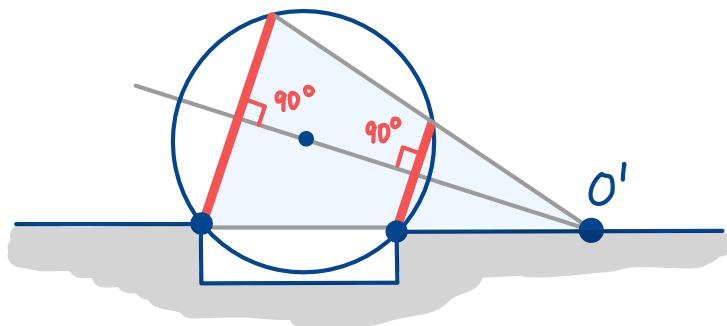
$$= (\odot \ddot{\psi} R) + (\rightarrow \dot{\psi}^2 R) + (\uparrow \frac{R^2 \dot{\psi}^2}{h}) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{R^2 \dot{\psi}^2}{h} \\ -\dot{\psi}^2 R \\ -\ddot{\psi} R \end{array} \right\}_B$$

$\bar{a}_T(P_{Bola})$

$$\boxed{\bar{a}_T(P_{Bola}) = \underbrace{\bar{a}_T(O'_{Bola})}_{\bar{o}, \text{ per què?}} + \bar{\alpha}_T^{Bola} \times \bar{O'P} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Bola} \times (\bar{\Omega}_T^{Bola} \times \bar{O'P})}_{\bar{o}, \text{ per què?}} =}$$

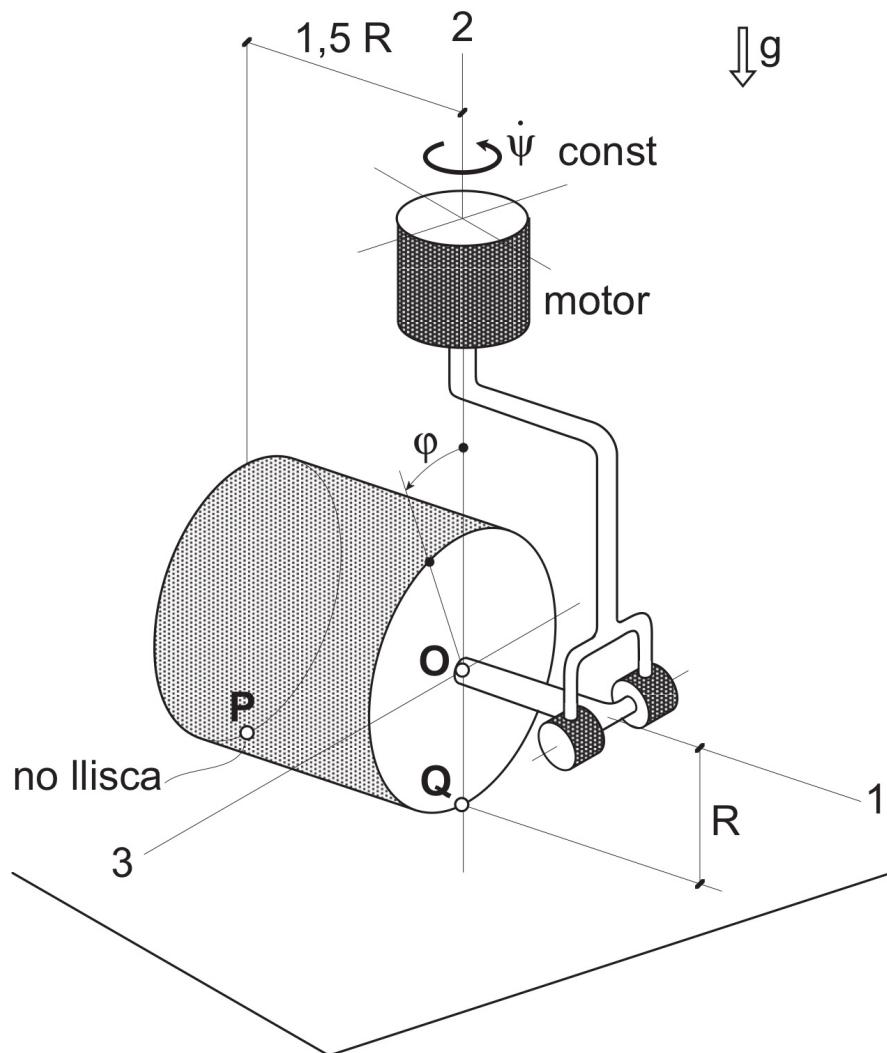
$$= \left[(\Rightarrow \text{ } \textcolor{yellow}{\bullet}) + (\otimes \text{ } \textcolor{yellow}{\bullet}) \right] \times \left[\leftarrow (R+S) \right] = \boxed{\uparrow \left(\frac{R(R+S)}{h} \dot{\psi}^2 \right)}$$

