13P

Versió 1.0

Teoremes vectorials III

Problemes globals 3D

Lluís Ros

https://lluisros.github.io/mecanica

Pèndol anular giratori

(adaptat de P2, juliol 2016)

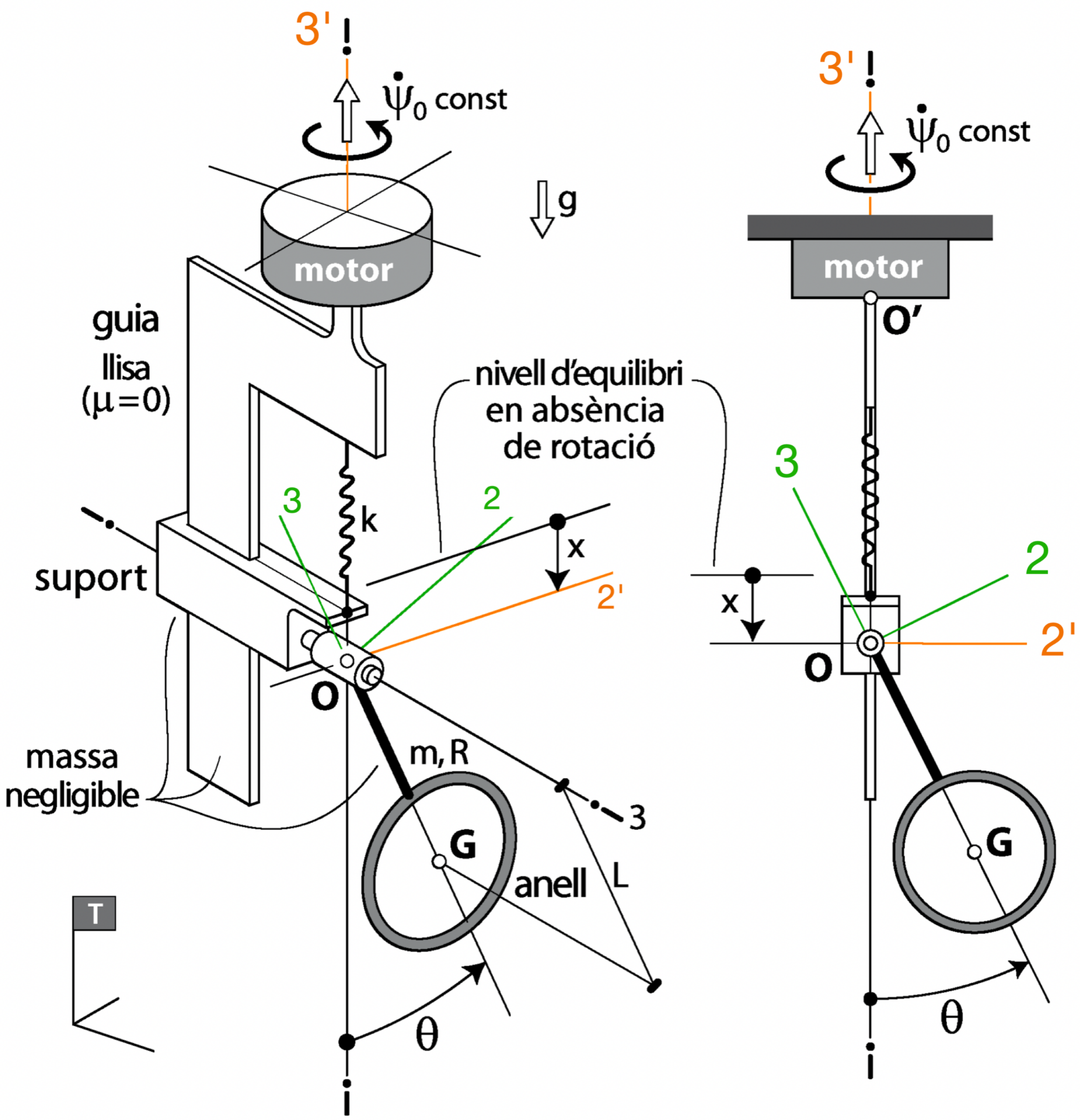
El pèndol, format per un anell homogeni de massa m i radi R i una barra de longitud (L-R), està articulat al punt **O** del suport, el qual llisca dins d'una guia llisa de secció rectangular. Entre suport i guia hi ha una molla lineal de constant k. Tot el conjunt es mou amb velocitat angular constant $\bar{\dot{\psi}}_0$ respecte al terra **sota l'acció d'un motor**.

Amb el motor aturat, la configuració $(x=0,\ \theta=0)$ és d'equilibri.

Les masses de la barra, el suport i la guia, i les friccions associades a les articulacions són negligibles.

Determineu:

- Les equacions del moviment per a les coordenades x i θ.
- El parell Γ que ha d'aplicar el motor per tal de mantenir $\dot{\psi}_0$ constant.



Novetat d'aquest problema

En els problemes que hem fet fins ara només hi surt 1 GL lliure, i l'equació del moviment, un cop obtinguda, es pot manipular fàcilment per aïllar la variable d'acceleració en funció de les d'estat (obtenint expressions de la forma $\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta})$. En aquest problema, però, hi ha 2 GL lliures $(\dot{x}, \dot{\theta})$ i obtindrem 2 eqs. del moviment de la forma

$$\left.\begin{aligned} f_1(\ddot{x}, \dot{x}, x, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) &= 0 \qquad (1a) \\ f_2(\ddot{x}, \dot{x}, x, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) &= 0 \qquad (1b) \end{aligned}\right\} (1)$$

Arribats en aquest punt, encara no podem atribuir cap de les equacions de (1) a una coordenada en particular, ja que $\ddot{x}$ i $\ddot{\theta}$ intervenen tant a (1a) com (1b). Tanmateix, com que (1) serà un sistema lineal en $\ddot{x}$ i $\ddot{\theta}$ (*), podrem aïllar $\ddot{x}$ i $\ddot{\theta}$ en funció de les variables d'estat $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$. Per aconseguir-ho cal rescriure (1) en la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{M} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_1(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \\ \mathcal{F}_2(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

M ⟵ Matriu de coefs que multipliquen $\ddot{x}$ i $\ddot{\theta}$

i multiplicar (2) per M^{-1}:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = M^{-1} \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_1(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \\ \mathcal{F}_2(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

(*) Quan formulem TQM o TMC sempre surten sistemes d'equacions que són lineals en les incògnites del problema. Ja ho hem vist.

L'eq. (3) proporciona $\ddot{x}$ i $\ddot{\theta}$ en funció de les variables d'estat. Aquesta equació dóna lloc a dues equacions diferencials escalars de la forma

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= F_1(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \qquad (4a) \\ \ddot{\theta} &= F_2(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \qquad (4b) \end{aligned}\right\} (4)$$

Ara sí que podem anomenar (4a) i (4b) com les equacions del moviment per a x i θ, respectivament. Cal deixar clar, però, que les evolucions de x i de θ no són independents. Cal integrar (4a) i (4b) conjuntament per obtenir $x(t)$ i $\theta(t)$ a partir d'unes condicions inicials

$$x(0), \dot{x}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)$$

En aquest curs és suficient que obtingueu (1). No cal arribar a (4).

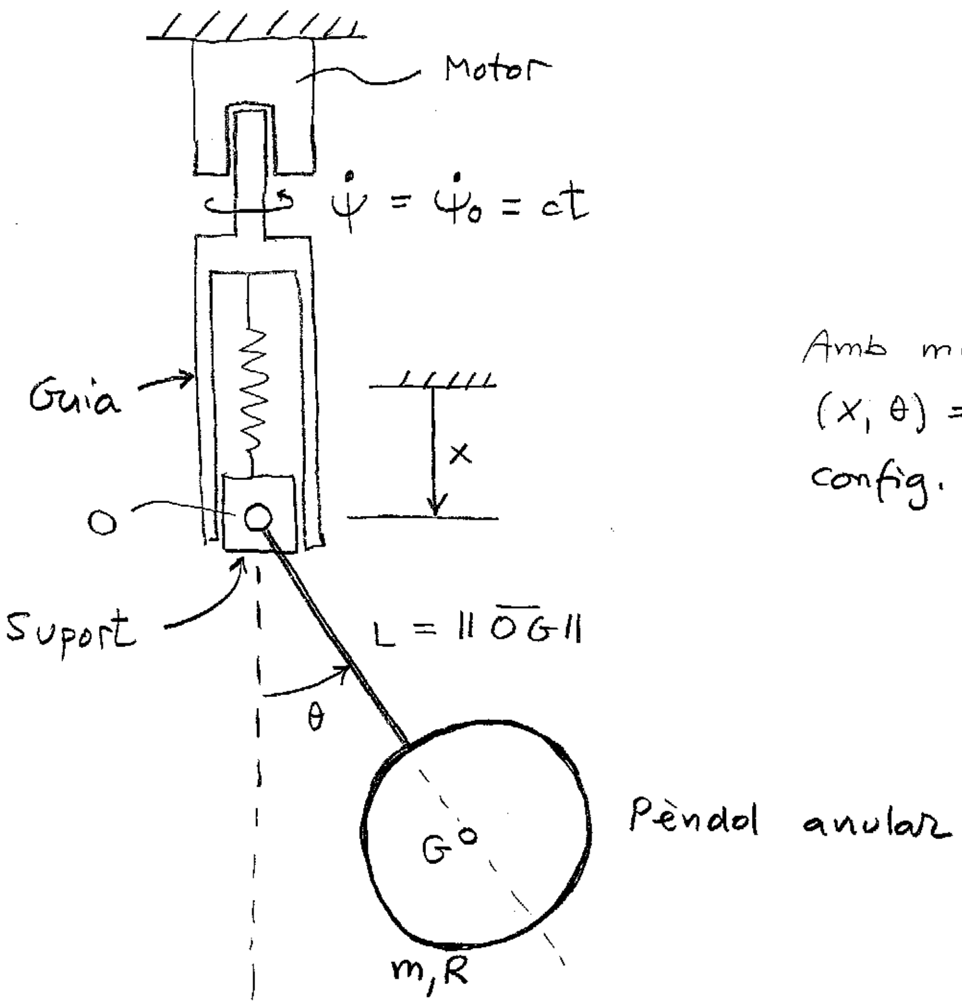
Nota pels curiosos

M s'anomena la matriu de masses del sistema. Es demostra que, en general, aquesta matriu:

- només pot dependre de les coordenades de configuració del problema (x i θ en aquest cas)
- és sempre invertible (excepte en situacions molt especials).

