1P

Versió 0.9

Derivació analítica

(teoria i exercicis)

+

Derivació geomètrica

(exercicis)

+

Components intrínseques

(exercicis)

Lluís Ros

https://lluisros.github.io/mecanica

2025-26 Q2

RECOMANACIONS

Abans o després de cada sessió miraré de penjar un petit quadern com aquest, amb el contingut complet de la lliçó. Per a que us sigui útil, proposo que:

- **Abans de la sessió:** estudieu la teoria prèvia (fent-vos-en resums) i intenteu resoldre els exercicis que farem (com a mínim heu de venir a classe amb els enunciats i el moviment dels sistemes entesos).
- **Durant la sessió:** preneu apunts (ni que siguin breus) d'allò que explico a classe, així veureu què és més important i què no, i captareu matisos que potser no trobareu en aquestes notes.
- **Després de la sessió:** treballeu i refeu els exercicis entenent-ne els detalls (feu-vos la vostra versió resumida d'aquests quaderns).

Cal entendre **a fons** la **teoria** i els **exercicis** que fem a classe, i els del treball autònom. Només quan hagueu fet això estereu prou preparats per intentar resoldre exercicis d'exàmens anteriors.

És important dur l'assignatura al dia perquè en cada sessió anirem construint sobre els coneixements previ.

= Bloc de teoria (o recordatori)

Faré servir aquestes abreviacions:

https://lluisros.github.io/mecanica/abreviacions.pdf

Representació analítica d'un vector

Fins ara hem vist que, geomètricament, un vector es pot representar indicant-ne la direcció (i el sentit genèric positiu) mitjançant una fletxa, i el valor (positiu o negatiu). Alternativament, un vector es pot representar també de manera analítica mitjançant les seves components en tres direccions independents de l'espai. Els vectors unitaris (versors) d'aquestes direccions s'anomenen $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ i constitueixen una base vectorial. En aquesta base, el vector s'expressa com a combinació lineal d'aquests versors, i els coeficients són les components del vector en aquesta base:

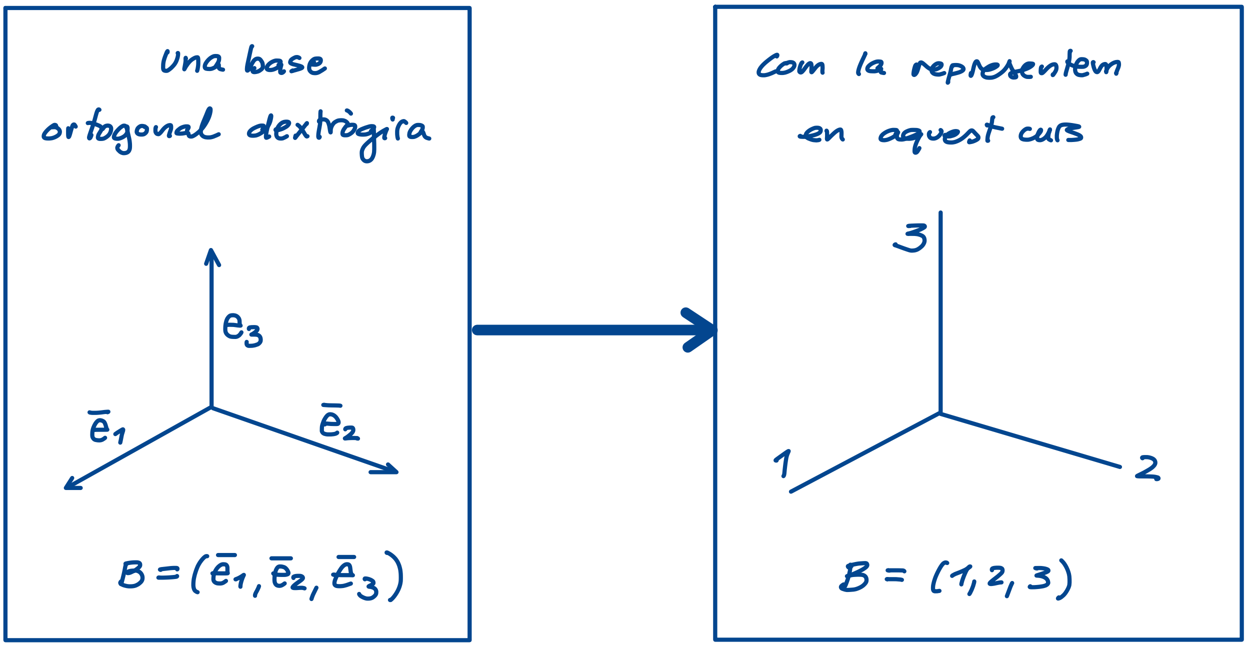
$$\bar{u} = u_1\,\bar{e}_1 + u_2\,\bar{e}_2 + u_3\,\bar{e}_3$$

En aquest curs només utilitzarem bases ortogonals dextrògires, és a dir, on $\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$.

producte vectorial

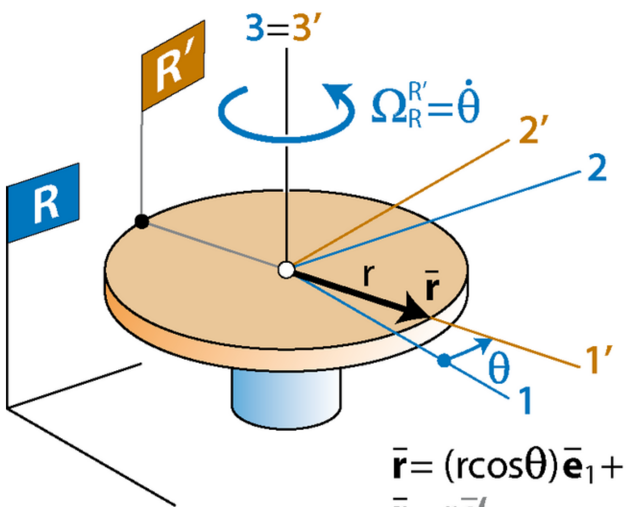
A l'hora de representar una base en un dibuix, sovint es col·loquen tres eixos que es tallen en un punt (vegeu figura següent). Aquest punt és irrellevant, i de cap manera es pot dir que és l'"origen de la base", ja que el concepte d'origen no és aplicable a les bases vectorials(*) (l'únic que defineix una base són les tres direccions que la componen).

(*) Sí que ho és al concepte de sistema de coordenades, que és diferent del concepte de base



Un mateix vector es pot projectar en dues bases, però això no en modifica ni el seu valor ni la seva direcció.

La figura següent mostra la projecció, en dues bases diferents, del vector $\bar{r}$ associat a un radi d'una plataforma amb rotació simple respecte de R. La base $B = (1,2,3)$ no canvia d'orientació respecte de R, mentre que la base $B' = (1', 2', 3')$ canvia d'orientació respecte de R, però no respecte de R' (que és la plataforma):



$B = (1, 2, 3)$

$B' = (1', 2', 3')$

$\bar{r} = (r\cos\theta)\bar{e}_1 + (r\sin\theta)\bar{e}_2$ ← En base B

$\bar{r} = r\bar{e}'_1$ ← En base B′

Una notació més compacta, i que preferentment farem servir, és la de posar les components en columna, ordenades segons l'ordre dels vectors de la base:

$$\{\bar{r}\}_{123} = \{\bar{r}\}_B = \begin{Bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{r}\}_{1'2'3'} = \{\bar{r}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si els versors $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ sempre tenen la mateixa direcció respecte d'una referència, es diu que la base és fixa a aquesta referència. En canvi, si la direcció dels versors canvia al llarg del temps, es diu que és una base mòbil.

Velocitat angular d'una base

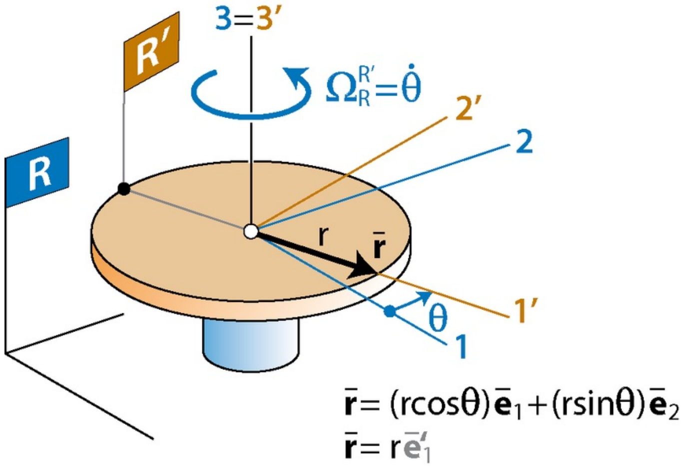
Tenint en compte que els tres versors d'una base B són permanentment ortogonals entre ells, si un d'ells canvia de direcció amb una certa velocitat angular, els altres dos també ho faran (amb la mateixa velocitat angular). Per tant, es pot parlar de l'orientació de B respecte de R, i del ritme de canvi d'aquesta orientació respecte de R (o velocitat angular de B respecte de R), $\bar{\Omega}^B_R$.

Vel. angular de B respecte de R $\longrightarrow$ $\bar{\Omega}^B_R$

Base considerada

Referència des d'on observem el ritme de canvi

En el cas de la plataforma giratòria anterior, per exemple, $B=(1,2,3)$ no canvia d'orientació respecte de R, però B' sí que ho fa, amb velocitat angular $\dot{\theta}$ al voltant de la direcció vertical:



Per tant, tenim:

$$\left\{\bar{\Omega}_R^B\right\}_B=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix} \qquad \left\{\bar{\Omega}_R^{B'}\right\}_B=\begin{Bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{Bmatrix}=\left\{\bar{\Omega}_R^{B'}\right\}_{B'}$$

Suma i producte de vectors amb representació analítica

Les operacions instantànies entre vectors es poden fer a través de les bases vectorials. En ser instantànies, el caràcter fix o mòbil de la base és irrellevant. El que és fonamental és que tots dos vectors estiguin projectats a la mateixa base.

