

11P

Versió 0.9 preliminar

Teoremes vectorials I

Exercicis de càlcul del moment cinètic

Problema 3D

Lluís Ros

<https://lluisros.github.io/mecanica>

Recordatori de teoria

RGal = Referència Galileana des de la que estudiem el moviment del sistema (típicament és el terra T).

Teorema de la Quantitat de Moviment (TQM):

$$\sum_{\text{sist}} \bar{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = m_{\text{sist}} \bar{\mathbf{a}}_{\text{RGal}} (\mathbf{G}_{\text{sist}}) = \sum_i m_i \bar{\mathbf{a}}_{\text{RGal}} (\mathbf{G}_i)$$

Sumatori de totes les forces exteriorment aplicades sobre el sistema

Massa del sistema

Acceleració del centre d'inèrcia del sistema resp. RGal

Suma per a tots els sòlids

Massa de cada sòlid

Acceleració del centre d'inèrcia del sòlid

Teorema del Moment Cinètic (TMC):

$$\sum_{\text{sist}} \bar{\mathbf{M}}_{\text{ext}} (\mathbf{Q}) - \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{G}_{\text{sist}} \times m_{\text{sist}} \bar{\mathbf{a}}_{\text{RGal}} (\mathbf{Q}) = \dot{\bar{\mathbf{H}}}_{\text{RTQ}} (\mathbf{Q})$$

Sumatori de tots els moments respecte de \mathbf{Q} exteriorment aplicats sobre el sistema

Vector de \mathbf{Q} al centre d'inèrcia del sistema (\mathbf{G}_{sist})

Acceleració de \mathbf{Q} respecte de la RGal

Derivada temporal del moment cinètic del sistema al punt \mathbf{Q} (o "respecte de \mathbf{Q} "). És una derivada feta des de RGal.

Càcul del moment cinètic del sistema

Moment cinètic:

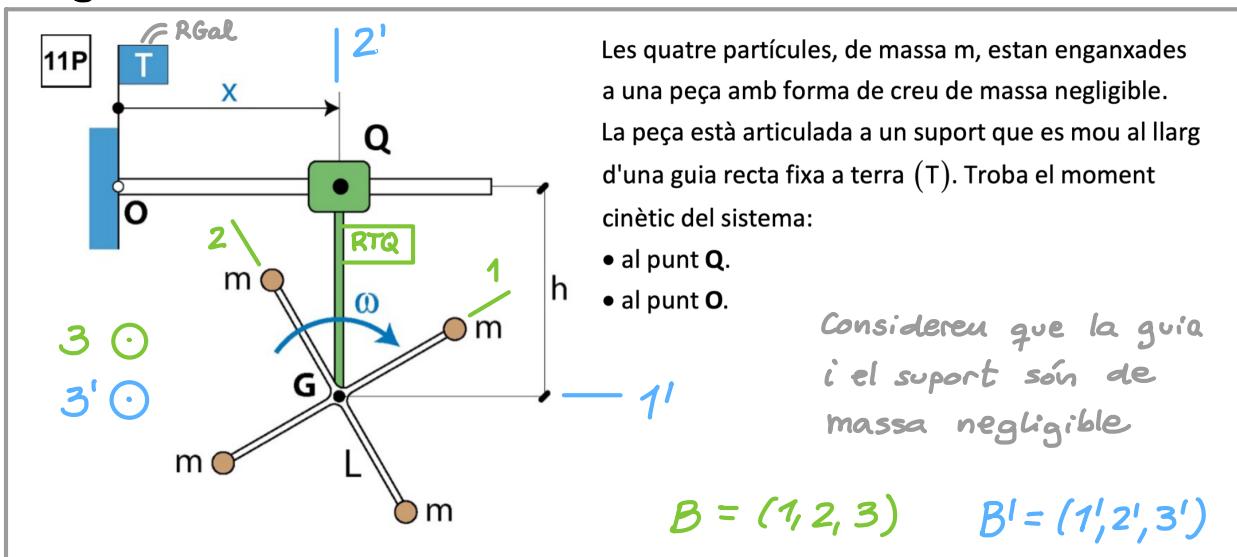
- d'una partícula:

$$\bar{\mathbf{H}}_{RTQ}^P(\mathbf{Q}) = \bar{\mathbf{QP}} \times m_P \bar{\mathbf{v}}_{RTQ}(\mathbf{P})$$
- d'un sòlid rígid S:

$$\begin{cases} \text{Si } \mathbf{Q} \in \text{sòlid } S: \bar{\mathbf{H}}_{RTQ}^S(\mathbf{Q}) = II(\mathbf{Q}) \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{RTQ}^S = II(\mathbf{Q}) \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{RGal}^S \\ \text{Si } \mathbf{Q} \notin \text{sòlid } S: \bar{\mathbf{H}}_{RTQ}^S(\mathbf{Q}) = \bar{\mathbf{H}}_{RTG}^S(\mathbf{G}) + \bar{\mathbf{H}}_{RTQ}^\oplus(\mathbf{Q}) = \\ = \bar{\mathbf{H}}_{RTG}^S(\mathbf{G}) + \bar{\mathbf{QG}} \times m \bar{\mathbf{v}}_{RTQ}(\mathbf{G}) \end{cases}$$
- d'un sistema de sòlids rígids:

$$\bar{\mathbf{H}}_{RTQ}^{sist}(\mathbf{Q}) = \sum_i \bar{\mathbf{H}}_{RTQ}^i(\mathbf{Q})$$

Q5 gener 2024



Guia i suport són de massa neglorable \Rightarrow L'única contribució al moment cinètic del sistema és la de les partícules de massa m de la creu. Tractem aquesta creu com un sòlid rígid S .

Com que $Q \notin S$ i O tampoc, usarem la descomp. baricèntrica en ambdós casos

$$\bar{H}_{RTQ}(Q)$$

Moment cinètic al punt Q de tota la massa concentrada a G

$$\bar{H}_{RTQ}(Q) = \bar{H}_{RTG}(G) + \underbrace{\bar{Q}G \times 4m \cdot \bar{v}_{RTQ}(G)}_{\bar{o}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4mL^2\omega \end{Bmatrix} = (\otimes 4mL^2\omega)$$

$$\bar{H}_{RTG}(G) = \bar{I}(G) \cdot \bar{\omega}_{RTG}^{creu}$$

$$\left\{ \bar{H}_{RTG}(G) \right\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4mL^2\omega \end{Bmatrix}$$

En base B' surt igual pq el sòlid és rotar simètric a G pel pla (1,2).

