5P

Versió 0.9 (preliminar)

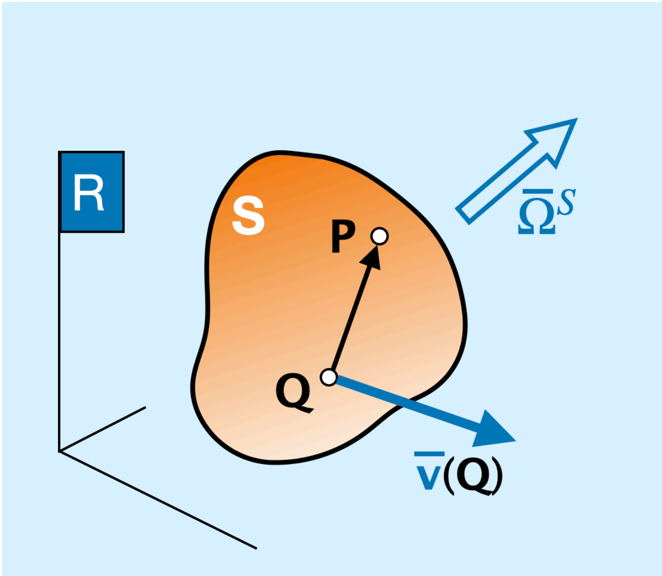
Cinemàtica del sòlid rígid 3D
(CSR 3D)

Lluís Ros
https://lluisros.github.io/mecanica

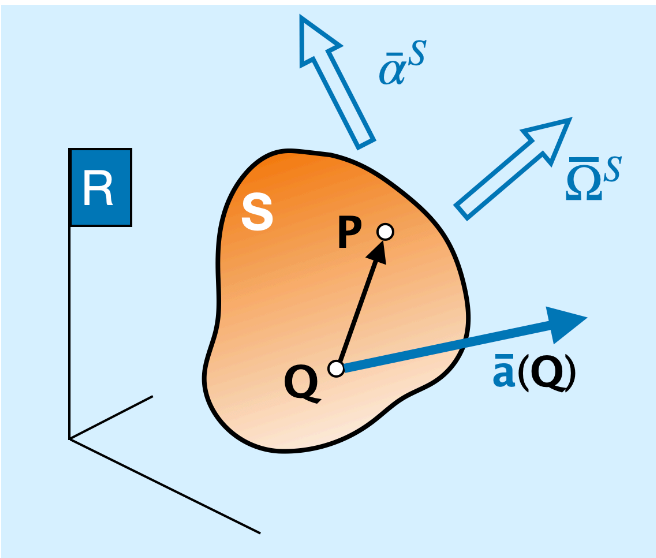
Cinemàtica del sòlid rígid (CSR)

Com que tots els vectors i derivades són en la referència
R, hem omès el subíndex R per alleugerir la notació
(al formulari s'ha fet el mateix)

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{Q}) + \bar{\Omega}^{S} \times \overline{\mathbf{QP}}$$



$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{Q}) + \bar{\Omega}^{S} \times \left(\bar{\Omega}^{S} \times \overline{\mathbf{QP}}\right) + \overbrace{\bar{\alpha}^{S}}^{=\frac{d\bar{\Omega}^{S}}{dt}} \times \overline{\mathbf{QP}}$$

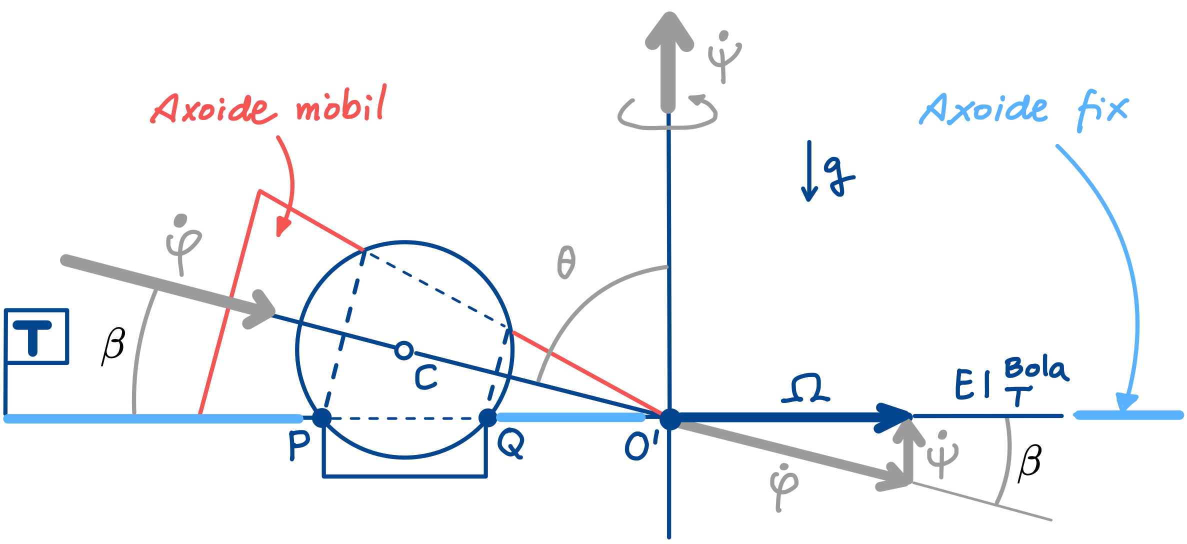


Avui aplicarem les anteriors expressions per calcular velocitats i acceleracions de punts de sòlids rígids.

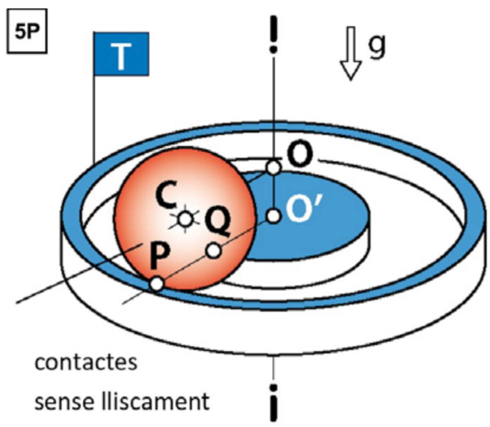
Començarem amb l'exercici de la bola rodolant sobre pista circular (pàgina següent), que ja vàreu treballar a teoria. Allí el vau treballar a nivell de velocitats, i nosaltres ho farem a nivell d'acceleracions.

Essència de l'argument vist a teoria:

El moviment de la bola sembla complicat. Costa definir uns angles d'Euler que l'expliquin perquè la bola no té cap simetria especial, i d'entrada no veiem com podem triar un eix "phipunt" de rotació pròpia (com al giroscopi o la baldufa). La solució passa per observar com evoluciona l'eix instantani de la bola al llarg del temps. El conjunt de rectes de la "referència bola" que en algun moment han sigut eix instantani és l'**axoide mòbil** (un con d'obertura β). El conjunt de rectes de la "referència terra" que en algun moment han sigut eix instantani és l'**axoide fix** (el pla horitzontal que passa per **O',** vist com a con d'obertura 90º). Ara: l'axoide mòbil rodola sobre el fix al llarg del temps, i es pot veure com una **baldufa caiguda**! El seu eix de simetria ens proporciona l'eix phipunt que volíem, i ara entenem el moviment de la bola. És com el d'una baldufa amb nutació θ constant. Finalment, veiem que els vectors phipunt i psipunt no són independents: sumats han de donar un vector horitzontal de valor Ω, que és la velocitat angular de la bola respecte T. La bola es mou amb un grau de llibertat, que podem associar a psipunt. Del dibuix queda clar que Ω = psipunt / tan(β).



Passem a fer l'exercici, recordant en cada pas allò que s'ha fet a teoria.



La bola es mou sense lliscar sobre una pista circular fixa a terra (T).

