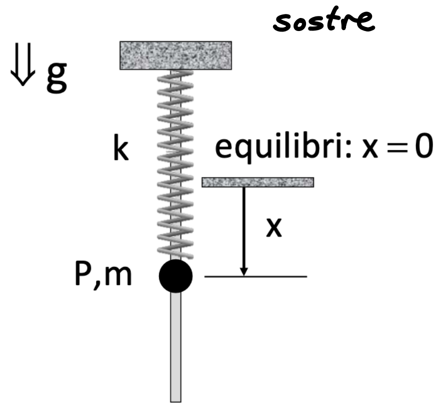
10P

Oscil·lacions i punts d’equilibri

Integració eqs. mov. senzilles
Oscil·lacions 1GL
Punts d’equilibri
Linealització

+

Ex. extra de reforç



- Força de la molla en funció d'x?
- Eq. del moviment per x?
- Com és x(t)?
- x = 0 és posició d'equilibri estable?

Aquest exercici prepara el terreny per futurs exercicis!

Força molla en funció d'x

S'ha definit x com al dibuix, i no des del sostre, perquè convé que l'origen de coordenades correspongui a una configuració dinàmicament interessant ($x=0 \Rightarrow$ equilibri en aq. cas)

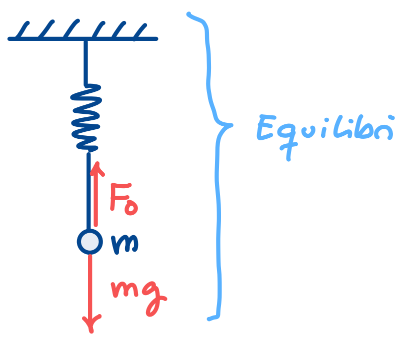
Per $x=0$ la força que fa la molla és atractiva $\longrightarrow$ Formulem amb crit. d'atracció

$$F_m^{at} = F_0 + k\,\Delta x$$

$\Delta\rho = \Delta x$ en aq. cas

F_0 no és una dada aquí. L'hem de calcular imposant la condició d'equilibri per $x=0$. Clarament:

$$F_0 = mg$$



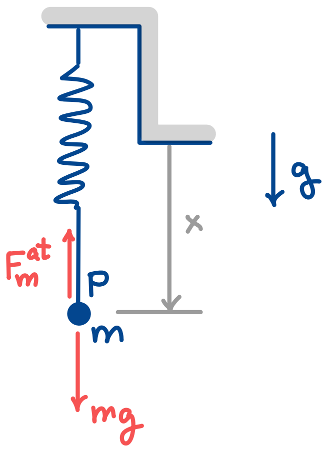
Ergo:

$$\boxed{F_m^{at} = mg + kx} \qquad (1)$$

Eq. del moviment per a x

← Ens donarà l'evolució x(t) !

Cas molt fàcil: només cal aplicar 2a LN a P en dir vert:



$$(\downarrow mg) + \left[\uparrow (mg + kx)\right] = (\downarrow m\ddot{x})$$

$$mg - (mg + kx) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (2)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (2')$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{m}x} \qquad (2'')$$

Eq. del mov. per coord. x

EDO lineal amb coefs. ct.

3 maneres usuals d'escriure-la

Evolució x(t) ?

Cal mirar-se (2'') com una EDO on x és una funció del temps que volem determinar:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) \qquad (3)$$

x(t) és la incògnita de l'EDO. Sovint, però, la dependència de x amb t s'omet !

Volem trobar una x(t) que verifiqui (3) i les $\underbrace{\text{condicions inicials}}_{\text{c.i.}}$:

$$x(0) = x_0 \qquad (4)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \qquad (5)$$

Valors de x i $\dot{x}$ per t=0

(3), (4), (5) defineixen un problema de valor inicial (PVI)

Com ho fem? Fàcil! L'eq. (3) implica que $\ddot{x}(t)$ ha de ser proporcional a x(t). Si se'ns acut alguna funció que satisfaci (3) [i (4), (5)] per algun valor dels seus paràmetres, ja està! Ja haurem resolt el PVI. I... les següents funcions ho satisfan!

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \qquad (6)$$

$$x(t) = D\cdot \sin(\omega t + \varphi) \qquad (7)$$

Provem (7). A veure si satisfà el PVI per certs valors de A, B, ω:

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \qquad (8)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t) \qquad (9)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t) \qquad (10)$$

Comparant (10) amb (3) veiem que

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

A i B es determinen imposant les c.i. (4) i (5) via (8) i (9):

$$x_0 = A\sin(\omega\cdot 0) + B\cos(\omega\cdot 0) = B \quad \rightarrow \quad \boxed{B = x_0}$$

$$\dot{x}_0 = A\omega\cos(\omega\cdot 0) - B\omega\sin(\omega\cdot 0) = A\omega \quad \rightarrow \quad \boxed{A = \frac{\dot{x}_0}{\omega}}$$

Ergo $x(t)$ definida com a (6), amb els valors de A, B i ω que hem trobat, és la solució del PVI.

Exercici pel lector: Proveu que (7) també és una solució del PVI amb els valors

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}} \qquad \boxed{D = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}} \qquad \boxed{\tan\varphi = \frac{\omega\, x_0}{\dot{x}_0}}$$

Igual q. abans!

La solució (7) i la (8) són iguals! Són dues maneres <u>equivalents</u> d'escriure la <u>mateixa</u> oscil·lació sinusoïdal.

D = Amplitud de l'oscil·lació [m]
φ = Fase de l'oscil·lació [rad]
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ = freqüència natural [rad/s]

Observ: ω és un <u>paràmetre intrínsec</u> del sistema: no depèn de les c.i., només de m i k.

