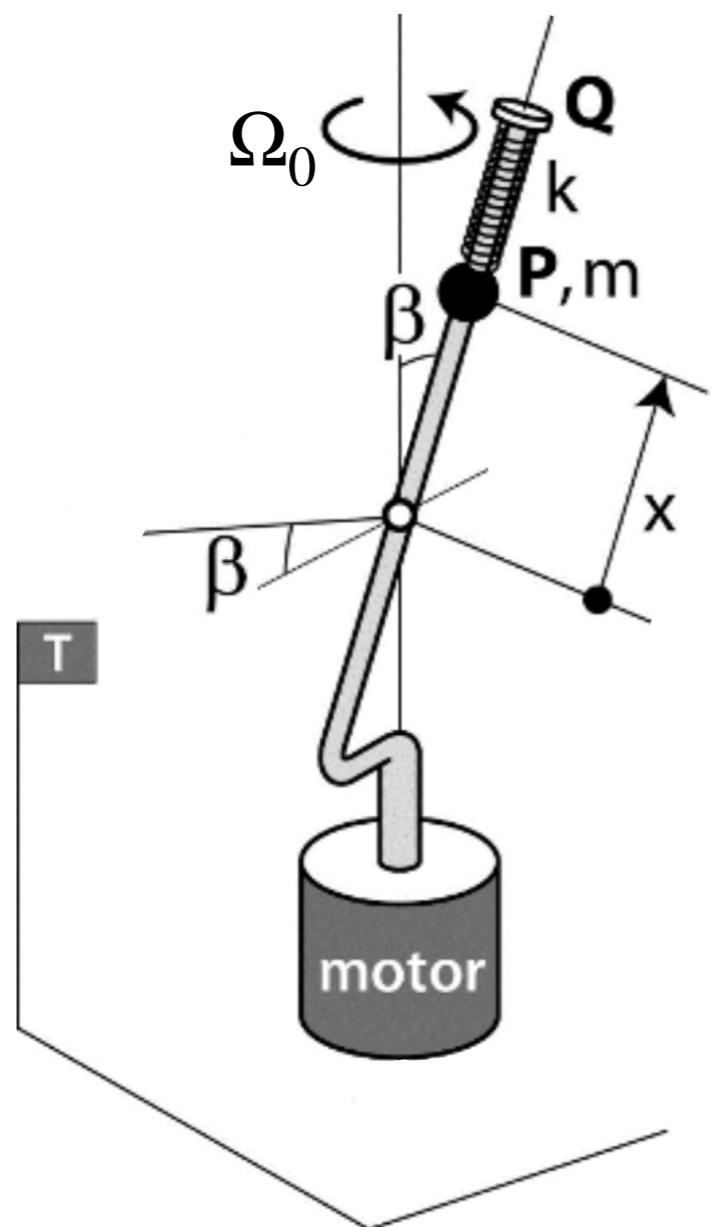


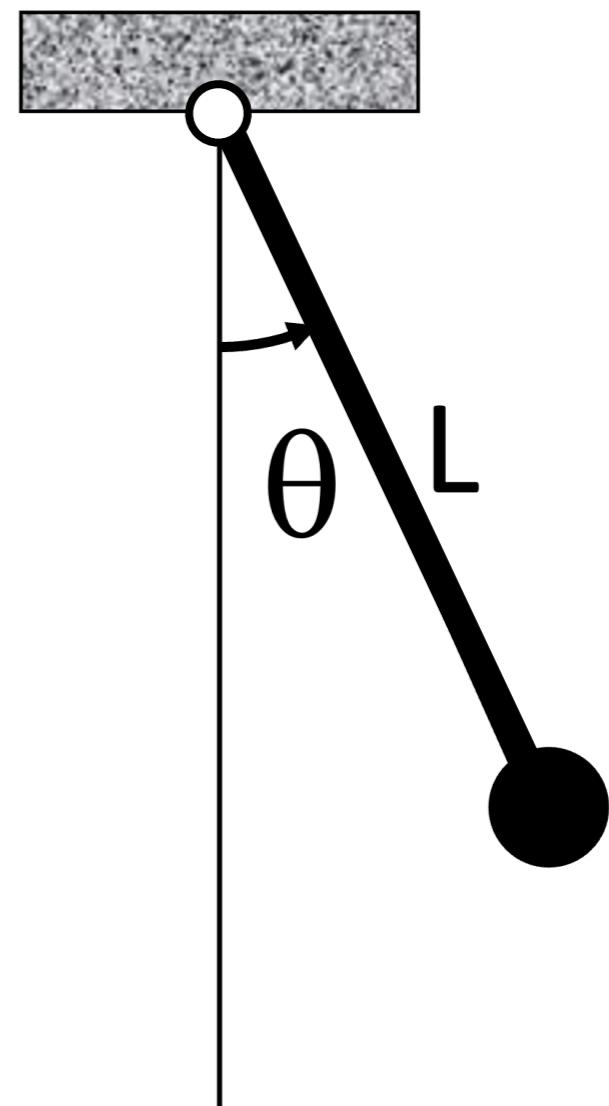
# 10P

Geometria de masses

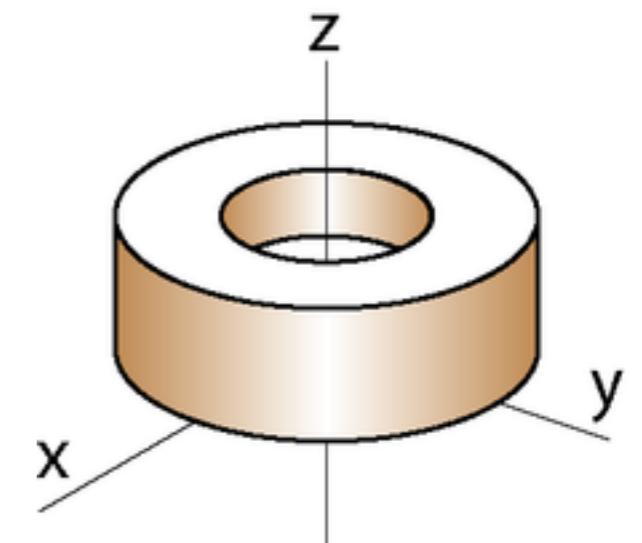
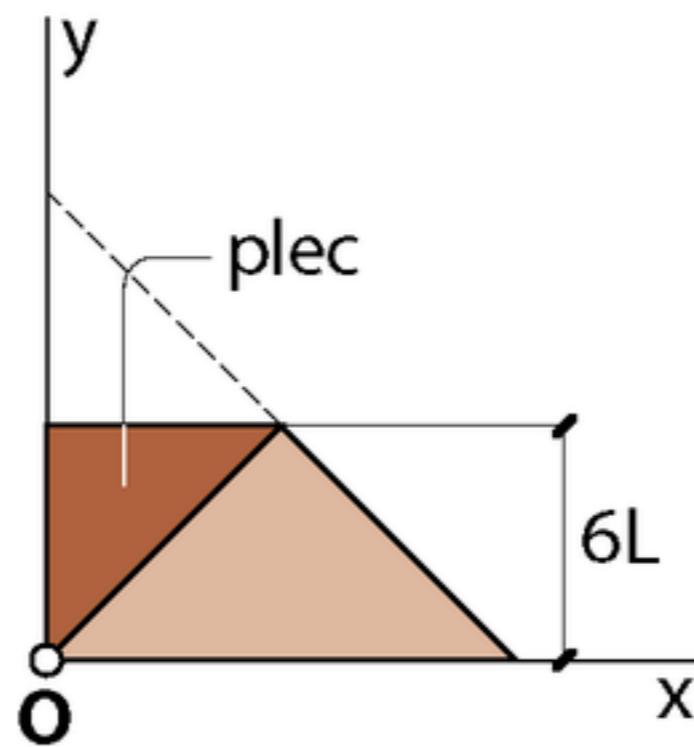
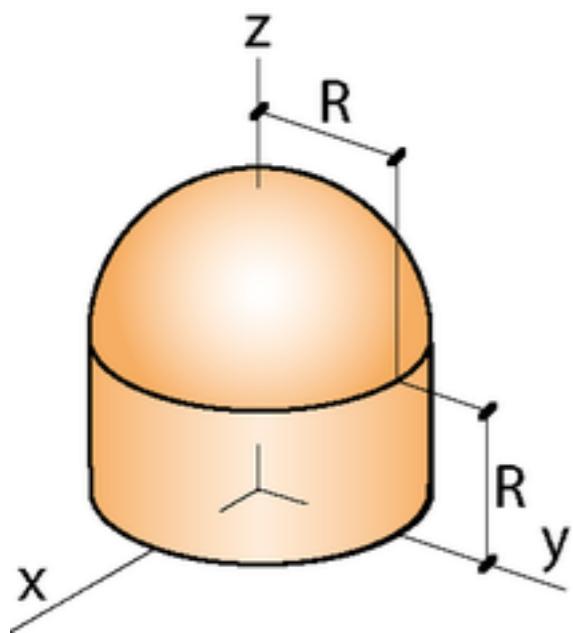
## Massa-molla-guia



## Pèndol simple



Exm: D5.1 - D5.2 - D5.3 (Wikimec)



# Tensor d'inèrcia de S a Q

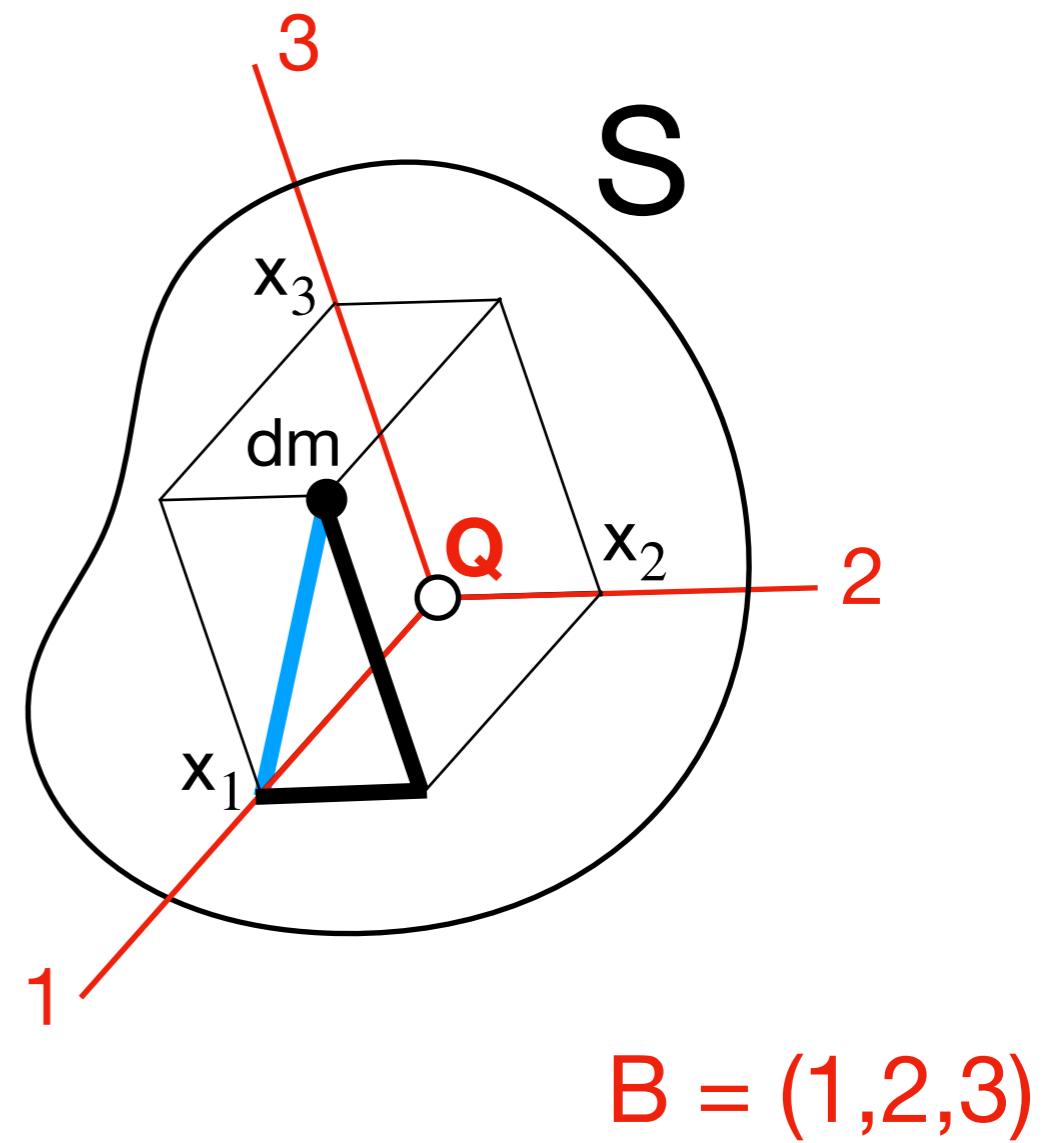
$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Moments d'inèrcia

$$I_{ii} = \int_S \underbrace{(x_j^2 + x_k^2)}_{(\text{dist a eix } i)^2} dm \geq 0$$

Exm:

$$I_{11} = \int_S \underbrace{(x_2^2 + x_3^2)}_{(\text{dist a eix 1})^2} dm$$



$B = (1, 2, 3)$

# Tensor d'inèrcia de $S$ a $\mathbf{Q}$

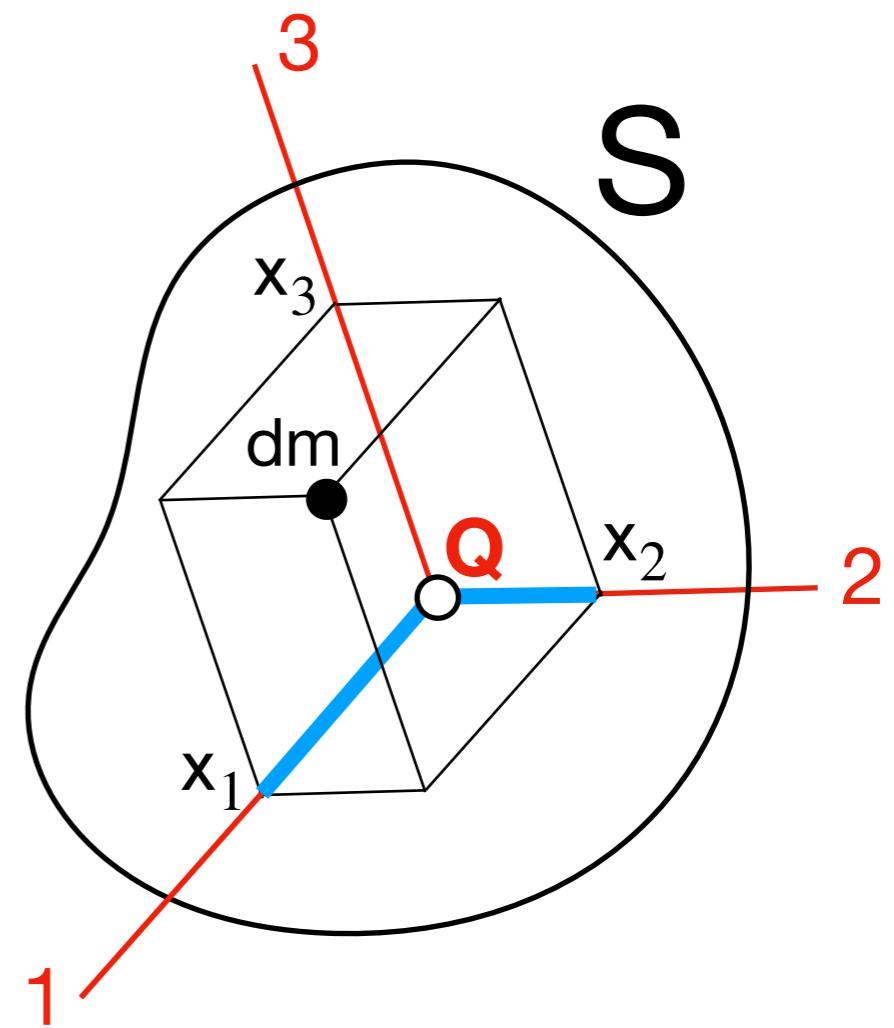
$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

