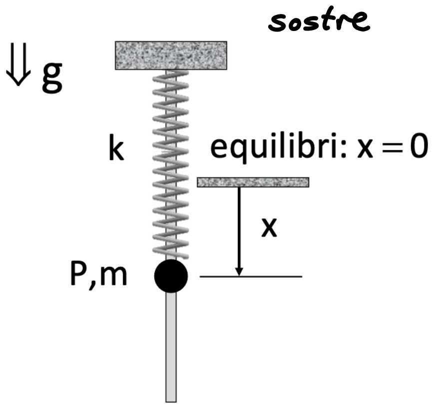
10P

Oscil·lacions i punts d'equilibri

Integració eqs. mov. senzilles
Oscil·lacions 1GL
Punts d'equilibri
Linealització

+

Ex. extra de reforç



- Força de la molla en funció d'x?
- Eq. del moviment per x?
- Com és x(t)?
- x = 0 és posició d'equilibri estable?

Aquest exercici prepara el terreny per futurs exercicis!

Força molla en funció d'x

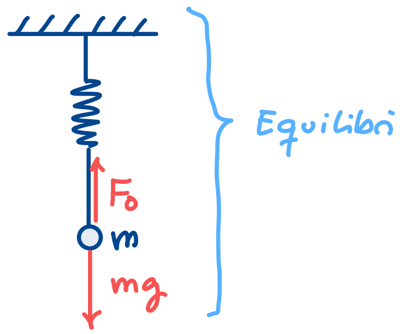
S'ha definit x com al dibuix, i no des del sostre, perquè convé que l'origen de coordenades correspongui a una configuració dinàmicament interessant ($x=0 \Rightarrow$ equilibri en aq. cas)

Per $x=0$ la força que fa la molla és atractiva → Formulem amb crit. d'atracció

$$F_m^{at} = F_0 + k\,\Delta x$$

$\Delta\rho = \Delta x$ en aq. cas

F_0 no és una dada aquí. L'hem de calcular imposant la condició d'equilibri per $x=0$. Clarament:



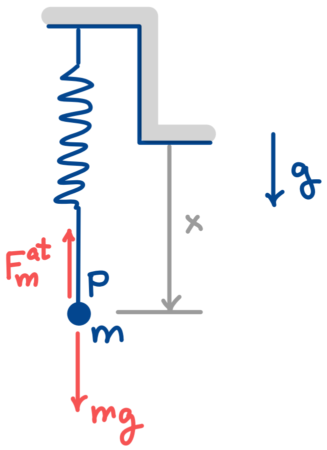
$$F_0 = mg$$

Ergo:

$$\boxed{F_m^{at} = mg + kx} \quad (1)$$

Eq. del moviment per a x ← Ens donarà l'evolució $x(t)$!

Cas molt fàcil: només cal aplicar 2^a LN a P en dir vert:



$$(\downarrow mg) + \left[\uparrow (mg + kx)\right] = (\downarrow m\ddot{x})$$

$$mg - (mg + kx) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (2)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (2')$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{m}x} \qquad (2'')$$

EDO lineal amb coefs. ct.

3 maneres usuals d'escriure-la

Eq. del mov. per coord. x

Evolució $x(t)$?

Cal mirar-se (2'') com una EDO on x és una funció del temps que volem determinar:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}\,x(t) \qquad (3)$$

$x(t)$ és la incògnita de l'EDO. Sovint, però, la dependència de x amb t s'omet!

Volem trobar una $x(t)$ que verifiqui (3) i les $\underbrace{\text{condicions inicials}}_{\text{c.i.}}$:

$$x(0) = x_0 \qquad (4)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \qquad (5)$$

Valors de x i $\dot{x}$ per $t=0$

(3), (4), (5) defineixen un problema de valor inicial (PVI)

Com ho fem? Fàcil! L'eq. (3) implica que $\ddot{x}(t)$ ha de ser proporcional a $x(t)$. Si se'ns acut alguna funció que satisfaci això (i (4), (5)) per algun valor dels seus paràmetres, ja està! Ja haurem resolt el PVI. I... les següents funcions ho satisfan!

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \qquad (6)$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (7)$$

Provem (7). A veure si satisfà el PVI per certs valors de A, B, ω:

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \qquad (8)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t) \qquad (9)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t) \qquad (10)$$

Comparant (10) amb (3) veiem que

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

A i B es determinen imposant les c.i. (4) i (5) via (8) i (9):

$$x_0 = A\sin(\omega\cdot 0) + B\cos(\omega\cdot 0) = B \rightarrow \boxed{B = x_0}$$

$$\dot{x}_0 = A\omega\cos(\omega\cdot 0) - B\omega\sin(\omega\cdot 0) = A\omega \rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{x}_0}{\omega}}$$

Ergo $x(t)$ definida com a (6), amb els valors de A, B i ω que hem trobat, és la solució del PVI.

Exercici pel lector: Proveu que (7) també és una solució del PVI amb els valors

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}} \qquad \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}} \qquad \boxed{\tan\varphi = \frac{\omega\, x_0}{\dot{x}_0}}$$

Igual q. abans!

La solució (7) i la (8) són iguals! Són dues maneres equivalents d'escriure la mateixa oscil·lació sinusoïdal.

A = Amplitud de l'oscil·lació [m]
φ = Fase de l'oscil·lació [rad]
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ = freqüència natural [rad/s]

Observ: ω és un paràmetre intrínsec del sistema: no depèn de les c.i., només de m i k.

A i φ són pars. extrínsecs (depenen de les c.i.)

