

2P

Versió 1.0

Derivació
geomètrica i analítica

Lluís Ros
<https://lluisros.github.io/mecanica>

Recordatori

Derivada temporal de \bar{u} relativa a la ref. R

Derivació geomètrica

$$\left[\frac{d\bar{u}}{dt} \right]_R = \begin{bmatrix} \text{canvi valor} \\ \text{canvi direcció} \end{bmatrix} = \underbrace{\dot{u} \cdot \frac{\bar{u}}{\|\bar{u}\|}}_{\text{canvi val. (}\parallel \text{ a }\bar{u}\text{)}} + \underbrace{\bar{\Omega}_R \bar{u} \times \bar{u}}_{\text{canvi dir. (}\perp \text{ a }\bar{u}\text{)}}$$

"òmega" del vector resp. R



Ref. respecte la qual derivem

Derivació analítica:

$$\left\{ \left[\frac{d\bar{u}}{dt} \right]_R \right\}_B = \frac{d}{dt} \{ \bar{u} \}_B + \left\{ \bar{\Omega}_R^B \right\}_B \times \{ \bar{u} \}_B =$$

"òmega" de la base resp. R



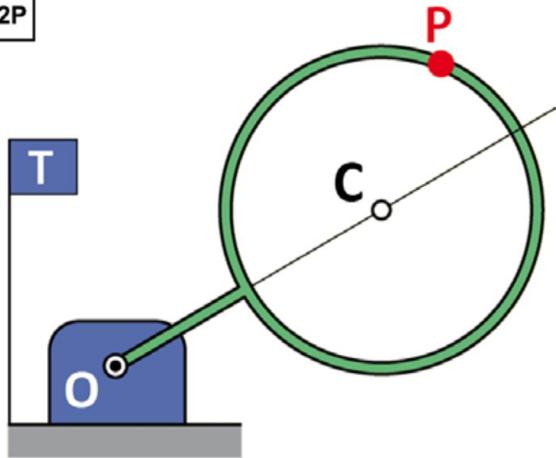
Base en la que expressem el resultat



Ref. respecte la qual derivem

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{derivada} \\ \text{de les} \\ \text{components} \\ \text{de } \bar{u} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{l} \text{òmega de} \\ \text{la base } B \\ \text{resp. R} \end{array} \right\}_B \times \left\{ \begin{array}{l} \text{vector} \\ \text{sense} \\ \text{derivar} \end{array} \right\}_B$$

2P

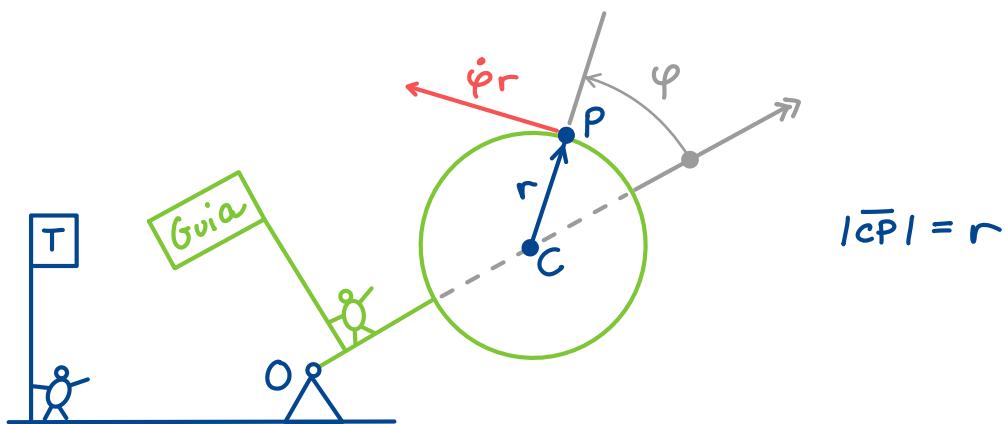


La guia circular està articulada al terra (T).
La partícula P es mou dins la guia.
Mitjançant la derivada geomètrica, calcula
 $\bar{v}_{\text{guia}}(P)$, $\bar{v}_T(P)$, $\bar{\alpha}_T^{\text{guia}}$, $\bar{\alpha}_T^{\bar{CP}}$.

(Suposeu:
 $r = |\bar{CP}|$
 $R = |\bar{OC}|$)

$\bar{v}_{\text{Guia}}(P)$

Derivem el vec. pos. \bar{CP} obtingut a TP (*):



$$\bar{v}_{\text{Guia}}(P) = \left[\frac{d\bar{CP}}{dt} \right]_{\text{Guia}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \text{canvi valor} \end{bmatrix}}_{\text{Guia}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\Omega} \bar{CP} \\ \text{canvi dir.} \end{bmatrix}}_{\bar{\Omega} \bar{CP} \text{ Guia} \times \bar{CP}} =$$

$$= (\hat{\circ} \dot{\varphi}) \times (\uparrow r) = (\leftarrow \dot{\varphi} r)$$

(O)
(**)

Compara-la amb
la de l'Eq. (I)
de l'ex. seg. (són
iguals!)

(*) \bar{CP} és un vec. pos. vàlid per estudiar el moviment de P resp.
la guia perquè C és fix a la guia.

(**) Les direccions indicades a (O) són aproximades: cal haver fet
el dibuix de dalt per deixar-les clares de manera precisa.

$$\bar{\alpha}_T^{\text{Guia}}$$

← Accel. angular de la guia resp. T

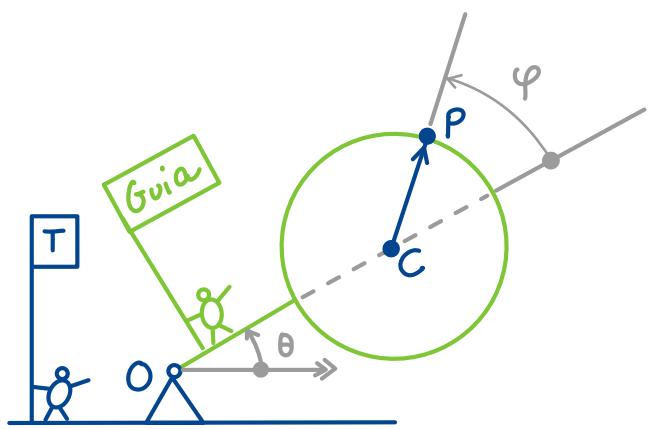
Clarament :

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Guia}} = (\odot \dot{\theta})$$

Per tant :

$$\bar{\alpha}_T^{\text{Guia}} = \frac{d \bar{\Omega}_T^{\text{Guia}}}{dt} \Big|_T =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \text{canvi} \\ \text{valor} \end{bmatrix}}_{\odot \ddot{\theta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \text{canvi} \\ \text{dir.} \end{bmatrix}}_{\parallel O \text{ perquè } \bar{\Omega}_T^{\text{Guia}} \text{ sempre té dir. } \odot} = (\odot \ddot{\theta})$$



$$\bar{\alpha}_T^{\bar{C}P}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_T^{\bar{C}P} &= \bar{\Omega}_{\text{Guia}}^{\bar{C}P} + \bar{\Omega}_T^{\text{Guia}} = \\ &= (\odot \dot{\varphi}) + (\odot \dot{\theta}) = \boxed{\odot (\dot{\varphi} + \dot{\theta})} \end{aligned}$$

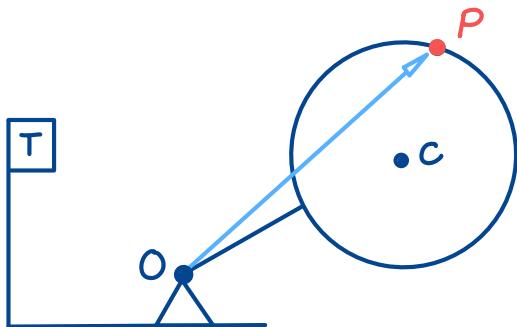
↑ v. dibuix anterior

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_T^{\bar{C}P} &= \frac{d \bar{\Omega}_T^{\bar{C}P}}{dt} \Big|_T = \begin{bmatrix} \text{canvi} \\ \text{valor} \end{bmatrix} + \cancel{\begin{bmatrix} \text{canvi} \\ \text{direcció} \end{bmatrix}} = \\ &= \boxed{\odot (\ddot{\varphi} + \ddot{\theta})} \end{aligned}$$

↑ Ja que $\bar{\Omega}_T^{\bar{C}P}$ sempre té dir. \odot

$$\bar{v}_T(P)$$

A 1P ja vam obtenir un vec. de posició adient per a estudiar el moviment de P resp. T. Era \overline{OP} (pq o és fix a T^(*)):



Ara bé: \overline{OP} costa de derivar directament, perquè canvia tant en valor com en direcció.

