

# 7P

Molles i amortidors

Contacte partícula-superfície  
i condicions límit d'enllaç

## **Contingut:**

Introducció

Teoria sobre interaccions per mitjà de molles i amortidors

Exercicis de formulació de forces en molles i amortidors

Teoria sobre contactes partícula-superfície: forces d'enllaç, condicions límit d'enllaç, freq sec, i caracterització de forces d'enllaç.

Exercicis sobre dinàmica de la partícula

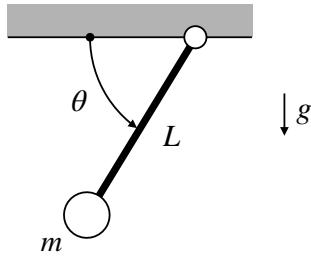
# Introducció

Acabem de començar dinàmica i voldria anticipar-vos cap on ens dirigim!

A la sessió 1P vaig comentar-vos que l'objectiu principal d'aquest curs és obtenir les equacions del moviment dels sistemes mecànics. És a dir, les equacions diferencials ordinàries (EDOs) que determinen com es mouen aquests sistemes a partir d'unes condicions inicials.

Com veurem, l'evolució d'un sistema mecànic queda descrita per EDOS de 2n ordre expressades mitjançant les coordenades de configuració del sistema (les  $x$ ,  $y$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ , ... que venim utilitzant en cada problema) i les seves derivades temporals de 1er i 2n ordre ( $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ , ..., i  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{\psi}$ ,  $\ddot{\theta}$ , ...).

Per il·lustrar-ho, pensem en un sistema senzill, com ara un pèndol amb tota la massa concentrada al seu extrem, només sotmès a la gravetat:



Veurem avui que l'equació del moviment d'aquest pèndol és

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{g}{L} \cos \theta(t), \quad (1)$$

que clarament és una EDO de 2n ordre (involucra  $\theta$  i les derivades temporals de  $\theta$  fins a ordre 2, però no derivades d'ordre superior). De la teoria d'EDOs sabem que, en ser (1) de 2n ordre, l'evolució futura del pèndol queda determinada per (1) i per les condicions inicials

$$\theta(0), \dot{\theta}(0). \quad (2)$$

És a dir, hi ha una única funció  $\theta(t)$  que satisfà (1) i (2) a la vegada. A les assignatures de matemàtiques us expliquen que (1) i (2) defineixen un problema de valor inicial (PVI), la solució del qual és la funció  $\theta(t)$  esmentada. Així doncs, per saber l'evolució futura del pèndol cal resoldre aquest PVI. I com ho podem fer? Gairebé mai de manera analítica! En general haurem de recórrer a mètodes numèrics d'integració d'EDOs (com ara els mètodes d'Euler, del punt mig, o de Runge Kutta 4, per exemple). Podeu provar de resoldre (1) i (2) vosaltres mateixos amb MATLAB si voleu, via el mètode d'Euler. És fàcil de programar i molt instructiu!

En sistemes mecànics més complexos no tindrem una sola variable sinó vàries, i en lloc d'una EDO en tindrem vàries també (un sistema d'EDOs), però conceptualment caldrà fer el mateix: resoldre un PVI com el de (1) i (2) per saber com evoluciona el sistema partint de les condicions inicials (2).

Un punt clau a recordar és que, en quedar descrit per una EDO d'ordre 2, l'evolució futura del sistema queda determinada per les seves condicions inicials de posició i velocitat (2 nivells). Si fos d'ordre 3, les condicions inicials inclourien la posició, la velocitat i l'acceleració (3 nivells) però no és el cas! Amb 2 nivells n'hi ha prou! És per això que **l'estat mecànic** d'un sistema es defineix com la posició i velocitat de totes les seves partícules en un cert instant de temps. N'hi ha prou amb saber l'estat mecànic en un cert instant  $t_0$  per predir com es mourà el sistema per  $t > t_0$ . Com hem fet a (2), típicament triem  $t_0 = 0$ .

L'estat mecànic d'un sistema es codifica de manera compacta mitjançant l'ús de coordenades. En el pèndol, per exemple, l'estat queda descrit per la parella  $(\theta, \dot{\theta})$ . Clarament, els valors de  $(\theta, \dot{\theta})$  en un cert instant són suficients per determinar la posició i velocitat de qualsevol partícula del pèndol en aquest instant.

En aquest curs ens centrarem en obtenir equacions del moviment, però no les resoldrem numèricament. Sempre podeu aplicar els mètodes apresos a càlcul numèric per fer-ho. El que sí que farem és estudiar el comportament dels sistemes al voltant de configuracions d'equilibri.

Sapigueu, però, que la capacitat de resoldre EDOs numèricament ha sigut, i segueix essent clau per als desenvolupaments tecnològics moderns. Abans de construir un sistema, primer caldrà simular-lo (predir com es mourà, per validar-lo o millorar-ne el disseny) i per això cal resoldre PVIs definits per EDOs que en descriuen el comportament. Un cop construïts els sistemes, també els voldrem controlar, i novament caldrà resoldre PVIs i altres problemes relacionats. Aquests coneixements són fonamentals en enginyeria.

I com obtindrem les equacions del moviment en el nostre cas? Doncs aplicant la 2a llei de Newton si el sistema és senzill, o els teoremes vectorials en casos més complexos. Per fer-ho, us caldran els coneixements previs de cinemàtica, i haureu d'identificar bé totes les forces que entren en joc en el sistema. A teoria ja us han explicat que aquestes forces poden ser de dos grans tipus:

- **D'interacció:** les que les partícules s'apliquen entre elles.
- **D'inèrcia:** les introduïdes per una referència no Galileana quan s'estudia el sistema des d'aquesta referència.

Les forces d'interacció, per la seva banda, es poden classificar en formulables i no formulables:

- Les forces **formulables** són les que es poden expressar en funció de l'estat mecànic del sistema. Com a formulables que són, sempre en sabrem la seva expressió a priori, i mai seran incògnites a determinar. Això sí, les haureu de saber formular en funció de les coordenades que descriuen el sistema.
- Les forces **no formulables** inclouen les d'enllaç i les d'actuació.

