12P

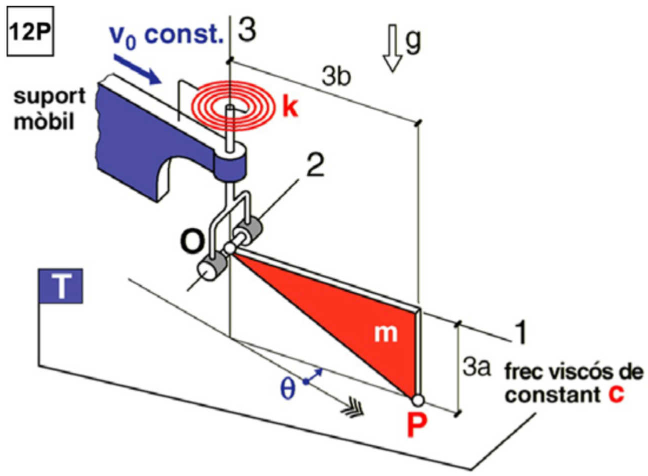
PROF

Teoremes vectorials II

Ho poso a dalt, dreta, al ppi x tenir-ho a mà

$$\sum_{\text{sist}} \overline{F}_{ext} = m_{sist} \cdot \overline{a}_{RGal}(G_{sist})$$

$$\sum_{\text{sist}} \overline{M}_{ext}(Q) - \overline{QG} \times m_{sist} \cdot \overline{a}_{RGal}(Q) = \dot{\overline{H}}^{sist}_{RTQ}(Q)$$



La placa triangular homogènia, de massa m i costats 3a i 3b, està articulada a una forquilla, de massa negligible, i manté contacte amb el terra (T). Entre terra i placa hi ha frec viscós de coeficient c. La forquilla està articulada a un suport que té un moviment de translació v_0 constant respecte del terra. Entre suport i forquilla hi ha una molla torsional de constant k.

Fes el diagrama general d'interaccions (DGI) i troba:

- l'equació el moviment per a la θ.
- el valor de k mínim per a estabilitzar les oscil·lacions al voltant de la configuració $\theta = 0$.

El vèrtex P llisca sobre el pla horitzontal i entre ell i el pla hi ha un frec viscós de constant c independent de la normal.

Per $\theta = 0$ la molla està distesa.] Afegir-ho a l'enunciat

Interès del problema: si interpretem el suport mòbil com el xassís d'un vehicle que es mou marxa enrere amb $\bar{v}_0 = ct$, i veiem la placa com un model simple de remolc, l'objectiu és que el remolc es mantingui alineat amb el vehicle. Per aconseguir-ho posem una molla torsional entre suport i forquilla, que tendeixi a reduir les petites desviacions de θ, retornant-les cap a $\theta_{eq} = 0$ quan n'hi hagi. És a dir, fent que $\theta = 0$ sigui una posició d'equilibri ESTABLE del sistema. Veurem que el valor de K necessari per garantir aquesta estabilitat depèn de v_0. A major v_0 caldrà major K.

Llegeixo enunciat (afegir $\theta = 0 \Rightarrow$ molla distesa)

interès problema
- mantenir remolc alineat
- x aconseguir-ho, posem molla
- volem $\theta_{eq} = 0$ EST
  quina k mínima cal efd v_0?

2 GL | $\ddot{\theta}$ lliure, v_0 forçat

$\boxed{\text{Força frec viscós } T \to \text{placa}}$

P llisca

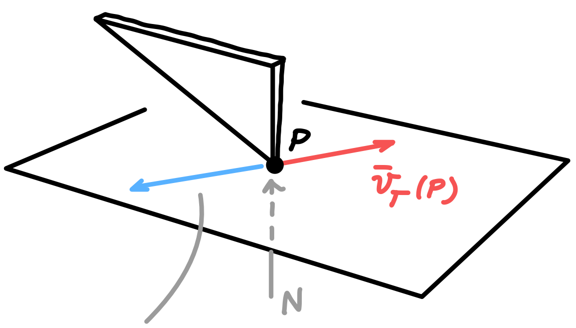
+

"Entre terra i placa ∃ frec viscós de coef. c"

