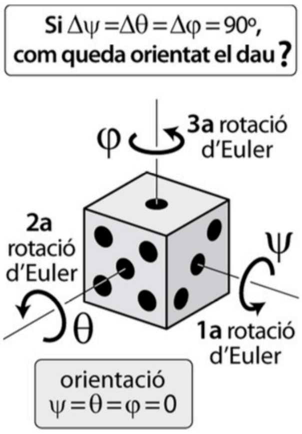
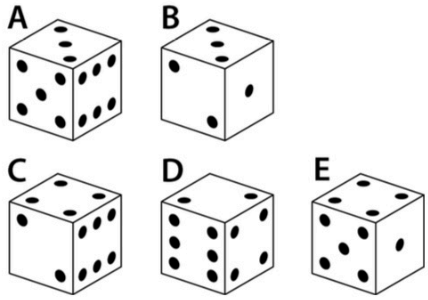
Sol. "Dau"

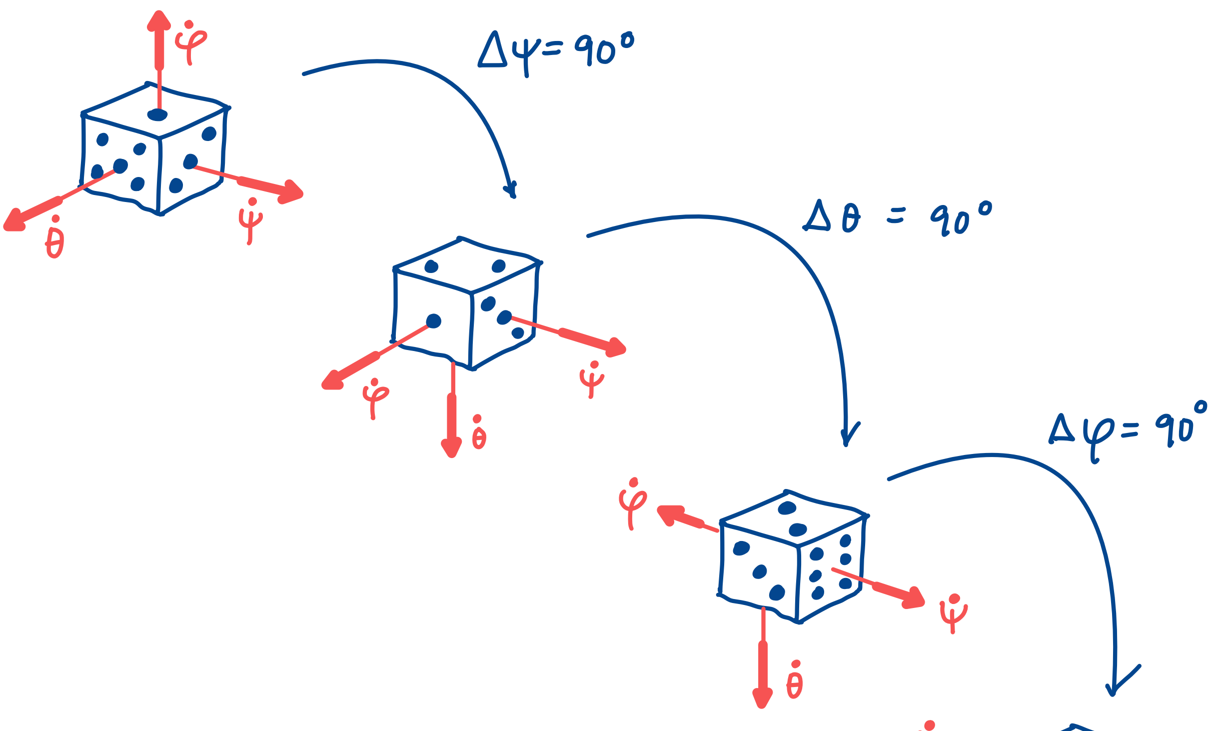


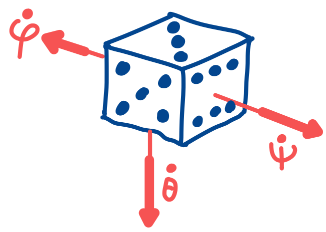
1 El dau s'orienta respecte del terra mitjançant tres angles d'Euler. Per a la configuració $\psi=\theta=\varphi=0$, les tres velocitats angulars associades tenen l'orientació i sentits indicats a la figura. Quina serà l'orientació del dau si es modifiquen els angles d'acord amb els increments $\Delta\psi=\Delta\theta=\Delta\varphi=90°$?

NOTA: les cares oposades d'un dau sumen 7.



Dibuixo com queden $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$ després de cada rotació i després pinto com queden les cares:





Al final comprovem que:

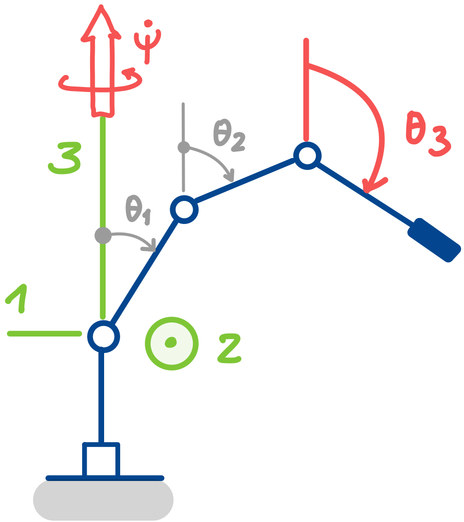
Angle entre $\bar{\psi}$ i $\bar{\varphi}$ pot ser qualsevol