Cjst punts bola que entren en contacte amb la guia



Són les dues seccions circulars vermelles de l'axoide mòbil

Mola cilíndrica



La mola de la figura, que és un cilindre homogeni, rodola sobre el terra -sense que llisqui l'extrem P de la generatriu de contacte- impulsada pel braç que gira amb velocitat angular $\dot{\psi}$ constant al voltant de l'eix vertical que passa per O .

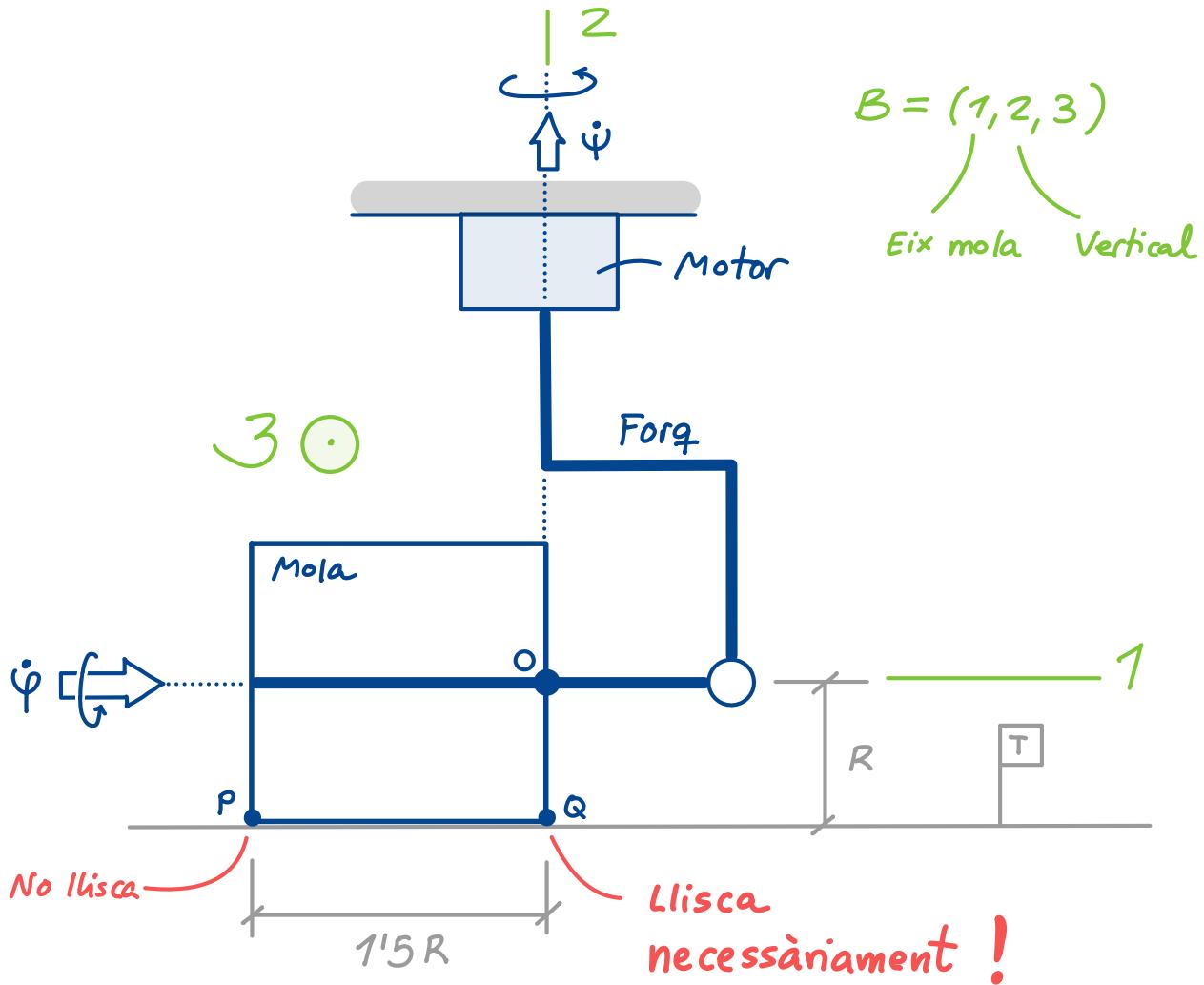
Determineu:

- L'eix instantani de la mola respecte el terra?
- La velocitat del punt Q de la mola respecte el terra.
- L'acceleració del punt P de la mola respecte el terra.