Però el podem descompondre així:

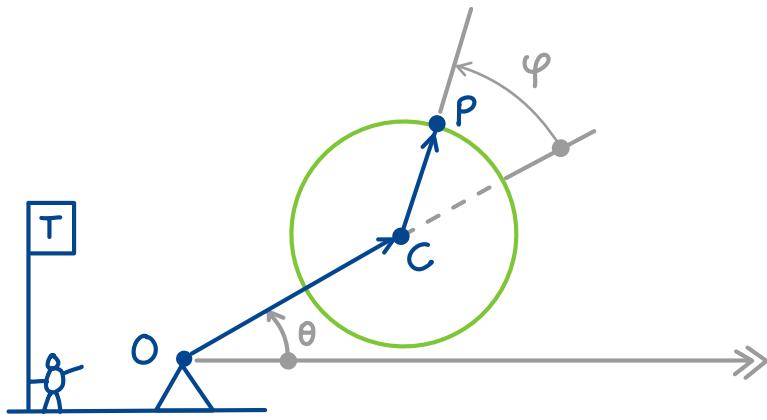
$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}.$$

\overline{OC} i \overline{CP} són fàcils de derivar perquè només canvien de direcció, no de valor. Per tant, aprofitem-ho:

$$\bar{v}_T(P) = \left[\frac{d\overline{OP}}{dt} \right]_T = \left[\frac{d\overline{OC}}{dt} \right]_T + \left[\frac{d\overline{CP}}{dt} \right]_T$$

Per derivar \overline{OC} i \overline{CP} ens cal tenir aquests vectors orientats resp. T. Així podem obtenir les seves velocitats angulars. Podem utilitzar aquests angles, que ja hem definit:

(*) S'hi pot escriure "OET" per indicar que "O és fix a T".



Ara... Amb quina vel. angular gira \overline{OC} resp. T?

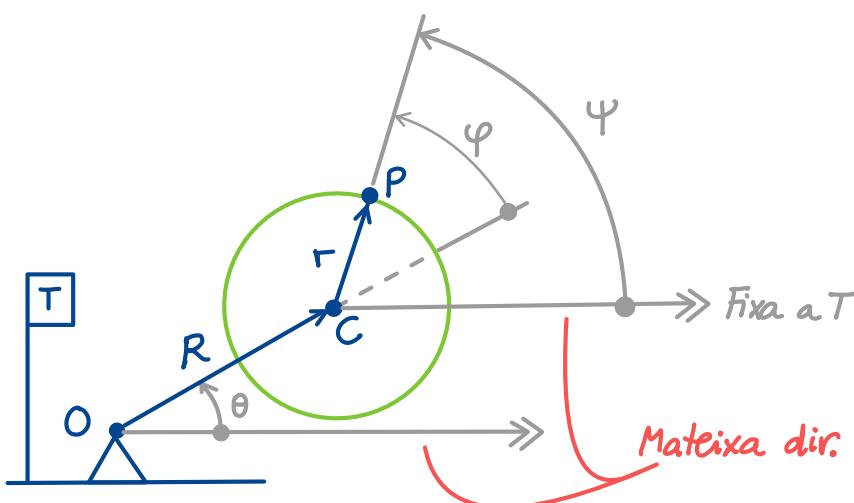
$$\bar{\Omega}_T^{\overline{OC}} = (\odot \dot{\theta}) \quad \leftarrow \text{Perfecte!}$$

I amb quina gira \overline{CP} resp. T?

$$\bar{\Omega}_T^{\overline{CP}} = (\odot \dot{\varphi}), \text{ oi?}$$

Doncs no! Estem observant el moviment de \overline{CP} resp. T, ergo eus cal veure com canvia l'orientació de \overline{CP} resp. una dir. fixa a T. Per fer-ho bé, doncs, orientarem \overline{CP} amb

$$\psi = \theta + \varphi$$



Conclusió:

$$\bar{\Omega}_T^{\overline{CP}} = \underbrace{(\odot \dot{\psi})}_{\text{}} \quad \text{[Redacted]}$$

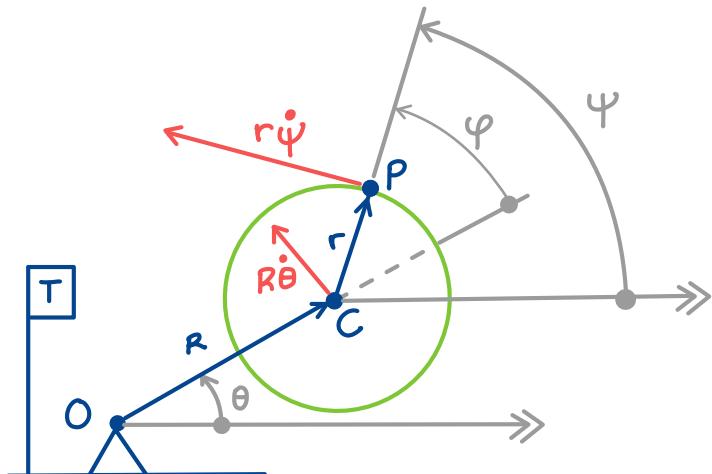
$$[\odot (\dot{\theta} + \dot{\varphi})]$$

Ara sí que ho tenim bé!

kinga, ja podem derivar:

$$\begin{aligned}
 \boxed{\bar{v}_T(P)} &= \left. \frac{d \bar{OP}}{dt} \right]_T = \left. \frac{d \bar{OC}}{dt} \right]_T + \left. \frac{d \bar{CP}}{dt} \right]_T = \\
 &= \bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \times \bar{OC} + \bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \times \bar{CP} = \\
 &= (\textcirclearrowleft \dot{\theta}) \times (\overleftarrow{r_R}) + (\textcirclearrowleft \dot{\psi}) \times (\overleftarrow{r}) = \\
 &\quad \text{L} \mid \bar{OC} \mid \\
 &= (\overleftarrow{r R \dot{\theta}}) + (\overleftarrow{r \dot{\psi}}) \quad (\blacksquare)
 \end{aligned}$$

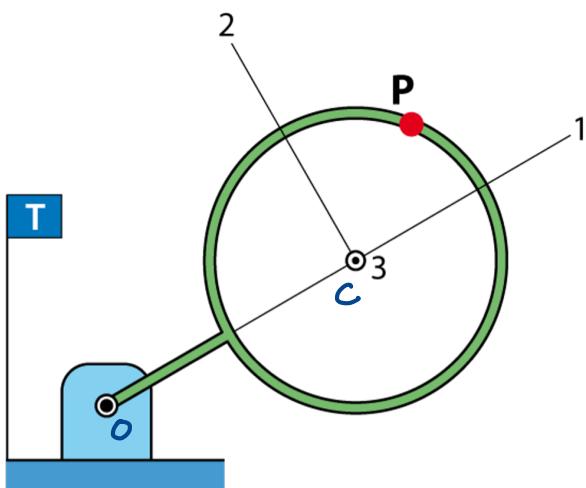
Podem dibuixar els vectors $(\overleftarrow{r R \dot{\theta}})$ i $(\overleftarrow{r \dot{\psi}})$:



Finalment, si volem, podem expressar (\blacksquare) utilitzant una base vectorial. Hi ha 2 bases que faciliten la projecció de (\blacksquare) perquè tenen almenys una direcció alineada amb un dels vectors de (\blacksquare) . Són:

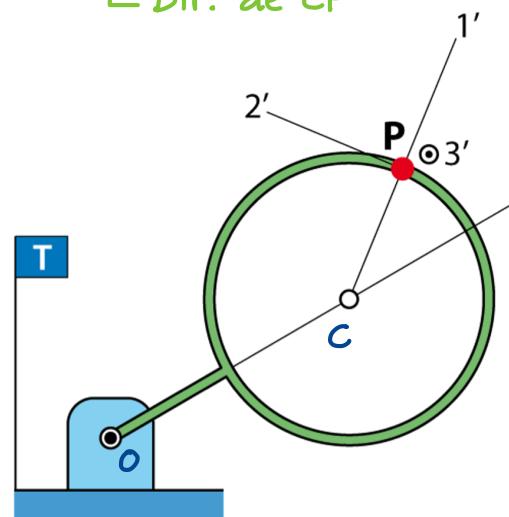
$$B = (1, 2, 3)$$

└ Dir. de \overline{OC}



$$B' = (1', 2', 3')$$

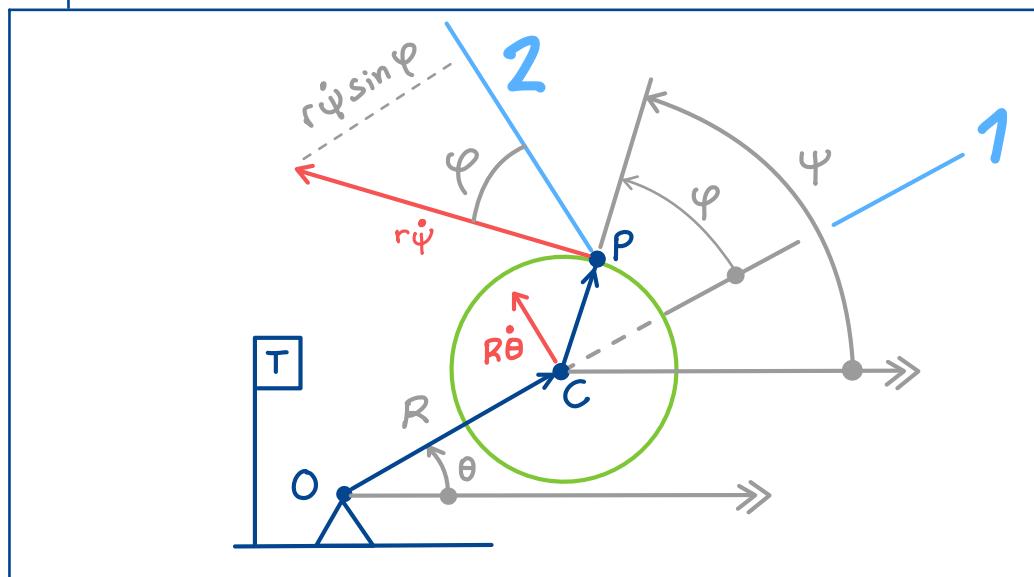
└ Dir. de \overline{CP}



Utilitzant B , per exemple, tenim:

$$\bar{v}_T(P) = \left[\begin{matrix} \rightarrow (-r\dot{\varphi} \sin \varphi) \\ \uparrow \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \uparrow (R\dot{\theta} + r\dot{\varphi} \cos \varphi) \\ \downarrow \end{matrix} \right] \quad (\star)$$

versor de B en dir. 1 versor de B en dir. 2



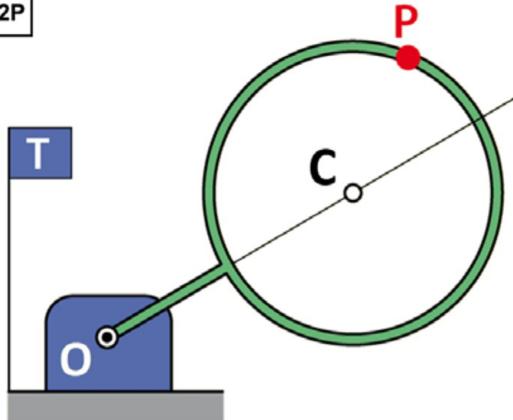
2 maneres equivalents d'escriure $\bar{v}_T(P)$

També podem escriure (\star) com un vector de 3 components:

$$\left\{ \bar{v}_T(P) \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} -r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad (\bullet)$$

base utilitzada (cal indicar-la!)

2P



La guia circular està articulada al terra (T).

La partícula P es mou dins la guia.

Mitjançant la derivada analítica, calcula

$\bar{v}_{\text{Guia}}(P), \bar{v}_T(P), \bar{a}_{\text{Guia}}(P), \bar{a}_T(P), \mathcal{R}_T(P)$ en $\bar{O}\bar{C}\bar{P}$.

$\bar{v}_{\text{Guia}}(P)$

Un vec. nos. adient és \bar{CP} (ja que $C \in \text{Guia}$)

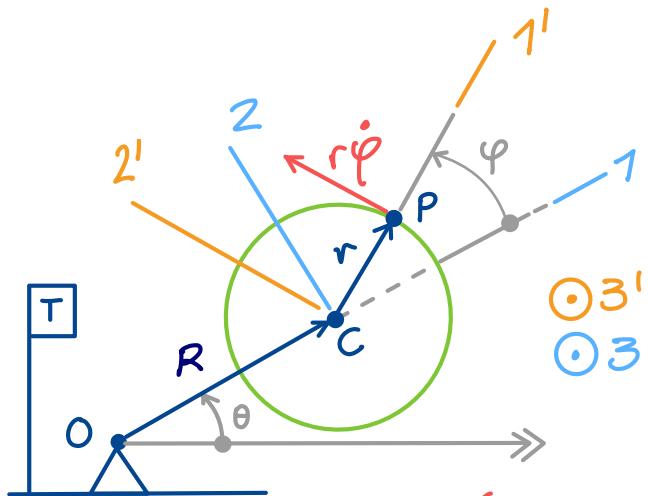
\bar{CP} és fàcil de projectar
en la base $B' = (1', 2', 3')$

Dir. fixa a \bar{CP}

Dir. \odot

\Rightarrow Treballem en B'

$$\{\bar{CP}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Ara és vel. ang.
de la base, no de \bar{CP}

$$\{\bar{v}_{\text{Guia}}(P)\}_{B'} = \left\{ \frac{d\bar{CP}}{dt} \right\}_{\text{Guia}} = \left\{ \frac{d\bar{CP}}{dt} \right\}_{B'} + \left\{ \bar{\omega}_{\text{Guia}}^{B'} \right\}_{B'} \times \{\bar{CP}\}_{B'} =$$

Derivem a ref. Guia!

Resultat en base B'

Deriv. Components

òm. base B'
resp. Guia

vec.
sense
derivar

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I})$$

Coincideix amb l'obtingut geomètricament (v. Eq. (0) ex. anterior).

Extra: Tb podem fer els càlculs amb $B = (1, 2, 3)$:

$$\{\bar{CP}\}_B = \begin{Bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Mateix resultat

que (1), però en
base B
↓

$$\boxed{\{\bar{v}_{\text{Guia}}(P)\}_B = \left\{ \frac{d\bar{CP}}{dt} \right\}_{\text{Guia}}}_B =$$

$$= \left\{ \frac{d\bar{CP}}{dt} \right\}_B + \cancel{\{\bar{\omega}_{\text{Guia}}^B\}_B}^0 \times \{\bar{CP}\}_B = \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ r\dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\bar{a}_{\text{Guia}}(P)$

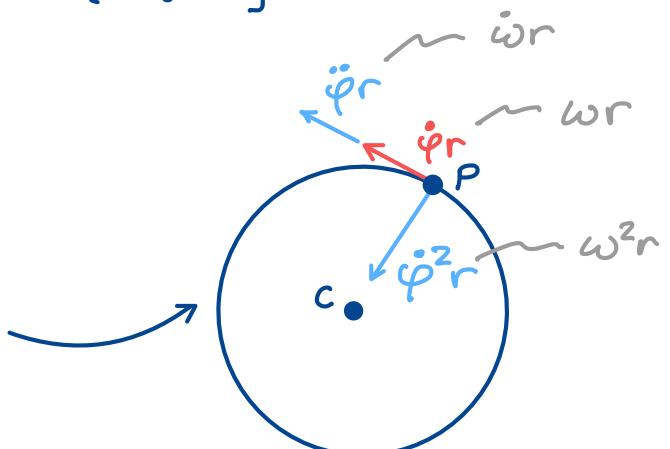
Derivem (1):

$$\{\bar{a}_{\text{Guia}}(P)\}_{B'} = \left\{ \frac{d\bar{v}_{\text{Guia}}(P)}{dt} \right\}_{\text{Guia}} \stackrel{\text{Tot en } B'}{=} \quad$$

$$= \begin{bmatrix} \text{derivada} \\ \text{components} \\ \bar{v}_{\text{Guia}}(P) \end{bmatrix} + \bar{\omega}_{\text{Guia}}^{B'} \times \bar{v}_{\text{Guia}}(P) =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}^2 r \\ \ddot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II})$$

Surten les components
intrínseqües de l'acceleració
típiques del moviment
circular, com era d'esperar



$\bar{v}_T(P)$

Un vec. pos. adient per a P és \overline{OP} , pq OET.