Estudi de la posició d'equilibri (és estable?)

Mirant

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x \quad (6)$$

quines posicions d'equilibri té x?

Una posició d'equilibri x_{eq} és aquella en la que, si hi deixem el sistema amb $\dot{x} = 0$, s'hi queda ($\ddot{x} = 0$).

Clarament, si imposem

$$x = x_{eq},$$
$$\dot{x} = 0$$
$$\ddot{x} = 0$$

a (6), obtenim

$$0 = -\frac{k}{m} x_{eq} \Rightarrow \boxed{x_{eq} = 0}$$

Per tant: hi surt reflectida la posició d'equilibri de l'enunciat, com era d'esperar!

o "estabilitzador"

La molla és un element recuperador: si ens allunyem de x_{eq} $(=0)$ una mica, ens hi retorna. Es veu així: si a (6) hi substituïm

$$x = x_{eq} + \varepsilon$$
$$\dot{x} = \dot{\varepsilon}$$
$$\ddot{x} = \ddot{\varepsilon}$$

ε = "error" o desviació de x respecte x_{eq} (*↓)

queda

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{K}{m}\varepsilon$$

EDO de l'error $\varepsilon = x - x_{eq}$
[determina l'evolució $\varepsilon(t)$]

i clarament

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{K}{m}\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \varepsilon > 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} < 0 \Rightarrow \varepsilon \text{ torna cap a } 0 \\ \text{si } \varepsilon < 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \varepsilon \text{ torna cap a } 0 \end{cases}$$

positiu

Equilibri ESTABLE

Què passaria si $\frac{K}{m} < 0$?

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{K}{m}\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \varepsilon > 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \varepsilon \text{ s'allunya de } 0 \\ \text{si } \varepsilon < 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} < 0 \Rightarrow \varepsilon \text{ s'allunya de } 0 \end{cases}$$

negatiu

Equilibri INESTABLE

Important entendre-ho !

En aquest exercici, K i m són positives, i per tant l'equilibri és estable, però en exercicis futurs veurem casos on tenim $\ddot{\varepsilon} = -\mathbb{K}\varepsilon$, amb $\mathbb{K} < 0$.

(*) En aquest exercici $x = \varepsilon$ (perquè $x_{eq} = 0$) però en altres exercicis caldrà distingir la desviació ε del valor de la coordenada (x en aquest cas). Per això, ho comencem a practicar!

Versió simplificada del prob. 1.7 de RBD, pàg 66

Partícula sobre guia inclinada amb molla

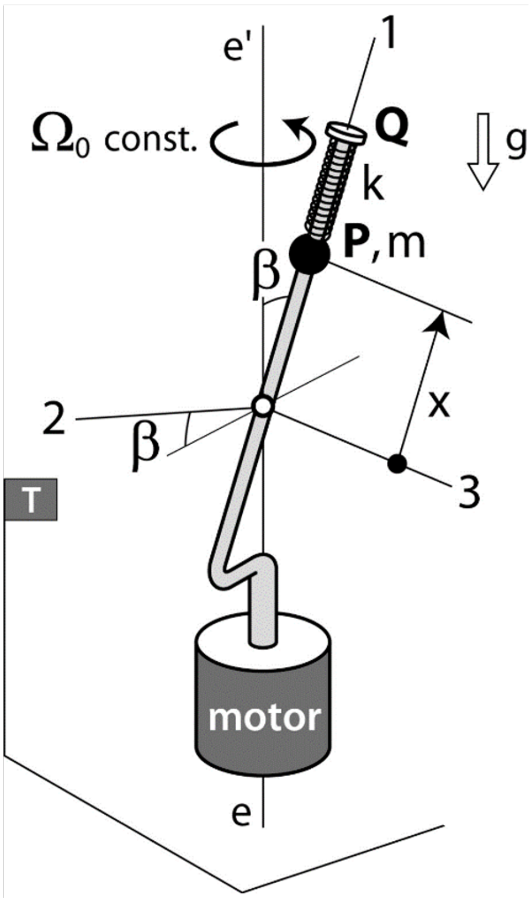
Una partícula P de massa m llisca al llarg d'una guia recta inclinada i llisa que gira amb velocitat angular constant Ω_0 al voltant de l'eix vertical e-e' relatiu a terra (T). La partícula està unida a una molla que té el seu extrem superior unit al punt Q de la guia. La coordenada x descriu la posició de la partícula relativa a la guia. Quan $\Omega_0 = 0$, la posició $x = 0$ correspon a una posició d'equilibri. Determina:

(a) Quants graus de llibertat té el sistema? Són lliures o forçats?

(b) L'equació del moviment per a la coordenada x. A quin tipus de moviment correspon?

(c) La naturalesa de $x = 0$ (equilibri estable o inestable).

(d) Les components de la força d'enllaç sobre P.