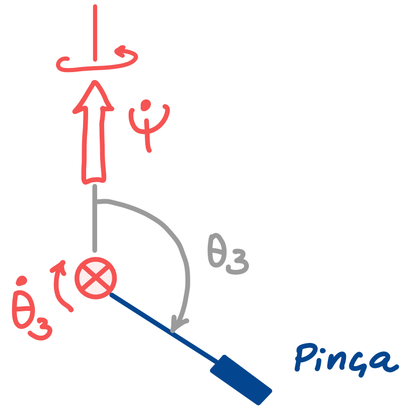
A 90°

A 90°

- $\bar{\psi}$ roman fix a la ref.
- $\bar{\theta}$ " en el pla $\perp$ a $\bar{\psi}$
- $\bar{\varphi}$ " $\underbrace{\text{fix a la cara original del dau}}_{\odot \text{ en aq. cas}}$

Sol "Robot"





La pinça només té 2GL d'orientació: $\dot\psi$, $\dot\theta_3$

La podem veure com una baldufa orientada amb

precessió ψ

nutació θ_3

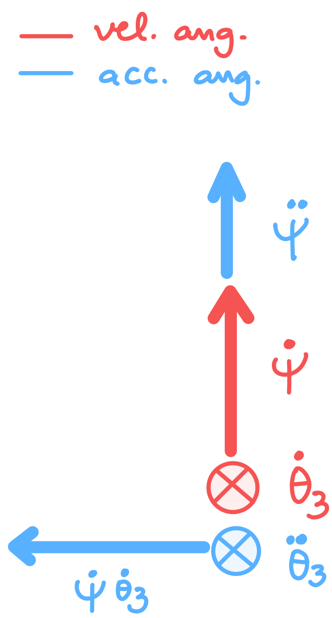
Els angles θ_1 i θ_2 són de nutació per als braços intermedis, no per a la pinça.

Pin = Pinça

$$\bar\Omega^{Pin}_{T} = \bar{\dot\psi} + \bar{\dot\theta}_3 = (\uparrow \dot\psi) + (\otimes\, \dot\theta_3)$$

$$\bar\alpha^{Pin}_{T} = (\uparrow \ddot\psi) + (\otimes\, \ddot\theta_3) + (\underleftarrow{\dot\psi\,\dot\theta_3})$$

$$= \begin{Bmatrix} \dot\psi\,\dot\theta_3 \\ -\ddot\theta_3 \\ \ddot\psi \end{Bmatrix}_B$$



Sol. "Barques"

3 Els punts **P** i **Q** de les barques P i Q descriuen moviments circulars del mateix radi R amb celeritat constant v_0 respecte del terra. Quina és la velocitat del punt **P** de la barca P respecte de la barca Q?

