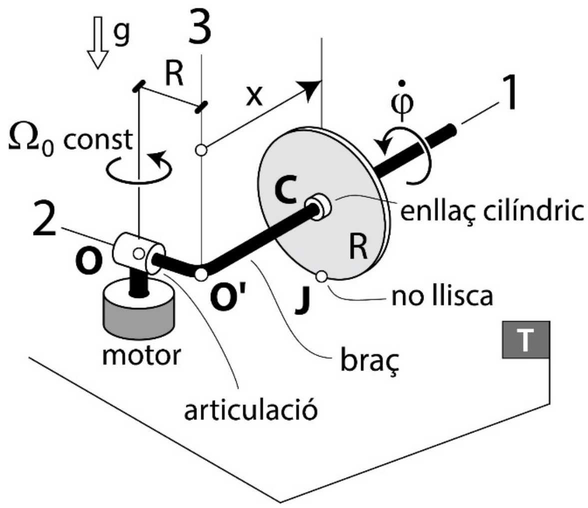
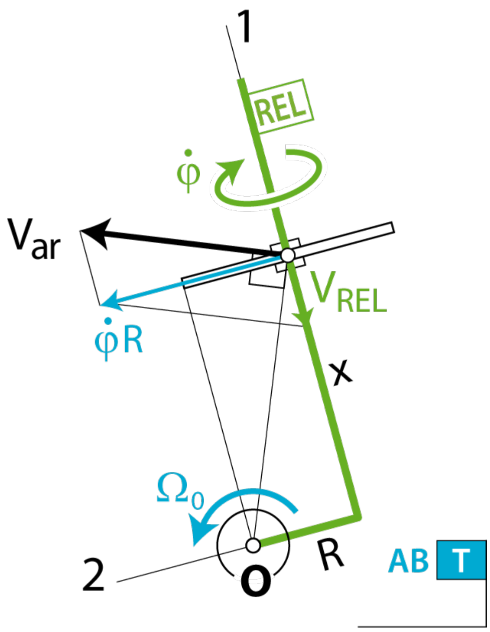
PROBLEMES BREUS (1h30min)



I [4p] La roda es mou sense lliscar sobre el terra impulsada pel braç, que gira amb velocitat angular constant Ω_0 respecte del terra sota l'acció d'un motor. Entre roda i braç hi ha un enllaç cilíndric. Quins són els valors de la rotació pròpia de la roda $\dot{\varphi}$ i de la velocitat $\dot{x}$ en funció de Ω_0? Quina és l'acceleració angular de la roda respecte del terra, $\bar{\alpha}_T^{\text{roda}}$?

RESOLUCIÓ



$$\left.\begin{array}{l}\text{AB: terra}\\ \text{REL: braç}\end{array}\right\}\ \bar{\Omega}_{AB}^{\text{roda}} = \bar{\Omega}_{REL}^{\text{roda}} + \bar{\Omega}_{AB}^{REL} = \bar{\dot{\varphi}} + \bar{\Omega}_0 \;\Rightarrow\; \left\{\bar{\Omega}_T^{\text{roda}}\right\} = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi} \\ 0 \\ \Omega_0 \end{Bmatrix}$$

Si la roda no llisca sobre el terra, la velocitat del seu centre ha de ser estrictament en la direcció diametral:

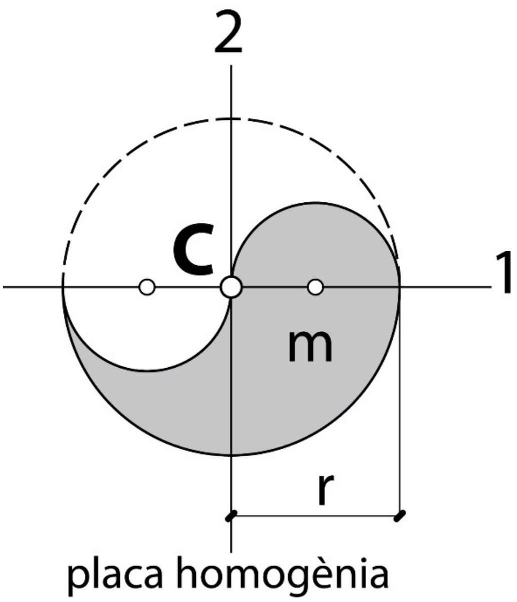
$$\left\{\bar{v}_T(\mathbf{C})\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R\dot{\varphi} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{AB: terra}\\ \text{REL: braç}\end{array}\right\}\ \bar{v}_{AB}(\mathbf{C}) = \bar{v}_{REL}(\mathbf{C}) + \bar{v}_{ar}(\mathbf{C}) = \bar{v}_{REL}(\mathbf{C}) + \bar{\Omega}_0 \times \overline{\mathbf{OC}}$$