Calcula $\bar{\alpha}_T^{bola}$, $\bar{a}_T(\mathbf{O}_{bola})$, $\bar{a}_T(\mathbf{O}'_{bola})$.

Per trobar $\bar{\alpha}_T^{Bola}$ cal trobar $\bar{\Omega}_T^{Bola}$ i derivar-la respecte el temps. A teoria ja vam calcular $\bar{\Omega}_T^{bola}$, però recordem com es feia:

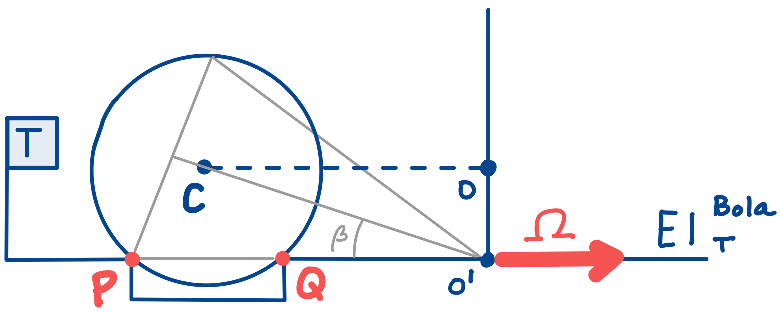
$\bar{\Omega}_T^{Bola}$

$\underbrace{v(P) = v(Q) = 0}$

$\Downarrow$

$EI_T^{Bola} = \overleftrightarrow{PQ}$

$\bar{v}_{llisc} = \bar{0}$!



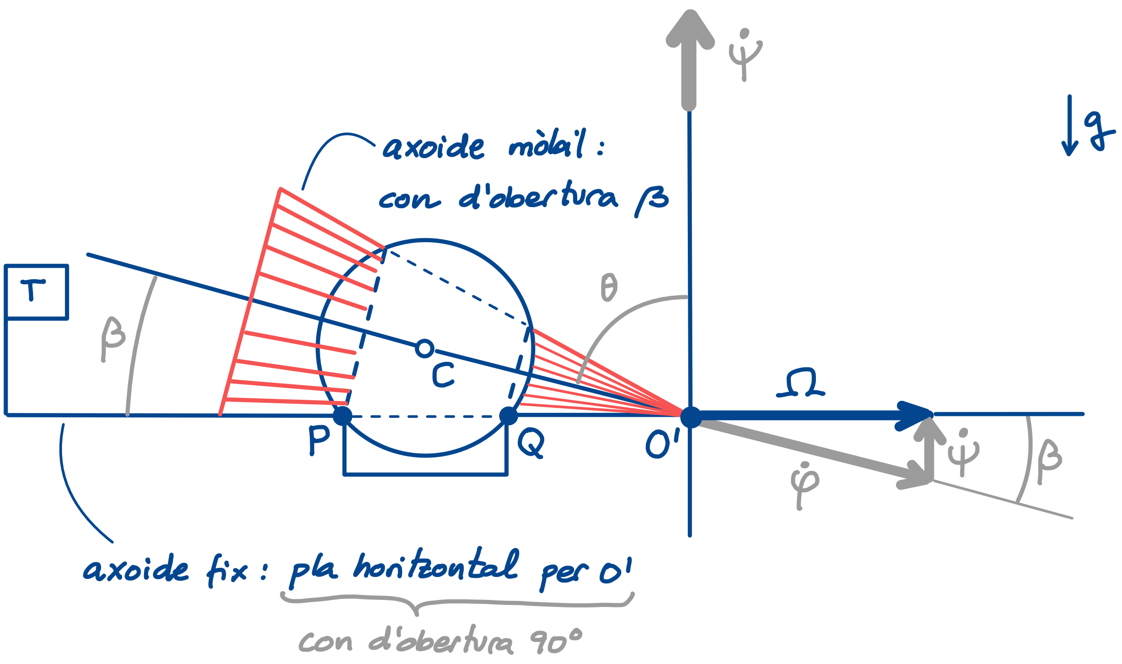
Per tant $\bar{\Omega}_T^{Bola}$ ha de tenir la forma

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = (\Rightarrow \underbrace{\Omega}_{\text{pdet}})$$

Axoide fix | Rectes del terra que en algun moment han sigut EI_T^{Bola} } con d'obertura 90° (Pla horitz. per O')

Axoide mòbil | Rectes de la bola que en algun moment han sigut EI_T^{Bola} } con d'obertura β

Dibuixem els axoides:



En cada instant 1 recta de l'ax. mòbil està en contacte amb 1 recta del fix. ⇒ L'ax. mòbil rodola sobre el fix!

Els punts de l'ax. mòbil són fixos a la ref. bola.

⇓

Moviment bola resp. T = Movim. ax. mòbil resp. ax. fix.

⇓

Podem assimilar la bola a una baldufa cònica caiguda amb eix de simetria CO' i obertura β.

⇓

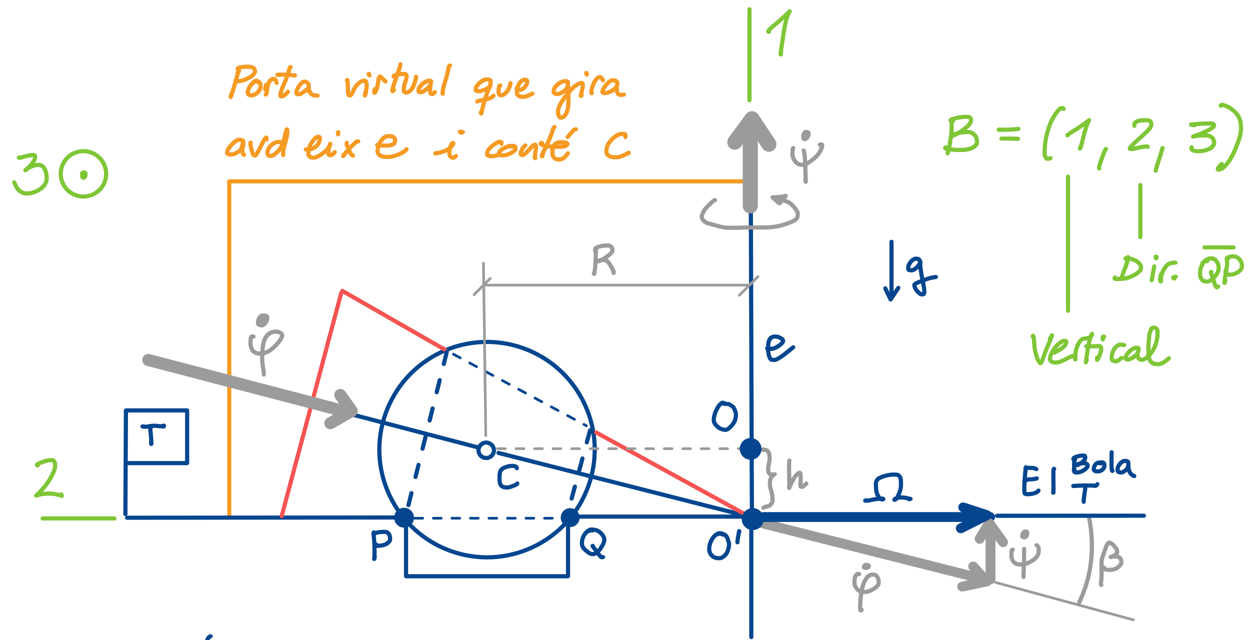
Podem veure $\bar\Omega^{\text{Bola}}_{T}$ com suma d'una vel. angular de precessió ($\bar{\dot\psi}$) més una de rotació pròpia ($\bar{\dot\varphi}$):

Igual que en una baldufa però amb $\bar{\dot\theta} = \bar 0$ perquè ara l'angle θ és ct.

$$\bar\Omega^{\text{Bola}}_{T} = \underbrace{(\Uparrow \dot\psi) + (\searrow \dot\varphi)}_{\text{sumades han de donar } (\Rightarrow \Omega)}$$

$(\uparrow \dot\psi)$ = vel. angular de precessió d'una porta virtual que gira avd eix e i conte sempre el punt C

$(\searrow \dot\varphi)$ = vel. angular de rotació pròpia de la bola (vista com a baldufa) avd eix CO'.