D i φ són pars. <u>extrínsecs</u> (depenen de les c.i.)

Estudi de la posició d'equilibri (és estable?)

Mirant

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x \quad (6)$$

quines posicions d'equilibri té x?

Una posició d'equilibri x_{eq} és aquella en la que, si hi deixem el sistema amb $\dot{x} = 0$, s'hi queda ($\ddot{x} = 0$).

Clarament, si imposem

$$x = x_{eq},$$
$$\dot{x} = 0$$
$$\ddot{x} = 0$$

a (6), obtenim

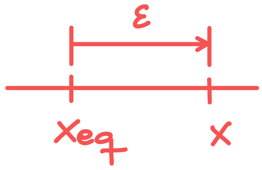
$$0 = -\frac{k}{m} x_{eq} \Rightarrow \boxed{x_{eq} = 0}$$

És la posició d'equilibri de l'enunciat, com era d'esperar!

La molla és un <u>element recuperador</u> (o "estabilitzador") : si ens allunyem de x_{eq} $(=0)$ una mica, ens hi retorna. Es veu així:
si a (6) hi substituïm

$$\left.\begin{aligned} x &= \overset{0}{x_{eq}} + \varepsilon \\ \dot{x} &= \dot{\varepsilon} \\ \ddot{x} &= \ddot{\varepsilon} \end{aligned}\right]$$

$\varepsilon =$ "error" o desviació de x respecte x_{eq} (*↓)



queda

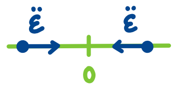
$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{k}{m}\varepsilon$$

EDO de l'error $\varepsilon = x - x_{eq}$
[determina l'evolució $\varepsilon(t)$]

i clarament

$$\ddot{\varepsilon} = -\underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{K>0}\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \varepsilon > 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} < 0 \Rightarrow \varepsilon \text{ torna cap a } 0 \\ \text{si } \varepsilon < 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \varepsilon \text{ torna cap a } 0 \end{cases}$$

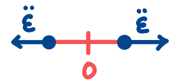
Equilibri ESTABLE



Què passaria si $\frac{k}{m} < 0$?

$$\ddot{\varepsilon} = -\underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\text{negatiu}}\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \varepsilon > 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \varepsilon \text{ s'allunya de } 0 \\ \text{si } \varepsilon < 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} < 0 \Rightarrow \varepsilon \text{ s'allunya de } 0 \end{cases}$$

Equilibri INESTABLE



Important entendre-ho!

En aquest exercici, k i m són positives, i per tant l'equilibri és estable, però en exercicis futurs veurem casos on tenim $\ddot{\varepsilon} = -K\varepsilon$, amb $K < 0$.

(*) En aquest exercici $x = \varepsilon$ (perquè $x_{eq} = 0$) però en altres exercicis caldrà distingir la desviació ε del valor de la coordenada (x en aquest cas). Per això, ho comencem a practicar!

Versió simplificada del prob. 1.7 de RBD, pàg 66

Partícula sobre guia inclinada amb molla

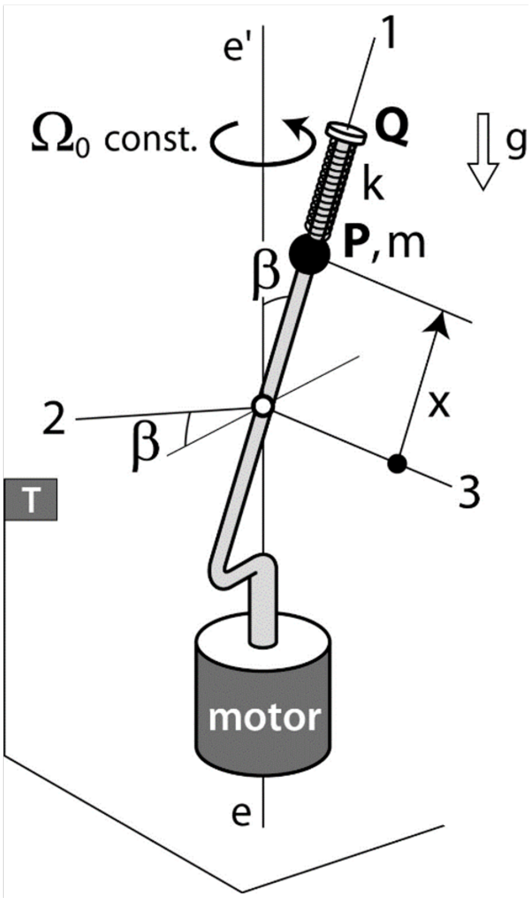
Una partícula P de massa m llisca al llarg d'una guia recta inclinada i llisa que gira amb velocitat angular constant Ω_0 al voltant de l'eix vertical e-e' relatiu a terra (T). La partícula està unida a una molla que té el seu extrem superior unit al punt Q de la guia. La coordenada x descriu la posició de la partícula relativa a la guia. Quan $\Omega_0 = 0$, la posició $x = 0$ correspon a una posició d'equilibri. Determina:

(a) Quants graus de llibertat té el sistema? Són lliures o forçats?

(b) L'equació del moviment per a la coordenada x. A quin tipus de moviment correspon?

(c) La naturalesa de $x = 0$ (equilibri estable o inestable).

(d) Les components de la força d'enllaç sobre P.