$\Downarrow$

∃ força de fricció $T \to P$ modelitzada així $\longrightarrow$

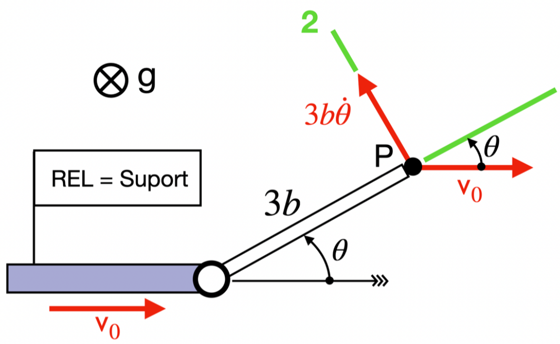
Model de frec viscós

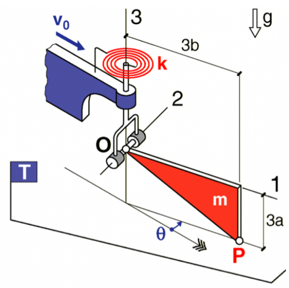


$\bar{F}_{fv} = -c \cdot \bar{v}_T(P)$

No és μN! Seria μN amb el model de frec sec

Força de frec viscós T → P





$$\bar{v}_T(\mathbf{P}) = \bar{v}_{REL}(\mathbf{P}) + \bar{v}_{ar}(\mathbf{P}) = \begin{Bmatrix} v_0 \cos\theta \\ -v_0 \sin\theta + 3b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{B=(1,2,3)}$$

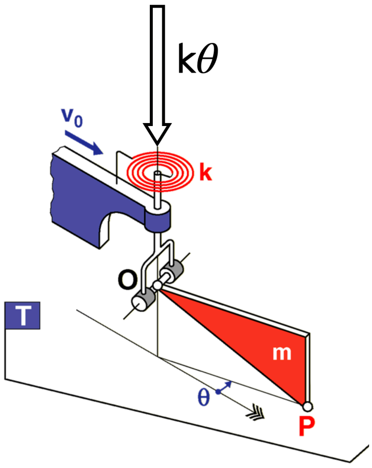
$$\bar{F}_{fv} = -c\,\bar{v}_T(\mathbf{P}) = \begin{Bmatrix} -cv_0 \cos\theta \\ cv_0 \sin\theta - 3cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_B$$

F_{fv1}

F_{fv2}

Parell molla torsional

Parell molla torsional → forq



Molla distesa per $\theta = 0$

+

Quan $\theta \uparrow$, molla tendeix a tornar placa cap a $\theta = 0$

$\Downarrow$

Parell molla → forq ha de ser ($\Downarrow k\theta$)

Eq. mov. θ

$\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta})$ Permetrà saber si $\theta = 0°$ és d'eq. EST

Eines x trobar-la
- DGI
- Full ruta

DGI sobre diapo ← Assumeixo massa suport ≃ 0 (+ clar)

Saltable

Anàlisi global

- 18 incògn : 16 ie, $\ddot{\theta}$, F (força actuador)
- 18 eqs = 3 sòlids · 6 eqs/sòlid

DET ✓

Per reduir eqs, examinem subsistemes

θ sols intervé a placa o forq ⇒ Sist. ha de contenir placa o forq

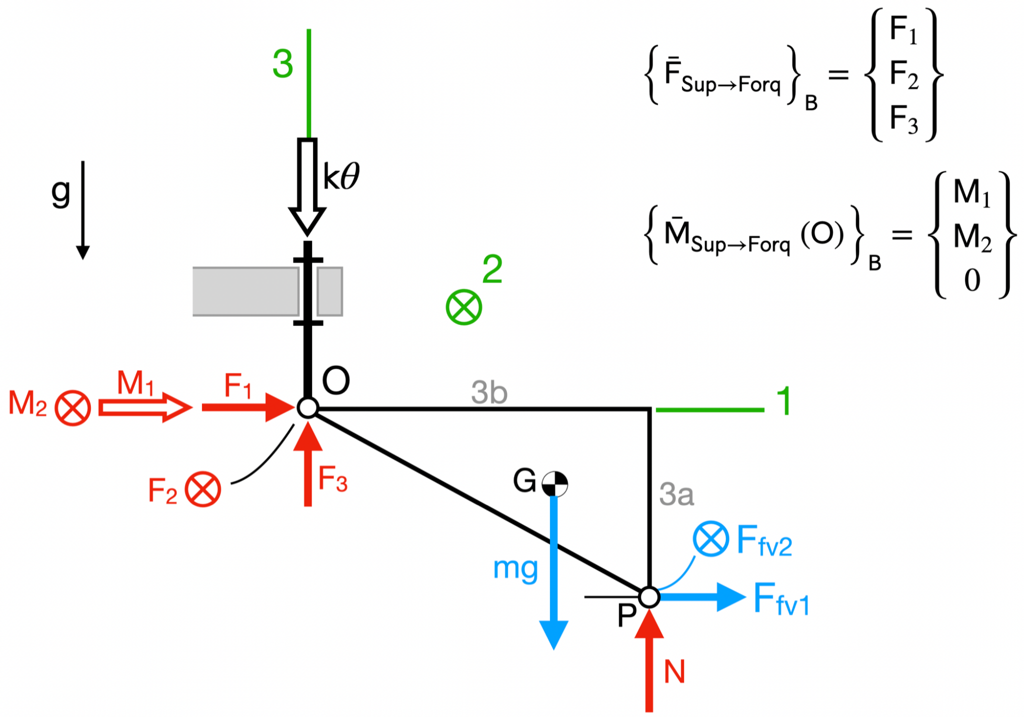
Avaluem ≠ subsistemes → Diapo → Tots INDET ☹

Sembla que caldrà considerar 2 sist. x tenir + eqs ...