Finalment veiem :

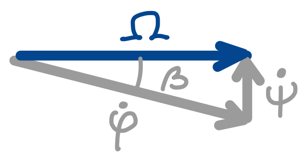
2 maneres de calcular Ω

1 Utilitzant que C ∈ Porta i C ∈ Bola a la vegada:

$$\underbrace{\odot\, \dot\psi R}_{\bar v_T(C_{Porta})} = \underbrace{\odot\, \Omega h}_{\bar v_T(C_{Bola})} \Longrightarrow \boxed{\Omega = \frac{R}{h}\dot\psi}$$

2 Via el triangle de vel. angulars:

$$\boxed{\Omega = \frac{\dot\psi}{tg\beta} = \frac{\dot\psi}{\frac{h}{R}} = \frac{R}{h}\dot\psi}$$



En conclusió:

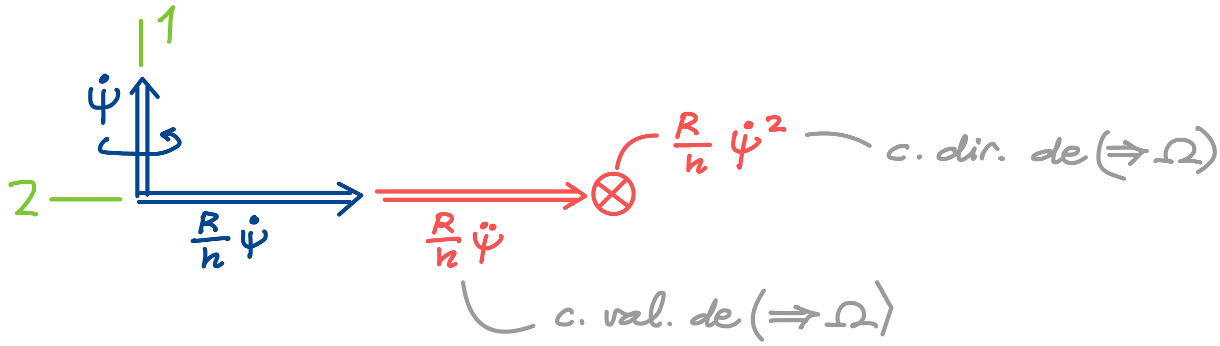
$$\bar\Omega^{Bola}_{T} = \left(\Rightarrow \overbrace{\frac{R}{h}\dot\psi}^{\Omega}\right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R}{h}\dot\psi \\ 0 \end{Bmatrix}_B$$

VEC. PEL·LI!

$\bar{\alpha}_T^{Bola}$

Cal derivar $\bar{\Omega}_T^{Bola}$ resp. t (geomètricament o analítica)

Derivant geomètricament:



$$\bar{\alpha}_T^{Bola} = \left(\Rightarrow \frac{R}{h}\ddot\psi\right) + \left(\otimes \frac{R}{h}\dot\psi^2\right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R}{h}\ddot\psi \\ -\frac{R}{h}\dot\psi^2 \end{Bmatrix}_B$$

Derivant analíticament:

$$\left\{\bar{\alpha}_T^{Bola}\right\}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R}{h}\ddot\psi \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Deriv. components de } \bar\Omega_T^{Bola}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot\psi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\bar\Omega_T^{B}} \times \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R}{h}\dot\psi \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\bar\Omega_T^{Bola}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R}{h}\ddot\psi \\ -\frac{R}{h}\dot\psi^2 \end{Bmatrix}_B$$

$\bar{a}_T(O_{Bola})$

A teoria ja vam calcular $\bar{v}_T(O_{Bola})$. Recordem-ho(*):

$$\bar{v}_T(O_{Bola}) = \underbrace{\odot\, \Omega h}_{h:\ \text{Dist. de } O_{Bola} \text{ a } EI_T^{Bola}} \overset{\Omega = \frac{R}{h}\dot\psi}{=} \odot\, R\dot\psi \longleftarrow \text{VEC. FOTO!}$$

(*) En detall, aquest càlcul és, aplicant CSR des de O'_{Bola}:

$$\bar{v}_T(O_{Bola}) = \underbrace{\bar{v}_T(O'_{Bola})}_{0} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Bola}}_{(\Rightarrow \frac{R}{h}\dot\psi)} \times \underbrace{\overline{O'O}}_{(\uparrow h)} = \odot\, R\dot\psi$$

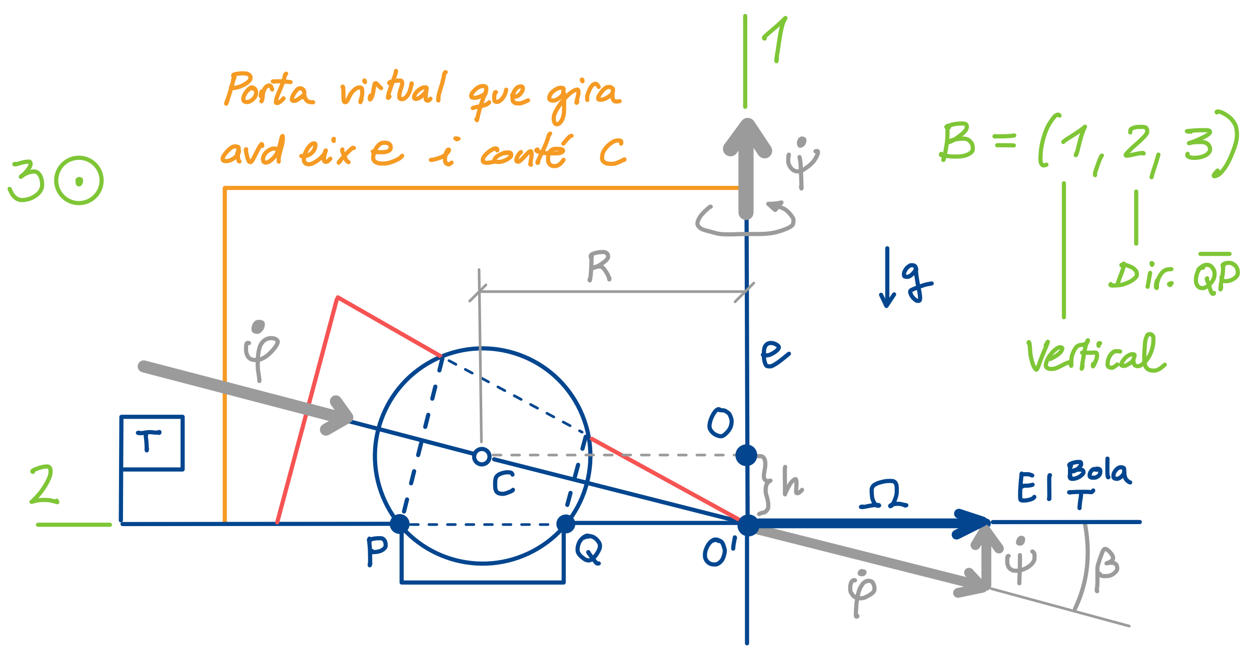
Ara, per trobar $\bar{a}_T(O_{Bola})$ potser estem temptats de derivar $\bar{v}_T(O_{Bola})$ resp. el temps (geomètricament o analítica). Seria un error! Fixem-nos que $\odot R\dot{\psi}$ només és la velocitat de O_{Bola} en l'instant en que O_{Bola} passa pel punt més alt. Un picosegon + tard, O_{Bola} tindrà una vel. diferent, amb components $\odot, \downarrow, \rightarrow$, que no sabem quines seran. Per tant, $\odot R\dot{\psi}$ és un vector particularitzat (o "foto") i no el podem derivar. Com calcularem $\bar{a}_T(0)$, doncs? Aplicant CSR des de C:

$$\bar{a}_T(0) = \underbrace{\bar{a}_T(C)}_{A} + \underbrace{\bar{\alpha}_T^{Bola} \times \overline{CO}}_{B} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Bola} \times \left(\bar{\Omega}_T^{Bola} \times \overline{CO}\right)}_{0 \text{ pq } \bar{\Omega}_T^{Bola} \parallel \overline{CO}} =$$