$$\left\{\bar{v}_T(\mathbf{C})\right\} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x \\ -R \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x} + R\Omega_0 \\ x\Omega_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{array}{l} \dot{x} = -R\Omega_0 \\ \dot{\varphi} = \dfrac{x}{R}\Omega_0 \end{array}} \;\Rightarrow\; \left\{\bar{\Omega}_T^{\text{roda}}\right\} = \begin{Bmatrix} (-x/R)\Omega_0 \\ 0 \\ \Omega_0 \end{Bmatrix}$$

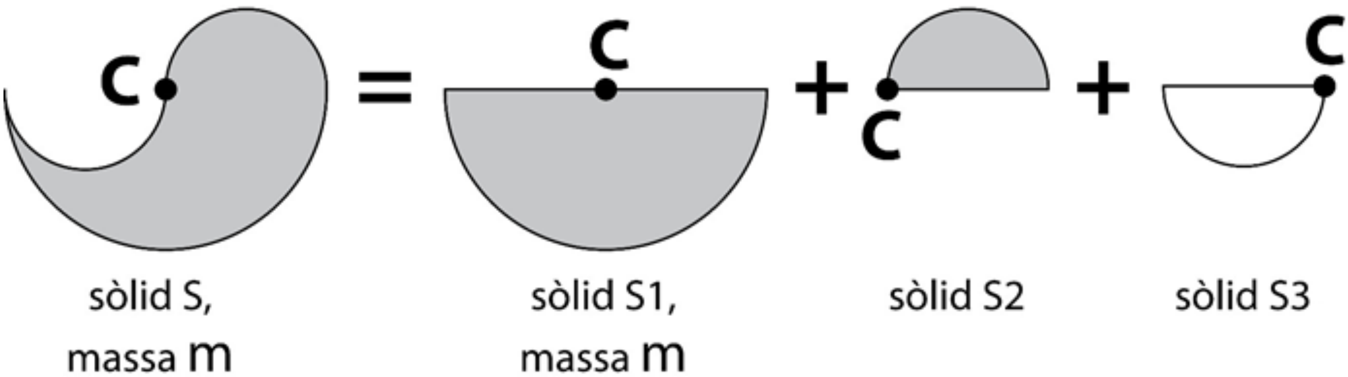
$$\left\{\bar{\alpha}_T^{\text{roda}}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\bar{\Omega}_T^{\text{roda}}\right\} + \left\{\bar{\Omega}_T^{B}\right\} \times \left\{\bar{\Omega}_T^{\text{roda}}\right\} = \begin{Bmatrix} (-\dot{x}/R)\Omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} (-x/R)\Omega_0 \\ 0 \\ \Omega_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (-\dot{x}/R)\Omega_0 \\ (-x/R)\Omega_0^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\left\{\bar{\alpha}_T^{\text{roda}}\right\} = \begin{Bmatrix} (-\dot{x}/R)\Omega_0 \\ (-x/R)\Omega_0^2 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