Farem (a), (b), i (c) i deixarem (d) com a deures

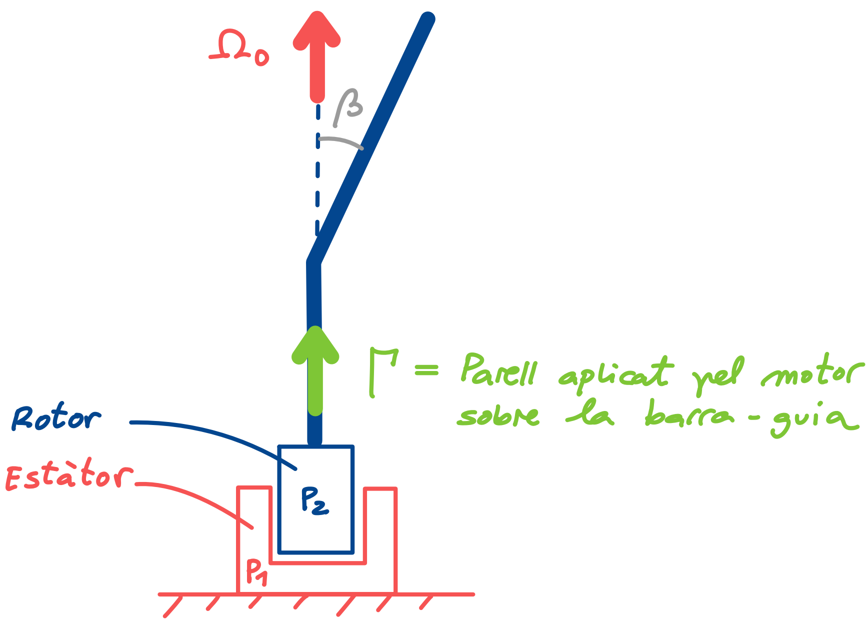
(a) Anàlisi dels GL

Sist. amb 2 GL $\left| \begin{array}{l} \dot\psi \ (= \Omega_0 = ct \text{ en aquest exercici}) \\ \dot x \end{array} \right.$

ψ és un GL forçat: està actuat per un motor que aplica el parell Γ que calgui sobre la guia per garantir $\dot\psi = \Omega_0 = ct.$

Cal pensar el motor com dues peces P_1 i P_2, l'estàtor i el rotor, units al terra i la guia respectivament.

Aquesta manera de veure un motor és important de cara a futurs exercicis



L'equació del mov. per a ψ és trivial. Com que $\dot\psi = \Omega_0 = ct$, clarament

$$\boxed{\ddot\psi = 0} \leftarrow \text{Eq. del mov. per a } \psi.$$

x és un GL lliure: $x(t)$ evoluciona d'acord amb les lleis de la dinàmica, sense que el motor pugui forçar $x(t)$ de manera directa ($x(t)$ dependrà de m, K, Ω_0, β)

(b) Eq. mov. coord x

Volem trobar l'eq. del movim. per x, que tindrà la forma:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \text{pars}) \qquad (1)$$

└ Busquem aquesta f

Pars = paràmetres dinàmics / geomètrics

Es un problema de dinàmica de partícula. En tindrem prou amb aplicar la 2ª llei de Newton sobre P.

Coses que sabem, a priori, de (1):

- Si $\beta = 0$, ha de coincidir amb la de l'exemple anterior:

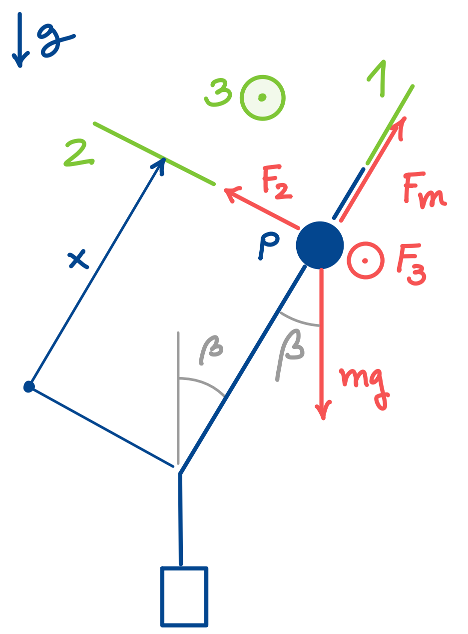
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

- Si $\Omega_0 = 0$, $x = 0$ ha de ser d'equilibri (per l'enunciat)

Diferències amb el problema anterior:

- Ara el problema és 3D!
- P està sotmesa a forces d'enllaç (guia → P)

Forces sobre P



- Només hi ha forces d'enllaç en dirs. 2 i 3 (F_2, F_3) perquè en dir. 1 el moviment és permès.

- F_2 i F_3 poden tenir qualsevol signe (enllaç bilateral). Per això, cap es diu N!

Formulació de F_m

La força de la molla és atractiva en la situació d'equilibri $x=0$ $\Rightarrow$ fem servir el criteri d'atracció:

$$F_m^{at} = \underbrace{F_0}_{\text{No és dada. Cal determinar-la}} + k\,\underbrace{\Delta\rho}_{-x}$$

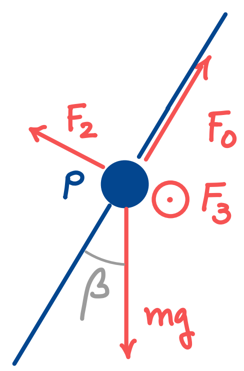
Molla s'escurça en passar de $x=0$ a l'x dibuixat (*)

