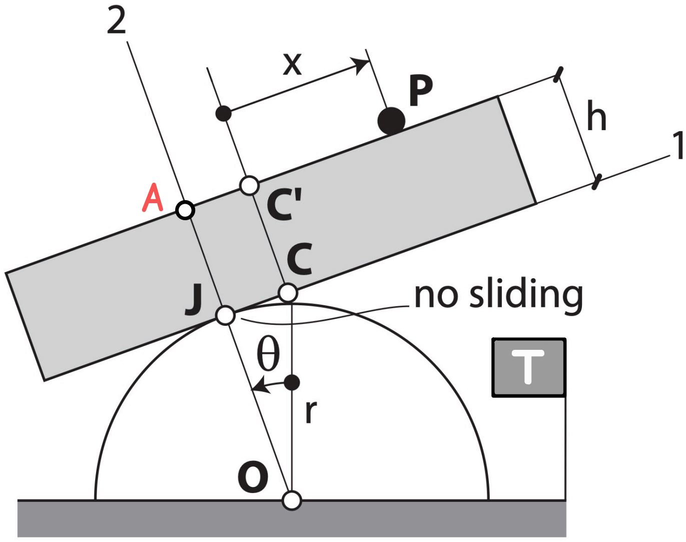
2P

derivació analítica

Bloc sobre semicilindre - Problema 2.1 RBK, pàg. 100



The mass point **P** slides on the block. The block rotates without sliding on the semicylindrical support fixed to the ground (T). For θ = 0, **C** and **C'** are both on the vertical line through **O**.

Find:

$$\boxed{\bar{v}_T(\mathbf{P}),\ \bar{a}_T(\mathbf{P})?}$$

Feu-lo per derivació analítica, en base $B = (1,2,3)$, i després per derivació geomètrica

Pistes:

- Deriveu $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$.
- Utilitzeu les coordenades x i θ per expressar $\overline{OA}$ i $\overline{AP}$.
- Fixeu-vos que $\| AC' \| = \| JC \| = r\theta$. Per què?
- La velocitat angular de la base és $\odot\, \dot{\theta}$.

Solucions:

$\bar{v}_T(P)$

$$\left\{\bar{v}_T(P)\right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{x} - \dot{\theta} h \\ (r\theta + x)\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_B$$

$\bar{a}_T(P)$

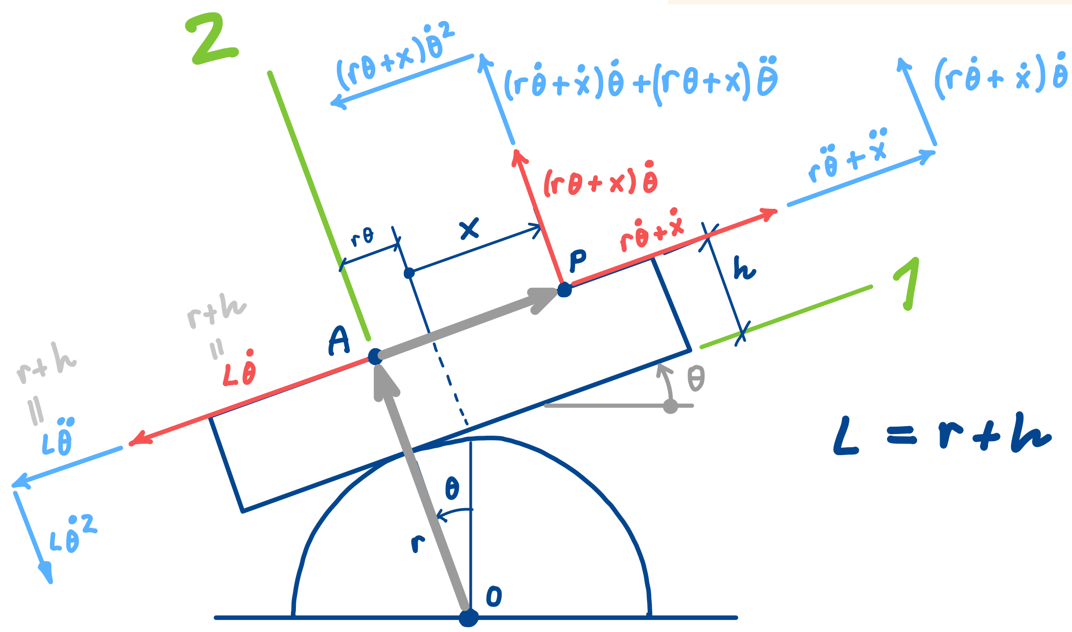
$$\left\{\bar{a}_T(P)\right\}_B = \begin{Bmatrix} \ddot{x} - \ddot{\theta} h - (r\theta + x)\dot{\theta}^2 \\ (r-h)\dot{\theta}^2 + (r\theta+x)\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{x} \\ 0 \end{Bmatrix}_B$$