Aplicant CSR des de O' aq. terme no s'anul·laria i surt un xic + laboriós

$$= \underbrace{(\odot \ddot{\psi} R) + (\rightarrow \dot{\psi}^2 R)}_{A} + \underbrace{\left[\left(\Rightarrow \frac{R}{h}\ddot{\psi}\right) + \left(\vec{\otimes} \frac{R}{h}\dot{\psi}^2\right)\right] \times (\rightarrow R)}_{B} =$$

$$= (\odot \ddot{\psi} R) + (\rightarrow \dot{\psi}^2 R) + \left(\downarrow \frac{R^2\dot{\psi}^2}{h}\right) = \left\{ \begin{matrix} -\frac{R^2\dot{\psi}^2}{h} \\ -\dot{\psi}^2 R \\ -\ddot{\psi} R \end{matrix} \right\}_B$$



$\bar{a}_T(O'_{Bola})$

O'_{Bola} és l'extrem de l'axoide mòbil, que roman fix a T

Per tant $\bar{v}_T(O'_{Bola}) = 0 \ \forall t \Rightarrow \bar{a}_T(O'_{Bola}) = 0$

Així doncs $O'_{Bola} = O'_{Terra}$

$\bar{a}_T(P_{Bola})$

Això no ens ho demanen però ho fem per practicar.

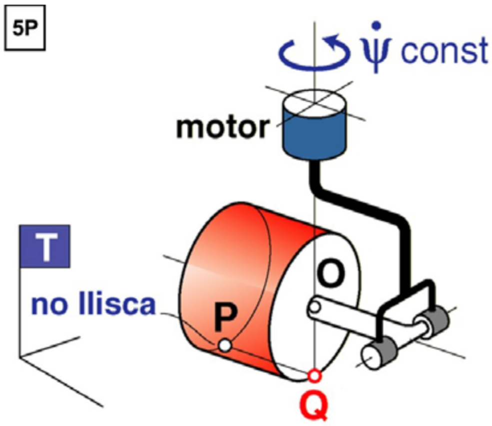
Apliquem CSR des de O', utilitzant dibuix ant.:

$$\boxed{\bar{a}_T(P_{Bola})} = \underbrace{\bar{a}_T(O'_{Bola})}_{0} + \bar{\alpha}_T^{Bola} \times \overline{O'P} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Bola} \times (\bar{\Omega}_T^{Bola} \times \overline{O'P})}_{0} =$$

$$= \left[\left(\Rightarrow \frac{\ddot{\psi}R}{h}\right) + \left(\otimes\ \frac{R}{h}\dot{\psi}^2\right)\right] \times \left[\leftarrow (R+s)\right] = \boxed{\uparrow\left(\frac{R(R+s)}{h}\dot{\psi}^2\right)}$$

Mola cilíndrica

Prova NAEP 1998 - 99, 3 febrer 1999



L'eix del corró està articulat a una forquilla que gira amb $\overline{\psi}$ constant respecte del terra (T). El corró manté contacte amb el terra i no llisca a **P**.

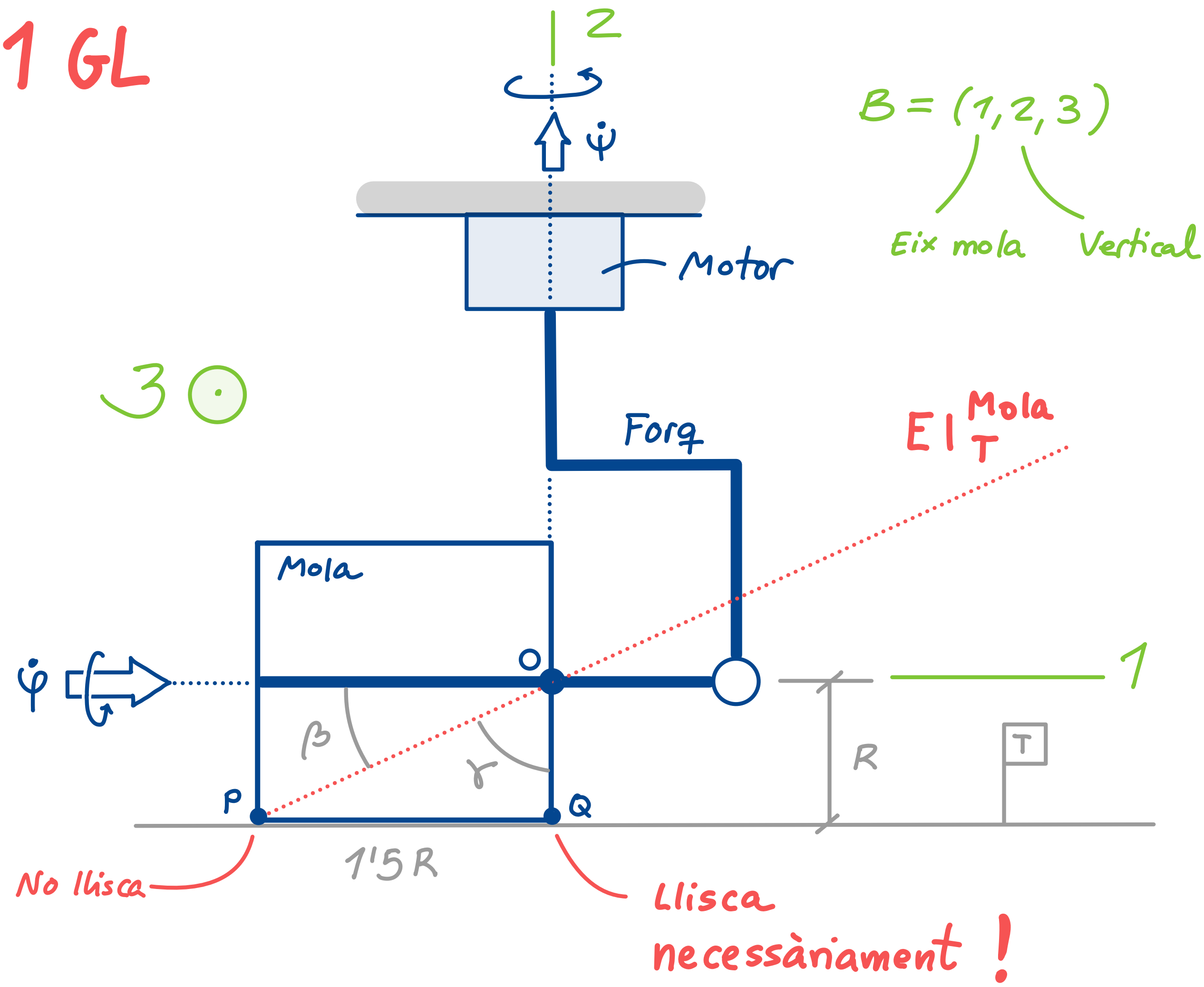
Determina l'$\mathrm{EIRL}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{corró}}$, i calcula $\overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{T}}(\mathbf{Q})$, $\overline{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}}(\mathbf{P})$.

Nota: En la versió original d'aquest problema, el corró s'interpreta com una mola abrasiva que llima el terra (no llisca a **P**, però sí en la resta de punts del segment **PQ**). Mantindrem aquesta interpretació, i al corró l'anomenarem "mola".

