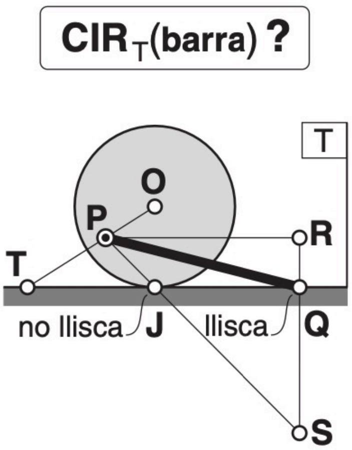
6P

Cinemàtica del sòlid rígid 2D

(inclou cinemàtica de vehicles)

Roda amb barra articulada – Q10 abril 2015

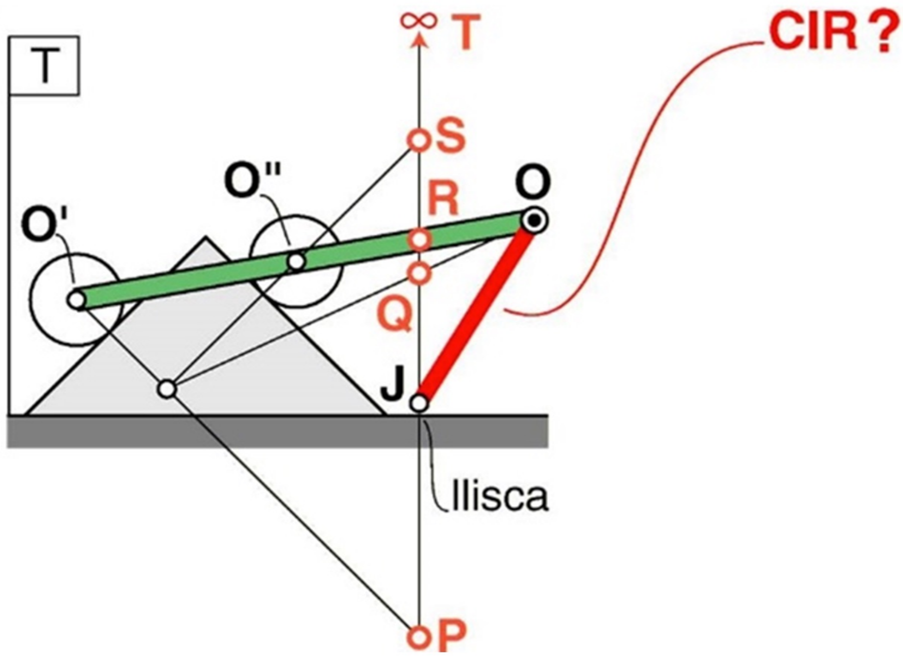


10 La roda es mou sense lliscar sobre el terra. La barra està articulada a la roda en el punt **P** i el seu extrem **Q** llisca sobre el terra. Quin és el Centre Instantani de Rotació de la barra PQ respecte al terra?

A **R**
B **O**
C **T**
D **J**
E **S**

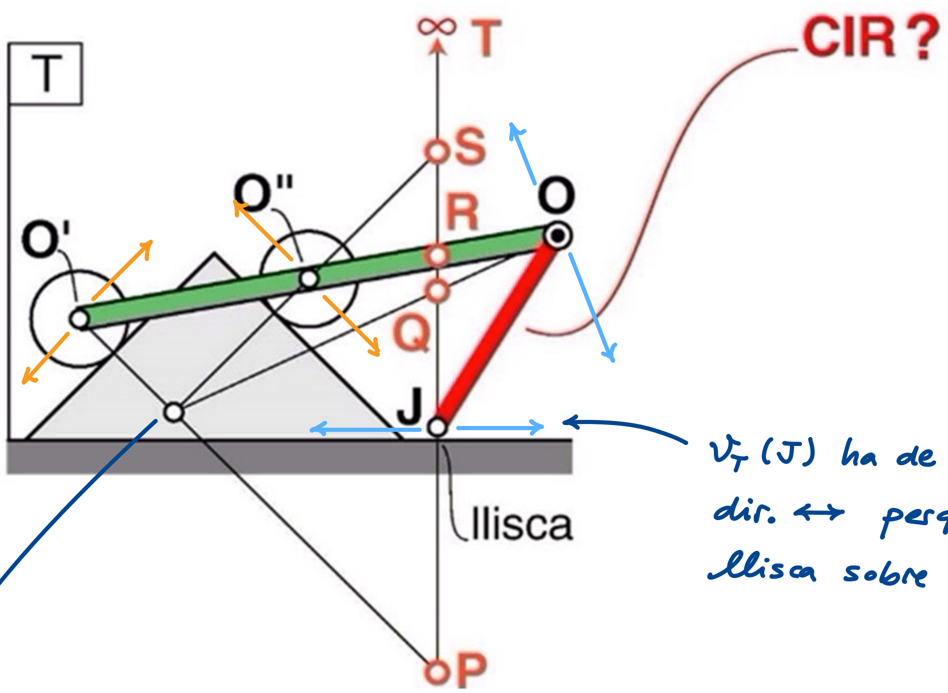
CIR barra vermella

Quin és el CIR de la barra vermella respecte T?



6P'

Sol.



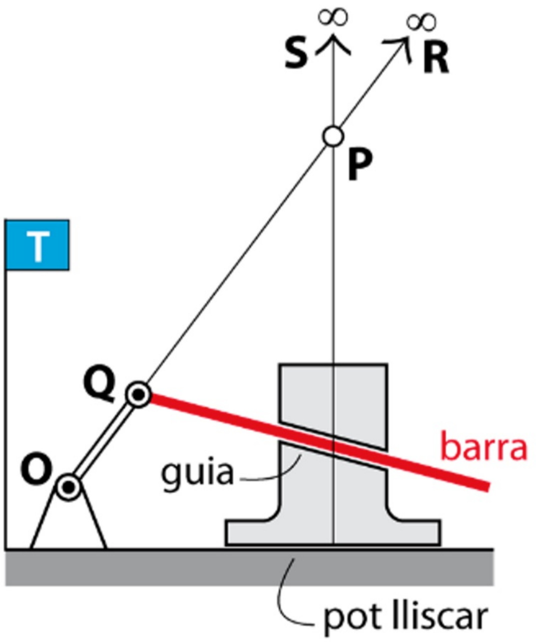
$v_T(J)$ ha de ser en dir. ↔ perquè J llisca sobre el terra

$CIR_T\begin{pmatrix}\text{Barra}\\ \text{verda}\end{pmatrix} \Rightarrow \bar{v}_T(O)$ és ↕

$\bar{v}_T(J)$ és ↔

$\Rightarrow CIR_T\begin{pmatrix}\text{Barra}\\ \text{vermella}\end{pmatrix} = Q$

Barra amb enllaços de revolució i prismàtics



CIR_T^{barra} ?

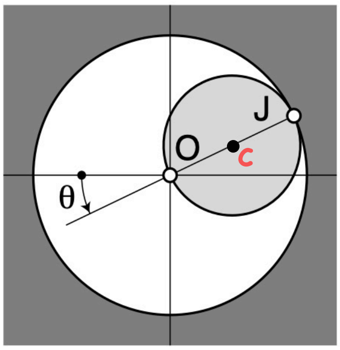
6P'

Sol.

La barra vermella només es pot traslladar. No pot girar, perquè els 2 enllaços prismàtics no li ho permeten.

Vol dir que $\bar{\Omega}_T^{barra} = 0$. Això implica que el seu CIR és a l'∞ (sobre un punt de la recta de l'∞). Per altra banda CIR_T^{barra} ha de ser sobre la recta OQ perquè Q té velocitat $\perp$ a aquesta recta. Per tant, CIR_T^{barra} ha de ser el punt de l'∞ de la recta OQ.