La pàgina següent n'ofereix una classificació que haureu de tenir ben present.

Avui veurem les forces generades per molles i amortidors, les d'enllaç entre partícula i superfície, i les condicions límit d'enllaç que aquestes darreres introduceixen.

## Classificació de les forces d'interacció entre dues partícules **P** i **Q**

### Forces formulables

$\rho$  = separació entre **P** i **Q**

$$(1) \quad F_{Q \leftrightarrow P} = f(\rho)$$

Directes:

$F_{Q \leftrightarrow P} = G(m_P m_Q / \rho^2)$

Indirectes:

$\Delta F_{Q \leftrightarrow (EI) \leftrightarrow P} = k \Delta \rho$

$$(2) \quad F_{Q \leftrightarrow P} = f(\dot{\rho})$$

**friccionis**

Directes:

Coulomb

$F_{Q \leftrightarrow P} = \mu N$

viscós

$F_{Q \rightarrow P} = c v_{RQ}(P)$

Indirectes:

$F_{Q \leftrightarrow (EI) \leftrightarrow P} = c \dot{\rho}$

### Forces no formulables

$$(3) \quad \text{Enllaç } F_{Q \leftrightarrow P} = ??$$

Directes:

Indirectes:

fil inextensible

$$(4) \quad \text{Actuadors - Indirectes:}$$

$F_{Q \leftrightarrow P} = ??$  incògnita

$F_{Q \leftrightarrow P} = F(t)$  dada

## Interacció per mitjà de molles

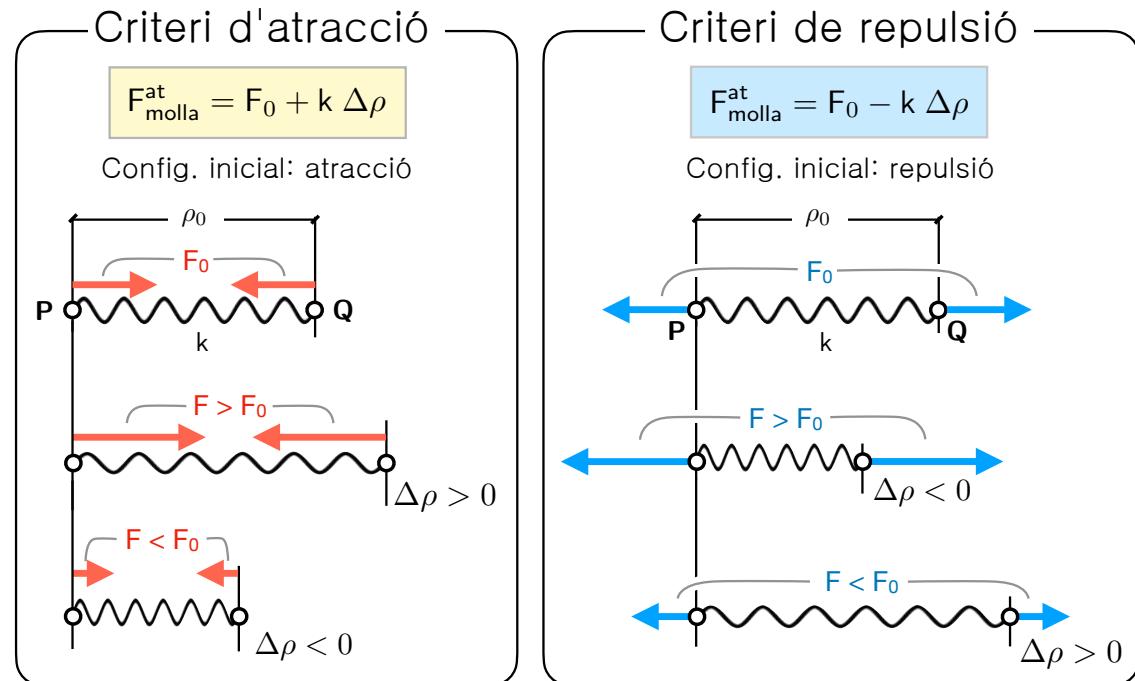
Les molles introduceixen forces atractives o repulsives entre els seus extrems en funció de la seva deformació. A partir de la seva llargària natural  $\rho_{\text{nat}}$  (per a la qual no es produeix força entre els extrems de la molla), un allargament ( $\rho - \rho_{\text{nat}} > 0$ ) provoca forces atractives, mentre que un escurçament ( $\rho - \rho_{\text{nat}} < 0$ ) en provoca de repulsives.

La formulació matemàtica d'aquestes forces s'obté de manera empírica a partir d'assajos que mesuren la força en funció del canvi de llargària. Habitualment es parteix d'una configuració estàtica on la llargària inicial  $\rho_0$  de la molla no coincideix necessàriament amb la natural, de manera que la molla està fent, en aquesta configuració, una certa força  $F_0$  entre els seus extrems. Si  $\rho_0 > \rho_{\text{nat}}$ , la força  $F_0$  és atractiva. En cas contrari ( $\rho_0 < \rho_{\text{nat}}$ ), és repulsiva.

Les molles que es consideren en aquest curs són de comportament lineal: la variació de força  $\Delta F$  a partir del valor de referència ( $\Delta F = F - F_0$ ) és proporcional a la variació de llargària  $\Delta\rho = \rho - \rho_0$  per mitjà d'una constant  $k$ .

Una molla que forma part d'un sistema mecànic pot introduir forces que poden ser atractives o repulsives al llarg del temps. Tot i així, aquestes forces es dibuixen amb un criteri únic (atractives o repulsives), i es formulen de manera que el seu valor pugui canviar de signe durant l'evolució del sistema. D'aquesta manera, amb un únic dibuix es poden representar forces que poden canviar de sentit.