$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}$$

E's aconsellable

treballar en B o B' ja que faciliten la projecció de \overline{OC} i \overline{CP}

respectivament. Descartem l'ús d'una base fixa a T perquè no aniria tan bé. Triem B, però B' seria bona tb:

$$\{\overline{OP}\}_B = \{\overline{OC}\}_B + \{\overline{CP}\}_B = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R+r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

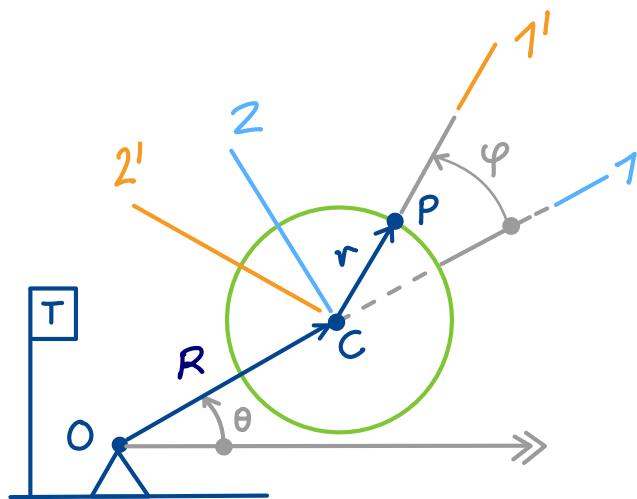
$$\{\bar{v}_T(P)\}_B = \left\{ \frac{d\overline{OP}}{dt} \right\}_T = \begin{Bmatrix} \text{deriv.} \\ \text{comp.} \end{Bmatrix} + \bar{\omega}_T^B \times \begin{Bmatrix} \text{vec sense} \\ \text{derivar} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R+r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\theta}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\theta} + r\dot{\theta}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III})$$

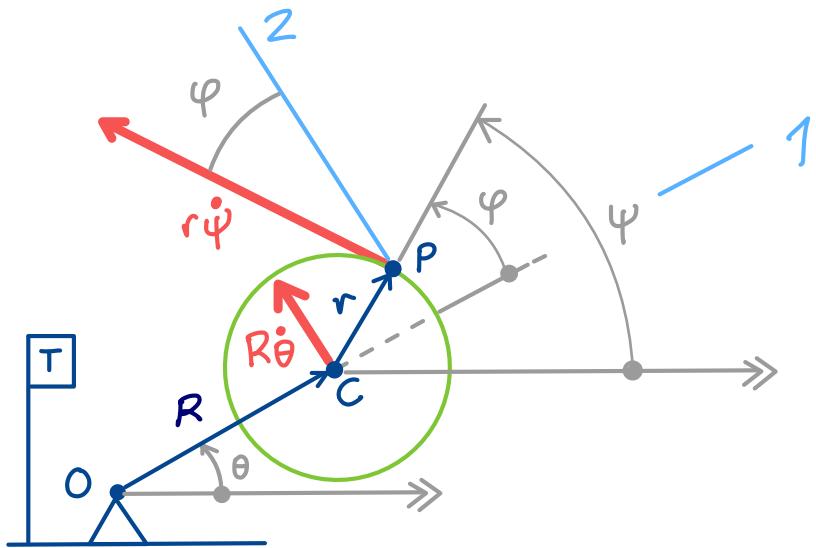
$$\varphi + \theta = \psi \Rightarrow \dot{\varphi} + \dot{\theta} = \dot{\psi}$$



$$B = (1, 2, 3)$$

$$B' = (1', 2', 3')$$

Analitzant (III) veiem que $\bar{v}_T(P)$ és suma dels dos vecs. vermellos següents, que són la derivada temporal de \bar{OC} i \bar{CP} a la ref. T:



És a dir, (III) coincideix amb el resultat de l'Eq. (■) de l'ex. anterior, com era d'esperar!

$$\bar{a}_T(P)$$

Derivem (III) :

$$\{\bar{a}_T(P)\}_B = \left\{ \frac{d\bar{v}_T(P)}{dt} \right\}_T = \begin{bmatrix} \text{deriv.} \\ \text{comp} \end{bmatrix} + \bar{\Omega}_T^B \times \begin{bmatrix} \text{vec.} \\ \text{sense} \\ \text{deriv.} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}\dot{\varphi}\cos\varphi \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\dot{\varphi}\sin\varphi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -\ddot{\varphi}r\sin\varphi - \dot{\varphi}r\dot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\theta}r\dot{\varphi}\sin\varphi \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \begin{array}{l} -\ddot{\varphi}r\sin\varphi - (\dot{\varphi} + \dot{\theta})r\dot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - (\dot{\varphi} + \dot{\theta})r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} -\ddot{\varphi}r\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ 0 \end{array} \right\} \quad (IV)
 \end{aligned}$$

Tot seguit ens demanen $R_T(P)$, que és el radi de curvatura de la trajectòria de P en un cert instant de temps.

Recordem primer aquest concepte, associat a les components intrínseques de l'acceleració.

Recordatori

Components intrínseques de l'acceleració

Signi una partícula Q que descriu una certa trajectòria en una referència R. En cada instant t, l'accel. de Q es pot descompondre en una component tangencial $\bar{a}_R^t(Q)$, paral·lela a $\bar{v}_R(Q)$, i una component normal $\bar{a}_R^n(Q)$, perpendicular a $\bar{v}_R(Q)$. A més, en aquest instant t, la trajectòria

es pot aproximar localment per un cercle, anomenat "osculador". El radi d'aquest cercle és

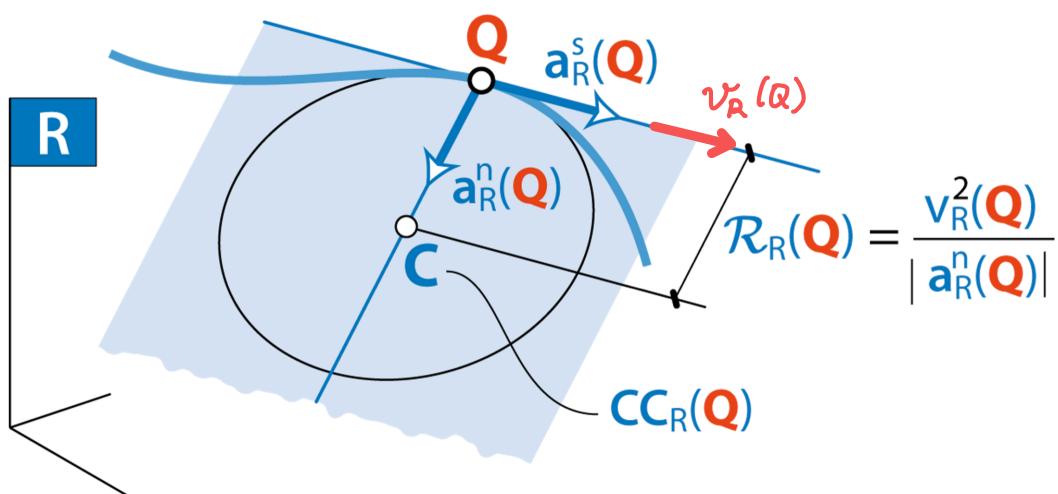
$$R_R(Q) = \frac{v_R^2(Q)}{|\ddot{a}_R^n(Q)|} \leftarrow \begin{matrix} \text{Valor de } \bar{v}_R(Q) \\ \left[\text{Valor de } \bar{v}_R(Q) \right]^2 \end{matrix}$$