Solució gràfica de la derivada geomètrica

Descomposem $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$ i derivem $\overline{OA}$ i $\overline{AP}$ per separat.

vecs $\overline{OA}$ i $\overline{AP}$
1eres derivades = velocitat
2ones " = accel.

Sempre que pugueu feu les derivades geomètriques sobre el dibuix



$L = r + h$

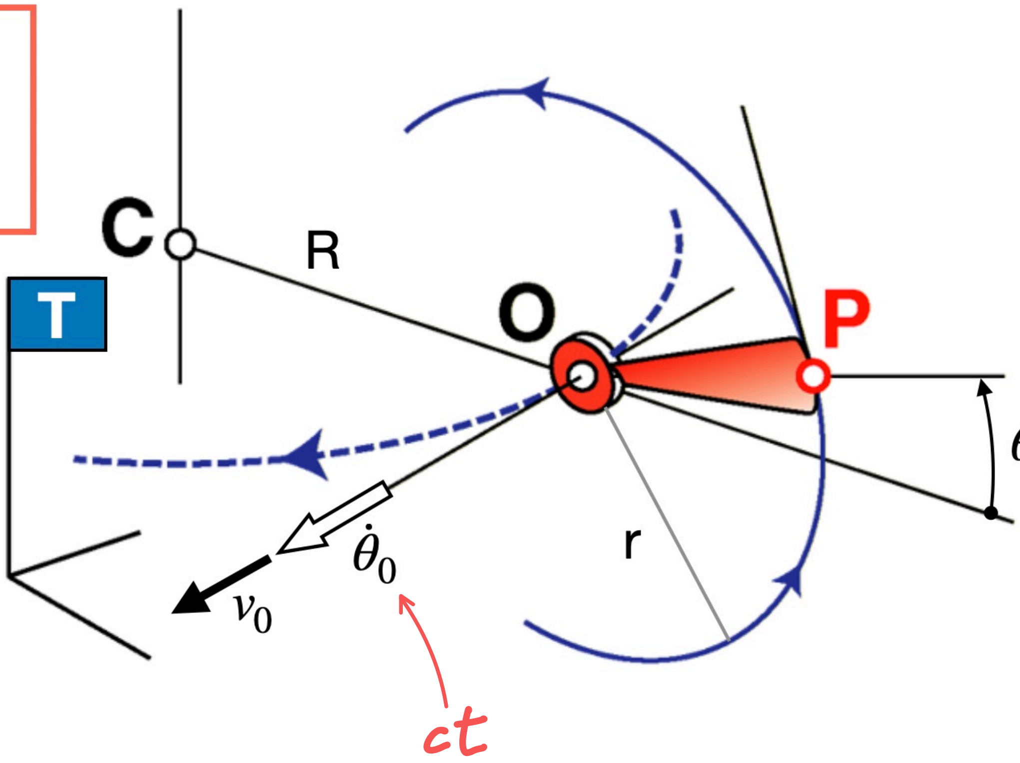
Hem de projectar aquests vectors sobre $B = (1, 2, 3)$ ...

Avió en rotació simple (problema 3.8 RBK, pàg. 103)

A plane has a simple rotation motion relative to the ground (T). Its propeller center O describes a circular trajectory in T, with center C, radius R, and constant speed v_0. The propeller rotates relative to the airplane with constant angular velocity $\dot{\theta}_0$ about its axis, which is tangent to the O trajectory.