Però... que tots sist. d'eqs. surtin <u>INDET</u> no impedeix que puguin contenir 1 eq sense i.e. Seria l'eq. del mov. !

eq. mov. hauria de contenir k i m en ppi	$\rightarrow$ Donem oportunitat a "placa + forq"

Forces sobre "Placa + Forq"



Si apliquem TMC(O) $\Rightarrow \nexists$ mom. d'enllaç en dir. 3

N sols crea mom. en dir. 2

Full ruta eq. mov. θ	sist = Placa + forq $\left.\text{TMC}(O)\right]_3$

$\left.\text{TMC}(O)\right]_3$

$$\sum \overline{M}_{ext}(O) + \underbrace{\overline{OG} \times m\,\overline{a}_T(O)}^{\overline{0}\ \ (\overline{v}_T(O) = \overline{v}_o = ct)} = \dot{\overline{H}}_{RTO}(O)$$

$\left.\sum \overline{M}_{ext}(O)\right]_3$

$$\sum \overline{M}_{ext}(O) = (\Rightarrow M_1) + (\otimes M_2) + \overline{OG} \times (\downarrow mg) +$$

$$\overline{OP} \times \overline{N} + \underbrace{\overline{OP} \times \overline{F}_{fv} + (\Downarrow K\theta)}_{\text{únics amb comp. 3}} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ -K\theta + 3bF_{fv2} \end{Bmatrix} \qquad (I)$$

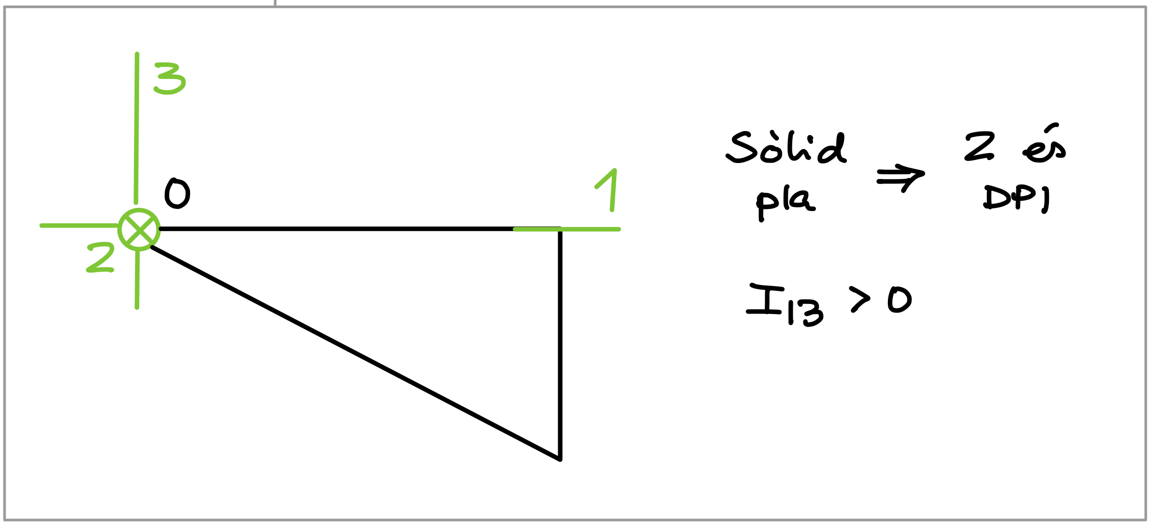
$$\left\{\overline{OP} \times \overline{F}_{fv}\right\}_B = \begin{Bmatrix} 3b \\ 0 \\ -3a \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} F_{fv1} \\ F_{fv2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 3bF_{fv2} \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\overline{H}}_{RTD}(O)\Big]_3$$

Només placa té massa (forq no)

$$\overline{H}_{RTD}(O) \overset{O \in \text{placa}}{=} \mathbb{I}_{placa}(O) \cdot \overline{\Omega}^{placa}_{T}$$

$$\left\{\overline{H}_{RTD}(O)\right\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & |I_{13}| \\ 0 & I_{11}+I_{33} & 0 \\ |I_{13}| & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} |I_{13}|\dot{\theta} \\ 0 \\ I_{33}\dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (\mathrm{II})$$



