

14P - extra

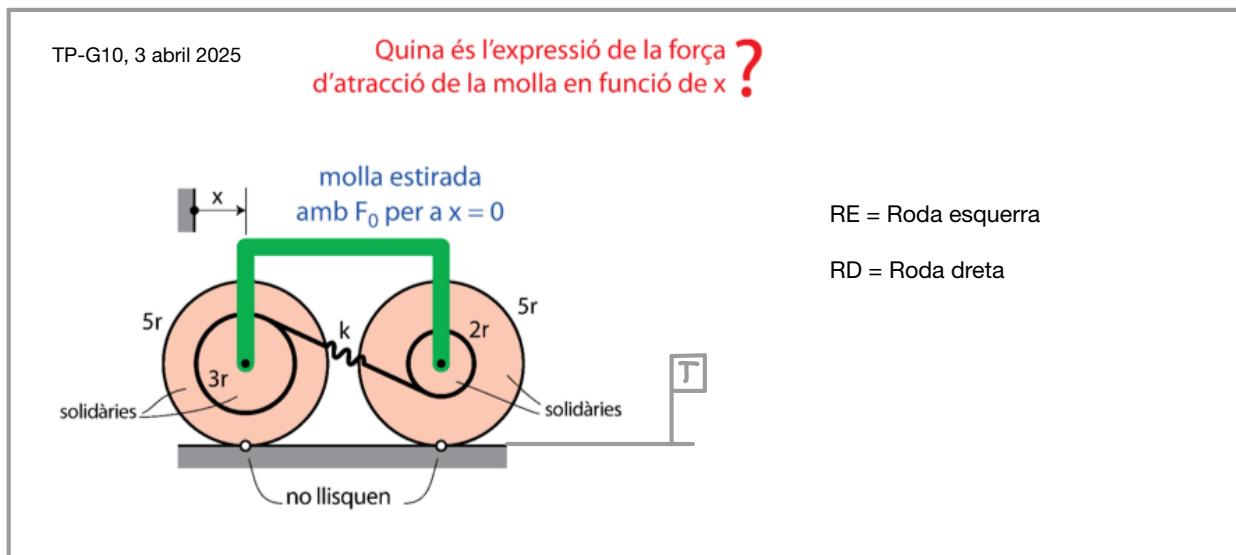
Versió 1.0

Exercicis de reforç

Lluís Ros

<https://lluisros.github.io/mecanica>

En exercicis de molles inserides en fils inextensibles que s'enrotllen a corrons, hi pot haver casos en que calgui calcular les velocitats dels extrems de la molla en una **referència diferent de T**, ja que si les calculem a T no surten longitudinals a la molla (cosa que dificulta determinar $\dot{\phi}$). El següent exemple ho il·lustra.