Si per a la llargària inicial  $\rho_0$  la força  $F_0$  és atractiva, dibuixarem la força de la molla com atractiva, i la formularem amb el criteri d'atracció. Si, en canvi,  $F_0$  és repulsiva, la dibuixarem com a repulsiva i la formularem amb el criteri de repulsió.

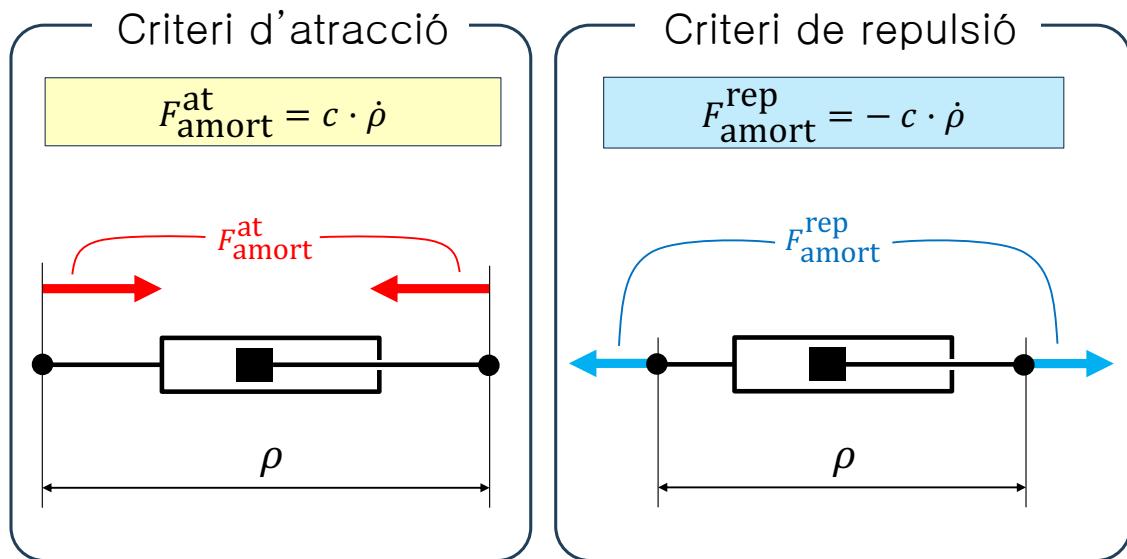


En cada problema, caldrà expressar els increments  $\Delta\rho$  en funció de les coordenades utilitzades per descriure el moviment del sistema.

## Interacció per mitjà d'amortidors

Els amortidors lineals introduceixen forces atractives o repulsives entre els seus extrems en funció de la seva velocitat de deformació  $\dot{\rho}$ . Quan els extrems de l'amortidor s'allunyen, la força és atractiva; quan s'apropen, és repulsiva. A diferència de les molles, els amortidors no exerceixen cap之力 entre els seus extrems en situacions estàtiques.

La força associada als amortidors de comportament lineal és proporcional a  $\dot{\rho}$  per mitjà d'un coeficient  $c$  de freqüència viscosa. Si decidim dibuixar la força com atractiva, la formularem amb el criteri d'atracció (figura següent, esquerra). Si, en canvi, decidim dibuixar-la com repulsiva, la formularem amb el criteri de repulsió (figura següent, dreta)

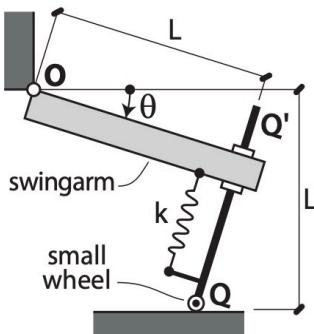


En els sistemes mecànics, els amortidors apareixen sovint muntats en paral·lel amb una molla. En aquest cas, formularem la força de l'amortidor amb el mateix criteri que haguem triat per a la molla (d'atracció o de repulsió). Quan un amortidor no formi part d'un grup molla-amortidor, el criteri es fixa arbitràriament.

Com en el cas de les molles, el valor  $\dot{\rho}$  s'haurà d'expressar en funció de les coordenades utilitzades per descriure el moviment del sistema.

Molla entre rulina i basculant RBK 1.24

$F_{\text{rep}}^{\text{spring}}(\theta) ?$

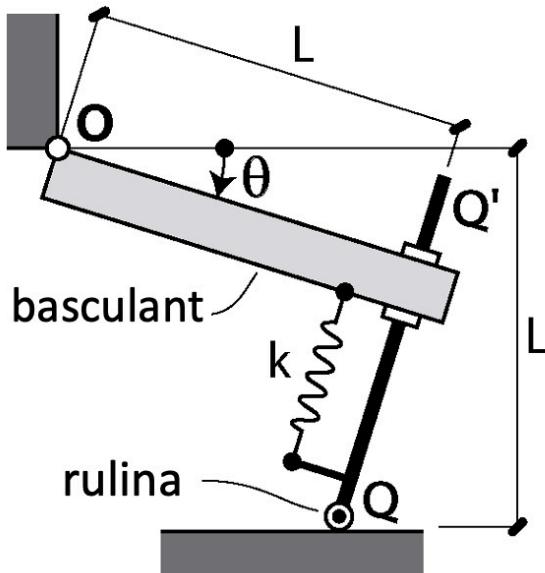


**1.24** A swingarm is articulated to the ground at point **O**. The thin bar **QQ'** slides relative to the swingarm, and its endpoint **Q** is in contact with the ground through a small wheel. If the spring has no tension when  $\theta = 0$ , what is the formulation of the spring repulsion force as a function of  $\theta$ ?