Disc en circumferència - Qüestions 3.3 i 3.4 MPSR



3.3 El disc de radi r rodola sense lliscar per l'interior de la circumferència fixa de radi 2r. Quina és la celeritat del punt O del disc?

A 0
B $r\,\dot{\theta}$
C $r\,\dot{\theta}/2$
D $2\,r\,\dot{\theta}$
E $4\,r\,\dot{\theta}$

3.4 Per al sistema de la qüestió anterior i per a la configuració de la figura, quin és el mòdul de l'acceleració del punt J del disc?

A 0
B ∞
C $r\,\dot{\theta}^2$
D $2\,r\,\dot{\theta}^2$
E $r\,\dot{\theta}^2\sqrt{2}$

Pistes!

Clarament, el centre del disc descriu un mov. circular amb centre a O i radi r. El vector $\overline{OC}$ gira amb vel. angular $\odot\,\dot{\theta}$, essent θ l'angle de la figura que orienta el diàmetre $\overline{OJ}$, on:

$O = O_{Terra}$ = centre de la pista circular

$J = J_{geom}$ = Punt geomètric de contacte disc - pista.

Per tant, quina velocitat té C?
I on és el CIR^{Disc}_{T}?

A partir d'això podem deduir $\overline{\Omega}^{Disc}_{T}$ i, derivant resp. t, $\overline{\alpha}^{Disc}_{T}$.

Compte:

Antihorària — Horària

Molts estudiants pensen que $\bar{\Omega}^{Disc}_{T} = \overset{\curvearrowleft}{\odot}\,\dot{\theta}$, però és $\overset{\curvearrowright}{\otimes}\,\dot{\theta}$

Ho pensen perquè creuen que el diàmetre OJ, que orientem amb θ al dibuix, és fix al disc. I no ho és!

La clau està en

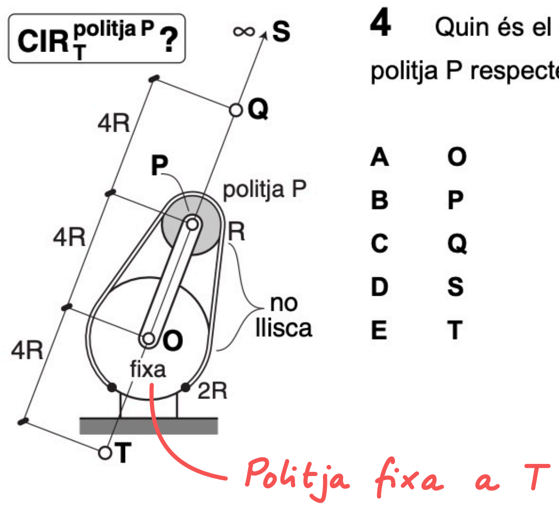
Distingir entre	O_{Terra}	= Centre pista circular	Fix a T!
	O_{Disc}	= Punt del disc que en l'instant de la figura coincideix amb O_{Terra}, però que després ja no!	Fix al disc!
Distingir entre	J_{Geom}	= Punt geomètric de contacte entre el disc i el terra	No es ni fix al disc, ni a T!
	J_{disc}	= Punt del disc que, en l'instant de la figura, coincideix amb J_{Geom}, però que després ja no!	Fix al disc!

El diàmetre OJ orientat amb θ a la figura és el que va de O_{Terra} a J_{geom}. En no ser fix al disc, no orienta el disc! Ergo $\bar{\Omega}^{Disc}_{T}$ no pot ser $\odot\,\dot{\theta}$!

El moviment del disc es pot veure al vídeo C5.3 de la Wikimec, on es veu que la seva rotació és horària:

https://youtu.be/QvzcCulONqk

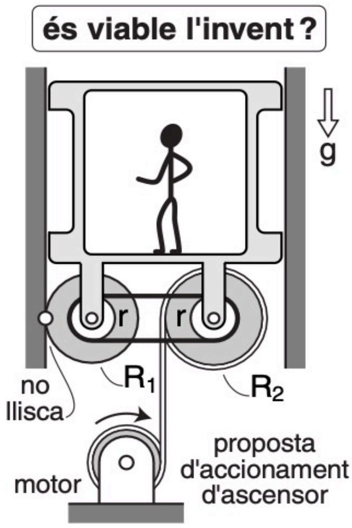
CIR Politja – Qüestió 4, oct 2012



4 Quin és el Centre Instantani de Rotació del moviment de la politja P respecte al terra?

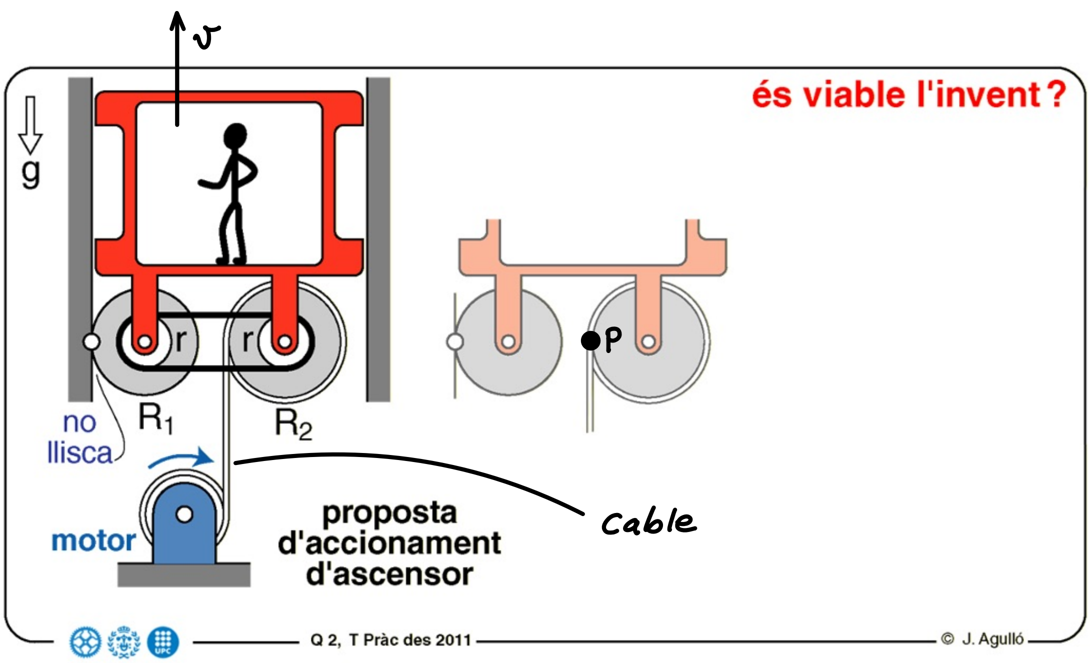
A O
B P
C Q
D S
E T

Ascensor - Test pràc. des. 2011



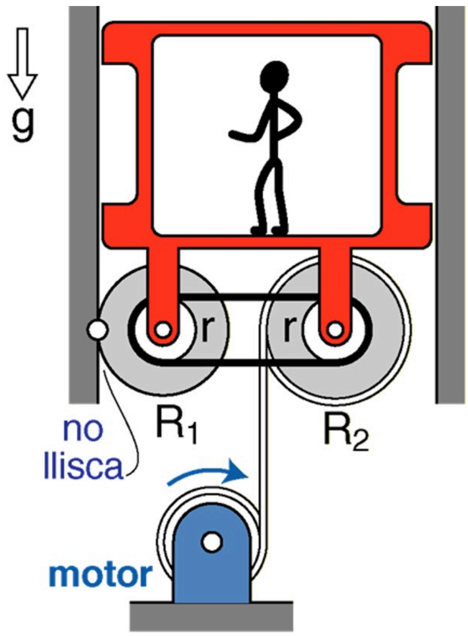
2 Es proposa el mecanisme d'accionament d'un ascensor descrit a la figura. La roda de radi R_1 no llisca sobre la paret i és impulsada per la rotació de la roda de radi R_2 per mitjà de les politges de radi r, que són solidàries a les rodes. La roda de radi R_2 és impulsada pel motor per mitjà d'un cable enrotllat a la roda i al tambor del motor. És viable l'invent?