Per $x=0$, $F_m = F_0$, i P en equilibri:

$$\left.\sum \bar{F}_{\to P} = 0\right]_{\text{Dir. guia}}:$$

$$(\nearrow F_0) + (\swarrow mg\cos\beta) = 0$$

$$F_0 = mg\cos\beta$$



Problema d'estàtica

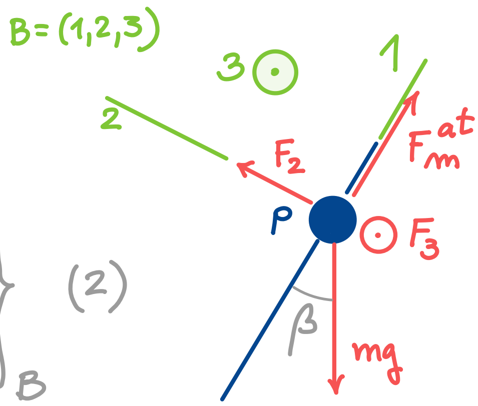
Per tant:

$$\boxed{F_m^{at} = mg\cos\beta - kx}$$

2ª LN sobre P

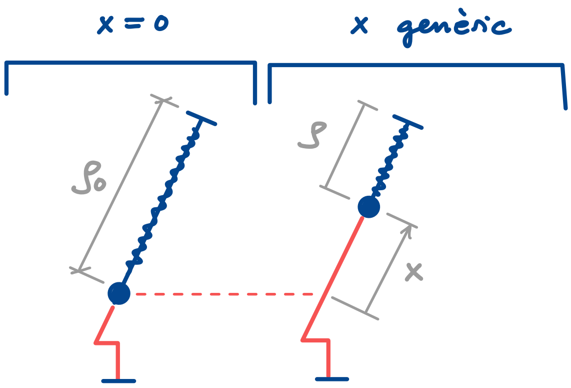
$$\underbrace{\sum \bar{F}_{\to P}}_{\left\{\begin{matrix} \cancel{mg\cos\beta} - kx - \cancel{mg\cos\beta} \\ F_2 - mg\sin\beta \\ F_3 \end{matrix}\right\}_B} = m\,\bar{a}_T(P)$$

(2)



En dir. 1 no hi ha forces d'enllaç! Ergo la component 1 de la 2ª LN ens donarà l'eq. del mov. que busquem.

(*)



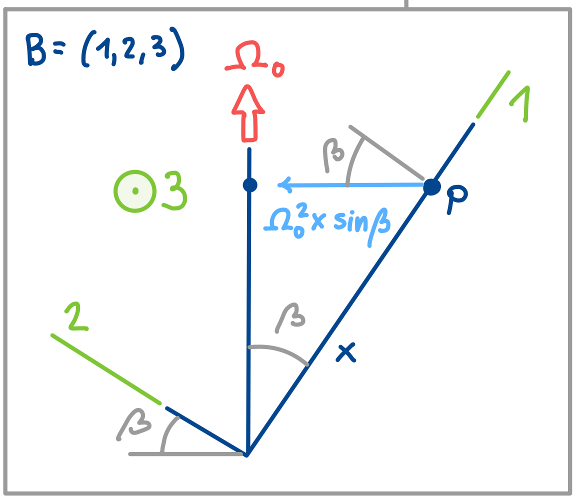
$$\rho - \rho_0 = -x$$ s'escurça

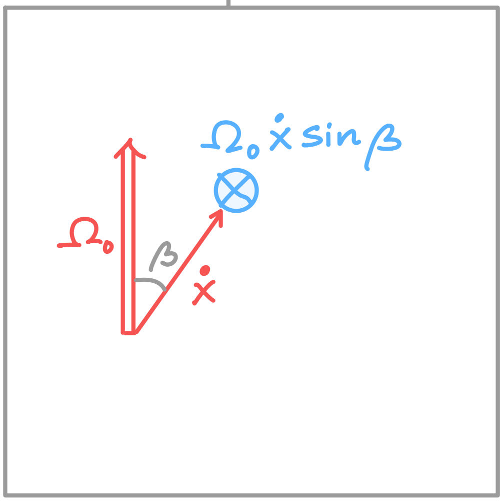
Full de ruta per obtenir l'eq. del mov: $\left.2^a \text{ Llei Newton}\right]_1$

Només ens cal la comp. 1 d'$\bar{a}_T(P)$.

$\bar{a}_T(P)$ via comp. d'acceleracions $(AB = T,\ REL = \text{Guia})$ (*)

$$\bar{a}_T(P) = \underbrace{\bar{a}_{Guia}(P)}_{(\nearrow \ddot{x})} + \underbrace{\bar{a}_{ar}(P)}_{(\overleftarrow{\Omega_0^2 x \sin\beta})} + \underbrace{2\,\bar{\Omega}_T^{Guia} \times \bar{v}_{Guia}(P)}_{\otimes\ 2\Omega_0 \dot{x} \sin\beta} =$$





$$= \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\Omega_0^2 x \sin^2\beta \\ \Omega_0^2 x \sin\beta \cos\beta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\Omega_0 \dot{x} \sin\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} - \Omega_0^2 x \sin^2\beta \\ \Omega_0^2 x \sin\beta \cos\beta \\ -2\Omega_0 \dot{x} \sin\beta \end{Bmatrix} \quad (3)$$

2ª LN en dir. 1

Queda:

$$-Kx = m\left(\ddot{x} - \Omega_0^2 x \sin^2\beta\right)$$

$$\boxed{m\ddot{x} + \underbrace{(K - m\Omega_0^2 \sin^2\beta)}_{K'} x = 0}$$

Eq. mov. per la coord. x (4)

Té la forma

$$m\ddot{x} + K'x = 0$$

Mateixa que la de l'exercici anterior! (5)

(*) Calculem totes les components per exercitar-nos. També, perquè calen per l'apartat (d)

Comprovacions del que sabíem a priori :

- Si $\beta=0$, $K'=K$. Coincideix amb la de l'ex. anterior!
- Pel que hem vist a l'ex anterior, $x=0$ és posició d'equilibri ($x_{eq}=0$), de l'EDO (4). De fet serà així independentment del valor Ω_0. En particular és cert que, per $\Omega_0=0$, $x=0$ és pos. d'equilibri.