A $\leftarrow \sqrt{2}v_0$

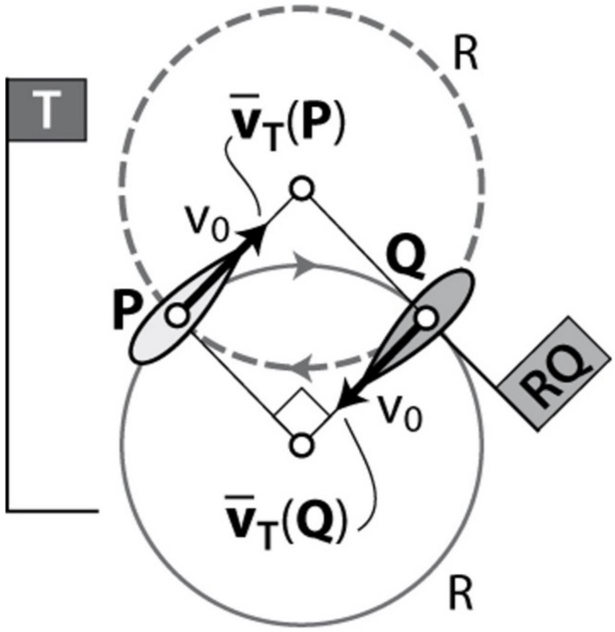
B $\rightarrow \sqrt{2}v_0$

C $\uparrow \sqrt{2}v_0$

D $\downarrow \sqrt{2}v_0$

E 0

$\boxed{\bar{v}_{RQ}(P)?}$



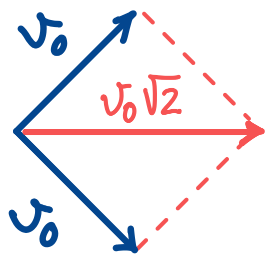
Fem comp. movim. amb

AB = T
REL = RQ

$$\boxed{\bar{v}_{REL}(P)} = \bar{v}_{AB}(P) - \bar{v}_{ar}(P) =$$

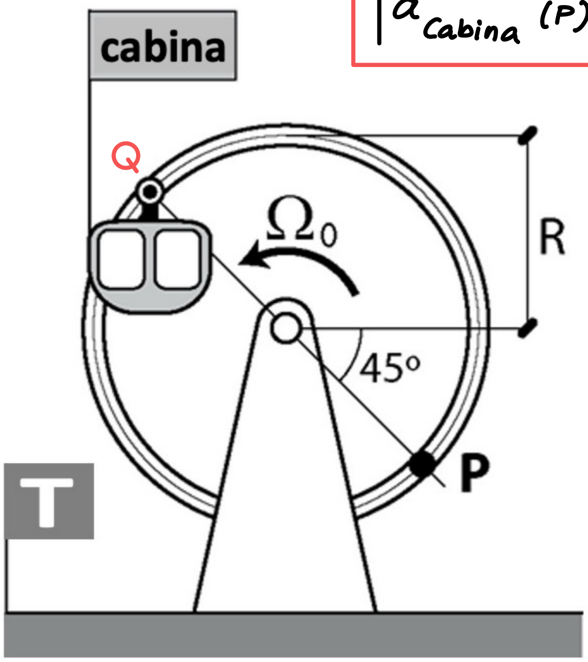
$$= (\nearrow v_0) - (\nwarrow v_0) =$$

$$= (\nearrow v_0) + (\searrow v_0) = \boxed{(\rightarrow v_0\sqrt{2})}$$



Sol. "Sínia"

$$\left|\bar{a}_{Cabina}(P)\right| \; ?$$

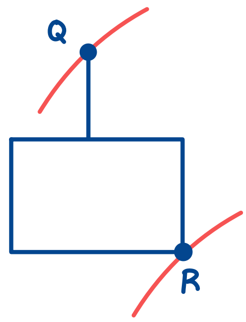


La trajectòria de qualsevol punt R de la cabina és la mateixa que la de Q, traslladada amb el vector $\overline{QR}$ (constant)

Ergo la velocitat de R és la mateixa que la de Q, i l'acceleració tb.

Tots pts de la cabina, doncs, tenen la mateixa vel. i accel. que Q!

La cabina fa una translació circular.



Ergo: $\bar{\Omega}^{Cab}_{T} = 0$

Fem comp. accel. amb $\left|\begin{array}{l} AB = T \\ REL = Cab \ (Cabina) \end{array}\right.$

$$\bar{a}_{Rel}(P) = \bar{a}_{AB}(P) - \bar{a}_{ar}(P) - \bar{a}_{cor}(P) =$$

$$= \underbrace{(\nwarrow \Omega_0^2 R)}_{AB} - \underbrace{(\searrow \Omega_0^2 R)}_{ar} - \underbrace{2\,\overbrace{\bar{\Omega}^{Cab}_{T}}^{0} \times \bar{v}_{cab}(P)}_{cor}$$

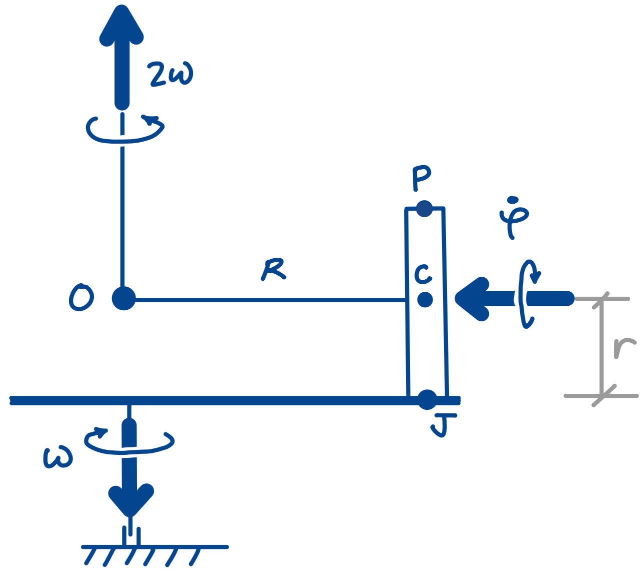
$$= (\nwarrow 2\Omega_0^2 R)$$

L'acceleració absoluta que tindria P si P fos fix a la cabina. Com que tots els punts de la cabina tenen igual accel. absoluta, posem aquí la de Q.

$$\boxed{\text{Resp: } \left|\bar{a}_{cab}(P)\right| = 2\,\Omega_0^2 R}$$

Solucions de "Roda sobre plataforma"

Sol. 1 (Més algebraica)



Igualarem les vel. de

$$\underbrace{C_{forq}}_{\odot\, 2\omega R}\ ,\quad \underbrace{C_{roda}}_{\text{Calculada des de J}}$$

per trobar $\dot{\varphi}$. Després calcularem $\bar{v}_T(P)$.

$$\bar{\Omega}^{roda}_{T} = \bar{\Omega}^{roda}_{forq} + \bar{\Omega}^{forq}_{T} = (\Leftarrow \dot{\varphi}) + (\Uparrow 2\omega)$$

$$\underbrace{\bar{v}_T(C)}_{\otimes\, 2\omega R} = \underbrace{\bar{v}_T(J)}_{\odot\, \omega R} + \bar{\Omega}^{roda}_{T} \times \overline{JC}$$

$$\otimes\, 2\omega R = \odot\, \omega R + \underbrace{\left[(\Leftarrow \dot{\varphi}) + (\Uparrow 2\omega)\right] \times (\uparrow r)}_{\otimes\, \dot{\varphi} r}$$

$$2\omega R = -\omega R + \dot{\varphi} r$$

$$3\omega R = \dot{\varphi} r \longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{3\omega R}{r}$$

$$\boxed{\bar{v}_T(P)} = \bar{v}_T(C) + \bar{\Omega}^{roda}_{T} \times \overline{CP}$$

$$= (\otimes\, 2\omega R) + \underbrace{\left[\left(\Leftarrow \frac{3\omega R}{r}\right) + (\Uparrow 2\omega)\right] \times (\uparrow r)}_{\otimes\, 3\omega R}$$

$$= (\otimes\, 2\omega R) + (\otimes\, 3\omega R) = \boxed{\otimes\, 5\omega R}$$