A No és viable.
B És viable si $R_1 = R_2$
C És viable si $R_1 > R_2$.
D És viable si $R_1 < R_2$.
E És viable per a qualsevol relació de radis.



Pista: Per a que sigui viable, quan la cabina puja amb vel. ↑v, el punt P ha de tenir vel. ↓, ja que el cable només pot estirar cap avall, no empènyer cap amunt.

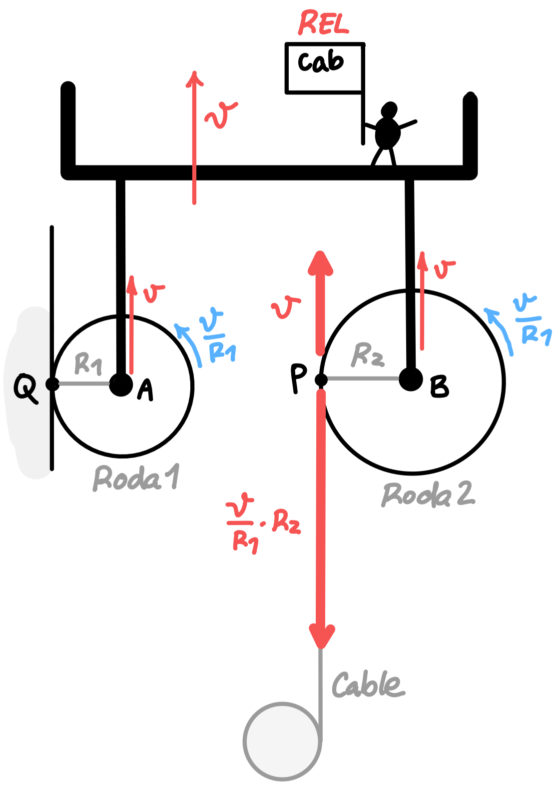
Sol:



Per a que funcioni, quan la cabina puja amb $\uparrow v$, la vel. de P ha de ser $\downarrow$ (el cable només pot estirar, no empènyer).

Suposem $\bar{v}_T(\text{Cabina}) = \uparrow v$

Calcularem $\bar{v}_T(P)$ i mirarem si pot ser cap $\downarrow$



AB = T, REL = Cab

$$\bar{v}_{AB}(P) = \underbrace{\bar{v}_{REL}(P)}_{\downarrow \frac{v}{R_1}\cdot R_2} + \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)}_{\uparrow v} =$$

$\bar{\Omega}^{Roda1}_{T} = \underbrace{\odot \frac{v}{R_1}}_{\parallel}$ $\quad (Q = CIR^{Roda1}_{T})$

Cabina no gira resp. T $\rightarrow$ $\bar{\Omega}^{Roda1}_{Cab}$

Rel. transmissió 1:1 $\rightarrow$ $\parallel$

$\bar{\Omega}^{Roda2}_{Cab}$

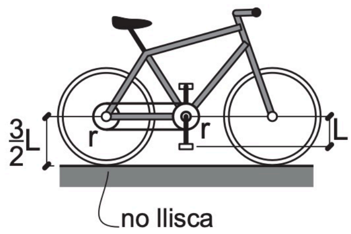
$$= \left(\frac{v}{R_1}\cdot R_2 \downarrow\right) - (\downarrow v) = v\Big(\overbrace{\frac{R_2}{R_1} - 1}^{\text{Ha de ser } > 0}\Big)\downarrow$$

$\frac{R_2}{R_1} - 1 > 0 \Rightarrow$ Cal $R_2 > R_1$ per a que funcioni

$\boxed{\text{RESP} = D}$

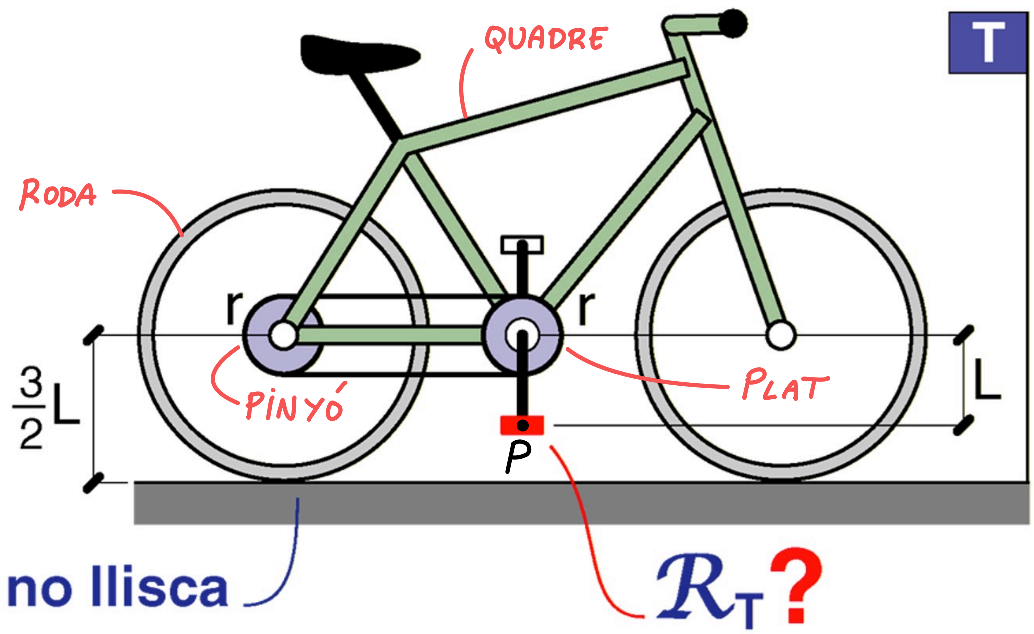
Si $R_2 < R_1$, quan cabina puja la $\bar{v}_T(P)$ és $\uparrow$. En tal cas, el cable hauria d'empènyer, i no pot perquè no és rígid.

Radi curvatura pedal - Qüestió 5, octubre 2004

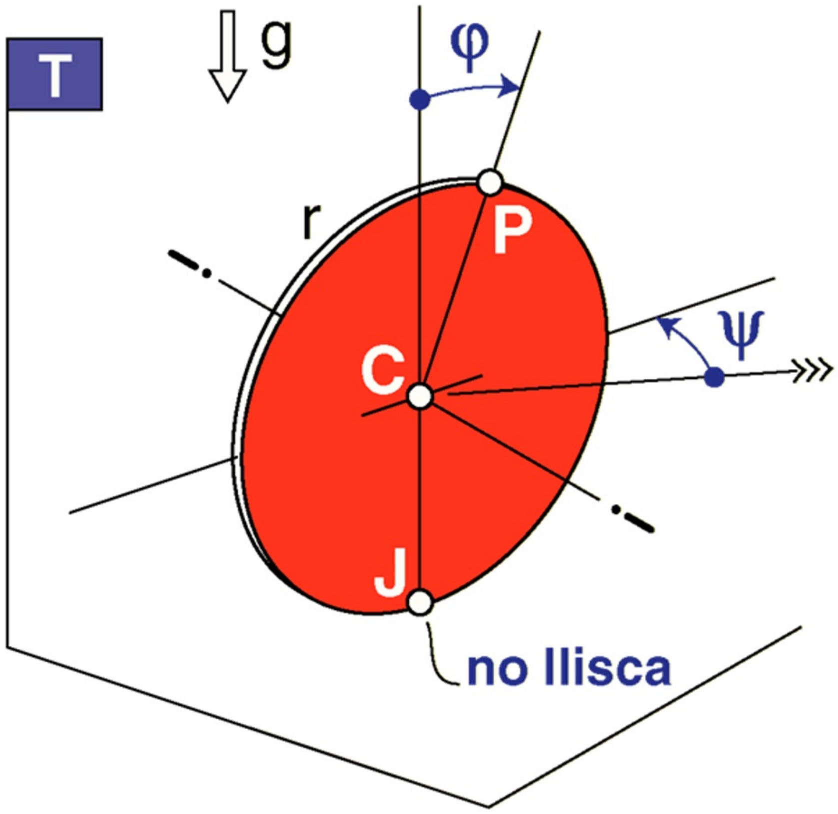


5 En una bicicleta es fa servir un pinyó del mateix radi que el plat. El radi de la roda és 3/2 de la longitud de la manovella del pedal. Quin és el radi de curvatura de la trajectòria del pedal quan aquest passa per la posició més baixa?