## Productes d'inèrcia

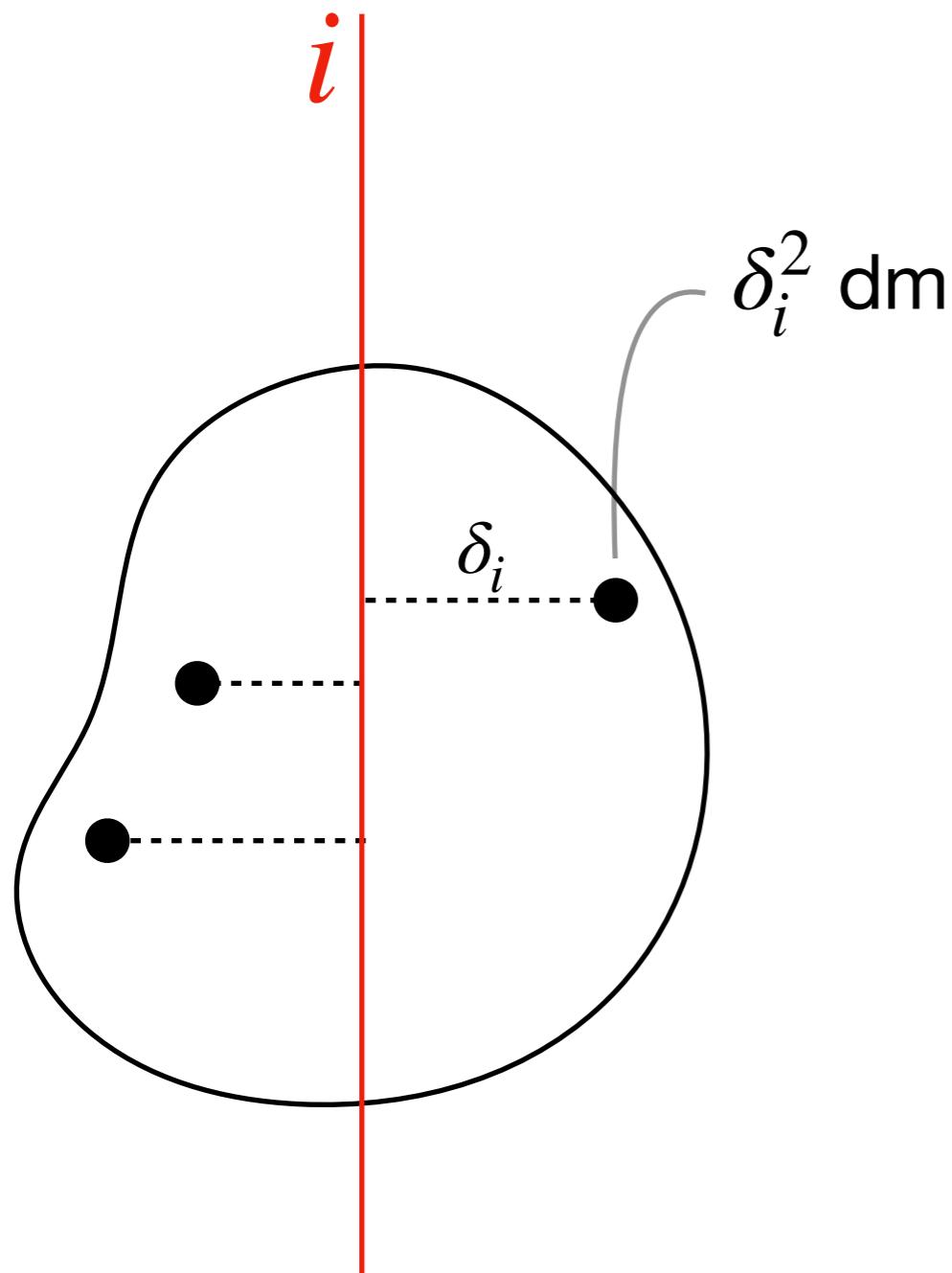
$$I_{ij} = - \int_S x_i x_j dm \quad (>0, <0, =0)$$

Exm:

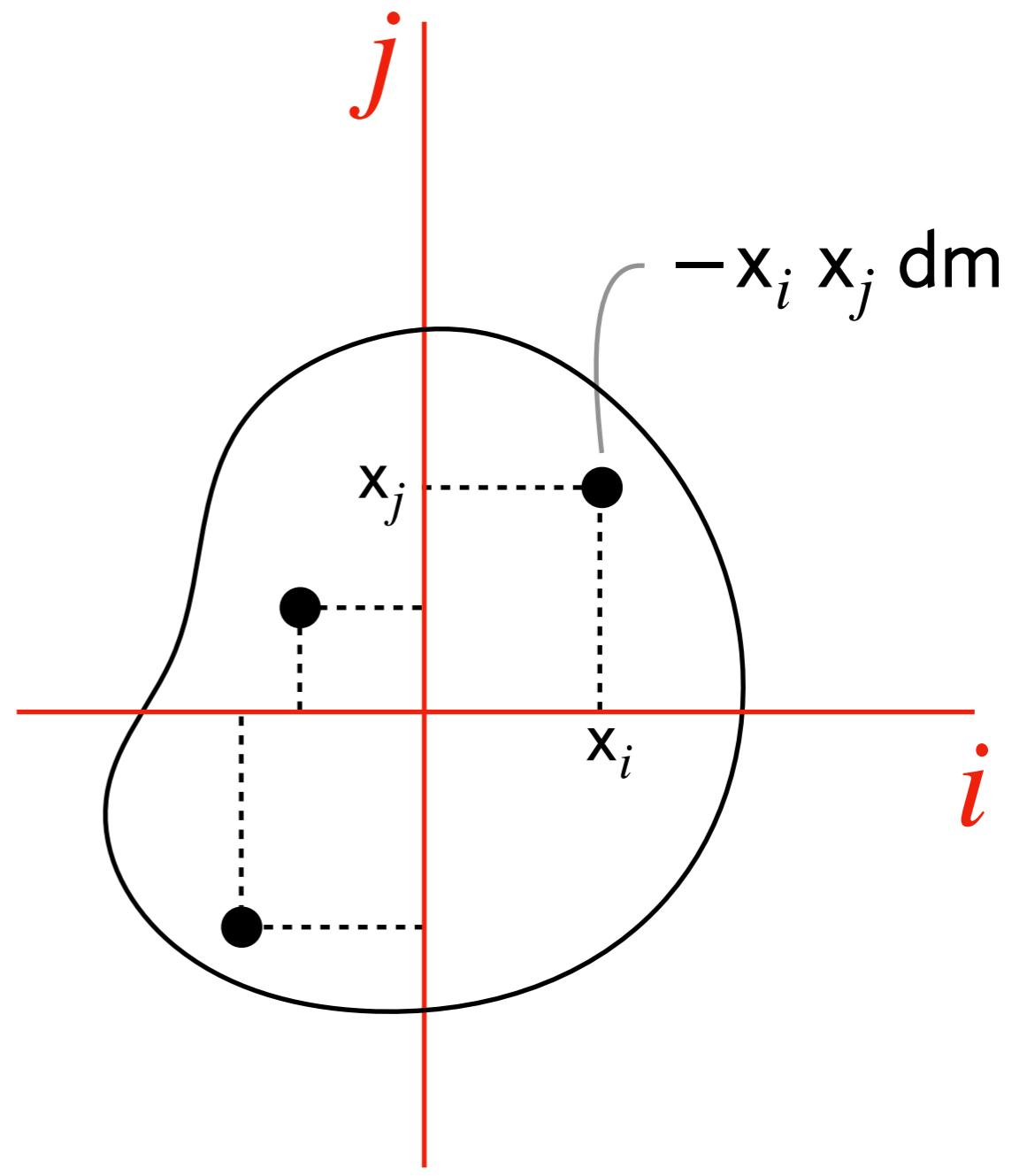
$$I_{12} = - \int_S x_1 x_2 dm$$



Mom. inèrcia  $I_{ii}$



Prod. inèrcia  $I_{ij}$



# Direccions principals d'inèrcia (DPI)

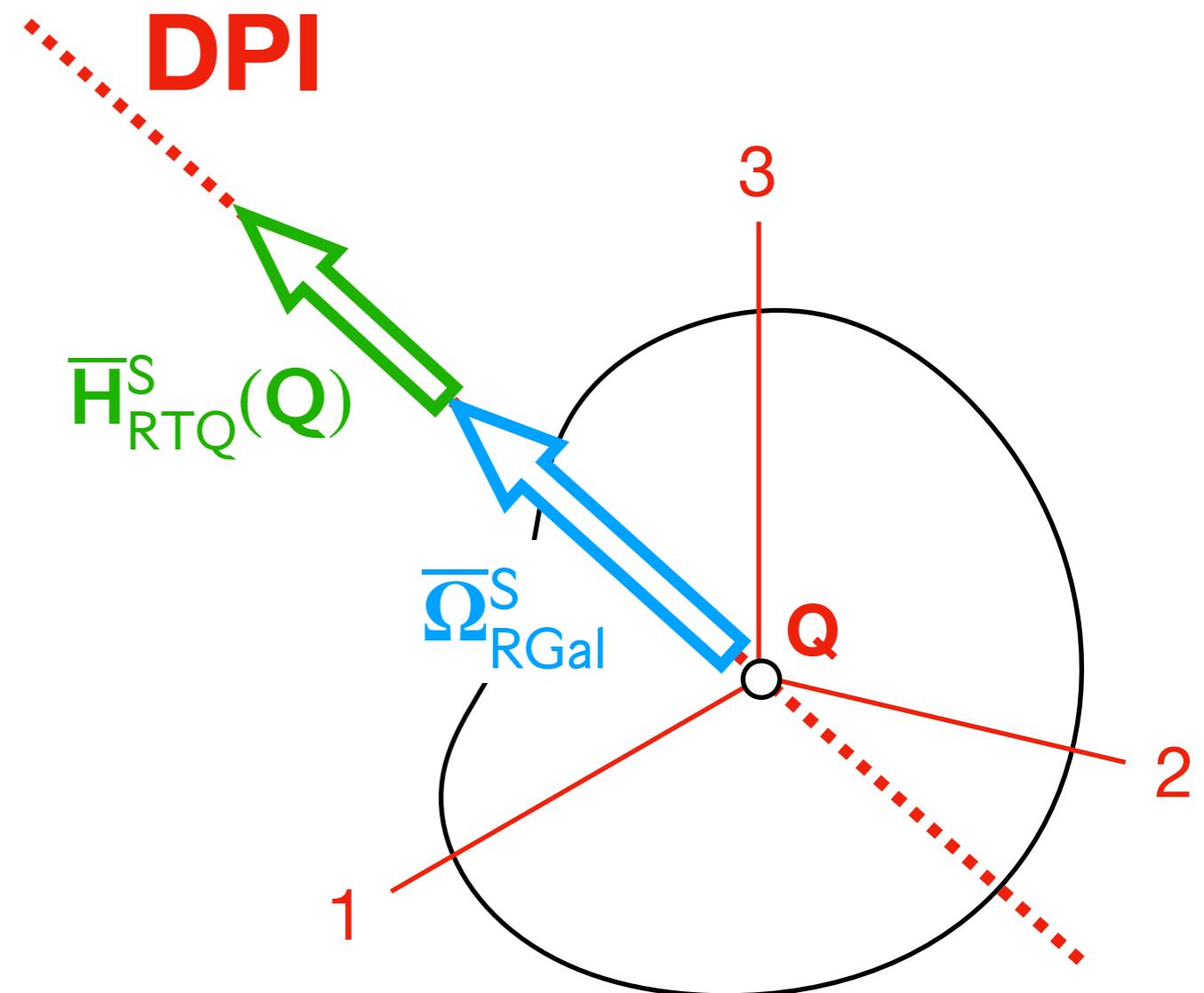
Són les dels  
**vectors propis**  
de  $\mathbb{I}(Q)$

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{RTQ}^S(Q) = \mathbb{I}(Q) \quad \overline{\Omega}_{RGal}^S$$