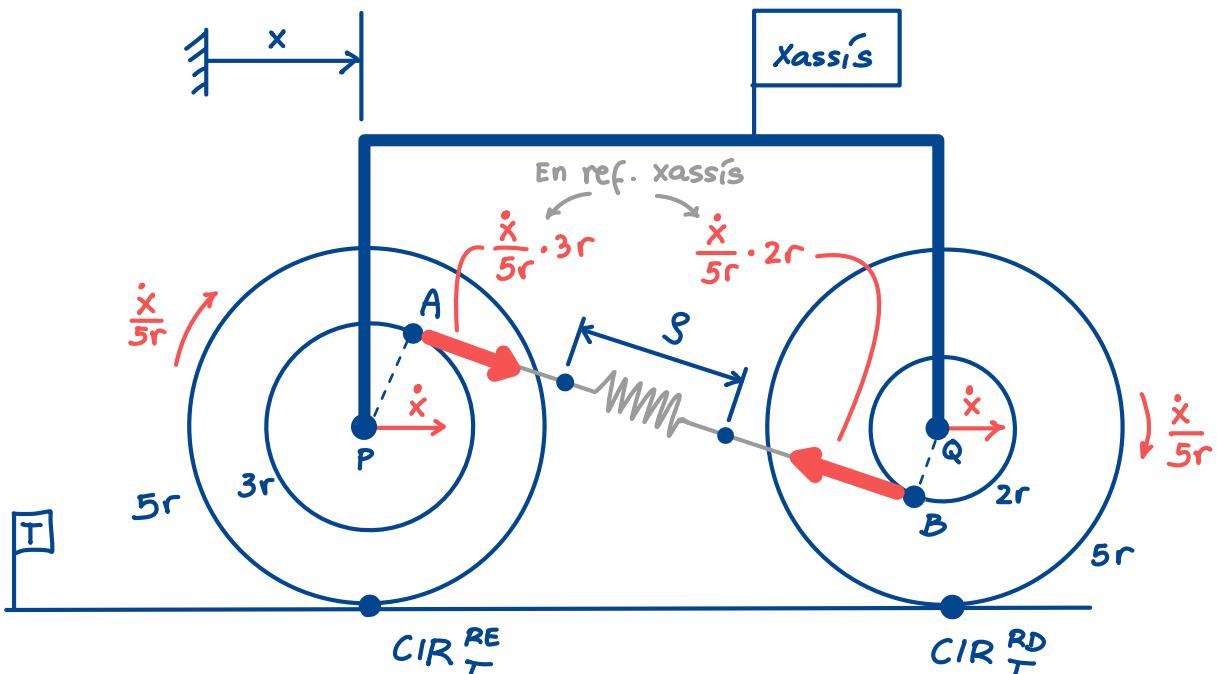
Solució

Tenim una molla acoplada a un fil inextensible que s'enrotlla sobre corrons \Rightarrow calcularem $\dot{\phi}$ i integrarem. Per trobar $\dot{\phi}$ ens calen les velocitats de A i B en una ref. en la que surtin longitudinals a la molla. Això passa a la ref. xassís (i no a ref. T!):

$$\bar{\Omega}_T^{RE} = \hat{\otimes} \frac{\dot{x}}{5r} = \bar{\Omega}_{xassís}^{RE}$$

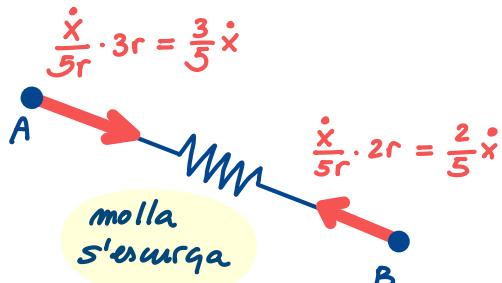
$$\bar{\Omega}_T^{RD} = \hat{\otimes} \frac{\dot{x}}{5r} = \bar{\Omega}_{xassís}^{RD}$$

Des del xassís s'observen les mateixes vel. angulars que des de T, p.q. $\bar{\Omega}_T^{xassís} = \bar{\Omega}$



En el dibuix anterior: $P = CIR_{xassís}^{RE}$, $Q = CIR_{xassís}^{RD}$, i per tant A i B descriuen, en ref. xassís, trajectòries circulars amb centre a P i Q, respectivament. Això permet deduir ràpidament les velocitats de A i B a la ref. xassís, que tenen la dir. de la molla:

A la ref. xassís tenim



$$\ddot{s} = - \left(\frac{3}{5}\dot{x} + \frac{2}{5}\dot{x} \right) = -\dot{x}$$