Find:

$$\boxed{\begin{array}{c}\bar{\mathbf{v}}_T(P)\\ \bar{\mathbf{a}}_T(P)\end{array}}$$

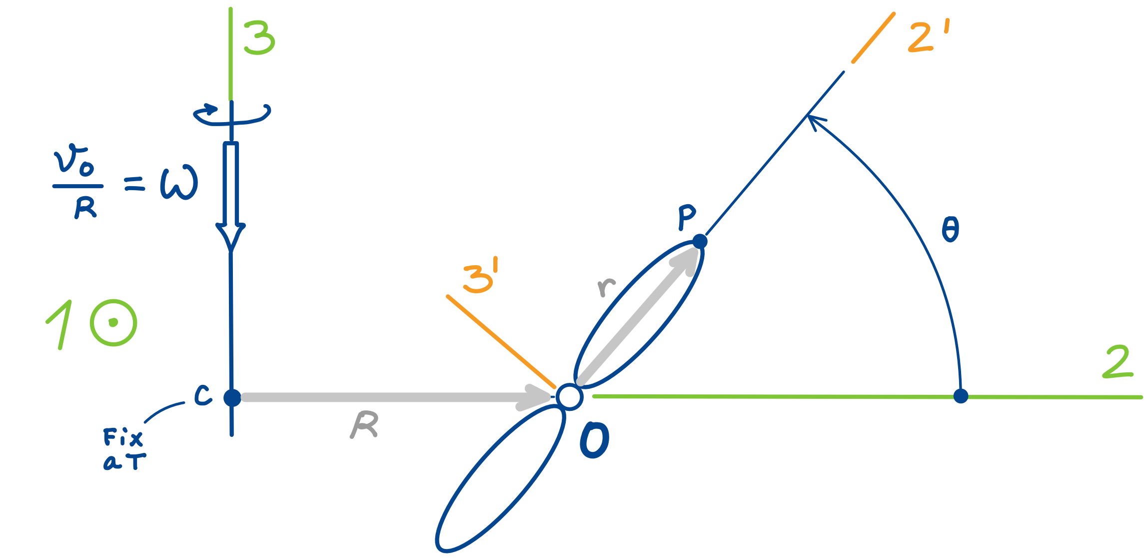


El farem per derivació analítica i vosaltres després el podeu fer per deriv. geomètrica i veure que els resultats encaixen.

Pistes:

- Proposeu 2 bases en les que $\overline{CO}$ o $\overline{OP}$ siguin fàcils de projectar (almenys un d'ells).
- Deriveu $\overline{CP} = \overline{CO} + \overline{OP}$ utilitzant cadascuna d'aquestes bases.

Solucions:



Les 2 bases "naturals" són | $B = (1, 2, 3)$, fixa a cabina ← facilita proj. $\overline{CO}$
| $B' = (1', 2', 3')$, fixa a hèlix ← " " $\overline{OP}$

En base B

$$\{\bar{v}_T(P)\}_B = \left\{ \begin{matrix} \omega R + \omega r \cos\theta \\ -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \end{matrix} \right\}$$

$$\{\bar{a}_T(P)\}_B = \left\{ \begin{matrix} -2\omega r\dot{\theta}\sin\theta \\ -\omega^2 R - r\cos\theta\cdot(\dot{\theta}^2+\omega^2) \\ -r\dot{\theta}^2\sin\theta \end{matrix} \right\} \leftarrow$$

on he assumit $\underbrace{\dot{\theta} = ct}_{\dot{\theta}_0} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

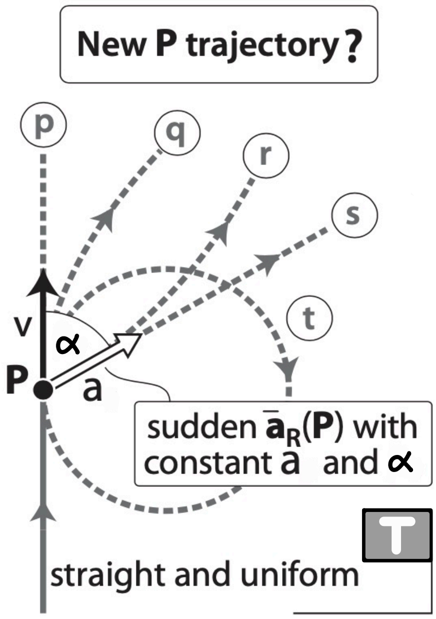
En base B'