Pistes i solucions:

Els $\frac{M}{T}$ i axoides

Feu-vos el vostre propi dibuix:



Pinteu els $\frac{M}{T}$ sobre el dibuix.

Feu un dibuix apart dels axoides.

Expliqueu per què Q_{Mola} llisca necessàriament.

$\bar{v}_T(Q)$ i $\bar{a}_T(P)$

Per trobar $\bar{v}_T(Q)$ i $\bar{a}_T(P)$ ens caldrà trobar abans

- $\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}$

- $\bar{\alpha}_T^{\text{Mola}}$

$\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}$

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} = \bar{\Omega}_{\text{Forg}}^{\text{Mola}} + \bar{\Omega}_T^{\text{Forg}} = \dots = (\Rightarrow 1'5 \dot{\psi}) + (\uparrow \dot{\psi}) = \underbrace{\begin{Bmatrix} 1'5 \dot{\psi} \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix}}_B$$

És vec. pel·lícula

$\bar{\alpha}_T^{\text{Mola}}$

$$\bar{\alpha}_T^{\text{Mola}} = \left. \frac{d \bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}}{dt} \right|_T = \dots = (\vec{\otimes} 1'5 \dot{\psi}^2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1'5 \dot{\psi}^2 \end{Bmatrix}_B$$

Derivem geomètricament tenint
en compte que $\dot{\psi} = ct$

$\bar{v}_T(Q)$

$$\bar{v}_T(Q) = \bar{v}_T(0) + \bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} \times \bar{OQ} = \dots = \vec{\otimes} 1'5 \dot{\psi} R$$

CLARAMENT
Q LLISCA !

$\bar{a}_T(P)$

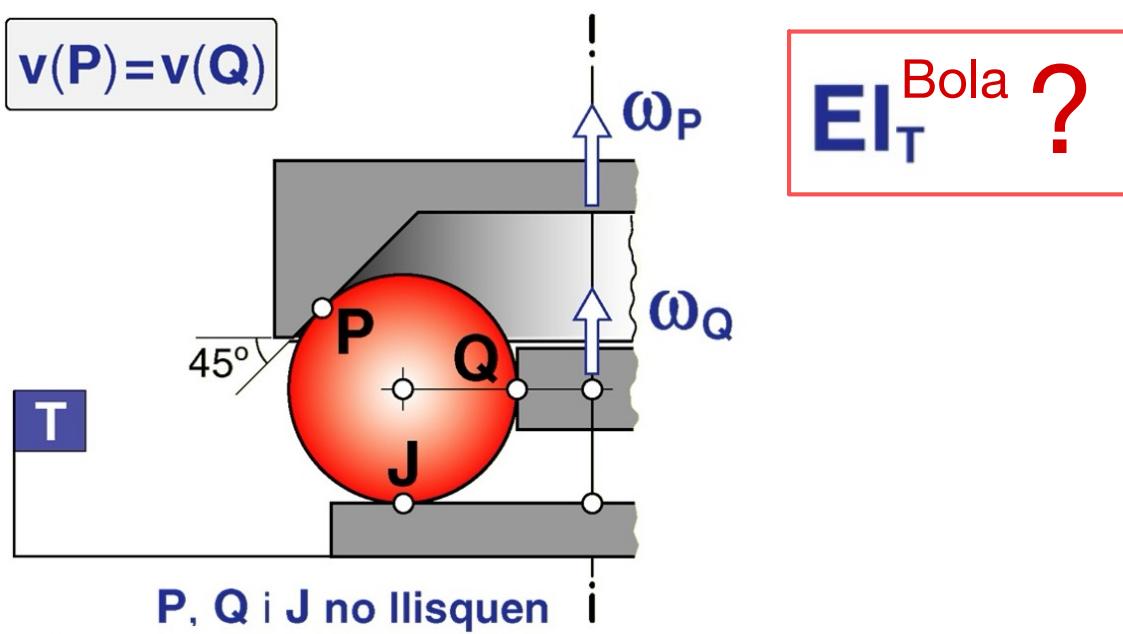
$$\bar{a}_T(P) = \underbrace{\bar{a}_T(0)}_0 + \bar{\alpha}_T^{\text{Mola}} \times \bar{OP} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} \times (\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} \times \bar{OP})}_0 = \dots$$

$$\dots = (\leftarrow 1'5 \dot{\psi}^2 R) + (\uparrow 2'25 \dot{\psi}^2 R) = \begin{Bmatrix} -1'5 \dot{\psi}^2 R \\ 2'25 \dot{\psi}^2 R \\ 0 \end{Bmatrix}_B$$