$\boxed{\text{Resposta} = A}$

Alternativa via comp mov.
$AB = T$, $REL = Plat$

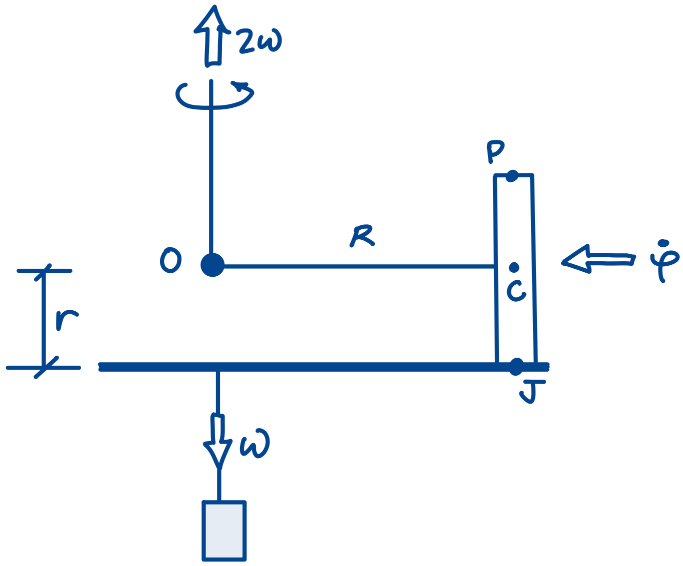
$$\bar{v}_{AB}(P) = \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P)$$

$$= (\otimes\, \dot{\varphi} r) + (\otimes\, 2\omega R) =$$

$$= \left(\otimes\, \frac{3\omega R}{r} \cdot r\right) + (\otimes\, 2\omega R) =$$

$$= (\otimes\, 5\omega R)$$

Sol. 2 via EI_T^{Roda} (Més geomètrica)



Clarament:

$\bar v_T(C) = \otimes\, 2\omega R$

$\bar v_T(J) = \odot\, \omega R$

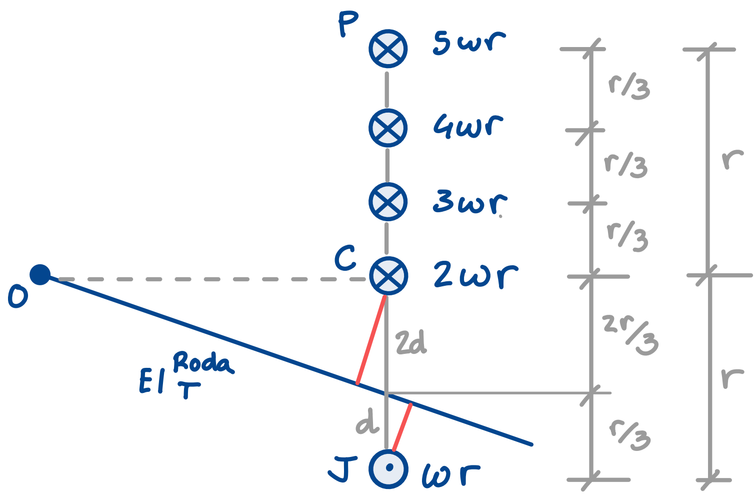
A més EI_T^{Roda} passa per O i és en el pla del dibuix perquè

$\bar\Omega_T^{Roda} = (\Leftarrow \dot\varphi) + (\Uparrow 2\omega)$

$\bar v_T(O) = \bar 0 \Rightarrow \bar v_{llisc} = \bar 0$ (és un EI de rotació només).

Ergo entre C i J hi ha un punt de la roda de velocitat nul·la. Com que $v_T(C)$ és el doble que $v_T(J)$, aquest punt ha de ser a distància doble de C que de J.

Vol dir que tenim aquesta distribució de velocitats a la roda:



$$\boxed{\bar v_T(P) = \otimes\, 5\omega r}$$

Resposta = A

Solucions "Bola" (per 2 vies)

Via 1

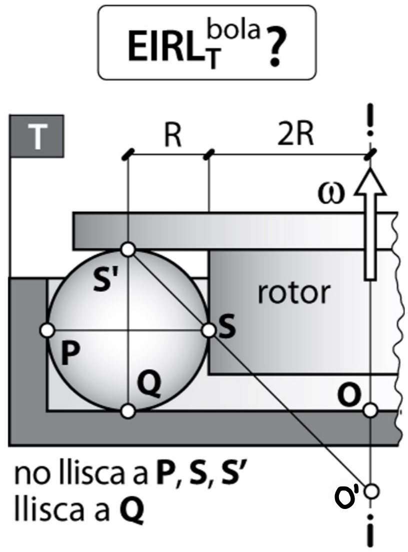
Ràpidament veiem que

EI_T^{Bola} passa per P

i que

$\bar{v}_T(S') = \odot\, 3R\omega$

$\bar{v}_T(S) = \odot\, 2R\omega$



A més:

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = \underbrace{\bar{\Omega}_{Rotor}^{Bola}}_{(\downarrow\Omega)+(\rightarrow\Omega)} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Rotor}}_{(\uparrow\omega)} = \downarrow(\Omega-\omega) + (\rightarrow\Omega) \qquad (*)$$

Ha de tenir aq. forma perquè EI_{Rotor}^{Bola} = recta SS'