$$\Delta p = \int_0^t \dot{s} dt = - \int_0^t \dot{x} dt$$

$$= - \left(x(t) - \underbrace{x(0)}_0 \right) = -x(t) = -x$$

A la config. —
de referència
inicial tenim
 $x = 0$

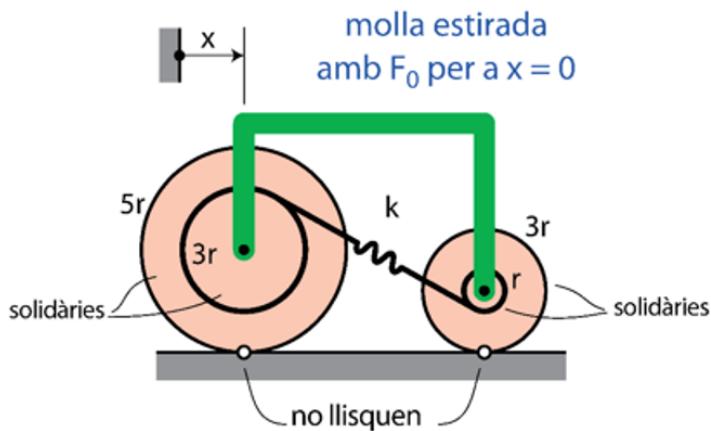
Ja no posem
la dependència
de t

Ara ja podem formular la força de la molla. Ho fem amb el criteri d'atracció perquè ens diuen que per $x=0$ la molla està estirada \Rightarrow Està fent una força atractiva entre els seus extrems $\Rightarrow F_0$ és atractiva:

$$F_m^{at} = F_0 + \underbrace{k(-x)}_{\Delta p} = F_0 - kx$$

Si heu entès l'anterior, intenteu resoldre aquest!

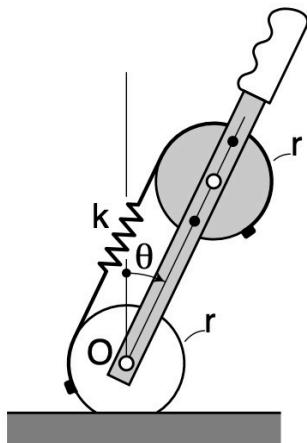
Quina és l'expressió de la força d'atracció de la molla en funció de x ?



Campus digital de Mecànica.

Solució :

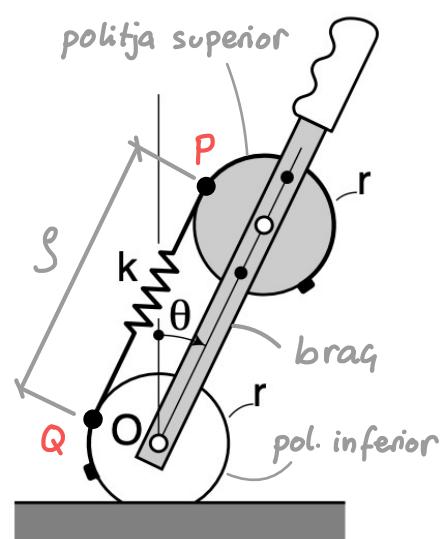
$$F_m^{at} = F_0 - k \frac{14}{15} x$$



5.29 En el mecanisme de la figura la politja inferior és solidària al terra i la superior, d'igual radi, és solidària al braç que pot girar al voltant de O. La molla de constant k està unida a les politges per mitjà de dos fils inextensibles que s'hi enrotllen i que no llisquen al seu damunt. Per a $\theta=0$ la molla està estirada amb una tensió T_0 . Quina és la força d'atracció que fa la molla en funció de θ ?

- A $T_0 - k r \theta$
- B $T_0 + k r \sin \theta$
- C $T_0 + k r \theta$
- D T_0
- E $T_0 - k r \sin \theta$

Molla inserida en fil inextensible \Rightarrow necessàriament fa una força atractiva (ja que el fil només pot estar tibat per fer la seva funció) \Rightarrow utilitzarem el criteri d'atracció.



Buscarem $\dot{\phi}$ i integrarem

Ens calen les velocitats de P i Q en una ref. en la que siguin longitudinals a la molla. Així el càlcul de $\dot{\phi}$ serà fàcil.



Utilitzem la ref. braç!