A banda del que acabem de dir, el problema es pot abordar amb les tècniques que ja sabem fins ara (anàlisi de GL, DGI, full de ruta, aplicació de TQM/TMC).

Dibuix esquemàtic equivalent



Amb motor aturat $(x, \theta) = (0,0)$ és config. equilibri

GL sistema

Sist amb 3 GL $\begin{cases} \dot\psi, \text{ forçat } (\dot\psi = \dot\psi_0 = ct) \Rightarrow \Gamma \text{ és incògn.} \\ \dot x, \text{ lliure} \Rightarrow \ddot x \text{ és incògn.} \\ \dot\theta, \text{ lliure} \Rightarrow \ddot\theta \text{ és incògn.} \end{cases}$

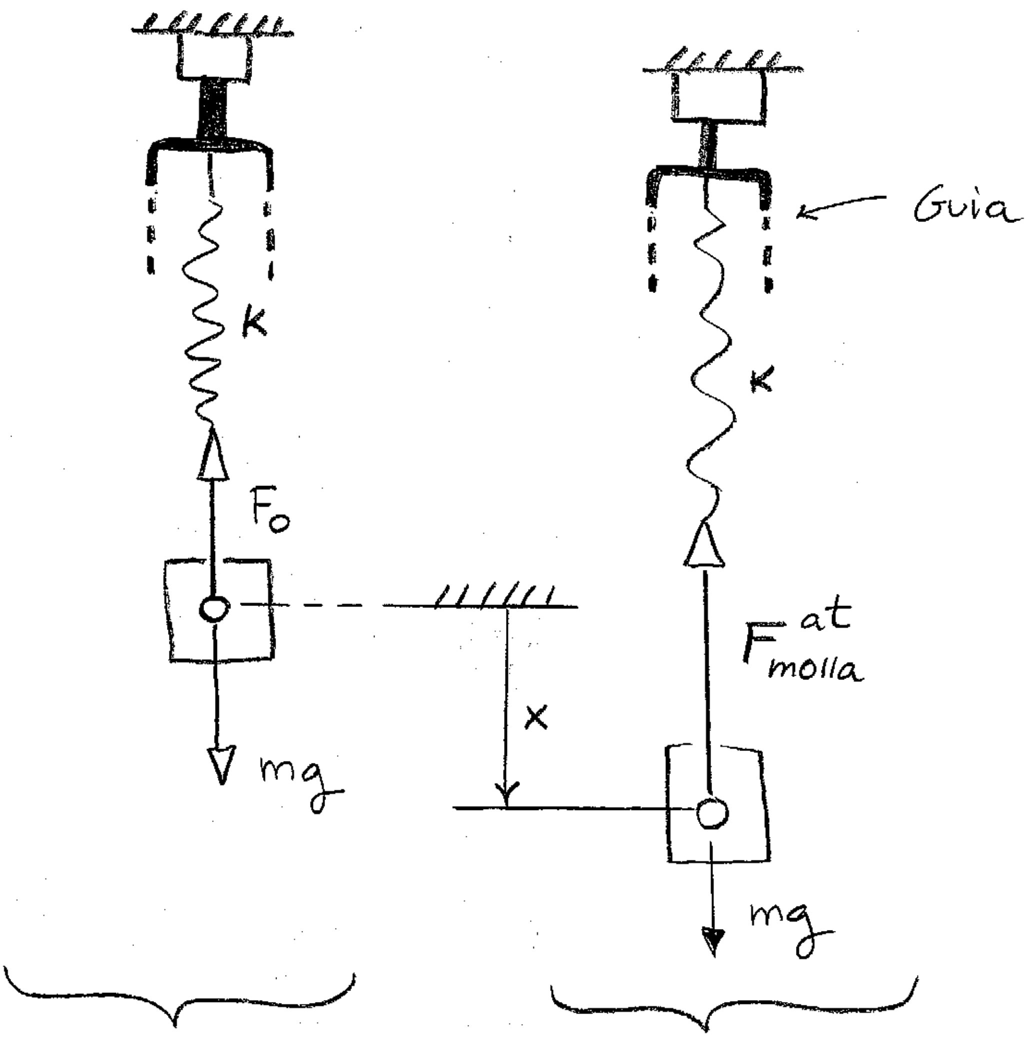
parell motor

$\Downarrow$

Les incògnites associades a GL són $\Gamma, \ddot x, \ddot\theta$

Força molla → suport

Com que la necessitarem, la formulem



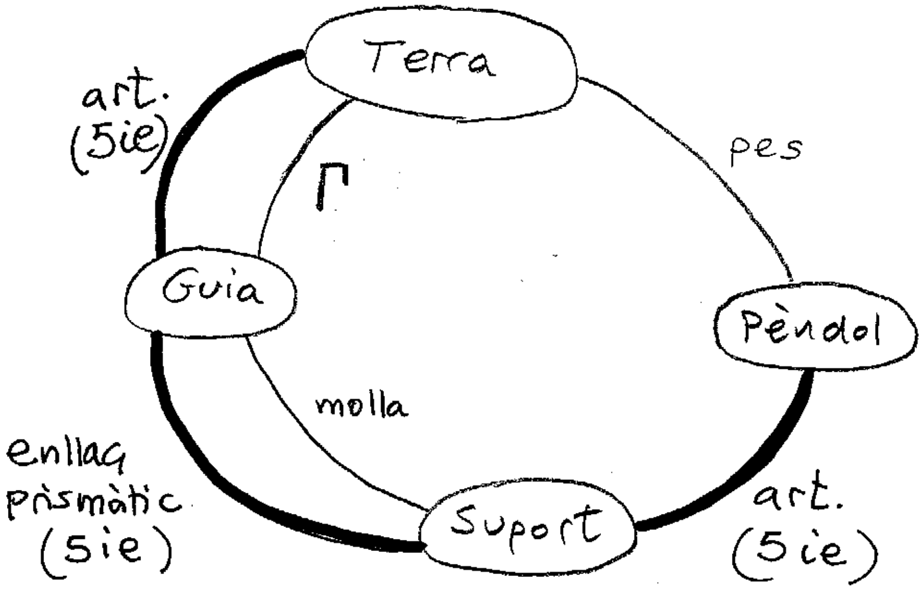
Config. equilibri
($F_0 = mg$)

Config. genèrica

$$\boxed{F^{at}_{molla} = F_0 + K\Delta\rho = mg + Kx}$$

DGI

Γ = parell motor



18 incògnites:

15 ie

Γ ($\dot{\psi}$ és forçat i sabem $\ddot{\psi} = 0$)

$\ddot{x}$ (GL lliure)

$\ddot{\theta}$ (GL lliure)

} assoc. a GL

18 eqs:

3 sòlids $\cdot \frac{6 \text{ eqs}}{\text{sòlid}}$

] Problema global DETERMINAT (*)

(*) Podrem determinar les 18 incògnites

Full ruta eqs. mov. coords x i θ

x i θ només afecten el movim. de $\left\{\begin{array}{l}\text{pèndol}\\ \text{suport}\end{array}\right.$

Mirem #incògn. sistemes q incloguin o pèndol o suport

sist	incògn	#incògn.	Problema
pèndol	5 ie, $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$	7	IND.
pènd + suport	5 ie, $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$	7	IND.
pènd + sup + guia	5 ie, $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$, Γ	8	IND.
suport	10 ie, $\ddot{x}$	11	IND.
sup + guia	10 ie, Γ, $\ddot{x}$	12	IND.
pend + guia	15 ie, Γ, $\ddot{\theta}$, $\ddot{x}$	18	IND.