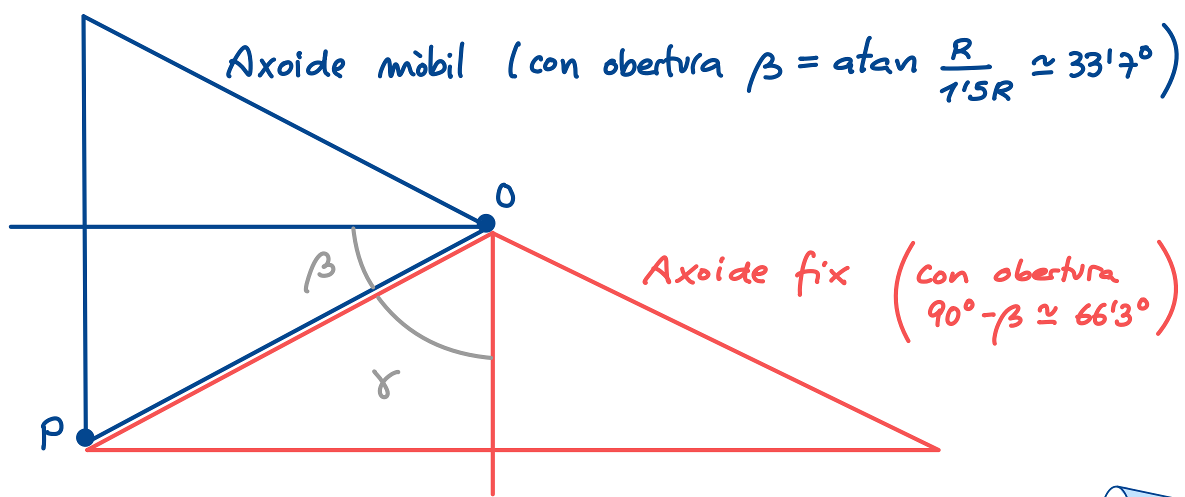
Solució: pàgina següent.

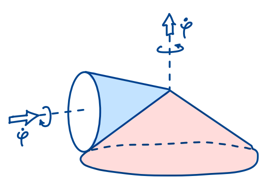
EI_T^{Mola} i axoides

1 GL



EI_T^{Mola} = recta OP (p.q. la vel d'O i P és 0, resp. T)

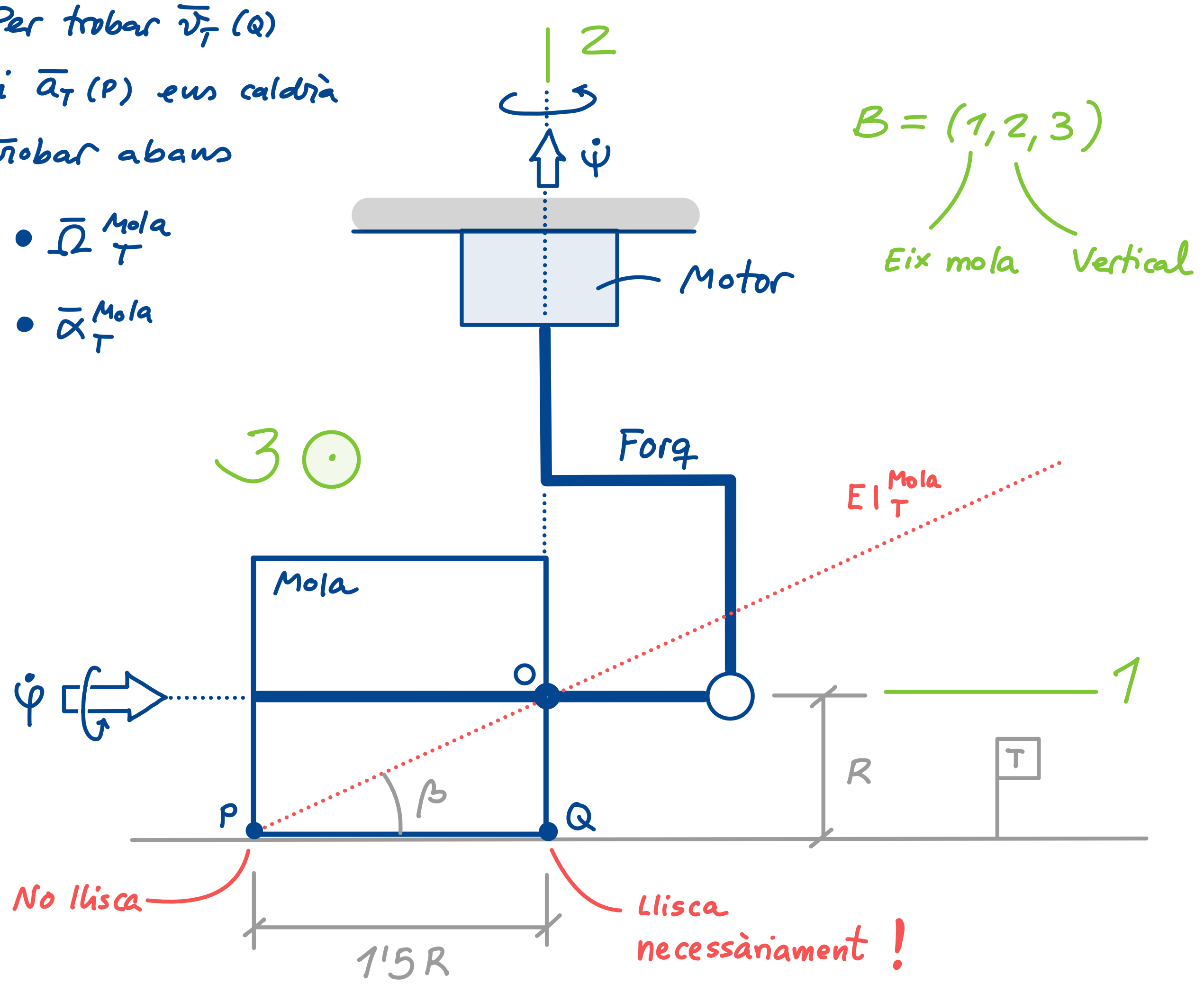




$\bar{v}_T(Q)$ i $\bar{a}_T(P)$

Per trobar $\bar{v}_T(Q)$ i $\bar{a}_T(P)$ ens caldrà trobar abans

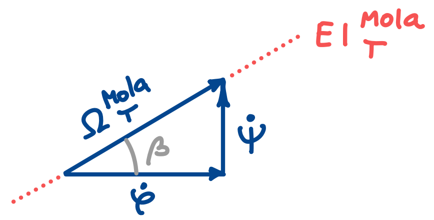
- $\bar{\Omega}^{Mola}_T$
- $\bar{\alpha}^{Mola}_T$



$\bar{\Omega}^{Mola}_T$

Posem $\dot\varphi$ efd $\dot\psi$ perquè $\dot\psi$ és la variable controlada

$$\bar{\Omega}^{Mola}_T = \bar{\Omega}^{Mola}_{Forq} + \bar{\Omega}^{Forq}_T = (\Rightarrow \overbrace{\dot\varphi) + (\Uparrow \dot\psi}^{\text{No indep!}}) = (\Rightarrow 1'5\,\dot\psi) + (\Uparrow \dot\psi) = \begin{Bmatrix} 1'5\,\dot\psi \\ \dot\psi \\ 0 \end{Bmatrix}_B$$



$$\dot\varphi = \frac{\dot\psi}{tg\beta} = \frac{\dot\psi}{\frac{R}{1'5R}} = 1'5\,\dot\psi$$

$\bar{\alpha}^{Mola}_T$

$$\bar{\alpha}^{Mola}_T = \left.\frac{d\bar{\Omega}^{Mola}_T}{dt}\right]_T = (\Uparrow \dot\psi) \times (\Rightarrow 1'5\,\dot\psi) = (\otimes\; 1'5\,\dot\psi^2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1'5\,\dot\psi^2 \end{Bmatrix}_B$$

Derivem geomètricament tenint en compte que $\dot\psi = ct$

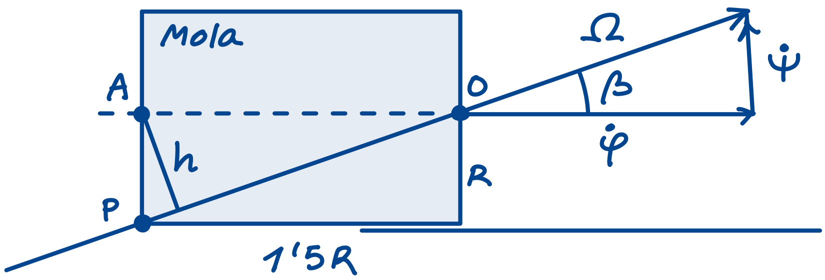
$(\Rightarrow 1'5\,\dot\psi)$ sols té canvi de dir.