Si tenim:

$$\{\bar{u}\}_B=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix},\ \{\bar{v}\}_B=\begin{Bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{Bmatrix}$$

Aleshores:

$$\{\overline{\mathrm{u}}\}_B + \{\overline{\mathrm{v}}\}_B = \begin{Bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{Bmatrix}$$

Suma

$$\{\overline{\mathbf{u}}\}_B \cdot \{\overline{\mathbf{v}}\}_B = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Producte escalar

$$\{\overline{\mathbf{u}}\}_B \times \{\overline{\mathbf{v}}\}_B = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{Bmatrix}$$

Producte vectorial

El següent vídeo proporciona una regla visual per a calcular el producte vectorial:

https://youtu.be/01iRe5eplCI?si=ihfHZ1Icf3XuptLh

Observació: Fins ara, molts de vosaltres feu això:

$$\{\overline{u}\}_B \times \{\overline{v}\}_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{Bmatrix}_B$$

que és totalment equivalent, però en aquest curs preferim fer el càlcul tal i com s'indica en el vídeo anterior, perquè és més ràpid i compacte.

Derivació temporal analítica

Considerem un vector $\bar{u}$ expressat en una certa base $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

$$\bar{u} = u_1\,\bar{e}_1 + u_2\,\bar{e}_2 + u_3\,\bar{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\,\bar{e}_i$$

Vegem com el podem derivar analíticament respecte del temps. [Aquest camí sol ser més ràpid que la derivada geomètrica quan el vector es mou de manera general.]

$$\left\{ \left.\frac{d\bar{u}}{dt}\right]_R \right\}_B = \sum_{i=1}^{3} \overbrace{\dot{u}_i\,\bar{e}_i + u_i \left.\frac{d\bar{e}_i}{dt}\right]_R}^{\text{Derivada dels productes } u_i\,\bar{e}_i} =$$

Per derivació geomètrica

$$\left.\frac{d\bar{e}_i}{dt}\right]_R = \bar{\Omega}_R^{\bar{e}_i} \times \bar{e}_i = \bar{\Omega}_R^{B} \times \bar{e}_i$$

En ser de valor constant 1, $\bar{e}_i$ sols canvia de direcció, i ho fa amb la velocitat angular que tingui la base: $\bar{\Omega}_R^{e_i} = \bar{\Omega}_R^{B}$

$$= \sum_{i=1}^{3} \dot{u}_i\,\bar{e}_i + u_i\left(\bar{\Omega}_R^{B} \times \bar{e}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \dot{u}_i\,\bar{e}_i + \bar{\Omega}_R^{B} \times \left(u_i\,\bar{e}_i\right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \dot{u}_i\,\bar{e}_i}_{\text{Derivada de les components}} + \underbrace{\bar{\Omega}_R^{B}}_{\text{Òmega de la base}} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{3} u_i\,\bar{e}_i}_{\text{Vector sense derivar}}$$

Acabem de demostrar la següent

Fórmula de derivació analítica

$$\left\{\left.\frac{d\bar{u}}{dt}\right]_R\right\}_B = \begin{Bmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\\ \dot{u}_3\end{Bmatrix} + \bar{\Omega}^B_R \times \bar{u}$$

- $\left\{\left.\frac{d\bar{u}}{dt}\right]_R\right\}_B$: Derivada temporal de $\bar{u}$ respecte la ref. R, en base B.
- $\begin{Bmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\\ \dot{u}_3\end{Bmatrix}$: Derivada de les components
- $\bar{\Omega}^B_R$: òmega de la base (resp. R)
- $\bar{u}$: Vector sense derivar

El vector $\begin{Bmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\\ \dot{u}_3\end{Bmatrix}$ sovint es denota per $\frac{d}{dt}\{\bar{u}\}_B$

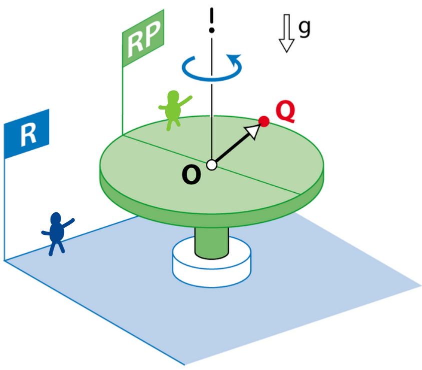
Pregunta freqüent: per què escrivim $\left.\bullet\right]_R$ quan derivem?

Resposta: perquè el ritme de canvi (la derivada) de $\bar{u}$ respecte del temps depèn de la referència en la que estem observant $\bar{u}$.

Exemple: Si Q és un punt fix a la ref. plataforma (RP), clarament tenim:

$$\left.\frac{d\,\overline{OQ}}{dt}\right]_{RP} = \bar{0}$$

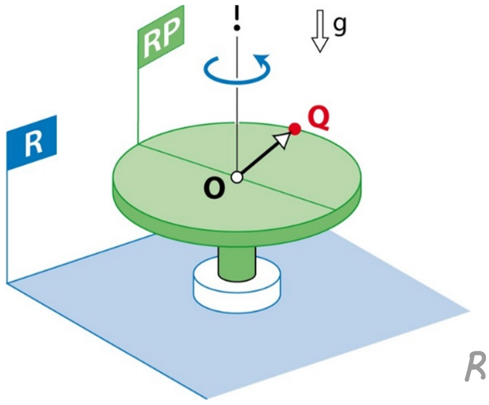
$$\left.\frac{d\,\overline{OQ}}{dt}\right]_{R} \neq \bar{0}$$



L'observador verd veu que $\overline{OQ}$ no canvia.

L'observador blau veu que $\overline{OQ}$ gira amb la mateixa vel. angular que la plataforma.

Anem a practicar la derivació analítica sobre exemples.



La plataforma (RP) gira respecte del terra (R).
Mitjançant la derivada analítica, calcula:

$\bar{v}_R(\mathbf{Q}),\ \bar{a}_R(\mathbf{Q}),\ \bar{\alpha}_R^{RP}$.

RP = "referència plataforma"

$\bar{v}_R(Q)$ i $\bar{a}_R(Q)$

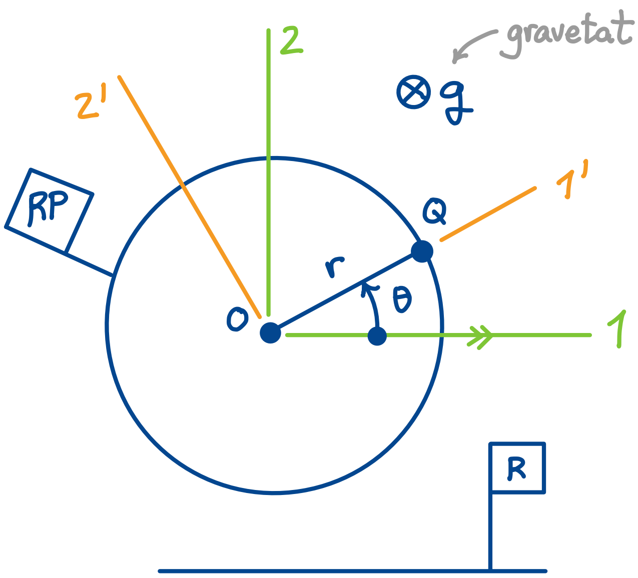
Per trobar-les, derivarem un vector de posició de Q a la referència R. Un d'adient és $\overline{OQ}$ ja que O és fix a R ($O \in R$). Cal triar alguna base per expressar $\overline{OQ}$. En aquest cas hi ha dues bases "naturals":

$\underbrace{B = (1,2,3)}$

D'orientació fixa resp. T

$\underbrace{B' = (1',2',3')}$

D'orientació fixa resp. RP
(gira amb $\odot\dot{\theta}$ resp. R)



Fem-ho en cadascuna:

En base B

$$\left\{\overline{OQ}\right\}_B = \begin{Bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\downarrow d/dt$

$\bar{\Omega}_R^B = 0 \Longrightarrow$ Només cal la deriv. de les comp.

$$\left\{\bar{v}_R(Q)\right\}_B = \left\{\left[\frac{d\overline{OQ}}{dt}\right]_R\right\}_B = \begin{Bmatrix} \text{deriv.} \\ \text{de les} \\ \text{comp.} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \text{omega} \\ \text{de B} \\ \text{resp. R} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \text{vec.} \\ \text{sense} \\ \text{derivar} \end{Bmatrix}}_{=0} = \begin{Bmatrix} -r\dot{\theta}\sin\theta \\ r\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\Big\downarrow \, d/dt$$

$$\left\{\bar{a}_R(Q)\right\}_B = \left\{\left[\frac{d\bar{v}_R(Q)}{dt}\right]_R\right\}_B = \begin{Bmatrix} -r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \\ r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(II)}$$

En base B'

$$\left\{\overline{OQ}\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ara NO ÉS ZERO!