$$\leftarrow \text{Mòdul del valor de } \bar{a}_R^n(Q)$$

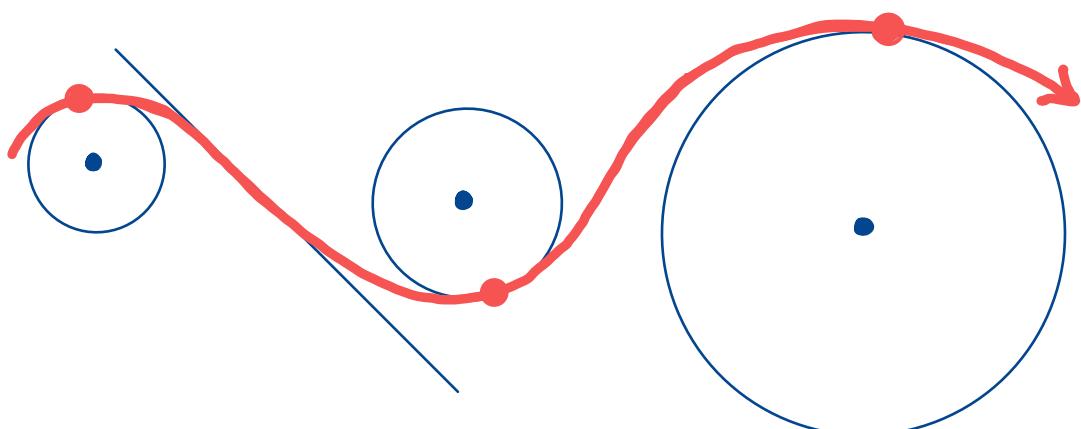
El centre del cercle s'anomena centre de curvatura de la trajectòria al punt Q (relatiu a la ref. R), i el denotem així

$$CC_R(Q)$$

Components intrínseques de l'acceleració



$R_R(Q)$ i $CC_R(Q)$ varien al llarg del temps perquè el cercle oscula al llarg de la trajectòria :

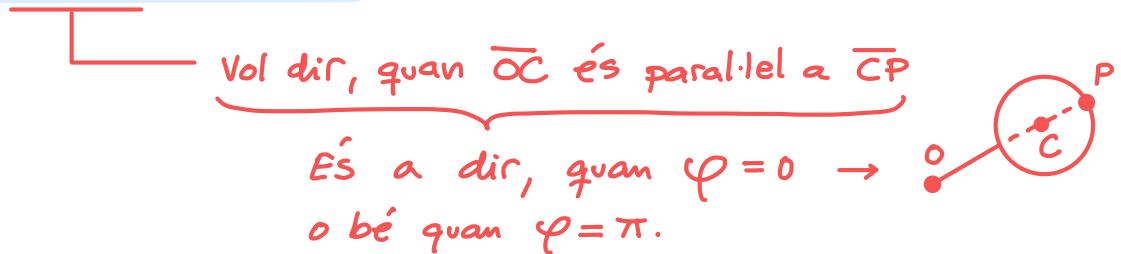


Recordeu :

- L'accel. tangencial $\bar{a}_T^s(Q)$ és la responsable del canvi de valor de $\bar{v}_T(Q)$
- L'accel. normal $\bar{a}_T^n(Q)$ és la responsable del canvi de direcció de $\bar{v}_T(Q)$

Calculem doncs el que ens demanaven:

$$R_T(P) \quad \boxed{\overline{OC} \parallel \overline{CP}}$$



Fem només el cas $\varphi = 0$:

$$R_T(P) = \frac{\bar{v}_T^2(P)}{|\bar{a}_T^n(P)|} \quad \begin{array}{l} \text{(Valor de } \bar{v}_T(P) \text{)} \\ \text{Mòdul del valor de } \bar{a}_T^n(P) \end{array}$$

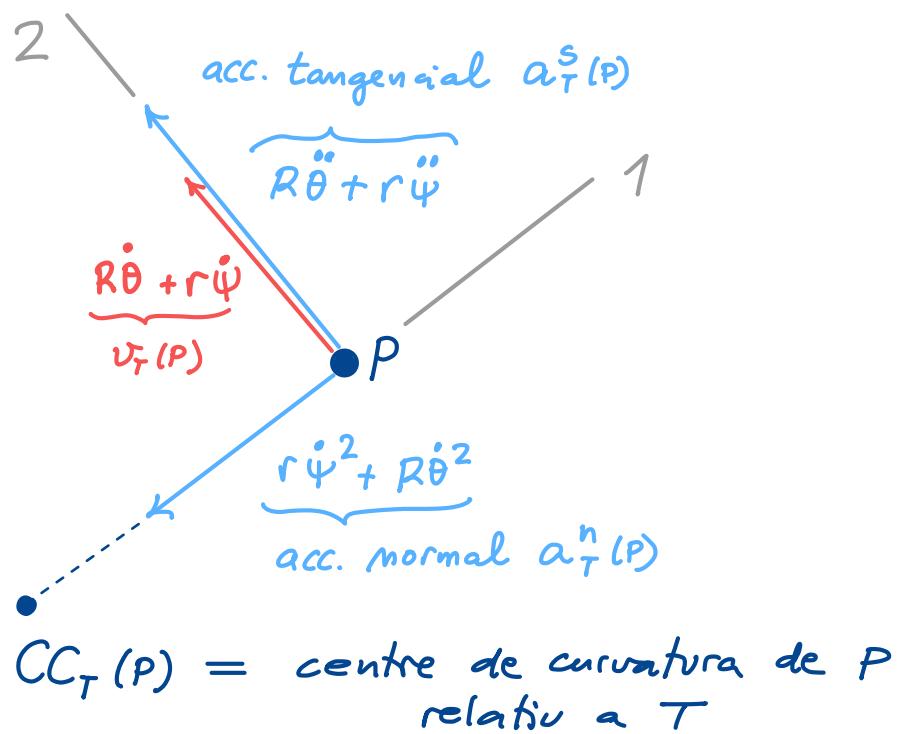
$$\left\{ \bar{v}_T(P) \right\}_{\varphi=0} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ R\ddot{\theta} + r\dot{\psi} \\ 0 \end{array} \right\}$$

Particularitzant (III) per $\varphi = 0$

$$\left\{ \bar{a}_T(P) \right\}_{\varphi=0} = \left\{ \begin{array}{c} -r\dot{\psi}^2 - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi} \\ 0 \end{array} \right\}$$

Particularitzant (IV) per $\varphi = 0$

Per identificar la component normal de $\bar{a}_T(P)$
sempre aconsello que us feu un dibuix :



Per tant :

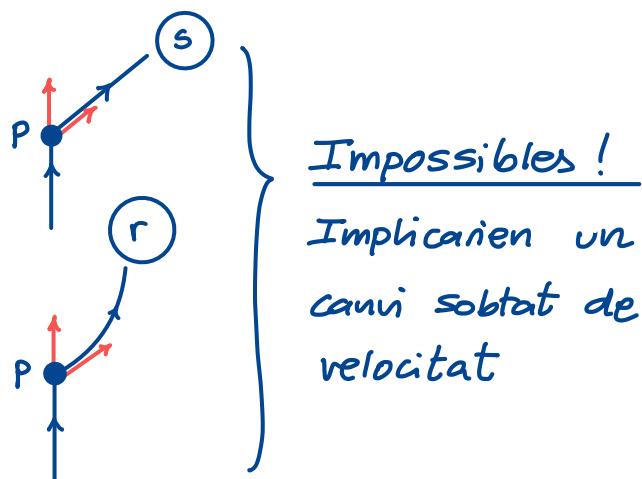
$$R_T(P) = \frac{(R\dot{\theta} + r\dot{\psi})^2}{r\dot{\psi}^2 + R\dot{\theta}^2} \quad (v)$$

Alerta: al dibuix canviu x per β

2P

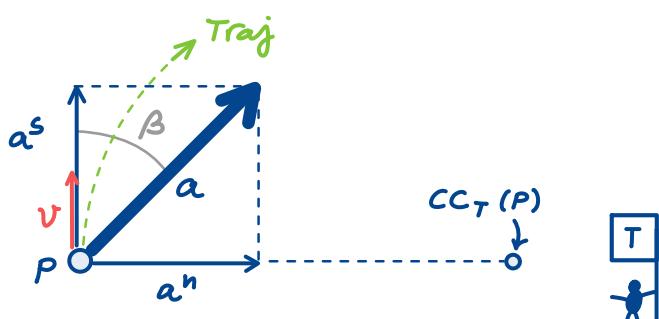
sobtadament adquireix \bar{a}_R amb a i β constants

La partícula P descriu una trajectòria rectilínia respecte del terra (T). Quan té celeritat v, sobtadament s'accelera amb $\bar{a}_T(P)$ de valor constant, i formant un angle β constant amb $v_T(P)$. Quina trajectòria passa a fer?



Ara cal saber si serà P, q o t.