- A  $kL(\cot \theta + \tan \theta - 1)$
- B  $kL(1 - \tan \theta)$
- C  $kL(\cos \theta + \sin \theta - 1)/\cos \theta$
- D  $kL \sin \theta$
- E  $kL(1 - \tan \theta + \cos \theta)$

La barra **QQ'** llisca respecte del basculant

Equilibri per a  $\theta = 0$ ,  $F_m(\theta = 0) = F_0$

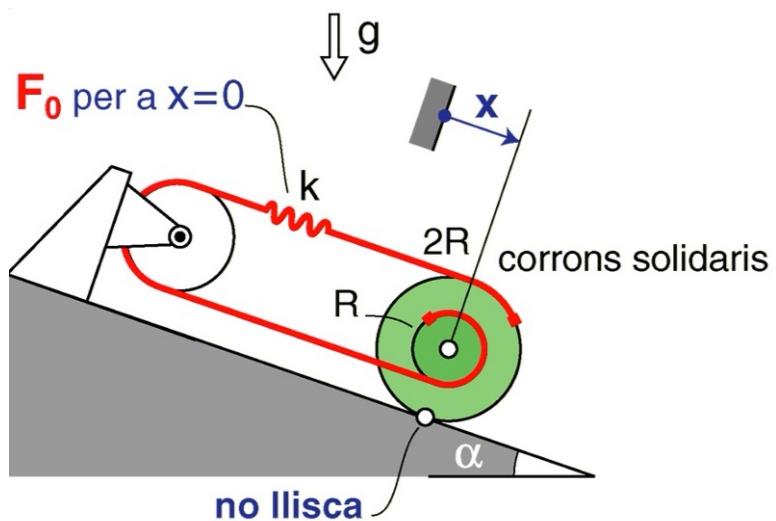


$F_{\text{molla}}^{\text{rep}}(\theta) ?$

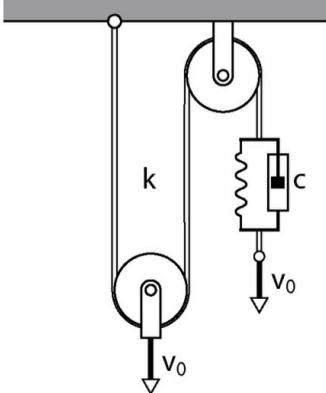
Variació de Q9, juny 2007

Molla entre corrons sobre pla inclinat

En el sistema de la figura,  $x=0$  és posició d'equilibri. Si  $F_0$  és la força que fa la molla en aquesta posició, determina l'expressió de la força de la molla en funció de  $x$ .



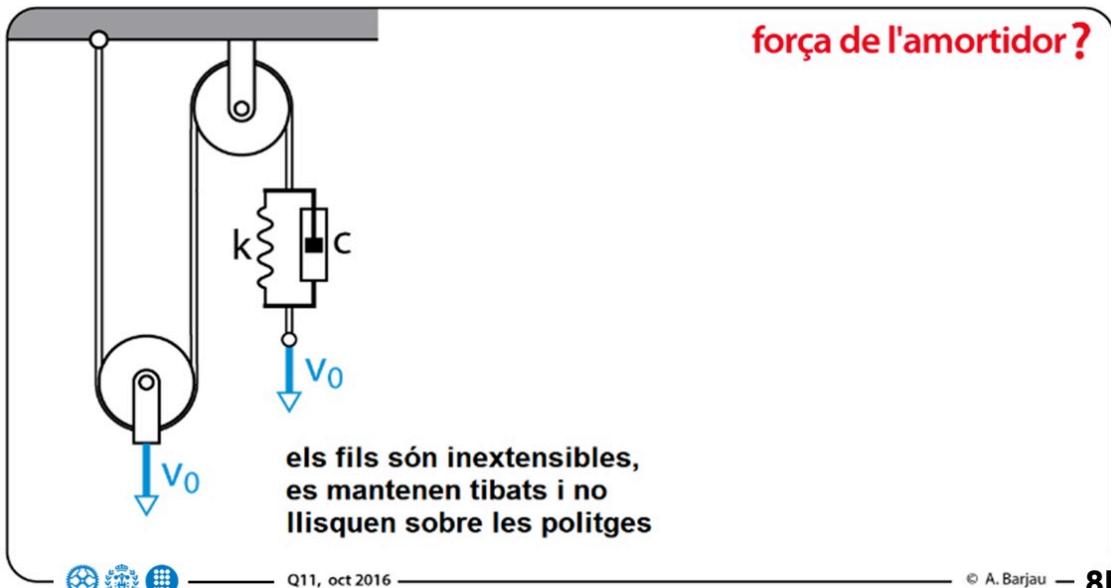
força de l'amortidor?



11 Els fils són inextensibles i no llisquen al damunt de les politges.

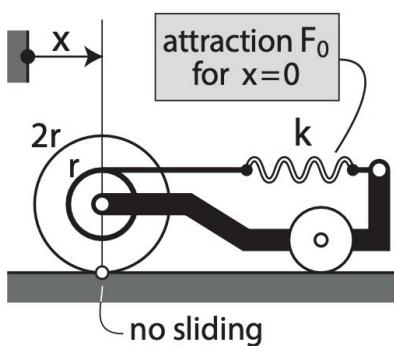
Com és la força que exerceix l'amortidor entre els seus extrems per a la configuració descrita?

- A  $3cv_0$  d'atracció
- B  $3cv_0$  de repulsió
- C  $2cv_0$  d'atracció
- D  $2cv_0$  de repulsió
- E 0



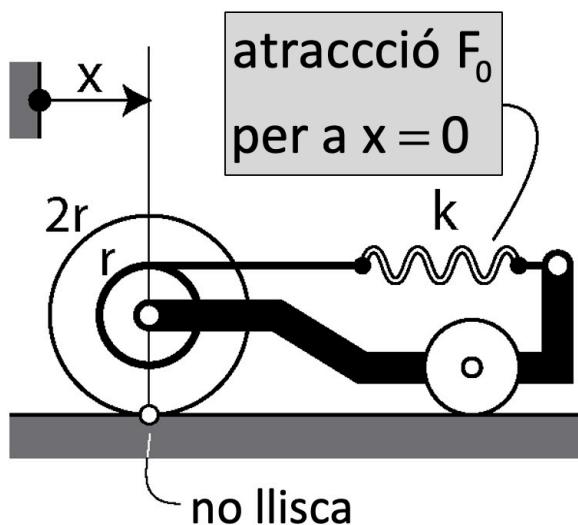
Rodes de vehicle - RBD Qüestió 1.26

$F_{\text{att}}^{\text{spring}}(x) ?$



**1.26** The wheels of the vehicle do not slide on the ground, and the wheel with radius  $2r$  and the roller with radius  $r$  are mutually fixed. If the spring attraction force is  $F_0$  when  $x = 0$ , what is the formulation of the general spring attraction force as a function of  $x$ ?