$$\bar{\Omega}_R^{B'} = (\odot\, \dot{\theta})$$

$$\Big\downarrow \, d/dt$$

$$\left\{\bar{v}_R(Q)\right\}_{B'} = \left\{\left[\frac{d\overline{OQ}}{dt}\right]_R\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(III)}$$

$$\Big\downarrow \, d/dt$$

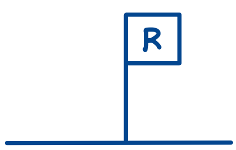
$$\left\{\bar{a}_R(Q)\right\}_{B'} = \left\{\left[\frac{d\bar{v}_R(Q)}{dt}\right]_R\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(IV)}$$

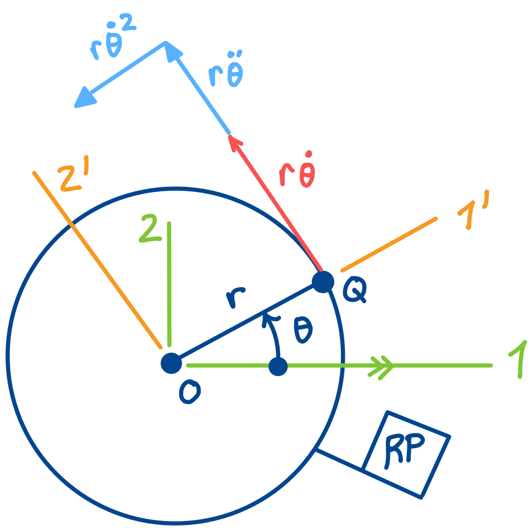
Aquests resultats quadren amb els obtinguts per derivada geomètrica de $\overline{OQ}$ sobre el dibuix:

$$\bar{v}_R(Q) = (\nwarrow r\dot{\theta})$$

$$\bar{a}_R(Q) = (\nwarrow r\ddot{\theta}) + (\swarrow r\dot{\theta}^2)$$

Projectades sobre B i B' donen els resultats previs





Fixem-nos que:

- (I) i (III) són el vector $(\nwarrow r\dot{\theta})$ expressat en B i B'.
- (II) i (IV) són el vector $(\nwarrow r\ddot{\theta}) + (\swarrow r\dot{\theta}^2)$, també expressat en B i B'.
- Una base només és un llenguatge per expressar un vector.

$\bar{\alpha}^{RP}_{R}$ = accel. angular de RP resp R

És la derivada temporal de $\bar{\Omega}^{RP}_{R}$

En totes dues bases, $\bar{\Omega}^{RP}_{R}$ és la mateixa en aquest cas:

$$\left\{\bar{\Omega}^{RP}_{R}\right\}_{B} = \left\{\bar{\Omega}^{RP}_{R}\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \leftarrow \text{És } (\odot\dot{\theta})$$

Derivem-la en base B:

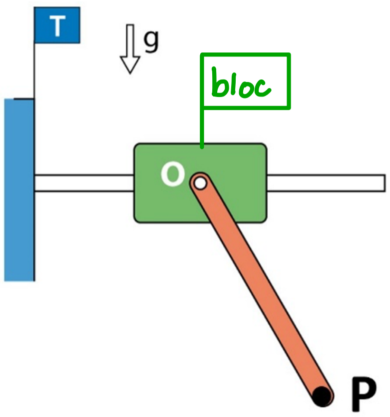
$$\left\{\bar{\alpha}^{RP}_{R}\right\}_{B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \cancelto{0}{\bar{\Omega}^{B}_{R}} \times \bar{\Omega}^{RP}_{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \leftarrow \text{És } (\odot\ddot{\theta})$$

Ara en base B':

$\bar{0}$ (són paral·lels)

$$\left\{\bar{\alpha}^{RP}_{R}\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \underbrace{\cancel{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}}_{\bar{\Omega}^{B'}_{R}} \times \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}^{RP}_{R}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \leftarrow \text{És } (\odot\ddot{\theta})$$

En ambdues bases surt el mateix resultat, com era d'esperar, ja que $\odot\dot{\theta}$ només té canvi de valor, que és $(\odot\ddot{\theta})$.

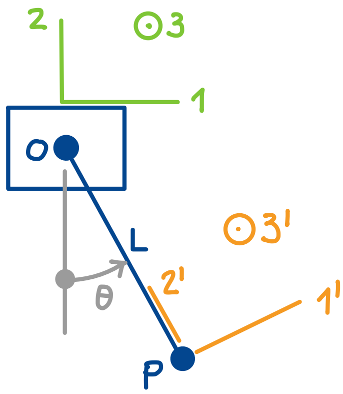


El bloc es pot moure al llarg de la guia fixa a terra (T). La barra està articulada al bloc. Mitjançant la derivada analítica, calcula

$$\bar{v}_{bloc}(\mathbf{P}),\ \bar{a}_{bloc}(\mathbf{P}),\ \bar{v}_{T}(\mathbf{P}),\ \bar{a}_{T}(\mathbf{P}),\ \bar{\alpha}_{T}^{barra}.$$

Dues bases "naturals":

- $\underbrace{B = (1, 2, 3)}_{}$ d'orientació fixa al bloc
- $\underbrace{B' = (1', 2', 3')}_{}$ d'orientació fixa a la barra



$\bar{v}_{bloc}(P)$ i $\bar{a}_{bloc}(P)$

En base B

$$\{\overline{OP}\}_B = \begin{Bmatrix} L\sin\theta \\ -L\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \{\bar{v}_{bloc}(P)\}_B = \begin{Bmatrix} L\dot{\theta}\cos\theta \\ L\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \bar{\Omega}^{B}_{bloc} = \bar{0}$$

Introduim coord. θ que orienta la barra resp. el bloc

$$\downarrow \frac{d}{dt} \qquad \bar{\Omega}^{B}_{bloc} = \bar{0}$$

$$\{\bar{a}_{bloc}(P)\}_B = \begin{Bmatrix} L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta \\ L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En base B'

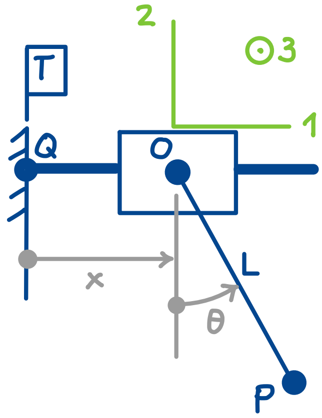
$$\{\overline{OP}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \{\bar{v}_{bloc}(P)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \overbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}^{\bar{\Omega}^{B'}_{bloc}} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\downarrow d/dt$$

$$\{\bar{a}_{bloc}(P)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} L\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \overbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}^{\bar{\Omega}^{B'}_{bloc}} \times \begin{Bmatrix} L\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L\ddot{\theta} \\ L\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\bar{v}_T(P)$ i $\bar{a}_T(P)$

En base B



Introduïm coord. x per posicionar O resp. la guia

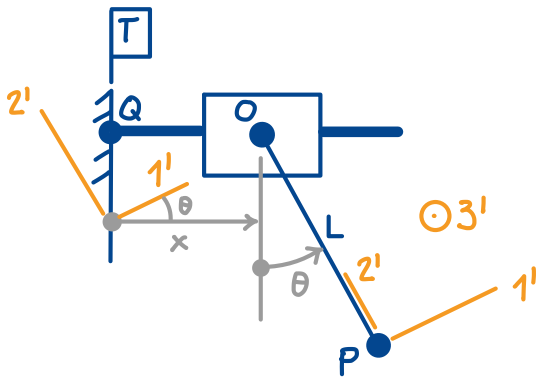
$$\{\overline{QP}\}_B = \{\overline{QO}\}_B + \{\overline{OP}\}_B =$$

$$= \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} L\sin\theta \\ -L\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x + L\sin\theta \\ -L\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Només cal derivar les comp. de $\overline{QP}$ pq $\bar{\Omega}^B_T = 0$:

$$\{\bar{v}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta \\ L\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{\bar{a}_T(P)\}_B = \begin{Bmatrix} \ddot{x} + L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta \\ L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En base B'



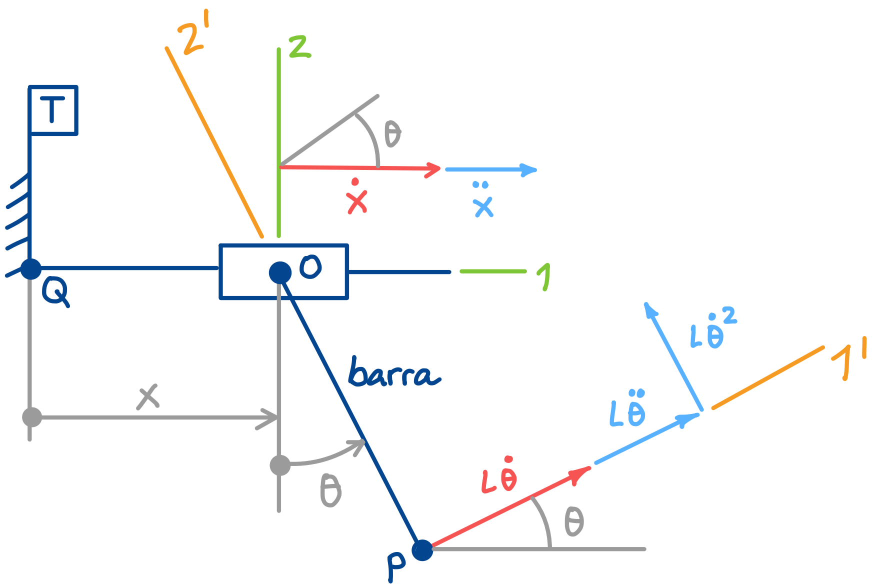
$$\{\overline{QP}\}_{B'} = \{\overline{QO}\}_{B'} + \{\overline{OP}\}_{B'} =$$

