



Versió 1.2

## Molles i amortidors

Enllaç partícula-superfície i  
condicions límit d'enllaç

Lluís Ros

<https://lluisros.github.io/mecanica>

La sessió d'avui combina petits blocs de teoria amb exercicis relacionats.

## **Contingut:**

Introducció

Teoria sobre interaccions per mitjà de molles i amortidors

Exercicis de formulació de forces aplicades per molles i amortidors

Teoria sobre enllaç partícula-superfície: forces d'enllaç, condicions límit d'enllaç, freq sec, i caracterització de forces d'enllaç.

Exercicis sobre dinàmica de la partícula

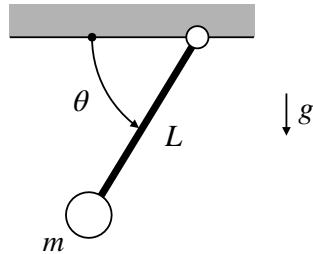
# Introducció

Acabem de començar dinàmica i voldria anticipar-vos cap a on ens dirigim!

A la sessió 1P vaig comentar-vos que l'objectiu principal d'aquest curs és obtenir les equacions del moviment dels sistemes mecànics. És a dir, les equacions diferencials ordinàries (EDOs) que determinen com es mouen aquests sistemes a partir d'unes condicions inicials.

Com veurem, l'evolució d'un sistema mecànic queda descrita per EDOS de 2n ordre expressades mitjançant les coordenades de configuració del sistema (les  $x$ ,  $y$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ , ... que venim utilitzant en cada problema) i les seves derivades temporals de 1er i 2n ordre ( $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ , ..., i  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{\psi}$ ,  $\ddot{\theta}$ , ...).

Per il·lustrar-ho, pensem en un sistema senzill, com ara un pèndol amb tota la massa concentrada al seu extrem, només sotmès a la gravetat:



Veurem avui que l'equació del moviment d'aquest pèndol és

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{g}{L} \cos \theta(t), \quad (1)$$

que clarament és una EDO de 2n ordre (involucra  $\theta$  i les derivades temporals de  $\theta$  fins a ordre 2, però no derivades d'ordre superior). De la teoria d'EDOs sabem que, en ser (1) de 2n ordre, l'evolució futura del pèndol queda determinada per (1) i per les condicions inicials

$$\theta(0), \dot{\theta}(0). \quad (2)$$

És a dir, hi ha una única funció  $\theta(t)$  que satisfà (1) i (2) a la vegada. A les assignatures de matemàtiques us expliquen que (1) i (2) defineixen un problema de valor inicial (PVI), la solució del qual és la funció  $\theta(t)$  esmentada. Així doncs, per saber l'evolució futura del pèndol cal resoldre aquest PVI. I com ho podem fer? Gairebé mai de manera analítica! En general haurem de recórrer a mètodes numèrics d'integració d'EDOs (com ara els mètodes d'Euler, del punt mig, o de Runge Kutta 4, per exemple). Podeu provar de resoldre (1) i (2) vosaltres mateixos amb MATLAB si voleu, via el mètode d'Euler. És fàcil de programar i molt instructiu!

En sistemes mecànics més complexos no tindrem una sola variable sinó vàries, i en lloc d'una EDO en tindrem vàries també (un sistema d'EDOs), però conceptualment caldrà fer el mateix: resoldre un PVI com el de (1) i (2) per saber com evoluciona el sistema partint de les condicions inicials (2).

Un punt clau a recordar és que, en quedar descrit per una EDO d'ordre 2, l'evolució futura del sistema queda determinada per les seves condicions inicials de posició i velocitat (2 nivells). Si fos d'ordre 3, les condicions inicials inclourien la posició, la velocitat i l'acceleració (3 nivells) però no és el cas! Amb 2 nivells n'hi ha prou! És per això que **l'estat mecànic** d'un sistema es defineix com la posició i velocitat de totes les seves partícules en un cert instant de temps. N'hi ha prou amb saber l'estat mecànic en un cert instant  $t_0$  per predir com es mourà el sistema per  $t > t_0$ . Com hem fet a (2), típicament triem  $t_0 = 0$ .

L'estat mecànic d'un sistema es codifica de manera compacta mitjançant l'ús de coordenades. En el pèndol, per exemple, l'estat queda descrit per la parella  $(\theta, \dot{\theta})$ . Clarament, els valors de  $(\theta, \dot{\theta})$  en un cert instant són suficients per determinar la posició i velocitat de qualsevol partícula del pèndol en aquest instant.

En aquest curs ens centrarem en obtenir equacions del moviment, però no les resoldrem numèricament. Sempre podeu aplicar els mètodes apresos a càcul numèric per fer-ho. El que sí que farem és estudiar el comportament dels sistemes al voltant de configuracions d'equilibri.

Sapigueu, però, que la capacitat de resoldre EDOs numèricament ha sigut, i segueix essent clau per als desenvolupaments tecnològics moderns. Abans de construir un sistema, primer caldrà simular-lo (predir com es mourà, per validar-lo o millorar-ne el disseny) i per això cal resoldre PVIIs definits per EDOs que en descriuen el comportament. Un cop construïts els sistemes, també els voldrem controlar, i novament caldrà resoldre PVIIs i altres problemes relacionats. Aquests coneixements són fonamentals en enginyeria.

I com obtindrem les equacions del moviment en el nostre cas? Doncs aplicant la 2a llei de Newton si el sistema és senzill, o els teoremes vectorials en casos més complexos. Per fer-ho, us caldran els coneixements previs de cinemàtica, i haureu d'identificar bé totes les forces que entren en joc en el sistema. A teoria ja us han explicat que aquestes forces poden ser de dos grans tipus:

- **D'interacció:** les que les partícules s'apliquen entre elles.
- **D'inèrcia:** les introduïdes per una referència no Galileana quan s'estudia el sistema des d'aquesta referència.

Les forces d'interacció, per la seva banda, poden ser:

- **Formulables:** són les que es poden expressar en funció de l'estat mecànic del sistema. Com a formulables que són, sempre en sabrem la seva expressió a priori, i mai seran incògnites a determinar. Això sí, les haureu de saber formular en funció de les coordenades que descriuen el sistema.
- **No formulables:** són les d'enllaç i les aplicades per actuadors.