Evolució $x(t)$

Serà la mateixa que a l'ex. anterior:

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

amb

$$\omega = \sqrt{\frac{K'}{m}} \qquad A = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \qquad B = x_0$$

Moviment oscil·latori de freqüència $\sqrt{\frac{K'}{m}}$

(c) Anàlisi de l'estabilitat d'$x_{eq}=0$

Pel que sabem de l'ex. anterior:

$$\frac{K'}{m} > 0 \iff x_{eq}=0 \text{ és d'equilibri ESTABLE}$$

$$\frac{K'}{m} < 0 \iff x_{eq}=0 \text{ és d'equilibri INESTABLE}$$

Utilitzant el valor de K':

$$\frac{K - m\Omega_0^2\sin^2\beta}{m} > 0 \iff \frac{K}{m} > \Omega_0^2\sin^2\beta$$

Ergo :

$$\frac{K}{m} > \Omega_0^2\sin^2\beta \Rightarrow \text{Equil. ESTABLE}$$

$$\frac{K}{m} < \Omega_0^2\sin^2\beta \Rightarrow \text{Equil. INESTABLE}$$

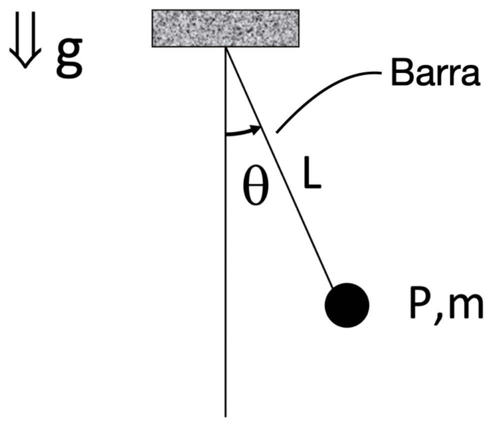
A major Ω_0, cal major K per garantir estabilitat

Deures : obteniu el valor de F_2 i F_3 (trivial).

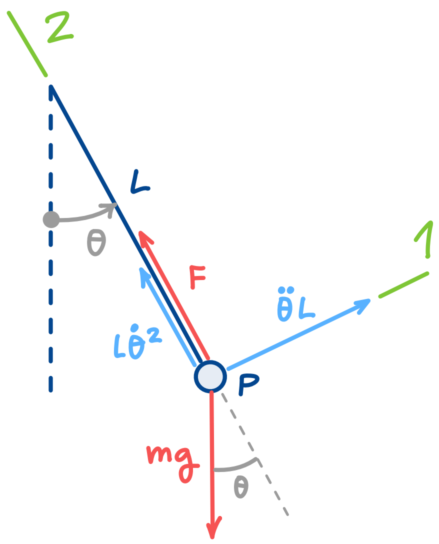
El pèndol simple de la figura té la massa m concentrada a P.

Trobeu-ne:

1. L'equació del moviment per a la coordenada θ.
2. Les configuracions d'equilibri, determinant si són estables o inestables.



(1) Eq. mov. coord. θ



En dir. 1 no hi ha forces d'enllaç sobre P. Per tant, l'eq. del mov. serà la comp. en dir. 1 de

$$\Sigma \bar{F}_{\to P} = m\,\bar{a}_T(P)$$

$$(\swarrow mg\sin\theta) = m\,(\nearrow \ddot{\theta}L)$$

$$-\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}\ddot{\theta}L$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta} \quad (1)$$

EDO no lineal!
$\ddot{\theta}(t)$ no és proporcional a $\theta(t)$

(2) Configs. d'equilibri

Config. equilibri (θ_{eq}) = aquella en la que si hi deixo el sistema amb vel. nul·la ($\dot{\theta}=0$), s'hi queda ($\ddot{\theta}=0$).

Substituïm $\boxed{\begin{array}{l}\theta = \theta_{eq}\\ \dot{\theta}=0\\ \ddot{\theta}=0\end{array}}$ a (1) per trobar-les:

$$0 = -\frac{g}{L}\sin\theta_{eq} \Rightarrow \sin\theta_{eq} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_{eq} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Les posicions inferior i superior del pèndol són d'equilibri. Són estables? La inferior sí, la superior no! Però com ho demostrem matemàticament? Analitzant com són les petites oscil·lacions al seu voltant! En 3 passos:

1 Obtenim EDO de l'error:

Substituïm $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$ a (1)

(Implica substituir $\left|\begin{array}{l}\dot\theta = \dot\varepsilon \\ \ddot\theta = \ddot\varepsilon\end{array}\right.$ també)

Queda:

$$\ddot\varepsilon = -\frac{g}{L}\sin(\theta_{eq} + \varepsilon)$$

$$\ddot\varepsilon = -\frac{g}{L}\left[\underbrace{\sin\theta_{eq}}_{0}\cdot\cos\varepsilon + \cos\theta_{eq}\sin\varepsilon\right]$$

$$\ddot\varepsilon = -\frac{g\cos\theta_{eq}}{L}\sin\varepsilon$$

EDO de l'error ε (No lineal)