$$= \begin{Bmatrix} x\cos\theta \\ -x\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x\cos\theta \\ -L - x\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{v}_T(P)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\sin\theta \\ -\dot{x}\sin\theta - x\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x\cos\theta \\ -L - x\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} \dot{\theta}L + x\dot{\theta}\sin\theta \\ x\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta + L\dot{\theta} \\ -\dot{x}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{a}_T(P)\right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + L\ddot{\theta} \\ -\ddot{x}\sin\theta - \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{x}\cos\theta + L\dot{\theta} \\ -\dot{x}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + L\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}\cos\theta + L\ddot{\theta} \\ -\ddot{x}\sin\theta + L\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Podem comprovar que els anteriors resultats quadren amb els vectors $\bar{v}_T(P)$ i $\bar{a}_T(P)$ obtinguts geomètricament:



$$\bar{v}_T(P) = (\rightarrow \dot{x}) + (\nearrow L\dot{\theta})$$

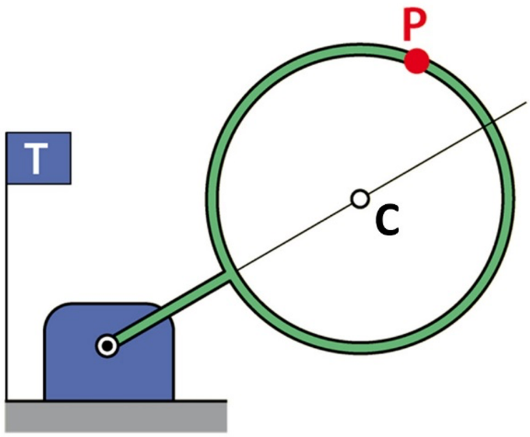
$$\bar{a}_T(P) = (\rightarrow \ddot{x}) + (\nearrow L\ddot{\theta}) + (\nwarrow L\dot{\theta}^2)$$

$\bar{\alpha}_T^{\text{barra}}$

$$\left\{\bar{\Omega}_T^{\text{barra}}\right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{\alpha}_T^{\text{barra}}\right\}_B = \left\{ \left[\frac{d\bar{\Omega}_T^{\text{barra}}}{dt}\right]_T \right\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

En B' surt igual



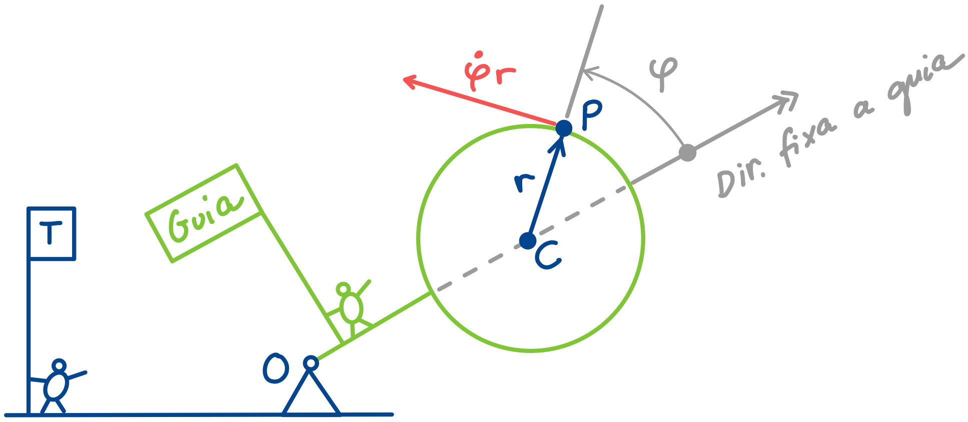
La guia circular està articulada al terra (T). La partícula **P** es mou dins la guia. Mitjançant la derivada geomètrica, calcula

$\bar{v}_{guia}(\mathbf{P}),\ \bar{v}_T(\mathbf{P}),\ \bar{\alpha}_T^{guia},\ \bar{\alpha}_T^{\overline{CP}}$.

$\bar{v}_{Guia}(P)$

(Suposarem: $r = |\overline{CP}|$, $R = |\overline{OC}|$)

Derivem el vec. pos. $\overline{CP}$ (*):



$$\boxed{\bar{v}_{Guia}(P) = \left[\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_{Guia}} = \overbrace{\begin{bmatrix}\text{canvi}\\ \text{valor}\end{bmatrix}}^{0} + \overbrace{\begin{bmatrix}\text{canvi}\\ \text{dir.}\end{bmatrix}}^{\bar{\Omega}^{\overline{CP}}_{Guia} \times \overline{CP}} =$$

$$= \boxed{(\circlearrowleft \dot{\varphi}) \times (\nearrow r) = (\nwarrow \dot{\varphi} r)} \quad \text{(I)} \quad (**)$$

Compareu-la amb la de l'Eq. (I) de l'ex. seg. (són iguals!)

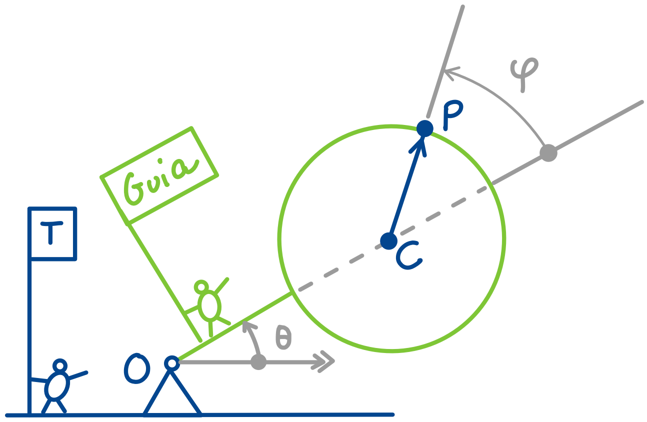
(*) $\overline{CP}$ és un vec. pos. vàlid per estudiar el moviment de P resp. la guia perquè C és fix a la guia.

(**) Les direccions indicades a (I) són aproximades: cal haver fet el dibuix de dalt per deixar-les clares de manera precisa.

$\bar{\alpha}_T^{\,Guia}$ ← Accel. angular de la guia resp. T

Clarament :

$$\bar{\Omega}_T^{\,Guia} = \left(\odot\ \dot{\theta}\right)$$



Per tant :

$$\bar{\alpha}_T^{\,Guia} = \left.\frac{d\bar{\Omega}_T^{\,Guia}}{dt}\right]_T =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}\text{canvi}\\ \text{valor}\end{bmatrix}}_{\odot\ \ddot{\theta}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\text{canvi}\\ \text{dir.}\end{bmatrix}}_{= 0} = \left(\odot\ \ddot{\theta}\right)$$

perquè $\bar{\Omega}_T^{\,Guia}$ sempre té dir. $\odot$

$\bar{\alpha}_T^{\,\overline{CP}}$

$$\bar{\Omega}_T^{\,\overline{CP}} = \bar{\Omega}_{Guia}^{\,\overline{CP}} + \bar{\Omega}_T^{\,Guia} =$$

$$= \left(\odot\ \dot{\varphi}\right) + \left(\odot\ \dot{\theta}\right) = \left[\odot\left(\dot{\varphi}+\dot{\theta}\right)\right]$$

v. dibuix anterior

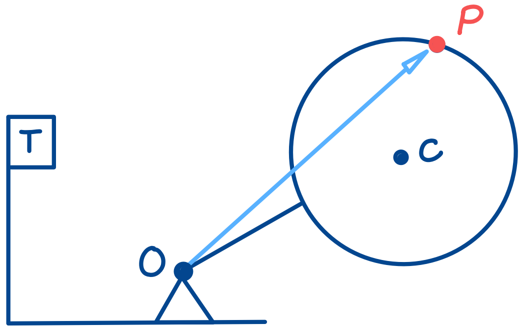
$$\bar{\alpha}_T^{\,\overline{CP}} = \left.\frac{d\bar{\Omega}_T^{\,\overline{CP}}}{dt}\right]_T = \begin{bmatrix}\text{canvi}\\ \text{valor}\end{bmatrix} + \underbrace{\cancel{\begin{bmatrix}\text{canvi}\\ \text{direcció}\end{bmatrix}}}_{0} =$$

Ja que $\bar{\Omega}_T^{\,\overline{CP}}$ sempre té dir. $\odot$

$$= \left[\odot\left(\ddot{\varphi}+\ddot{\theta}\right)\right]$$

$\vec{v}_T(P)$

Un vec. de posició adient per a estudiar el moviment de P resp. T és $\overline{OP}$ (pq O és fix a T (*)):



Ara bé: $\overline{OP}$ costa de derivar directament, perquè canvia tant en valor com en direcció.

Però el podem descompondre així:

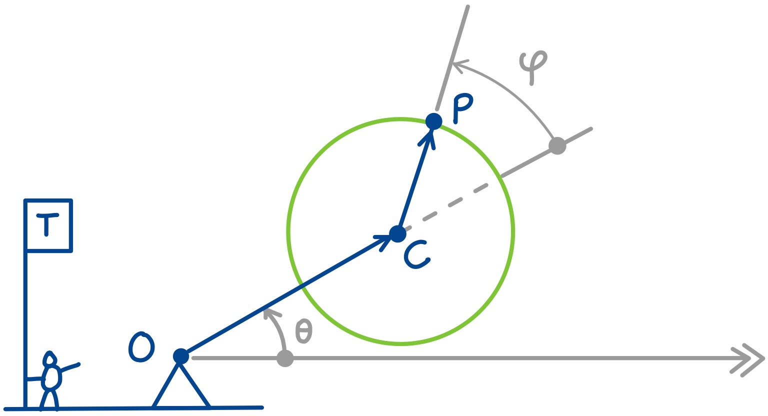
$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}.$$

$\overline{OC}$ i $\overline{CP}$ són fàcils de derivar perquè només canvien de direcció, no de valor. Per tant, aprofitem-ho:

$$\vec{v}_T(P) = \left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T = \left.\frac{d\overline{OC}}{dt}\right]_T + \left.\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_T$$

Per derivar $\overline{OC}$ i $\overline{CP}$ ens cal tenir aquests vectors orientats resp. T. Així podrem obtenir les seves velocitats angulars. Podem utilitzar aquests angles, que ja hem definit:

(*) Sovint escrivim "$O \in T$" per indicar que "O és fix a T".