La pàgina següent n'ofereix una classificació que haureu de tenir ben present i que ja s'ha començat a explicar a teoria. Avui veurem les forces generades per molles i amortidors i les d'enllaç entre partícula i superfície. També veurem les condicions límit d'enllaç que aquestes darreres introduceixen.

## Classificació de les forces d'interacció entre dues partícules P i Q

### Forces formulables

$\rho$  = separació entre P i Q

$$(1) \quad F_{Q \leftrightarrow P} = f(\rho)$$

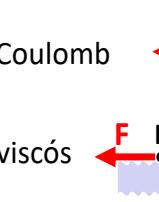
**Directes:**   $F_{Q \leftrightarrow P} = G(m_P m_Q / \rho^2)$

**Indirectes:**   $\Delta F_{Q \leftrightarrow (EI) \leftrightarrow P} = k \Delta \rho$

$$(2) \quad F_{Q \leftrightarrow P} = f(\dot{\rho})$$

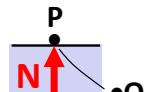
**friccionis**

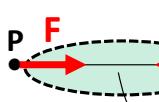
**Directes:**   $F_{Q \leftrightarrow P} = \mu N$        $F_{Q \rightarrow P} = c v_{RQ}(P)$

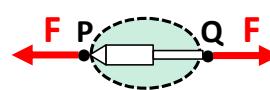
**Indirectes:**   $F_{Q \leftrightarrow (EI) \leftrightarrow P} = c \dot{\rho}$

### Forces no formulables

$$(3) \quad \text{Enllaç } F_{Q \leftrightarrow P} = ??$$

**Directes:** 

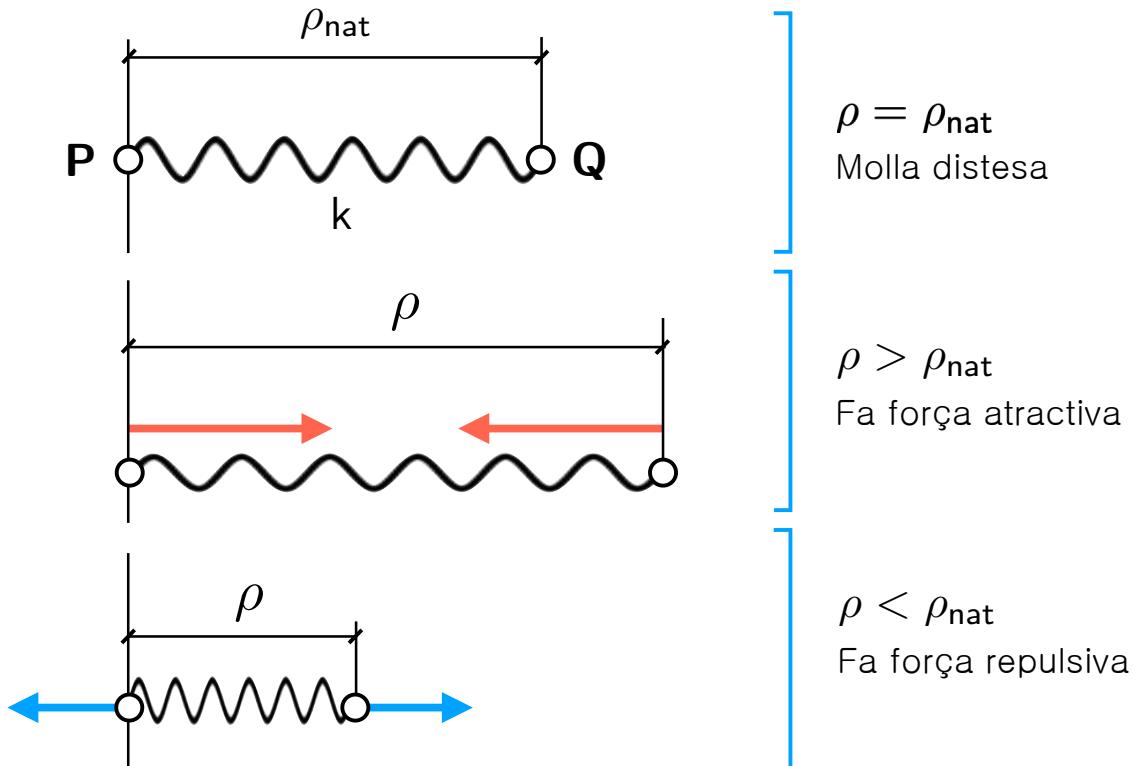
**Indirectes:**  fil inextensible

$$(4) \quad \text{Actuadors - Indirectes: } \begin{cases} F_{Q \leftrightarrow P} = ?? & \text{incògnita} \\ F_{Q \leftrightarrow P} = F(t) & \text{dada} \end{cases}$$


“??” = “són incògnita en el problema dinàmic”.

## Interacció per mitjà de molles

Les molles introduceixen forces atractives o repulsives entre els seus extrems en funció de la seva deformació. A partir de la seva llargària natural  $\rho_{\text{nat}}$  (per a la qual no es produeix força entre els extrems de la molla), un allargament ( $\rho - \rho_{\text{nat}} > 0$ ) provoca forces atractives, mentre que un escurçament ( $\rho - \rho_{\text{nat}} < 0$ ) en provoca de repulsives:



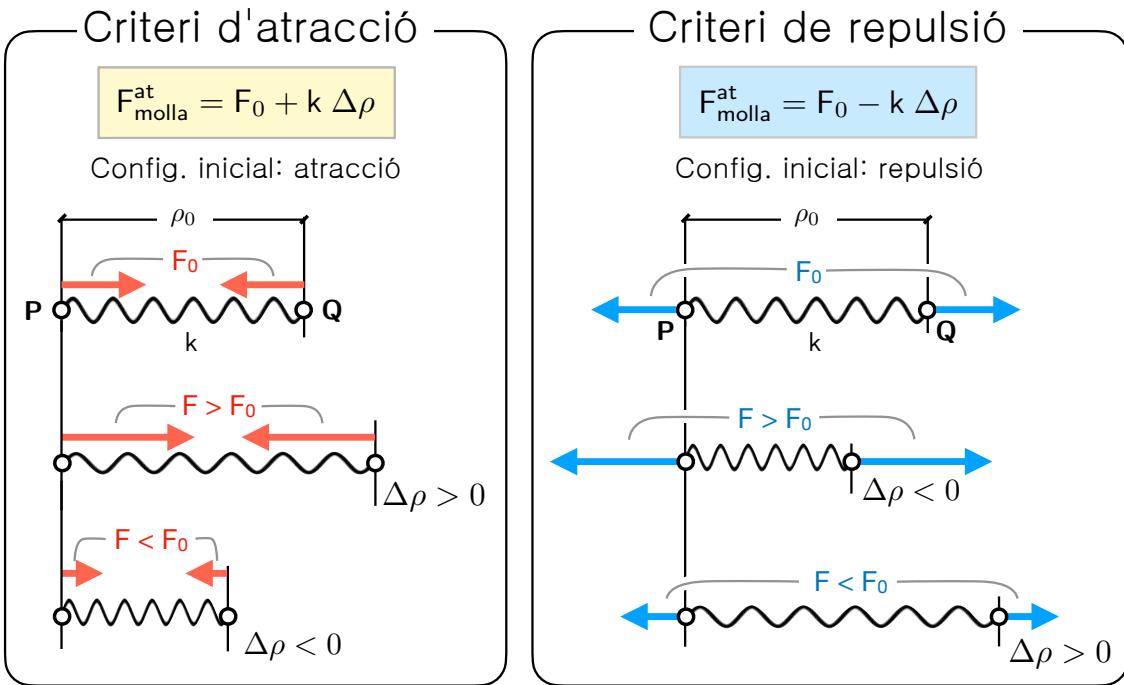
La formulació matemàtica d'aquestes forces s'obté de manera empírica a partir d'assajos que mesuren la força en funció del canvi de llargària. Habitualment es parteix d'una configuració inicial de referència<sup>1</sup> on la llargària  $\rho_0$  de la molla no coincideix necessàriament amb la natural, de manera que la molla està fent, en aquesta configuració, una certa força  $F_0$  entre els seus extrems. Si  $\rho_0 > \rho_{\text{nat}}$ , la força  $F_0$  és atractiva. En cas contrari ( $\rho_0 < \rho_{\text{nat}}$ ), és repulsiva.

Les molles que es consideren en aquest curs són de comportament lineal: la variació de força  $\Delta F$  a partir del valor de referència ( $\Delta F = F - F_0$ ) és proporcional a la variació de llargària  $\Delta\rho = \rho - \rho_0$  per mitjà d'una constant  $k$ .

Una molla que forma part d'un sistema mecànic pot introduir forces que poden ser atractives o repulsives al llarg del temps. Tot i així, aquestes forces es dibuixen amb un criteri únic (atractives o repulsives), i es formulen de manera que el seu valor pugui canviar de signe durant l'evolució del sistema. D'aquesta manera, amb un únic dibuix es poden representar forces que poden canviar de sentit.

<sup>1</sup>Típicament es tria una configuració en la que el sistema es troba en equilibri estàtic.

Si per a la llargària inicial  $\rho_0$  la força  $F_0$  és atractiva, dibuixarem la força de la molla com atractiva, i la formularem amb el criteri d'atracció. Si, en canvi,  $F_0$  és repulsiva, la dibuixarem com a repulsiva i la formularem amb el criteri de repulsió.



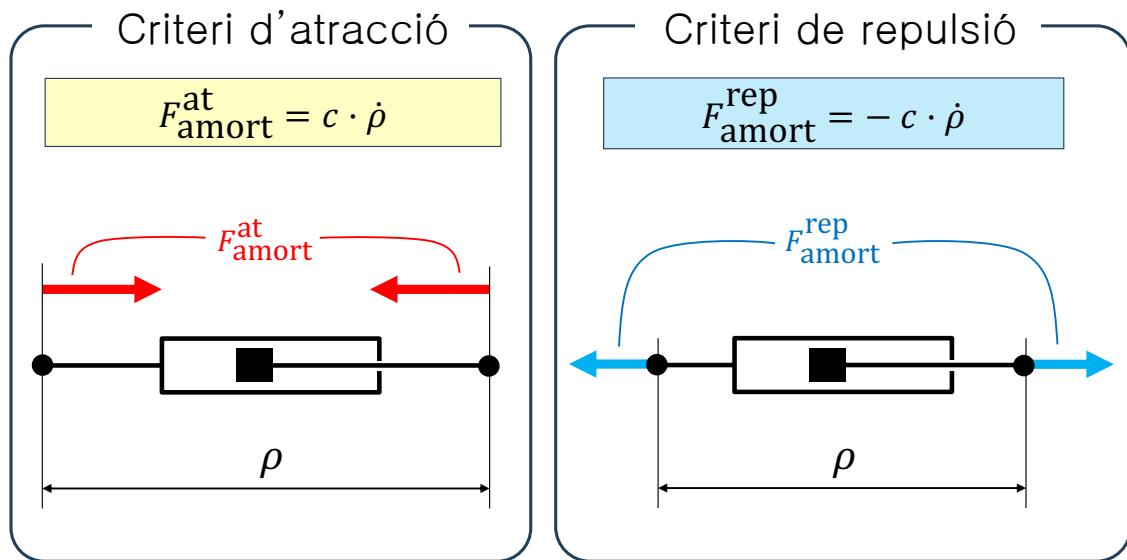
#### IMPORTANT:

En cada problema, caldrà expressar els increments  $\Delta\rho$  en funció de les coordenades utilitzades per descriure la configuració del sistema.

## Interacció per mitjà d'amortidors

Els amortidors lineals introduceixen forces atractives o repulsives entre els seus extrems en funció de la seva velocitat de deformació  $\dot{\rho}$ . Quan els extrems de l'amortidor s'allunyen, la força és atractiva; quan s'apropen, és repulsiva. A diferència de les molles, els amortidors no exerceixen cap之力 entre els seus extrems en situacions estàtiques.

La força associada als amortidors de comportament lineal és proporcional a  $\dot{\rho}$  per mitjà d'un coeficient  $c$  de freq viscós. Si decidim dibuixar la força com atractiva, la formularem amb el criteri d'atracció. Si, en canvi, decidim dibuixar-la com repulsiva, la formularem amb el criteri de repulsió:



En els sistemes mecànics, els amortidors apareixen sovint muntats en paral·lel amb una molla. En aquest cas, formularem la força de l'amortidor amb el mateix criteri que haguem triat per a la molla (d'atracció o de repulsió).