Sòlid pla $\Rightarrow$ 2 és DPI

$I_{13} > 0$

$$\dot{\overline{H}}_{RTD}(O) \overset{DEF}{=} \frac{d}{dt}\overline{H}_{RTD}(O)\Big]_{RTD}$$

$$\left\{\dot{\overline{H}}_{RTD}(O)\right\}_B = \begin{Bmatrix} \vdots \\ I_{33}\ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}_{\overline{\Omega}^B_{RTD} = \overline{\Omega}^B_T} \times \begin{Bmatrix} |I_{13}|\dot{\theta} \\ 0 \\ I_{33}\dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ I_{33}\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (\mathrm{III})$$

$$\left[(\mathrm{II}) = (\mathrm{III})\right]_3$$

$$-K\theta + 3b\,F_{fv2} = I_{33}\ddot{\theta}$$

$$-K\theta + 3b\left(c v_0 \sin\theta - 3cb\dot{\theta}\right) = I_{33}\ddot{\theta}$$

$$\boxed{I_{33}\ddot{\theta} + 9cb^2\dot{\theta} + K\theta - 3bcv_0\sin\theta = 0} \quad (\mathrm{IV})$$

Després veiem com calcular-lo

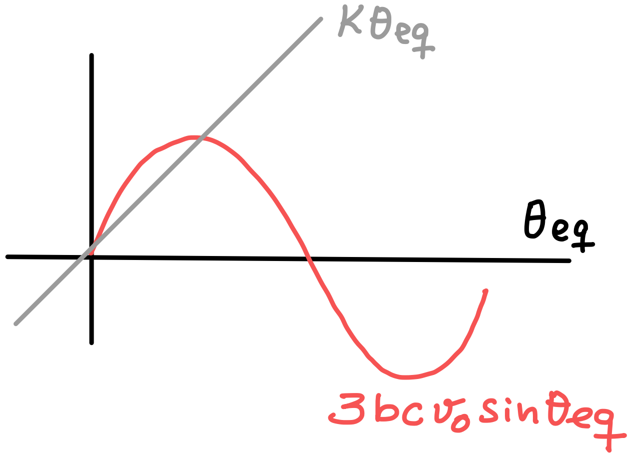
M'ho salto:

Punts equilibri ?

Subst $\theta = \theta_{eq}$, $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$ a (IV):

$$K\theta_{eq} = 3bcv_0 \sin\theta_{eq}$$

$$\underbrace{\theta_{eq} = 0 \quad (\text{sol trivial})}_{\text{La q volem estudiar}}$$



Estabilitat de $\theta_{eq} = 0°$?

En 3 passos com al pèndol simple de 9P.

$$I_{33}\,\ddot{\theta} + 9cb^2\,\dot{\theta} + k\,\theta - 3bc\text{v}_0\,\sin\theta = 0$$

Obtenim EDO de l'error ε

$$\theta = \theta_{\text{eq}} + \varepsilon = \varepsilon$$

en aquest exemple

$$\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$$

$$I_{33}\,\ddot{\varepsilon} + 9cb^2\,\dot{\varepsilon} + k\,\varepsilon - 3bc\text{v}_0\,\sin\varepsilon = 0$$

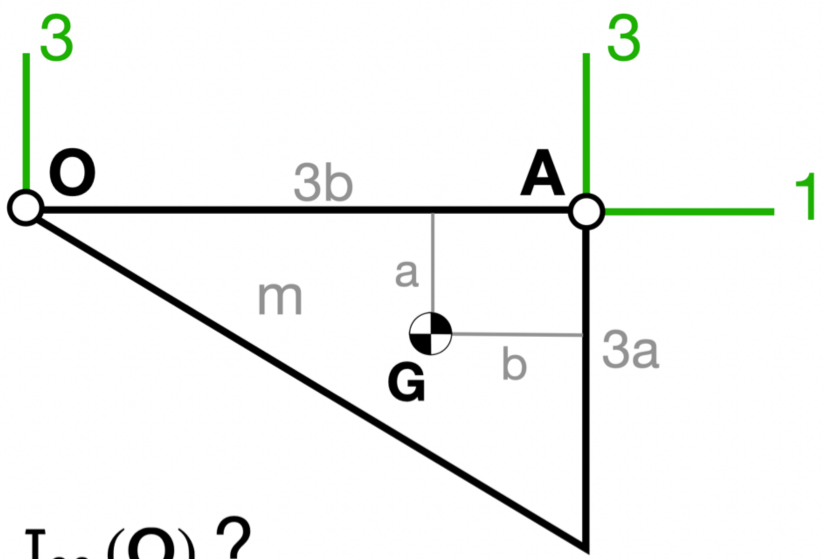
La linealitzem $\quad \sin\varepsilon \approx \varepsilon$

$$I_{33}\,\ddot{\varepsilon} + \underbrace{9cb^2}_{A}\,\dot{\varepsilon} + \underbrace{(k - 3bc\text{v}_0)}_{B}\,\varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} = -\underbrace{\frac{B}{I_{33}}}_{K}\varepsilon - \underbrace{\frac{A}{I_{33}}}_{C>0}\dot{\varepsilon}$$