A partir de l'instant dibuixat, tenim:



$$\begin{aligned} a^s &= \text{accel. tangencial} \\ a^n &= \text{" normal} \end{aligned} \quad] \text{resp. } T$$

$$\left. \begin{aligned} a^s &= a \cos \beta \\ a^n &= a \sin \beta \end{aligned} \right\} \text{constants al llarg del temps (pq a i } \beta \text{ ho són)}$$

(*) A menys que es produueixi una col·lisió, que no és el cas.

Com que $a^n \neq 0$ \Rightarrow La trajectòria serà curvada \Rightarrow Desartem P

El radi de curvatura $R = R_T(P)$ creixerà amb el pas del temps:

$$R = \frac{v^2}{|a^n|}$$

v creixerà pq $a^s = ct$

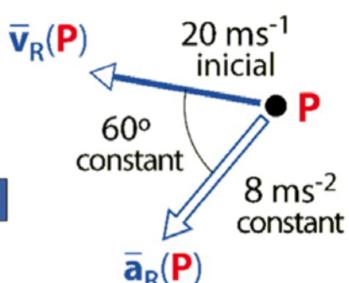
a^n es manté ct

$\Rightarrow R$ creixerà

Això descarta t, ja que té $R = ct$

La traj. serà q pq és l'única de radi creixent.

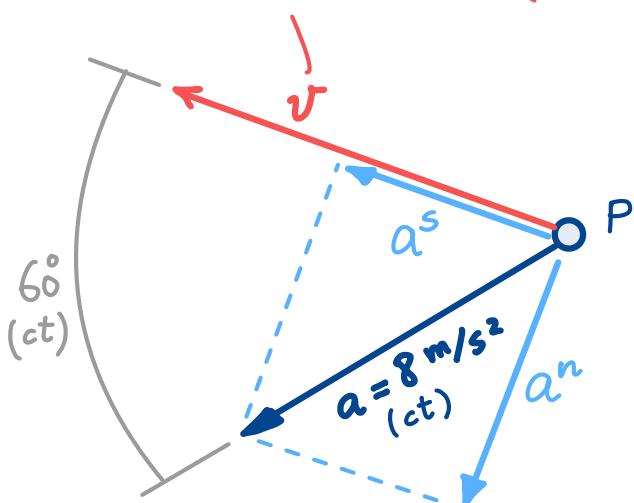
2P

 $t = 0$ 

R

En un cert instant, la partícula P té celeritat de 20 m/s respecte del terra (T). Si s'accelera amb $\bar{a}_T(P)$ de valor constant, i formant un angle de 60° constant amb $\bar{v}_T(P)$, quina és la seva celeritat 10 segons més tard?

Celeritat de P (inicialment, $v = 20 \text{ m/s}$)



Només a^s pot canviar v

a^n canvia el radi de curvatura de la traj. de P, però no v .

Clarament:

$$a^s = a \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}}$$



v augmenta a ritme de 4 m/s cada segon

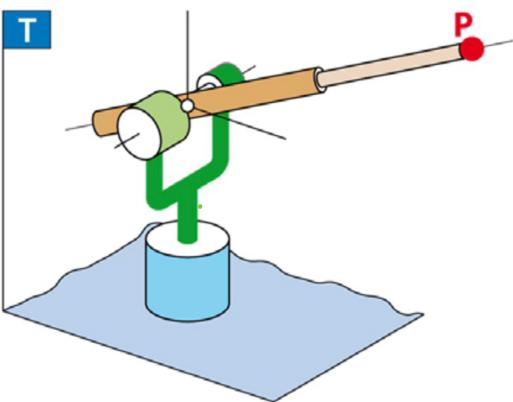


En 10" v haurà augmentat 40 m/s.



Com que inicialment $v = 20 \text{ m/s}$, al cap de 10s v serà de $20 + 40 = 60 \text{ m/s}$.

2P



La forquilla (forq) gira respecte del terra (T).
 La primera part de l'antena telescopica (ant.1) està articulada a la forquilla.
 Mitjançant la derivada geomètrica, calcula
 $\bar{v}_{\text{ant.1}}(P)$, $\bar{a}_{\text{ant.1}}(P)$, $\bar{v}_{\text{forq}}(P)$, $\bar{a}_{\text{forq}}(P)$.

En aquest exercici i el següent utilitzarem les coords.
 ψ, θ, x ja defiuides a 1P .

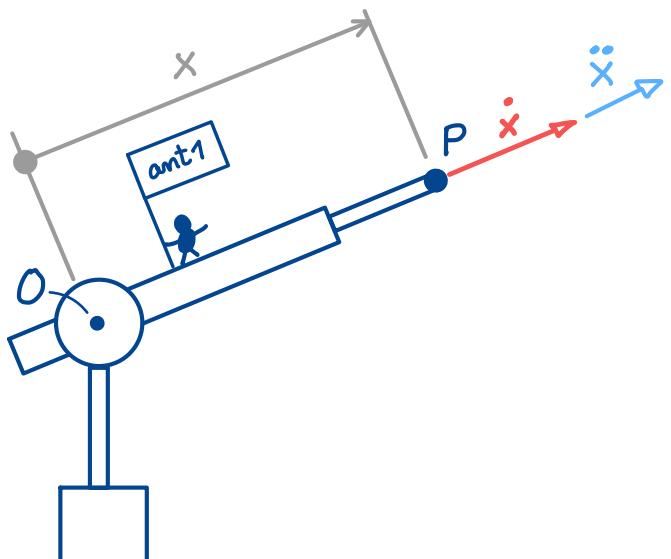
$\bar{v}_{\text{ant1}}(P)$ i $\bar{a}_{\text{ant1}}(P)$

Derivem geomètricament \overline{OP} .

Vist des d'ant1, \overline{OP} sols canvia de valor, no de direcció. Ergo:

$$\bar{v}_{\text{ant1}}(P) = (\rightarrow \ddot{x})$$

Derivant geomètricament
 $\bar{v}_{\text{ant1}}(P)$ obtenim



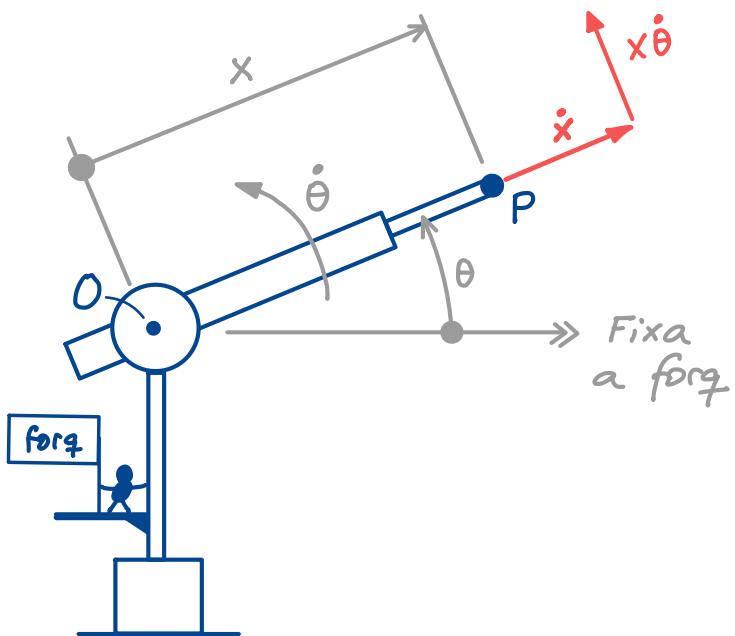
$$\bar{a}_{\text{ant}}(P) = (\rightarrow \ddot{x})$$

└ $\bar{v}_{\text{ant1}}(P)$ tampoc
 pateix canvis de dir.
 només de valor

$$\bar{v}_{\text{forg}}(P)$$

Ara cal avaluar els canvis de \bar{OP} des de forg!