A	L
B	(1/2)L
C	(1/4)L
D	(2/3)L
E	(1/3)L

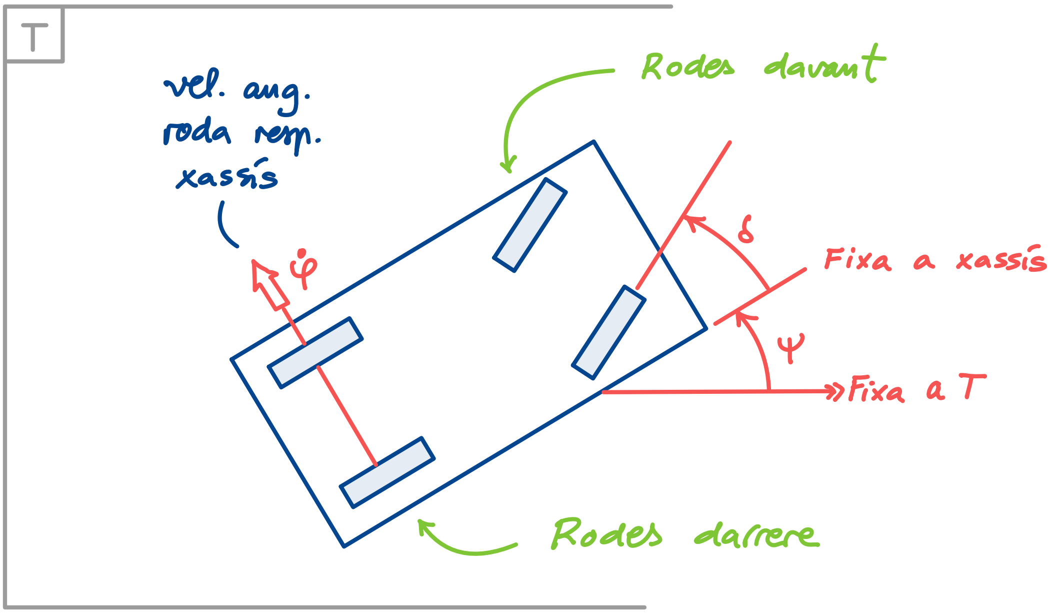


Introducció a cinemàtica de vehicles



Començarem buscant la velocitat de C, que és un punt de la roda, i sovint també del xassís, partint de les velocitats angulars psipunt i phipunt de la roda. Veurem que l'expressió d'aquesta velocitat queda molt simple, només en funció de phipunt. Això ens permetrà fer anàlisis cinemàtiques ràpides de vehicles!

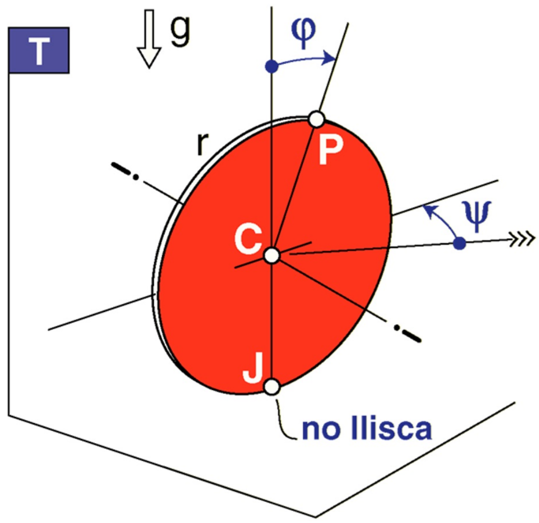
Cinemàtica de vehicles



3 hipòtesis simplificadores

- Vehicle es mou en terra pla
- Veh. no té suspensions ⇒ Roda es manté en un pla vertical i només cal orientar-la amb 2 angles.

  Per la roda del darrere serien ψ i φ:

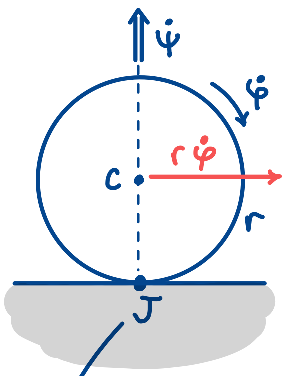


  Per la del davant serien $\psi+\delta$, φ

- Rodes primes → contacte puntual amb el terra. Permet introduir hipòtesi de no lliscament a J. Si el contacte fos en un segment de recta segur que hi hauria lliscament en alguns punts.

Anàlisi cinemàtica roda del darrere:

(Per la roda del davant surt el mateix!)



Aplicant CSR a roda:

Que simple!

$$\vec{v}_T(C) = \underbrace{\cancel{\vec{v}_T}}_{0!}(J) + (\underbrace{\Uparrow\dot\psi}\, + \otimes\dot\varphi) \times (\uparrow r) = (\to r\dot\varphi)$$

Per la roda davantera surt el mateix perquè en lloc de $\Uparrow\dot\psi$ tenim $\Uparrow(\dot\psi + \dot\delta)$

J no és el CIR! Ho seria si el movim. de la roda fos pla. Però aquí és 3D!

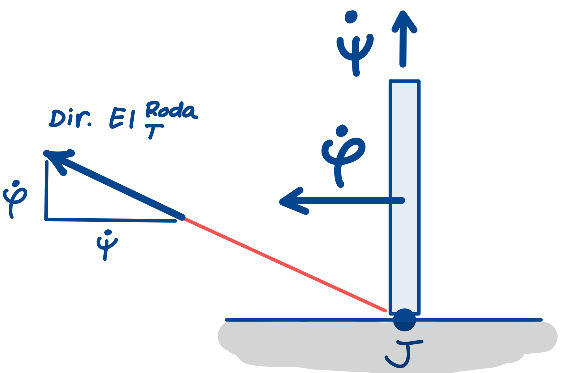
Per tant, $\to r\dot\varphi$ no és "distància al CIR · R", sinó el resultat d'aplicar CSR!

En fer anàlisi cinemàtica de veh. pensarem sempre en això ∀roda

És a dir: pensarem que el centre C de la roda té vel. $(\to r\dot\varphi)$
Això ens permetrà fer anàlisis cinemàtiques ràpides perquè C sol ser, alhora, un punt del xassís (veure <u>qüestió del tricicle</u> com a exemple, pàg. següent).

<u>Observació:</u>

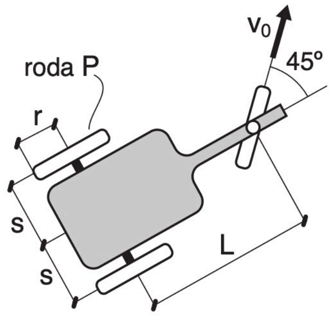
L'EI$_T^{roda}$ passa per J, però la roda té 2 GDL. La dir. de l'EI és $\bar{\dot\psi} + \bar{\dot\varphi}$, per tant EI$_T^{roda}$ no queda determinat. No ens seria útil. No cal que hi pensem!