$(\Uparrow \dot\psi)$ vector ct !

És més llarg, però $\bar{\Omega}_T^{Mola}$ es pot obtenir tb igualant velocitats del punt A, vist com $A \in$ Mola, o $A \in$ Porta:

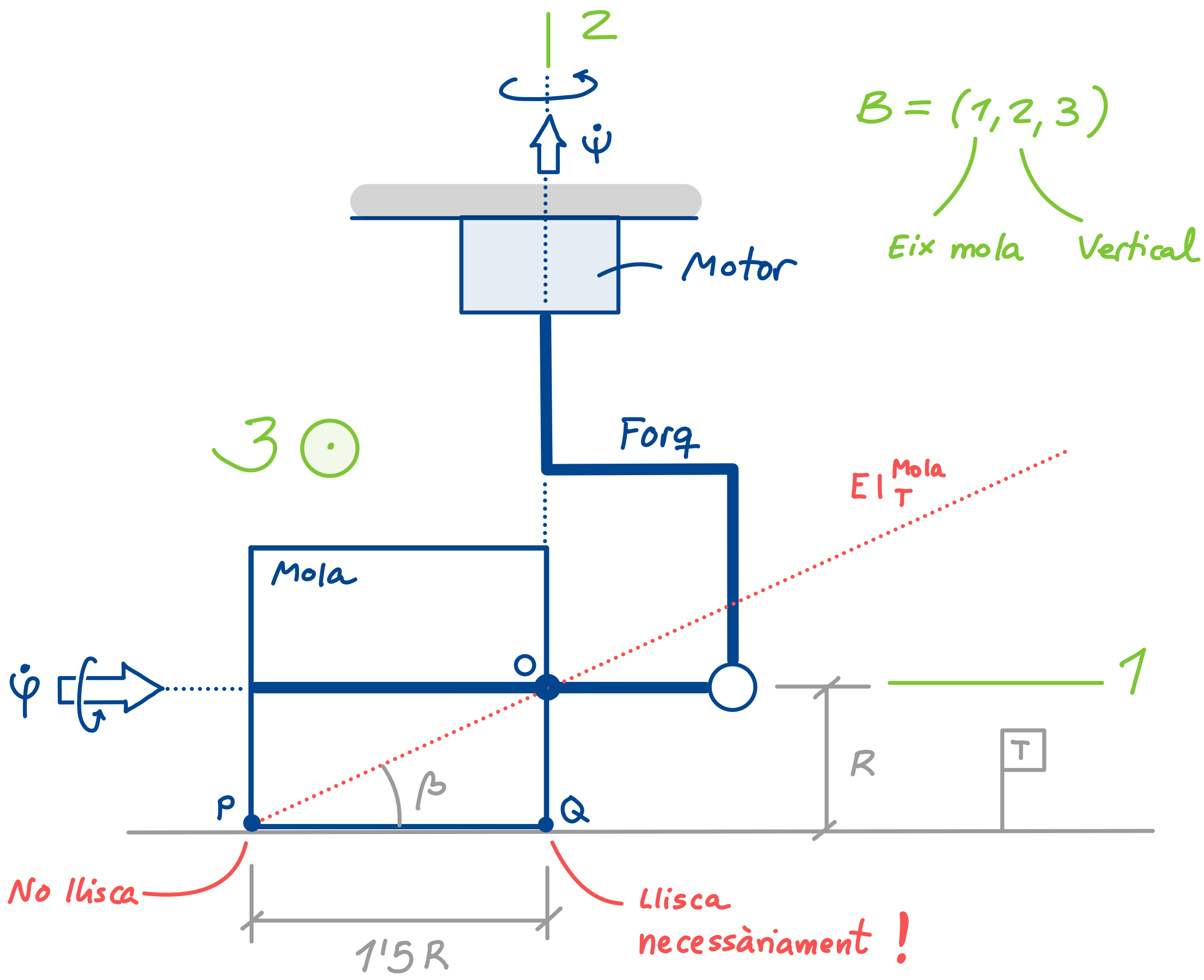
$$\odot\ \underbrace{\Omega\ \overbrace{1'5R\ \sin\beta}^{h}}_{\bar{v}_T(A_{Mola})} = \underbrace{\odot\ \dot\psi\ 1'5R}_{\bar{v}_T(A_{Porta})}$$

$$\Omega = \frac{\dot\psi}{\sin\beta}$$



$$\boxed{\bar{\Omega}_T^{Mola}} = (\Rightarrow \Omega\cos\beta) + (\Uparrow \Omega\sin\beta) =$$

$$= \left(\Rightarrow \frac{\dot\psi}{tg\,\beta}\right) + (\Uparrow \dot\psi) = \boxed{(\Rightarrow 1'5\,\dot\psi) + (\Uparrow \dot\psi)}$$



$\bar{v}_T(Q)$

$$\bar{v}_T(Q) = \underbrace{\bar{v}_T(O)}_{0} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Mola} \times \overline{OQ}}_{(\Rightarrow 1'5\dot\psi \,+\, \Uparrow \dot\psi) \times (\downarrow R)} = \otimes\, 1'5\, \dot\psi R$$

CLARAMENT Q LLISCA !

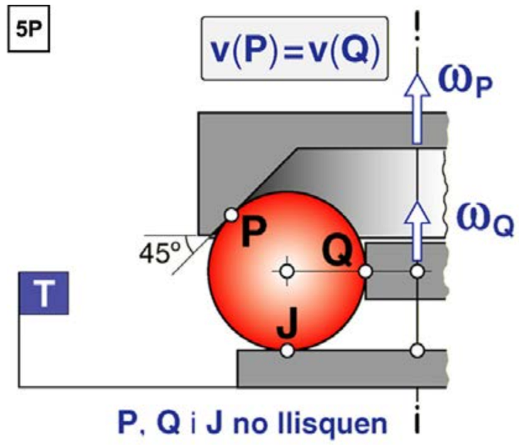
$\bar{a}_T(P)$

$$\bar{a}_T(P) = \underbrace{\bar{a}_T(O)}_{0} + \bar{\alpha}_T^{Mola} \times \overline{OP} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Mola} \times \left(\bar{\Omega}_T^{Mola} \times \overline{OP}\right)}_{0 \text{ pq } \bar{\Omega}_T^{Mola} \text{ és } // \ \overline{OP}} =$$

$$= \left(\overset{\curvearrowright}{\otimes}\, 1'5\, \dot\psi^2\right) \times \left[(\downarrow R) + (\leftarrow 1'5 R)\right] =$$

$$= \left(\leftarrow 1'5\, \dot\psi^2 R\right) + \left(\uparrow 2'25\, \dot\psi^2 R\right) = \begin{Bmatrix} -1'5\, \dot\psi^2 R \\ 2'25\, \dot\psi^2 R \\ 0 \end{Bmatrix}_B$$

Bola impulsada per un rotor i un casquet



La bola manté contacte sense lliscar amb el terra, amb un rotor i amb un casquet que giren amb ω_Q i ω_P, respectivament, respecte del terra (T).
Els punts **P** i **Q** tenen la mateixa velocitat.
Determina l'$EIRL_T^{bola}$.