Si són paral·lels,  
la seva dir. és **DPI**

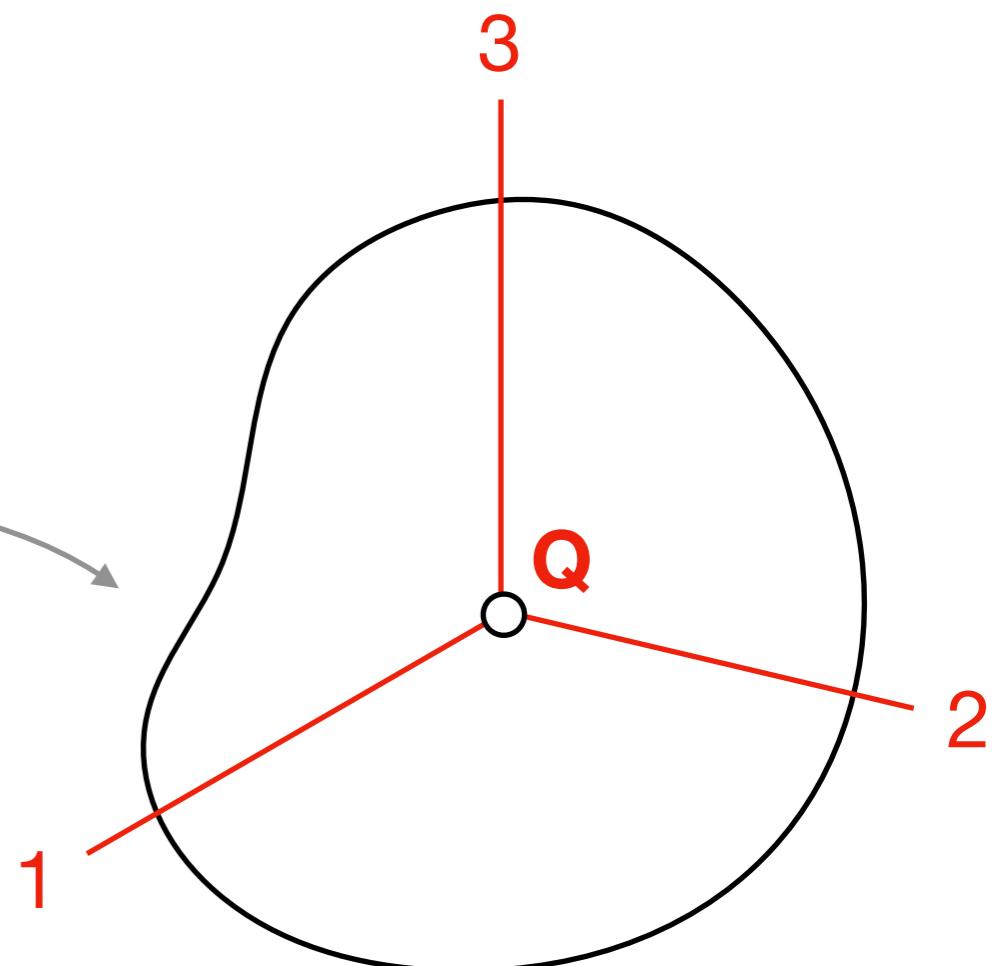


# Bases adients?

$$[\mathbb{II}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Farem servir bases B  
en les que el tensor sigui **constant**

Per exemple:  
B fixa al sòlid

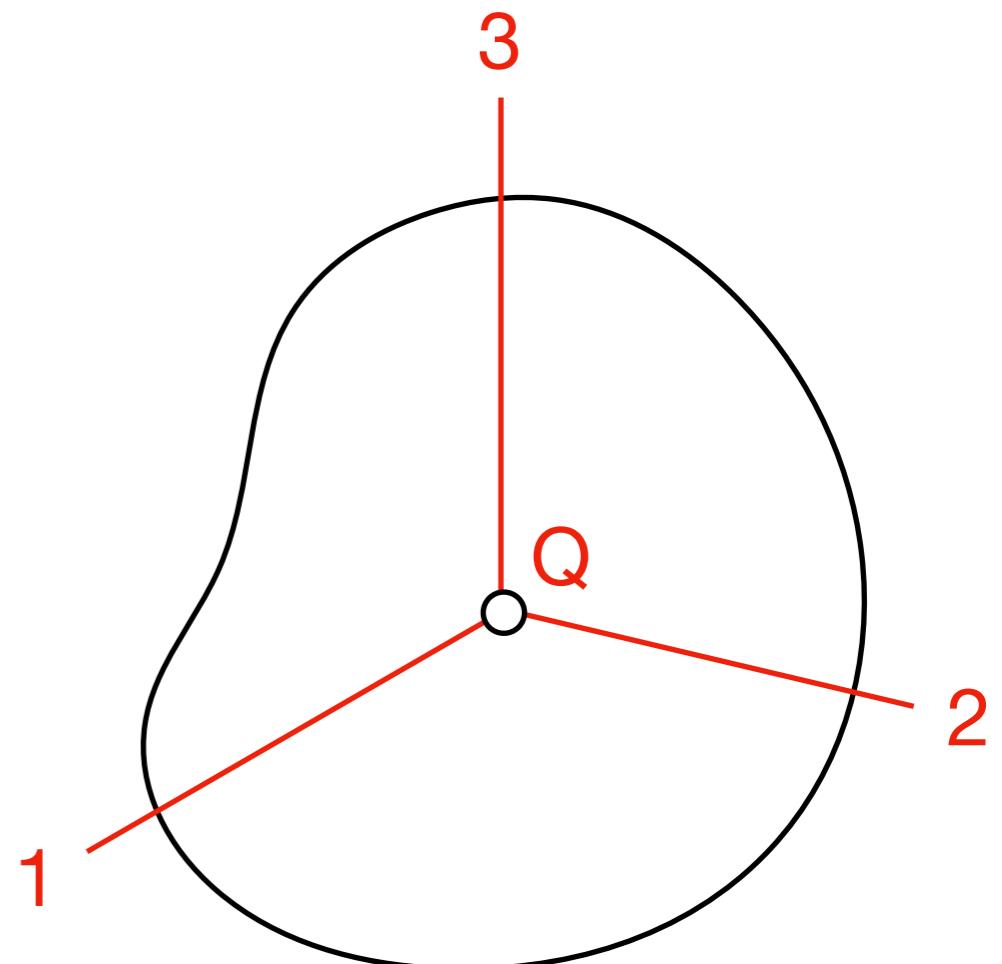


$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

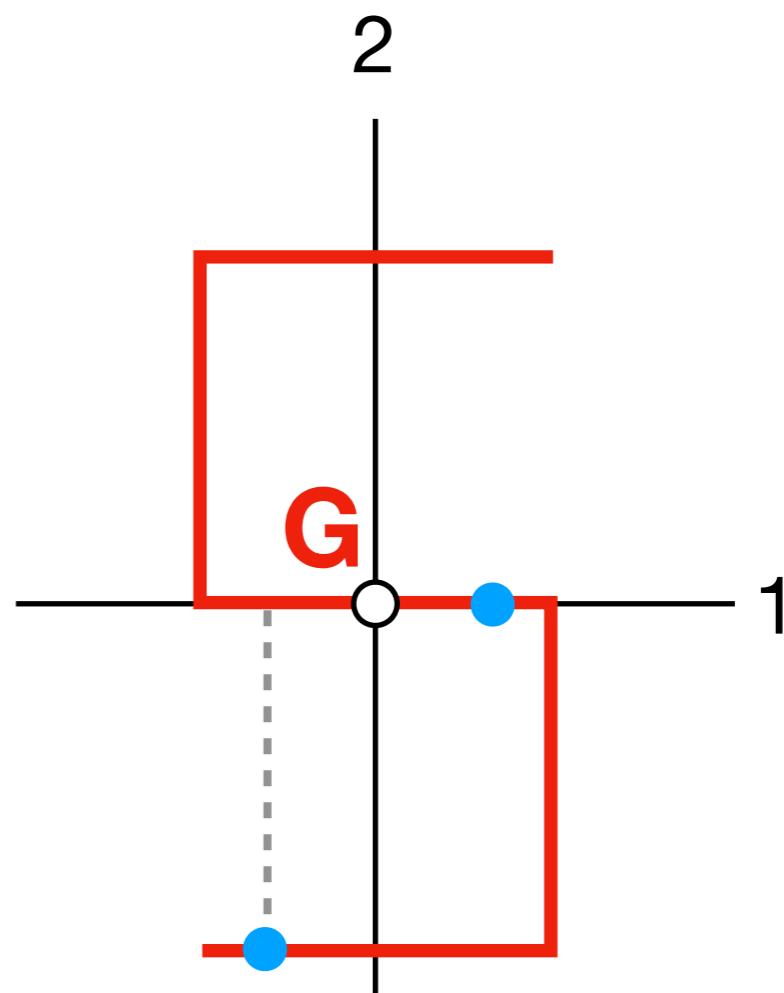
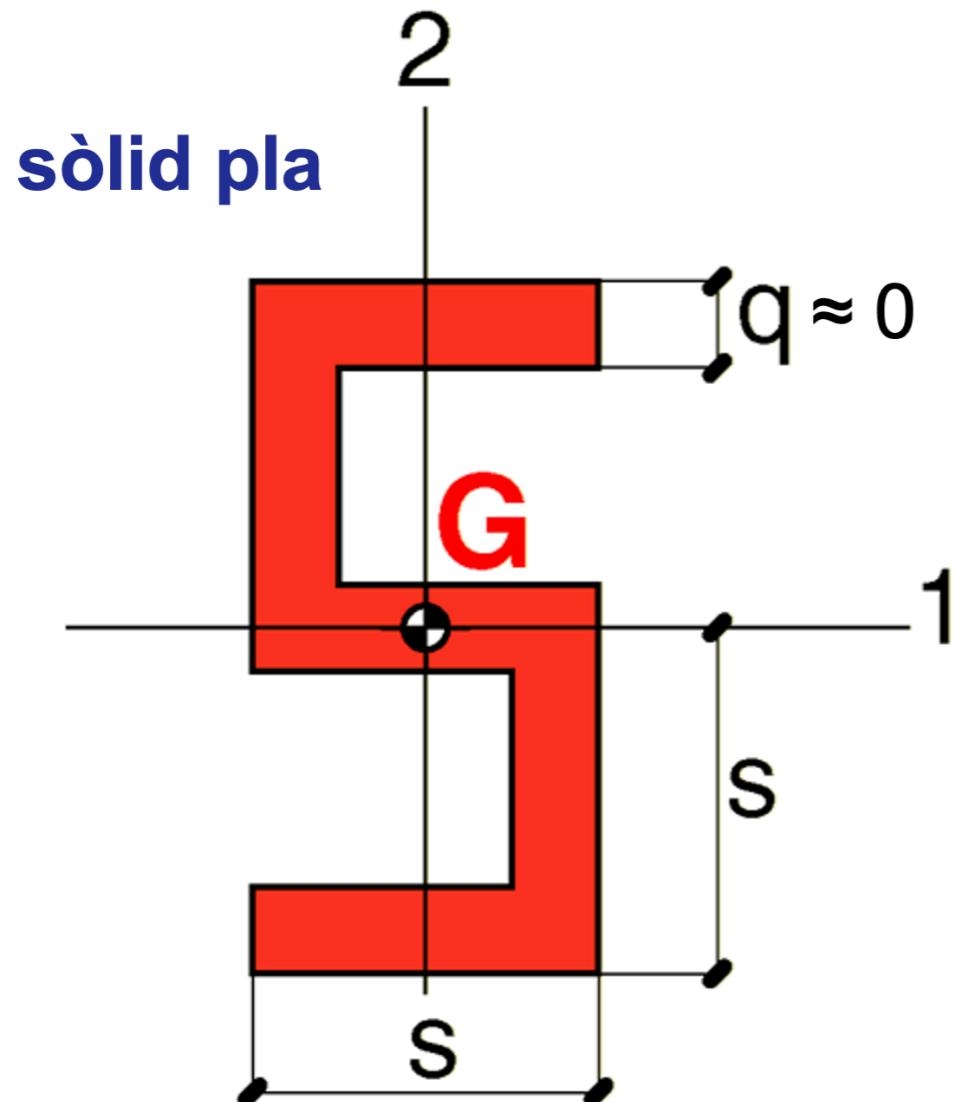
# Objectiu d'avui:

Aprendre a **avaluar-lo**

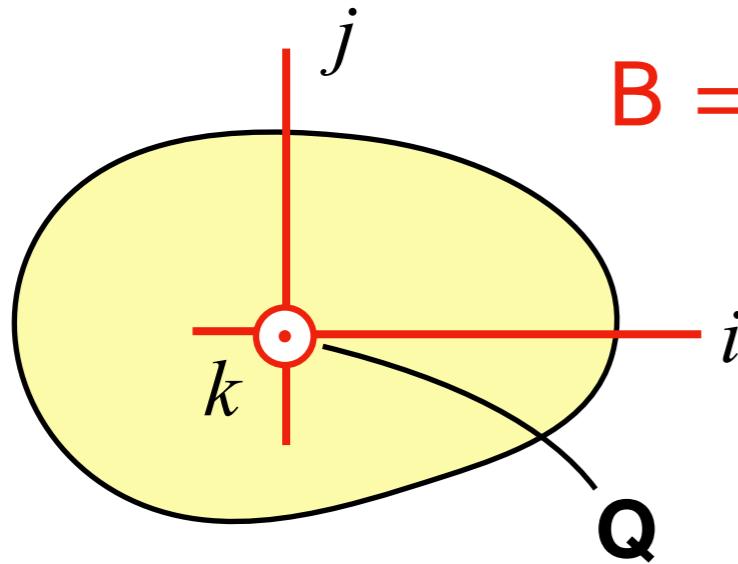
- Qualitativament
- Quantitativament



$[\mathbb{II}(\mathbf{G})]_B$  ?



Per un sòlid pla



$$B = (i, j, k)$$

es compleix

1

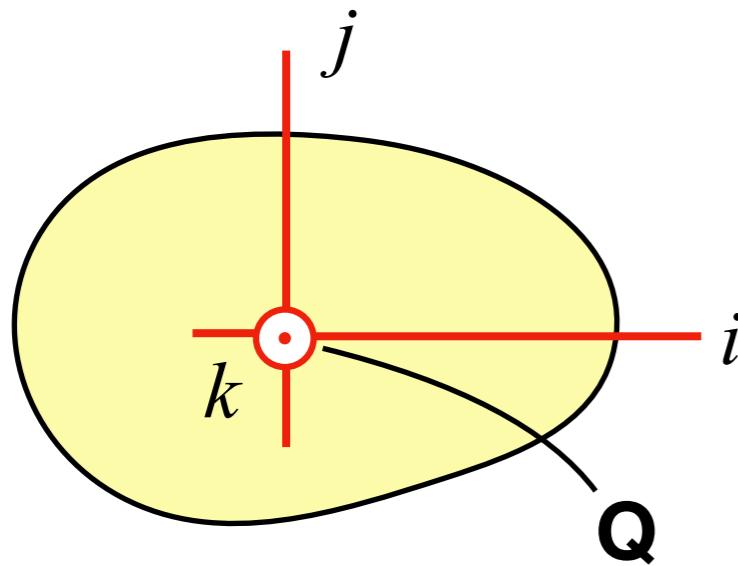
$\forall Q \in \text{sòlid, la dir. } \perp \text{ al sòlid és DPI}$

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \begin{bmatrix} I_{ii} & I_{ij} & 0 \\ I_{ij} & I_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