Farem (a), (b), i (c) i deixarem (d) com a deures

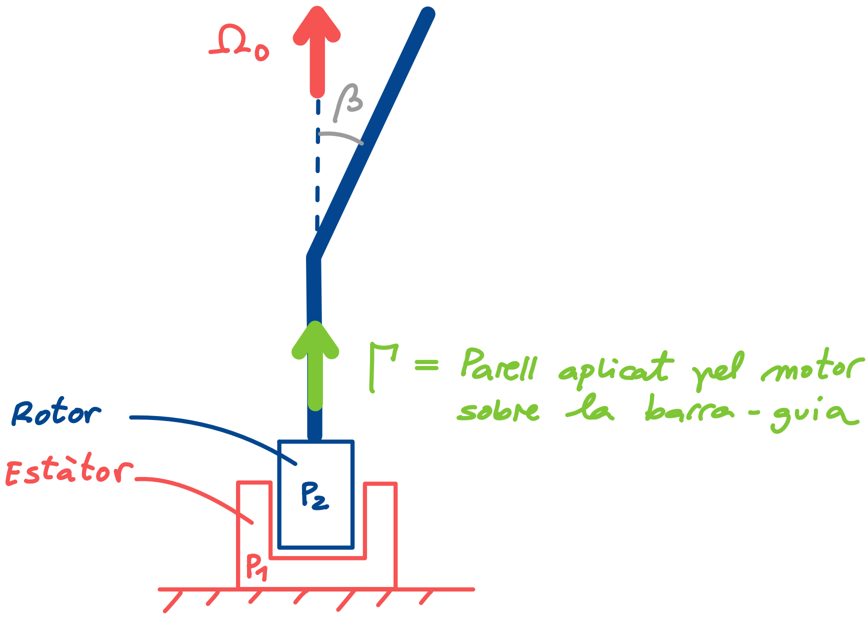
(a) Anàlisi dels GL

Sist. amb 2 GL $\left| \begin{array}{l} \dot\psi \; (= \Omega_0 = ct \text{ en aquest exercici}) \\ \dot x \end{array} \right.$

ψ és un GL forçat : està activat per un motor que aplica el parell Γ que calgui sobre la guia per garantir $\dot\psi = \Omega_0 = ct.$

Cal pensar el motor com dues peces P_1 i P_2, l'estàtor i el rotor, units al terra i la guia respectivament.

Aquesta manera de veure un motor és important de cara a futurs exercicis



L'equació del mov. per a ψ és trivial. Com que $\dot\psi = \Omega_0 = ct$, clarament

$$\boxed{\ddot\psi = 0} \leftarrow \text{Eq. del mov. per a } \psi.$$

$\dot x$ és un GL lliure : $x(t)$ evoluciona d'acord amb les lleis de la dinàmica, sense que el motor pugui forçar $x(t)$ de manera directa ($x(t)$ dependrà de m, k, Ω_0, β)

(b) Eq. mov. coord x

Volem trobar l'eq. del movim. per x, que tindrà la forma:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \text{pars}) \qquad (1)$$

└ Busquem aquesta f

Pars = paràmetres dinàmics / geomètrics

Es un problema de dinàmica de partícula. En tindrem prou amb aplicar la 2ª llei de Newton sobre P.

Coses que sabem, a priori, de (1):

- Si $\beta = 0$, ha de coincidir amb la de l'exemple anterior:

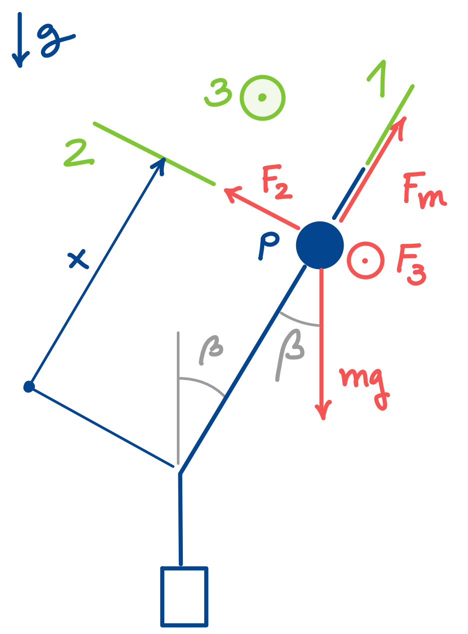
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

- Si $\Omega_0 = 0$, $x = 0$ ha de ser d'equilibri (per l'enunciat)

Diferències amb el problema anterior:

- Ara el problema és 3D!
- P està sotmesa a forces d'enllaç (guia → P)

Forces sobre P



- Només hi ha forces d'enllaç en dirs. 2 i 3 (F_2, F_3) perquè en dir. 1 el moviment és permès.

- F_2 i F_3 poden tenir qualsevol signe (enllaç bilateral). Per això, cap es diu N!

Formulació de F_m

La força de la molla és atractiva en la situació d'equilibri $x=0$ ⇒ fem servir el criteri d'atracció:

$$F_m^{at} = \underbrace{F_0}_{\substack{\text{No és dada}\\ \text{Cal determinar-la}}} + k\,\underbrace{\Delta\rho}_{-x}$$

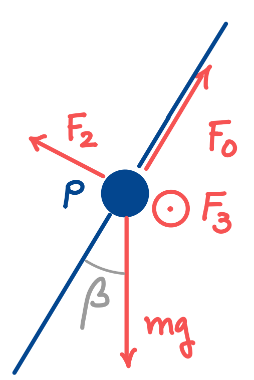
Molla s'escurça en passar de $x=0$ a l'x dibuixat (*)