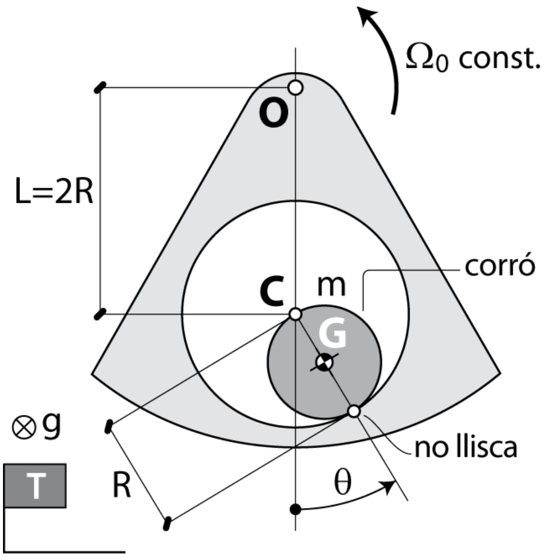


II [4p] Quin és el tensor d'inèrcia de la placa homogènia en el punt **C**?

RESOLUCIÓ



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{II}(\mathbf{C}) = \mathrm{II}_{S1}(\mathbf{C}) + \mathrm{II}_{S2}(\mathbf{C}) + \mathrm{II}_{S3}(\mathbf{C}) \\ \mathrm{II}_{S2}(\mathbf{C}) = -\mathrm{II}_{S3}(\mathbf{C}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\mathrm{II}(\mathbf{C})\right] = \left[\mathrm{II}_{S1}(\mathbf{C})\right] \Rightarrow \boxed{\left[\mathrm{II}(\mathbf{C})\right] = \frac{1}{4} mr^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$



III [4p] El corró, de massa m, es mou sense lliscar dins un forat cilíndric, de radi R, d'un suport de massa negligible, articulat a un **terra horitzontal**, que gira amb velocitat angular constant Ω_0 respecte del terra sota l'acció d'un motor. Quin és el moment cinètic del sistema al punt **C** (centre del forat), $\overline{H}_{RTC}(\mathbf{C})$?

RESOLUCIÓ

$\mathbf{C} \notin$ corró $\Rightarrow$ cal fer descomposició baricèntrica

$$\overline{H}_{RTC}(\mathbf{C}) = \overline{H}_{RTG}(\mathbf{G}) + \overline{H}^{\oplus}_{RTC}(\mathbf{C}) = \mathrm{II}(\mathbf{G})\overline{\Omega}^{\text{corró}}_{RTG} + \overline{\mathbf{CG}} \times m\overline{v}_{RTC}(\mathbf{G})$$

$$\overline{\Omega}^{\text{corró}}_{RTG} = \overline{\Omega}^{\text{corró}}_{T} = \overline{\Omega}^{\text{corró}}_{sup} + \overline{\Omega}^{sup}_{T} = (\otimes\dot{\theta}) + (\odot\Omega_0) = \left[\otimes(\dot{\theta} - \Omega_0)\right]$$

$$\overline{H}_{RTC}(\mathbf{C}) = \left[\otimes\frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\right)^2(\dot{\theta} - \Omega_0)\right] + \overline{\mathbf{CG}} \times m\overline{v}_{RTC}(\mathbf{G})$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{AB: terra}\\ \text{REL: RTC}\end{array}\right\} \overline{v}_{RTC}(\mathbf{G}) = \overline{v}_{T}(\mathbf{G}) - \overline{v}_{ar}(\mathbf{G}) = \overline{v}_{T}(\mathbf{G}) - \overline{v}_{T}(\mathbf{C})$$