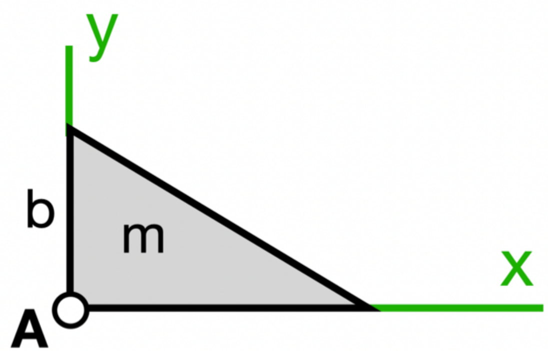
K > 0?

$$\text{K} > 0 \iff \text{B} > 0 \iff \underbrace{k > 3bc\text{v}_0}_{\text{Criteri per dissenyar la molla}}$$



$I_{33}(\mathbf{O})$?

Taules



$$I_{xx}(\mathbf{A}) = \frac{1}{6}mb^2$$

$I_{33}(\mathbf{A})$ de taules + **doble Steiner** per passar a **O**:

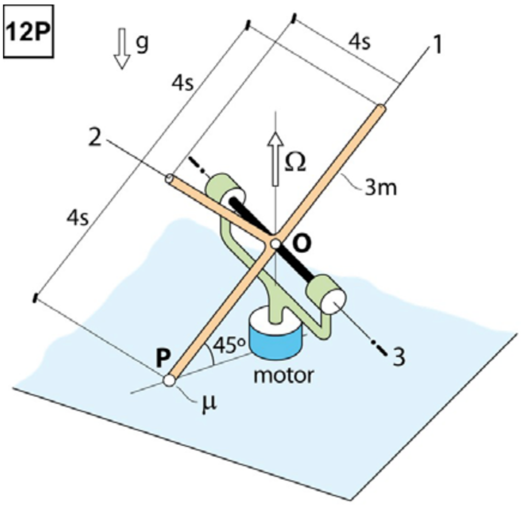
$$(a) \qquad I_{33}(\mathbf{O}) = I_{33}(\mathbf{G}) + I_{33}^{\oplus}(\mathbf{O})$$

$$(b) \qquad I_{33}(\mathbf{A}) = I_{33}(\mathbf{G}) + I_{33}^{\oplus}(\mathbf{A})$$

$$(a-b) \qquad I_{33}(\mathbf{O}) = I_{33}(\mathbf{A}) + I_{33}^{\oplus}(\mathbf{O}) - I_{33}^{\oplus}(\mathbf{A})$$

$$I_{33}(\mathbf{O}) = \frac{1}{6}m(3b^2) + m(2b)^2 - mb^2 = \frac{9}{2}mb^2$$

12P



4s

El sòlid rígid està format per tres barres homogènies, cadascuna de massa m i llargària 3s i està articulat a una forquilla. Inicialment, el sòlid gira amb Ω_0 respecte del terra (T) i manté contacte amb el terra. Entre terra i sòlid hi ha frec sec de coeficient μ. Fes el diagrama general d'interaccions (DGI) i troba:

- el valor crític de Ω_0 (Ω_{cr}) per al qual es perd el contacte amb el terra.
- l'equació el moviment quan $\Omega > \Omega_{cr}$.

GL

Si P en contacte amb T :

$$1 \text{ GL}: \quad \dot{\psi} = \Omega = ct \quad (\text{forçat})$$

1er analitzarem aquest cas

$\Omega_{crítica}$?

Si P perd contacte :

$$2 \text{ GL} \left| \begin{array}{ll} \dot{\psi} = \Omega = ct & (\text{forçat}) \\ \dot{\theta} & (\text{lliure}) \end{array} \right.$$

Després aquest

$\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta})$?

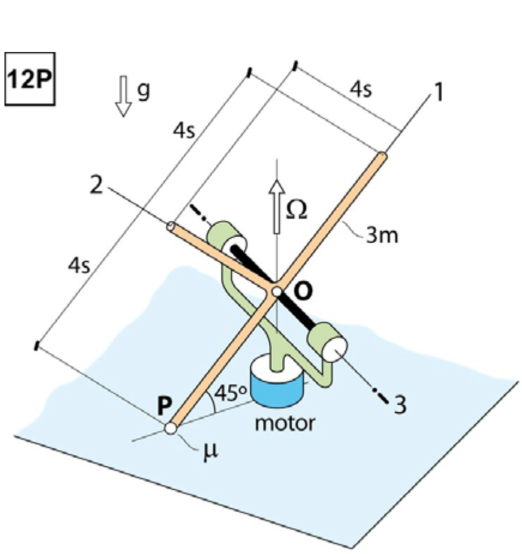
Motor

En general:

- Si sabem $\Gamma \Rightarrow \ddot{\psi}$ és incògn.
- Si sabem $\ddot{\psi} \Rightarrow \Gamma$ és incògn.