2 La linealitzem:

Com que ε és molt petit ($|\varepsilon| \ll 1$, $\varepsilon^2 \simeq 0$, $\varepsilon^3 \simeq 0$, ...) aproximem les funcions no lineals que queden pel seu desenvolupament en sèrie de Taylor fins a 1er ordre (termes lineals):

$$\ddot\varepsilon = -\frac{g\cos\theta_{eq}}{L}\cdot\underbrace{\sin\varepsilon}_{\simeq\varepsilon}$$

$$\left(\begin{array}{l}\sin\varepsilon = \varepsilon - \dfrac{\varepsilon^3}{3!} + \ldots \simeq \varepsilon \\ \cos\varepsilon = 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{2} + \ldots \simeq 1\end{array}\right)$$

$$\ddot\varepsilon = -\underbrace{\frac{g\cos\theta_{eq}}{L}}_{K}\cdot\varepsilon$$

EDO lineal!

3 **Mirem si $K > 0$:**

Com que surt una EDO lineal com la de la molla vertical, l'equilibri serà estable quan $K > 0$:

Per $\theta_{eq} = 0$, $K = \frac{g}{L} > 0 \Rightarrow$ Equilibri estable

Per $\theta_{eq} = \pi$, $K = -\frac{g}{L} < 0 \Rightarrow$ Equilibri inestable

Important:

- En el pas 2 podria caldre la linealització d'altres termes, apart de $\sin\varepsilon \simeq \varepsilon$. Resumim les linealitzacions més habituals, on q és la coordenada de treball:

  - si apareixen polinomis de grau superior a 1:

$$q = q_{eq} + \varepsilon$$
$$q^2 = (q_{eq}+\varepsilon)^2 = \varepsilon^2 + 2q_{eq}\varepsilon + q_{eq}^2 \approx +2q_{eq}\varepsilon + q_{eq}^2$$
$$q^3 = (q_{eq}+\varepsilon)^3 = \varepsilon^3 + 3q_{eq}\varepsilon^2 + 3q_{eq}^2\varepsilon + q_{eq}^3 \approx 3q_{eq}^2\varepsilon + q_{eq}^3$$

  - si es tracta d'una coordenada angular ($q = \theta$) i apareixen funcions sinus i cosinus:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_{eq} + \varepsilon \\ \sin\theta = \sin(\theta_{eq}+\varepsilon) &= \sin\theta_{eq}\cos\varepsilon + \cos\theta_{eq}\sin\varepsilon \\ \cos\theta = \cos(\theta_{eq}+\varepsilon) &= \cos\theta_{eq}\cos\varepsilon - \sin\theta_{eq}\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon &= \varepsilon - (1/3!)\varepsilon^3 + \ldots \simeq \varepsilon \\ \cos\varepsilon &= 1 - (1/2)\varepsilon^2 + \ldots \simeq 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta_{eq}+\varepsilon) \simeq \sin\theta_{eq} + \varepsilon\cos\theta_{eq} \\ \cos(\theta_{eq}+\varepsilon) \simeq \cos\theta_{eq} - \varepsilon\sin\theta_{eq} \end{cases}$$

- L'EDO lineal obtinguda al pas 2 serà de la forma

$$\ddot{\varepsilon} = -K\varepsilon$$

habitualment, però podria també ser (*↓)

$$\ddot{\varepsilon} = -K\varepsilon - G\dot{\varepsilon} \quad (\text{on } G = \text{constant} > 0)$$

Es demostra que G no afecta l'estabilitat i seguirà essent:

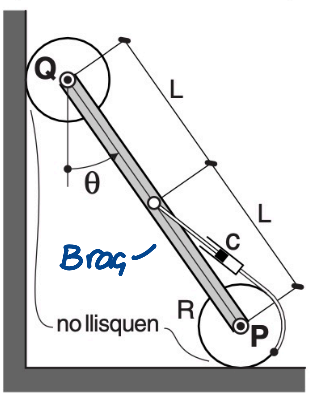
$K > 0 \Rightarrow$ Equilibri estable

$K < 0 \Rightarrow$ " inestable

(*) Quan hi ha frec viscós típicament

Exercicis extra de reforç

F_{atrac} de l'amortidor?



11 En el sistema de la figura, els corrons rodolen sense lliscar. Els seus centres estan articulats als extrems de la barra **P-Q** de longitud 2L. L'amortidor de constant c actua entre el punt mig de la barra i la perifèria del corró de centre **P**, a la qual es troba unit per un fil que hi és enrotllat i que hi té l'extrem fixat. Quina és l'expressió de la força d'atracció de l'amortidor?