$$\{\bar{v}_T(P)\}_B = \left\{ \begin{matrix} \omega R + \omega r\cos\theta \\ 0 \\ \dot{\theta} r \end{matrix} \right\}$$

$$\{\bar{a}_T(P)\}_B = \left\{ \begin{matrix} -2\omega r\dot{\theta}\sin\theta \\ -\omega^2\cos\theta\,(R + r\cos\theta) - \dot{\theta}^2 r \\ \omega^2\sin\theta\,(R + r\cos\theta) \end{matrix} \right\} \leftarrow$$

Novament, he assumit que $\underbrace{\dot{\theta} = ct}_{\dot{\theta}_0} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

Qüestió 2.8 RBK



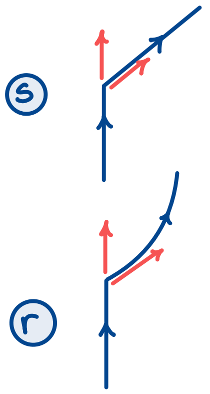
2.8 The initial motion of **P** in R is uniform and rectilinear. Suddenly it acquires an acceleration with constant value a and defining a constant angle α with the velocity $\bar{v}_T$ (**P**). What will be the new trajectory of **P** in R?

A p
B q
C r
D s
E t

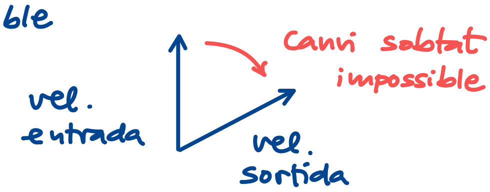
Pistes :

- s i r són rapidament descartables. Per què?
- Per saber si la trajectòria serà p, q o t esbrineu com evolucionarà el radi de curvatura a partir de l'instant indicat.

Solució:

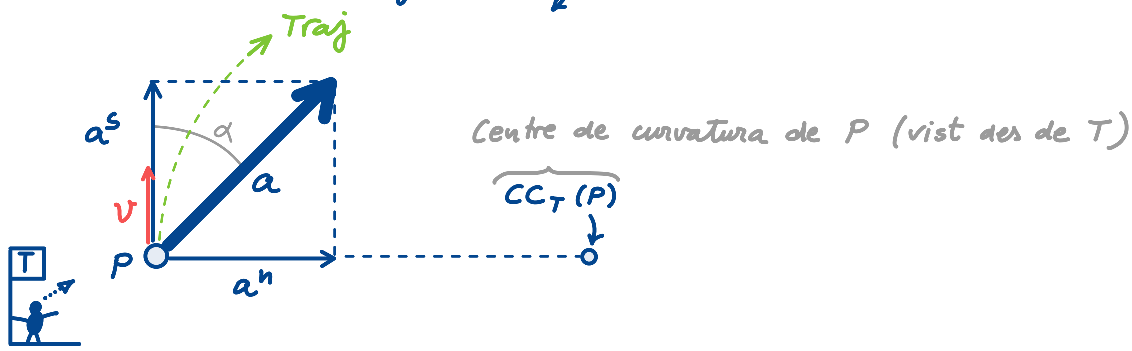


Impossibles. Ambdues trajectòries implicarien un canvi sobtat del vector velocitat, cosa que és impossible



Ara cal saber si serà p, q o t.

A l'instant de la figura ...



... P està sotmès a acceleració normal, de valor

$$a^n = a \sin\alpha,$$

per tant la trajectòria ha de ser curvada, amb radi

$$\mathcal{R} = \frac{v^2}{|a^n|} \qquad [\mathcal{R} = \mathcal{R}_T(P)]$$

Això descarta p, perquè p no és curvada (té $\mathcal{R} = \infty$).