Ni hi pensem!

Apliquem la teoria anterior al següent exemple:

Tricicle - Q5, març 2007



5 En el tricicle de la figura, les rodes no llisquen damunt del terra. La roda directriu, de radi r, forma un angle de 45° amb l'eix longitudinal i el seu centre avança amb celeritat v_0. Quina és la velocitat de rotació de la roda P al voltant del seu eix?

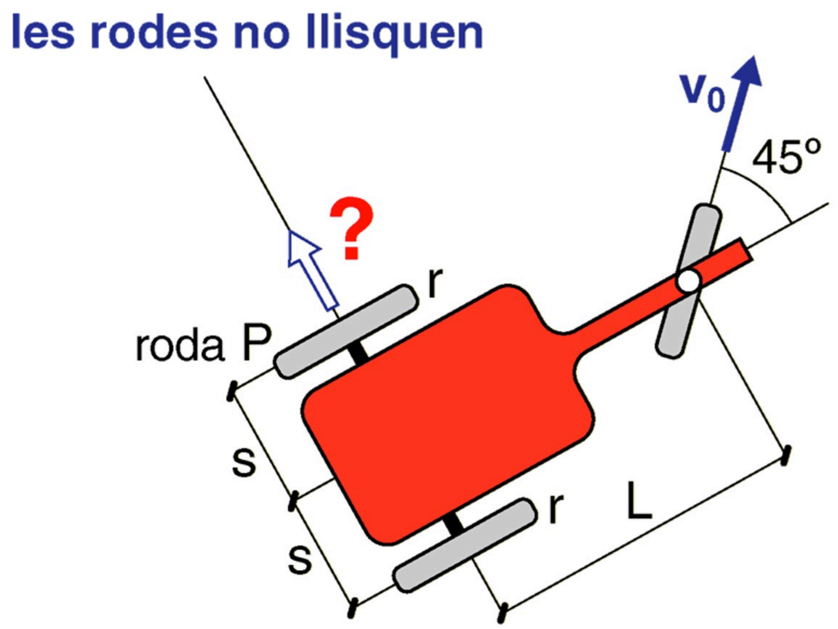
A $\dfrac{v_0}{r}$

B $\dfrac{v_0}{r\sqrt{2}}$

C $\dfrac{L-s}{L}\dfrac{v_0}{r\sqrt{2}}$

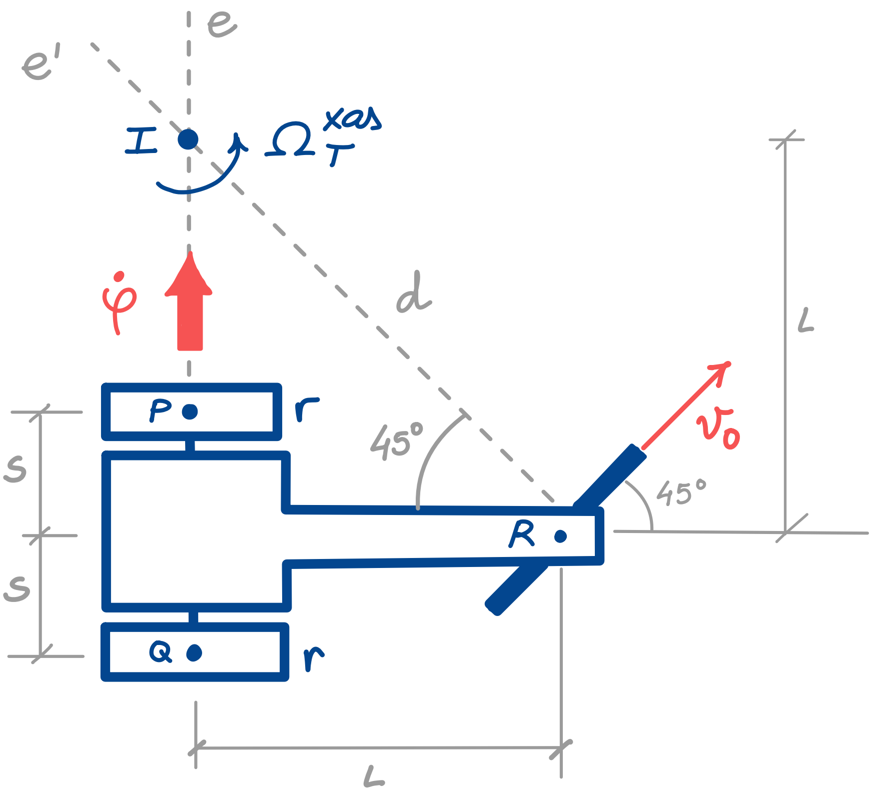
D $\dfrac{L-s}{L}\dfrac{v_0}{r}$

E $\dfrac{L+s\sqrt{2}}{L}\dfrac{v_0}{r}$



Solució:

$\boxed{\dot{\varphi}\ ?}$



P, Q, R són punts de les respectives rodes, però també del xassís.

P i Q tenen vel. $\perp$ eix e
R té vel. $\perp$ eix e' $\Rightarrow$ $CIR_T^{xassís} = I$

Busquem Ω_T^{xas}:

$$\Omega_T^{xas} = \frac{v_0}{d} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}}$$

"xas" = xassís

Ara, veient P com a punt de la roda: (CSR roda)

$$v_T(P) = r\cdot\dot{\varphi} \qquad (I)$$

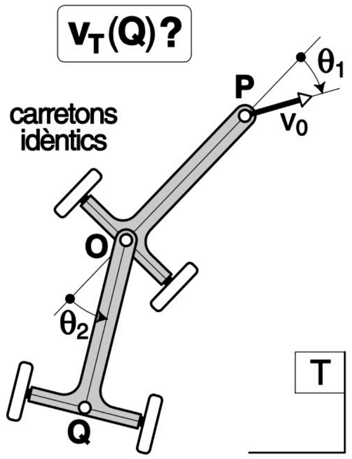
I veient P com del xassís: (CSR xassís)

$$v_T(P) = \Omega_T^{xas}\cdot\underbrace{(L-s)}_{\text{dist. al CIR}} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}}\cdot(L-s) \qquad (II)$$

I = II:

$$r\dot{\varphi} = \frac{v_0}{L\sqrt{2}}(L-s) \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{v_0}{rL\sqrt{2}}(L-s)}$$

Carretons articulats - Q3, abril 2012



3 Els dos carretons articulats a **O** són idèntics. Si el punt **P** es mou amb la velocitat v_0 indicada, amb quina celeritat es mou el punt **Q**?