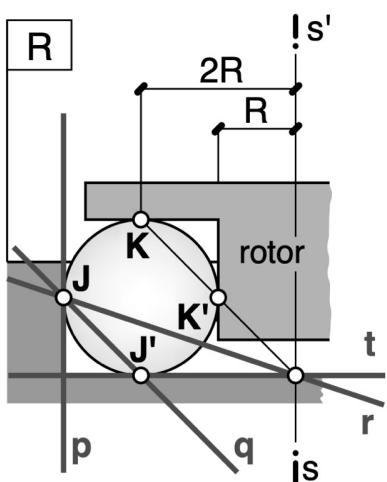
Qüestió 3.28 MPSR

Bola impulsada per dos discs

3.28 En el sistema de la figura es proposa impulsar el moviment de la bola per mitjà de la rotació dels discs P i Q, amb velocitats angulars ω_P i ω_Q , sense que hi hagi lliscament a P, Q i J. Si ω_P i ω_Q són tals que $v(P)=v(Q)$, què es pot afirmar a propòsit de l'EI de la bola?



Pista : Quan dos punts d'un sólid tenen velocitats iguals, quina dir. té el seu EI ?



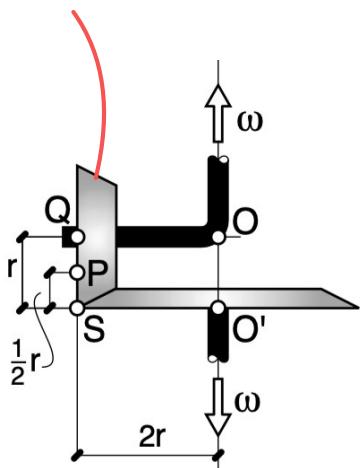
13 La bola de radi R no pot lliscar a J i J' dins del suport cilíndric d'eix vertical $s-s'$, que és fix a terra, ni als punts de contacte K i K' amb el rotor coaxial amb el suport. Quina recta pot ser l'Eix Instantani de Rotació i Lliscament del moviment de la bola respecte a terra?

- A p
- B q
- C r
- D t
- E No està definit perquè el sistema **bola-rotor** no es pot moure sense que llisqui algun dels punts de contacte

Rodes dentades - Q3.27 MPSR

EI_T^{RV} ?

RV = roda vertical



3.27 Les dues rodes del sistema esquematitzat a la figura rodolen sense lliscar en el contacte entre elles. Quina és la direcció de l'EI de la roda de radi r ?

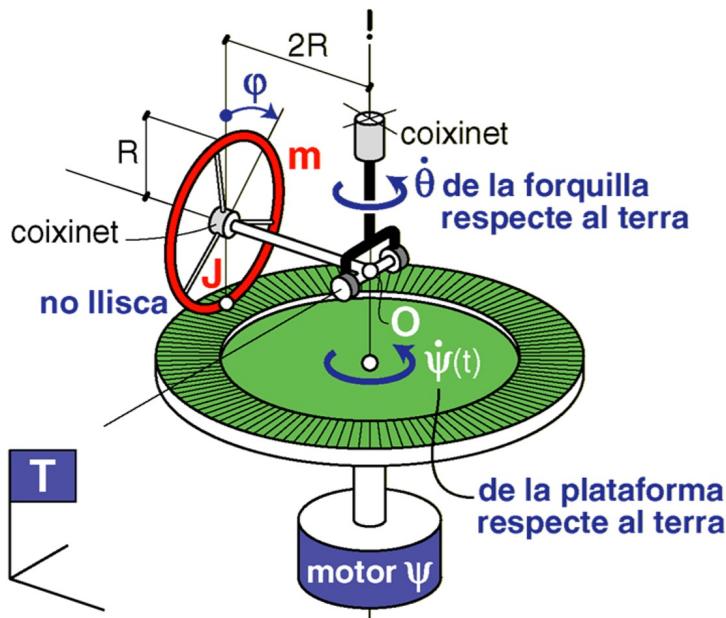
- A La de QO' .
- B La de SO' .
- C La de SO .
- D La de PO' .
- E La de OO' .