Cap sistema surt DETERMINAT ☹ (*)

Explorem aplicació de TQM / TMC als dos sistemes amb menys incògn:

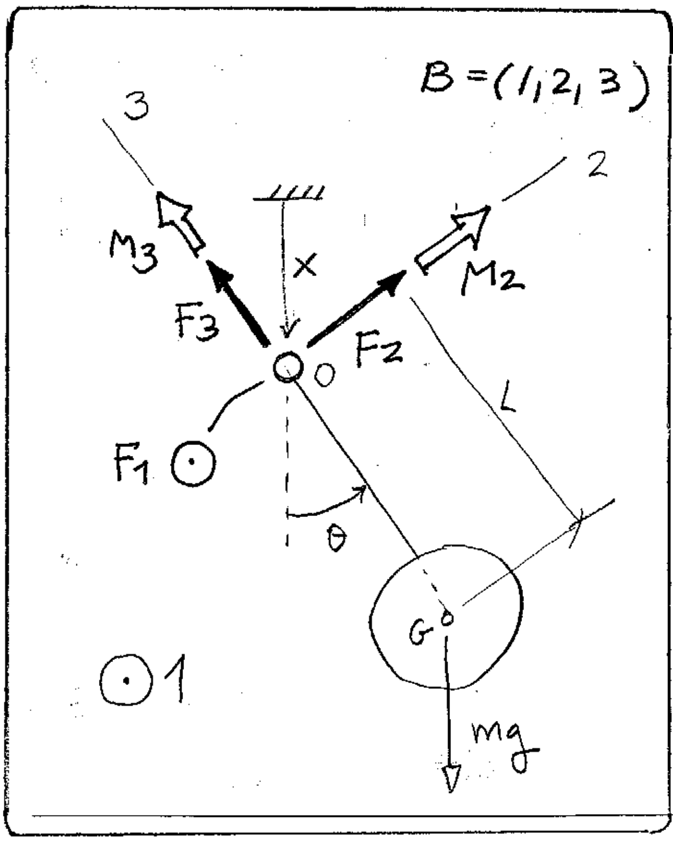
- Pèndol
- Pèndol + suport

← Encercleu-los al DGI per poder veure quines forces i moments els són externament aplicats (dibuixats a pàg. seg.)

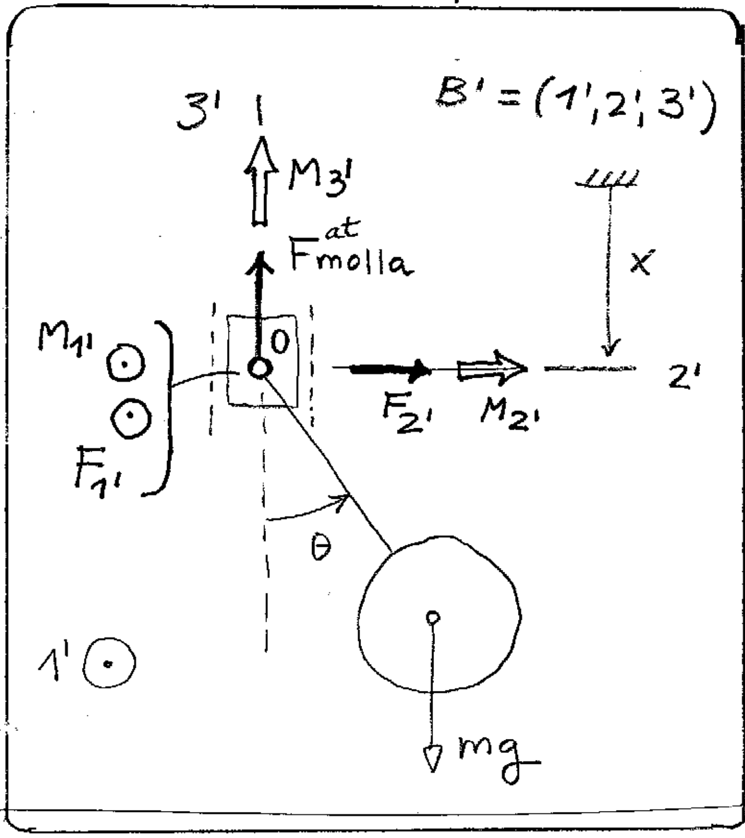
(*) Que no cunda el pánico!

Forces i moments externs sobre ambdós sistemes:

Pèndol (*)



Pèndol + Suport



Aquí $TMC(O)]_1$ està lliure d'ie!

Aquí, $TQM]_{3'}$ està lliure d'ie

Fulls ruta eqs. mov. x i θ

Sist = Pèndol, $TMC(O)]_1$
Sist = Pènd + Sup, $TQM]_{3'}$

(*) Triem la base indicada perquè és fixa al sòlid (i així $[\mathrm{II}(O)]_B$ serà constant) i alhora permet la caracterització immediata del torsor suport → pèndol a O.

TMC (O)]$_1$ sobre sist = pèndol

O té acceleració resp. T ⇒ ∃ terme complementari!

$$\sum \bar{M}_{ext}(O) \underbrace{- \overline{OG} \times m \bar{a}_T(O)}_{\text{terme complem.}} = \dot{\bar{H}}_{RTO}(O)$$

$$\left\{ \sum \bar{M}_{ext}(O) \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} -mgL\sin\theta \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix} \right\} \qquad \textbf{(I)}$$

$$\overline{OG} \times m \bar{a}_T(O) = (\searrow L) \times (\downarrow m\ddot{x}) =$$

$$= \left[(\downarrow L\cos\theta) + (\rightarrow L\sin\theta) \right] \times (\downarrow m\ddot{x}) =$$

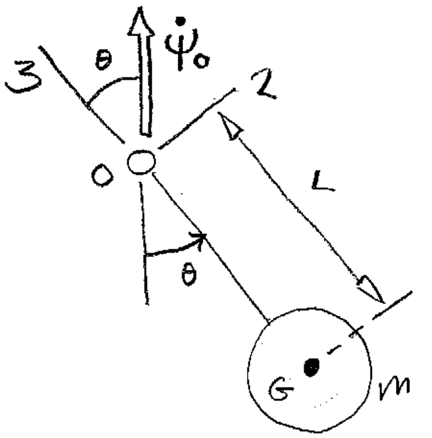
$$= (\otimes\, mL\ddot{x}\sin\theta) = \left\{ \begin{matrix} -mL\ddot{x}\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_B \qquad \textbf{(II)}$$

$$\bar{H}_{RTO}(O) \underset{\uparrow\ O\,\in\,\text{pèndol}}{=} \overbrace{\mathbb{I}(O)}^{\text{Del pèndol}} \cdot \underbrace{\bar{\Omega}^{\text{pèndol}}_{RTO}} = \mathbb{I}(O)\, \underbrace{\bar{\Omega}^{\text{pèndol}}_{T}}$$

O ∈ pèndol   iguals!

Calculem $\bar{H}_{RTO}(O)$ en la base B perquè en aquesta base, en ser fixa al pèndol, el tensor $\mathbb{I}(O)$ serà constant.

$$[\mathbb{II}(O)]_B = [\mathbb{II}(G) + \mathbb{II}^{\oplus}(O)] =$$



$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{\substack{2I = mR^2 \\ I = \frac{mR^2}{2}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} I' & & \\ & I' & \\ & & 0 \end{bmatrix}}_{I' = mL^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Amb} \begin{cases} I_{11} = 2I + I' = m(R^2 + L^2) \\ I_{22} = I + I' = m\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right) \\ I_{33} = I = \frac{mR^2}{2} \end{cases}$$

$$\left\{\overline{H}_{RTO}(O)\right\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot\theta \\ \dot\psi_0 \sin\theta \\ \dot\psi_0 \cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{11}\dot\theta \\ I_{22}\dot\psi_0 \sin\theta \\ I_{33}\dot\psi_0\cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\dot{\overline{H}}_{RTO}(O)\right\}_B = \begin{Bmatrix} I_{11}\ddot\theta \\ I_{22}\dot\psi_0\dot\theta\cos\theta \\ -I_{33}\dot\psi_0\dot\theta\sin\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot\theta \\ \dot\psi_0\sin\theta \\ \dot\psi_0\cos\theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{11}\dot\theta \\ I_{22}\dot\psi_0\sin\theta \\ I_{33}\dot\psi_0\cos\theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} I_{11}\ddot\theta + (I_{33} - I_{22})\dot\psi_0^2 \sin\theta\cos\theta \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \text{(III)}$$

Imposant $I - II = III$ en comp. 1 :

$$-\cancel{m}gL\sin\theta + \cancel{m}L\ddot{x}\sin\theta = \underbrace{I_{11}}_{\cancel{m}(R^2+L^2)}\ddot{\theta} + \underbrace{(I_{33}-I_{22})}_{-\cancel{m}L^2}\dot{\psi}_0^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\boxed{(R^2+L^2)\ddot{\theta} + \left(g - \ddot{x} - L\dot{\psi}_0^2\cos\theta\right)L\sin\theta = 0}$$ Versió Wikimec

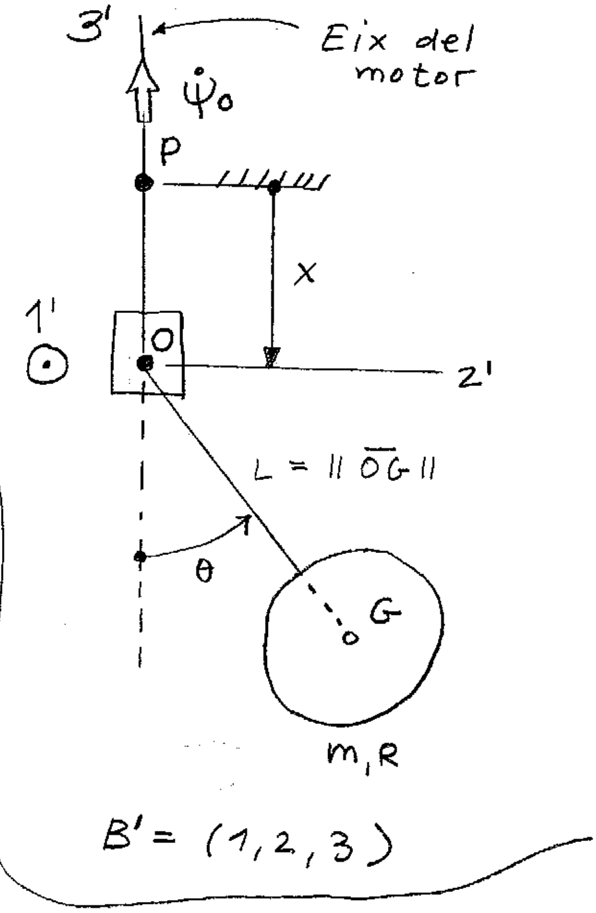
$$\boxed{(R^2+L^2)\ddot{\theta} - L\sin\theta\,\ddot{x} = \left(L\dot{\psi}_0^2\cos\theta - g\right)L\sin\theta} \quad \textbf{(IV)}$$

Versió que m'agrada més a mi perquè permet identificar la <u>matriu de masses</u>, concepte no l'hem explicat en aquest curs, i per tant "no entra" (vegeu pags. 0 i 0 bis d'aquest exercici).