A $c\dot{\theta}2L\cos\theta$

B $c\dot{\theta}(R+2L\cos\theta)$

C $c\dot{\theta}2(R+L\cos\theta)$

D $c\dot{\theta}(-R+2L\cos\theta)$

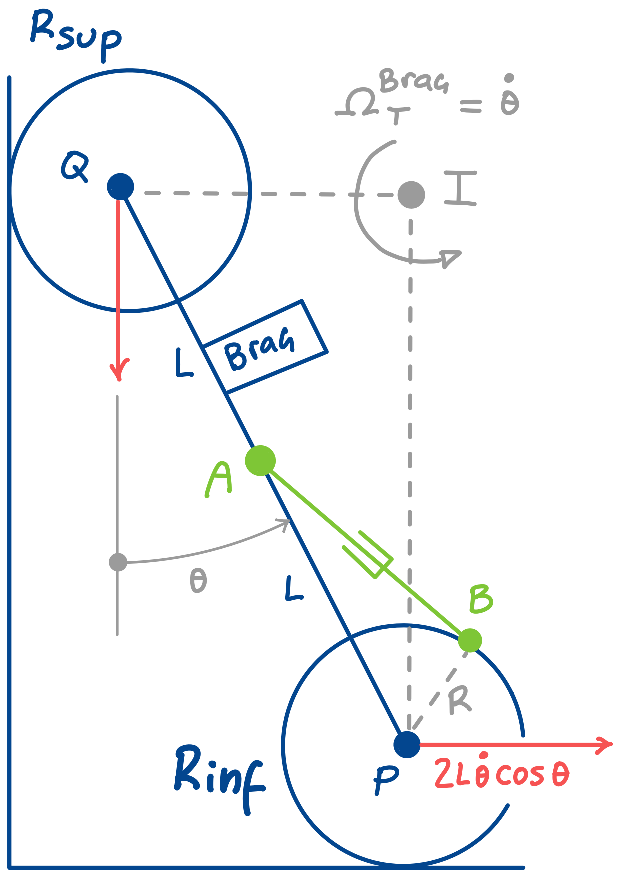
E $c\dot{\theta}2(-R+2L\cos\theta)$

Sist amb 1 GL : Si $\underbrace{R_{sup}}_{\text{Roda superior}}$ gira ↻, θ augmenta, i $\underbrace{R_{inf}}_{\text{Roda inferior}}$ gira ↻.

Sempre que tinguem almenys 1 extrem d'una molla o amortidor que s'enrotlla en una politja, com aquí, calcularem $\dot{\rho}$ buscant les velocitats dels extrems.

Com que demanen F_{am}^{att} → Criteri d'atracció:

$$F_{am}^{att} = c\dot{\rho} \qquad (\text{si } \dot{\rho} > 0$$ )



Busquem $\dot{\rho}$:

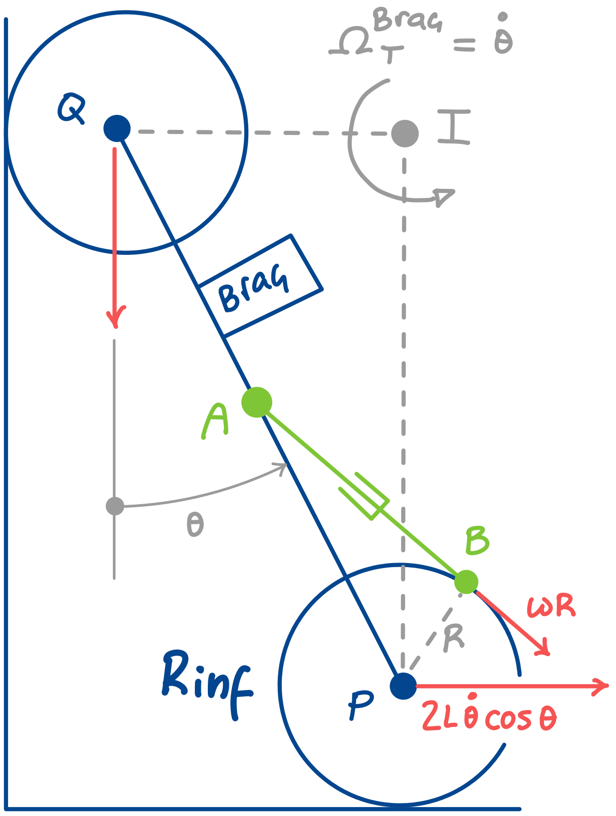
$CIR_T^{Braç} = I$ (fàcil)

Permet trobar

$$\overline{v}_T(P) = (\rightarrow \dot{\theta}\cdot 2L\cos\theta)$$

Ara podríem buscar $\overline{v}_T(A)$ i $\overline{v}_T(B)$

però no ens van bé per obtenir $\dot{\rho}$ perquè no són en la dir. de l'amortidor!



A ref. braç, en canvi, la vel. de A és zero, i la de B té la dir. de l'amortidor.

Buscarem $\bar{v}_{Braç}(B)$!

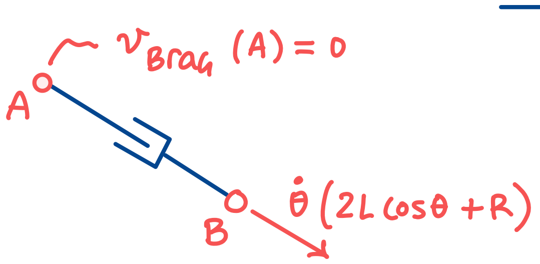
Respecte el braç, Rinf descriu un movim. circular al voltant de P amb vel. angular $\bar{\Omega}^{Rinf}_{Braç}$:

$$\bar{\Omega}^{Rinf}_{T} = \bar{\Omega}^{Rinf}_{Braç} + \bar{\Omega}^{Braç}_{T}$$

$$\bar{\Omega}^{Rinf}_{Braç} = \bar{\Omega}^{Rinf}_{T} - \bar{\Omega}^{Braç}_{T} = \left(\otimes\ \frac{2L\dot\theta\cos\theta}{R}\right) - \left(\odot\ \dot\theta\right) =$$

$$= \otimes\left(\frac{2L\dot\theta\cos\theta}{R} + \dot\theta\right) = \otimes\left[\overbrace{\dot\theta\left(\frac{2L\cos\theta + R}{R}\right)}^{\omega}\right]$$

$$\bar{v}_{Braç}(B) = \left(\searrow\ \omega R\right) = \left[\searrow\ \dot\theta\left(2L\cos\theta + R\right)\right]$$