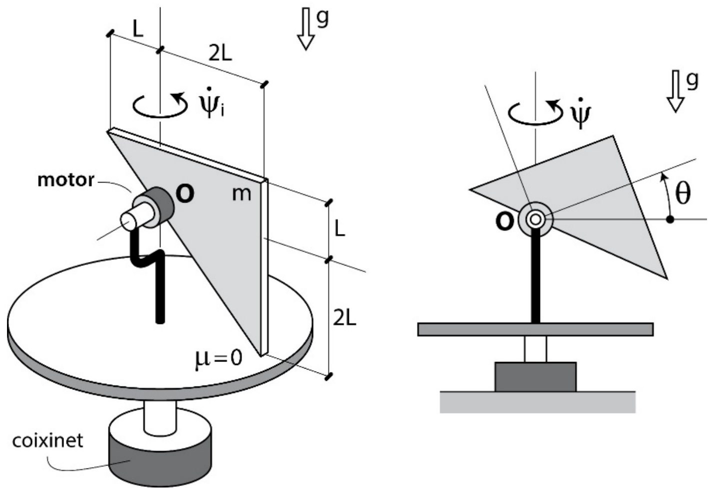
$$\left.\begin{array}{l}\text{AB: terra}\\ \text{REL: suport}\end{array}\right\} \overline{v}_{T}(\mathbf{G}) = \overline{v}_{sup}(\mathbf{G}) + \overline{v}_{ar}(\mathbf{G}) = \overline{v}_{sup}(\mathbf{G}) + \overline{v}_{T}(\mathbf{C}) + \overline{\Omega}_0 \times \overline{\mathbf{CG}}$$

$$\overline{v}_{RTC}(\mathbf{G}) = \left[\overline{v}_{sup}(\mathbf{G}) + \overline{v}_{T}(\mathbf{C}) + \overline{\Omega}_0 \times \overline{\mathbf{CG}}\right] - \overline{v}_{T}(\mathbf{C}) = \overline{v}_{sup}(\mathbf{G}) + \overline{\Omega}_0 \times \overline{\mathbf{CG}} =$$
$$= \left[\nearrow (R/2)\dot{\theta}\right] + (\odot\Omega_0) \times \left[\searrow (R/2)\right] = \left[\nearrow (R/2)(\Omega_0 + \dot{\theta})\right]$$

$$\overline{H}_{RTC}(\mathbf{C}) = \left[\otimes\frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\right)^2(\dot{\theta} - \Omega_0)\right] + \left[\searrow (R/2)\right] \times m\left[\nearrow (R/2)(\Omega_0 + \dot{\theta})\right] =$$
$$= \left[\otimes\frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\right)^2(\dot{\theta} - \Omega_0)\right] + \left[\odot m\left(\frac{R}{2}\right)^2(\Omega_0 + \dot{\theta})\right] = \left[\odot\frac{1}{8}mR^2(3\Omega_0 + \dot{\theta})\right]$$

$$\boxed{\overline{H}_{RTC}(\mathbf{C}) = \left[\odot\frac{1}{8}mR^2(3\Omega_0 + \dot{\theta})\right]}$$

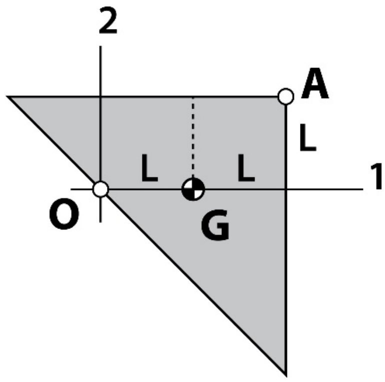
IV [4p] La placa triangular homogènia, de massa m i costats 3L, manté contacte amb una plataforma llisa, de massa negligible, que gira respecte del terra amb velocitat angular $\dot{\psi}_i$ constant. Entre plataforma i placa hi ha un motor. En un cert instant, el motor introdueix una rotació i modifica l'orientació de la placa des de $\theta = 0^o$ fins a $\theta = 90^o$. Quin és, en aquesta última configuració, el valor de la velocitat angular $\dot{\psi}_f$ de la plataforma respecte del terra?



RESOLUCIÓ

SISTEMA: placa+plataforma , TMC a **O**: $\sum \bar{M}_{ext}(\mathbf{O}) = \dot{\bar{H}}_{RTO}(\mathbf{O})$

$\sum \bar{M}_{ext}(\mathbf{O})\big]_{vert} = 0 \;\Rightarrow\; \bar{H}_{RTO}(\mathbf{O})\big]_{vert} = \text{constant}$