Sist = pèndol + suport, $\left.\text{TQM}\right]_{3'}$

$$\sum \overline{F}_{ext} = m\,\overline{a}_T(G)$$

Podem calcular $\overline{a}_T(G)$ derivant dues vegades el vector de posició $\overline{PG}$ respecte el temps, on P és el punt de l'eix del motor que queda a l'altura de l'origen de la coordenada x.



$$\{\overline{PG}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L\sin\theta \\ -x - L\cos\theta \end{Bmatrix}$$

$\frac{d}{dt}$ tenint en compte que B' gira amb $(\Uparrow \dot{\psi}_0)$ resp. T

$$\{\overline{v}_T(G)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L\dot{\theta}\cos\theta \\ -\dot{x} + L\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ L\sin\theta \\ -x - L\cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L\dot{\psi}_0\sin\theta \\ L\dot{\theta}\cos\theta \\ -\dot{x} + L\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix}$$

d/dt

$$\{\overline{a}_T(G)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} -L\dot{\psi}_0\dot{\theta}\cos\theta \\ L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta \\ -\ddot{x} + L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -L\dot{\psi}_0\sin\theta \\ L\dot{\theta}\cos\theta \\ -\dot{x} + L\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -2L\dot{\psi}_0\dot{\theta}\cos\theta \\ L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta - L\dot{\psi}_0^2\sin\theta \\ \underbrace{-\ddot{x} + L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta}_{\text{Només ens caldrà aquesta component}} \end{Bmatrix} \quad \textbf{(V)}$$

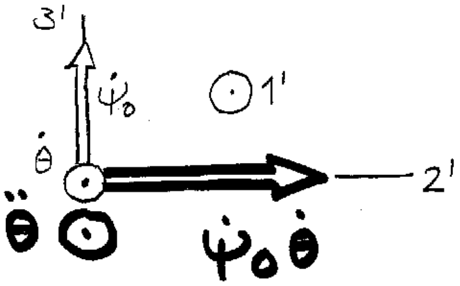
Via alternativa per calcular $\bar{a}_T(G)$

Com que $O \in$ Pèndol, podem aplicar cinemàtica del sòlid rígid d'acceleracions:

$$\bar{a}_T(G) = \bar{a}_T(O) + \bar{\Omega}_T^{\text{pènd}} \times \left(\bar{\Omega}_T^{\text{pènd}} \times \overline{OG}\right) + \bar{\alpha}_T^{\text{pènd}} \times \overline{OG}$$

$$\bar{\Omega}_T^{\text{pènd}} \overset{(*)}{=} (\Uparrow \dot{\psi}_0) + (\odot \dot{\theta}) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix}_{B'}$$

Derivant geomètricament



$$\bar{\alpha}_T^{\text{pènd}} = (\odot \ddot{\theta}) + (\Rightarrow \dot{\psi}_0 \dot{\theta}) = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\psi}_0 \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{B'}$$

$$\left\{\bar{a}_T(G)\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} \times \left(\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ L\sin\theta \\ -L\cos\theta \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\psi}_0 \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ L\sin\theta \\ -L\cos\theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \ldots = \begin{Bmatrix} -2L\dot{\psi}_0 \dot{\theta} \cos\theta \\ L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2 \sin\theta - L\dot{\psi}_0^2 \sin\theta \\ -\ddot{x} + L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta \end{Bmatrix}$$

(*) D'acord amb dibuix de pàg. anterior

veure dibuix pàg. 5, dreta

$$\left\{ \sum \overline{F}_{ext} \right\}_{B'} = \left\{ \begin{array}{c} F_{1'} \\ F_{2'} \\ \underbrace{\cancel{mg} + Kx}_{F^{at}_{molla}} - \cancel{mg} \end{array} \right\} \quad \textbf{(VI)}$$

Imposant (VI) = m (V) en dir. 3' obtenim

$$Kx = m\left(-\ddot{x} + L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x - L\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) = 0}$$ Versió Wikimec

$$\boxed{\ddot{x} - (L\sin\theta)\,\ddot{\theta} = -\frac{K}{m}x + L\dot{\theta}^2\cos\theta} \quad \textbf{(VII)}$$

Material extra que no entra en aquest curs (vegeu pàgs 0, 0bis)

(IV) i (VII) formen l'EDO vectorial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R^2 + L^2 & -L\sin\theta \\ -L\sin\theta & 1 \end{bmatrix}}_{M \leftarrow \text{Matriu de masses}} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (L\dot{\psi}_0^2\cos\theta - g)\,L\sin\theta \\ -\frac{K}{m}x + L\dot{\theta}^2\cos\theta \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}}$$

M és invertible perquè $\det(M) = R^2 + L^2 - L^2\sin^2\theta > 0$

Per tant, multiplicant per M^{-1} podem aillar $\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{M^{-1} \cdot \mathcal{F}}$$

Aquest terme depèn de les variables d'estat mecànic $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x})$

Així doncs, obtenim una EDO de 2n ordre amb dues variables, de la forma

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}) \qquad \textbf{(VIII)}$$

on

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} \qquad \left(q \text{ és una tupla de 2 variables} \right)$$

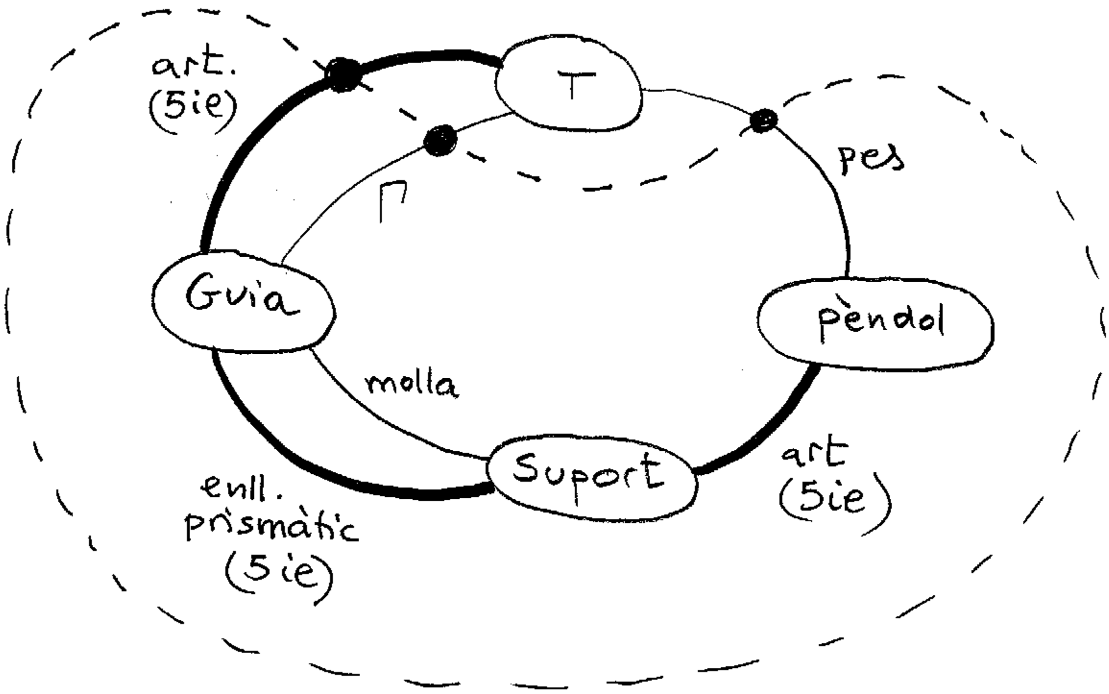
L'equació (VIII) és la que us permetria simular l'evolució del sistema aplicant, per exemple, el mètode d'Euler, o Runge-Kutta IV, a una reducció de l'eq. (VIII) a sistema de primer ordre.

Si algú en vol més detalls, pregunteu-m'ho!