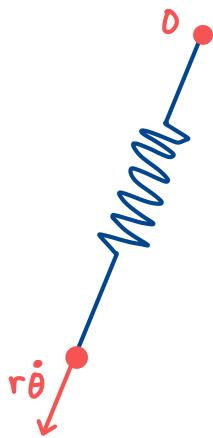
$\bar{v}_{\text{braç}}(P) = 0$, ja que la politja superior es fixa al braç.

$$\bar{v}_{\text{braç}}(Q) = \bar{\Omega}_{\text{braç}}^{\text{pol. inf.}} \times \vec{OQ} = (\vec{\Theta} \dot{\theta}) \times (\uparrow r) = (\downarrow \dot{\theta}r)$$

$O = \text{CIR}_{\text{braç}}$

$$\bar{\Omega}_{\tau}^{\text{pol. inf.}} = \bar{\Omega}_{\text{braç}}^{\text{pol. inf.}} + \bar{\Omega}_{\tau}^{\text{braç}}$$

$$\bar{\Omega}_{\text{braç}}^{\text{pol. inf.}} = \bar{\Omega}_{\tau}^{\text{pol. inf.}} - \bar{\Omega}_{\tau}^{\text{braç}} = \vec{\omega} - (\vec{\Theta} \dot{\theta}) = (\vec{\Theta} \dot{\theta})$$



← A la ref brac tenim aquestes velocitats.

Per tant:

$$\dot{\varphi} = r\dot{\theta} \quad (\text{quan } \dot{\theta} > 0, \text{ la molla s'allarga})$$

Integrant $\dot{\varphi}$:

$$\Delta\varphi = \int_0^t \dot{\varphi} dt = \int_0^t r\dot{\theta} dt = r \left[\theta(t) \right]_0^t = r\theta(t) = r\theta$$

La config. inicial de referència de la molla
és per a $\theta(0)=0$ (veure enunciat)

Per tant

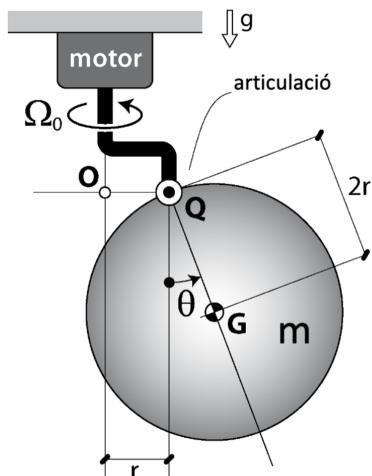
$$\boxed{F_m^{at}} = F_0 + K\Delta\varphi = \boxed{T_0 + Kr\theta}$$

A 8P_extra.pdf trobareu altres exercicis de reforç de molles

La bola homogènia, de massa m i radi $2r$, està articulada a un braç que gira amb Ω_0 constant respecte del terra (T) sota l'acció d'un motor. Si volem que θ es mantingui constant i igual a un cert valor θ_0 , quin valor ha de tenir Ω_0 ?

$$\Omega_0 \text{ per tal que } \theta = \theta_0 = ct ?$$

Dada !



Entenguem el moviment

Podem assimilar el sistema a un model senzill de gronxador articulat a una plataforma de fira. Quan la plataforma gira amb Ω_0 , el gronxador (aquí, la bola) surt centrifugat en direcció radial fins que assoleix un cert angle θ_0 d'equilibri, en el qual es manté.



Via d'atac "llarga": si $\theta = \theta_0$ s'ha de mantenir constant, ha de correspondre a una configuració d'equilibri de l'equació del moviment per a θ . Per tant, podem buscar aquesta equació i extreure'n la condició que defineix les configuracions d'equilibri $\theta_{eq} = \theta_0$. Això ens donarà una relació entre Ω_0 i θ_0 de la qual en podrem aillar el valor Ω_0 . Aquesta via ja la vam aplicar a l'exercici corresponent de 11P (vegeu 11P_sols.pdf), però ara utilitzarem una via un xic més curta per arribar al mateix resultat 🌟

Via més curta: l'estat mecànic que volem mantenir (definit per Ω_0 , θ_0 , i $\dot{\theta} = 0$) ha de ser compatible amb els teoremes vectorials. Podem imposar que aquest estat satisfaci el TMC a \mathbf{Q} per al sistema = bola i d'aquí ens sortirà la relació desitjada entre Ω_0 i θ_0 (la mateixa que per la via anterior).