Fig. plana \Rightarrow 3 és DPI

$I_{12} = 0$ perquè les masses són

sobre els eixos (tenen o bé $x_1 = 0$, o bé $x_2 = 0$)

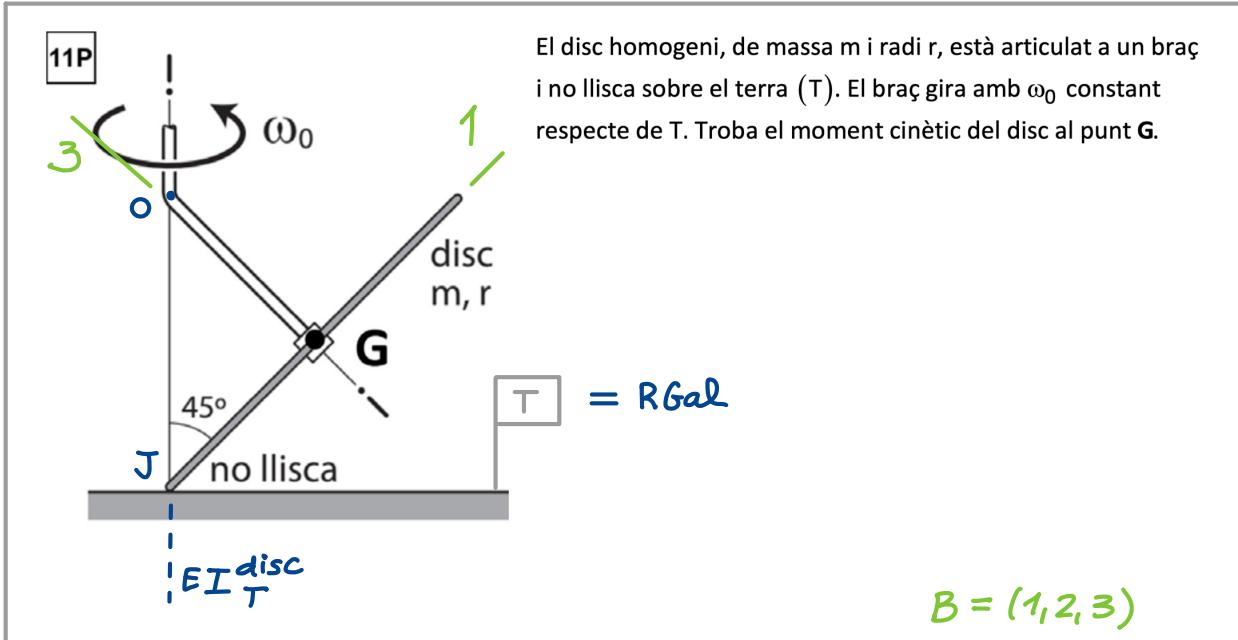
$$\bar{H}_{RTO}(0)$$

$$\boxed{\bar{H}_{RTO}(0) = \bar{H}_{RTG}(G) + \overbrace{\bar{OG} \times 4m \cdot \bar{v}_{RTO}(G)}^{\substack{\bar{H}_{RTO}^\oplus(0) \\ \parallel T}} =}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4mL^2\omega \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} x \\ -h \\ 0 \end{Bmatrix} \times 4m \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{4m \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ h\dot{x} \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4m(L^2\omega - h\dot{x}) \end{Bmatrix} =$$

En base B

$$= \boxed{\otimes 4m(L^2\omega - h\dot{x})}$$



$$\bar{H}_{RTG}^{disc}(G) = \boxed{\text{G E disc}} \quad I_{disc}(G) \cdot \bar{\Omega}_T^{disc}$$

$\bar{\Omega}_T^{disc}$ només pot tenir comp. vertical ja que EI_T^{disc} = recta JO

$$\bar{\Omega}_T^{disc} = \bar{\Omega}_{braç}^{disc} + \bar{\Omega}_T^{braç} = \underbrace{(\nabla \dot{\varphi})}_{\bar{\Omega}} + (\uparrow \omega_0) = (\uparrow \omega_0)$$

$$[I_{disc}(G)]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \\ & & I_{33} \end{bmatrix}$$

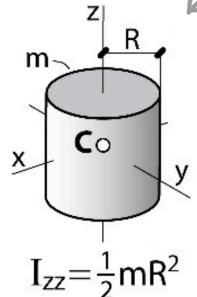
↑
rotor simètric a G
pel pla del disc

taules (disc = cilindre) ↗

$$I_{33} = 2I = \frac{1}{2}mr^2$$

$$\downarrow$$

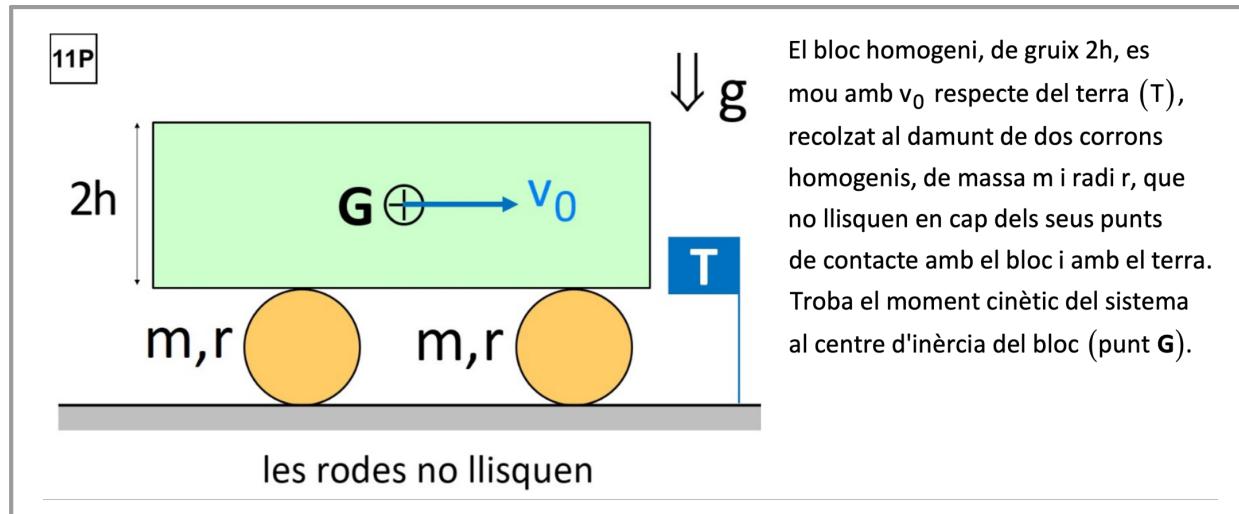
$$I = \frac{1}{4}mr^2$$



$$\left\{ \bar{H}_{RTG}^{disc}(G) \right\}_B = \begin{bmatrix} H & & \\ & I & \\ & & zI \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{I\omega_0}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{2I\omega_0}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \frac{mr^2\omega_0}{4\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{mr^2\omega_0}{2\sqrt{2}} \end{array} \right\} = \boxed{\left(\nearrow \frac{mr^2\omega_0}{4\sqrt{2}} \right) + \left(\nwarrow \frac{mr^2\omega_0}{2\sqrt{2}} \right)}$$