Des de forg, \bar{OP} varia per causa de x i θ :



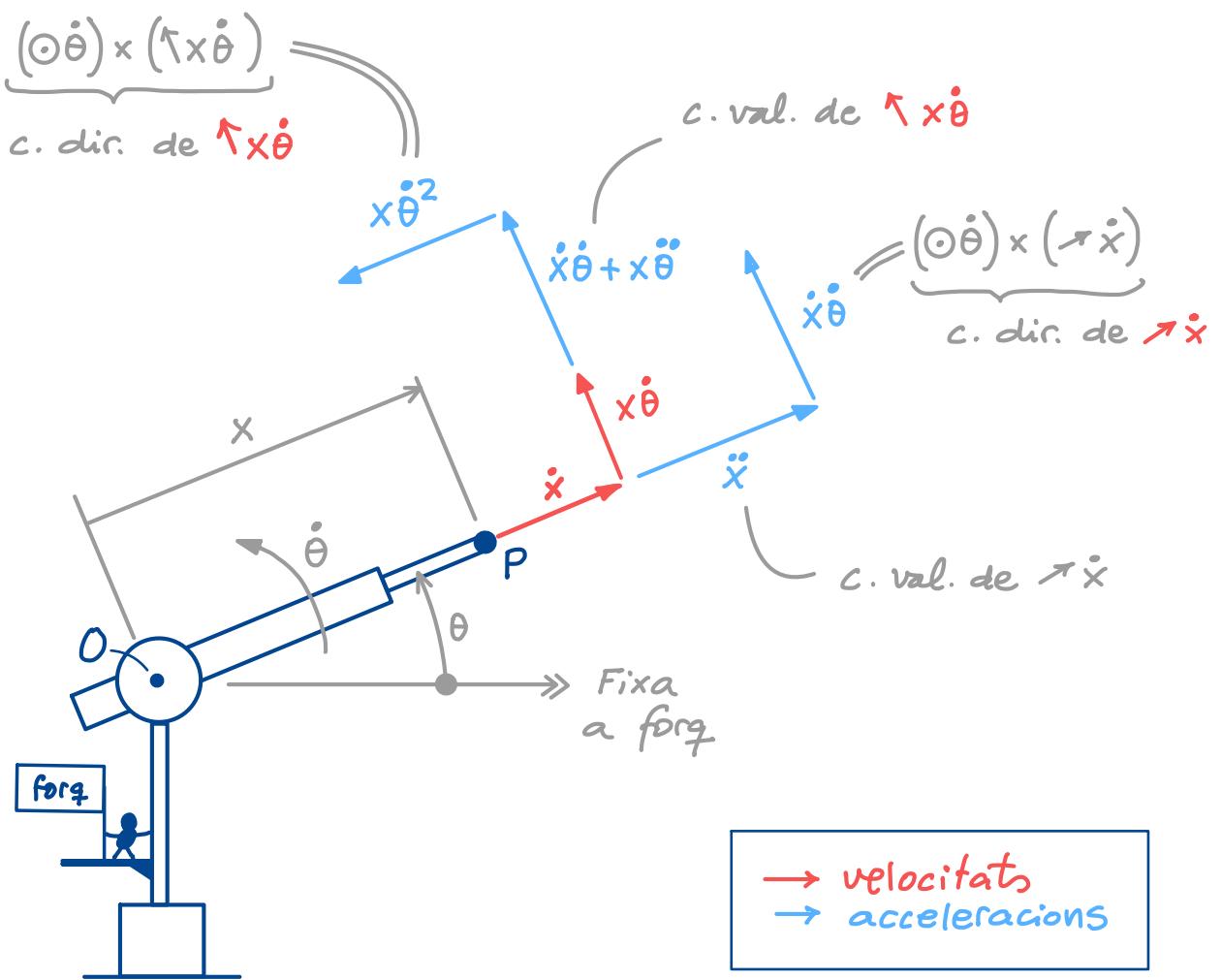
\bar{OP} s'estira quan x varia, i $\dot{\theta}\dot{x}$ el fa canviar de direcció. Ergo:

$$\bar{v}_{\text{forg}}(P) = \underbrace{(\rightarrow \dot{x}) + (\uparrow \times \dot{\theta})}_{\text{vecs. vermells indicats al dibuix}} + \underbrace{\bar{\Omega}_{\text{forg}} \times \bar{OP}}_{\text{c. val.}} = (\dot{\theta} \dot{x}) \times (\rightarrow x) + \bar{\Omega}_{\text{forg}} \times \bar{OP}$$

vecs. vermells indicats al dibuix

$\bar{a}_{\text{forg}}(P)$

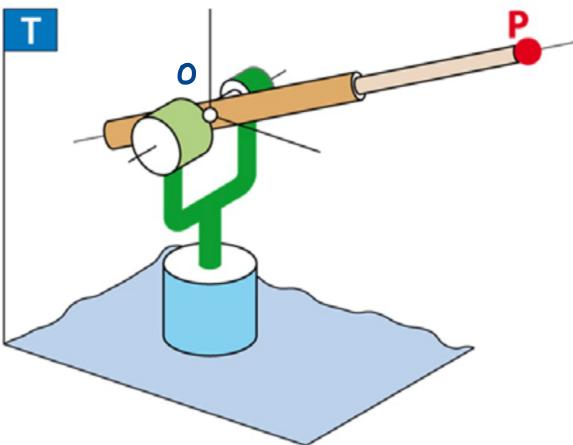
Per calcular $\bar{a}_{\text{forg}}(P)$ derivem els vecs. vermells anteriors, adonant-nos que tots canviem de valor i també de dir. (per causa de $\dot{\theta}$ nouament). El resultat són els vecs. blaus :



Agrupant els vecs. blaus queda :

$$\bar{a}_{\text{forg}}(P) = \underbrace{\left[\rightarrow (\ddot{x} - x\dot{\theta}^2) \right] + \left[\uparrow (z\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta}) \right]}_{\text{vecs. blaus}}$$

2P

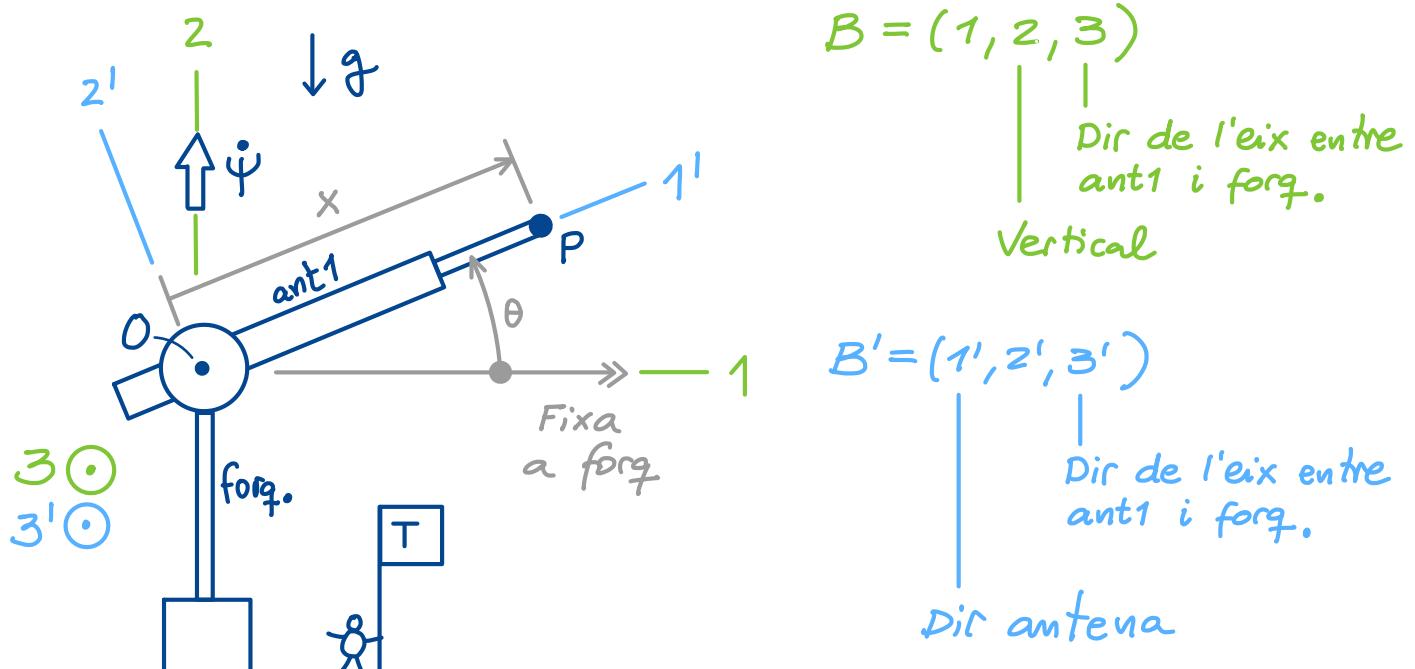


La forquilla gira respecte del terra (T).