Per $x=0$, $F_m = F_0$, i P en equilibri:

$$\sum \bar{F}_{\to P} = 0 \Big]_{\text{Dir. guia}}:$$

$$(\nearrow F_0) + (\swarrow mg\cos\beta) = 0$$

$$F_0 = mg\cos\beta$$



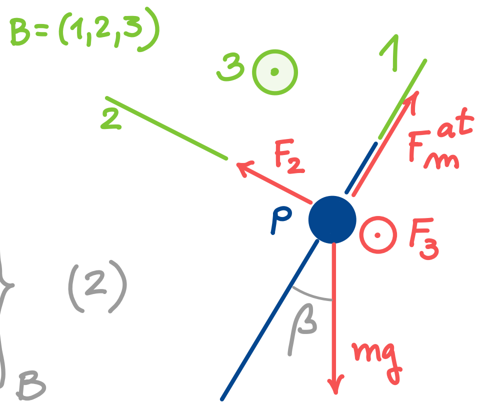
Problema d'estàtica

Per tant:

$$\boxed{F_m^{at} = mg\cos\beta - kx}$$

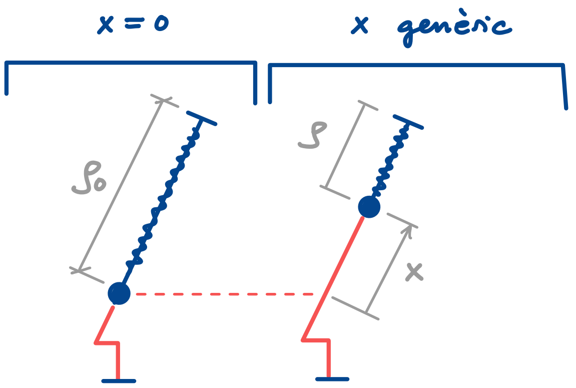
2a LN sobre P

$$\underbrace{\sum \bar{F}_{\to P}}_{\left\{\begin{matrix} \cancel{mg\cos\beta} - kx - \cancel{mg\cos\beta} \\ F_2 - mg\sin\beta \\ F_3 \end{matrix}\right\}_B \;(2)} = m\,\bar{a}_T(P)$$



En dir. 1 no hi ha forces d'enllaç! Ergo la component 1 de la 2a LN ens donarà l'eq. del mov. que busquem.

(*)



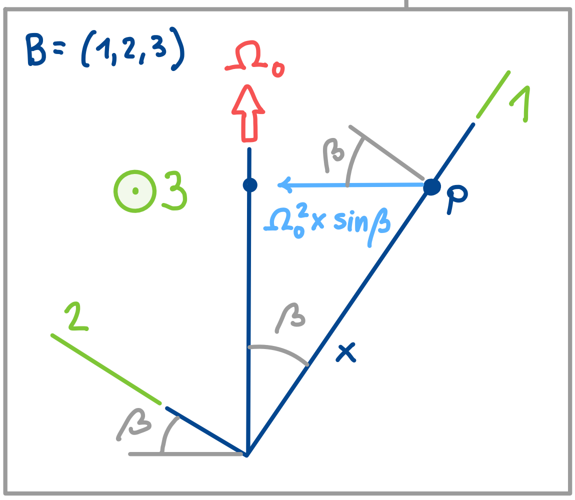
$\rho - \rho_0 = -x$ s'escurça

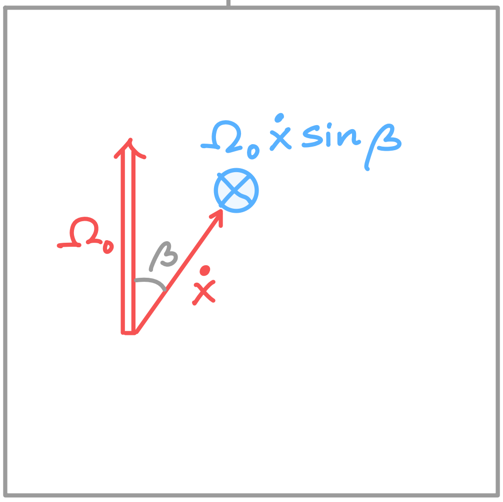
Full de ruta per obtenir l'eq. del mov: $\left.2^a \text{ Llei Newton}\right]_1$

Només ens cal la comp. 1 d'$\bar{a}_T(P)$.

$\bar{a}_T(P)$ via comp. d'acceleracions $(AB = T,\ REL = \text{Guia})$ (*)

$$\bar{a}_T(P) = \underbrace{\bar{a}_{Guia}(P)}_{(\nearrow \ddot{x})} + \underbrace{\bar{a}_{ar}(P)}_{(\overleftarrow{\Omega_0^2 x \sin\beta})} + \underbrace{2\,\bar{\Omega}_T^{Guia} \times \bar{v}_{Guia}(P)}_{\otimes\ 2\Omega_0 \dot{x}\sin\beta} =$$





$$= \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\Omega_0^2 x \sin^2\beta \\ \Omega_0^2 x \sin\beta\cos\beta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\Omega_0 \dot{x}\sin\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} - \Omega_0^2 x\sin^2\beta \\ \Omega_0^2 x \sin\beta\cos\beta \\ -2\Omega_0\dot{x}\sin\beta \end{Bmatrix} \quad (3)$$

2^a LN en dir. 1

Queda:

$$-Kx = m\left(\ddot{x} - \Omega_0^2 x \sin^2\beta\right)$$

$$\boxed{m\ddot{x} + \underbrace{(K - m\Omega_0^2 \sin^2\beta)}_{K'}x = 0}$$

Eq. mov. per la coord. x (4)

Té la forma

$$m\ddot{x} + K'x = 0$$

Mateixa que la de l'exercici anterior! (5)

(*) Calculem totes les components per exercitar-nos. També, perquè calen per l'apartat (d)

Comprovacions del que sabíem a priori :

- Si $\beta=0$, $K'=K$. Coincideix amb la de l'ex. anterior!
- Pel que hem vist a l'ex anterior, $x=0$ és posició d'equilibri ($x_{eq}=0$), de l'EDO (4). De fet serà així independentment del valor Ω_0. En particular és cert que, per $\Omega_0=0$, $x=0$ és pos. d'equilibri.