$\bar{v}_T(P) = \bar{v}_T(Q) \Rightarrow$ Dir. de recta $\overline{PQ}$ és // a EIRL

Es veu així

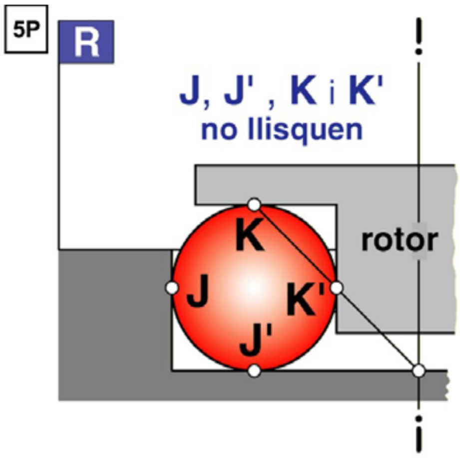
$$\bar{v}_T(P) = \bar{v}_T(Q) + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Bola} \times \overline{QP}}_{\text{Per a que això sigui 0 cal que } \bar{\Omega}_T^{Bola} \,//\, \overline{QP}}$$

Per altra banda, $\vec{v}_T(J_{Bola}) = 0$

Per tant, l'EIRL és // a $\overline{PQ}$ passant per J.

Bola amb 4 punts de no lliscament

5P R



La bola manté contacte sense lliscar amb el terra (T) i amb un rotor. Determina l'$\mathrm{EIRL}_T^{\mathrm{bola}}$.

En principi, sembla evident que

$$EI_T^{Bola} = \text{recta } JJ'$$

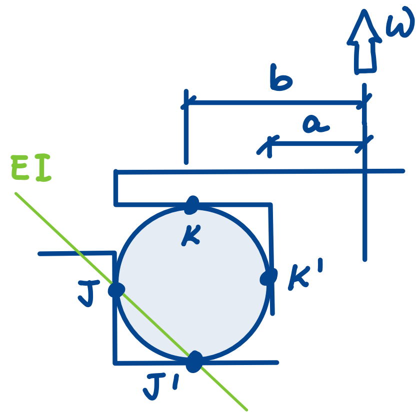
Però això vol dir que les vel. de K i K' són iguals

$$\bar{v}_R(K) = \bar{v}_R(K') = \odot v \qquad (\text{són a = d de l'EI})$$

Per altra banda, el rotor impulsa K i K' amb velocitats diferents

del rotor

$$\bar{v}_T(K) = \odot\, \omega \cdot b$$
$$\bar{v}_T(K') = \odot\, \omega \cdot a$$

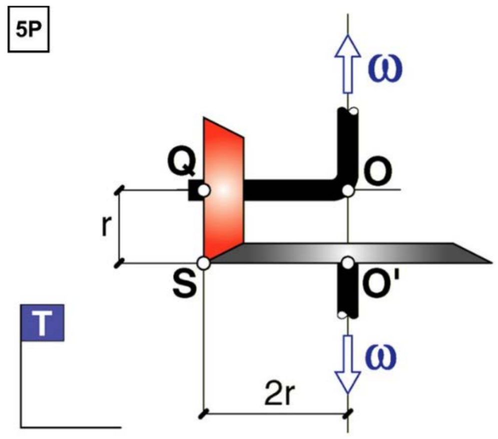


Només tindrem

$$\bar{v}_T(K) = \bar{v}_T(K')$$

quan $\omega = 0$, altrament hi hauria lliscament a K o K'. Però si $\omega = 0$, el sistema Bola-Rotor estarà parat, i l'EI no estarà definit.

Rodes dentades



L'eix de la mola gira amb ω respecte del terra (T), i manté contacte sense lliscar amb la plataforma, que gira amb ω respecte del terra.

Determina l'$EIRL_T^{mola}$.

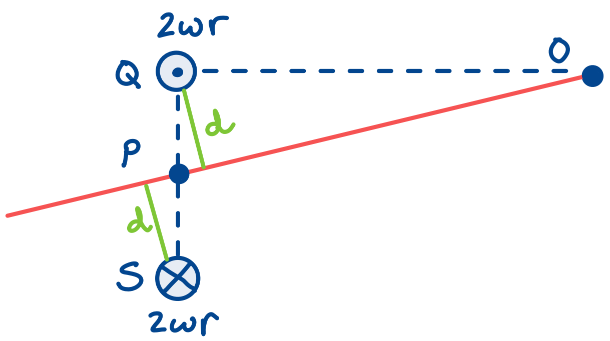
$\bar{v}_T(O \in RV) = 0 \Rightarrow EI_T^{RV}$ passa per O, i $\bar{v}_{llisc} = \bar{0}$.

$\bar{\Omega}_T^{RV} = \underbrace{\bar{\Omega}^{RV}_{Braç}}_{(\leftrightarrow\ \bullet)} + \underbrace{\bar{\Omega}^{Braç}_{T}}_{(\updownarrow\ \bullet)}$ $\Rightarrow$ $\bar{\Omega}_T^{RV}$ en el pla del dibuix

(A)

Ergo EI_T^{RV} passa per O i $\in$ pla del dibuix.

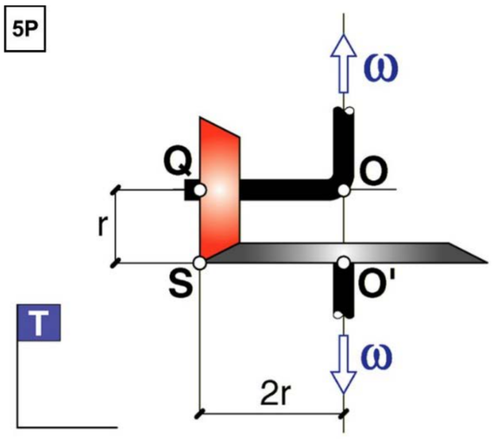
$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_T(Q) &= \odot\ 2\omega r \\ \bar{v}_T(S) &= \otimes\ 2\omega r \end{aligned}\right\} \Rightarrow EI_T^{RV} \text{ passa per } P = \text{Punt mig entre } Q \text{ i } S$$



Si EI passés + amunt o avall de P les celeritats de Q i S serien ≠ !

$\boxed{\text{Resp: } EI_T^{RV} = \text{recta } PO \text{ (resp. D)}}$

Rodes dentades: solució alternativa



L'eix de la mola gira amb ω respecte del terra (T), i manté contacte sense lliscar amb la plataforma, que gira amb ω respecte del terra.

Determina l'$EIRL_T^{mola}$.

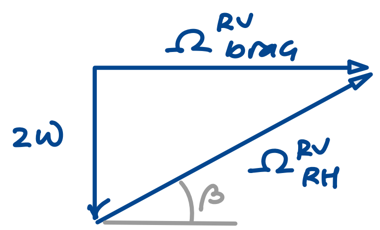
La part (A) és com abans. Ara, per trobar la dir de l'EI_T^{RV} buscarem $\bar{\Omega}_T^{RV}$:

És en dir. ⇒, només cal veure les vel. de Q i S

$$\bar{\Omega}_T^{RV} = \bar{\Omega}_{Brag}^{RV} + \bar{\Omega}_T^{Brag} = \underbrace{(\rightarrow \Omega_{brag}^{RV}) + (\uparrow \omega)}_{A}$$

$$\bar{\Omega}_T^{RV} = \bar{\Omega}_{RH}^{RV} + \bar{\Omega}_T^{RH} = \underbrace{(\nearrow^{\beta}\ \Omega_{RH}^{RV}) + (\downarrow \omega)}_{B}$$

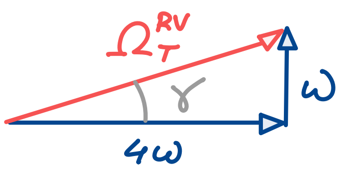
Igualant $A = B$ tenim



$$\Omega_{brag}^{RV} = \frac{2\omega}{tg\beta} = \frac{2\omega}{\frac{1}{2}} = 4\omega$$

$$\bar{\Omega}_{brag}^{RV} = (\rightarrow 4\omega)$$

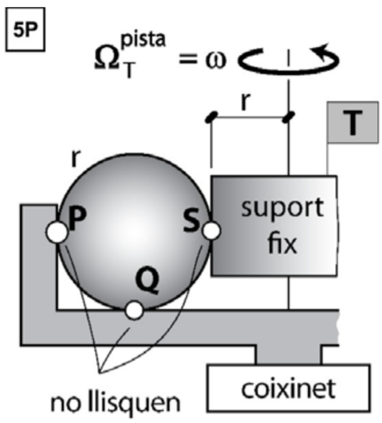
Ergo $\bar{\Omega}_T^{RV}$ de A:



on $tg\gamma = \frac{1}{4}$

El $_T^{RV}$ te la dir d'$\bar{\Omega}_T^{RV}$. Ergo és una recta de pendent 1/4 que passa per O, i per tant pel punt mig entre Q i S.