Quan un amortidor no formi part d'un grup molla-amortidor, el criteri es fixa arbitràriament.

### IMPORTANT:

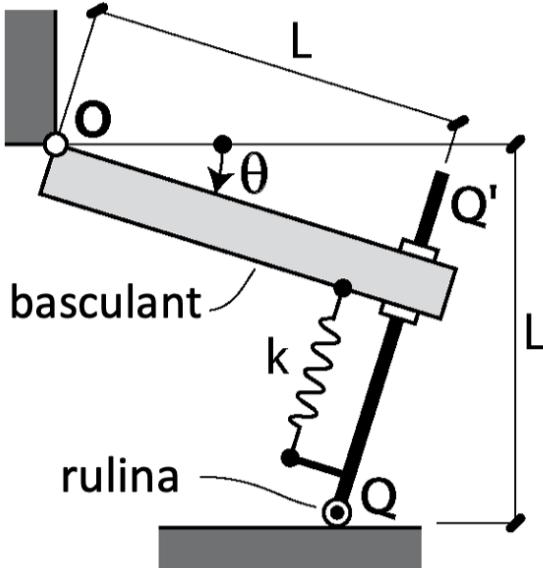
Anàlogament al cas de les molles, en cada problema caldrà expressar  $\dot{\rho}$  en funció de les coordenades d'estat del sistema.

## **Exercicis de molles i amortidors**

El basculant està articulat amb el terra en el punt **O**. La barra prima **QQ'** té un enllaç prismàtic amb el basculant, i el seu extrem **Q** és en contacte amb el terra mitjançant una rulina de radi negligible. Per  $\theta = 0$  el sistema es troba en equilibri i la molla fa una força  $F_0$ .

Formuleu la força de la molla en funció de  $\theta$ .

Equilibri per a  $\theta = 0$ ,  $F_m(\theta = 0) = F_0$



$F_{\text{rep}}^{\text{molla}}(\theta)?$

En els problemes de formulació de molles sempre començarem:

- Identificant la configuració inicial (de referència) que defineix  $F_0$ . En aquest cas és la que correspon a  $\theta = 0^\circ$ , que ens diuen que és d'equilibri.
- Esbrinant si  $F_0$  és una dada o no: en aquest cas no es, ja que l'enunciat la proporciona. En altres casos potser no ens donaran  $F_0$  però, en canvi, tindrem els valors que calquin (com ara masses dels solids) per a deduir-ne el valor imposant les condicions d'equilibri estàtic (ja que, típicament, la config. inicial de referència serà d'equilibri).
- Determinant si  $F_0$  és atractiva o repulsiva: en aquest cas és repulsiva, ja que si per  $\theta = 0$  tallem la molla, el basculant cau.

### Solució

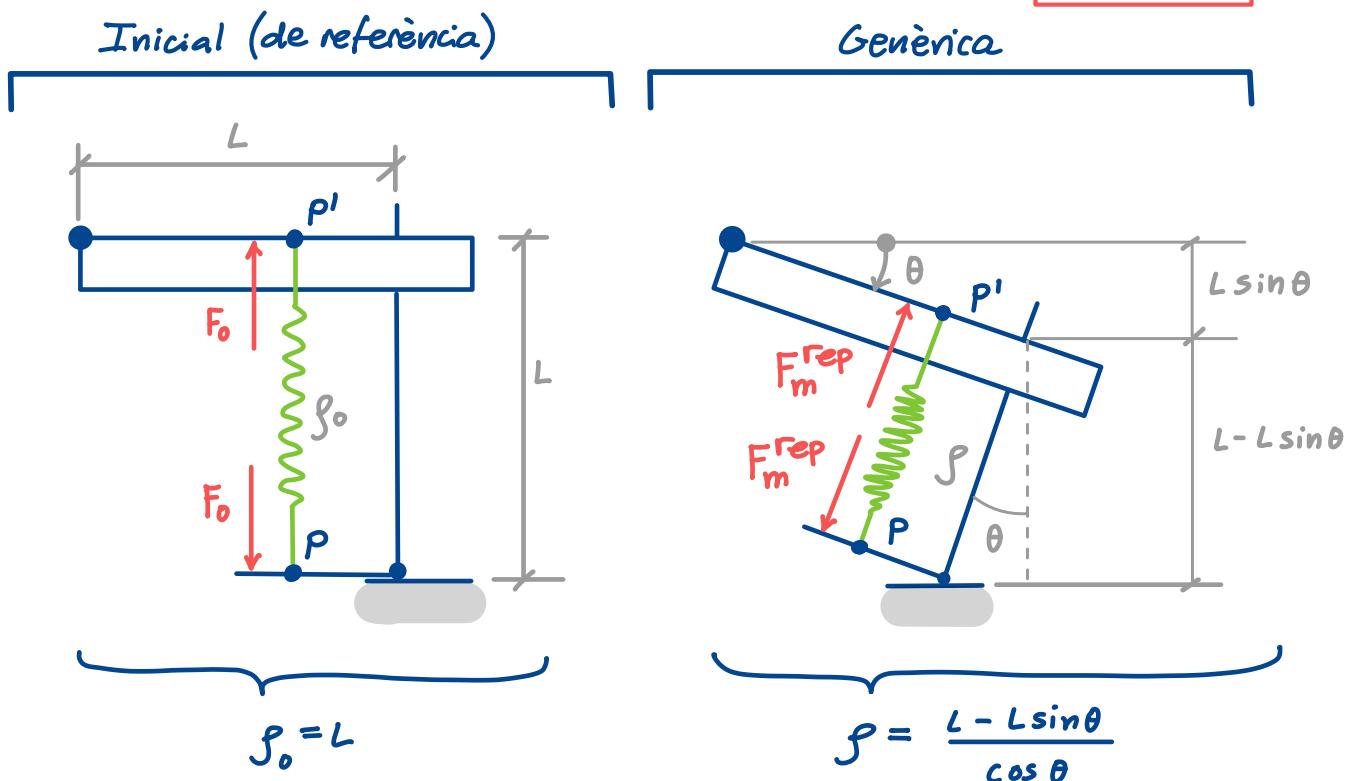
Podem suposar que la molla està enganxada als punts P i P' ja que l' $\Delta g$  serà igual al que es produueix entre els extrems actuals de la molla (els offsets constants no afecten l' $\Delta g$ ).