Evolució $x(t)$

Serà la mateixa que a l'ex. anterior:

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

amb

$$\omega = \sqrt{\frac{K'}{m}} \qquad A = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \qquad B = x_0$$

Moviment oscil·latori de freqüència $\sqrt{\frac{K'}{m}}$

(c) Anàlisi de l'estabilitat d'$x_{eq}=0$

Pel que hem vist a l'ex. anterior

$$\frac{K'}{m}>0 \iff x_{eq}=0 \text{ és d'equilibri ESTABLE}$$

$$\frac{K'}{m}<0 \iff x_{eq}=0 \text{ és d'equilibri INESTABLE}$$

Utilitzant el valor de K':

$$\frac{K-m\Omega_0^2\sin^2\beta}{m}>0 \iff \frac{K}{m}>\Omega_0^2\sin^2\beta$$

Ergo:

$$\frac{K}{m}>\Omega_0^2\sin^2\beta \Rightarrow \text{Equil. ESTABLE}$$

$$\frac{K}{m}<\Omega_0^2\sin^2\beta \Rightarrow \text{Equil. INESTABLE}$$

A major Ω_0, cal major K per garantir estabilitat

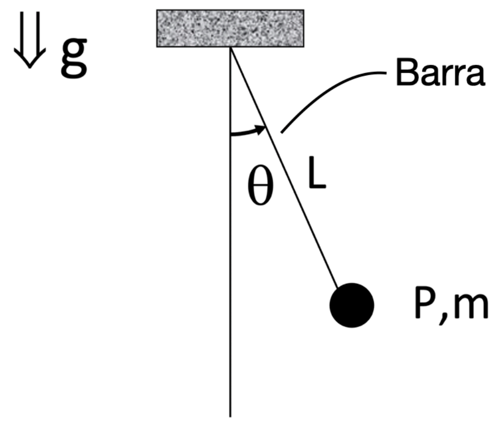
Deures: obteniu el valor de F_2 i F_3 (trivial).

El pèndol simple de la figura té la massa m concentrada a P.

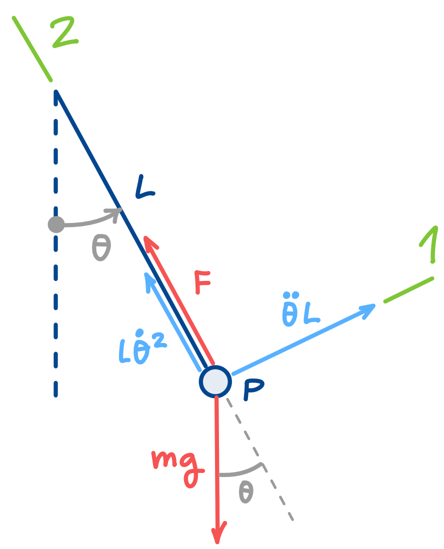
Trobeu-ne:

1. L'equació del moviment per a la coordenada θ.

2. Les configuracions d'equilibri, determinant si són estables o inestables.



(1) Eq. mov. coord. θ



En dir. 1 no hi ha forces d'enllaç sobre P. Per tant, l'eq. del mov. serà la comp. en dir. 1 de

$$\Sigma \bar{F}_{\to P} = m\,\bar{a}_T(P)$$

$$(\swarrow mg \sin\theta) = m\,(\nearrow \ddot{\theta}L)$$

$$-\cancel{m}g \sin\theta = \cancel{m}\,\ddot{\theta}L$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta} \quad (1)$$

EDO no lineal!

$\ddot{\theta}(t)$ no és proporcional a $\theta(t)$

(2) Configs. d'equilibri

Config. equilibri (θ_{eq}) = aquella en la que si hi deixo el sistema amb vel. nul·la ($\dot{\theta}=0$), s'hi queda ($\ddot{\theta}=0$).

Substituïm $\boxed{\begin{array}{l}\theta = \theta_{eq}\\ \dot{\theta} = 0\\ \ddot{\theta} = 0\end{array}}$ a (1) per trobar-les:

$$0 = -\frac{g}{L}\sin\theta_{eq} \Rightarrow \sin\theta_{eq} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_{eq} = K\pi,\ K\in\mathbb{Z}}$$

Les posicions inferior i superior del pèndol són d'equilibri. Són estables? La inferior sí, la superior no! Però com ho demostrem matemàticament? Analitzant com són les petites oscil·lacions al seu voltant! En 3 passos:

1 Obtenim EDO de l'error:

Substituïm $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$ a (1)

(Implica substituir $\left|\begin{array}{l}\dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \\ \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}\end{array}\right.$ també)

Queda:

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{g}{L}\sin(\theta_{eq}+\varepsilon)$$

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{g}{L}\left[\underbrace{\sin\theta_{eq}}_{0}\cdot\cos\varepsilon + \cos\theta_{eq}\sin\varepsilon\right]$$

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{g\cos\theta_{eq}}{L}\sin\varepsilon$$

EDO de l'error, o desviació, respecte θ_{eq}

2 Linealitzem:

Com que ε és molt petit ($|\varepsilon| \ll 1$, $\varepsilon^2 \simeq 0$, $\varepsilon^3 \simeq 0$, ...) aproximem les funcions no lineals que queden pel seu desenvolupament en sèrie de Taylor fins a 1er ordre (termes lineals):

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{g\cos\theta_{eq}}{L}\cdot\underbrace{\sin\varepsilon}_{\simeq\varepsilon}$$

$$\left(\begin{array}{l}\sin\varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \ldots \simeq \varepsilon \\ \cos\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots \simeq 1\end{array}\right)$$

$$\ddot{\varepsilon} = -\underbrace{\frac{g\cos\theta_{eq}}{L}}_{K}\cdot\varepsilon$$

EDO lineal!