La primera part de l'antena telescopica (ant.1) està articulada a la forquilla.

Mitjançant la derivada analítica, calcula $\bar{v}_T(P)$, $\bar{a}_T(P)$, $\bar{\alpha}_T^{\text{ant.1}}$.

Derivarem \bar{OP} . Aquest vector és fàcil de projectar en les següents bases:



La projecció de \bar{OP} sobre B' és trivial, però la vel. angular de B' és $\bar{\Omega}_T^{B'} = (\uparrow \dot{\psi}) + (\odot \dot{\theta})$. En canvi, la vel. angular de B és més senzilla, ja que

$$\bar{\Omega}_T^B = (\uparrow \dot{\psi})$$

Per aquest motiu, triarem B , però B' també seria una bona opció. El que sí evitarem és treballar en una base fixa a T perquè dificultaria la projecció de \bar{OP} .

$\bar{v}_T(P)$

$$\{\bar{OP}\}_B = \begin{Bmatrix} x \cos \theta \\ x \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Derivada
de les comp.

$$\{\bar{v}_T(P)\}_B = \left\{ \frac{d\bar{OP}}{dt} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} \dot{x} \cos \theta - x \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{x} \sin \theta + x \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{matrix} \right\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x \cos \theta \\ x \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \dot{x} \cos \theta - x \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{x} \sin \theta + x \dot{\theta} \cos \theta \\ -x \dot{\psi} \cos \theta \end{matrix} \right\} \quad (\blacksquare) \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x \dot{\psi} \cos \theta \end{Bmatrix}$$

A la pàg. següent hem calculat $\bar{v}_T(P)$ derivant \bar{OP} geomètricament. Es pot comprovar que són el mateix!

$\bar{a}_T(P)$

$$\{\bar{a}_T(P)\}_B = \left\{ \begin{matrix} \ddot{x} \cos \theta - \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{x} \dot{\theta} \sin \theta - x \ddot{\theta} \sin \theta - x \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{x} \sin \theta + \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + x \ddot{\theta} \cos \theta - x \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ -\dot{x} \dot{\psi} \cos \theta - x \ddot{\psi} \cos \theta + x \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left\{ \begin{matrix} \dot{x} \cos \theta - x \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{x} \sin \theta + x \dot{\theta} \cos \theta \\ -x \dot{\psi} \cos \theta \end{matrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{matrix} -x \dot{\psi}^2 \cos \theta \\ 0 \\ -\dot{\psi} \dot{x} \cos \theta + \dot{\psi} x \dot{\theta} \sin \theta \end{matrix} \right\}$$

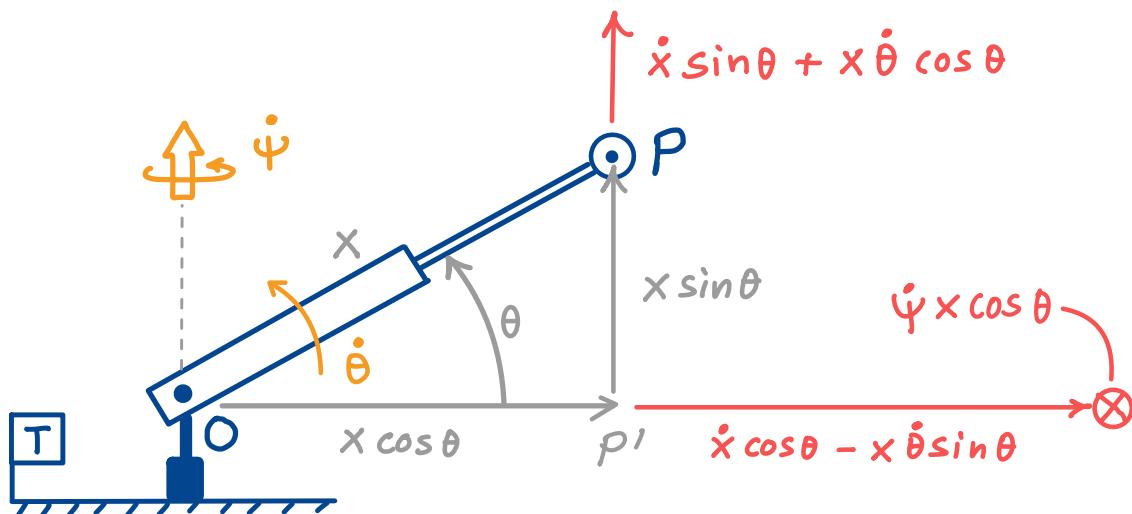
$$= \left\{ \begin{matrix} \ddot{x} \cos \theta - \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{x} \dot{\theta} \sin \theta - x \ddot{\theta} \sin \theta - x \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{x} \sin \theta + \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + x \ddot{\theta} \cos \theta - x \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ -2 \dot{x} \dot{\psi} \cos \theta - x \ddot{\psi} \cos \theta + 2 x \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{matrix} \right\}$$

$\bar{v}_T(P)$ derivant geomètricament

Podem descompondre^(*) $\overline{OP} = \overline{OP'} + \overline{P'P}$

- $\overline{OP'}$ només queda afectat per $\dot{\psi}$ (una rotació simple).
- $\overline{P'P}$ només canvia de valor

P' = projecció vertical de P sobre pla horitz. per O



Per tant, tenim:

$$\boxed{\bar{v}_T(P) = \frac{d\overline{OP}}{dt}}_T = \underbrace{\frac{d\overline{OP'}}{dt}}_T + \underbrace{\frac{d\overline{P'P}}{dt}}_T =$$

Sols canvia de valor Canvia de valor i direcció

$$= \boxed{\uparrow (\dot{x} \sin \theta + x \dot{\theta} \cos \theta)} +$$

$$\boxed{\rightarrow (\dot{x} \cos \theta - x \dot{\theta} \sin \theta)} + \boxed{\otimes \times \dot{\psi} \cos \theta}$$

Quadra amb (■)
de la pàg.
anterior

(*) Aquesta descomposició no és estrictament necessària, però facilita la derivada perquè, aleshores, sols apareix un canvi de direcció degut a una rotació simple.

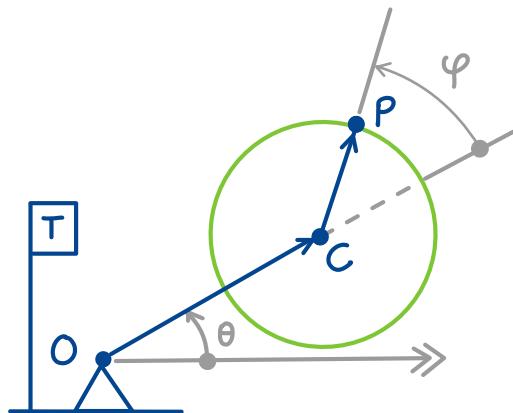
Comentari final

Fixeu-vos que en els exercicis típics de cinemàtica, com el de la guia circular o el de l'antena telescòpica, el que feu és calcular velocitats i acceleracions en funció de les coordenades que defineixen la configuració del sistema, i les seves derivades temporals.

Per exm., a la guia circular calculem $\bar{v}_T(P)$ i $\bar{a}_T(P)$ en funció de θ i φ , i les derivades $\dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$.

Pero... qui determina el que valen $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$?

La resposta és que, per ara, mentre feu cinemàtica, no ho sabem, i no ens preocupa! Quan entrem a dinàmica sí que ens preocuparà. Hi haurà coordenades que tindran el seu valor forçat per un motor (p. exm. hi podria haver un motor a O que farés $\theta(t)$) i altres que evolucionaran de manera "lliure" d'acord amb la dinàmica del sistema (per exm., P podria ser una calixa que evoluciona lliurement diur la guia sota l'acció de les forces de contacte entre P i la guia, i la gravetat). A dinàmica aprendrem que cal obtenir l'equació del moviment de P per saber com evolucionarà P (i φ en particular) al llarg del temps.



Mentrestant podem pensar que $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ són conegudes.

Els càlculs que estem aprenent a fer ara a cinemàtica (com obtenir $\bar{v}_T(P)$ i $\bar{a}_T(P)$ en funció de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$) seran també necessaris per poder obtenir les pròpies equacions del moviment del sistema en estudi. Equacions que, al seu torn, determinen l'evolució de les coordenades del sistema (θ i φ en la guia circular).