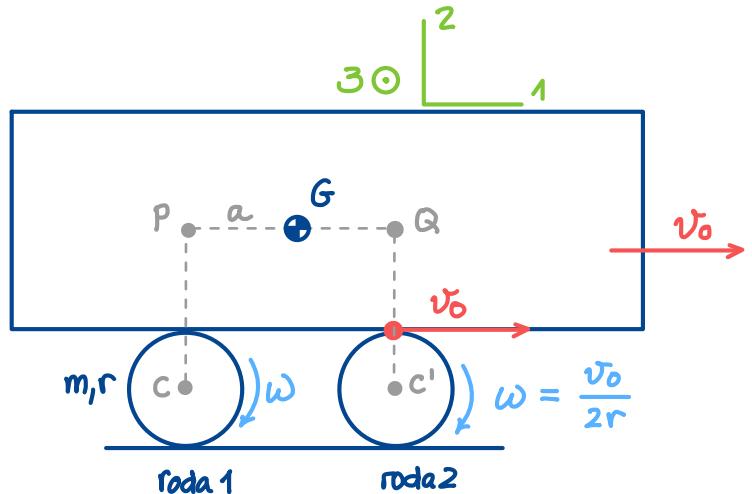
Q4.46 RBD



Vel. angulars dels sòlids:

$$\bar{\Omega}_{T \text{ rodal1}} = \bar{\Omega}_{T \text{ rodal2}} = \otimes \frac{J_0}{2r} \omega$$

$$\bar{\Omega}_{T \text{ bloc}} = \bar{\Omega}$$



El moment cinètic total és suma dels dels sòlids:

$$\bar{H}_{RTG}^{\text{sist}}(G) = \bar{H}_{RTG}^{\text{rodal1}}(G) + \bar{H}_{RTG}^{\text{rodal2}}(G) + \bar{H}_{RTG}^{\text{Bloc}}(G)$$

~~$\bar{\Omega}_{T \text{ bloc}} = \bar{\Omega}$~~

(I)

$\bar{H}_{RTG}^{\text{rodal1}}(G)$

$G \notin \text{rodal1} \Rightarrow$ fem descomp. baricèntrica

$$\bar{H}_{RTG}^{\text{rodal1}}(G) = \bar{H}_{RTC}^{\text{rodal1}}(C) + \underbrace{\bar{H}_{RTG}^{\oplus}(G)}_{GC \times m \bar{v}_{RTG}(C)}$$

(II)

$$\left\{ \bar{H}_{RTC}^{\text{rodal1}}(C) \right\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & zI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2I\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega mr^2}{2} \end{Bmatrix} =$$

$$2I = \frac{mr^2}{z}$$

$$= \left(\otimes \frac{\omega mr^2}{2} \right) = \left(\otimes \frac{v_0 mr}{4} \right)$$

$\omega = \frac{v_0}{2r}$

(III)

$$\bar{H}_{RTG}^{\oplus}(G) = \overbrace{\bar{GC}}^{GP + PC} \times m \bar{v}_{RTG}(c) = \left(\left(\leftarrow a \right) + \left[\downarrow (h+r) \right] \right) \times \left(\leftarrow \frac{mv_0}{2} \right) = \left(\otimes \frac{h+r}{2} \cdot mv_0 \right) \quad (\text{IV})$$

Per trobar $\bar{v}_{RTG}(c)$ fem comp. mov. $\begin{cases} AB = T \\ REL = B \otimes C = RTG \end{cases}$

$$\bar{v}_{RTG}(c) = \bar{v}_T(c) - \bar{v}_{ar}(c) = \left(\rightarrow \frac{v_0}{2} \right) - \left(\rightarrow v_0 \right) = \left(\leftarrow \frac{v_0}{2} \right)$$

Substituint III i IV a II:

$$\bar{H}_{RTG}^{\text{roda1}}(G) = \left(\otimes \frac{v_0 mr}{4} \right) + \left(\otimes \frac{h+r}{2} \cdot mv_0 \right) = \left[\otimes \frac{v_0 m}{2} \left(\frac{3r}{2} + h \right) \right] \quad (\text{V})$$

$$\bar{H}_{RTG}^{\text{roda2}}(G)$$

El moment cinètic de la roda2 a G és el mateix que el de la roda1 (farem les mateixes operacions, canviant \bar{GC} per $\bar{GC}' = \bar{GQ} + \bar{QC}'$, i sortiria el mateix):

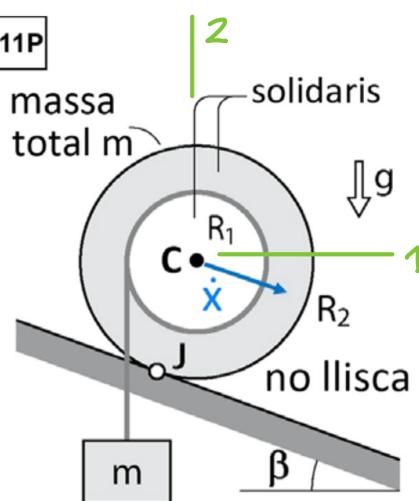
$$\bar{H}_{RTG}^{\text{roda2}}(G) = \bar{H}_{RTG}^{\text{roda1}}(G) \quad (\text{VI})$$

$$\bar{H}_{RTG}^{\text{sist}}(G)$$

Utilitzant (VI) a (I) obtenim:

$$\bar{H}_{RTG}^{\text{sist}}(G) = 2 \bar{H}_{RTG}^{\text{roda1}}(G) = \left[\otimes v_0 m \left(\frac{3r}{2} + h \right) \right]$$

11P



Les rodes homogènies, de massa total m i radis R_1 i R_2 , són solidàries, i no llisquen sobre el terra (T). El bloc, de massa m , penja d'un fil inextensible que s'enrotlla sobre la roda de radi R_1 . El centre de les rodes (punt C) baixa amb velocitat \dot{x} respecte de T . Troba el moment cinètic del sistema a C .