En aq. exercici :

$$\dot{\psi} = \Omega = ct \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \ddot{\psi} = 0 \ (\text{coneguda}) \\ \Gamma \text{ és incògn} \end{array} \right.$$



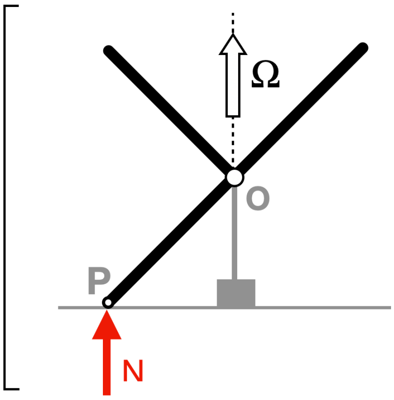
El sòlid rígid està format per tres barres homogènies, cadascuna de massa m i llargària 3s 4s i està articulat a una forquilla. Inicialment, el sòlid gira amb ~~amb~~ Ω_0 respecte del terra (T) i manté contacte amb el terra. Entre terra i sòlid hi ha frec sec de coeficient μ.

Fes el diagrama general d'interaccions (DGI) i troba:

- el valor crític de Ω_0 (Ω_{cr}) per al qual es perd el contacte amb el terra.
- l'equació el moviment quan $\Omega > \Omega_{cr}$.

$\boxed{\text{GL ?}}$ 2 situacions:

P manté contacte amb T

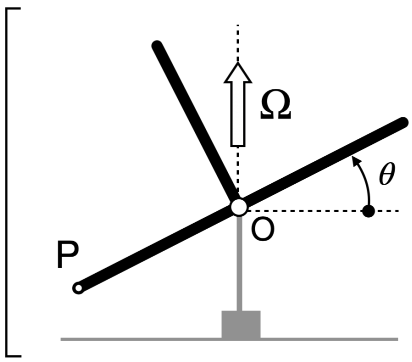


1 GL

$\dot{\psi} = \Omega = ct$ (forçat)

$\left(\begin{array}{l} N > 0 \\ \Omega < \Omega_{crítica} \end{array} \right)$

Contacte perdut



2 GL

$\dot{\psi} = \Omega = ct$ (forçat)

$\dot{\theta}$ (lliure)

$(\Omega > \Omega_{crítica})$

Suposarem inicialment que hi ha contacte T–P

Buscarem $N = f(\Omega)$

Trobarem $\Omega_{crít.}$ t.q. $N = 0$

Recordem tractament motors

Via diapo

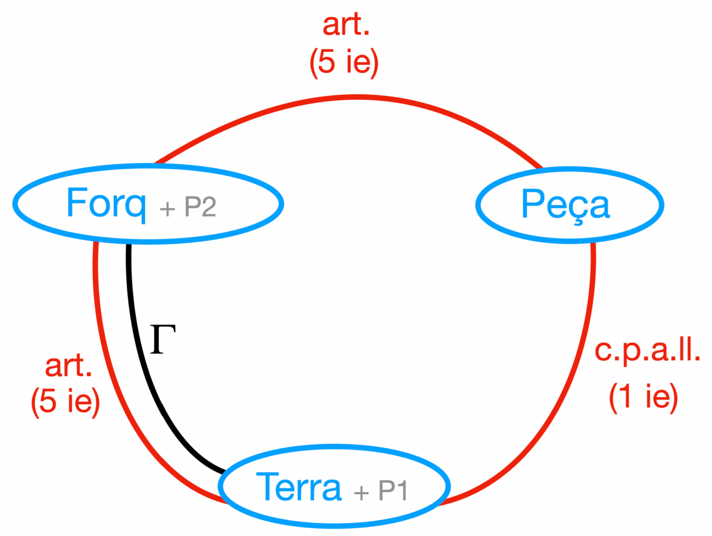
Γ conegut $\Rightarrow$ $\ddot{\psi}$ incògn.

$\ddot{\psi}$ incog. $\Rightarrow$ Γ incògn.

Aquesta situació !