- A  $F_0 - (1/2)kx$
- B  $F_0 + (1/2)kx$
- C  $F_0 - (3/2)kx$
- D  $F_0 + (3/2)kx$
- E  $F_0 - kx$



$F_{\text{molla}}^{\text{atrac}}(\theta) ?$

## Forces d'eullag ("constraint forces" en anglès)

- Els enllaços
- restringeixen el movim. relatiu entre
    - partícules
    - partícules i superf
    - sòlids
  - exerceixen forces que pren el valor que calgui per garantir les restriccions d'eullag

OBS: sovint quan diem partícula volem dir "model partícula". (la Terra al sist. solar es pot veure com una partícula)

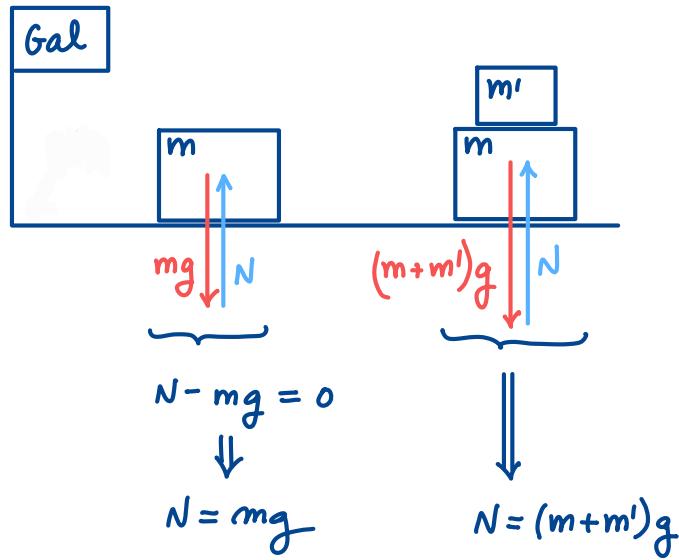
### Exemple de f. d'eullag

Considerem bloc estàtic a terra, de massa  $m$ :

Repassem catàleg forces:

- ✓ Tinc pes  $mg$
- ✗  $\cancel{f}$  molles
- ✗  $\cancel{f}$  amortidors
- ✗  $\cancel{f}$  fricció
- ✓  $\exists$  f. eullag? Sí!

El bloc no pot fer el que vulgui  
No pot anar  $\downarrow$ ,  
ergo algú l'apreta  $\uparrow$

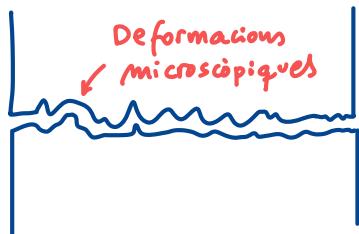


$N$  és f. d'eullag. Pren el valor que calgui per garantir l'eullag dels blocs amb el terra.

$N$  no és formulable efd vars. d'estat. És una incògnita i cal deduir-la aplicant la 2<sup>a</sup>LN.

D'on surten les f. eullag?

De les deformacions microscòpiques en els contactes!



A nivell microscòpic podem pensar el contacte com format per petites molles i amortidors, a milers.

En realitat aquestes molles i amortidors fan forces formulables però com que les volem tractar a nivell macroscòpic, no les podem formular a priori.

### Condicions límit d'eullag

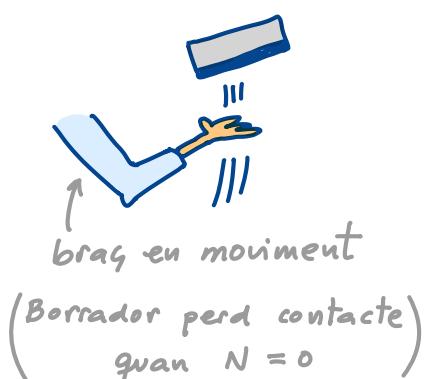
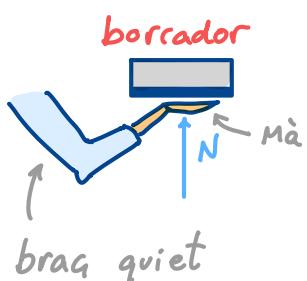
Tot i que les forces d'eullag s'adapten per valdr el que calgui, tenen valors límit, per exm. donats per la resistència. Si continuo afegint més al bloc potser enfoscaré el terra i el bloc caurà al pis de sota!

Puc tenir desaparició de l'eullag sense tenir rotura física?

Sí! Vegem-ho amb exemples:

#### ► Borrador

Si l'anterior bloc és el Borrador i l'aixecó, pot perdre contacte amb la meva mà:



Cal  $N > 0$  per garantir l'eullag.

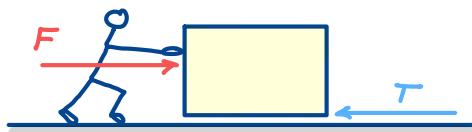
La condició límit d'eullag és

$$N = 0$$

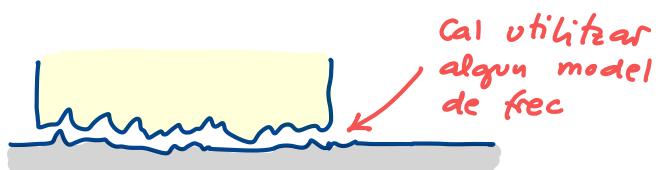
## ► Persona → bloc

Inicialment, bloc estàtic.