$$B = (1, 2, 3) \text{ d'orientació fixa a } T$$

$$\bar{H}_{RTC}^{sist}(C) = \bar{H}_{RTC}^{rodes}(C) + \bar{H}_{RTC}^{bloc}(C) \quad (\text{I})$$

$$\left\{ \bar{H}_{RTC}^{rodes}(C) \right\}_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 2I \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}}{R_2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\frac{mR_2^2}{4} \cdot \frac{\dot{x}}{R_2} \end{array} \right\} = \left(\otimes \frac{mR_2 \dot{x}}{4} \right) \quad (\text{II})$$

$2I = \frac{mR_2^2}{4}$

Taula del formulari (rodes = cilindre)

CE rodes

rodes són rotors simètrics a C pel pla (1,2)

$$\bar{H}_{RTC}^{bloc}(C) = \underbrace{\bar{H}_{RTC}^{bloc}(G)}_{\bar{o} \text{ (Bloc no gira)}} + \bar{H}_{RTC}^{\oplus}(C) =$$

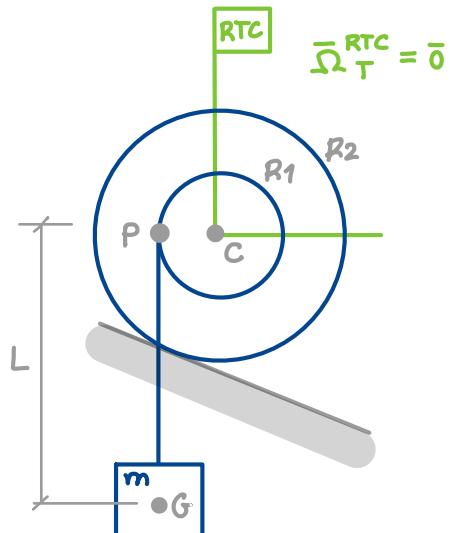
Centre d'inèrcia del bloc

$$= \bar{CG} \times m \cdot \bar{v}_{RTC}(G) =$$

$$= \left[(-R_1) + (L) \right] \times \left[\uparrow \left(m \frac{R_1}{R_2} \dot{x} \right) \right]$$

$$= \left(\otimes \frac{R_1^2}{R_2} m \dot{x} \right) \quad (\text{III})$$

U. deducció a baix



Deducció de $\bar{U}_{RTC}(G)$

(v. deducció alternativa a pàg. seg., molt instructiva!)

Com que $\bar{\Omega}_T^{RTC} = \bar{\Omega}$, tenim:

$$\bar{\Omega}_{RTC}^{\text{rodes}} = \bar{\Omega}_T^{\text{rodes}} = \left(\otimes \frac{\dot{x}}{R_2} \right)$$

Ara, com que el tram GP del fil no gira resp. RTC, és:

$$\bar{U}_{RTC}(G) = \bar{U}_{RTC}(P) = \left(\uparrow \frac{\dot{x}}{R_2} \cdot R_1 \right) = \left(\uparrow \frac{R_1}{R_2} \dot{x} \right)$$

Vista des de RTC, la roda R_1 gira amb

$$\bar{\Omega}_{RTC}^{\text{rodes}} = \left(\otimes \frac{\dot{x}}{R_2} \right), \text{ com hem dit a dalt}$$

Sumant (II) i (III) obtenim el mom. cinètic total:

$$\boxed{\bar{H}_{RTC}^{\text{sist}}(C) = \left(\otimes \frac{m R_2 \dot{x}}{4} \right) + \left(\otimes \frac{R_1^2}{R_2} m \dot{x} \right) =}$$

$$= \boxed{\otimes m \dot{x} \left(\frac{R_2}{4} + \frac{R_1^2}{R_2} \right)}$$

Deducció alternativa de $\bar{v}_{RTC}(G)$

ESTUDIEU - LA !

Fent comp. mov. amb

$$\begin{array}{l} AB = T \\ REL = RTC \end{array}$$

tenim

Tècnica molt útil quan no veiem la velocitat d'un punt en una RTQ fàcilment.

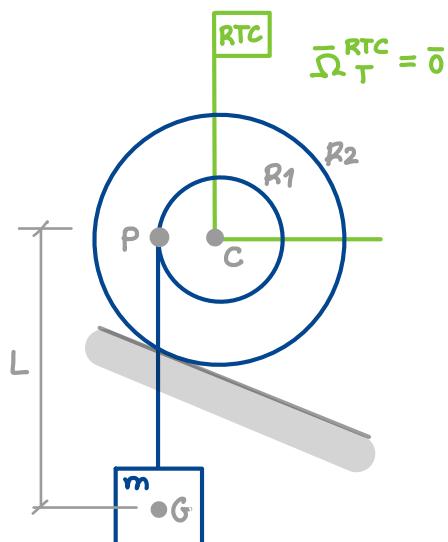
$$\underbrace{\bar{v}_{RTC}(G)}_{REL} = \underbrace{\bar{v}_T(G)}_{AB} - \underbrace{\bar{v}_T(C)}_{\bar{v}_{ar}(G)} = \bar{v}_T(P) - \bar{v}_T(C) =$$

$\bar{v}_{ar}(G) = \bar{v}_T(C)$ pq tots els punts de RTC tenen la mateixa velocitat resp. T , ja que $\bar{\Omega}_T^{RTC} = \bar{0}$

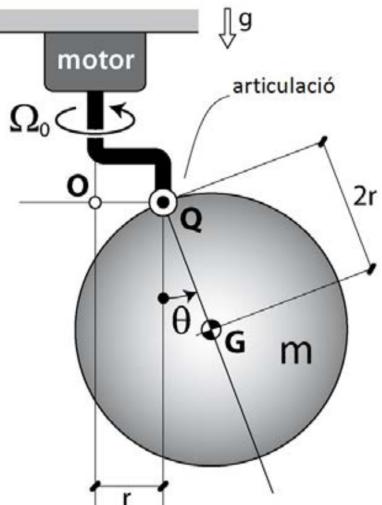
$\bar{v}_T(G) = \bar{v}_T(P)$ ja que el tram GP de fil no gira resp. T

$$= \underbrace{\bar{v}_T(C) + \bar{\Omega}_T^{rodes} \times \bar{CP}}_{CSR \ C \rightarrow P} - \bar{v}_T(C) =$$

$$= \bar{\Omega}_T^{rodes} \times \bar{CP} = \left(\otimes \frac{\dot{x}}{R_2} \right) \times \left(\leftarrow R_1 \right) = \left(\uparrow \frac{R_1}{R_2} \dot{x} \right)$$



11P



La bola homogènia, de massa m i radi $2r$, està articulada a un braç que gira amb Ω_0 constant respecte del terra (T) sota l'acció d'un motor. Troba:

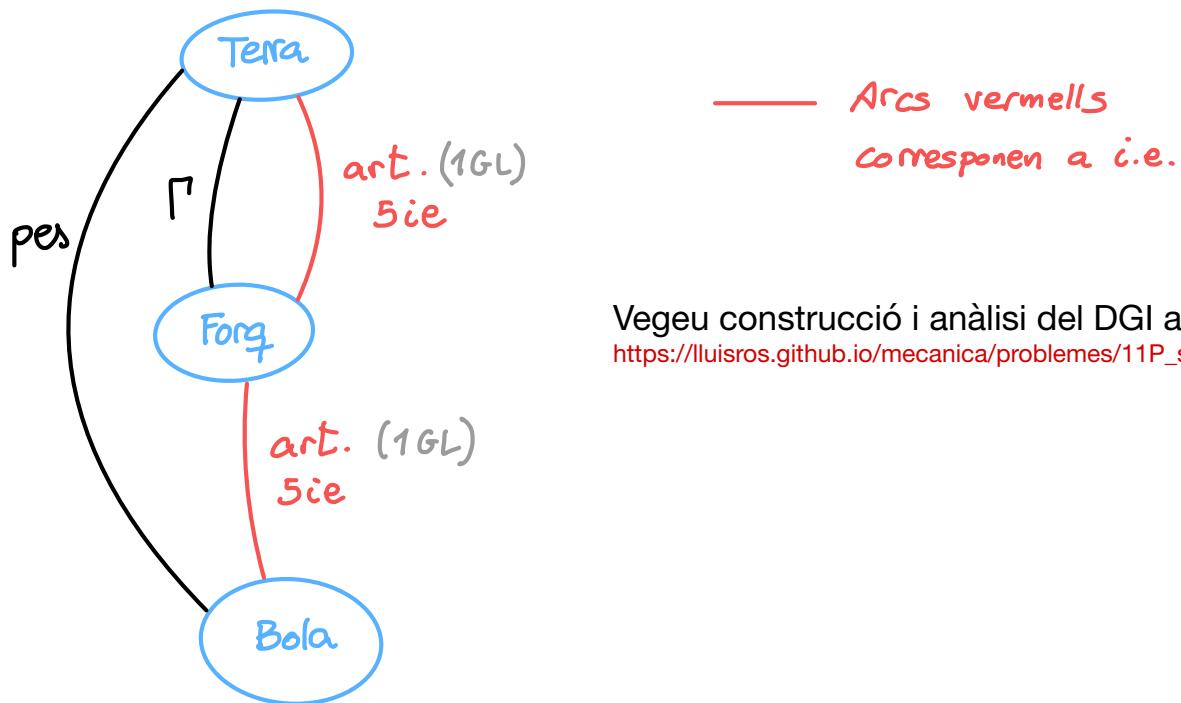
- l'equació de moviment per a la coordenada θ .
- el parell motor.

Obs: La forq. és de massa ≈ 0

GL sist

$$2 \quad \begin{array}{l} \dot{\psi} = \Omega_0 = \text{ctant} \text{ (actuat i forçat)} \\ \dot{\theta} \text{ (lliure)} \end{array}$$

Diagrama general d'interaccions (DGI)



Vegeu construcció i anàlisi del DGI a
https://luisros.github.io/mecanica/problemes/11P_slides.pdf

Sist.	Incòg.	#incòg. total	Problema
bola	5ie, $\ddot{\theta}$	6	DET ✓
bola+forq	5ie, $\ddot{\theta}$, Γ	7	INDET ✗
forq	10ie, Γ	11	INDET ✗

Eq. mov. coord. θ

Volem $\ddot{\theta} \Rightarrow$ Apliquem teor. vectorials a sist = bola (pq surt DET)

Forces sobre bola

- Pes: $\downarrow mg$

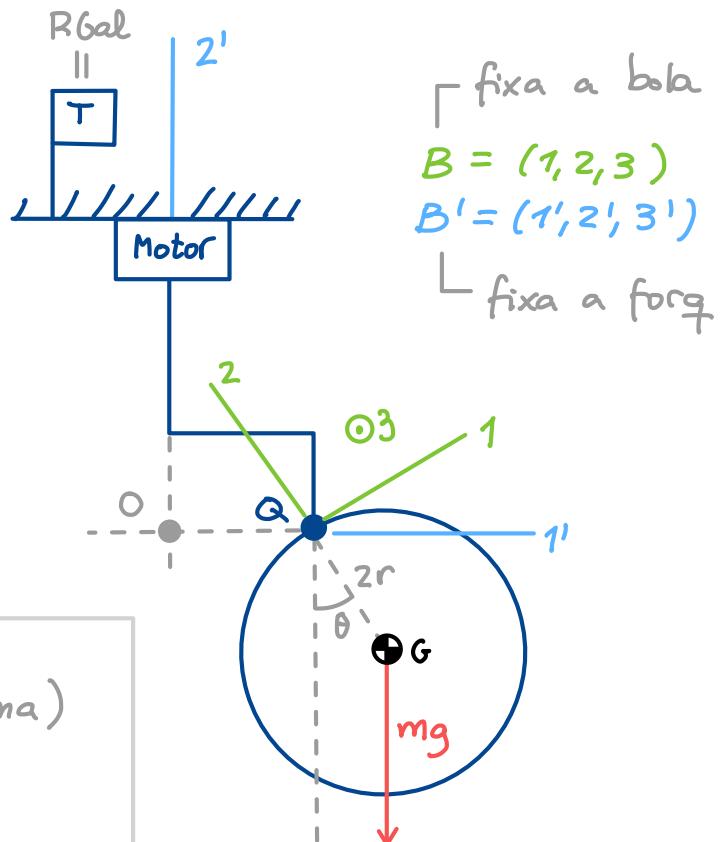
(només crea moment en dir. 3)

- Torsor forç \rightarrow bola a Q

$$\{ \bar{F}_{\text{forç} \rightarrow \text{bola}} \}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{ \bar{M}_{\text{forç} \rightarrow \text{bola} (Q)} \}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(en B' tindria mateixa forma)



fixa a bola

$$B = (1, 2, 3)$$

$$B' = (1', 2', 3')$$

fixa a forç

Full rata per l'eq. mov.