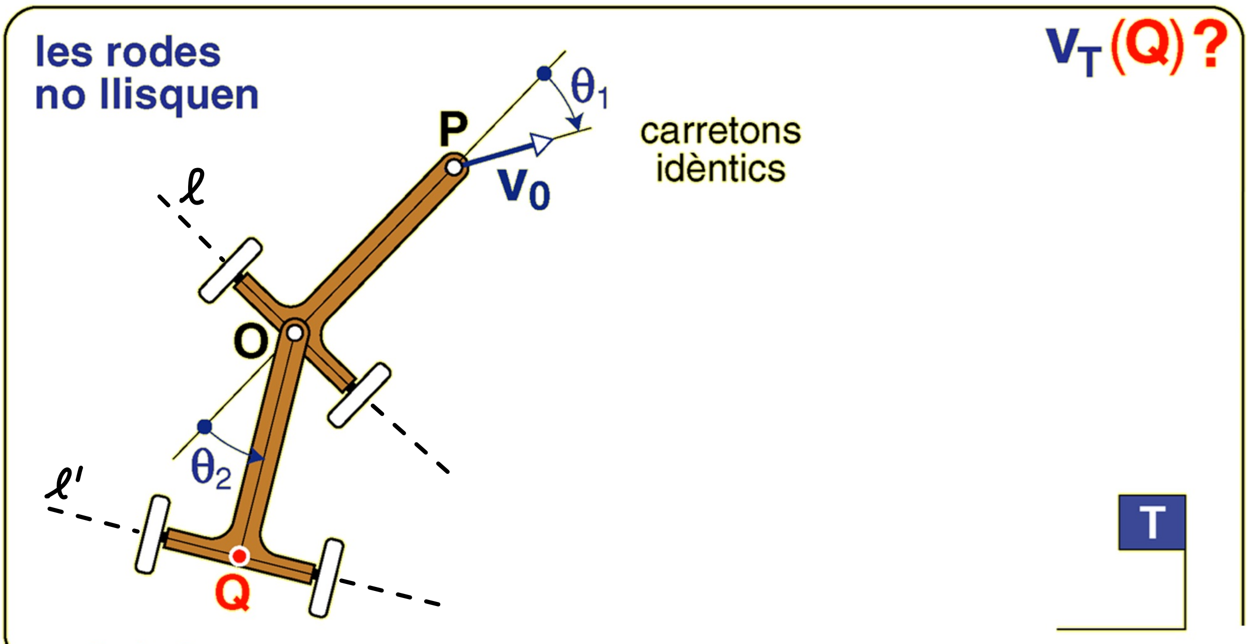
A v_0

B $v_0 \cos\theta_1$

C $v_0 \cos\theta_1 \cos\theta_2$

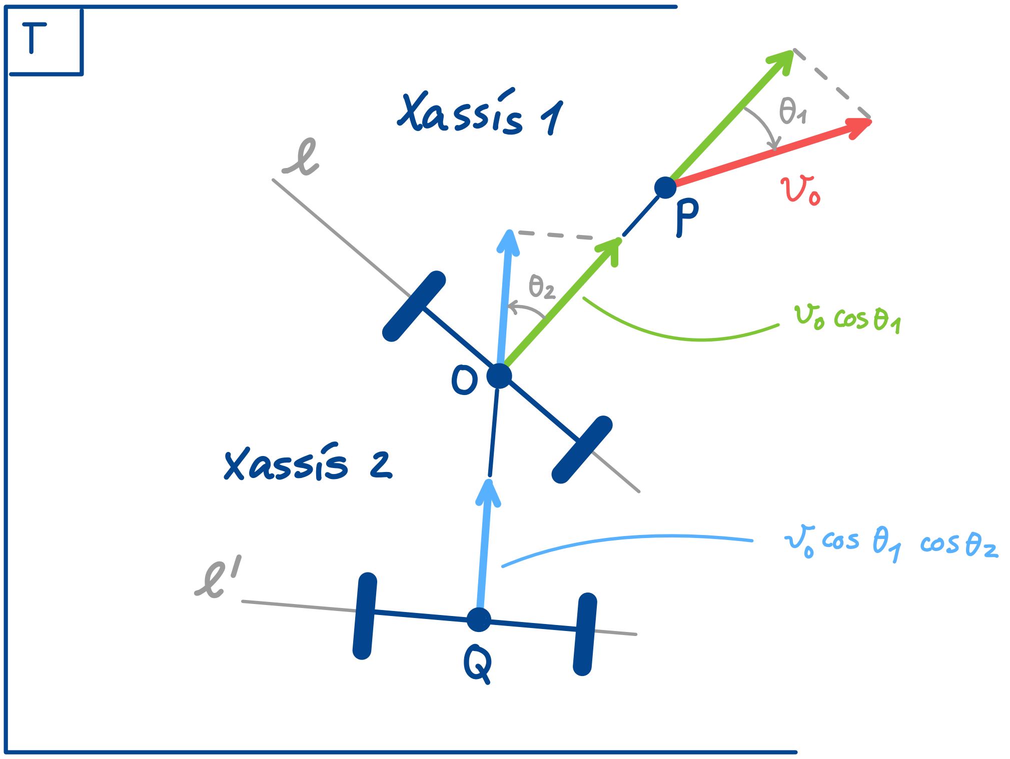
D $v_0 \cos\theta_1 / \cos\theta_2$

E $v_0 \cos\theta_2 / \cos\theta_1$



Solució ràpida via equiprojectivitat !

(Solució "lenta", però igualment bona, a la pàg. seg.)



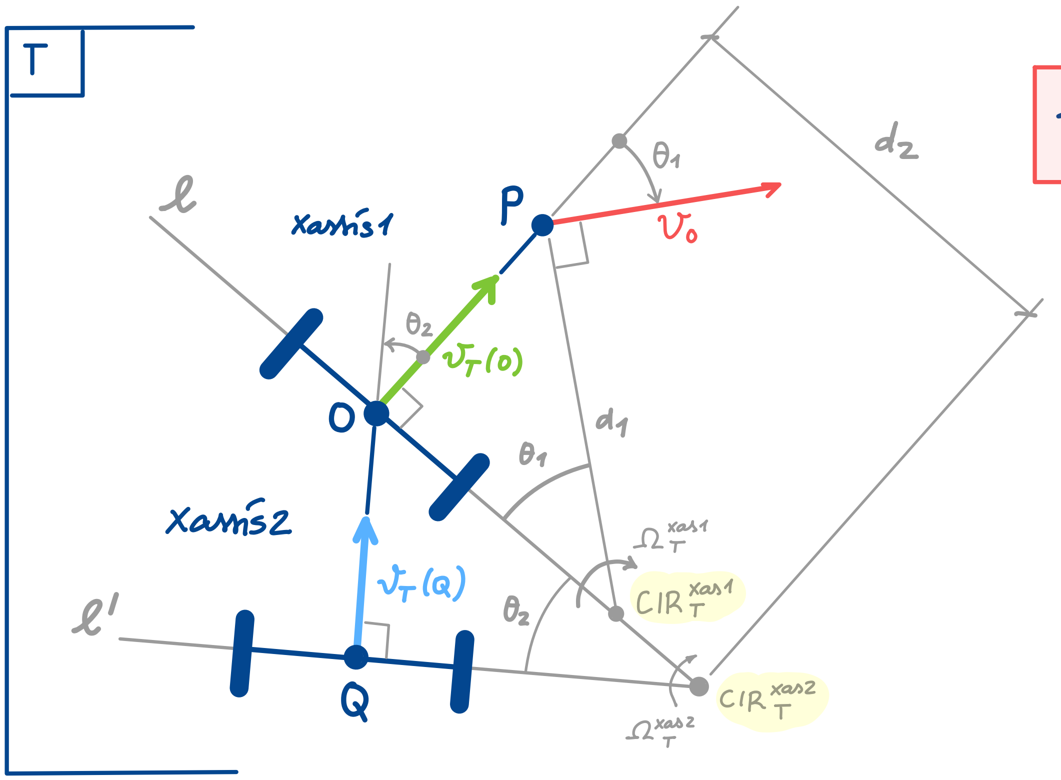
$v_T(Q)$?

- $CIR_T^{xassís\ 1}$ sobre ℓ $\Rightarrow$ $\overline{v}_T(O) \perp \ell$
- Equiprojectivitat P → O : $v_T(O) = v_0 \cos\theta_1$
- $CIR_T^{xassís\ 2}$ sobre ℓ' $\Rightarrow$ $\overline{v}_T(Q) \perp \ell'$
- Equiprojectivitat O → Q :

$$\boxed{v_T(Q) =} \; v_T(O)\cos\theta_2 = \boxed{v_0 \cos\theta_1 \cos\theta_2}$$

Solució "lenta" via localitzar $CIR_T^{\overbrace{xas1}^{\text{xassís 1}}}$ i $CIR_T^{\overbrace{xas2}^{\text{xassís 2}}}$

Els CIR_T^{xas1} i CIR_T^{xas2} han de ser on indiquem. A més, $v_T(O)$ i $v_T(Q)$ han de ser $\perp$ a ℓ i ℓ', respectivament.