3 Mirem si $\mathbb{K} > 0$:

Com que surt una EDO lineal com la de la molla vertical, l'equilibri serà estable quan $\mathbb{K} > 0$:

Per $\theta_{eq} = 0$, $\mathbb{K} = \frac{g}{L} > 0 \Rightarrow$ Equilibri estable

Per $\theta_{eq} = \pi$, $\mathbb{K} = -\frac{g}{L} < 0 \Rightarrow$ Equilibri inestable

Important:

- En el pas 2 podria caldre la linealització d'altres termes, apart de $\sin\varepsilon \simeq \varepsilon$. Resumim les linealitzacions més habituals, on q és la coordenada de treball:

• si apareixen polinomis de grau superior a 1:

$$q = q_{eq} + \varepsilon$$
$$q^2 = (q_{eq} + \varepsilon)^2 = \varepsilon^2 + 2q_{eq}\varepsilon + q_{eq}^2 \approx +2q_{eq}\varepsilon + q_{eq}^2$$
$$q^3 = (q_{eq} + \varepsilon)^3 = \varepsilon^3 + 3q_{eq}\varepsilon^2 + 3q_{eq}^2\varepsilon + q_{eq}^3 \approx 3q_{eq}^2\varepsilon + q_{eq}^3$$

• si es tracta d'una coordenada angular ($q = \theta$) i apareixen funcions sinus i cosinus:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_{eq} + \varepsilon \\ \sin\theta = \sin(\theta_{eq} + \varepsilon) &= \sin\theta_{eq}\cos\varepsilon + \cos\theta_{eq}\sin\varepsilon \\ \cos\theta = \cos(\theta_{eq} + \varepsilon) &= \cos\theta_{eq}\cos\varepsilon - \sin\theta_{eq}\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon &= \varepsilon - (1/3!)\varepsilon^3 + \ldots \simeq \varepsilon \\ \cos\varepsilon &= 1 - (1/2)\varepsilon^2 + \ldots \simeq 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta_{eq} + \varepsilon) \simeq \sin\theta_{eq} + \varepsilon\cos\theta_{eq} \\ \cos(\theta_{eq} + \varepsilon) \simeq \cos\theta_{eq} - \varepsilon\sin\theta_{eq} \end{cases}$$

- L'EDO lineal obtinguda al pas 2 serà de la forma

$$\ddot{\varepsilon} = -\mathbb{K}\,\varepsilon$$

habitualment, però podria també ser (*↓)

$$\ddot{\varepsilon} = -\mathbb{K}\varepsilon - \mathbb{C}\dot{\varepsilon} \qquad (\text{on } \mathbb{C} = \text{constant} > 0)$$

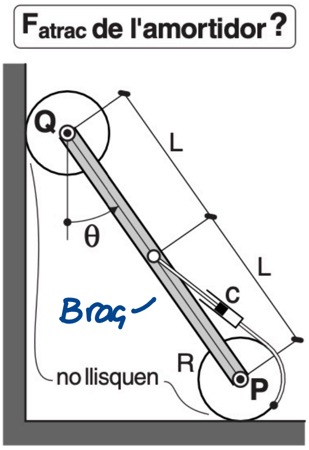
Es demostra que $\mathbb{C}$ no afecta l'estabilitat i seguirà essent:

$\mathbb{K} > 0 \Rightarrow$ Equilibri estable

$\mathbb{K} < 0 \Rightarrow$ " inestable

(*) Quan hi ha frec viscós típicament

Exercicis extra de reforç



11 En el sistema de la figura, els corrons rodolen sense lliscar. Els seus centres estan articulats als extrems de la barra **P-Q** de longitud 2L. L'amortidor de constant c actua entre el punt mig de la barra i la perifèria del corró de centre **P**, a la qual es troba unit per un fil que hi és enrotllat i que hi té l'extrem fixat. Quina és l'expressió de la força d'atracció de l'amortidor?

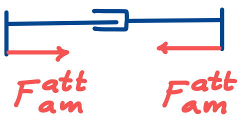
A $c\dot{\theta}2L\cos\theta$
B $c\dot{\theta}(R+2L\cos\theta)$
C $c\dot{\theta}2(R+L\cos\theta)$
D $c\dot{\theta}(-R+2L\cos\theta)$
E $c\dot{\theta}2(-R+2L\cos\theta)$

Sist amb 1 GL : Si $\underbrace{R_{sup}}_{\text{Roda superior}}$ gira ↻, θ augmenta, i $\underbrace{R_{inf}}_{\text{Roda inferior}}$ gira ↻.