SIST = bola

$$TMC(Q) \Big]_3 \leftarrow \text{Ja que en dir. 3 no hi ha moments d'enllaç sobre bola}$$

TMC(Q)

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(Q) - \bar{QG} \times m \bar{a}_T(Q) = \dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$$

Anem calculant-ne els termes (sols ens calen en dir. 3):

$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(Q)$

$$\sum \bar{M}_{\text{ext}}(Q) = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ -mg2r \sin \theta \end{Bmatrix}$$

Però \bar{H}_{RTQ} cal tot per poder-lo derivar i quedar-nos amb comp. 3.

$$\dot{\bar{H}}_{RTQ}(Q)$$

$$\bar{H}_{RTQ}(Q) = \mathbb{II}(Q) \cdot \bar{\Omega}_T^{Bola}$$

$\sqsubset Q \in Bola$

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = (\odot \dot{\theta}) + (1\ddot{\Omega}_0) = \left\{ \begin{array}{l} \Omega_0 \sin \theta \\ \Omega_0 \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{array} \right\}_B$$

$$\mathbb{II}(Q) = \mathbb{II}(G) + \mathbb{II}^\oplus(Q)$$

B fixa a bola

$$[\mathbb{II}(Q)]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix}}_{\text{rot. esfèric a } G} + \begin{bmatrix} m4r^2 & & \\ & m4r^2 & \\ & & m4r^2 \end{bmatrix} =$$

rot. esfèric a G , amb $I = \frac{2}{5}m(2r)^2 = \frac{8}{5}mr^2$

$$= 4mr^2 \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ & \frac{2}{5} & \\ & & \frac{2}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right) = 4mr^2 \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

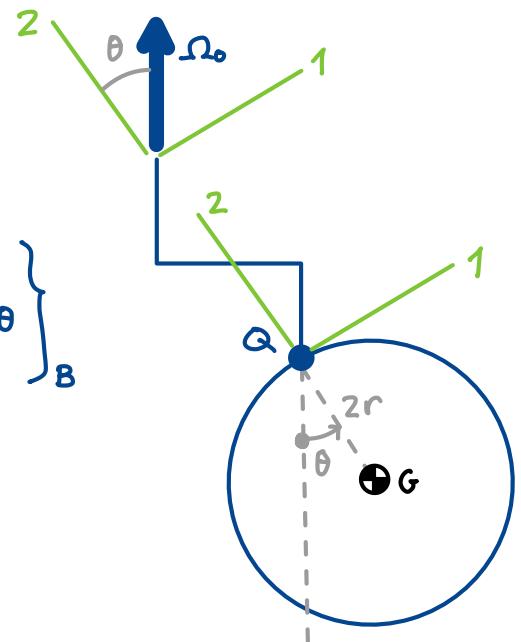
$$= \frac{4mr^2}{5} \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & & \\ & 2 & \\ & & \frac{7}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix}$$

on

$$I_{11} = I_{33} = \frac{28}{5}mr^2 \quad I_{22} = \frac{8}{5}mr^2$$

$$\bar{H}_{RTQ}(Q) = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Omega_0 \sin \theta \\ \Omega_0 \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} I_{11} \Omega_0 \sin \theta \\ I_{22} \Omega_0 \cos \theta \\ I_{33} \dot{\theta} \end{array} \right\}$$

$$\dot{\bar{H}}_{RTQ} = \left\{ \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \\ I_{33} \ddot{\theta} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \Omega_0 \sin \theta \\ \Omega_0 \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} I_{11} \Omega_0 \sin \theta \\ I_{22} \Omega_0 \cos \theta \\ I_{33} \dot{\theta} \end{array} \right\} =$$



$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ I_{33} \ddot{\theta} + I_{22} \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta - I_{11} \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta \end{array} \right\} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ I_{33} \ddot{\theta} + (I_{22} - I_{11}) \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta \end{array} \right\} = \boxed{\begin{array}{l} I_{33} = \frac{28}{5} mr^2 \\ I_{22} - I_{11} = -4mr^2 \end{array}} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{28}{5} mr^2 \ddot{\theta} - 4mr^2 \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Terme complementari del TMC:

$$\left\{ \overline{QG} \times m \bar{a}_T(Q) \right\}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -m \Omega_0^2 r \cos \theta \\ m \Omega_0^2 r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{array}{c} z \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{Diagram: A coordinate system with origin } Q. \text{ A vertical axis } G \text{ points downwards. A horizontal axis } \bar{a}_T(Q) \text{ points leftwards. A diagonal axis } \overline{QG} \text{ connects } Q \text{ to } G. \text{ The angle between } \bar{a}_T(Q) \text{ and } \overline{QG} \text{ is } \theta. \text{ The distance from } Q \text{ to } G \text{ is } 2r. \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2m \Omega_0^2 r^2 \cos \theta \end{pmatrix} \quad \boxed{(\downarrow 2r) \times (\leftarrow m \Omega_0^2 r)}$$

TMC(Q)]₃:

$$-2mr g \sin \theta + 2mr^2 \Omega_0^2 \cos \theta = \frac{28}{5} mr^2 \ddot{\theta} - 4mr^2 \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta$$

↓ dividim per $2mr^2$

$$\frac{14}{5} \ddot{\theta} - 2 \Omega_0^2 \sin \theta \cos \theta - \Omega_0^2 \cos \theta + \frac{g}{r} \sin \theta = 0$$

↓ Eq. mov. per a θ

$$\boxed{\frac{14}{5} \ddot{\theta} - \Omega_0^2 \cos \theta (1 + 2 \sin \theta) + \frac{g}{r} \sin \theta = 0} \quad (\square)$$

Si volem, podem escriure (\square) aillant $\ddot{\theta}$, fent palès que l'acceleració ($\ddot{\theta}$) és funció de variables d'estat mecànic exclusivament (Ω_0, θ)

$$\ddot{\theta} = \frac{5}{14} \left[-\Omega_0^2 \cos \theta (1 + 2 \sin \theta) - \frac{g}{r} \sin \theta \right]$$

funció de les variables d'estat mecànic del sistema

Configuracions d'equilibri ?

← No les demanen però investiguem-les una mica ...

Substituïm a (\square) | $\begin{array}{l} \theta = \theta_{eq} \\ \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \end{array}$

$$-\Omega_0^2 \cos \theta_{eq} (1 + 2 \sin \theta_{eq}) + \frac{g}{r} \sin \theta_{eq} = 0 \quad (\text{eq. transcendental})$$

$\theta_{eq} = 0$ la satisfa, però només quan $\Omega_0 = 0$. La intuició diu que per $\Omega_0 = 0$, $\theta_{eq} = 0$ ha de ser ESTABLE. Veiem-ho:

Substituint a (\square)

queda

$$\begin{cases} \Omega_0 = 0 \\ \theta = \theta_{eq} + \varepsilon = \varepsilon \\ \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \\ \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon} \end{cases}$$

$$\frac{14}{5} \ddot{\varepsilon} + \frac{g}{r} \sin \varepsilon = 0$$

linealitzem

$$\frac{14}{5} \ddot{\varepsilon} + \frac{g}{r} \varepsilon = 0$$

↓

$$\ddot{\varepsilon} = - \frac{5r}{14g} \cdot \varepsilon$$

← $R > 0 \Rightarrow$ Per $\Omega_0 = 0$ $\theta_{eq} = 0$ és d'equilibri estable ✓