Ara cal saber si serà q o t. Per esbrinar-ho, fixem-nos que ens diuen que a i α són constants:

$$\left.\begin{array}{l} a = ct \\ \alpha = ct \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a^s = a\cos\alpha = ct \\ a^n = a \sin\alpha = ct \end{array} \Rightarrow \text{amb el pas del temps, } v \text{ augmentarà!}$$

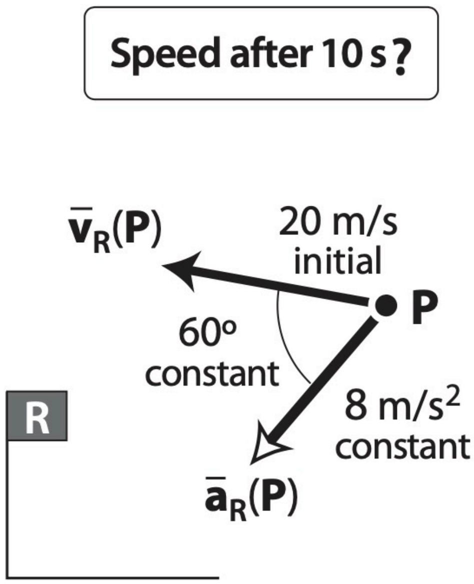
Això impica que $\mathcal{R}$ creixerà amb el pas del temps:

$$\mathcal{R} = \frac{\overset{\text{creix}}{v^2}}{\underset{ct}{|a^n|}} \Rightarrow \mathcal{R} \text{ creixerà}$$

Això descarta t, que té $\mathcal{R} = ct$.

La trajectòria serà q, que té $\mathcal{R}$ creixent.

Qüestió 2.9 RBK, pàg. 85



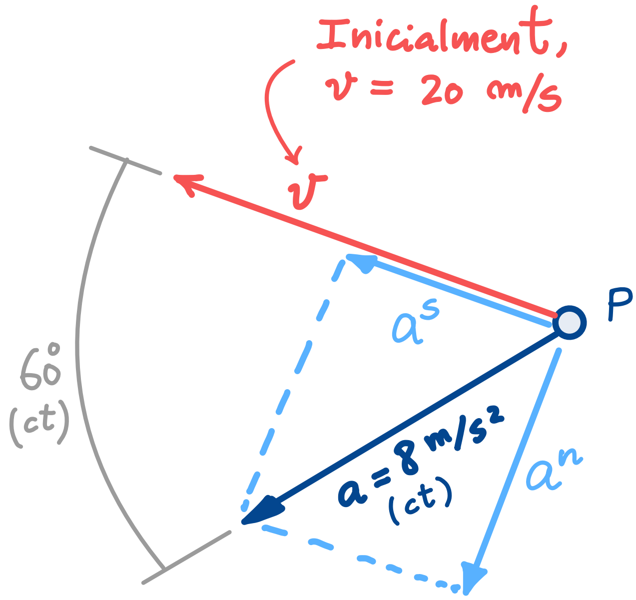
2.9 The initial speed of point **P** relative to R is 20 m/s. What will be the speed 10 s later?

A 100 m/s
B 26.93 m/s
C 20 m/s
D 60 m/s
E Not enough data to calculate it.

Pistes:

- L'única component de $\bar{a}_R(P)$ que pot canviar la celeritat de P és la tangencial $\bar{a}^s_R(P)$.
- La $\bar{a}^n_R(P)$ només canvia la curvatura de la trajectòria (el radi del cercle osculador).

Solució:



L'única component de $\bar{a}_R(P)$ que pot canviar la celeritat de P és la tangencial a^s.

La normal a^n només canvia la curvatura de la trajectòria (el radi del cercle osculador).

El valor de $\bar{a}^s_R(P)$ és

$$a^s = a \cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \ \frac{m}{s^2} = \frac{4 \ \frac{m}{s}}{s}$$

Aquest valor, a més, és constant, p.q. l'angle de 60° es manté constant. Per tant, la celeritat v augmenta a ritme de 4 m/s <u>cada segon</u>. Al cap de 10 s haurà augmentat 40 m/s. Com que la celeritat inicial és de 20 m/s, al cap dels 10 s serà de 20 + 40 = 60 m/s. $\boxed{\text{Resposta} = D}$