Ara... Amb quina vel. angular gira $\overline{OC}$ resp. T ?

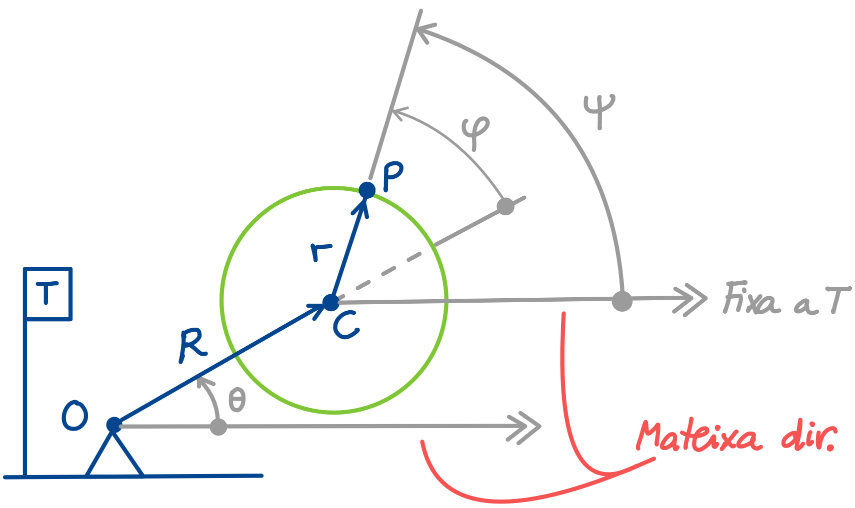
$$\bar{\Omega}_T^{\overline{OC}} = (\odot\, \dot{\theta}) \quad \longleftarrow \text{Perfecte !}$$

I amb quina gira $\overline{CP}$ resp. T ?

$$\bar{\Omega}_T^{\overline{CP}} = (\odot\, \dot{\varphi}), \text{ oi ?}$$

Doncs no! Estem observant el moviment de $\overline{CP}$ resp. T, ergo ens cal veure com canvia l'orientació de $\overline{CP}$ resp. una dir. fixa a T. Per fer-ho bé, doncs, orientarem $\overline{CP}$ amb

$$\psi = \theta + \varphi$$



Conclusió(*):

$$\bar{\Omega}_T^{\overline{CP}} = \underbrace{(\overset{\curvearrowleft}{\odot}\, \dot{\psi})}_{\boxed{\overset{\curvearrowleft}{\odot}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})}}$$

Ara sí que ho tenim bé!

(*) Fixem-nos que $\bar{\Omega}_T^{\overline{CP}} = [\overset{\curvearrowleft}{\odot}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})]$, tal i com havíem obtingut abans, quan buscàvem $\bar{\alpha}_T^{\overline{CP}}$

Vinga, ja podem derivar:

Només tenen canvi de dir.

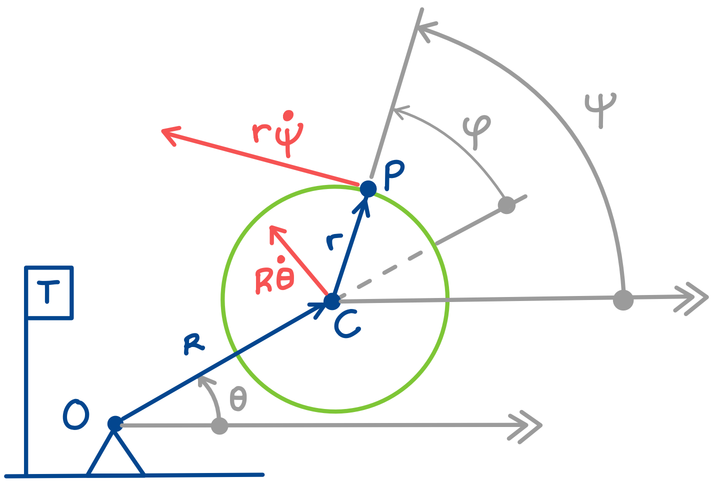
$$\boxed{\bar{v}_T(P)} = \frac{d\overline{OP}}{dt}\Big]_T = \frac{d\overline{OC}}{dt}\Big]_T + \frac{d\overline{CP}}{dt}\Big]_T =$$

$$= \bar{\Omega}^{\overline{OC}}_{T} \times \overline{OC} + \bar{\Omega}^{\overline{CP}}_{T} \times \overline{CP} =$$

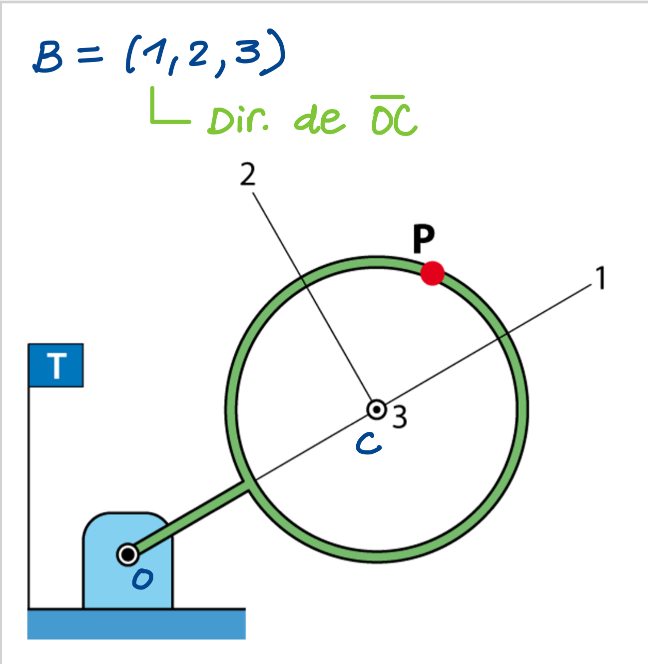
$$= \left(\circlearrowleft\!\odot\ \dot{\theta}\right) \times \left(\nearrow \underbrace{R}_{|\overline{OC}|}\right) + \left(\circlearrowleft\!\odot\ \dot{\psi}\right) \times \left(\uparrow r\right) =$$

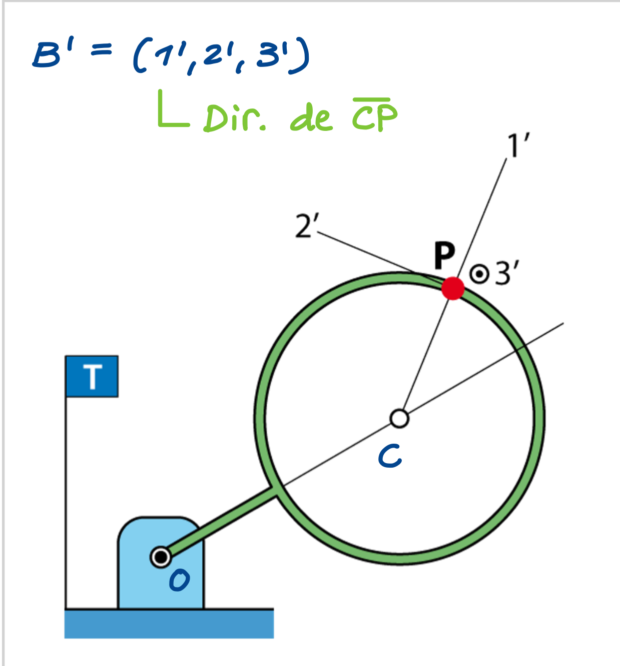
$$= \boxed{\left(\nwarrow R\dot{\theta}\right) + \left(\leftarrow r\dot{\psi}\right)} \qquad (\mathrm{II})$$

Podem dibuixar els vectors $(\nwarrow R\dot{\theta})$ i $(\nwarrow r\dot{\psi})$:



Finalment, si volem, podem expressar (II) utilitzant una base vectorial. Hi ha 2 bases que faciliten la projecció de (II) perquè tenen almenys una direcció alineada amb un dels vectors de (II). Són:

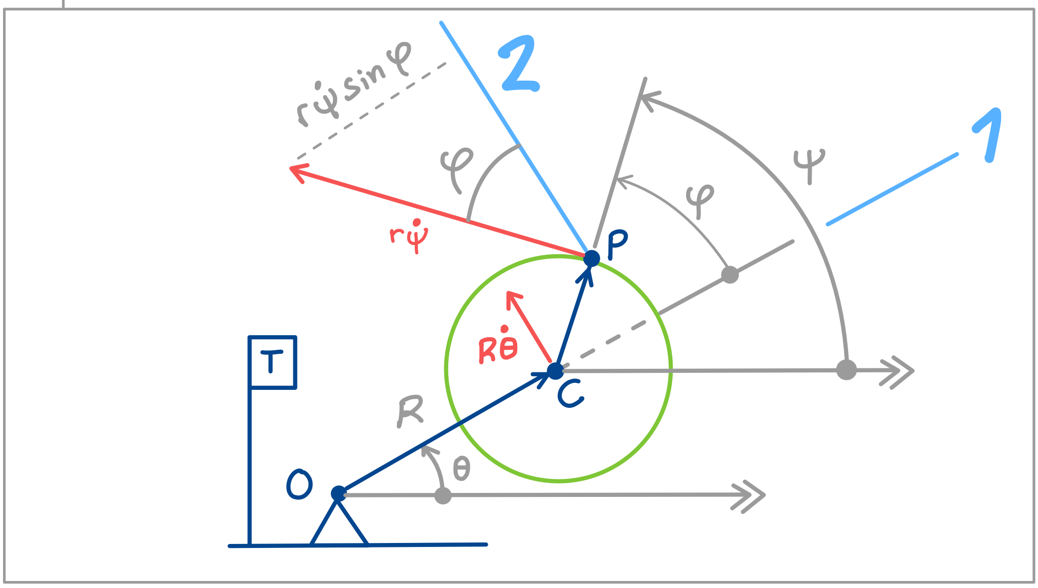




Utilitzant B, per exemple, tenim :

$$\bar{v}_T(P) = \Big[\nearrow\big(-r\dot{\psi}\sin\varphi\big)\Big] + \Big[\nwarrow\big(R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi\big)\Big] \quad (\bigstar)$$

versor de B en dir. 1 — Versor de B en dir. 2

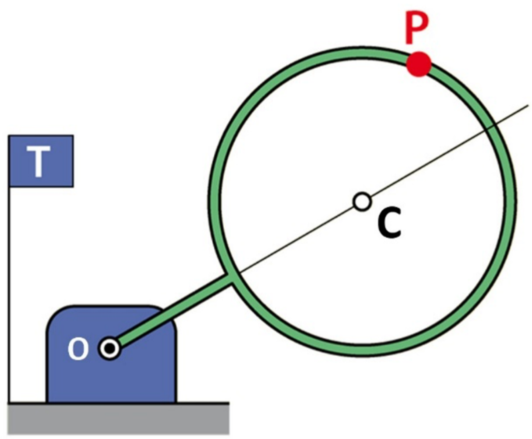


També podem escriure (★) com un vector de 3 components :

$$\left\{\bar{v}_T(P)\right\}_B = \left\{\begin{matrix} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{matrix}\right\} \quad (\mathrm{III})$$

base utilitzada (cal indicar-la!)

2 maneres equivalents d'escriure $\bar{v}_T(P)$



La guia circular està articulada al terra (T). La partícula **P** es mou dins la guia. Mitjançant la derivada analítica, calcula

$$\bar{v}_{guia}(\mathbf{P}),\ \bar{v}_T(\mathbf{P}),\ \bar{a}_{guia}(\mathbf{P}),\ \bar{a}_T(\mathbf{P}),\ \Re_T(\mathbf{P})\Big]_{\overline{OC}\|\overline{CP}}$$

$\bar{v}_{Guia}(P)$

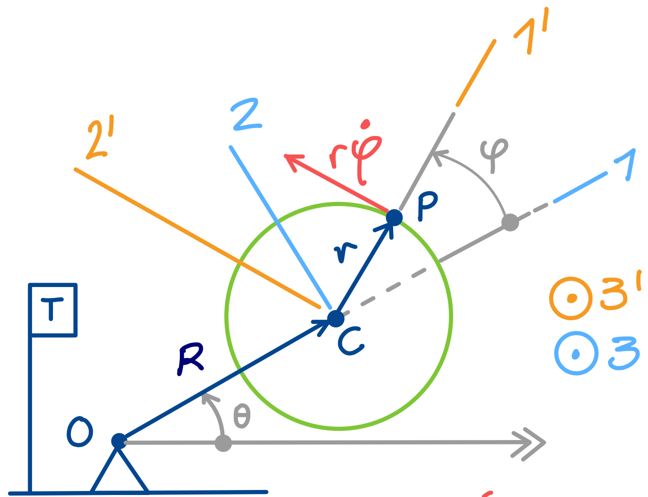
Un vec. pos. adient és $\overline{CP}$ (ja que $C \in$ Guia)

$\overline{CP}$ és fàcil de projectar en la base $B' = (1', 2', 3')$ $\Rightarrow$ Treballem en B'

Dir. fixa a $\overline{CP}$

Dir. $\odot$

$$\{\overline{CP}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Ara és vel. ang. de la <u>base</u>, no de $\overline{CP}$

$$\boxed{\{\bar{v}_{Guia}(P)\}_{B'}} = \left\{\left[\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_{Guia}\right\}_{B'} = \underbrace{\left\{\frac{d\overline{CP}}{dt}\right\}_{B'}}_{\text{Deriv. components}} + \underbrace{\{\bar{\Omega}^{B'}_{Guia}\}_{B'} \times \{\overline{CP}\}_{B'}}_{\text{òm. base B' resp. Guia} \times \text{vec. sense derivar}} =$$

Derivem a ref. Guia!

Resultat en base B'

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} r \\ 0 \end{Bmatrix}} \qquad (I)$$

Coincideix amb l'obtingut geomètricament (v. Eq. (I) ex. anterior).

Extra: Tb podem fer els càlculs amb $B=(1,2,3)$:

Dir. $\overline{OC}$ → 1

Dir. $\odot$ → 3

$$\left\{\overline{CP}\right\}_B = \begin{Bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\left\{\bar{v}_{Guia}(P)\right\}_B} = \left\{\left[\frac{d\overline{CP}}{dt}\right]_{Guia}\right\}_B =$$

$$= \left\{\frac{d\overline{CP}}{dt}\right\}_B + \left\{\cancel{\bar{\Omega}^B_{Guia}}^{\,0}\right\}_B \times \left\{\overline{CP}\right\}_B = \boxed{\begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Mateix resultat que (I), però en base B

$\bar{a}_{Guia}(P)$

Derivem (I):

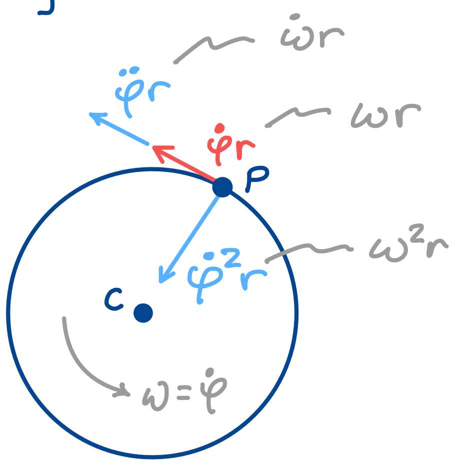
$$\left\{\bar{a}_{Guia}(P)\right\}_{B'} = \left\{\left[\frac{d\bar{v}_{Guia}(P)}{dt}\right]_{Guia}\right\}_{B'} =$$

Tot en B'

$$= \begin{bmatrix} \text{derivada} \\ \text{components} \\ \bar{v}_{Guia}(P) \end{bmatrix} + \bar{\Omega}^{B'}_{Guia} \times \bar{v}_{Guia}(P) =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}^2 r \\ \ddot{\varphi}r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II})$$

Surten les components intrínseques de l'acceleració típiques del moviment circular, com era d'esperar

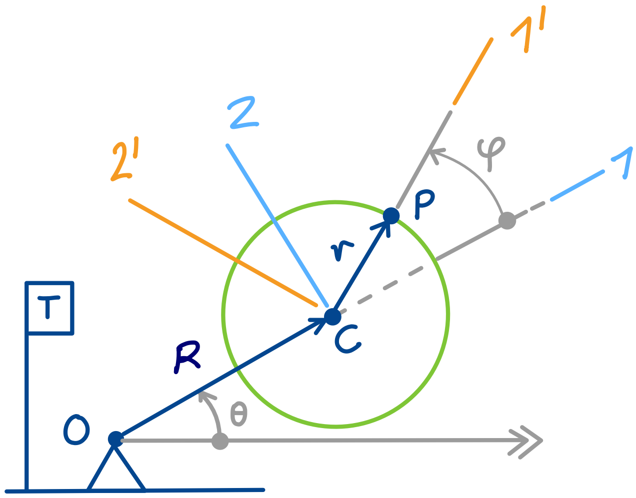


$\bar{v}_T(P)$

Un vec. pos. adient per a P és $\overline{OP}$, pq $O \in T$.

$B = (1, 2, 3)$

$B' = (1', 2', 3')$



$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP}$$

És aconsellable treballar en B o B' ja que faciliten la projecció de $\overline{OC}$ i $\overline{CP}$ respectivament. Descartem l'ús d'una base fixa a T perquè no aniria tan bé. Triem B, però B' seria bona tb:

$$\left\{\overline{OP}\right\}_B = \left\{\overline{OC}\right\}_B + \left\{\overline{CP}\right\}_B = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R + r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\bar{v}_T(P)\right\}_B = \left\{\left[\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T\right\}_B = \begin{bmatrix} \text{deriv.} \\ \text{comp.} \end{bmatrix} + \bar{\Omega}^B_T \times \begin{bmatrix} \text{vec sense} \\ \text{derivar} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R + r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\theta}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\theta} + r\dot{\theta}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Quadra amb l'Eq. (III) de l'exercici anterior}} \quad \text{(III)}$$

$$\boxed{\varphi + \theta = \psi \Rightarrow \dot{\varphi} + \dot{\theta} = \dot{\psi}}$$

$\bar{a}_T(P)$

Derivem (III):

$$\left\{\bar{a}_T(P)\right\}_B = \left\{\left[\frac{d\,\bar{v}_T(P)}{dt}\right]_T\right\}_B = \left[\begin{matrix}\text{deriv.}\\ \text{comp}\end{matrix}\right] + \bar{\Omega}^B_T \times \left[\begin{matrix}\text{vec.}\\ \text{sense}\\ \text{deriv.}\end{matrix}\right] =$$

$$= \begin{Bmatrix} -r\ddot{\psi}\sin\varphi - r\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\varphi \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - r\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -r\dot{\psi}\sin\varphi \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -\ddot{\psi}r\sin\varphi - \dot{\varphi}r\dot{\psi}\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}r\dot{\psi}\cos\varphi \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - \dot{\varphi}r\dot{\psi}\sin\varphi - \dot{\theta}r\dot{\psi}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -\ddot{\psi}r\sin\varphi - \overbrace{(\dot{\varphi}+\dot{\theta})}^{\dot{\psi}}r\dot{\psi}\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - (\dot{\varphi}+\dot{\theta})r\dot{\psi}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -\ddot{\psi}r\sin\varphi - r\dot{\psi}^2\cos\varphi - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi}\cos\varphi - r\dot{\psi}^2\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV)}$$

Tot seguit ens demanen $\mathcal{R}_T(P)$, que és el radi de curvatura de la trajectòria de P en un cert instant de temps.