$F_0$  és repulsiva  $\Rightarrow$  Utilitzarem criteri de repulsió.

Cal trobar  $\Delta g$  i escriure'l en funció de  $\theta$ .

La coordenada de configuració

$F_{\text{molla}}^{\text{rep}}$  ?

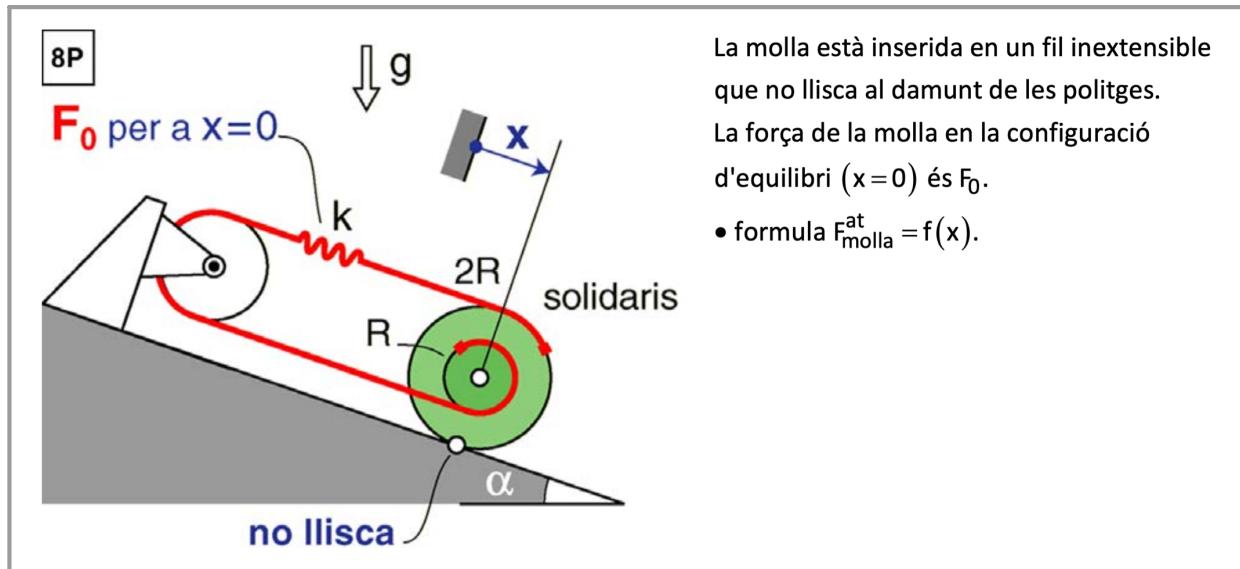


$$\Delta g = g - g_0 = \frac{L - L \sin \theta}{\cos \theta} - L = L \left( \frac{1 - \sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta} \right)$$

$$F_m^{\text{rep}} = F_0 - K \Delta g =$$

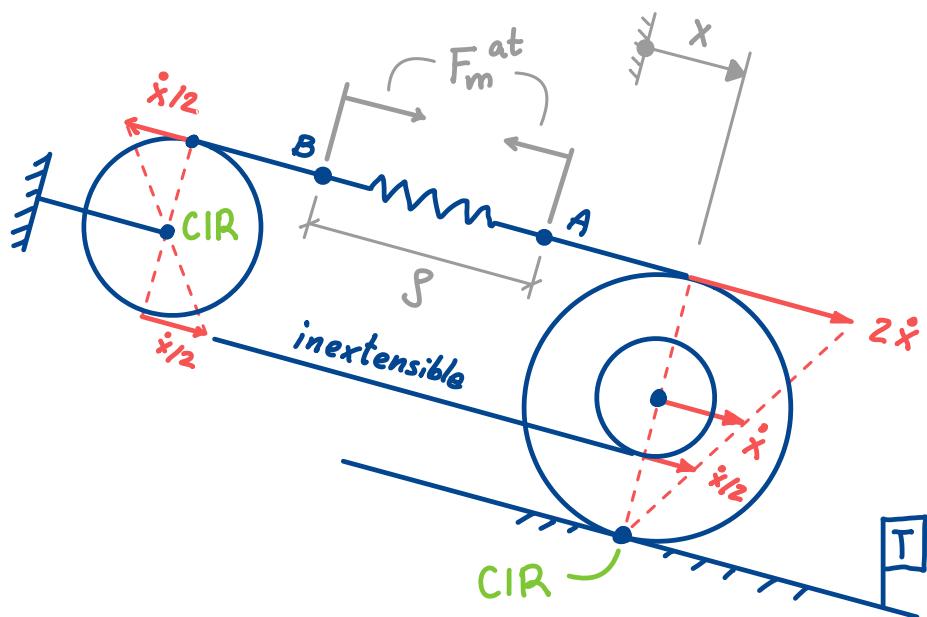
$$F_0 - K L \left( \frac{1 - \sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta} \right) = F_0 + K L \left( \frac{\cos \theta + \sin \theta - 1}{\cos \theta} \right)$$

(\*) Ja quadra:  $\Delta g$  serà negatiu en passar de la config. inicial de referència a la genèrica  $\Rightarrow -K \Delta g$  serà un increment positiu que fa augmentar  $F_m^{\text{rep}}$

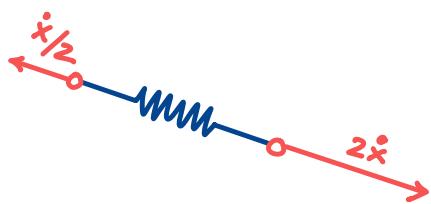


Sist. amb 1 GL. La config. inicial de referència és  $x=0$ .  $F_0$  és una dada pq l'enunciat la dona.  $F_0$  és atractiva pq si en la situació d'equilibri ( $x=0$ ) tallem la molla, el carro cau.