Material extra que no entra

Parell motor per mantenir $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = ct$

El motor aplica un parell Γ a la guia $\Rightarrow$ per trobar Γ el sistema ha d'incloure la guia i Γ ha de ser una interacció externa. Mirant el DGI veiem que triant sist = guia + pènd. + sup surten 8 incògnites



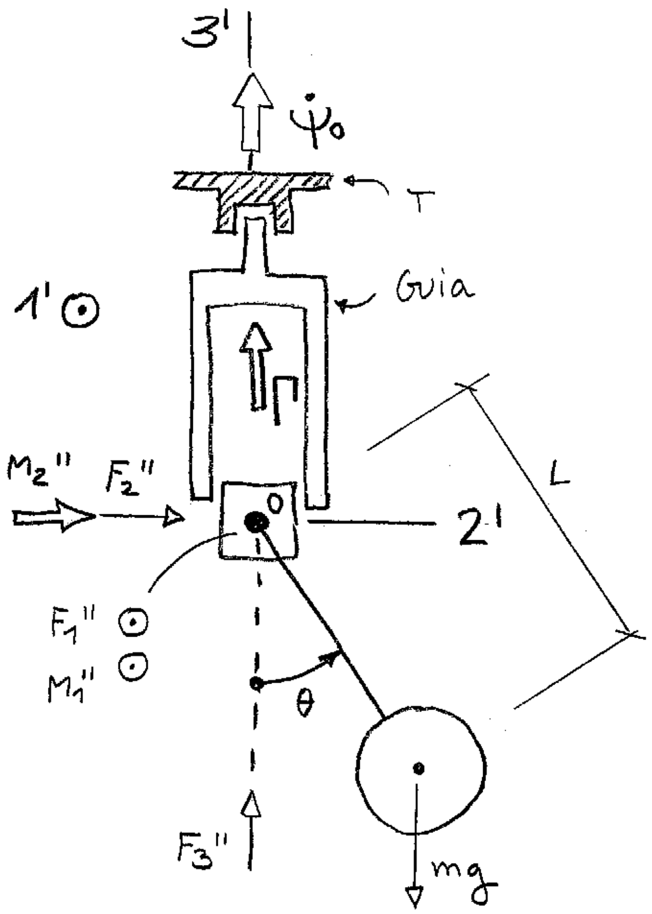
8 Incògnites: 5 ie, Γ, $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$

Ara bé: ja sabem $\ddot{x}$ i $\ddot{\theta}$ perquè ja tenim les eqs. del mov. per tant el sistema és ara <u>determinat</u> (triant altres sistemes això no passa).

Per tant, <u>triarem sistema = guia + sup + pènd.</u>

Forces d'interacció externes sobre sist = guia + sup + pènd

Són les marcades amb boles al DGI previ.



Torsor T → Guia a O:

$$\left\{\bar{F}_{T\to Guia}\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} F_1'' \\ F_2'' \\ F_3'' \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{T\to Guia}(O)\right\}_{B} = \begin{Bmatrix} M_1'' \\ M_2'' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Veiem que si prenem moments respecte O, en direcció vertical (dir. 3') només hi intervé el parell motor Γ.

$$\left\{\Sigma \bar{M}_{ext}(O)\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} M_1'' - mgL\sin\theta \\ M_2'' \\ \Gamma \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(IX)}$$

Per tant:

Full ruta per Γ	SIST = TOT (= guia + sup + pèndol) TMC (O)$\Big]_{vertical = 3'}$

TMC $(0)\Big]_{3'}$ per sist = TOT

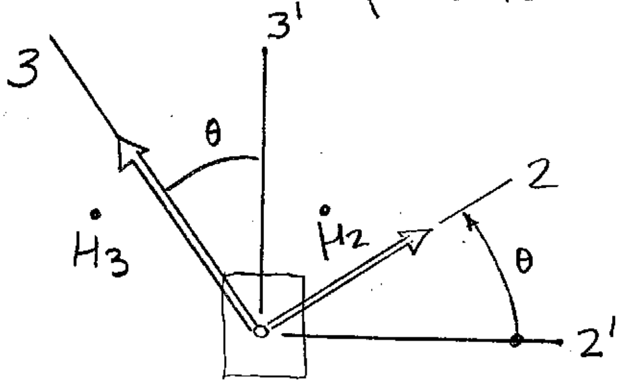
$$\sum \bar{M}_{ext}(0) - \bar{OG} \times m\, \bar{a}_T(0) = \dot{\bar{H}}_{RTO}(0)$$ ← Sols ens cal en les components en dir. 3'

$$\sum \bar{M}_{ext}(0)\Big]_{3'} \overset{\text{de l'eq. (IX)}}{=} \Gamma \qquad \textbf{(X)}$$

$$\bar{OG} \times m\, \bar{a}_T(0)\Big]_{3'} \overset{\text{de l'eq (II)}}{=} \bar{0} \qquad \textbf{(XI)}$$

Tenim $\dot{\bar{H}}_{RTO}(0)$ parcialment calculat a l'Eq. III, en base B. N'acabem el càlcul i n'extreiem la component en dir. 3':

$$\left\{\dot{\bar{H}}_{RTO}(0)\right\}_B = \begin{Bmatrix} I_{11}\ddot{\theta} + (I_{33} - I_{22})\dot{\psi}_0^2 \sin\theta\cos\theta \\ I_{22}\dot{\psi}_0\dot{\theta}\cos\theta + (I_{11} - I_{33})\dot{\psi}_0\dot{\theta}\cos\theta \\ -I_{33}\dot{\psi}_0\dot{\theta}\sin\theta + (I_{22} - I_{11})\dot{\psi}_0\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \end{Bmatrix}$$



$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(0)\Big]_{3'} = \dot{H}_2 \sin\theta + \dot{H}_3\cos\theta = \ldots$$

$$\ldots = 2\dot{\psi}_0\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\,\underbrace{(I_{22} - I_{33})}_{mL^2} =$$

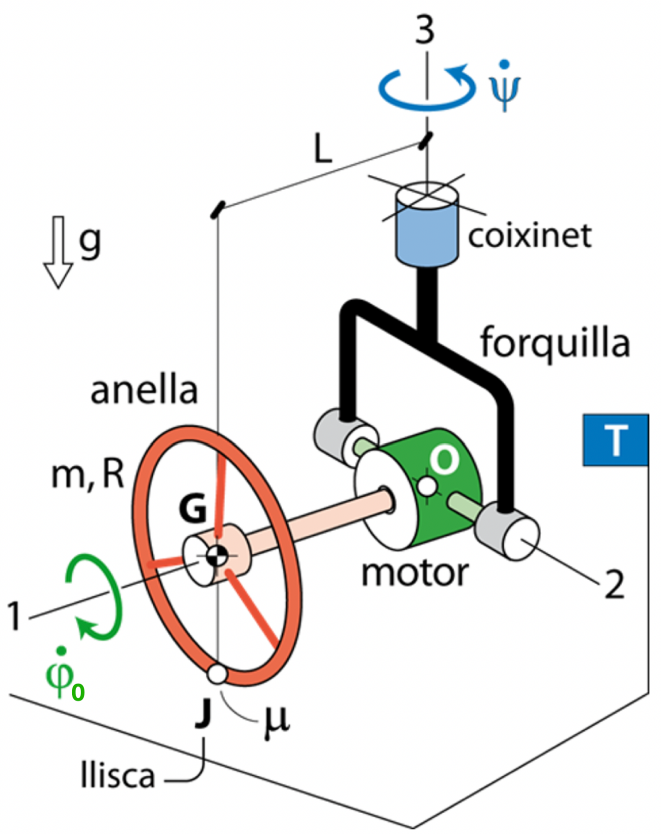
$$= 2mL^2\dot{\psi}_0\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \qquad \textbf{(XII)}$$

Finalment, fent (X) - (XI) = (XII) :

$$\boxed{\Gamma = 2mL^2 \dot{\psi}_0 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta}$$

Parell que ha d'aplicar el motor per mantenir $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ constant

Anella impulsada per motor articulat a forquilla



L'anella homogènia, de massa m i radi R, està articulada a un braç de llargària L, solidari al rotor d'un motor. L'estàtor del motor està articulat a una forquilla enllaçada amb el sostre (T) per mitjà d'un coixinet. La velocitat angular del rotor respecte de l'estàtor és Ω_0 (constant).

A **J**, l'anella manté un contacte puntual amb un terra rugós de coeficient μ (frec sec).

Tots els elements, tret de l'anella, tenen massa negligible.

Feu un diagrama general d'interaccions i trobeu:

- L'equació del moviment per a la coordenada ψ
- La força normal d'enllaç del terra sobre l'anella
- El parell motor Γ que cal per a mantenir $\dot{\varphi}_0$ constant

Per fer els càlculs assumiu que el contacte a **J** es manté, però esbrineu si eventualment es podria perdre partint de les condicions inicials $\psi(0) = \psi_0$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$.