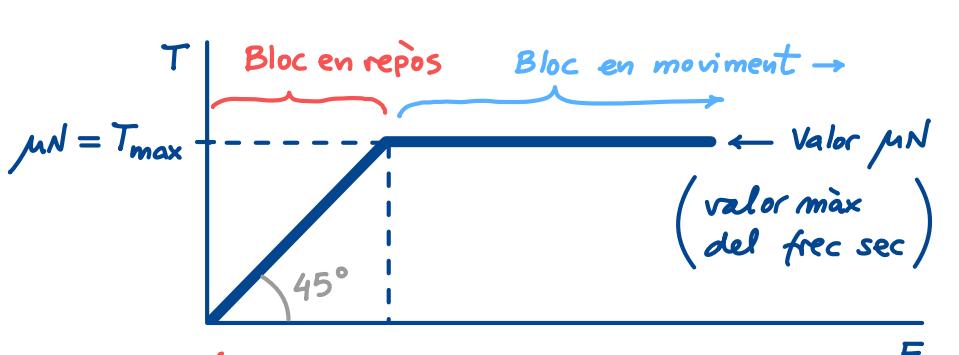
Apliquem  $F$  de valor creixent.



Per  $F$  baix, el terra respon amb  $T = F$  sobre bloc, impedint el movim. Si  $\uparrow F$ ,  $T \uparrow$  (s'adapta).  $T$  és un fregament degut a les rugositats del contacte



A partir d'un cert  $F$ , bloc es mourà  $\rightarrow$ . Si suposem el model de freq sec de Coulomb trobarem:



Cond. límit d'enllaç:

$$T = \mu N$$

$\exists$  fregament sense movim. relatiu

$T$  és d'enllaç

No és formulable

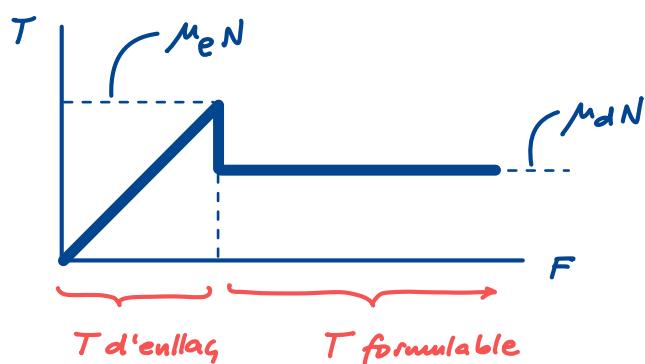
$\exists$  fregament amb movim. relatiu

" fricció

$T$  no és d'enllaç

És formulable:  $T = \mu N$

El següent model de freq sec és més acurat:

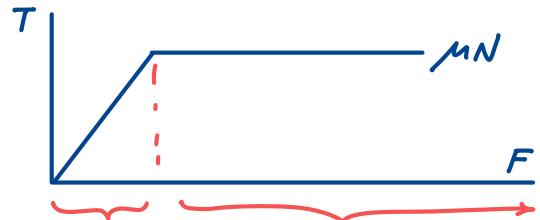
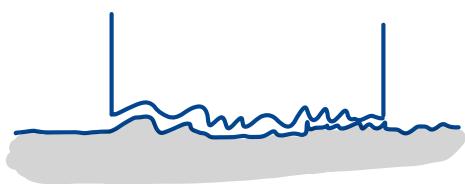


$\mu_e$  = coef. freq estàtic

$\mu_d$  = " " dinàmic

D'on surten les forces de fregament?

De les rugositats



Aquí cal  
aixafar les  
punxes per  
moure bloc

Un cop aixafades  
ja es mou cap a

Important: Típicament farem hipòtesi que  $\nexists$  lliscament, resoldrem el problema, i si surten valors que violen les cond. Límit d'eullag refarem el problema novament, assumint que  $\exists$  lliscament.

### Caracterització forces d'eullag

Quan hi ha un contacte entre una partícula  $P$  i una superfície  $S$  cal saber identificar la forma genèrica que tindrà la força  $\bar{F}_{S \rightarrow P}$  que fa  $S$  sobre  $P$ . Per identificar aquesta forma cal pensar en quines velocitats permet  $S$  a  $P$ , vistes des de  $S$  (relatives a  $S$ ). Hi haurà components de força no nul·les en les direccions en les que no hi hagi velocitat permesa.

Considerarem 2 casos

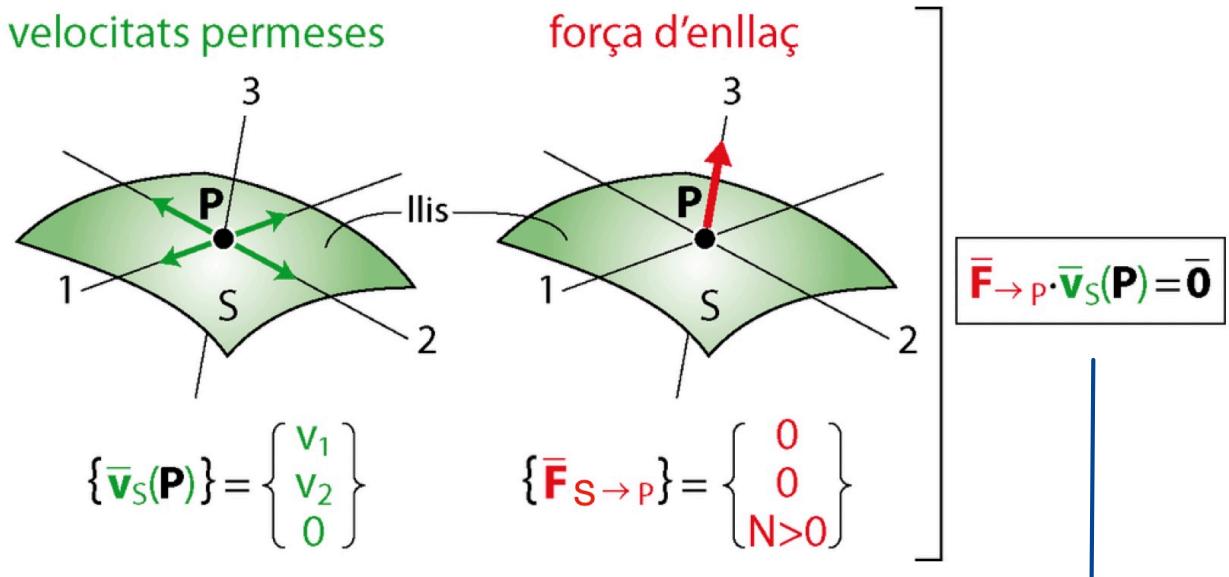
- $P$  en contacte amb una superf.  $S$  llisa
- " " " " " " " " rugosa