En exercicis com aquest, en els que tenim una molla inserida a un fil inextensible que s'enrotlla sobre corrons, calcularem  $\Delta g$  buscant primer  $\dot{g}$  i integrant-lo en el temps des de  $t=0$  (instant de la config. inicial) a  $t=t$  (instant genèric "actual" del dibuix). Per trobar  $\dot{g}$  ens cal primer buscar les velocitats dels extrems A i B de la molla en alguna referència on aquests tinguin la direcció de la molla. En aquest exemple ja ens va bé la ref. T (en altres no !):



De l'anàlisi de velocitats anterior veiem que les velocitats dels extrems A i B de la molla són:



Ergo la molla s'allarga a ritme

$$\dot{f} = 2\dot{x} + \frac{\dot{x}}{2} = \frac{5}{2}\dot{x}$$

Calculem  $\Delta p$  integrant  $\dot{f}$  des de  $t=0$  (config. inicial de referència) fins a  $t=t$  (instant genèric actual):

$$\begin{aligned} \boxed{\Delta p} &= \int_0^t \dot{f}(t) dt = \int_0^t \frac{5}{2} \dot{x}(t) dt = \\ &= \frac{5}{2} \int_0^t \dot{x}(t) dt = \frac{5}{2} \left[ x(t) \right]_0^t = \\ &= \frac{5}{2} \left[ x(t) - \underbrace{x(0)}_0 \right] = \boxed{\frac{5}{2} x} \end{aligned}$$

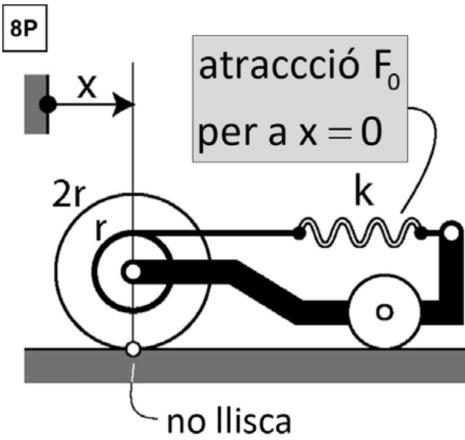
Ho sabem de l'enunciat  
(la config. de referència és  $x=0$ )

Já no posem  
la dependència de t

Ara ja es fàcil:

$$\boxed{F_m^{at} = F_0 + K \Delta p = F_0 + K \frac{5}{2} x}$$

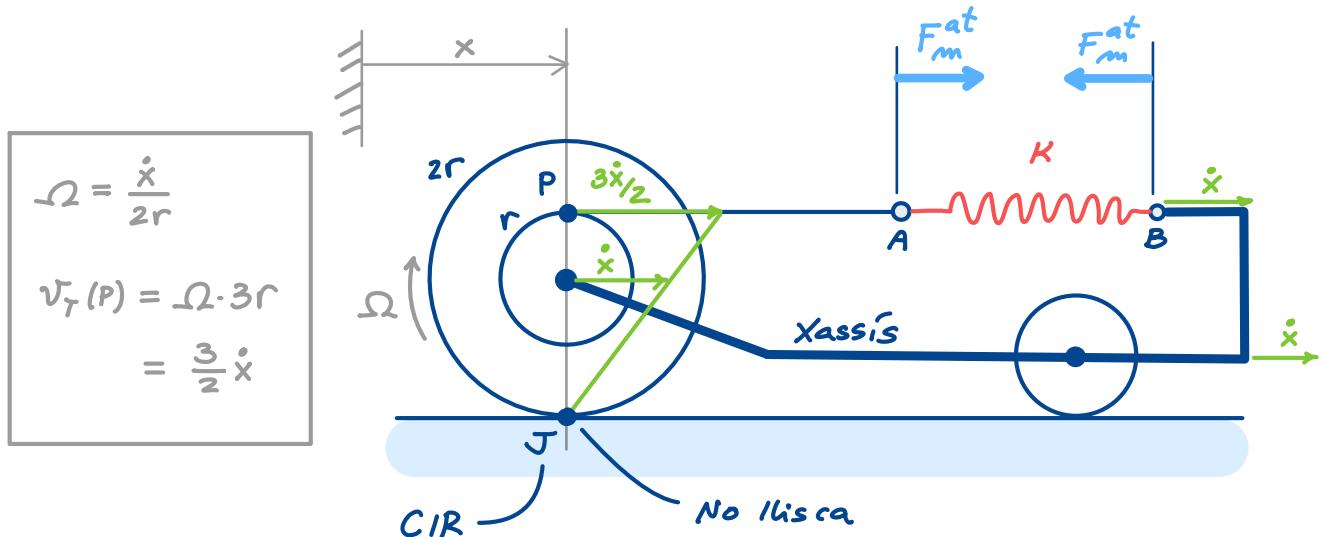
Expressió de la força de la molla  
en funció de la variable de  
configuració x del sistema



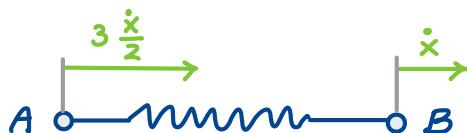
La molla està inserida en un fil inextensible amb un extrem lligat al xassís del carro i l'altre al contorn d'una politja. La coordenada  $x$  posiciona el centre de la roda posterior respecte del terra ( $T$ ).

- formula  $F_{\text{molla}}^{\text{at}} = f(x)$ .

$F_{\text{molla}} \text{ atractiva per } x = 0 \Rightarrow \text{Utilitzem criteri d'atracció (CA).}$



$J$  no llisca  $\Rightarrow$  Tenim la distribució de velocitats verda a la la roda esquerra. Als extrems de la molla tenim les velocitats:



Per tant, la molla s'escura amb velocitat

$$\dot{f} = \dot{x} - \frac{3\dot{x}}{2} = -\frac{\dot{x}}{2} \quad \text{Negativa perquè s'escura!}$$

Ergo:

$$\Delta f = \int_0^t \dot{f} dt = \int_0^t \left(-\frac{\dot{x}}{2}\right) dt = -\left[\frac{x}{2}\right]_0^t = -\frac{x}{2}$$

I per tant

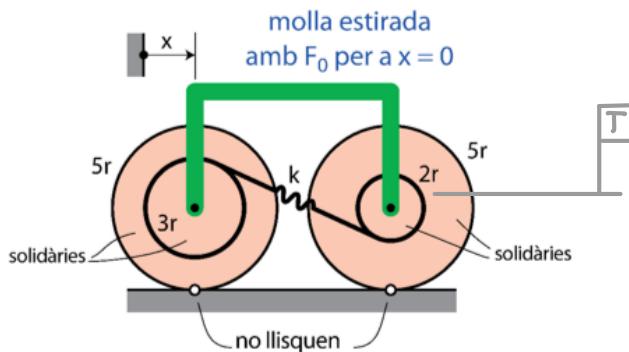
$$F_m^{\text{at}} = F_0 + K \Delta f = F_0 - K \frac{x}{2}$$

Cal dibuixar-la atractiva a la figura, tal i com he fet

En exercicis de molles inserides en fils inextensibles que s'enrotllen a corrons, hi pot haver casos en que calgui calcular les velocitats dels extrems de la molla en una referència diferent de T, ja que si les calculem a T no surten longitudinals a la molla (cosa que no permet determinar  $\dot{\theta}$ ). El següent exemple ho il·lustra:

TP-G10, 3 abril 2025

Quina és l'expressió de la força d'atracció de la molla en funció de x ?