Pista : Com són $\bar{v}_T(Q)$ i $\bar{v}_T(S)$?

Anell sobre plataforma (P1, juny 2010)

L'anell de radi R i massa m manté contacte **sense lliscar** amb la plataforma, que gira al voltant de l'eix p-p' amb $\dot{\psi}(t)$ respecte al terra impulsada pel motor. L'eix de l'anell està articulat a una forquilla que pot girar lliurement al voltant de l'eix p-p' amb $\dot{\theta}$ respecte al terra.

- Quants graus de llibertat té el sistema?
- Expresseu $\dot{\theta}$ en funció de $\dot{\varphi}$ i $\dot{\psi}$.



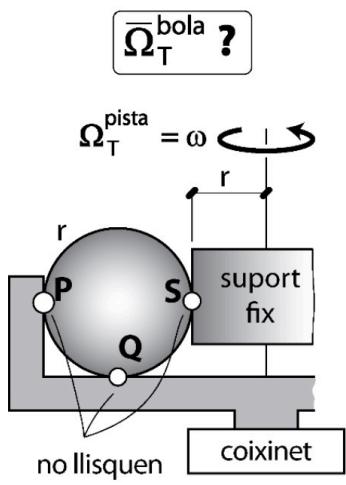
GL del sistema?
 $\dot{\theta} = f(\dot{\varphi}, \dot{\psi}) ?$

Pistes

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Roda}} = \bar{\Omega}_{\text{Roda}} + \bar{\Omega}_{\text{Plat}}^T$$

Com és l' $\bar{\Omega}_{\text{Plat}}^T$?

Velocitat angular de bola - Q2, juliol 2021

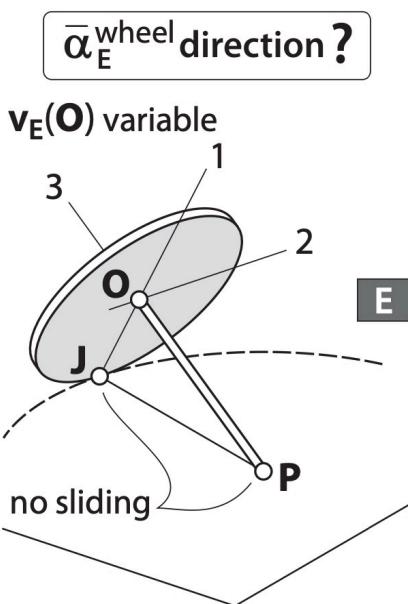


2 La bola homogènia de r es mou dins la pista cilíndrica mantenint contacte sense lliscar amb els punts **P** i **Q** de la pista, i amb el punt **S** del suport fix a terra. La pista gira amb velocitat angular ω respecte del terra. Quina és la velocitat angular de la bola respecte del terra?

- A $(2\omega \uparrow) + (2\omega \Rightarrow)$
- B $\left(\frac{3}{2}\omega \uparrow\right) + \left(\frac{3}{2}\omega \Leftarrow\right)$
- C $\left(\frac{3}{2}\omega \uparrow\right) + \left(\frac{1}{2}\omega \Rightarrow\right)$
- D $\left(\frac{3}{2}\omega \uparrow\right) + \left(\frac{3}{2}\omega \Rightarrow\right)$
- E $\left(\frac{3}{2}\omega \uparrow\right) + \left(\frac{1}{2}\omega \Leftarrow\right)$

Pista: Veient les velocitats que tenen P i Q $\bar{\Omega}_T^{\text{bola}}$ ha de tenir la forma $(\uparrow \Omega_1) + (\Leftarrow \Omega_2) \dots$

Accel. angular de roda - RBK, qüestió 3.47



3.47 The wheel moves on the ground without sliding at its two contact points **J** and **P**. If the speed of its center **O** is not constant, what is the direction of its angular acceleration relative to the ground?

- A It is vertical
- B It is horizontal with a positive second component
- C It is horizontal with a negative second component
- D It is not constrained
- E It is always in the 1–3 plane

Pistes

- Quin es l'EI $\bar{\tau}$ Roda ?
- Com és $\bar{v}_T(O)$?
- Escriviu $\bar{\Omega}_T^{\text{Roda}}$ en funció de la celeritat v de O i deriveu