S'ha de complir:

$$\bar{v}_T(S) = \underbrace{\bar{v}_T(P)}_{0} + \bar{\Omega}_T^{Bola} \times \overline{PS} =$$

$$\odot\, 2R\omega = \underbrace{\big[\downarrow(\Omega-\omega) + (\rightarrow\Omega)\big] \times (\rightarrow 2R)}_{\odot\,(\Omega-\omega)\,2R}$$

$$\odot\, \cancel{2R}\omega = \odot\, \cancel{2R}(\Omega-\omega) \quad \Rightarrow \quad \Omega = 2\omega \qquad (**)$$

Substituint (**) a (*):

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = (\downarrow\omega) + (\rightarrow 2\omega)$$

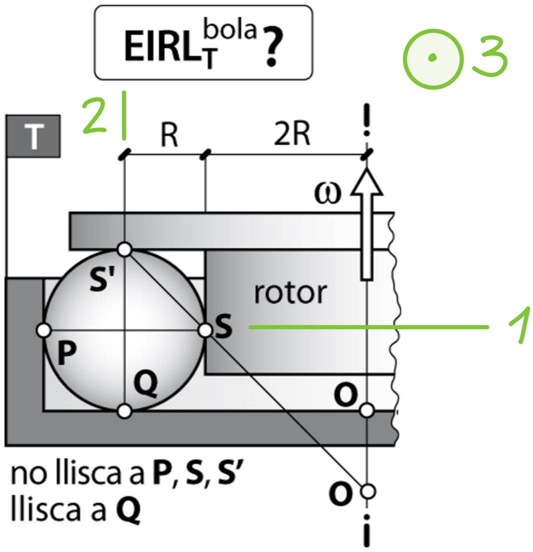
EI_T^{Bola} = recta O'P

$\boxed{\text{Resposta : C}}$

Via 2

Fixem-nos que $\bar{\Omega}^{Bola}_{T}$ ha de tenir la forma

$$\left\{\bar{\Omega}^{Bola}_{T}\right\}_B = \begin{Bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \underbrace{\Omega_1, \Omega_2}_{\text{Per determinar}}$$



ja que

$$\bar{\Omega}^{Bola}_{T} = \underbrace{\bar{\Omega}^{Bola}_{Rotor}}_{\text{Té la dir. SS'}} + \underbrace{\bar{\Omega}^{Rotor}_{T}}_{(\Uparrow\omega)}$$

$B = (1, 2, 3)$

1: Recta PS

2: Vertical

Necessitem 2 eqs. que determinin Ω_1 i Ω_2. Les obtenim via CSR:

$$\underbrace{\bar{v}_T(S')}_{\left\{\begin{smallmatrix}0\\0\\3R\omega\end{smallmatrix}\right\}_B} = \cancel{\bar{v}_T(P)}^{\,0} + \begin{Bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R \\ R \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underbrace{3\cancel{R}\omega = \Omega_1 \cancel{R} - \Omega_2 \cancel{R}}_{3\omega = \Omega_1 - \Omega_2 \quad (I)}$$

$$\underbrace{\bar{v}_T(S)}_{\left\{\begin{smallmatrix}0\\0\\2R\omega\end{smallmatrix}\right\}_B} = \bar{v}_T(P) + \begin{Bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 2R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\cancel{2R}\omega = -\cancel{2R}\Omega_2}_{\Omega_2 = -\omega \quad (II)}$$

Substituint II a I:

$$3\omega = \Omega_1 + \omega \Rightarrow \Omega_1 = 2\omega \quad (III)$$

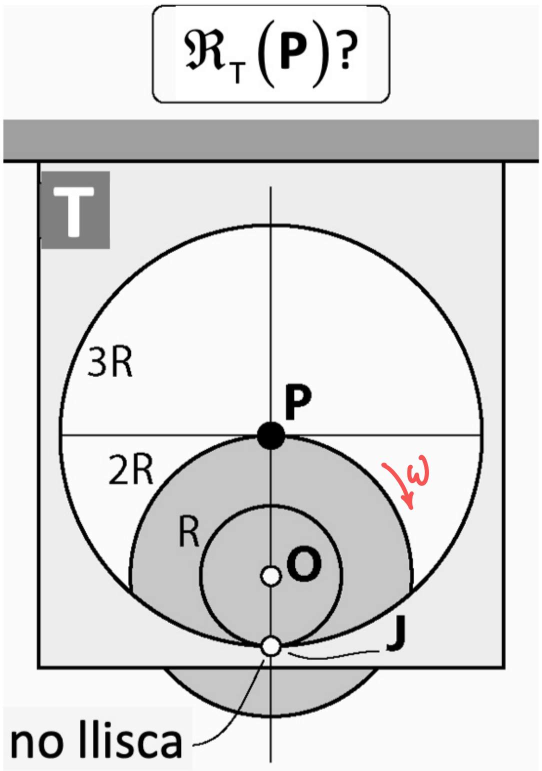
Per tant

$$\left\{\bar{\Omega}^{Bola}_{T}\right\}_B = \begin{Bmatrix} 2\omega \\ -\omega \\ 0 \end{Bmatrix} \Longrightarrow EI^{Bola}_{T} = \text{recta } O'P$$

Sol. "Carró sobre pista circular"

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a_T^n(P)|}$$

Ens calen | $v_T(P)$, $a_T^n(P)$



Suposem

$$\bar{\Omega}_T^{\text{carró}} = \otimes \omega$$

Aleshores.

$$\bar{\alpha}_T^{\text{carró}} = \otimes \dot{\omega}$$

Com que $J = CIR_T^{\text{carró}}$:

$$\bar{v}_T(P) = (\rightarrow \omega 3R)$$

Buscarem $\bar{a}_T(P)$ a partir d'$\bar{a}_T(O)$.