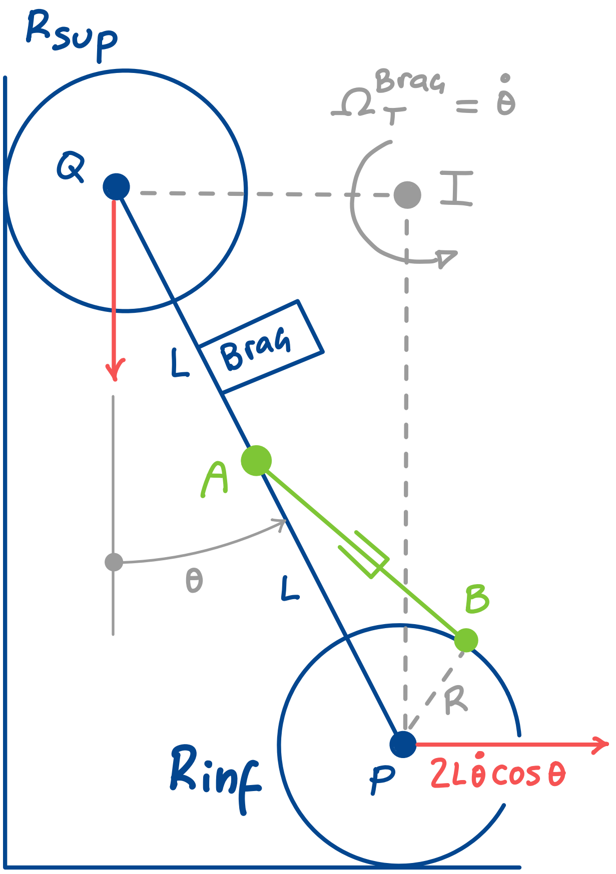
Sempre que tinguem almenys 1 extrem d'una molla o amortidor que s'enrotlla en una politja, com aquí, calcularem $\dot{\rho}$ buscant les velocitats dels extrems.

Com que demanen F_{am}^{att} → Criteri d'atracció:

$$F_{am}^{att} = c\dot{\rho} \qquad (\text{si } \dot{\rho} > 0$$



$)$



Busquem $\dot{\rho}$:

$CIR_{T}^{Braç} = I$ (fàcil)

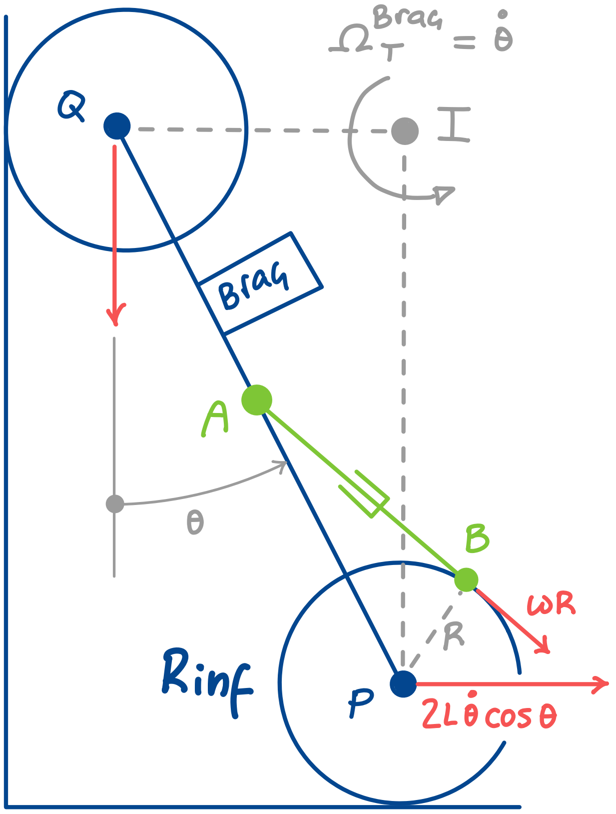
Permet trobar

$$\overline{v}_T(P) = (\rightarrow \dot{\theta}\cdot 2L\cos\theta)$$

Ara podríem buscar

$\overline{v}_T(A)$ i $\overline{v}_T(B)$

però no ens van bé per obtenir $\dot{\rho}$ perquè no són en la dir. de l'amortidor!



A ref. braç, en canvi, la vel. de A és zero, i la de B té la dir. de l'amortidor.

Buscarem $\bar{v}_{Braç}(B)$!

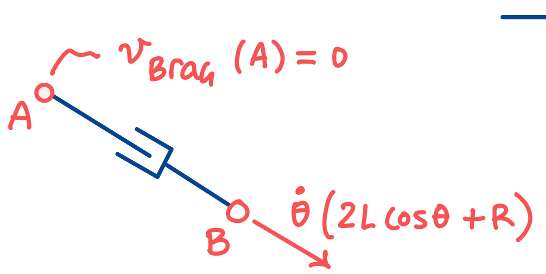
Respecte el braç, Rinf descriu un movim. circular al voltant de P amb vel. angular $\bar{\Omega}_T^{Rinf}$:

$$\bar{\Omega}_T^{Rinf} = \bar{\Omega}_{Braç}^{Rinf} + \bar{\Omega}_T^{Braç}$$

$$\bar{\Omega}_{Braç}^{Rinf} = \bar{\Omega}_T^{Rinf} - \bar{\Omega}_T^{Braç} = \left(\overset{\curvearrowright}{\otimes}\ \frac{2L\dot\theta\cos\theta}{R}\right) - \left(\overset{\curvearrowleft}{\odot}\ \dot\theta\right) =$$

$$= \overset{\curvearrowright}{\otimes}\left(\frac{2L\dot\theta\cos\theta}{R} + \dot\theta\right) = \overset{\curvearrowright}{\otimes}\left[\overbrace{\dot\theta\left(\frac{2L\cos\theta + R}{R}\right)}^{\omega}\right]$$

$$\bar{v}_{Braç}(B) = (\searrow \omega R) = \left[\searrow\ \dot\theta(2L\cos\theta + R)\right]$$