Bola contra suport fix

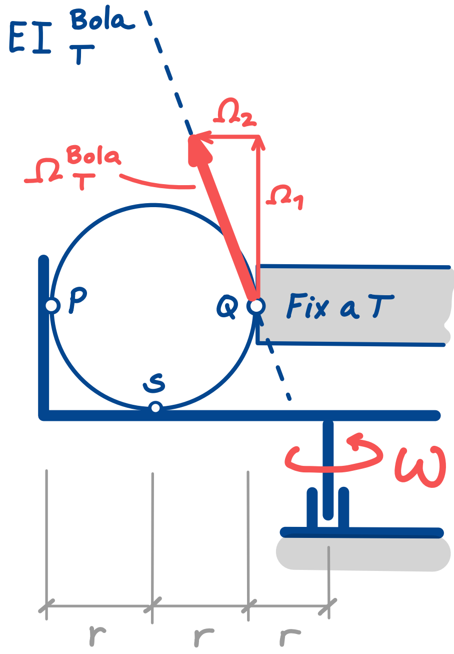


La bola manté contacte sense lliscar amb un suport fix al terra, i una pista circular que gira amb ω respecte del terra (T).

Calcula $\bar{\Omega}_T^{bola}$.

Solució: pàgina següent

Solució:



$\bar{v}_T(P) = \odot\, 3r\omega$

$\bar{v}_T(S) = \odot\, 2r\omega$

$\bar{v}_T(Q) = \bar{0}$

EI^{Bola}_T = recta per Q

$\bar{\Omega}^{Bola}_T = (\Uparrow \Omega_1) + (\Leftarrow \Omega_2)$

Ha de ser en el pla del dibuix vist com són $\bar{v}_T(P)$ i $\bar{v}_T(S)$

$\bar{v}_T(P)$ calculada des de Q:

$$\odot\, 3r\omega = \left[(\uparrow \Omega_1) + (\leftarrow \Omega_2)\right] \times (\leftarrow 2r)$$

$$\odot\, 3r\omega = \odot\, 2\Omega_1 r$$

$$\Omega_1 = \frac{3}{2}\omega \qquad (\mathrm{I})$$

2 condicions que determinen Ω_1 i Ω_2

$\bar{v}_T(S)$ calculada des de Q:

$$\odot\, 2r\omega = \left[(\Uparrow \Omega_1) + (\Leftarrow \Omega_2)\right] \times \left[(\leftarrow r) + (\downarrow r)\right]$$

$$\odot\, 2r\omega = (\Uparrow \Omega_1) \times (\leftarrow r) + (\Leftarrow \Omega_2) \times (\downarrow r)$$

$$\odot\, 2r\omega = (\odot\, \Omega_1 r) + (\odot\, \Omega_2 r)$$

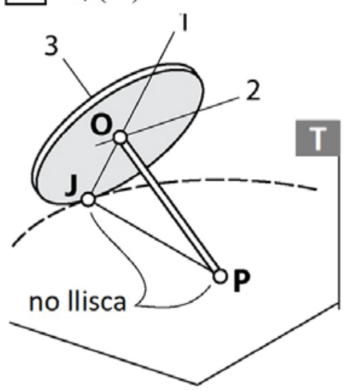
$$2\cancel{r}\omega = (\Omega_1 + \Omega_2)\cancel{r}$$

$$\Omega_2 = 2\omega - \Omega_1 \overset{(\mathrm{I})}{=} 2\omega - \frac{3}{2}\omega = \frac{\omega}{2}$$

Per tant

$$\boxed{\bar{\Omega}^{Bola}_T = \left(\Uparrow \frac{3}{2}\omega\right) + \left(\Leftarrow \frac{\omega}{2}\right)}$$

5P $v_T(\mathbf{O})$ valor variable



El disc i el braç són solidaris, i mantenen contacte sense lliscar amb el terra (T). El centre del disc **O** té celeritat variable respecte del terra. Determina la direcció de $\bar{\alpha}_T^{disc}$.

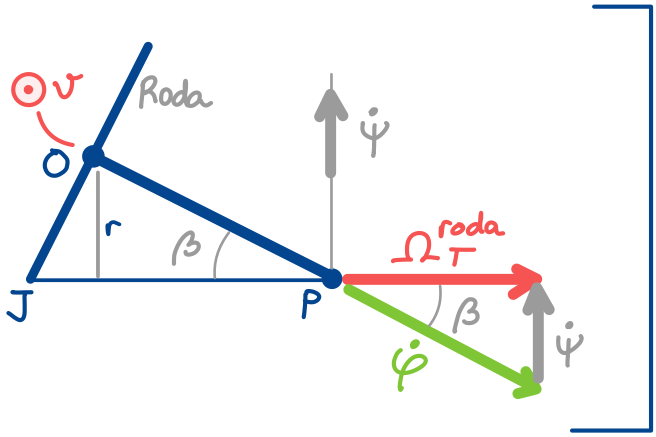
Solució

Clarament $\begin{cases} EI_T^{roda} = \text{recta } JP. \\ \bar{\Omega}_T^{roda} \text{ té la dir. de la recta } JP \end{cases}$

Sigui v la celeritat de O. Suposem inicialment que

$$\bar{v}_T(O) = \odot v,$$

d'acord amb el seg. dibuix:



Podem veure la roda com una baldufa de vel. angular

$$\bar{\Omega}_T^{roda} = \bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\varphi}}$$

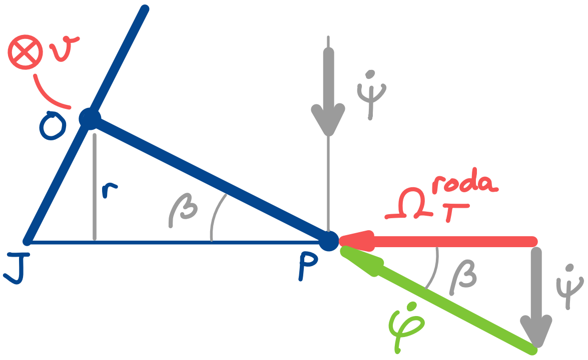
Com que $\bar{\Omega}_T^{roda}$ té dir. horitzontal, ha de ser

$$\bar{\Omega}_T^{roda} = \left(\Rightarrow \frac{v}{r}\right)$$

i derivant geomètricament:

$$\bar{\alpha}_T^{roda} = \left(\longrightarrow \frac{\dot{v}}{r}\right) + \left(\otimes\, \dot{\psi}\, \frac{v}{r}\right)$$

Si haguéssim assumit $\bar{v}_T(O) = \otimes v$, hauríem obtingut



$$\bar{\Omega}_T^{roda} = \left(\Leftarrow \frac{v}{r}\right)$$

$$\bar{\alpha}_T^{roda} = \left(\leftarrow \frac{\dot{v}}{r}\right) + \left(\otimes\ \dot{\psi}\frac{v}{r}\right)$$

En ambdós casos, la resposta es la mateixa.