Solució

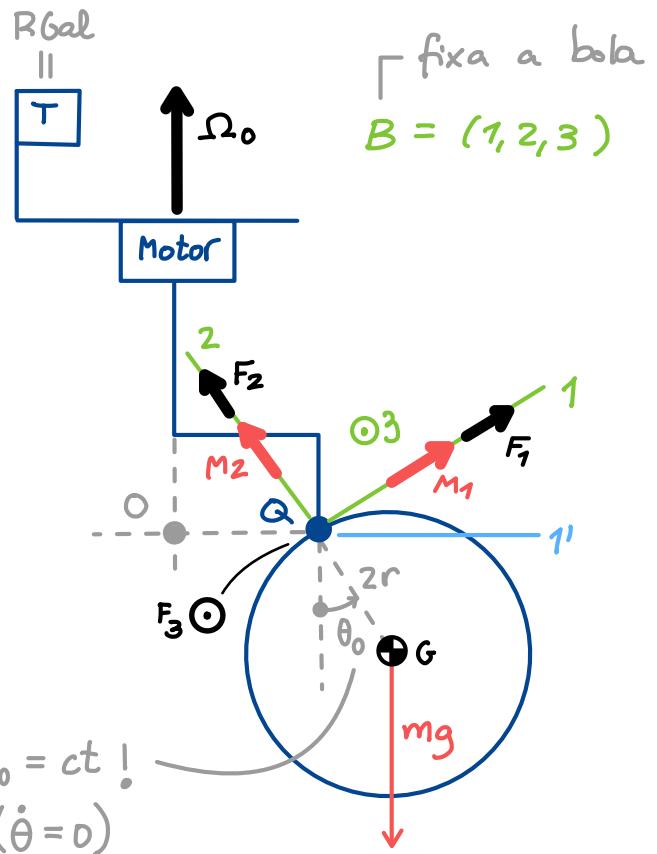
Forces i moments sobre bola

- Pes: $\downarrow mg$
- Torsor $f_{\text{forq} \rightarrow \text{bola}} \text{ a } Q:$

$$\left\{ \bar{F}_{\text{forq} \rightarrow \text{bola}} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \bar{M}_{\text{forq} \rightarrow \text{bola} (Q)} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

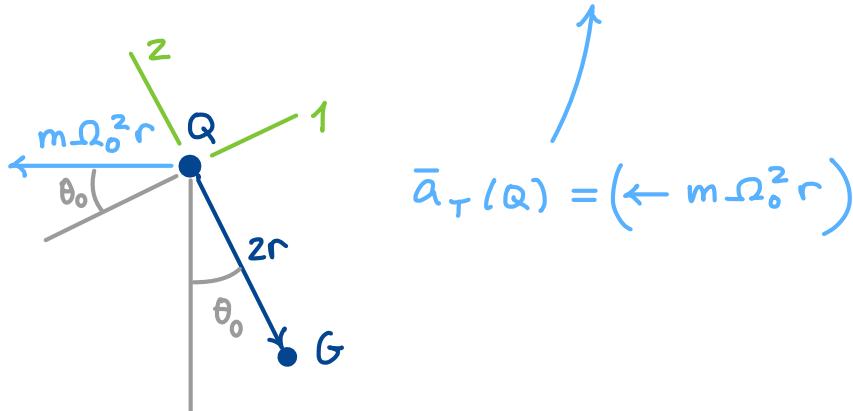
TMC (Q), sist = bola



$$\sum \bar{M}_{\text{ext} (Q)} - \bar{QG} \times m \bar{a}_T (Q) = \dot{\bar{H}}_{RTQ} (Q)$$

$$\left\{ \sum \bar{M}_{\text{ext} (Q)} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ -mg 2r \sin \theta_0 \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \bar{QG} \times m \bar{a}_T (Q) \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} -m \Omega_0^2 r \cos \theta_0 \\ m \Omega_0^2 r \sin \theta_0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -2m \Omega_0^2 r^2 \cos \theta_0 \end{matrix} \right\}$$