DGI (Si P i T en contacte)

Via diapo



Anàlisi global

12 incògn : 11 ie, Γ

12 eqs $=$ 2 sòlids $\cdot$ 6 $\frac{\text{eqs}}{\text{sòlid}}$

DET ✓

Full ruta per N

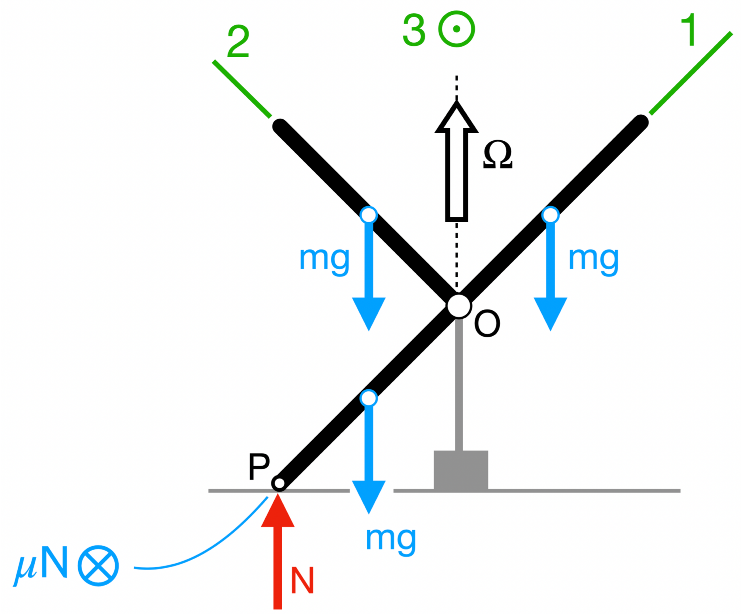
Volem N $\Rightarrow$ Sist. ha d'incloure la peça

- SIST = Peça : 6 ie $\Rightarrow$ DET ✓
- SIST = Peça + forq : 6 ie, Γ $\Rightarrow$ INDET ×

Triem sist = peça

$$\left\{\bar{F}_{Forq\to Peça}\right\}_B = \begin{Bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{Forq\to Peça}(O)\right\}_B = \begin{Bmatrix}M_1\\M_2\\0\end{Bmatrix}$$



N crea mom. dir. 3
Cap altra ie en crea $\Rightarrow$

Full nta per N	Sist = Peça $\text{TMC}(O)]_3$

$\text{TMC}(O)]_3$

$$\sum M_{ext}(O) - \overbrace{\overline{OG}_{SIST}\times m_{SIST}\,\bar{a}_{RGal}(O)}^{\bar{0}\ \ (O\text{ fix a }RGal = T)} = \dot{\bar{H}}_{\underset{T}{\underline{RTO}}}(O)$$

$$\sum M_{ext}(O)\Big]_3 = \underbrace{\left(\otimes\, N\,\frac{4s}{\sqrt{2}}\right)}_{\overline{OP}\times\bar{N}} + \underbrace{\left(\odot\, mg\,\frac{2s}{\sqrt{2}}\right)}_{\overline{OG}_1\times(\downarrow mg)} \qquad \text{(a)}$$

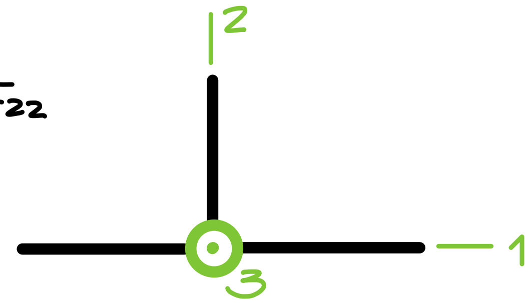
$$\bar{H}_{RTO}(O) = \mathbb{I}_{peça}(O)\cdot\bar{\Omega}^{peça}_{T}$$

1 únic sòlid
O ∈ sòlid

Fig. plana $\Rightarrow$ $\left|\begin{array}{l} 3 \text{ és DPI} \\ I_{33} = I_{11} + I_{22} \end{array}\right.$

$I_{12} = 0$

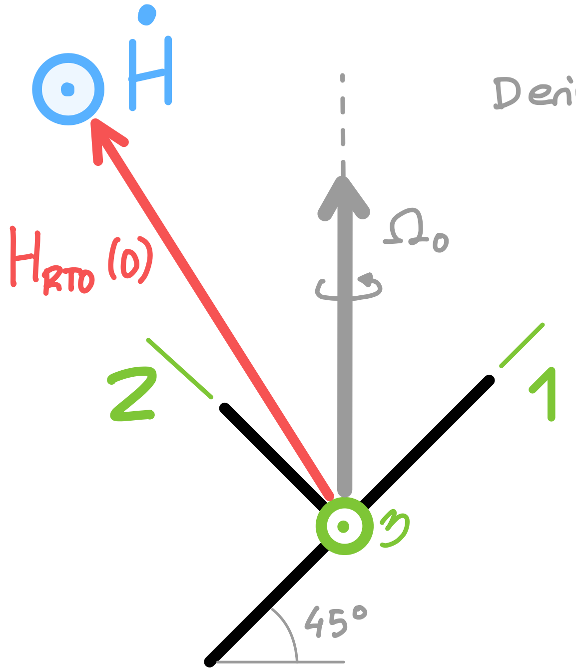
$I_{22} = 2\, I_{11}$



$$\left\{\bar{H}_{RTO}(O)\right\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & 2I & \\ & & 3I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega/\sqrt{2} \\ \Omega/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} I \\ 2I \\ 0 \end{Bmatrix}$$

I_{11}

$I_{22} > I_{11}$



Derivant geomètricament veig:

Tot en dir. 3

$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(O) = \odot\ \dot{H} \qquad \textbf{(b)}$$

pdet (>0 !)