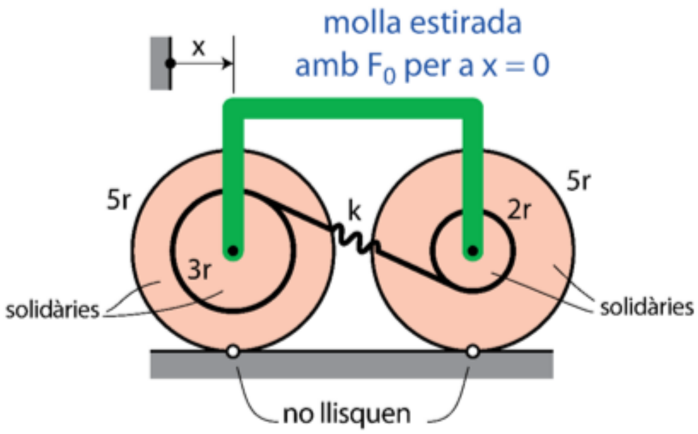
$$\longrightarrow\ \dot\rho = \dot\theta(2L\cos\theta + R)$$

Finalment, doncs :

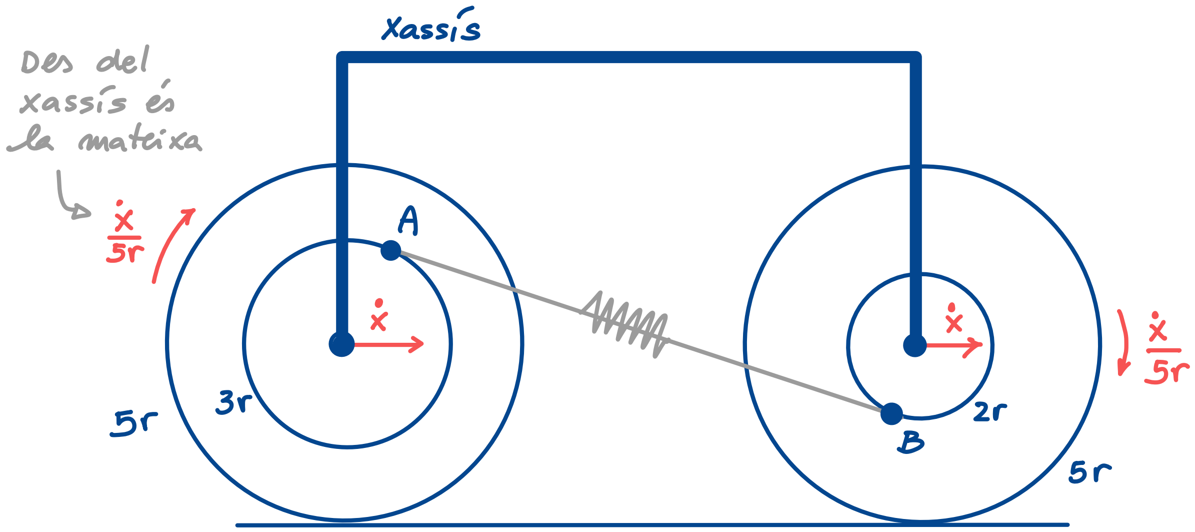
$$\boxed{F_{am}^{at} = c\,\dot\theta(2L\cos\theta + R)}$$

TP-G10 3 abril 2025

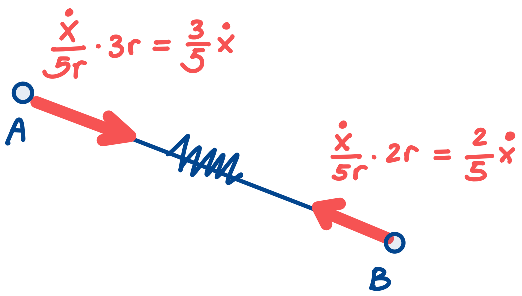
Quina és l'expressió de la força d'atracció de la molla en funció de x?



Sol: + detall a https://lluisros.github.io/mecanica/problemes/TP3-G10.pdf



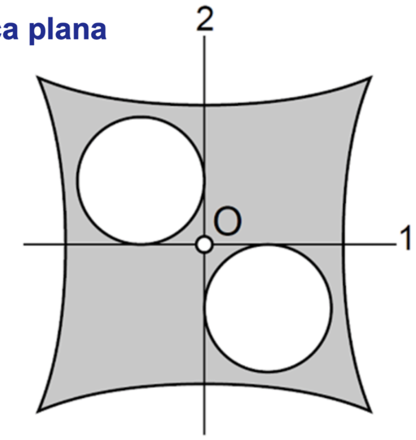
A la ref. xassís tenim



$$\longrightarrow \quad \dot{\rho} = -\left(\frac{3}{5}\dot{x} + \frac{2}{5}\dot{x}\right) = -\dot{x}$$

$$\Delta\rho = \int_0^t \dot{\rho}\, dt = -x$$

$$\boxed{F_m^{at} = F_0^{at} - kx}$$



[II(O)] ?

qualitatiu

Q7.9 del llibre

Sol :

Clarament :

Sòlid pla $\Rightarrow$ | DIR 3 és DP I
$I_{33} = I_{11} + I_2$

$I_{11} = I_{22} = I$

$I_{12} < 0$ (més massa als quadrants I i III)

$$\begin{array}{c|c} + & - \\ \hline - & + \end{array}$$

Ergo :

$$[\mathbb{I}(O)]_B = \begin{bmatrix} I & -|I_{12}| & 0 \\ -|I_{12}| & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$