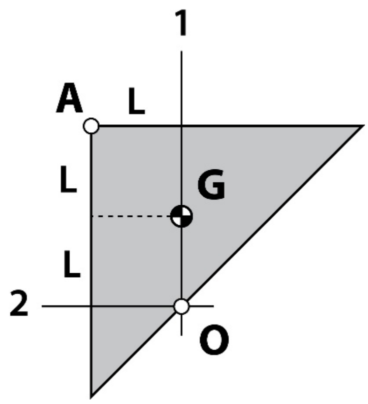


<u>Configuració $\theta = 0^o$</u>

$\bar{H}_{RTO}(\mathbf{O}) = \mathrm{II}(\mathbf{O})\bar{\dot{\psi}}_i \;\Rightarrow\; \bar{H}_{RTO}(\mathbf{O})\big]_{vert} = \left(\Uparrow \mathrm{I}_{22}\dot{\psi}_i\right)$

$\mathrm{I}_{22}(\mathbf{O}) = \mathrm{I}_{22}(\mathbf{G}) + \mathrm{I}_{22}^{\oplus}(\mathbf{O}) = \mathrm{I}_{22}(\mathbf{A}) - \mathrm{I}_{22}^{\oplus}(\mathbf{A}) + \mathrm{I}_{22}^{\oplus}(\mathbf{O})$

$\mathrm{I}_{22}(\mathbf{O}) = \frac{1}{6}m(3L)^2 - mL^2 + mL^2 = \frac{3}{2}mL^2 \;\Rightarrow\; \bar{H}^{i}_{RTO}(\mathbf{O})\big]_{vert} = \left(\Uparrow \frac{3}{2}mL^2\dot{\psi}_i\right)$



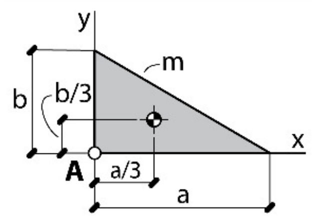
<u>Configuració $\theta = 90^o$</u>

$\bar{H}_{RTO}(\mathbf{O}) = \mathrm{II}(\mathbf{O})\bar{\dot{\psi}}_f \;\Rightarrow\; \bar{H}_{RTO}(\mathbf{O})\big]_{vert} = \left(\Uparrow \mathrm{I}_{11}\dot{\psi}_f\right)$

$\mathrm{I}_{11}(\mathbf{O}) = \mathrm{I}_{11}(\mathbf{G}) + \mathrm{I}_{11}^{\oplus}(\mathbf{O}) = \mathrm{I}_{11}(\mathbf{A}) - \mathrm{I}_{11}^{\oplus}(\mathbf{A}) + \mathrm{I}_{11}^{\oplus}(\mathbf{O})$

$\mathrm{I}_{11}(\mathbf{O}) = \frac{1}{6}m(3L)^2 - mL^2 + 0 = \frac{1}{2}mL^2 \;\Rightarrow\; \bar{H}^{f}_{RTO}(\mathbf{O})\big]_{vert} = \left(\Uparrow \frac{1}{2}mL^2\dot{\psi}_f\right)$

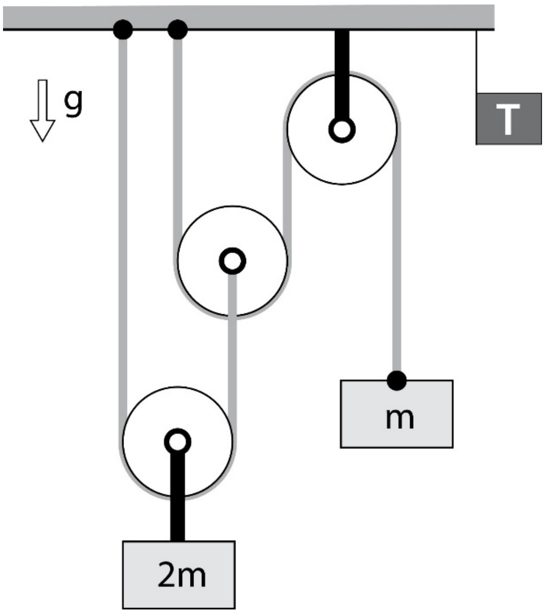
$\bar{H}^{i}_{RTO}(\mathbf{O})\big]_{vert} = \bar{H}^{f}_{RTO}(\mathbf{O})\big]_{vert} \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{\psi}_f = 3\dot{\psi}_i}$