### Partícula sobre superf. llisa

$S$  li permet a  $P$  de tenir components en les direccions 1 i 2 del pla tangent a  $S$  en el punt  $P$ , però no en direcció 3 negativa (altrament  $P$  penetraria  $S$  i no pot) Hem de suposar que  $S$  és la superfície d'un sólid rígid.

Com a conseqüència, S pot aplicar forces a P només en la direcció 3 positiva (normal al pla tangent), i no en les direccions 1 i 2 (perquè si llista i permet  $v_1$  i  $v_2$ ).

Per tant tindrem, en la base  $B = (1, 2, 3)$ :



Sempre es complirà aquesta ortogonalitat

Caracteritzar un enllaç vol dir fer precisament el que acabem de fer: determinar la forma genèrica de

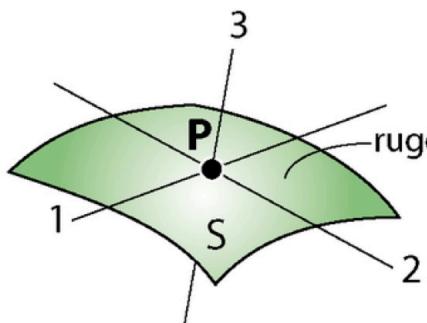
$$\{\bar{v}_S(P)\} \text{ i } \{\bar{F}_{S \rightarrow P}\}$$

Aquesta caracterització és necessària per després poder aplicar bé la 2a Llei de Newton. Ja ho veurem.

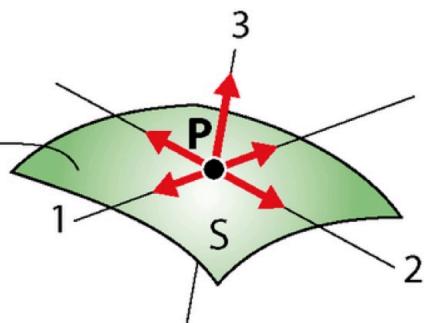
## Partícula sobre superf. rugosa

Quan  $S$  és rugosa,  $S$  s'oposa al moviment de  $P$  no només en la dir. 3 - sinó també en les direccions tangencials 1 i 2. En principi,  $S$  no permetrà a  $P$  de lliscar en aquestes direccions (a menys que hi hagi forces sobre  $P$  suficientment grans com per forçar el lliscament). Per tant, tindrem, en  $B = (1, 2, 3)$ :

velocitats permeses  
(sense lliscament)



força d'enllaç



$$\bar{F}_{\rightarrow P} \cdot \bar{v}_S(P) = \bar{0}$$

$$\{\bar{v}_S(P)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{F}_{S \rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ N > 0 \end{Bmatrix}, \sqrt{F_1^2 + F_2^2} < F_{\max}$$

### Alerta amb el vocabulari:

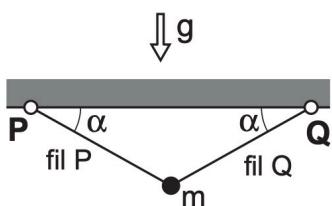
" $\exists$  fregament" = " $\exists$  rugositat que s'oposa al movim."  
(però no vol dir que hi hagi lliscament!)

" $\exists$  fricció" = " $\exists$  fregament i lliscament"

" $\exists$  lliscament" = " $\exists$  vel. relativa al contacte"

expressió de  
cinemàtica  
(no dinàmica)

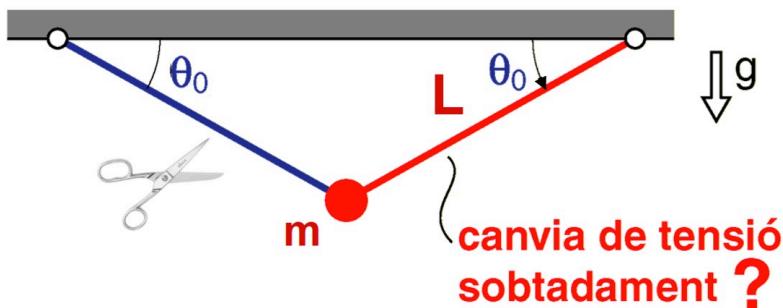
però l'expressió no diu res sobre  
si el terra és lis o rugós.



6 La partícula de massa  $m$  está suspesa dels punts fixos  $P$  i  $Q$  per mitjà de dos fils. El sistema es troba en repòs. En un cert moment, es talla el fil  $Q$ . Què es pot afirmar de la tensió del fil  $P$  just després que es talli el fil  $Q$  comparada amb la que tenia abans de tallar-lo?