Recordem primer aquest concepte, associat a les components intrínseques de l'acceleració.

Recordatori

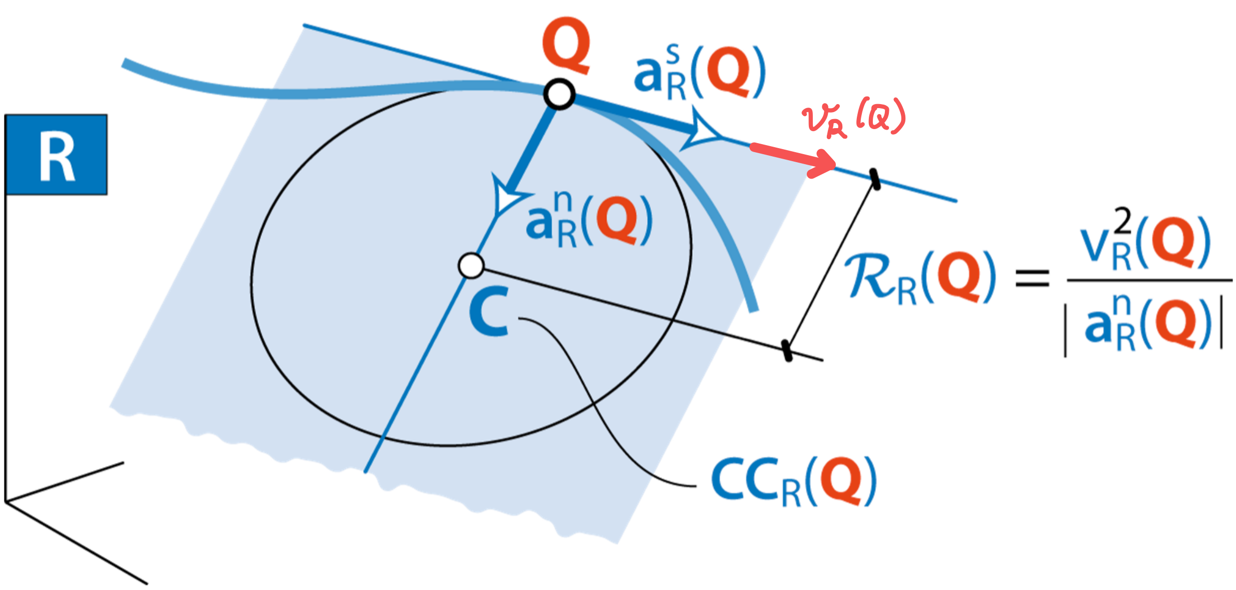
Components intrínseques de l'acceleració

Sigui una partícula Q que descriu una certa trajectòria en una referència R. En cada instant t, l'accel. de Q es pot descompondre en una component tangencial $\bar{a}^s_R(Q)$, paral·lela a $\bar{v}_R(Q)$, i una component normal $\bar{a}^n_R(Q)$, perpendicular a $\bar{v}_R(Q)$. A més, en aquest instant t, la trajectòria es pot aproximar localment per un cercle, anomenat "osculador". El radi d'aquest cercle és

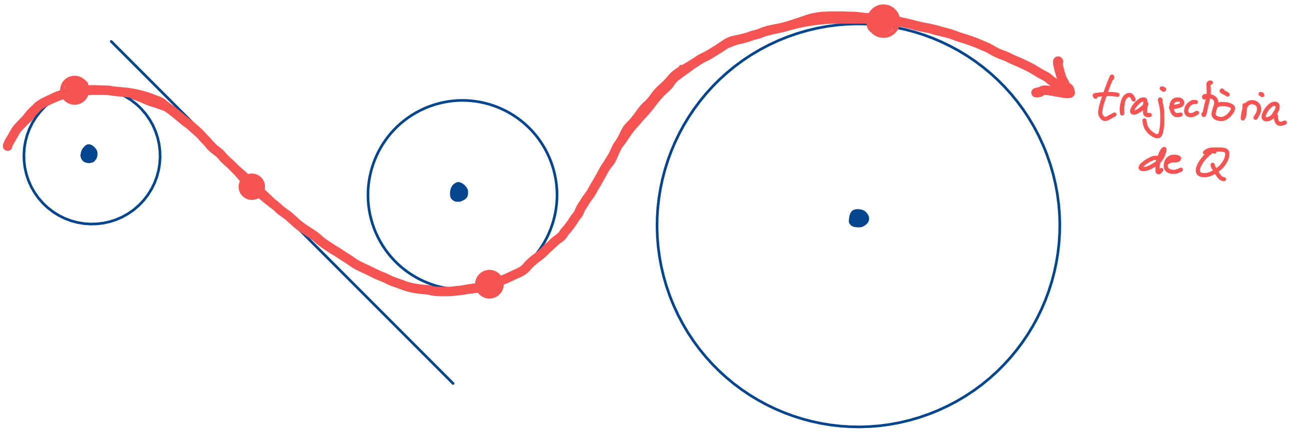
$$\mathcal{R}_R(Q) = \frac{v_R^2(Q)}{|a^n_R(Q)|} \begin{array}{l} \leftarrow [\text{Valor de } \bar{v}_R(Q)]^2 \\ \\ \leftarrow \text{Mòdul del valor de } \bar{a}^n_R(Q) \end{array}$$

El centre del cercle s'anomena centre de curvatura de la trajectòria al punt Q (relatiu a la ref. R), i el denotem així

$$CC_R(Q)$$



$\mathcal{R}_R(Q)$ i $CC_R(Q)$ varien al llarg del temps perquè el cercle oscula al llarg de la trajectòria :



Recordeu :

- L'accel. tangencial $\bar{a}^s_R(Q)$ és la responsable del canvi de valor de $\bar{v}_R(Q)$

- L'accel. normal $\bar{a}^n_R(Q)$ és la responsable del canvi de direcció de $\bar{v}_R(Q)$

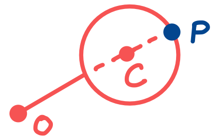
Calculem doncs el que ens demanaven:

$$\boxed{\left.\mathcal{R}_T(P)\right]_{\overline{OC} \parallel \overline{CP}}}$$

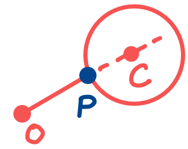
Vol dir, per a l'instant en que $\overline{OC}$ és paral·lel a $\overline{CP}$

COMPTE: això no vol dir que $\varphi = 0 \ \forall t$. Només és nul quan P passa per aquesta situació

És a dir | quan $\varphi = 0$ $\longrightarrow$



o quan $\varphi = \pi$ $\longrightarrow$



Només fem el cas $\varphi = 0$:

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|}$$

(Valor de $\bar{v}_T(P)$)^2

Mòdul del valor de $\bar{a}_T^n(P)$

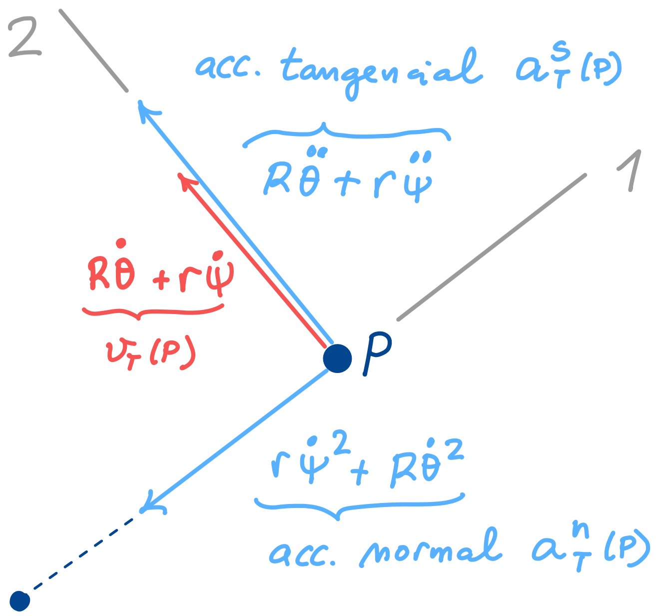
$$\left\{ \left.\bar{v}_T(P)\right]_{\varphi=0} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ R\dot{\theta} + r\dot{\psi} \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

Particularitzant (III) per $\varphi = 0$

$$\left\{ \left.\bar{a}_T(P)\right]_{\varphi=0} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -r\dot{\psi}^2 - R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} + r\ddot{\psi} \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