$\mathrm{II}(\mathbf{A})$

$\mathrm{I}_{xx} = \frac{1}{6}mb^2$

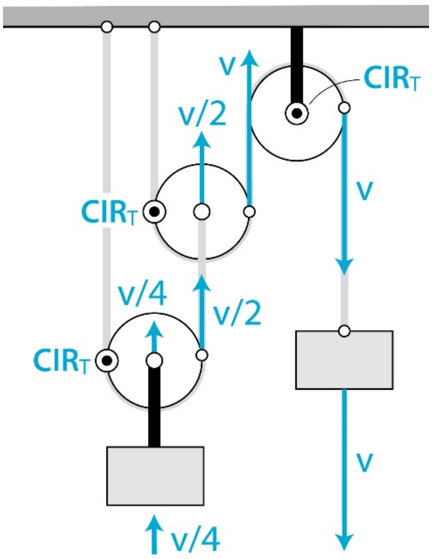
$\mathrm{I}_{xy} = \frac{-1}{12}mab$



V [4p] El sistema està format per tres politges de massa negligible, i dos blocs de massa m i 2m. La politja de la dreta està articulada al sostre, en tant que les altres dues recolzen sense lliscar sobre cordes inextensibles i de massa negligible. Quina és l'acceleració del bloc de massa m respecte del terra, $\bar{a}_T(m)$?

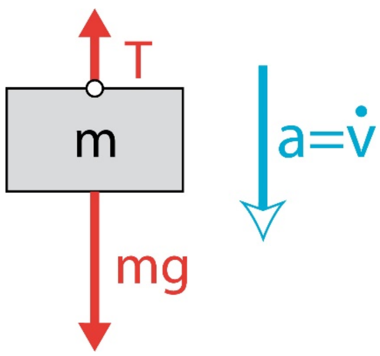
RESOLUCIÓ

Suposem que el bloc de massa m baixa amb velocitat v respecte del terra.
Tenint en compte que no hi ha lliscament dentre cordes i politges:



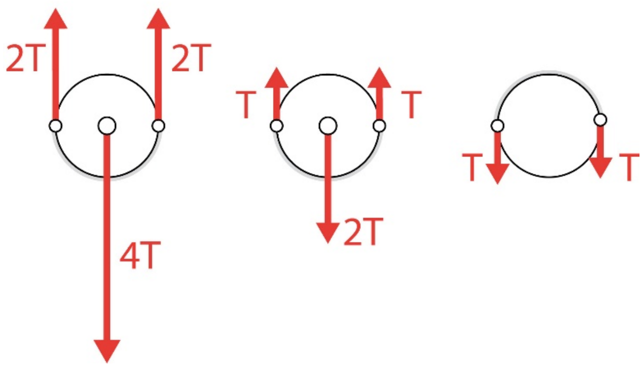
Per tant: $\bar{a}_T(m) = (\downarrow \dot{v}) = (\downarrow a)$, $\bar{a}_T(2m) = \left(\uparrow \frac{\dot{v}}{4}\right) = \left(\uparrow \frac{a}{4}\right)$

TQM aplicat al bloc m:
$(\uparrow T) + (\downarrow mg) = (\downarrow ma)$



Ja que les politges tenen massa nul·la, la força resultant i el moment resultant sobre cadascuna d'elles han de ser zero. Això, aplicat de dreta a esquerra, condueix als següents valors de tensions:

politja esquerra   politja central   politja dreta



Finalment, el TQM aplicat al bloc de massa 2m condueix a:

$$(\uparrow 4T) + (\downarrow 2mg) = \left(\uparrow 2m\frac{a}{4}\right) = \left(\uparrow \frac{1}{2}ma\right)$$

Combinant els TQM aplicats als blocs:

$$\left.\begin{array}{l} 4T - 2mg = \frac{1}{2}ma \\ mg - T = ma \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = \frac{4}{9}g}$$