$I_{ii} + I_{jj}$

$I_{kk}$  és el **MPI** d'aquesta **DPI**

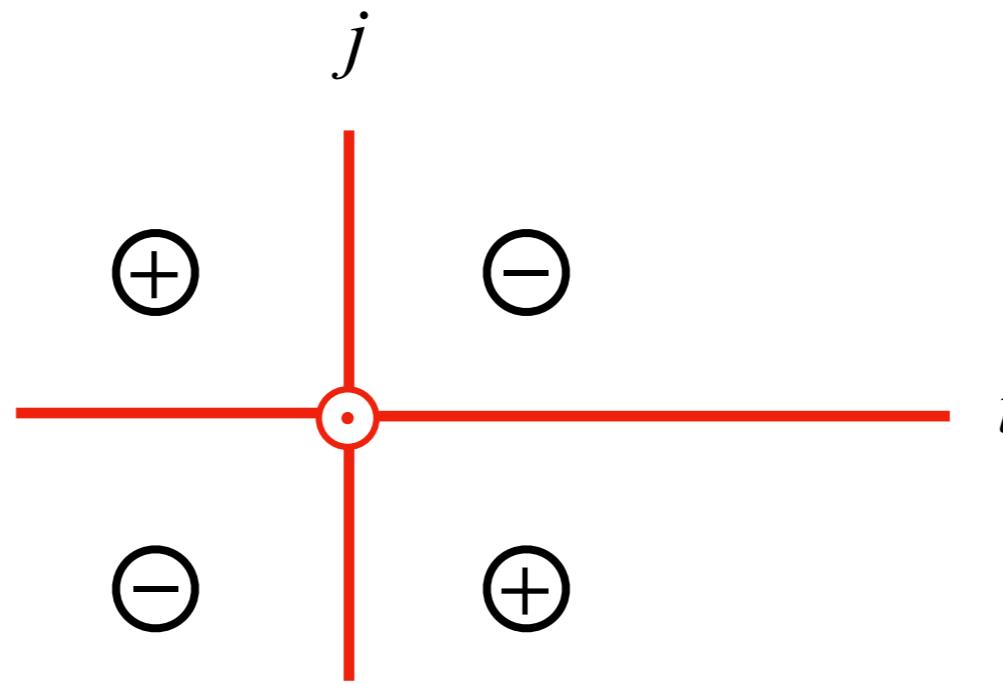
Per un sòlid pla



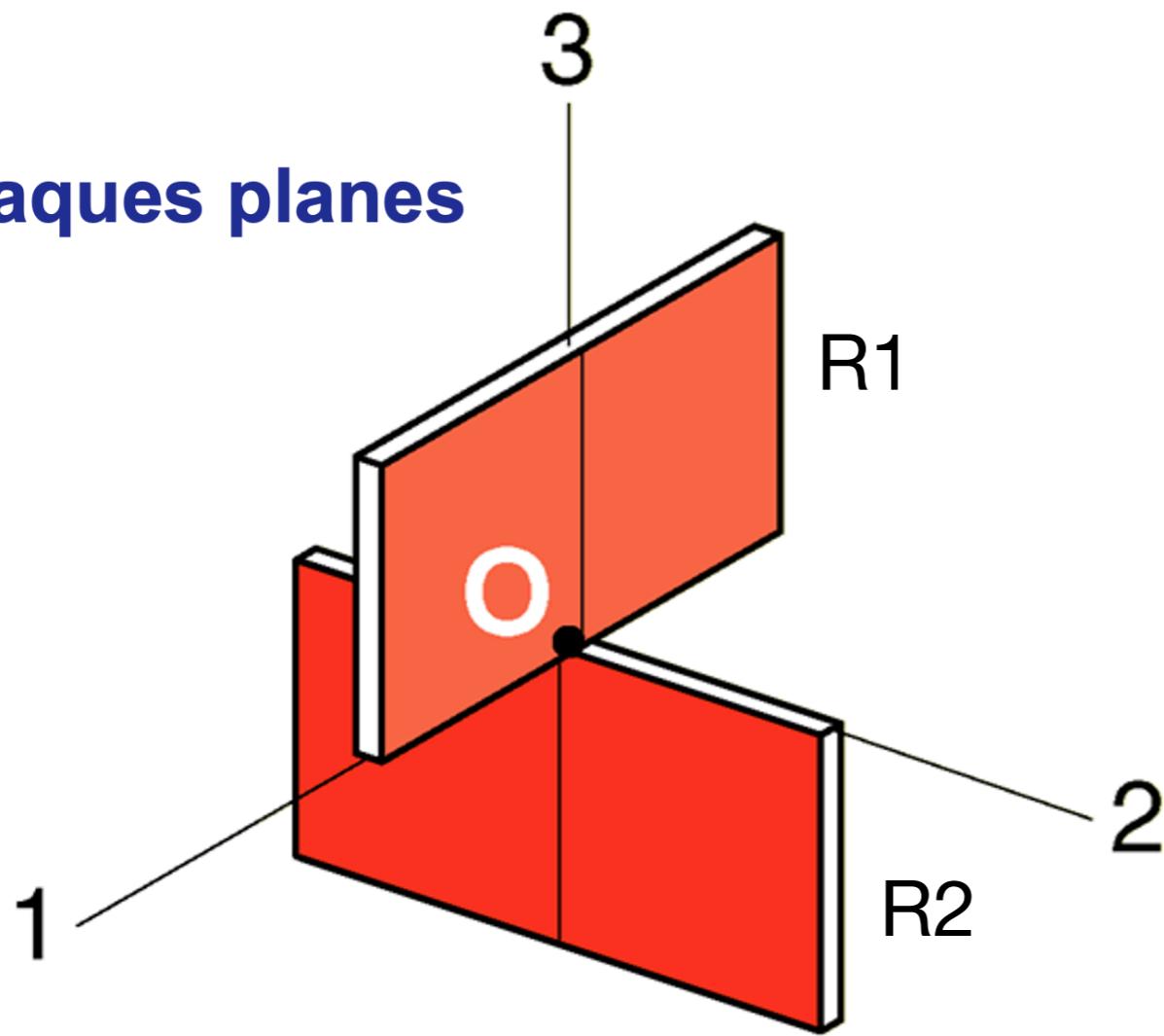
es compleix

2

Signe de la contribució dels dm a  $I_{ij}$

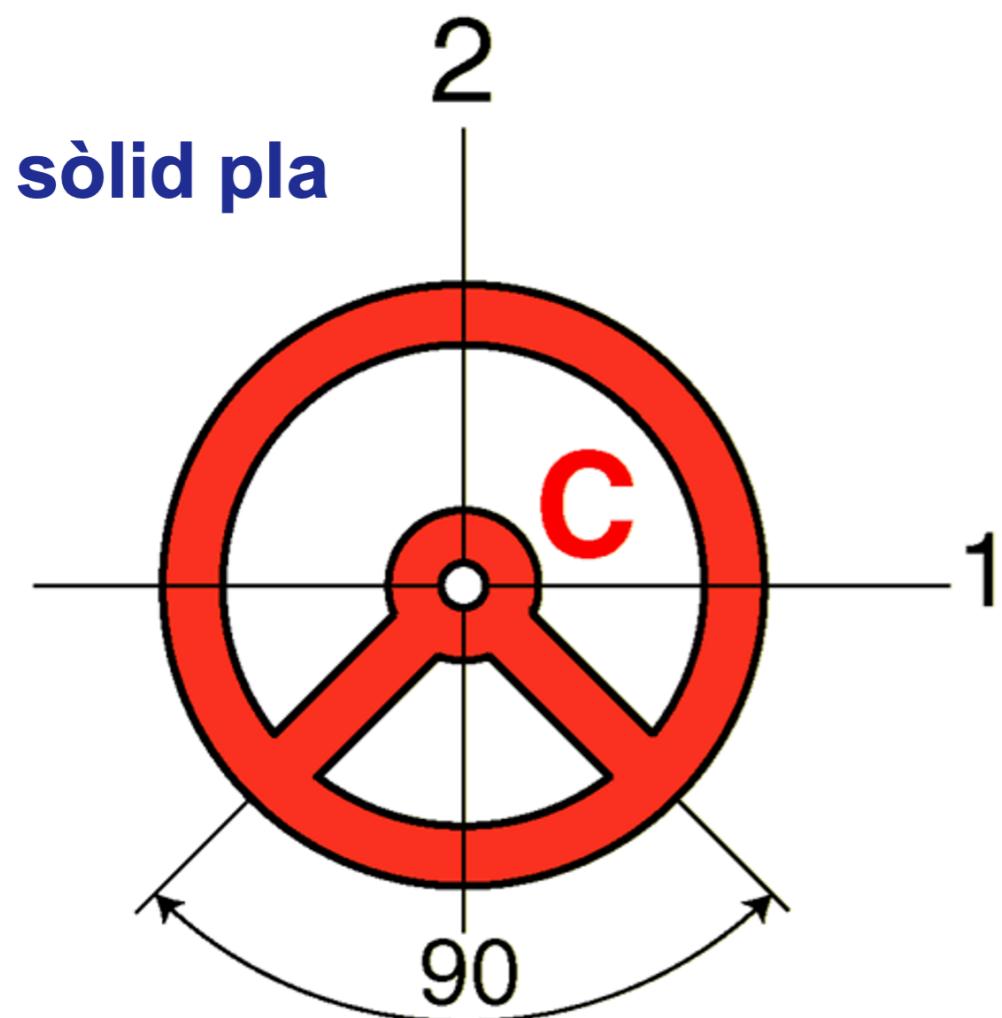


plaques planes



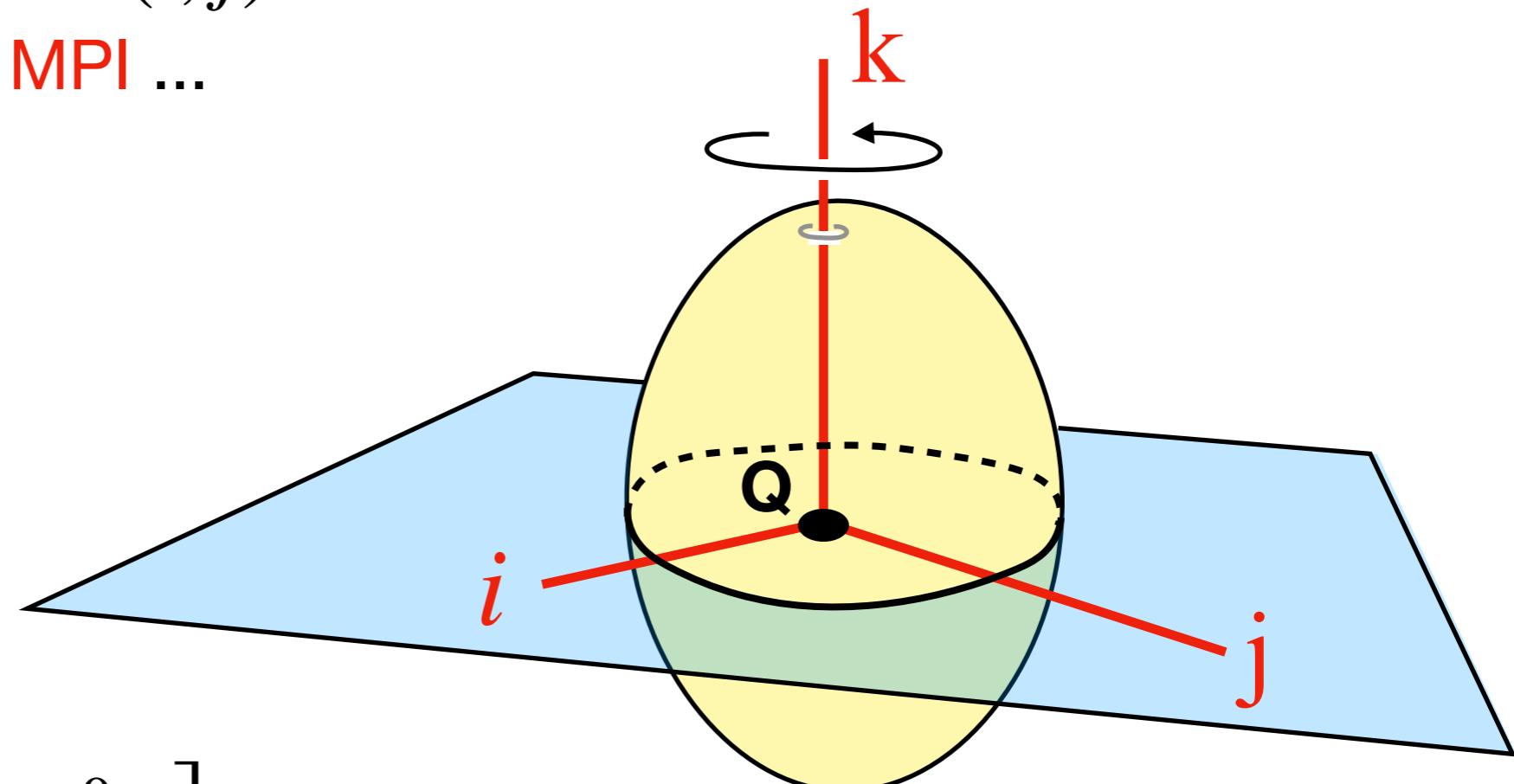
[II(O)]?  
qualitatiu

[II(C)] ?  
qualitatiu



# "Rotor simètric per $\mathbf{Q}$ " en el pla $(i, j)$

Si per al punt  $\mathbf{Q}$  les dirs.  $(i, j)$   
són DPI amb mateix MPI ...



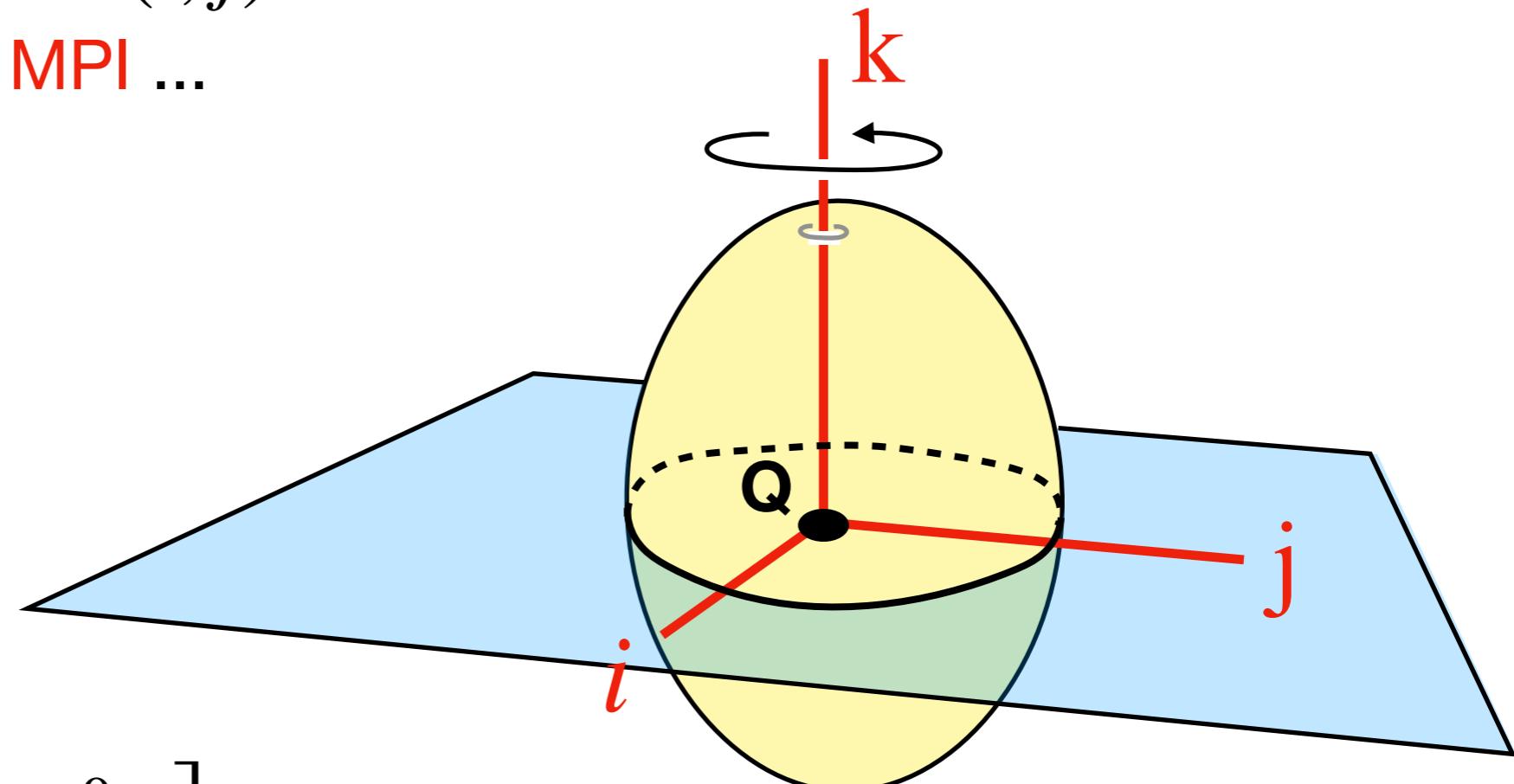
$$[\mathbb{II}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$   $\underbrace{\hspace{10em}}$

no canvia si girem B avd dir. k

# "Rotor simètric per $\mathbf{Q}$ " en el pla $(i, j)$

Si per al punt  $\mathbf{Q}$  les dirs.  $(i, j)$   
són DPI amb mateix MPI ...