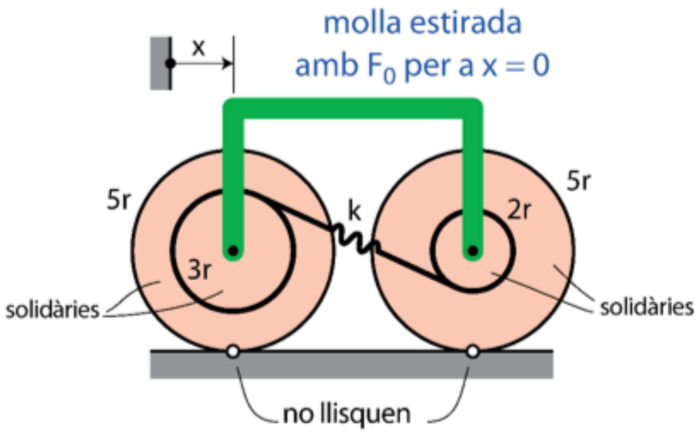
$$\longrightarrow\ \dot\rho = \dot\theta\left(2L\cos\theta + R\right)$$

Finalment, doncs :

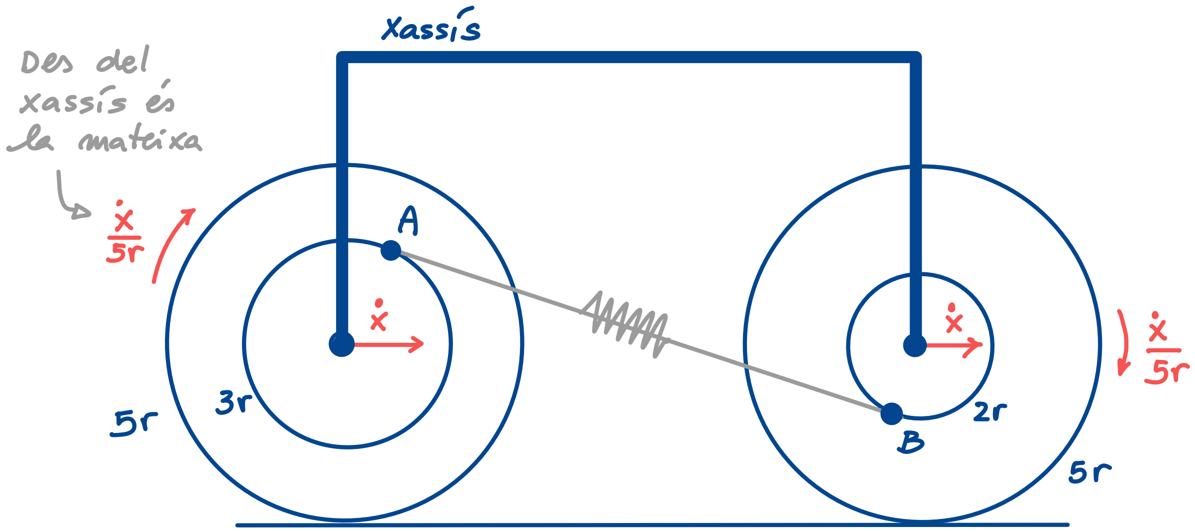
$$\boxed{F^{at}_{am} = c\,\dot\theta\left(2L\cos\theta + R\right)}$$

TP-G10 3 abril 2025

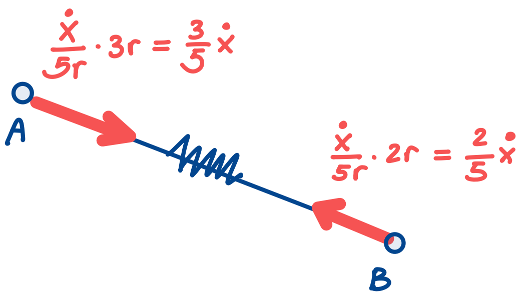
Quina és l'expressió de la força d'atracció de la molla en funció de x?



Sol: + detall a https://lluisros.github.io/mecanica/problemes/TP3-G10.pdf



A la ref. xassís tenim

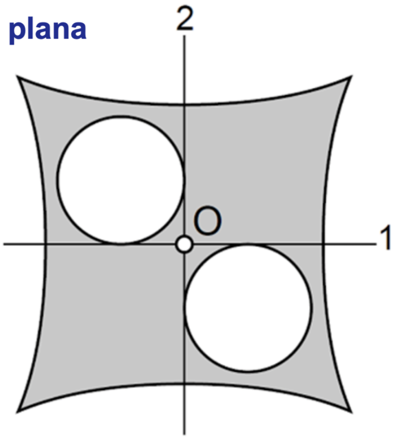


$$\longrightarrow \quad \dot{\rho} = -\left(\frac{3}{5}\dot{x} + \frac{2}{5}\dot{x}\right) = -\dot{x}$$

$$\Delta\rho = \int_0^t \dot{\rho}\, dt = -x$$

$$\boxed{F_m^{at} = F_0^{at} - kx}$$

placa plana



$[\mathrm{II}(\mathrm{O})]$ **?**

qualitatiu

Sol :

Clarament :

$$\text{Sòlid pla} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{DIR 3 és DPI} \\ I_{33} = I_{11} + I_{2} \end{array} \right.$$

$$I_{11} = I_{22} = I$$

$I_{12} < 0$ (més massa als quadrants I i III) $\quad \begin{array}{c|c} + & - \\ \hline - & + \end{array}$

Ergo :

$$[\mathrm{II}(0)]_B = \begin{bmatrix} I & -|I_{12}| & 0 \\ -|I_{12}| & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{bmatrix}$$