$v_T(Q)$?

- $\Omega_T^{xas1} = \dfrac{v_0}{d_1}$ dist (CIR_T^{xas1}, P)

- $v_T(O) = \Omega_T^{xas1} \cdot d_1 \cos\theta_1 = v_0 \cos\theta_1$

- $\Omega_T^{xas2} = \dfrac{v_T(O)}{d_2} = \dfrac{v_0 \cos\theta_1}{d_2}$ dist (CIR_T^{xas2}, O)

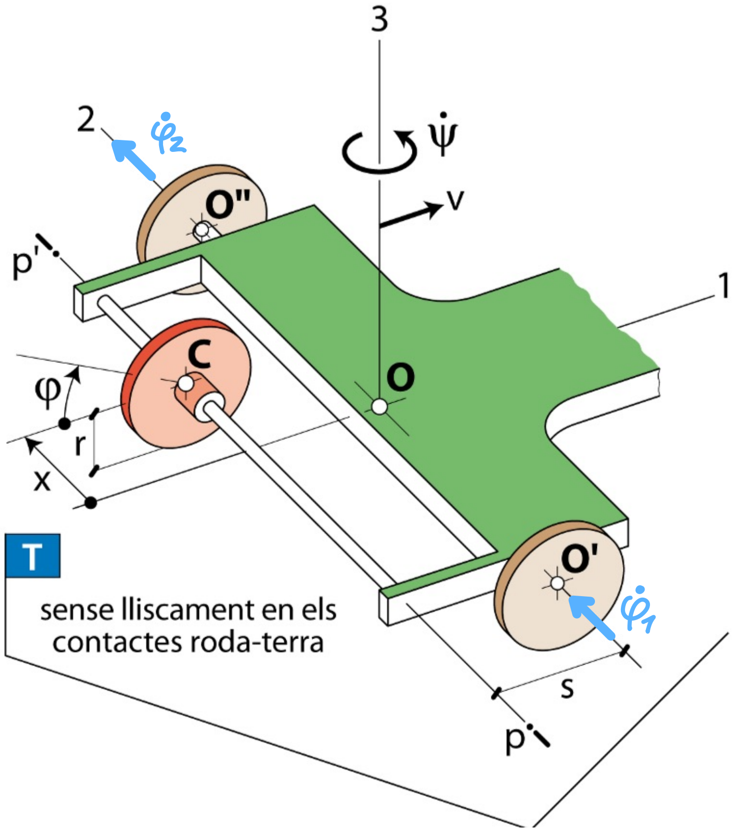
- $\boxed{v_T(Q)} = \Omega_T^{xas2} \cdot d_2 \cos\theta_2 = \boxed{v_0 \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2}$

Vehicle amb tres rodes - RBK problema 3.25

3.25 The vehicle moves on a horizontal ground. The three wheels do not slide on the ground. The wheel with center **C** rotates around the axis p–p′ parallel to **O**′ – **O**″. The speed $v_E(\mathbf{O})$ and the change of orientation $\dot{\psi}$ are variable.

Determineu:

- El nombre de GL del sistema.
- $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ en funció de v i $\dot{\psi}$?
- $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ en funció de v i $\dot{\psi}$?



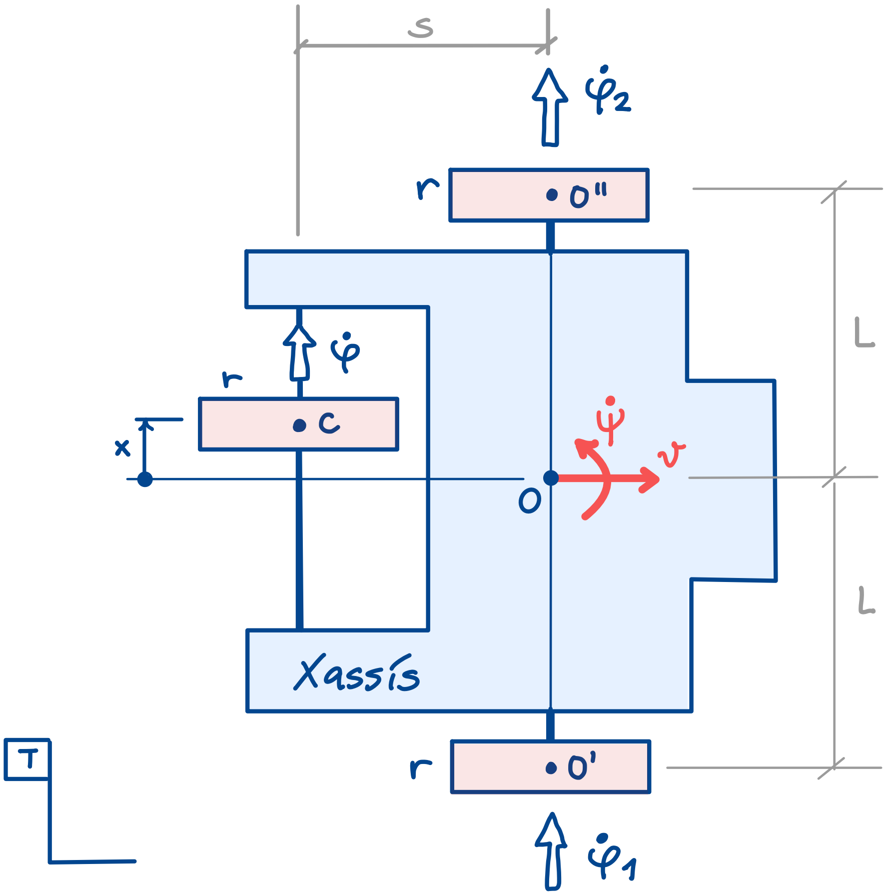
Motivació: aplicació a pilotatge/control del vehicle

El vehicle es pot motoritzar de dues maneres

- Amb 2 motors que actuen $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ ← La més típica
- Amb 2 motors que actuen $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$

Si suposem que v i $\dot{\psi}$ són consignes de velocitat donades per un joystick, per exemple, les funcions que ens demanen de trobar ens permeten convertir les comandes v i $\dot{\psi}$ introduïdes al joystick en comandes de velocitat que han de satisfer els motors.