$$\bar{H}_{RTQ}(Q) = \mathbb{I}(Q) \cdot \bar{\Omega}_T^{Bola}$$

$\square Q \in Bola$

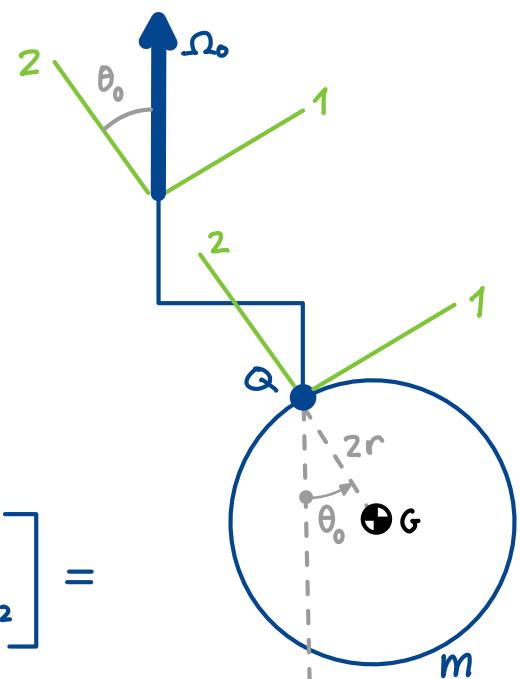
$$\mathbb{I}(Q) = \mathbb{I}(G) + \mathbb{I}^\oplus(Q)$$

$$[\mathbb{I}(Q)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{\mathbb{I}} + \begin{bmatrix} m4r^2 & & \\ & m4r^2 & \\ & & m4r^2 \end{bmatrix} =$$

$$I = \frac{2}{5}m(2r)^2 = \frac{8}{5}mr^2$$

$$= \frac{4mr^2}{5} \begin{bmatrix} ? & & \\ & z & \\ & & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \quad I_{11} = I_{33} = \frac{28}{5}mr^2$$

$$I_{22} = \frac{8}{5}mr^2$$



$$\{\bar{H}_{RTQ}(Q)\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0 \sin \theta_0 \\ \Omega_0 \cos \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \Omega_0 \sin \theta_0 \\ I_{22} \Omega_0 \cos \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{\Omega}_T^{Bola} = (\uparrow \Omega_0) \leftarrow$ forcem que sigui
 $(\uparrow \Omega_0)$, i no $(\uparrow \Omega_0) + (\odot \theta)$

$$\{\bar{H}_{RTQ}(Q)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Omega_0 \sin \theta_0 \\ \Omega_0 \cos \theta_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{11} \Omega_0 \sin \theta_0 \\ I_{22} \Omega_0 \cos \theta_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underbrace{(I_{22} - I_{11}) \Omega_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}_{-4mr^2} \end{Bmatrix}$$

La component 3 de TMC(Q) ens dóna la relació buscada:

$$-mg2rsin\theta_0 + 2m\Omega_0^2 r^2 \cos \theta_0 = -4mr^2 \Omega_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

Relació que han de complir Ω_0 i θ_0 per tal
que $\theta = \theta_0 = ct$ sota la rotació $\uparrow \Omega_0$

Arreglant una mica la relació anterior queda

$$\Omega_0^2 \cos \theta_0 (1 + 2 \sin \theta_0) - \frac{g}{r} \sin \theta_0 = 0$$

És la mateixa expressió que vam obtenir a MP via determinar l'eq. mov. per a θ i extreient-ne les configuracions d'equilibri.

Finalment, de l'equació anterior podem trobar el valor Ω_0 que ens pregunten:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{g}{r} \sin \theta_0}{\cos \theta_0 (1 + 2 \sin \theta_0)}}$$

Veloc. angular del motor que permet mantenir $\theta = \theta_0$ constant