Aquest exercici il·lustra

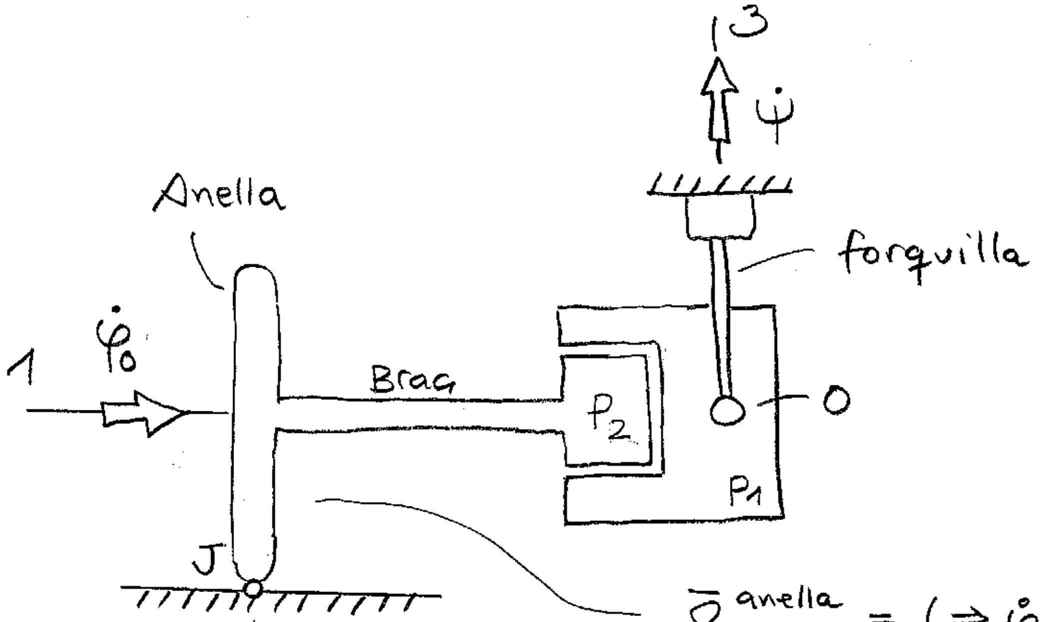
1. Com podem simplificar el DGI quan hi apareixen sòlids auxiliars d'enllaç

2. Que de vegades cal treballar amb les 3 components del TMC per obtenir l'equació del moviment desitjada, via resolució de les equacions que surten.

Anàlisi de GL

P_1 = estàtor
P_2 = rotor

Anella, braç i P2 formen un únic sòlid



$\bar\Omega^{\text{anella}}_{P1} = (\Rightarrow \dot\varphi_0)$

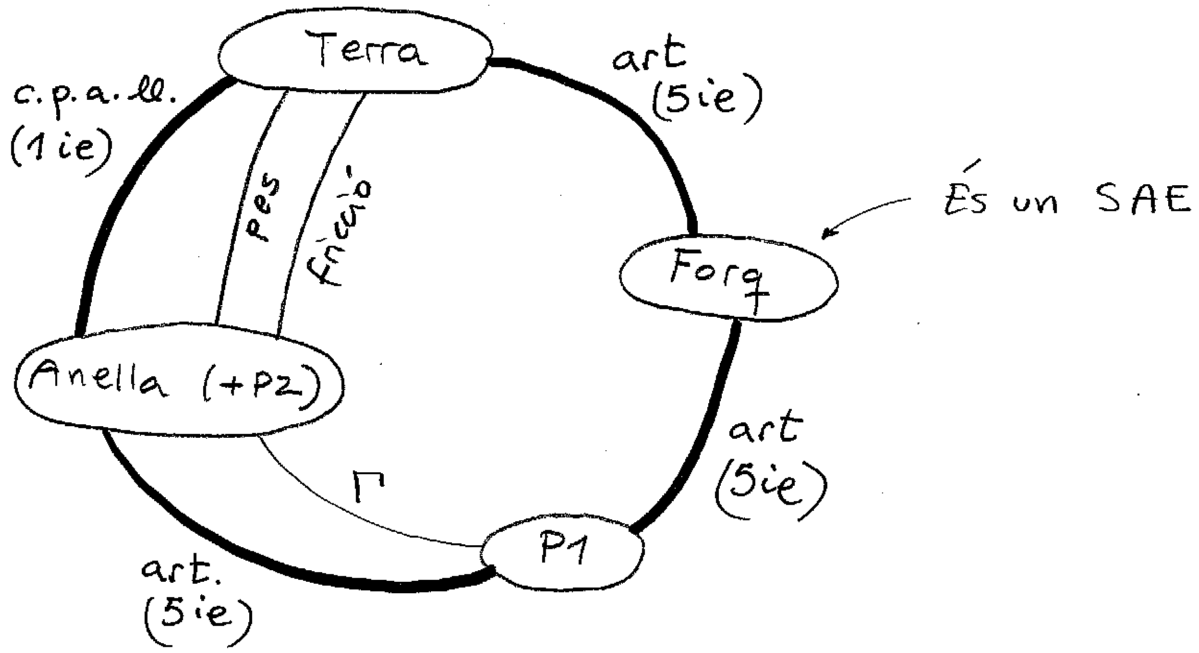
Llisca amb $\bar v_T(J) = [\otimes (R\dot\varphi_0 - L\dot\psi)]$ **(0)**

Clarament, a J hi ha lliscament, ja que el motor obliga l'anella a girar amb $(\Rightarrow \dot\varphi_0)$

Sistema amb 2 GL
- $\dot\psi$ (lliure) $\Rightarrow \ddot\psi$ és incògnita
- $\dot\varphi_0$ (forçat) $\Rightarrow \Gamma$ " " (parell motor)

$\ddot\psi$ i Γ són les dues incògnites associades als graus de llibertat del sistema

DGI i anàlisi del problema dinàmic global



18 incògnites : 16 ie, $\overbrace{\ddot{\psi}, \Gamma}^{\text{Associades a GL}}$

18 equacions : 3 sòlids · 6 $\frac{\text{eqs}}{\text{sòlid}}$

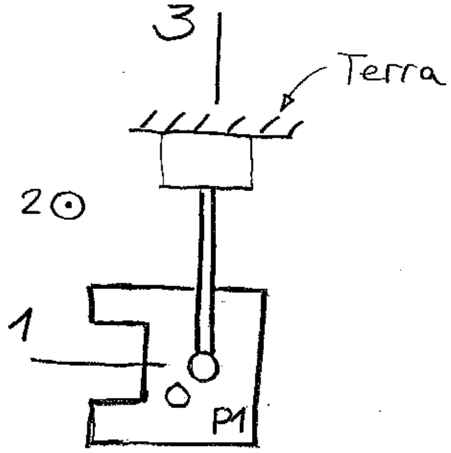
Problema <u>determinat</u>. Vol dir que formulant TQM i TMC sobre cada sòlid per separat, reunirem 18 equacions en 18 incògnites que, un cop resoltes, ens donaran els valors de $\ddot{\psi}, \Gamma$, i les 16 ie en funció de les variables d'estat $(\psi, \dot{\psi}, \dot{\varphi}_0)$

Caracterització de torsors d'enllaç

Del DGI veiem que la forquilla és un sòlid auxiliar d'enllaç (és de massa nul·la i només rep forces i moments d'enllaç) ⇒ Podem alleugerir el DGI substituint la forquilla pel torsor d'enllaç indirecte entre terra i P1, que és :

$$\left\{ \bar{F}_{T \to (forq) \to P1} \right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

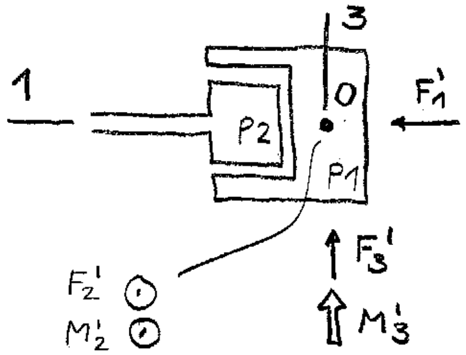
$$\left\{ \bar{M}_{T \to (forq) \to P_1}(0) \right\}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Fixem-nos que :

- P1 té 2 GL respecte T ⇒ El torsor de T sobre P1 ha de tenir 6 − 2 = 4 ie independents
- El punt O és de caracterització immediata
- $\bar{v}_T(P) = \bar{0}$ ⇒ Tenim $F_1, F_2, F_3 \neq 0$ en ppi
- La rotació de P1 resp T està permesa en direccions 2 i 3, però no en dir. 1 ⇒ tenim $\begin{Bmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ a la part de moments

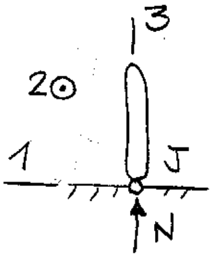
Torsor P1 → P2 a O



$$\left\{\bar{F}_{P1 \to P2}\right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{P1 \to P2}(O)\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2' \\ M_3' \end{Bmatrix}$$

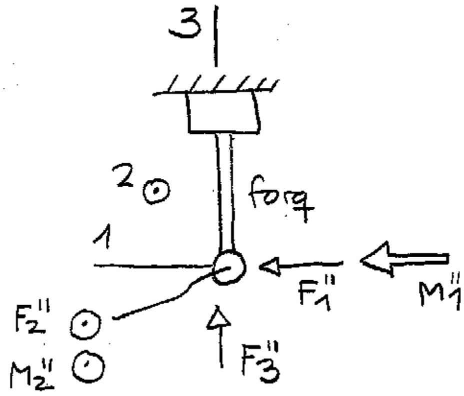
Torsor T → Anella a J



$$\left\{\bar{F}_{T \to Anella}\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{T \to Anella}(J)\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