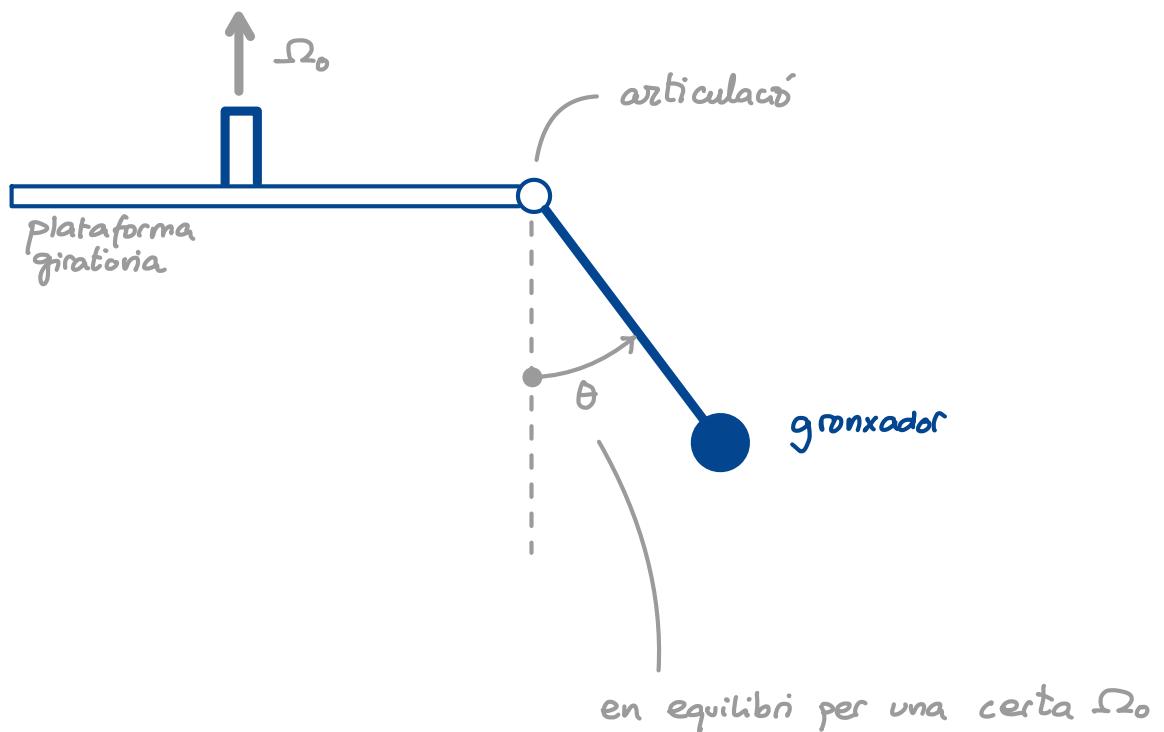
L'eq. transcendental anterior té altres solucions, que es podrien trobar numèricament. Però podem investigar si per un cert angle tindrem equilibri. Per $\theta = 30^\circ$, per exemple, tenim

$$-\Omega_0^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left[1 + 2 \frac{1}{2} \right] + \frac{g}{r} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\Omega_0^2 \sqrt{3} = \frac{g}{2r}$$

$$\Omega_0^2 = \frac{g}{2\sqrt{3}r} \quad \Rightarrow \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2r\sqrt{3}}}$$

És a dir, quan Ω_0 pren el valor $(g/2r\sqrt{3})^{1/2}$ tindrem una posició d'equilibri. És estable? Ho deixem com a deures, però ha de sortir que sí, perquè aquest sistema és anàleg al d'uns gronxadors de fira



Tendència a girar de la bola, partint del repòs?

Suposem que, partint de la bola en repòs ($\theta=0$, $\dot{\theta}=0$) i $\Omega_0=0$, iniciem una rotació Ω_0 sobtada amb el motor. Què farà la bola? Mantindrà $\theta = 0^\circ$, o tendirà a inclinar-se? Veiem-ho:

Substituint $\theta=0$, $\dot{\theta}=0$ a (\square):

$$\frac{14}{5} \ddot{\theta} - \Omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow$$



$$\ddot{\theta} = \frac{5}{14} \Omega_0^2$$



Accel. angular positiva \Rightarrow la bola tendeix a girar ↗
(centrifugament)

Parell motor Γ necessari per garantir $\dot{\psi} = \Omega_0 = \text{ct}$

A quin sistema apliquem els teoremes vectorials ara? Recordem la taula inicial:

Sist.	Incòg.	#incòg. total	Problema
bola	5 ie, $\ddot{\theta}$	6	DET ✓
bola + forq	5 ie, $\ddot{\theta}, \Gamma$	7	INDET ✗
forq	10 ie, Γ	11	INDET ✗

Ara és DET!

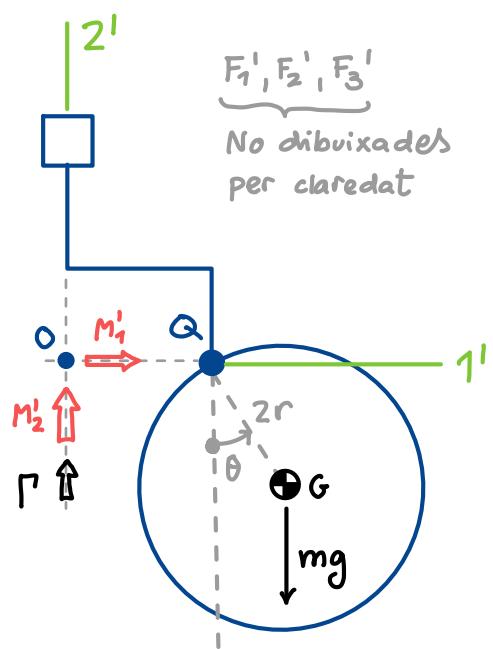
El sist = bola + forq és, dels que involucra Γ , el de menys incògnites. Com que ara ja sabem $\ddot{\theta}$ (hem trobat l'eq. del mov. que en determina el seu valor), l'aplicació de TQM + TMC a aquest sistema ara generarà un problema determinat. Dels dos teorems, el únic que involucrará Γ és el TMC, per tant aplicarem aquest teorema.