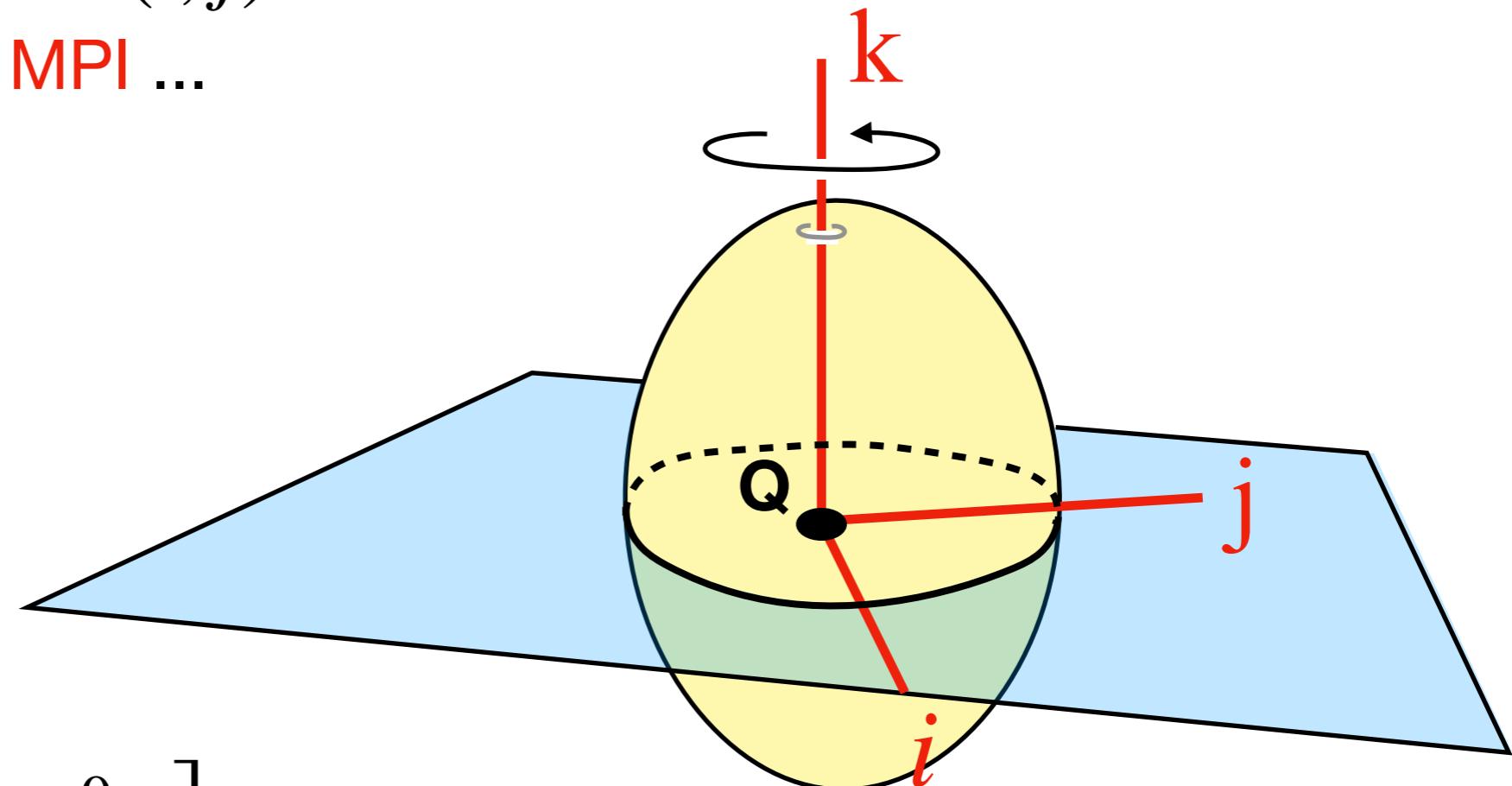


$$[\mathbb{II}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

no canvia si girem B avd dir. k

# "Rotor simètric per $\mathbf{Q}$ " en el pla $(i, j)$

Si per al punt  $\mathbf{Q}$  les dirs.  $(i, j)$   
són DPI amb mateix MPI ...

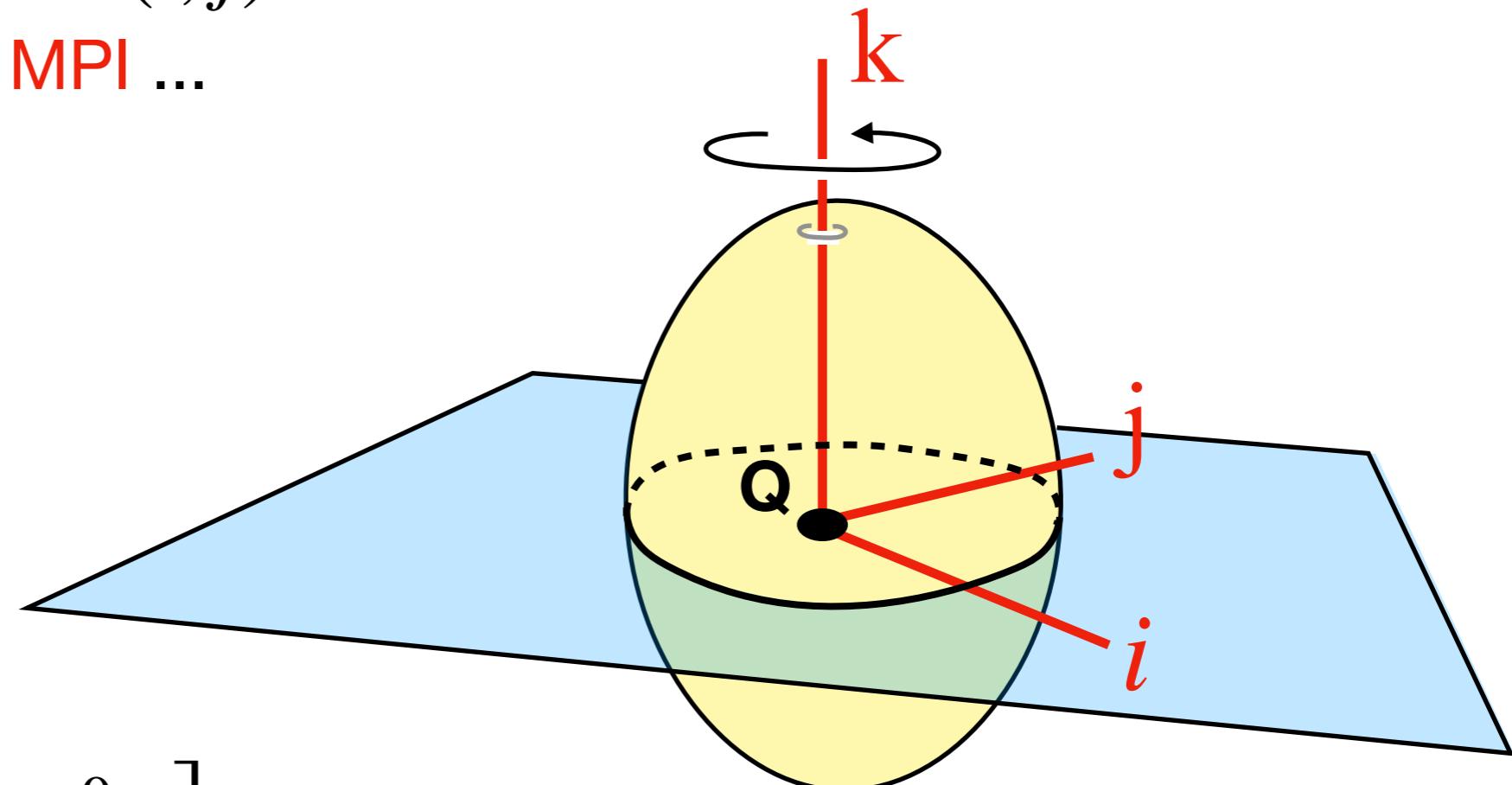


$$[\mathbb{II}(\mathbf{Q})]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}}_{\text{no canvia si girem B avd dir. k}}$$

no canvia si girem B avd dir. k

# "Rotor simètric per $\mathbf{Q}$ " en el pla $(i, j)$

Si per al punt  $\mathbf{Q}$  les dirs.  $(i, j)$   
són DPI amb mateix MPI ...

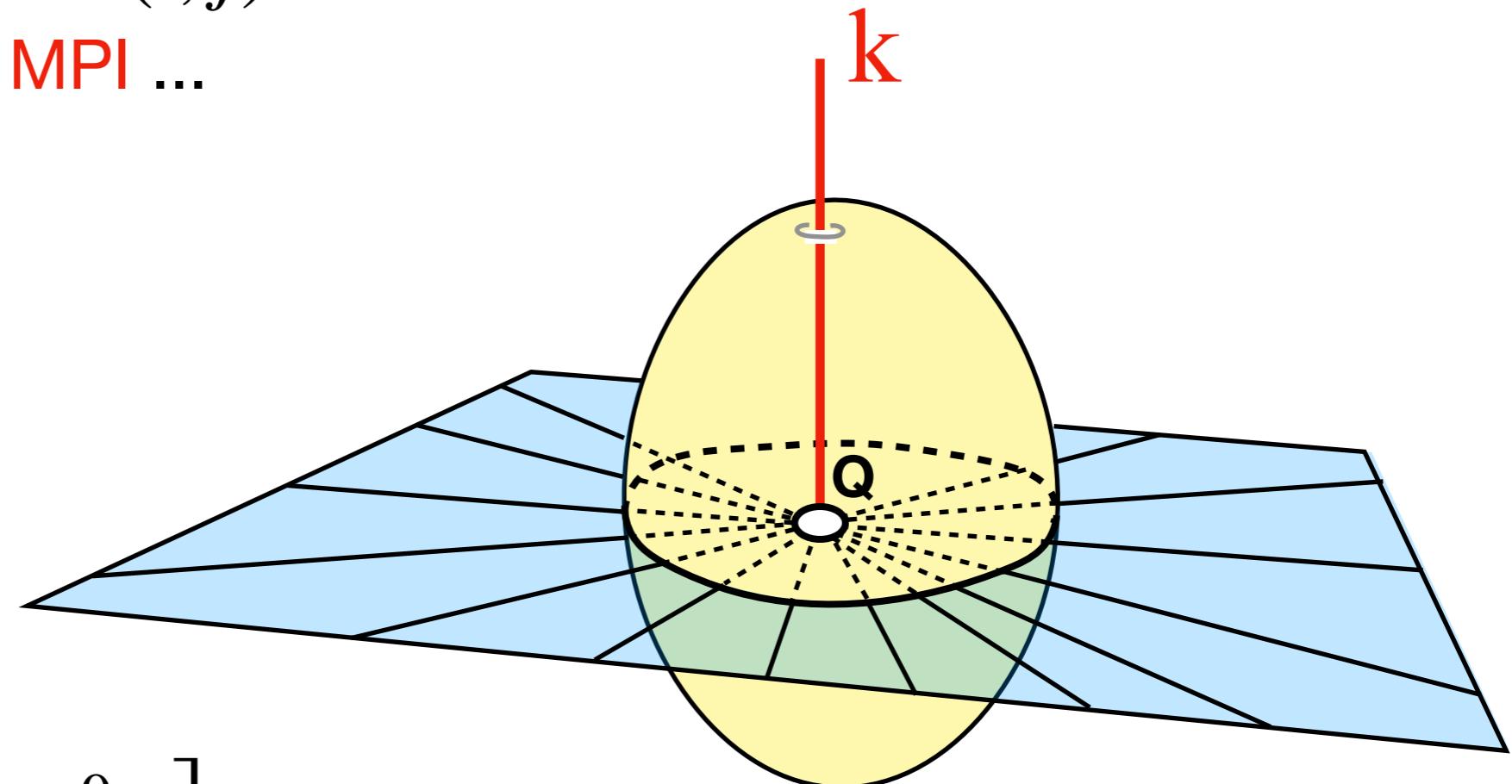


$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

no canvia si girem B avd dir. k

# "Rotor simètric per $\mathbf{Q}$ " en el pla $(i, j)$

Si per al punt  $\mathbf{Q}$  les dirs.  $(i, j)$   
són DPI amb mateix MPI ...