RE = Roda esquerra

RD = Roda dreta

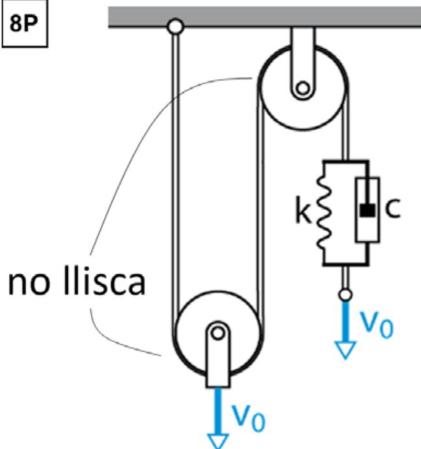
### Pista:

Calculeu  $\dot{\theta}$  buscant les velocitats dels extrems de la molla en la referència xassís (barra verda).

### Solució:

[https://lluisros.github.io/mecanica/problemes/8P\\_extra.pdf](https://lluisros.github.io/mecanica/problemes/8P_extra.pdf)

8P

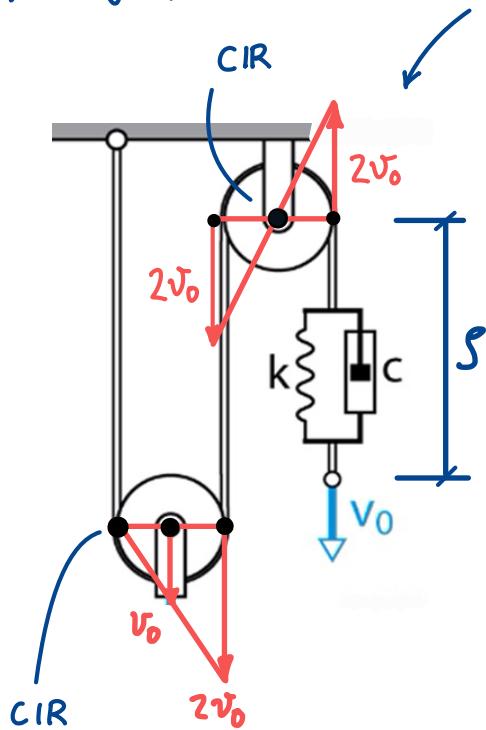


El grup molla-amortidor està inserit en un fil inextensible que no llisca al damunt de les politges. El centre de la politja inferior i el d'un extrem de l'amortidor respecte del terra ( $T$ ) és  $v_0$ .

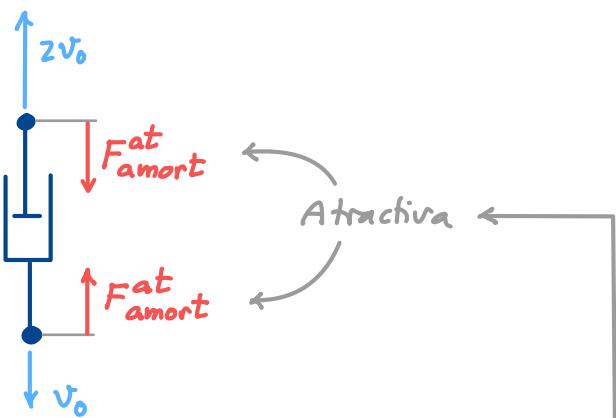
- formula  $F_{\text{amort}} = f(v_0)$ .

### Formulació de $F_{\text{amort}}(v_0)$

Per cinemàtica plana, tenint en compte els CIRs de les politges, tenim les velocitats



Per tant, als extrems de l'amortidor tenim les velocitats blaves:



Clarament, quan  $v_0 > 0$ , l'amortidor s'allarga a ritme

$$\dot{s} = 2v_0 + v_0 = 3v_0$$

i aplica una força atractiva entre els seus extrems. Formulant aquesta força amb el criteri d'atracció queda

$$F_{\text{at}}^{\text{Famort}}(v_0) = c \cdot 3v_0$$

— Al dibuix pintem la força attractiva

Hauríem pogut formular  $F_{\text{amort}}(v_0)$  amb el criteri de repulsió?

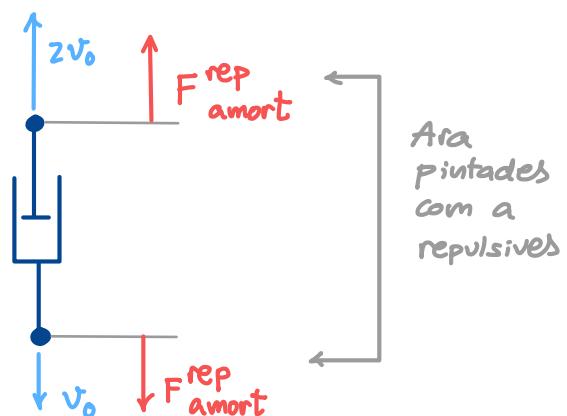
Sí! Tenim llibertat per triar el criteri perquè no ens demanen de formular també la força de la molla que hi ha en paral·lel amb l'amortidor. Si ens ho haguessin demanat, no tindriem aquesta llibertat: caldria haver triat el mateix criteri que per a la molla (que seria d'atracció si la  $F_0$  de la molla fos atractiva, o de repulsió contràriament).

Com es formula  $F_{\text{amort}}(v_0)$  amb el criteri de repulsió?