A quin punt l'aplicarem? Mirem com és el torsor $T \rightarrow \text{forq}$ en un punt de l'eix del motor, p.ex. O:

$$\left\{ \bar{F}_{T \rightarrow \text{forq}} \right\}_{B'} = \left\{ \begin{matrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ M_{T \rightarrow \text{forq}} \right\}_{B'} = \left\{ \begin{matrix} M'_1 \\ 0 \\ M'_3 \end{matrix} \right\}$$

Utilitzem B' perquè aquesta base té una direcció (la 2') paral·lela a l'eix motor i permet veure aquest zero



Si aplicuem TMC a O tindrem, en ser O fix a T,

$$\sum \bar{M}_{ext}(O) - \cancel{\overline{OG} \times m \underbrace{\ddot{a}_T(O)}_{\ddot{o}}} = \dot{H}_{RTO}(O)$$

i a més

$$\left\{ \sum \bar{M}_{ext}(O) \right\}_{B'} = \left\{ \begin{array}{l} M_1' \\ \Gamma \\ M_3' - mg_2 r \sin \theta \end{array} \right\}$$

Γ = incògnites

Veiem que Γ apareix a la comp. Z' sense cap altra incògnita.

Ja ho tenim! El full de ruta per trobar Γ és:

Full ruta
per Γ

sistema = bola + forq

$TMC(O) \Big|_{Z'}$

← Només en dir. Z'
(ho tindrem al cap!)

Pregunta freqüent:

I per què aplicuem TMC a O i no a Q, o a G?

El torsor $T \rightarrow$ forq a Q (o a G) no és tan senzill com a O. Si passem el de O a Q (amb la fórmula del canvi de punt del formulari) veurem que F_1' , F_2' i F_3' creen moments resp. Q que fan que a $\sum \bar{M}_{ext}(Q)$ no apareguin F_1' , F_2' i F_3' . Per tant, la formulació de TMC a Q obligaria a afegir les 3 eqs del TQM per poder resoldre el sistema d'equacions resultant. Es pot fer, però es més feixuc! Passaria una cosa semblant amb l'aplicació del TMC a G.

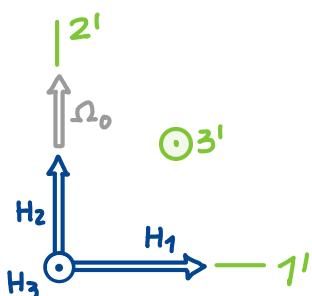
Així doncs, volem formular

$$\underbrace{\sum \bar{M}_{ext}(o)}_{\Gamma} \Big|_{Z'} = \dot{\bar{H}}_{RTD}(o) \Big|_{Z'}$$

Ara fixem-nos. No sabem $\bar{H}_{RTD}(o)$ encara, però en base $B' = (1', 2', 3')$ tindrà tres components

$$\{\bar{H}_{RTD}(o)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{Bmatrix}$$

que geomètricament podem representar com



- \bar{H}_2 no gira \rightarrow sols té canvi de valor
- \bar{H}_1 i \bar{H}_3 \rightarrow tenen canvi de valor i giren amb Ω_o direcció en el pla (1', 3')

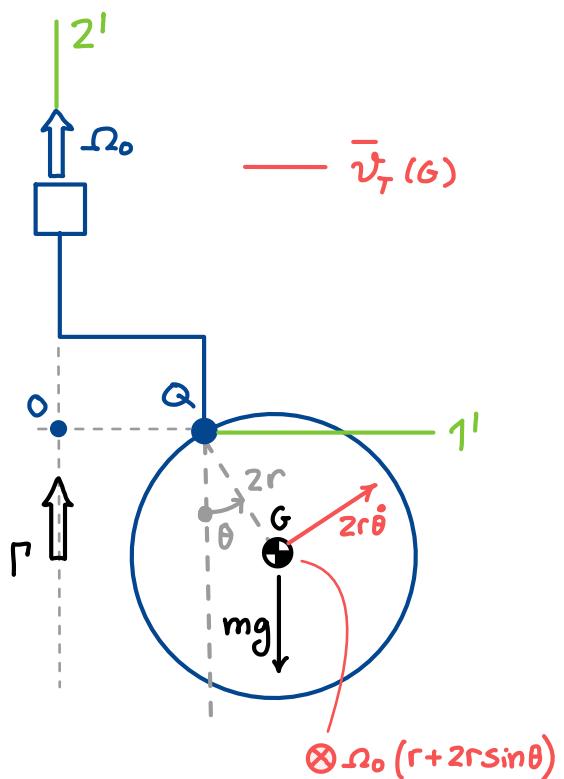
i d'aquí veiem que només la derivada temporal de \bar{H}_2 té comp. en dir. 2'. Per tant, només ens cal trobar la component H_2 de $\bar{H}_{RTD}(o)$ i derivar-la. Som-hi:

Com que O \notin Bola, apliquem la descomp. baricèntrica:

$$\bar{H}_{RTD}(o) = \bar{H}_{RTG}(G) + \underbrace{\bar{H}_{RTD}^{\oplus}(o)}_{\bar{G} \times m \bar{v}_T(G)}$$

$$\bar{v}_T(G) = (\rightarrow zr\dot{\theta}) + (\otimes \Omega_o(r+2rsin\theta))$$

Comp. movim. | $AB = T$
REL = forq.



$$\left\{ \bar{H}_{RTD}^{\oplus}(0) \right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} r + 2r\sin\theta \\ -2r\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} m2r\dot{\theta}\cos\theta \\ m2r\dot{\theta}\sin\theta \\ -m\Omega_0(r + 2r\sin\theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bullet \\ m\Omega_0(r + 2r\sin\theta)^2 \\ \bullet \end{Bmatrix}$$

el seu valor
no ens cal

$$\left\{ \bar{H}_{RTG}(G) \right\}_{B'} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bullet \\ \Omega_0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bullet \\ I\Omega_0 \\ I\dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Per tant, sumant els termes gros,

$$\left\{ \bar{H}_{RTD}(0) \right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \bullet \\ I\Omega_0 + m\Omega_0(r + 2r\sin\theta)^2 \\ \bullet \end{Bmatrix}$$

H_2

De l'anàlisi geomètric d'abans

$$\left\{ \dot{H}_{RTD}(0) \right\}_{B'} = \begin{Bmatrix} \bullet \\ 2m\Omega_0(r + 2r\sin\theta)2r\dot{\theta}\cos\theta \\ \bullet \end{Bmatrix}$$

\dot{H}_2

I ara ja podem formular $TMC(0) \Big|_{Z'}$:

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) \Big|_{Z'} = \dot{H}_{RTD}(0) \Big|_{Z'}$$

$\Gamma = 4mr^2\Omega_0\dot{\theta}(1+2\sin\theta)\cos\theta$