O descriu traj. circular amb centre a P. Per tant:

$$\bar{v}_T(O) = (\rightarrow \underbrace{\omega R}_{v})$$

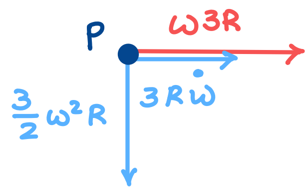
$$\bar{a}_T(O) = (\rightarrow \underbrace{\dot{\omega} R}_{\dot{v}}) + (\uparrow \underbrace{\frac{(\omega R)^2}{2R}}_{v^2/2R}) = (\rightarrow \dot{\omega} R) + (\uparrow \frac{\omega^2 R}{2})$$

Ara

$$\bar{a}_T(P) = \bar{a}_T(O) + \bar{\alpha}_T^{\text{carró}} \times \overline{OP} + \bar{\Omega}_T^{\text{carró}} \times (\bar{\Omega}_T^{\text{carró}} \times \overline{OP}) =$$

$$= (\rightarrow \dot{\omega} R) + (\uparrow \frac{\omega^2 R}{2}) + \underbrace{(\otimes \dot{\omega}) \times (\uparrow 2R)}_{(\rightarrow 2\dot{\omega} R)} + \underbrace{(\otimes \omega) \times [(\otimes \omega) \times (\uparrow 2R)]}_{(\downarrow 2\omega^2 R)} =$$

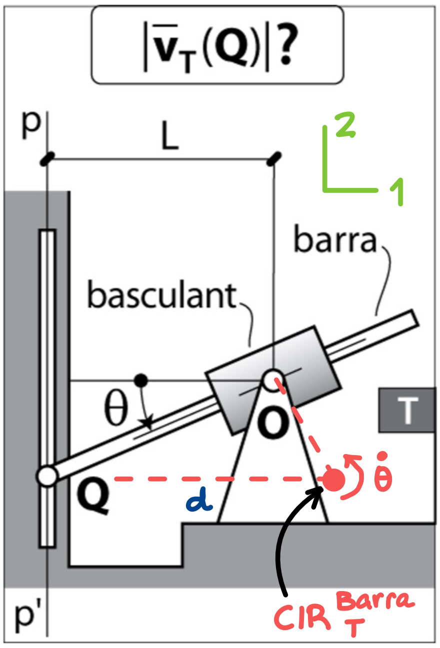
$$= (\rightarrow 3R\dot{\omega}) + (\downarrow \underbrace{\tfrac{3}{2}\omega^2 R}_{a_T^n(P)})$$



$$\boxed{\mathcal{R}_T(P)} = \frac{(\omega 3R)^2}{\frac{3}{2}\omega^2 R} = \frac{\cancel{\omega^2}\, 3^{\cancel{2}}\, R^{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{3}\,\cancel{\omega^2}\,\cancel{R}}{2}} = \boxed{6R}$$

$$\boxed{\text{RESP} = E}$$

Sol. "Barra dins basculant"



Via derivar un vec. pos.

$B = (1,2,3)$

$$\{\overline{OQ}\}_B = \begin{Bmatrix} -L \\ -L\tan\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{v}_T(Q)\}_B = \left\{ \left[\frac{d\,\overline{OQ}}{dt}\right]_T \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{L\dot\theta}{\cos^2\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$|\bar{v}_T(Q)| = \frac{L\dot\theta}{\cos^2\theta}$$

$\boxed{\text{RESP : E}}$

suposem per la config. del dibuix

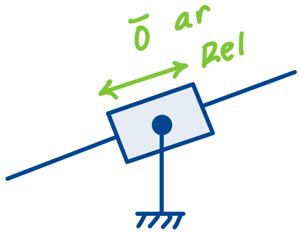
Via CIR_T^{Barra}

El punt $O \in$ Barra només pot tenir vel. en la dir. de la barra. (en dir. ortogonal a barra no en pot tenir (*)). El punt Q només pot tenir vel. en dir $\uparrow$. Ergo CIR_T^{Barra} és on l'hem dibuixat. Ara:

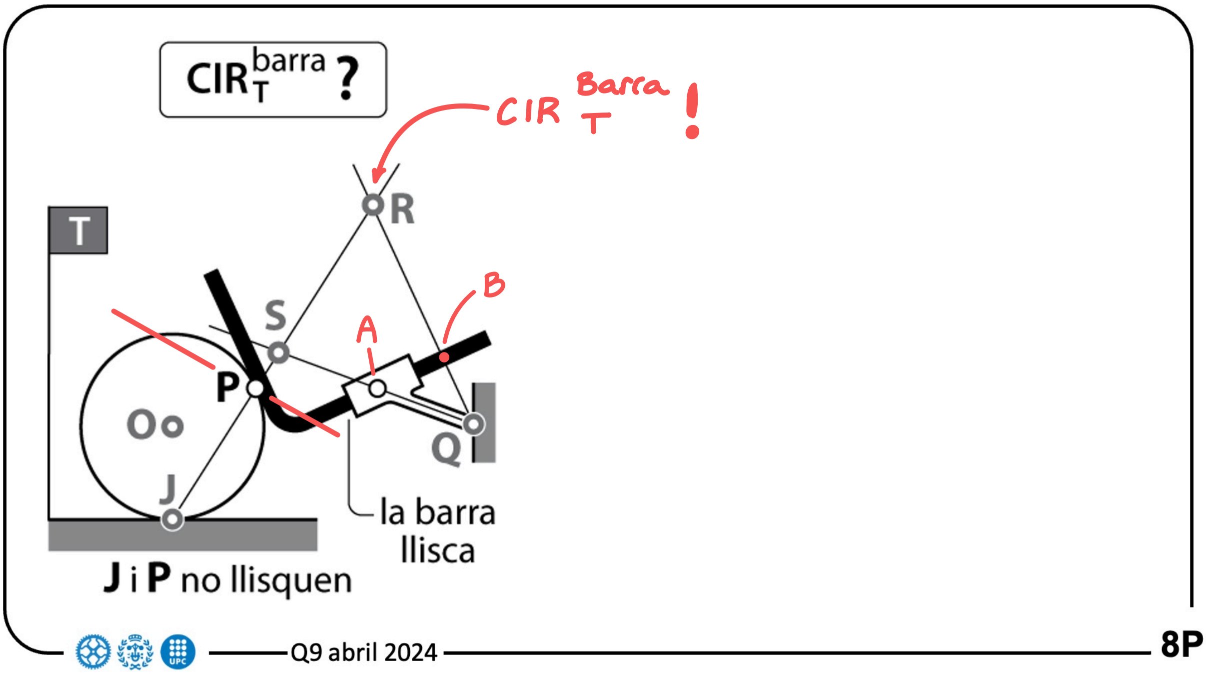
$$d = \frac{L}{\cos^2\theta}, \qquad \bar{\Omega}_T^{Barra} = \circlearrowleft \odot\, \dot\theta \;\longrightarrow\; \bar{v}_T(Q) = \downarrow d\dot\theta = \downarrow \frac{L\dot\theta}{\cos^2\theta}$$

(*) Es pot veure fent comp. moviments | AB = T, REL = Basc

$$\bar{v}_{AB}(Q) = \bar{v}_{REL}(Q) + \bar{v}_{ar}(Q) = \swarrow\!\nearrow + \bar{0}$$

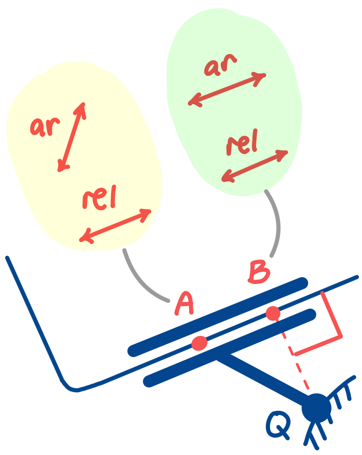


Sol. "barra en colze"



Aplicant comp. vel. amb $\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = Braç \end{array} \right.$ veiem que

- $\bar{v}_T(A)$ no té dir. definida, però
- $\bar{v}_T(B)$ sí! Té dir $\perp$ a QR



AB = T

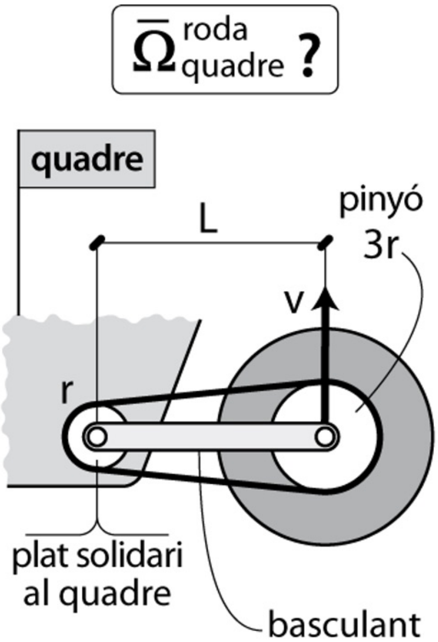
REL = Braç QA

$\bar{v}_T(P)$ és $\perp$ recta JP, perquè $\left| \begin{array}{l} J = CIR_T^{Disc} \\ \nexists \text{ lliscament a } P \end{array} \right.$

$\boxed{CIR_T^{Barra} = R}$

Resp: E

Sol. transmissió motocicleta



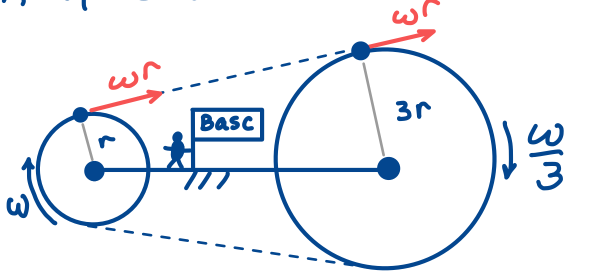
$$\boxed{\bar{\Omega}^{Roda}_{Quadre} = \bar{\Omega}^{Pinyó}_{Quadre} = \underbrace{\bar{\Omega}^{Pinyó}_{Basc}}_{\otimes \frac{v}{3L}} + \underbrace{\bar{\Omega}^{Basc}_{Quadre}}_{\odot \frac{v}{L}} = \odot \frac{2v}{3L}}$$

Mirem moviment politges des de ref. Basc:

$$\bar{\Omega}^{Plat}_{Basc} = \otimes \frac{v}{L} \Longrightarrow \bar{\Omega}^{Pinyó}_{Basc} = \otimes \frac{v}{3L}$$

$$\text{rel. transm.} = \frac{1}{3} = \frac{\omega_{sortida}}{\omega_{entrada}}$$