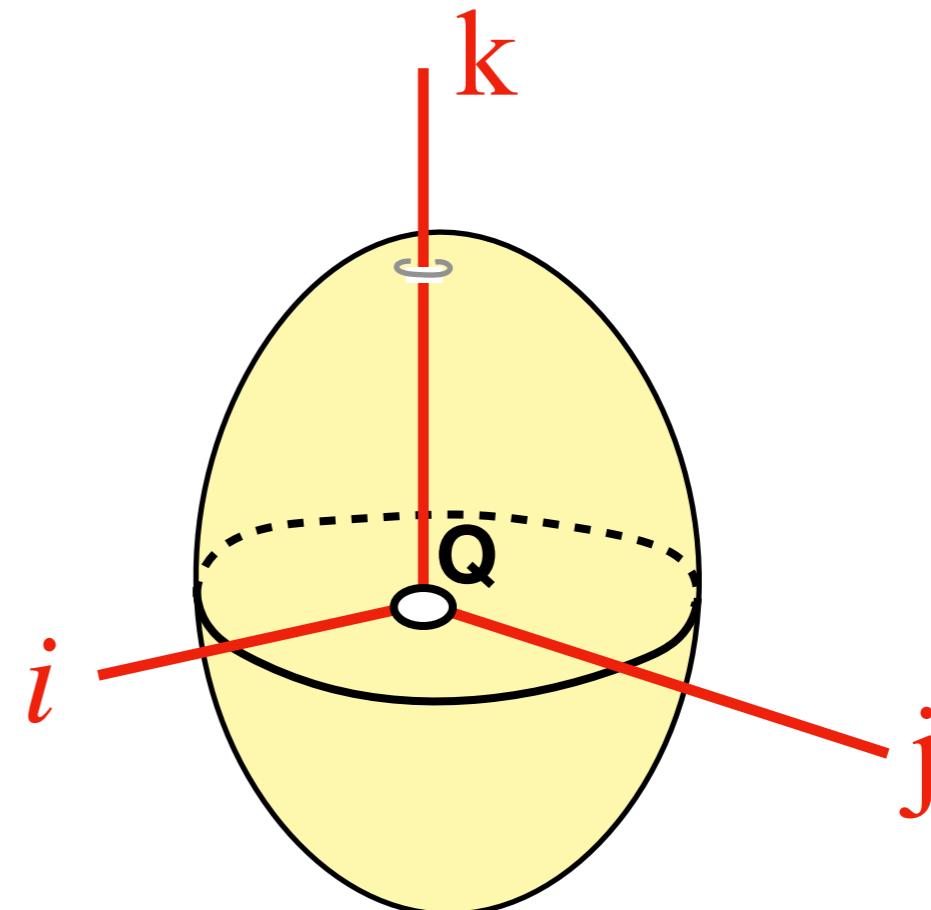


$$[\mathbb{I}(\mathbf{Q})]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{kk} \end{bmatrix}$$

Tota recta del pla  $(i, j)$  per  $\mathbf{Q}$  és DPI  
(amb mom. inèrcia  $I$  al seu voltant)

# "Rotor esfèric per **Q**"

Si per al punt **Q** les dirs.  $(i, j, k)$   
són DPI amb mateix MPI ...



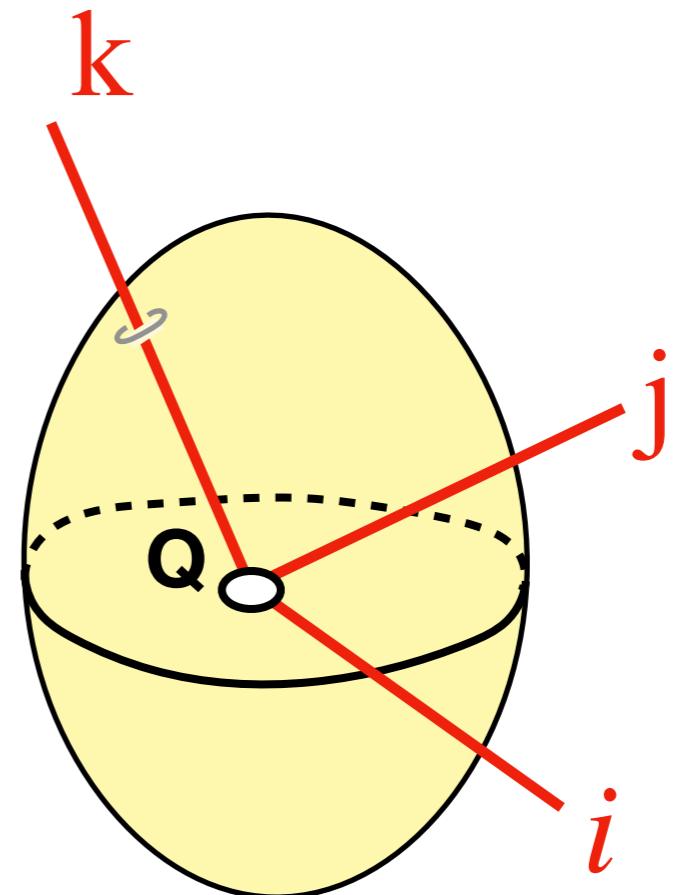
... el tensor a **Q** té la forma

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada

# "Rotor esfèric per $\mathbf{Q}$ "

Si per al punt  $\mathbf{Q}$  les dirs.  $(i, j, k)$   
són DPI amb mateix MPI ...



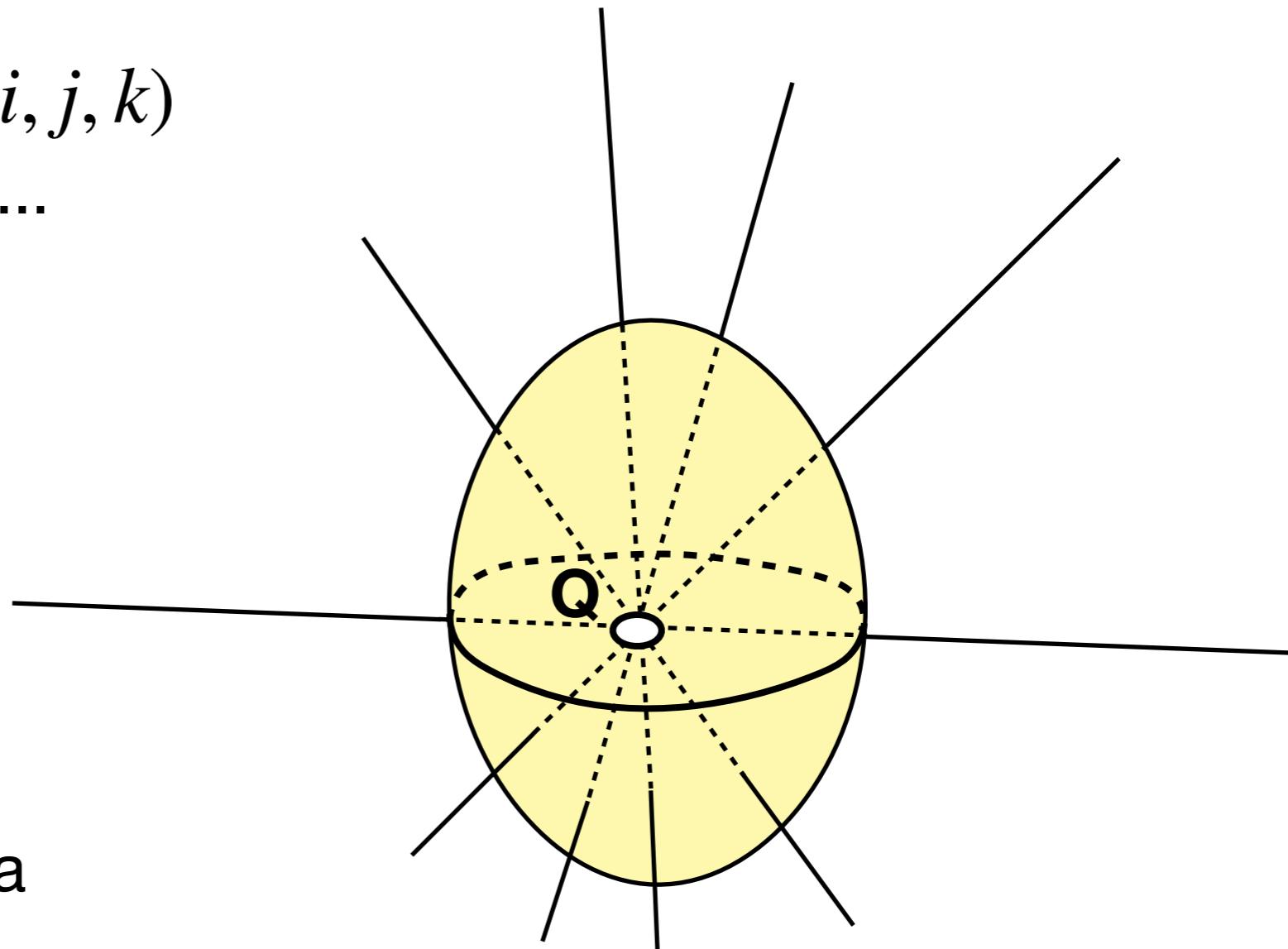
... el tensor a  $\mathbf{Q}$  té la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

independentment de la base triada

# "Rotor esfèric per $\mathbf{Q}$ "

Si per al punt  $\mathbf{Q}$  les dirs.  $(i, j, k)$   
són DPI amb mateix MPI ...



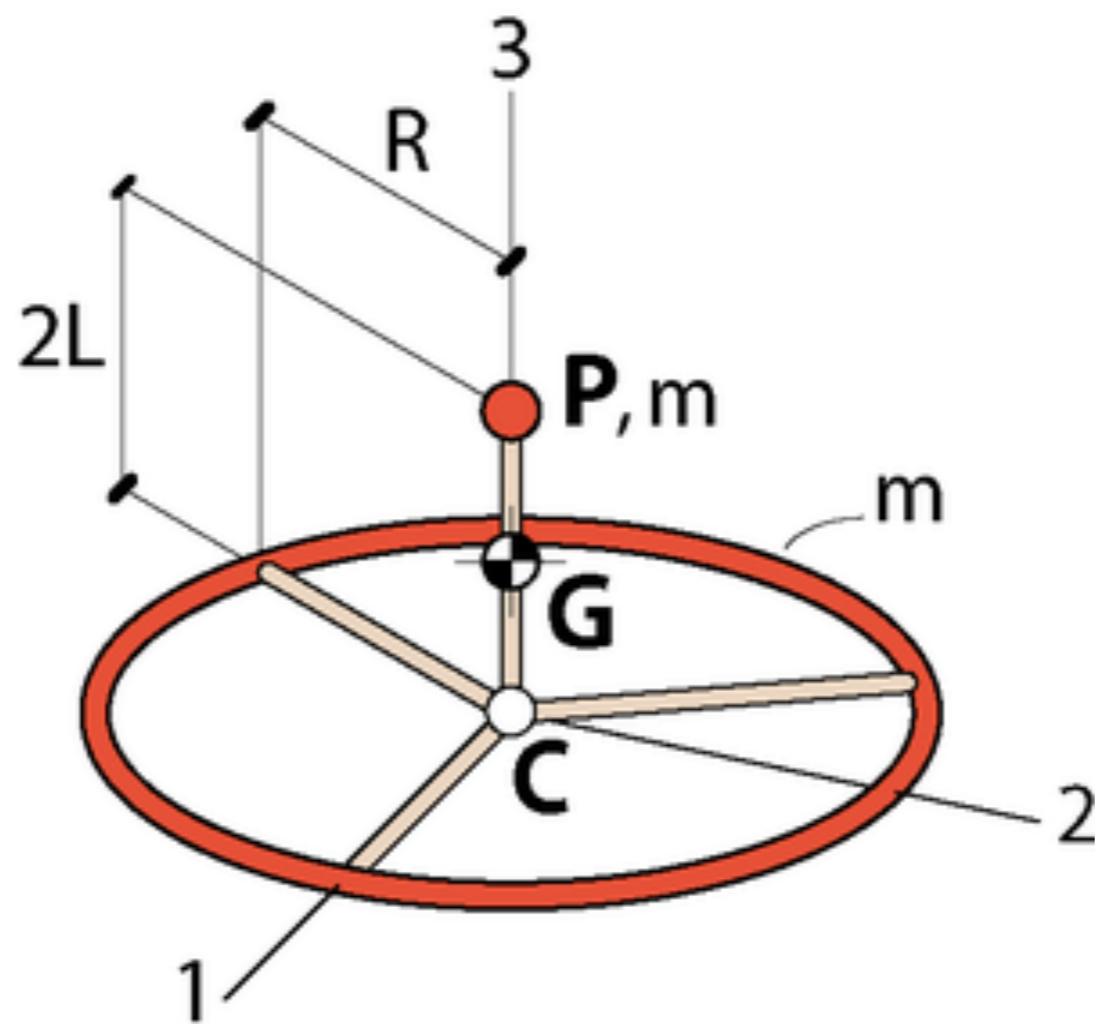
... el tensor a  $\mathbf{Q}$  té la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Qualsevol recta per  $\mathbf{Q}$  és DPI  
( amb moment inèrcia  $\mathbf{I}$  )

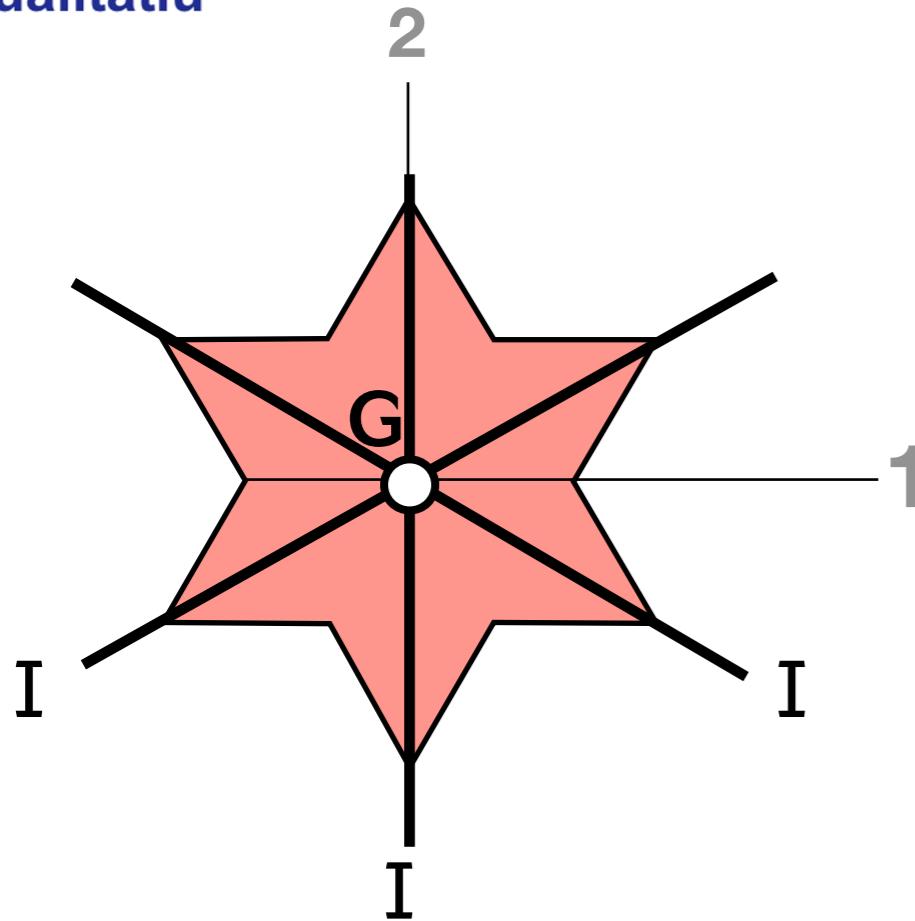
independentment de la base triada

## Exemple D5.9 - Wikimec



[II(G)] ?