- A S'anula instantàniament
- B Manté el mateix valor
- C Augmenta per a tot valor de  $\alpha$
- D Disminueix per a tot valor de  $\alpha$
- E Disminueix per a  $\alpha < 45^\circ$ , augmenta per a  $\alpha > 45^\circ$

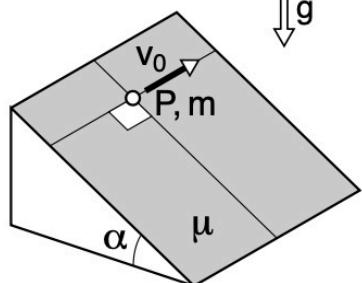
A més del que es pregunta a la qüestió, determinen quant val  $\ddot{\theta}$  un cop es talla el cable:



$\ddot{\theta}$  depèn de  $L$  o de  $m$ ?

Troben l'equació del moviment  
per la coordenada  $\theta$

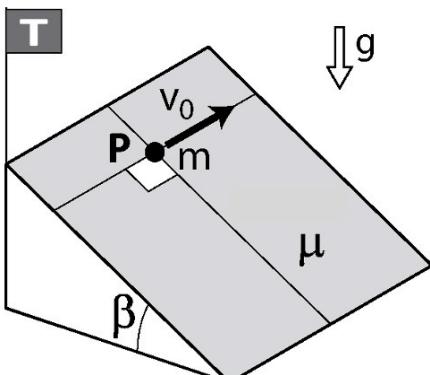
Partícula sobre pla inclinat - Qüestió 5.22 MPSR



5.22 La partícula P de massa  $m$ , que es mou sobre un pla inclinat, passa per la posició indicada amb velocitat  $v_0$  perpendicular a la línia de màxim pendent del pla. Entre partícula i pla hi ha freg sec de coeficient  $\mu$ . Quant val el radi de curvatura de la trajectòria de P sobre el pla a la posició indicada?

- A  $(v_0^2 - \mu g)^2 / g \cos\alpha$
- B  $v_0^2 / (\mu g \cos\alpha + g \sin\alpha)$
- C  $v_0^2 / (g \sin\alpha)$
- D  $\mu v_0^2 / (g \sin\alpha)$
- E  $v_0^2 / [(\mu g \cos\alpha)^2 + (g \sin\alpha)^2]^{1/2}$

$R_T(P) ?$

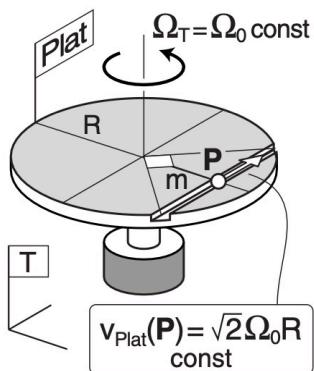


8P

Atenció: Aquí solem preguntar per què cal dinàmica per obtenir  $R_T(P)$  quan fins ara no calia. No calia perquè els moviments que considerarem estaven determinats pels enllaços. Eren d'1 GL. En general pot caldre dinàmica per determinar  $a_T^n(P)$ .

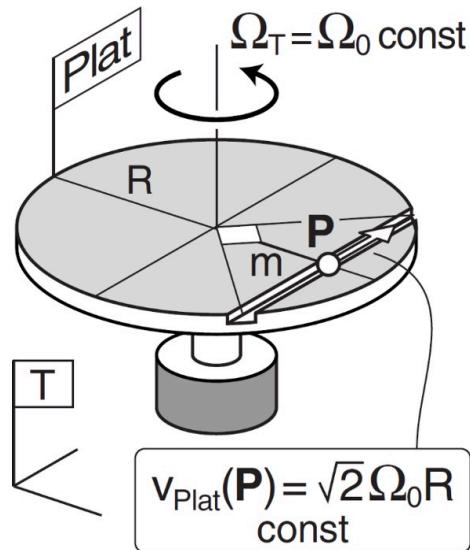
## Pàrticula sobre plataforma - Q1, juny 2015

$|\bar{F}_{\text{horizontal d'enllaç}}(\mathbf{P})|?$



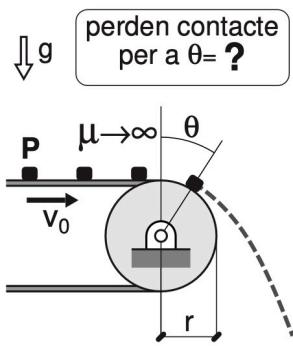
1 La plataforma horitzontal gira amb velocitat angular constant  $\Omega_0$  al voltant d'un eix vertical fix a terra ( $T$ ). La partícula  $\mathbf{P}$  de massa  $m$  es mou dins d'una guia amb celeritat constant  $\sqrt{2}\Omega_0 R$  respecte a la plataforma gràcies a un accionament. Quin és el mòdul de la força horizontal d'enllaç que rep  $\mathbf{P}$  quan passa pel punt central de la guia?

- |   |                          |   |                          |
|---|--------------------------|---|--------------------------|
| A | $5mR\Omega_0^2/\sqrt{2}$ | D | $2mR\Omega_0^2/\sqrt{2}$ |
| B | $4mR\Omega_0^2/\sqrt{2}$ | E | $mR\Omega_0^2/\sqrt{2}$  |
| C | $3mR\Omega_0^2/\sqrt{2}$ |   |                          |



$|\bar{F}_{\text{horizontal d'enllaç}}(\mathbf{P})|?$

## Pàrtícules sobre cinta transportadora - Q2 juny 2009



**2** Les partícules **P** es troben en repòs respecte a la cinta transportadora que avança amb velocitat  $v_0$  constant. Si el coeficient de freg entre cinta i partícules és  $\infty$ , en quina posició angular  $\theta$  les partícules perden contacte amb la cinta?

- A**  $\theta = 0^\circ$  sempre.
- B**  $\theta = 90^\circ$  sempre.
- C**  $\arccos(v_0^2/gr)$  si existeix. Si no,  $\theta = 0^\circ$ .
- D**  $\arcsin(v_0^2/gr)$  si existeix. Si no,  $\theta = 0^\circ$ .
- E**  $\text{arc cot}(v_0^2/gr)$ .