A ref. Basc

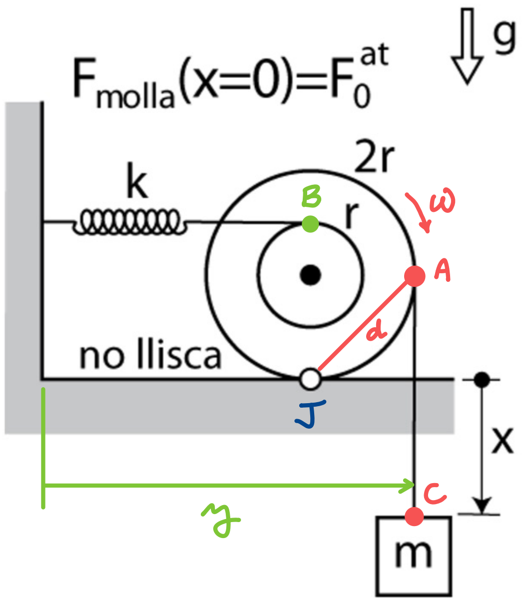


Rel. transmissió

1 : 3

voltes sortida — voltes entrada

Sol. "Molla"



$\bar{F}^{at}_{molla}(x)$?

Si sabéssim ω, ja tindriem la vel. de B, p.q. $J = CIR_T^{corró}$

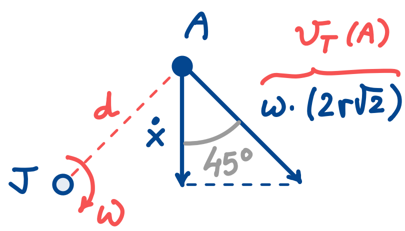
Busquem ω!

Clarament

$$\bar{v}_T(C) = (\downarrow \dot{x}) + (\rightarrow \dot{y}) \Longrightarrow \bar{v}_T(A)\Big]_{vert} = \downarrow \dot{x}$$

Perquè cable es manté tibat

Trobarem ω imposant que la comp. vert. de $\bar{v}_T(A) = \downarrow \dot{x}$



$$\omega(2r\sqrt{2})\cdot\underbrace{\cos 45°}_{1/\sqrt{2}} = \dot{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega = \frac{\dot{x}}{2r}$$

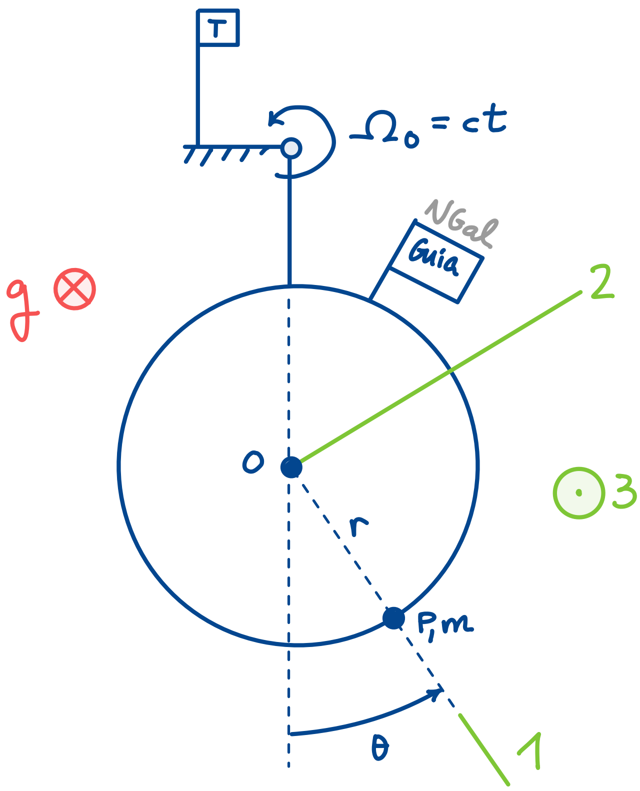
$$\bar{v}_T(B) = (\rightarrow \omega\cdot 3r) = \left(\rightarrow \frac{\dot{x}}{2r}3r\right) = \left(\rightarrow \frac{3}{2}\dot{x}\right)$$

$$\dot{\rho} = \frac{3}{2}\dot{x} \Rightarrow \Delta\rho = \int_0^t \frac{3}{2}\dot{x}\,dt = \frac{3}{2}x$$

$$\boxed{F_m^{at} = F_0^{at} + k\,\Delta\rho = F_0^{at} + k\,\frac{3}{2}x}$$

$\boxed{RESP = B}$

Sol. "Força Coriolis sobre partícula"



Dir OP, Dir vertical

$B = (1, 2, 3)$

NGal = Guia

Gal = T

$$\boxed{\bar{F}_{Cor \to P}} = -m_P\, \bar{a}_{Cor}(P) =$$

$$= -m_P \cdot 2 \Big(\underbrace{\bar{\Omega}^{NGal}_{Gal}}_{\odot\, \Omega_0} \times \underbrace{\overbrace{\bar{v}_{NGal}(P)}^{\text{Vel. de P relativa a NGal}}}_{\nearrow\, \dot{\theta} r} \Big) =$$

$$\boxed{= \searrow 2m\Omega_0 \dot{\theta} r = \begin{Bmatrix} 2m\Omega_0\dot{\theta}r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_B}$$