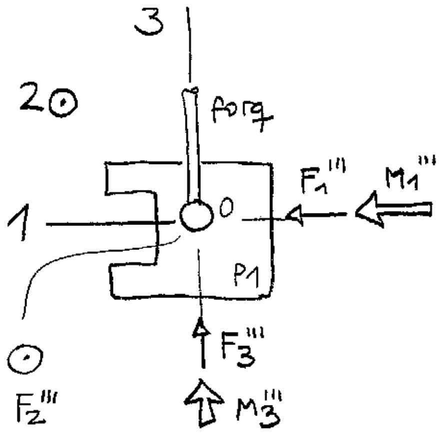
Torsor T → Forq a O



$$\left\{\bar{F}_{T \to forq}\right\}_B = \begin{Bmatrix} F_1'' \\ F_2'' \\ F_3'' \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{T \to forq}(O)\right\} = \begin{Bmatrix} M_1'' \\ M_2'' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Torsor Forq → P1 a O

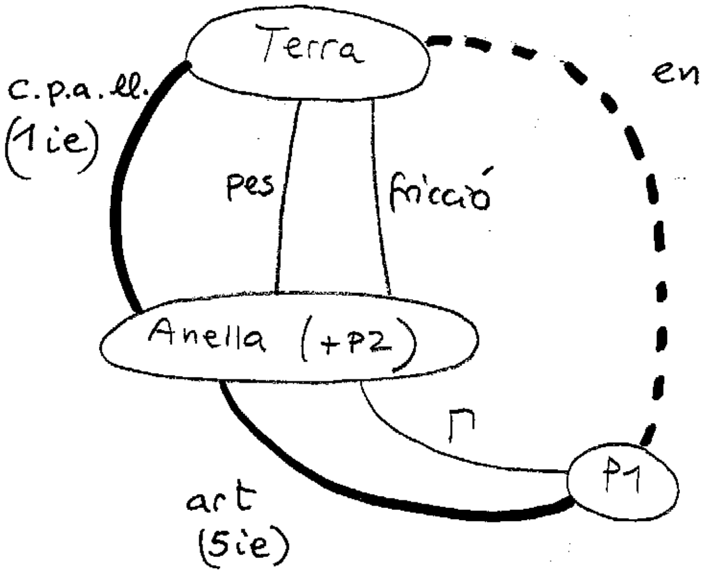


$$\left\{\bar{F}_{forq \to P1}\right\} = \begin{Bmatrix} F_1''' \\ F_2''' \\ F_3''' \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{Forq \to P1}(O)\right\} = \begin{Bmatrix} M_1''' \\ 0 \\ M_3''' \end{Bmatrix}$$

DGI alleugerit via l'enllaç indirecte Terra → P1

Substituint la forquilla per l'enllaç indirecte, queda:



Recompte global

12 incògn: 10 ie, Γ, $\ddot{\psi}$

12 eqs = $\underbrace{2 \text{ sòlids}}$ $\cdot$ $\frac{6 \text{ eqs}}{\text{sòlid}}$

- Anella + P2
- P1

Ara el problema dinàmic genera un sistema amb 12 eqs i 12 incògn. (6 menys que abans)

Equació del moviment per ψ i valor de N

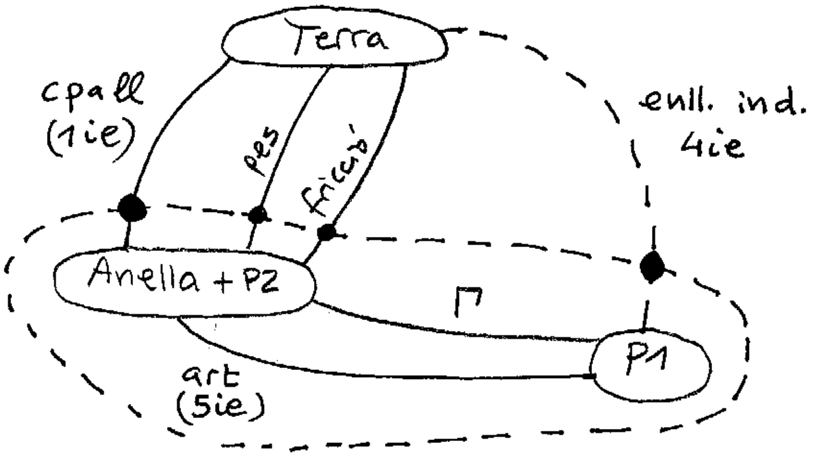
ψ afecta tant la cinemàtica de P1 com la de l'Anella + P2. Per tant, el sistema haurà d'incloure "P1", o "Anella", o ambdós. Tenim:

Sist	Incògn.	# incògn.	Problema
Anella	6 ie, Γ, $\ddot{\psi}$	8	INDET ×
P1	9 ie, Γ, $\ddot{\psi}$	11	INDET ×
Anella + P1	5 ie, $\ddot{\psi}$	6	DET ✓

Per tant, triarem SIST = Anella + P1

Forces i moments sobre sist = "Anella + P1"

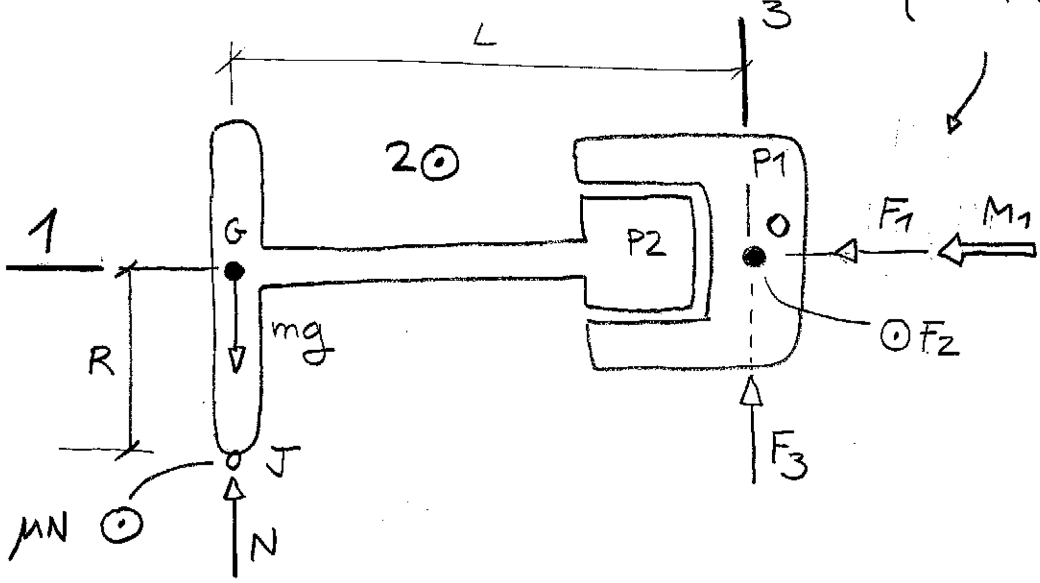
Examinem aquestes forces i moments ↑ per trobar un full de ruta per a l'eq. del mov. Encerclem el sistema al DGI per no descuidar-nos cap interacció externa:



Recordem

$$\left\{\bar{F}_{T\to(\text{forq})\to P1}\right\}_B = \begin{Bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{M}_{T\to(\text{forq})\to P1}(O)\right\}_B = \begin{Bmatrix}M_1\\0\\0\end{Bmatrix}$$



Veiem que:

$$\sum \bar{M}_{ext}(O) = \overbrace{(\bar{OG})\times(\downarrow mg)}^{\odot\, mgL} + \overbrace{(\bar{OJ})\times(\uparrow N)}^{\otimes\, NL} + \overbrace{\bar{OJ}\times(\odot\, \mu N)}^{(\Leftarrow \mu NR)+(\Uparrow \mu NL)} + (\Leftarrow M_1)$$

$$\left\{\sum \bar{M}_{ext}(O)\right\}_B = \begin{Bmatrix}\mu NR + M_1\\ mgL - NL\\ \mu NL\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(I)}$$

Si apliquem TMC a O evitem la intervenció de F_1, F_2, F_3 i sols apareixeran N i M_1 pel que fa a incogn. d'enllaç. Sortirà un sistema de 3 eqs i 3 incògn $(N, M_1, \ddot{\psi})$. En no haver-hi cap component de la $\sum \overline{M}_{ext}(O)$ que estigui lliure d'ie, caldrà treballar amb les 3 eqs. del TMC(O) en principi, i aïllar $\ddot{\psi}$. Veiem que també podrem trobar N, que també ens demanen.