(a) = (b):

$$\left(\otimes\ N \frac{4s}{\sqrt{2}}\right) + \left(\odot\ mg \frac{2s}{\sqrt{2}}\right) = \odot\ \dot{H}$$

$$N \frac{4s}{\sqrt{2}} - mg \frac{2s}{\sqrt{2}} = -\dot{H}$$

Salto

$$\boxed{N = \frac{mg}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4s}\, \dot{H}}$$

Discussió :

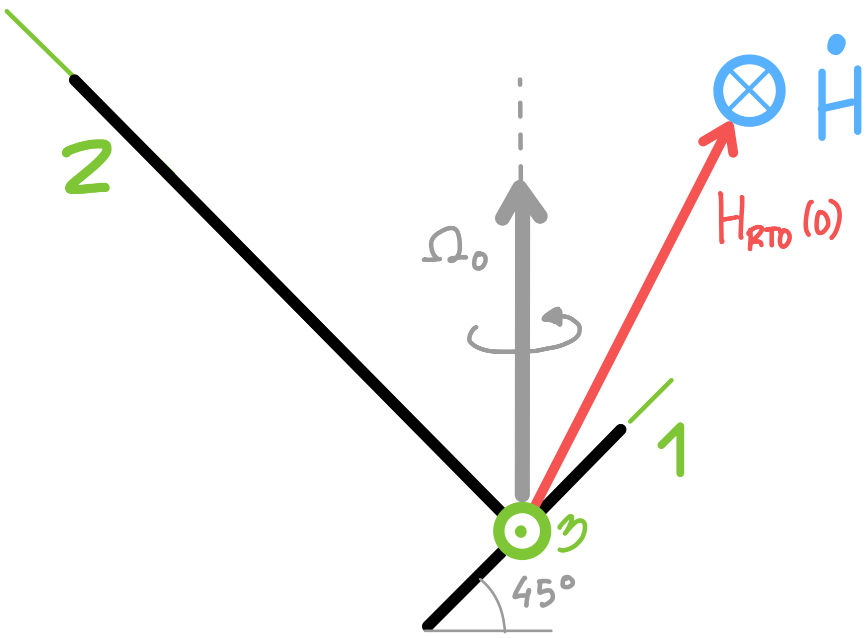
pq mom. cinètic peça = 0

▷ $\Omega = 0 \Rightarrow \underbrace{\dot{H} = 0}_{} \Rightarrow N = \frac{mg}{2}$

▷ si $\Omega > 0 \Rightarrow \dot{H} > 0 \Rightarrow N < \frac{mg}{2}$

$\exists$ $\Omega_{crítica}$ pèrdua contacte

Què hauria passat si $I_{22} < I_{11}$?



$$N = \frac{mg}{2} \underbrace{- \frac{\sqrt{2}}{45} \dot{H}}_{\text{Ara} > 0}$$

Ara < 0

N augmentaria amb Ω

Es mantindria el contacte

Càlcul d'$\dot{H}$ per trobar $\Omega_{crítica}$

$$\dot{H}_{RTO}(0) = \underbrace{\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}}_{\text{deriv. comp.}} + \underbrace{\begin{Bmatrix}\Omega/\sqrt{2}\\ \Omega/\sqrt{2}\\ 0\end{Bmatrix}}_{\overline{\Omega}^{B}_{\underbrace{RTO}_{T}}} \times \underbrace{\begin{Bmatrix}I\\ 2I\\ 0\end{Bmatrix}}_{\text{vec. sense deriv.}} = \begin{Bmatrix}0\\0\\ \underbrace{\frac{I\Omega^2}{2}}_{\dot{H}}\end{Bmatrix}$$

$$\boxed{N = \frac{mg}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4s}\overbrace{\frac{I\Omega^2}{2}}^{\dot{H}} = \frac{mg4s - I\Omega^2\sqrt{2}}{8s}}$$

$$N > 0 \iff mg4s > I\Omega^2\sqrt{2}$$

$$\iff \Omega^2 < \frac{mg4s}{I\sqrt{2}}$$

$$\iff \boxed{\Omega_{crítica} = \sqrt{\frac{mg4s}{I\sqrt{2}}}}$$