Particularitzant (IV) per $\varphi = 0$

Per identificar la component normal de $\bar{a}_T(P)$ sempre aconsello que us feu un dibuix:



$CC_T(P)$ = centre de curvatura de P relatiu a T

Per tant :

$$\mathcal{R}_T(P)\Big]_T = \frac{(R\dot{\theta} + r\dot{\psi})^2}{r\dot{\psi}^2 + R\dot{\theta}^2} \qquad (V)$$

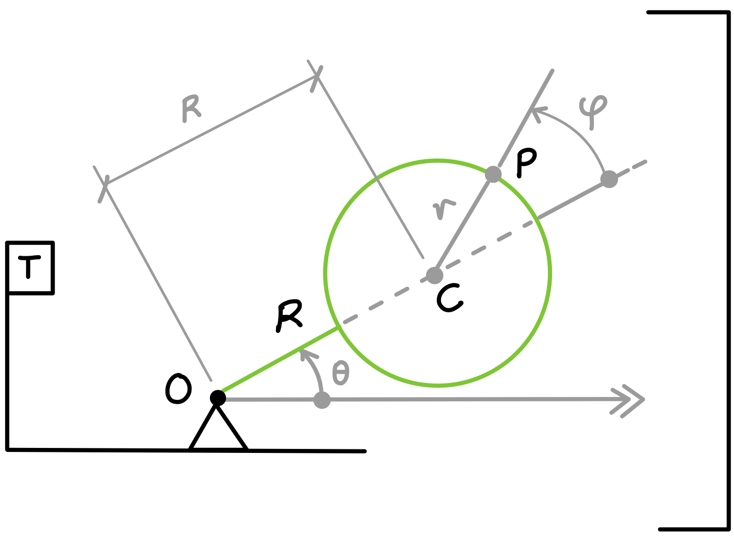
Pregunta freqüent

En l'exercici que acabem de fer (i en altres de semblants) es demana que calculem la velocitat i acceleració de P relatives a les referències "Guia" i "T". En el resultat final, aquestes velocitats surten expressades en funció de les coordenades θ, φ i les seves derivades $\dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ (també en funció de $\psi = \theta + \varphi$). Qui determina què valen aquestes coordenades i les seves derivades?

Resposta

Per ara estem aprenent cinemàtica, i no ens preocupa gaire què valen θ i φ, i les seves derivades en cada instant de temps. Podeu imaginar, si voleu, que són valors coneguts. En realitat, aquests valors dependran de l'evolució concreta que tingui el sistema a partir d'unes condicions inicials, i de les forces aplicades des de llavors ençà, d'acord amb les lleis de la dinàmica. Quan entrem a dinàmica aprendrem a trobar les **equacions del moviment**, que determinen aquesta evolució. També pot ser que alguna coordenada sigui "forçada", és a dir, que hi hagi un motor que en determini el seu valor en cada instant de temps. Per exemple, a l'articulació de la guia amb el terra hi podria haver un motor que fixés $\theta(t)$ mitjançant un sistema de control adient.

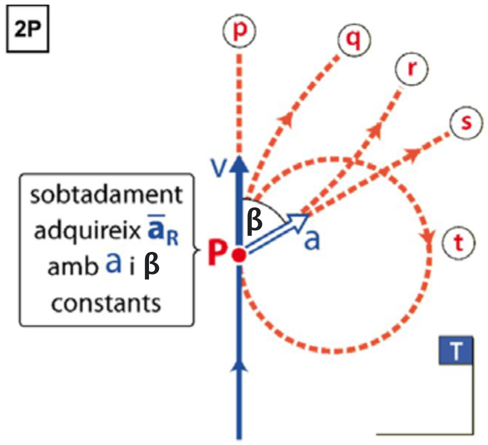
És bo pensar les coordenades del sistema, i les seves derivades, com a "codificadors compactes" de la posició, velocitat i acceleració de tots els punts del sistema en una configuració genèrica. Com veiem en aquest exercici, i en altres que farem, coneguts els seus valors, sempre podrem calcular la posició, velocitat o acceleració de qualsevol punt del sistema. Aquest càlcul serà essencial per poder formular les equacions del moviment, que, com hem dit, determinen l'evolució del sistema.



$\underbrace{\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}}$

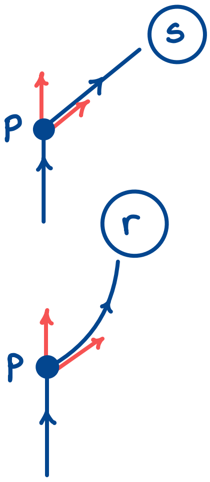
Determinen la posició, velocitat i acceleració de qualsevol punt del sistema

Alerta: al dibuix canvieu α per β

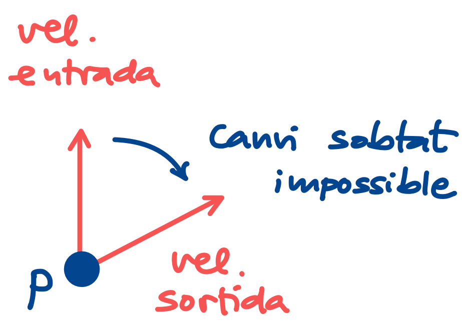


La partícula **P** descriu una trajectòria rectilínia respecte del terra (T). Quan té celeritat v, sobtadament s'accelera amb $\bar{a}_T(\mathbf{P})$ de valor constant, i formant un angle β constant amb $\bar{v}_T(\mathbf{P})$.

Quina trajectòria passa a fer?

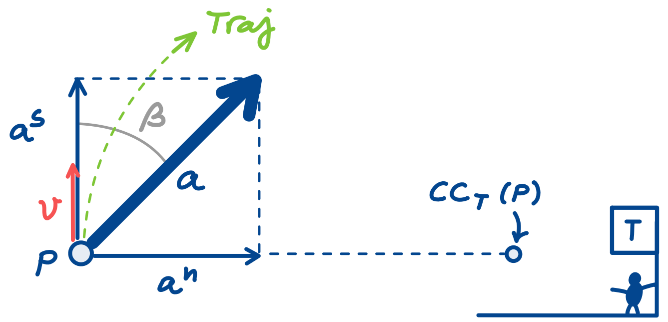


Impossibles! Implicarien un canvi sobtat de velocitat



Ara cal saber si serà (p), (q) o (t).

A partir de l'instant dibuixat, tenim:



a^s = accel. tangencial] resp. T

a^n = " normal

$$\left.\begin{aligned} a^s &= a\cos\beta \\ a^n &= a\sin\beta \end{aligned}\right\}$$ constants al llarg del temps (pq a i β ho són)

(*) A menys que es produeixi una col·lisió, que no és el cas.

Com que $a^n \neq 0$ $\Rightarrow$ La trajectòria serà curvada $\Rightarrow$ Descartem (p)

El radi de curvatura $\mathcal{R} = \mathcal{R}_T(P)$ creixerà amb el pas del temps:

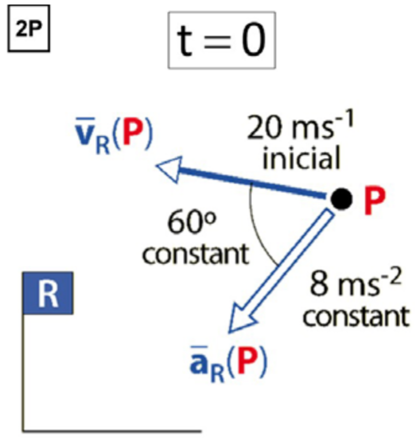
v creixerà pq $a^s = ct$

$$\mathcal{R} = \frac{v^2}{|a^n|} \Rightarrow \mathcal{R} \text{ creixerà}$$

a^n es manté ct

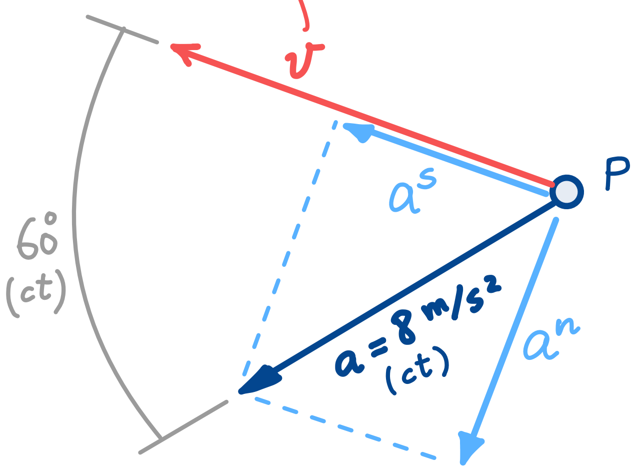
Això descarta (t), ja que té $\mathcal{R} = ct$

La traj. serà (q) pq és l'única de radi creixent.



En un cert instant, la partícula **P** té celeritat de 20 m/s respecte del terra (T). Si s'accelera amb $\bar{a}_T(\mathbf{P})$ de valor constant, i formant un angle de 60° constant amb $\bar{v}_T(\mathbf{P})$, quina és la seva celeritat 10 segons més tard?

Celeritat de P (inicialment, $v = 20$ m/s)



Només a^s pot canviar v

a^n canvia el radi de curvatura de la traj. de P, però no v.

Clarament:

$$a^s = a \cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \frac{m}{s^2} = \frac{4 \frac{m}{s}}{s}$$

$$\Downarrow$$

v augmenta a ritme de 4 m/s cada segon

$$\Downarrow$$

En 10" v haurà augmentat 40 m/s.

$$\Downarrow$$

Com que inicialment $v = 20$ m/s, al cap de 10s v serà de $20 + 40 = 60$ m/s.