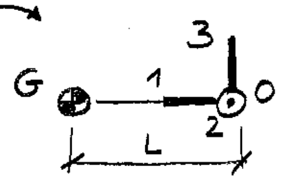
Full de ruta per a $\ddot{\psi}$ i N	Sist = Anella + P1 TMC (O) en les 3 components (aïllarem $\ddot{\psi}$ i N)

TMC (O)

$$\underbrace{\sum \overline{M}_{ext}(O)}_{\text{Ja la tenim d'abans}} - \cancel{\overline{OG} \times m \overbrace{\overline{a}_T(O)}^{\overline{0}}}^{\overline{0}} = \dot{\overline{H}}_{RTO}(O)$$

$$\overline{H}_{RTO}(O) = \underbrace{\mathbb{I}(O)}_{\text{Tensor d'inèrcia de l'anella}} \cdot \overline{\Omega}^{anella}_{RTO} = \overline{\Omega}^{anella}_{T}$$

- Només l'anella té massa
- O ∈ anella ⇒ podem utilitzar "tensor · òmega"



$$\left[\mathbb{I}(O)\right]_B = \left[\mathbb{I}(G)\right]_B + \overbrace{\left[\mathbb{I}^{\oplus}(O)\right]_B}^{\text{massa concentrada a } G\text{, respecte } O} =$$

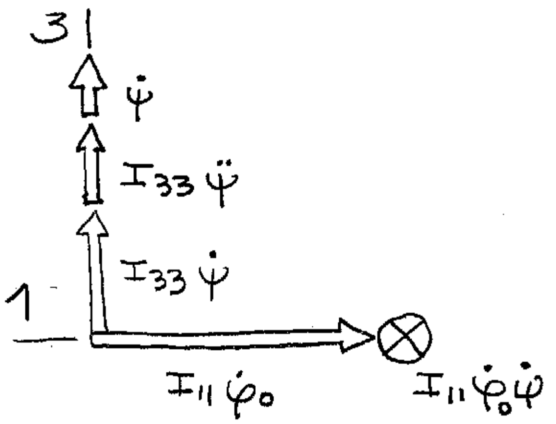
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{\substack{2I = mR^2 \\ \Downarrow \\ I = mR^2/2}} + \begin{bmatrix} 0 & & \\ & mL^2 & \\ & & mL^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix}}$$

$$I_{11} = mR^2$$
$$I_{22} = \frac{mR^2}{2} + mL^2 = \frac{m(R^2+L^2)}{2}$$
$$I_{33} = I_{22}$$

$$\left\{\bar{H}_{RTO}(O)\right\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}_0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_{11}\dot{\varphi}_0 \\ 0 \\ I_{33}\dot{\psi} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\dot{\bar{H}}_{RTO}(O)\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_{11}\dot{\varphi}_0\dot{\psi} \\ I_{33}\ddot{\psi} \end{Bmatrix}_B$$

deriv. geomètrica



Si ho fem analíticament, quadra:

$$\left\{\dot{\bar{H}}_{RTO}(O)\right\}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}\ddot{\psi} \end{Bmatrix}}_{\text{Derivada components}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}^B_T} \times \underbrace{\begin{Bmatrix} -I_{11}\dot{\varphi}_0 \\ 0 \\ I_{33}\dot{\psi} \end{Bmatrix}}_{\left\{\bar{H}_{RTO}(O)\right\}_B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_{11}\dot{\varphi}_0\dot{\psi} \\ I_{33}\ddot{\psi} \end{Bmatrix} \quad \textbf{(II)}$$

Igualant (I) = (II)

$$\left.\begin{aligned} &\mu N R + M_1 = 0 && (\mathrm{III}_1) \\ &mgL - NL = -I_{11}\dot{\varphi}_0 \dot{\psi} && (\mathrm{III}_2) \\ &\mu N L = I_{33}\ddot{\psi} && (\mathrm{III}_3) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III})$$

Aïllant N de (III_3):

$$N = \frac{I_{33}}{\mu L}\ddot{\psi} \qquad (\mathrm{IV})$$

Substituint-ho a (III_2):

$$mgL - \frac{I_{33}}{\mu}\ddot{\psi} = -I_{11}\dot{\varphi}_0\dot{\psi}$$

$$\frac{I_{33}}{\mu}\ddot{\psi} - I_{11}\dot{\varphi}_0\dot{\psi} - mgL = 0$$

$$I_{33}\ddot{\psi} - I_{11}\mu\dot{\varphi}_0\dot{\psi} - \mu mgL = 0$$

$$\frac{\cancel{m}(R^2+2L^2)}{2}\ddot{\psi} - \cancel{m}R^2\mu\dot{\varphi}_0\dot{\psi} - \mu\cancel{m}gL = 0$$

$$\boxed{(R^2+2L^2)\ddot{\psi} - 2\mu R^2\dot{\varphi}_0\dot{\psi} - 2\mu gL = 0} \qquad (\mathrm{V})$$

Eq. mov. per a ψ (forma implícita)

Aïllant $\ddot{\psi}$

$$\boxed{\ddot{\psi} = \frac{1}{R^2+2L^2}\left[2\mu R^2\dot{\varphi}_0\dot{\psi} + 2\mu Lg\right]} \qquad (\mathrm{VI})$$

Eq. mov. per a ψ (forma explícita)

Força normal N

Substituint (VI) a (IV)

$$N = \frac{m\,\cancel{(R^2+2L^2)}}{\cancel{2\mu}L}\;\frac{1}{\cancel{(R^2+2L^2)}}\left[\cancel{2\mu}R^2\dot{\varphi}_0\dot{\psi}+\cancel{2\mu}Lg\right]$$

$$\boxed{N = \frac{m}{L}\left[R^2\dot{\varphi}_0\dot{\psi}+Lg\right] = mg+\frac{mR^2}{L}\dot{\varphi}_0\dot{\psi}} \quad \textbf{(VII)}$$

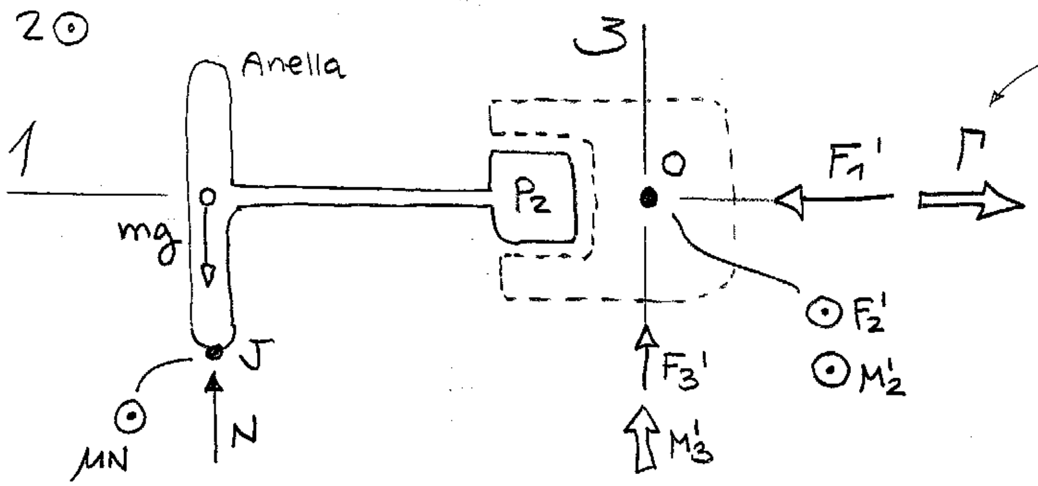
Es podria perdre el contacte a J ?

El sistema parteix de $\psi(0)=0$, $\dot{\psi}(0)=0$, $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$.
De l'eq. (VI) veiem que inicialment $\ddot{\psi}(0)=\frac{2\mu L g}{R^2+2L^2}>0$.
Per tant, $\dot{\psi}$ serà >0 un picosegon més tard. Tornant a mirar (VI) veiem que $\ddot{\psi}$ serà >0 $\forall t>0$ (ja que $\dot{\psi}>0$). És a dir, $\dot{\psi}$ no pararà de créixer a mida que el temps transcorri. De l'expressió de N a (VII) observem que, en ser $\dot{\psi}$ creixent, N també creixerà. En conclusió: el contacte a J mai es perdrà partint de les condicions inicials esmentades.

Parell motor que garanteix $\dot{\varphi}_0 = ct$

De la taula de la pàg. 5 veiem que pel sist = Anella (+P2) tenim 8 incògnites (6 ie, Γ, $\ddot{\varphi}$) però ara $\ddot{\varphi}$ i N són conegudes perquè ja les hem trobat (eqs VI i VII). Per tant, per aquest sistema tindrem un problema determinat ara.

forces i moments sobre sist = Anella (+ P2)



El defineixo com ($\Rightarrow \Gamma$) però podria també haver definit com $\Leftarrow \Gamma$

Si prenem moments resp. O veiem que en dir. 1 només apareix Γ i el moment de μN en dir 1. Per tant:

Full ruta per Γ	Sist = Anella (+P2) $TMC(O)]_1$

$TMC(O)\Big]_1$ per sist = Anella (+P2)

$$\sum \bar{M}_{ext}(O)\Big]_3 = \dot{\bar{H}}_{RTD}(O)\Big]_3$$

O és fix a T $\Rightarrow$ terme complem $= \bar{0}$

$$\sum \bar{M}_{ext}(O)\Big]_3 = (\Leftarrow \mu N R) + (\Rightarrow \Gamma)$$

$$\dot{\bar{H}}_{RTD}(O)\Big]_3 = \bar{0}$$

De l'eq. (II)

Per tant :

$$(\Leftarrow \mu N R) + (\Rightarrow \Gamma) = \bar{0}$$

$$\downarrow$$

$$\Gamma = \mu N R$$

$\downarrow$ Utilitzant N de (VII)

$$\Gamma = \mu R \underbrace{\left(\frac{mR^2}{L} \dot{\varphi}_0 \dot{\psi} + mg \right)}_{N}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Gamma = \mu m R \left(g + \frac{R^2}{L} \dot{\varphi}_0 \dot{\psi} \right)}$$