GL sistema



Manera 1

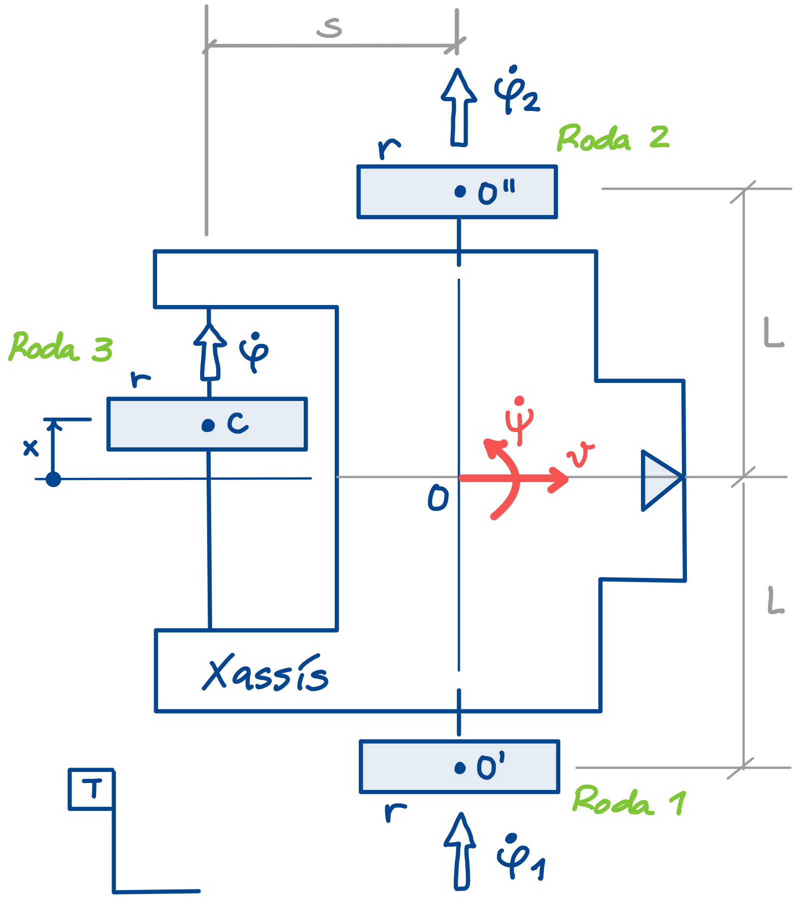
Si bloquejo $\dot\psi$, xassís no pot girar però sí traslladar-se $\leftrightarrow$ (amb les rodes rodant sense lliscar). Si a més bloquejo v, ja res es pot moure. Per tant, el vehicle té 2 GL.

Manera 2

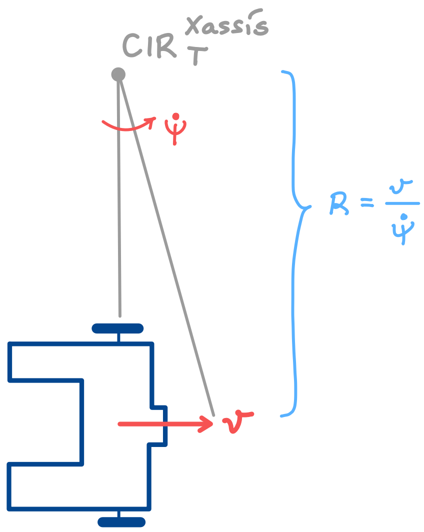
Alternativament: si bloquejo $\dot x$, el punt C passa a ser del xassís, amb vel. $\rightarrow$. Els punts O' i O'' també tenen vel. $\rightarrow$. Ergo el $\text{CIR}^{\text{xassís}}_{T}$ és a l'∞ i $\bar\Omega^{\text{xassís}}_{T} = \bar 0$. El vehicle es pot moure cap a $\rightarrow$. Si ara aturo $\dot\varphi$, tot queda aturat. Per tant, el vehicle té 2 GL.

$\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ en funció de $(v, \dot{\psi})$

Suposem que $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ són actuades amb motors ($\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ no actuades) i que volem $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ en funció de $(v, \dot{\psi})$:



Fixem-nos que triant $(v, \dot{\psi})$ amb un joystick, estem triant la posició del CIR del xassís:



Via cinemàt. de roda

$$\bar{v}_T(O') = \underrightarrow{r\dot{\varphi}_1}$$
$$\bar{v}_T(O'') = \underrightarrow{r\dot{\varphi}_2}$$

Via CSR xassís

$$\bar{v}_T(O') = \bar{v}(O) + \bar{\Omega}_T^{\text{xas}} \times \overline{OO'} =$$
$$= \left(\underrightarrow{v}\right) + \left(\odot\dot{\psi}\right) \times \left(\downarrow L\right) = \underrightarrow{v + L\dot{\psi}}$$

$$\bar{v}_T(O'') = \left(\underrightarrow{v}\right) + \left(\odot\dot{\psi}\right) \times \left(\uparrow L\right) = \underrightarrow{v - L\dot{\psi}}$$

Igualant

$$r\dot{\varphi}_1 = v + L\dot{\psi} \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{r}(v + L\dot{\psi})$$

$$r\dot{\varphi}_2 = v - L\dot{\psi} \Rightarrow \dot{\varphi}_2 = \frac{1}{r}(v - L\dot{\psi})$$

Aplicació a control

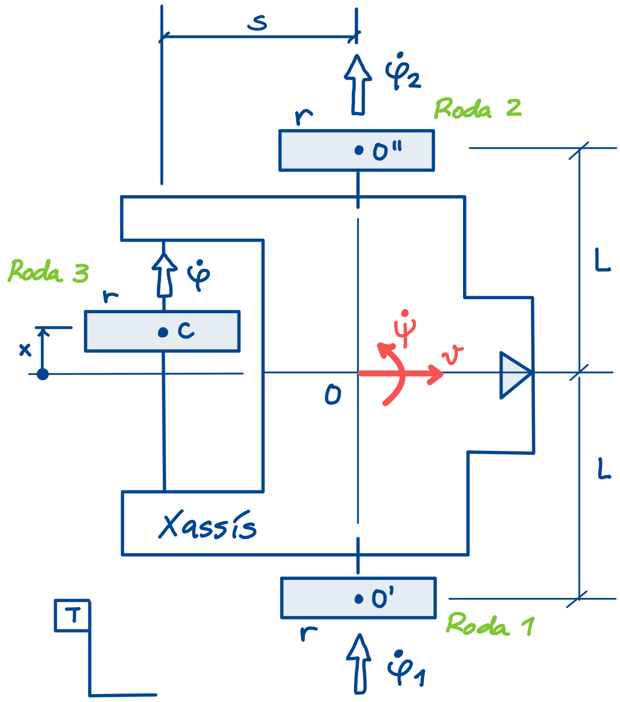
Si pilotem el vehicle amb un joystick que dóna les comandes v i $\dot{\psi}$, aquestes funcions permeten calcular les velocitats $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ a les que hauran de girar els motors per satisfer $(v, \dot{\psi})$.

$\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ en funció de v i $\dot{\psi}$

Ara suposem que actuem $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ (deixant $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ lliures) i que, per tant, volem $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ en funció de $(v, \dot{\psi})$:

Veient C com de la roda 3:

$$\bar{v}_T(C) = (\rightarrow r\dot{\varphi}) \qquad (\mathrm{I})$$



Intentem ara calcular $\bar{v}_T(C)$ a partir de v i $\dot{\psi}$ per igualar amb (I):

Ara no podem aplicar CSR des de O pq C $\notin$ xassís !!!

Fem comp. movim. amb:

REL = xassís
AB = T

$$\bar{v}_T(C) = \bar{v}_{REL}(C) + \bar{v}_{ar}(C) = \bar{v}_{REL}(C) + \overbrace{\bar{v}_T(O) + \bar{\Omega}_T^{xas} \times \overline{OC}}^{ar} =$$

$$= (\uparrow \dot{x}) + (\rightarrow v) + \underbrace{(\odot \dot{\psi}) \times \left[(\leftarrow s) + (\uparrow x)\right]}_{(\downarrow \dot{\psi}s) + (\leftarrow \dot{\psi}x)} =$$

$$= \left[\uparrow (\dot{x} - \dot{\psi}s)\right] + \left[\rightarrow (v - \dot{\psi}x)\right] \qquad (\mathrm{II})$$

(I) = (II):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \dot{x} - \dot{\psi}s \\ r\dot{\varphi} &= v - \dot{\psi}x \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \quad \boxed{\dot{x} = \dot{\psi}s} \\ &\rightarrow \quad \boxed{\dot{\varphi} = \frac{1}{r}(v - \dot{\psi}x)} \end{aligned}$$

Aplicació a control

Si piloto amb joystick que dóna comandes de v i $\dot{\psi}$, aquestes funcions proporcionen les velocitats $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ que hauran de satisfer els motors.