qualitatiu



Sòlid pla i eix 2 de simetria

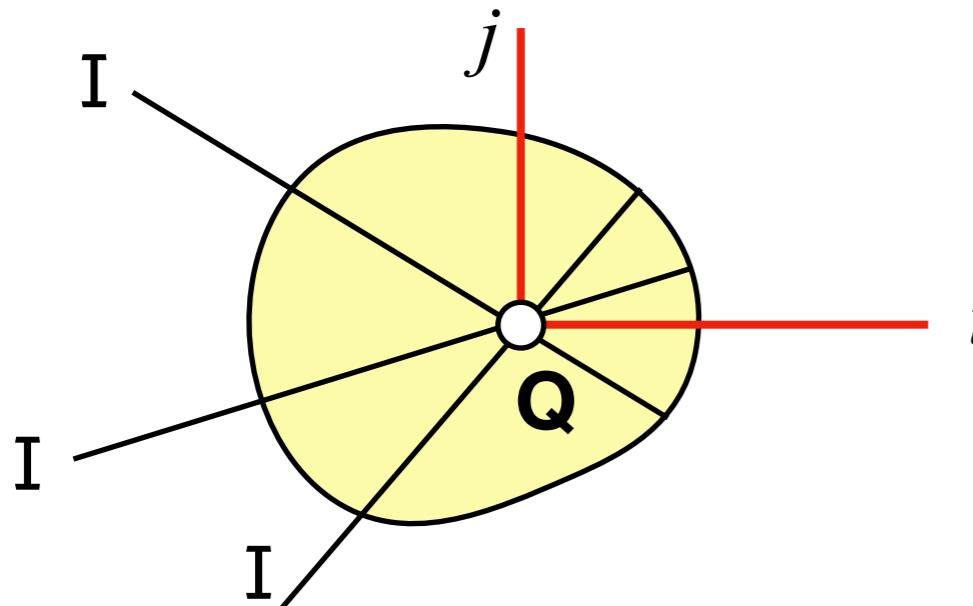
$$[\mathbb{I}(\mathbf{G})]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

$I_{11}, I_{22}$  ?

3 moments en  
pla (1,2) iguals  $\Rightarrow$  Rotor simètric a **G**  
per aquest pla!

$$[\mathbb{I}(\mathbf{G})]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

Si 3 o més moments d'inèrcia resp. eixos d'un **mateix pla** (i,j) són iguals ...



... el sòlid és **rotor simètric a Q**  
per aquest pla

[ $\mathbb{II(O)}$ ] ?

qualitatiu  
quantitatiu

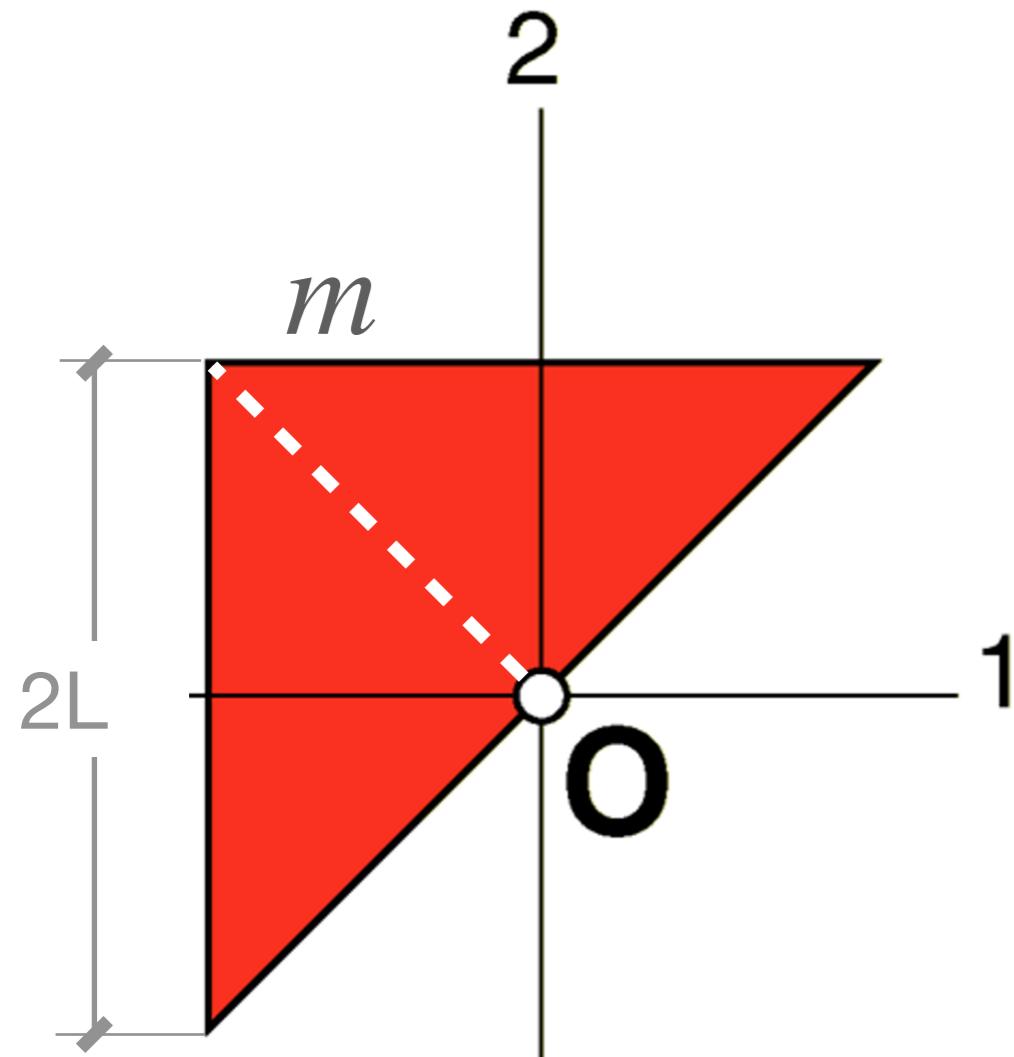


Fig. plana  $\implies$  3 és DPI

$I_{12}$ ?  $\leftarrow$  És zero!

$$[\mathbb{II(O)}]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

[ $\mathbb{II(O)}$ ] ?

qualitatiu  
quantitatiu

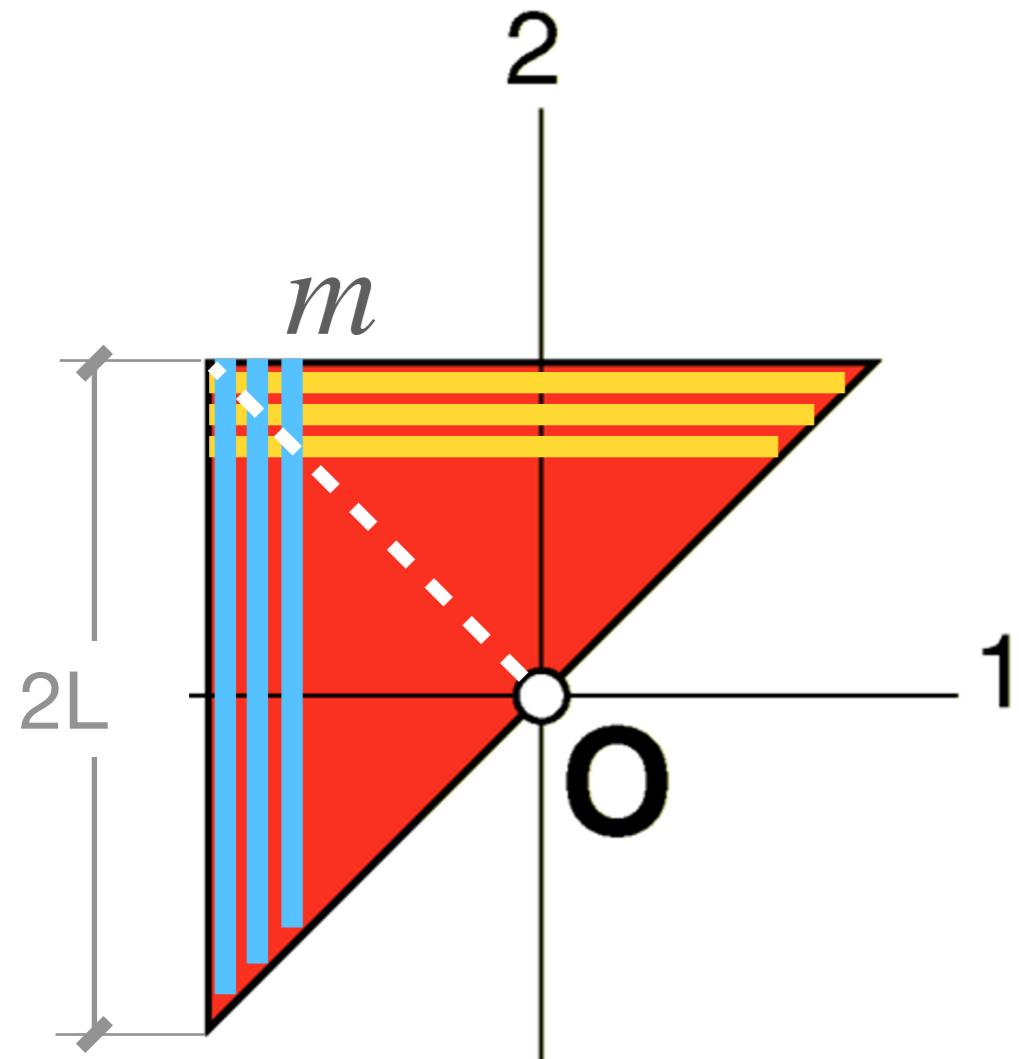


Fig. plana  $\implies$  3 és DPI

$I_{12}$ ?  $\leftarrow$  És zero!

$$[\mathbb{II(O)}]_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

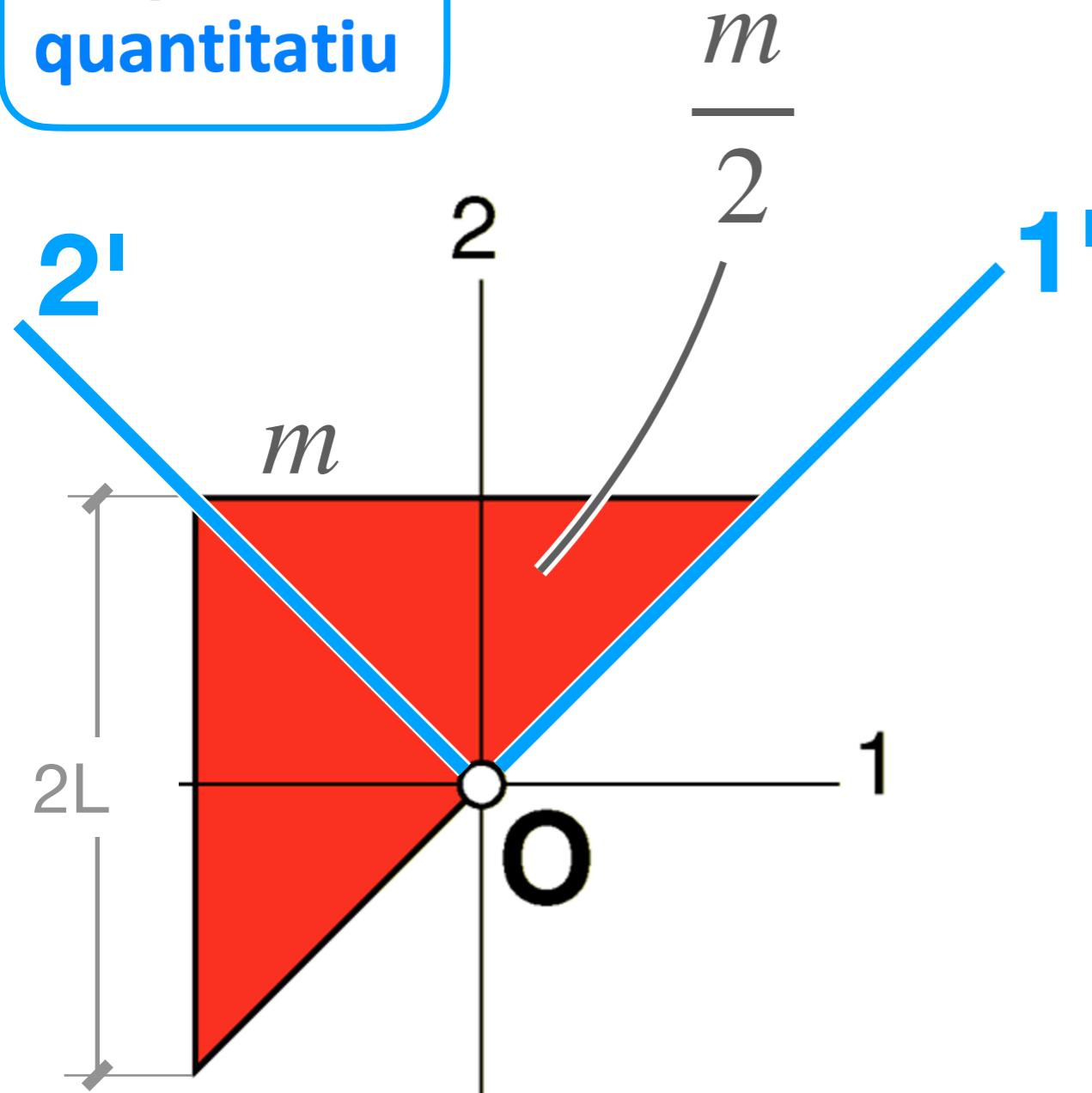
$I_{11}, I_{22}$ ?  $\leftarrow$  Són iguals!

$$[\mathbb{II(O)}]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

Rotor simètric a O

[II(O)] ?

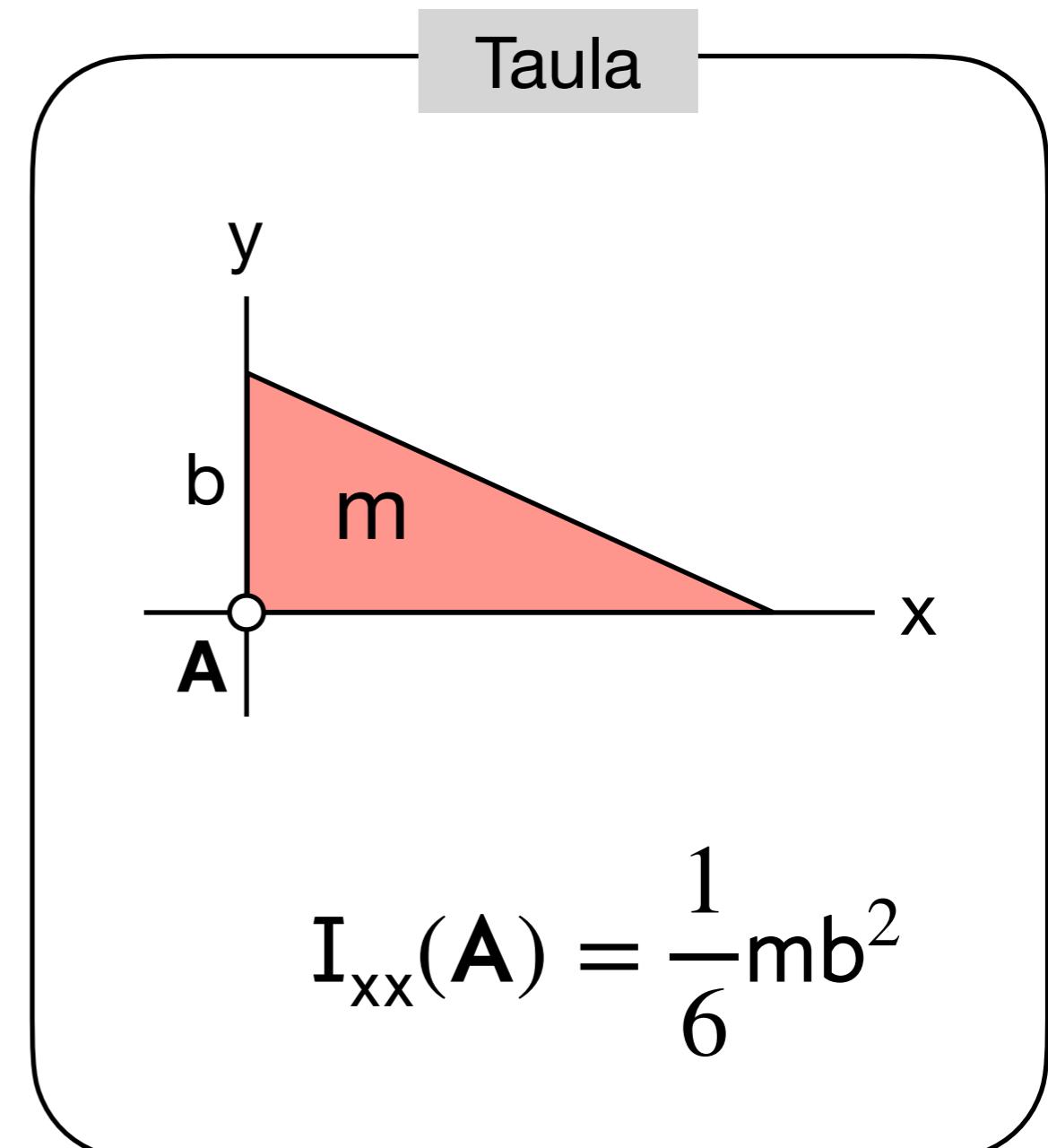
qualitatiu  
quantitatiu



$$I = 2 \left[ \frac{1}{6} \frac{m}{2} \left( \frac{2L}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \frac{mL^2}{3}$$

$$[II(O)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix}$$

Rotor simètric a O

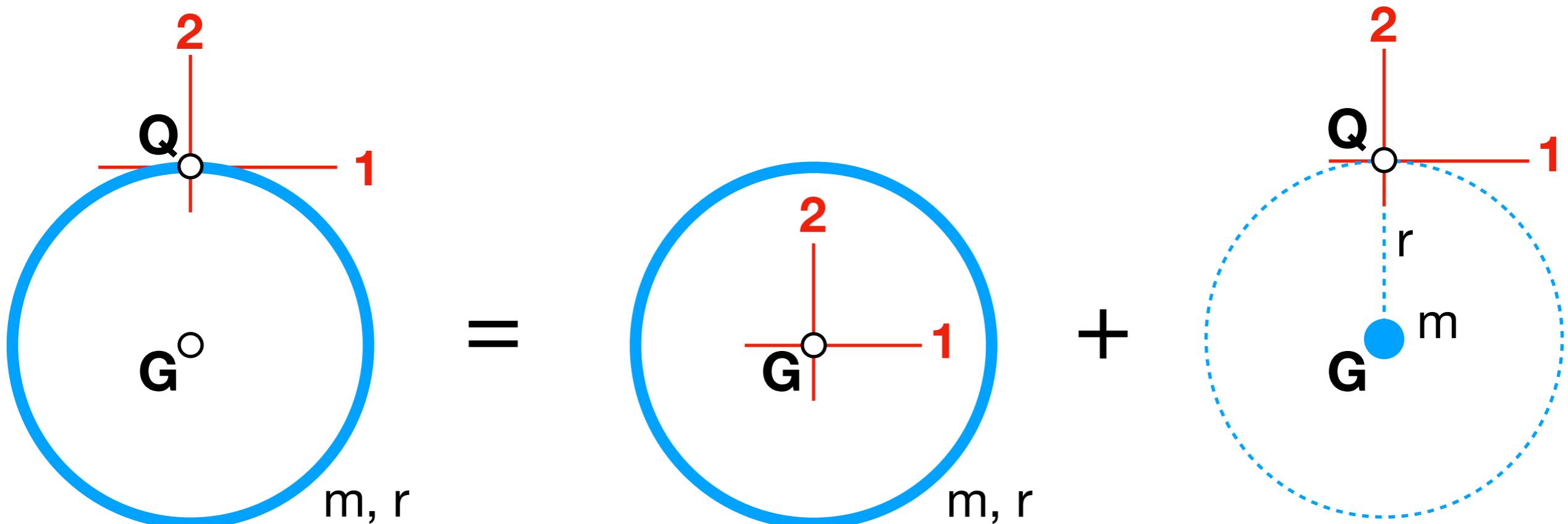


$$I_{xx}(A) = \frac{1}{6}mb^2$$

# Teorema de Steiner

$$\underbrace{\mathbb{I}(Q)}_{\text{Tensor a } Q} = \underbrace{\mathbb{I}(G)}_{\text{Tensor a } G} + \underbrace{\mathbb{I}^\oplus(Q)}_{\text{Tensor a } Q \text{ de tota la massa concentrada a } G}$$

Exm: anell homogeni  
[ $\mathbb{I}(Q)$ ]<sub>B</sub> ?



Tensor a G és fàcil:

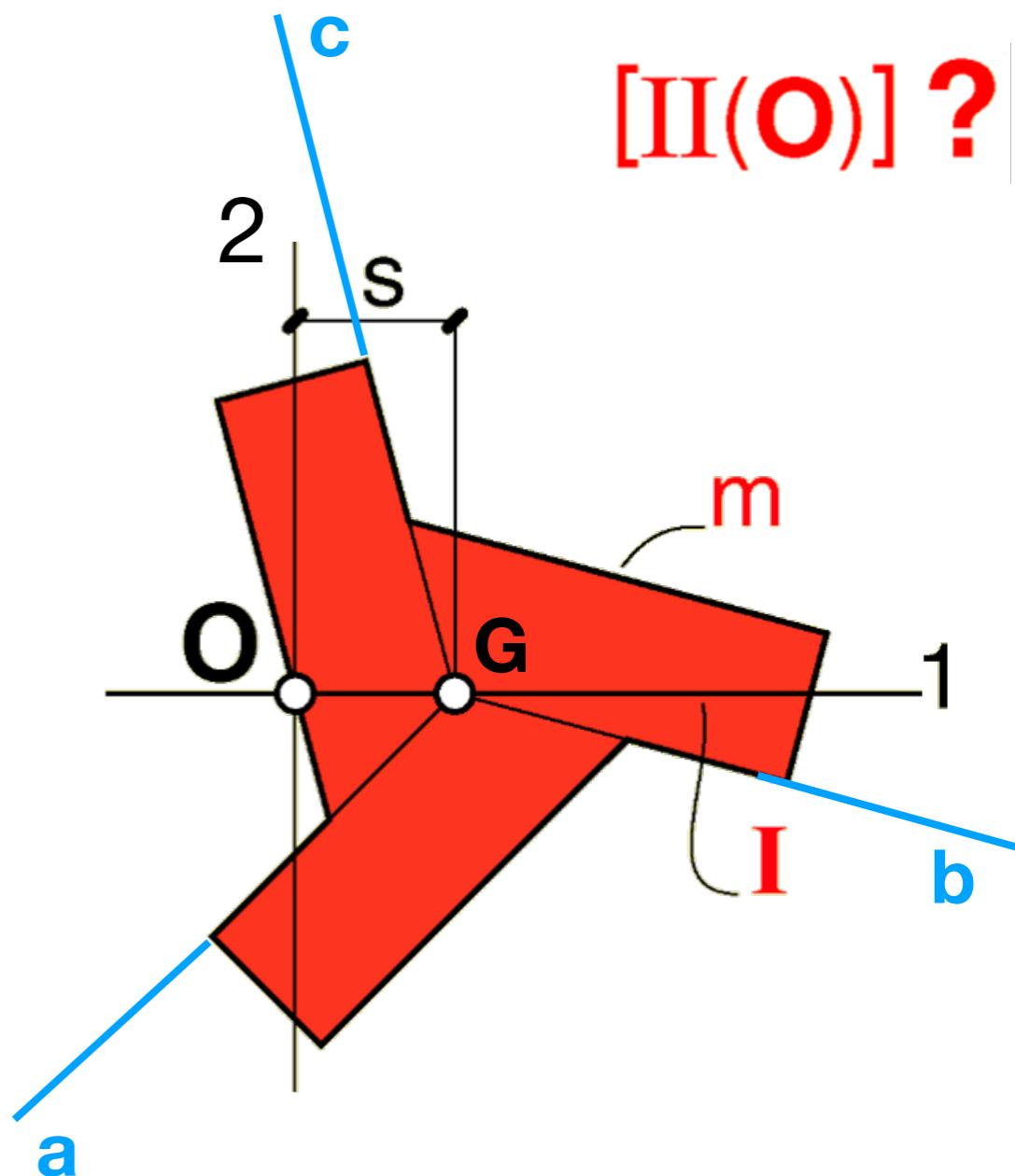
[ $\mathbb{I}(O)$ ] ?

Sòlid pla  $\Rightarrow$  3 és DPI

$$\underbrace{I_{aa} = I_{bb} = I_{cc}}_{\text{rotor simètric per a } G} = I$$

rotor simètric per a G

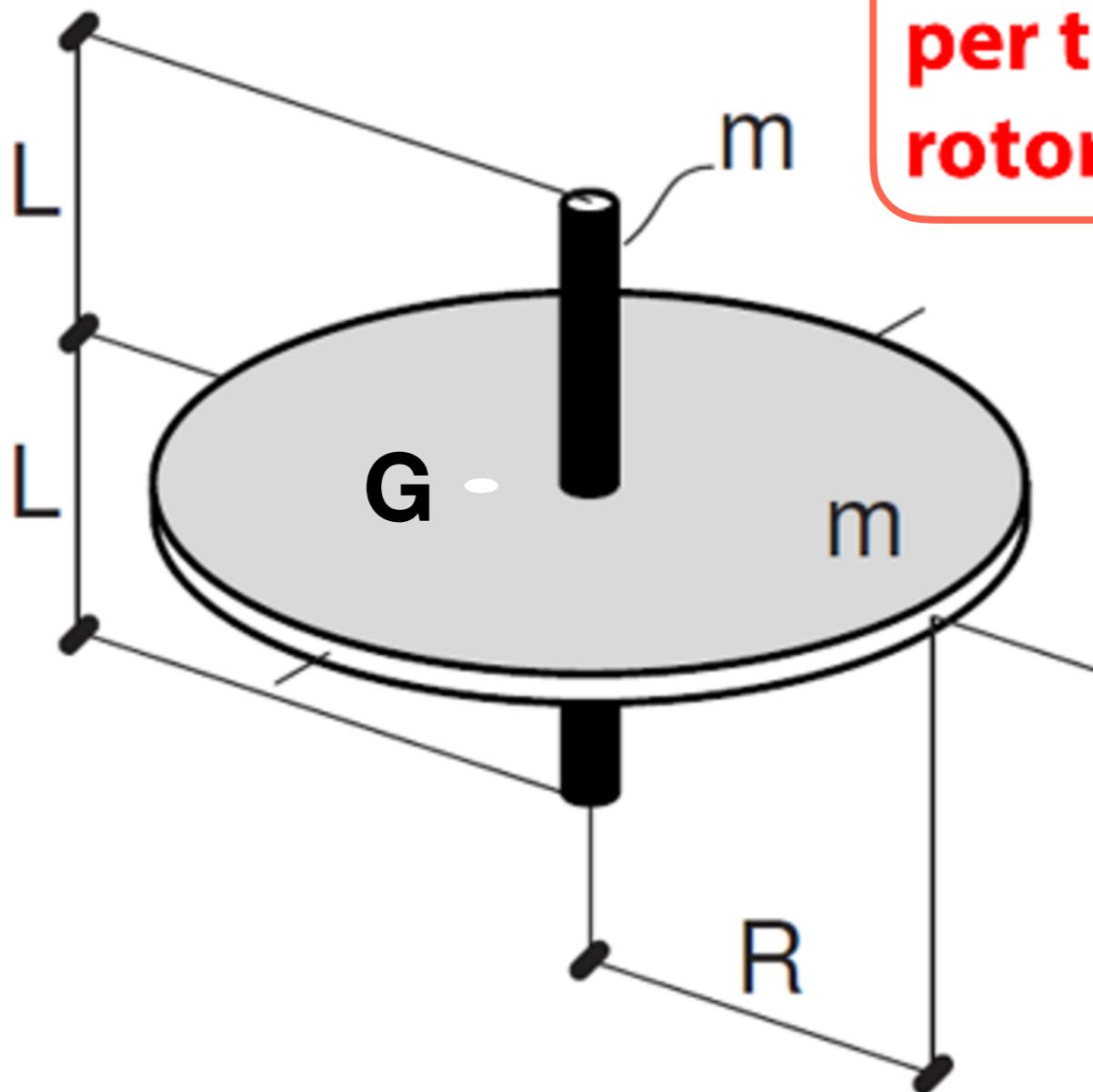
$$[\mathbb{I}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$



Canvi a O via Steiner:

$$[\mathbb{I}(O)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & I & 2I \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}(G)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & ms^2 & ms^2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}^\oplus(O)}$$

Relació entre  $L$  i  $R$   
per tal que sigui  
rotor esfèric a  $G$ ?



II(**O**)?