Simplement així

$$F_{\text{amort}}^{\text{rep}} = -c_3 v_0$$

Però aleshores, al dibuix, cal dibuixar la força com a repulsiva



I això ja quadra?

Sí! Vegeu-ho:

Quan  $v_0 > 0$ , l'amortidor s'allarga a ritme  $\dot{v} = 3v_0$ . El valor  $F_{\text{amort}}^{\text{rep}}$  valdrà  $-c_3 v_0$ , que és negatiu. Per tant la força real entre els extrems serà de sentit contrari al dibuixat.

I ja és el que cal perquè l'amortidor, en allargar-se fa una força atractiva entre els seus extrems (no repulsiva).

I no és més natural el criteri d'atracció en aquest cas?

Sí, perquè tendim a voler dibuixar la força en el sentit que el valor  $v_0$  positiu provoca. Però els dos criteris serien vàlids sempre que dibuixem les forces amb el sentit que en cada un d'ells toca al dibuix.

Teoria sobre enllaç partícula - superfície

## Forces d'enllaç ("constraint forces" en anglès)

Els enllaços

- Restringeixen el movim. relatiu entre
  - partícules
  - " i superfícies
  - sòlids
- Apliquen forces que prenen el valor que calgui per garantir les restriccions d'enllaç

Quan parlem de "partícula," sovint volem dir "model partícula".

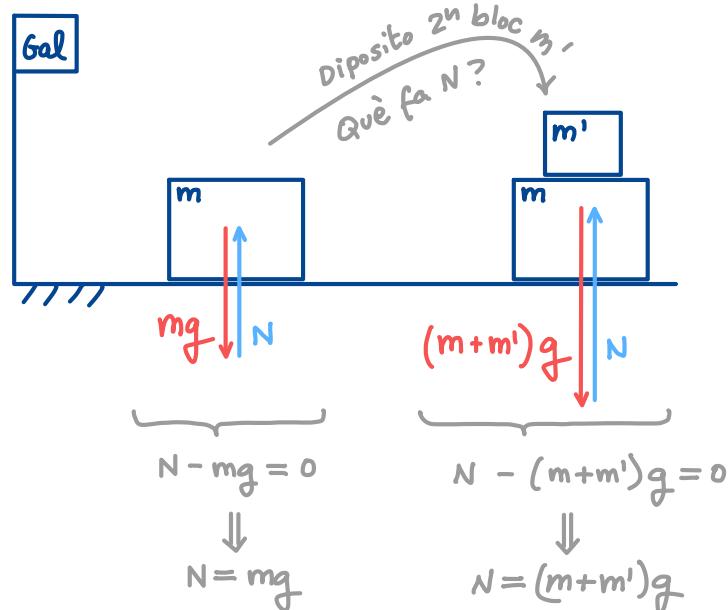
Sovint tractem un sòlid com si fos una partícula, si la seva mida és irrelevante en un cert context.

### Exemple de força d'enllaç

Considerem un bloc estàtic a terra, de massa  $m$ . Repassem el catàleg de forces, mirant quines li són aplicades (✓) i quines no (✗):

- ✓ Pes
- ✗ Molles
- ✗ Amortidors
- ✗ Fricció (\*)
- ✓ Forces d'enllaç

La normal  $N$  és força d'enllaç: el bloc no pot anar avall ↓, ergo algué l'apreta cap ↑.



En ser  $N$  d'enllaç, pren el valor que calgui per garantir l'enllaç.  
Si diposito un 2<sup>n</sup> bloc de massa  $m'$ ,  $N$  augmenta!

$N$  no és formulable en funció de variables d'estat (com el pes, o les forces de molles o amortidors). És una incògnita i només podem deduir el seu valor aplicant la 2<sup>a</sup> Llei de Newton (2<sup>a</sup>LN), tal i com hem fet en aquest exemple.

(\*) Veurem que fricció = fregament amb lliscament. Com que el bloc està estàtic, no llisca sobre el terra ⇒ ∴ fricció aplicada.

D'on surten les f. eullag?

De les deformacions microscòpiques en els contactes!



A nivell microscòpic podem pensar el contacte com format per petites molles i amortidors, a milers.

En realitat aquestes molles i amortidors fan forces formulables però com que les volem tractar a nivell macroscòpic, no les podem formular a priori.

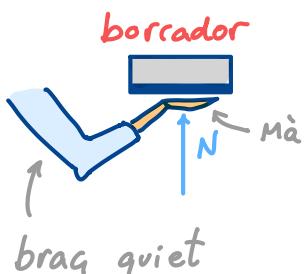
### Condicions límit d'eullag

Tot i que les forces d'eullag s'adapten per valdr el que calqui, tenen valors límit, per exm. donats per la resistència dels materials: si continuo afegint massa al bloc potser enfoscaré el terra i el bloc caurà al pis de sota!

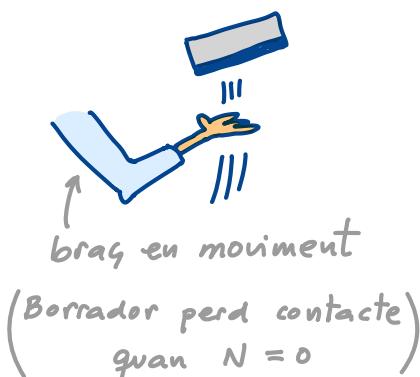
Podem tenir desaparició de l'eullag sense tenir rotura física?  
Sí! Vegem-ho amb exemples:

#### ► Borrador

Si l'anterior bloc és el borrador i l'aixeco, pot perdre contacte amb la meva mà:



brag quiet



brag en moviment

(Borrador perd contacte)  
quan  $N = 0$

Cal  $N > 0$  per garantir l'eullag.

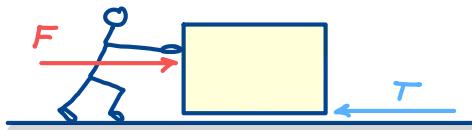
La condició límit d'eullag és

$$N = 0$$

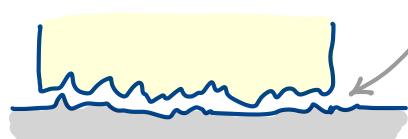
## ► Persona → bloc

Inicialment, bloc estàtic.

Apliquem  $F$  de valor creixent.

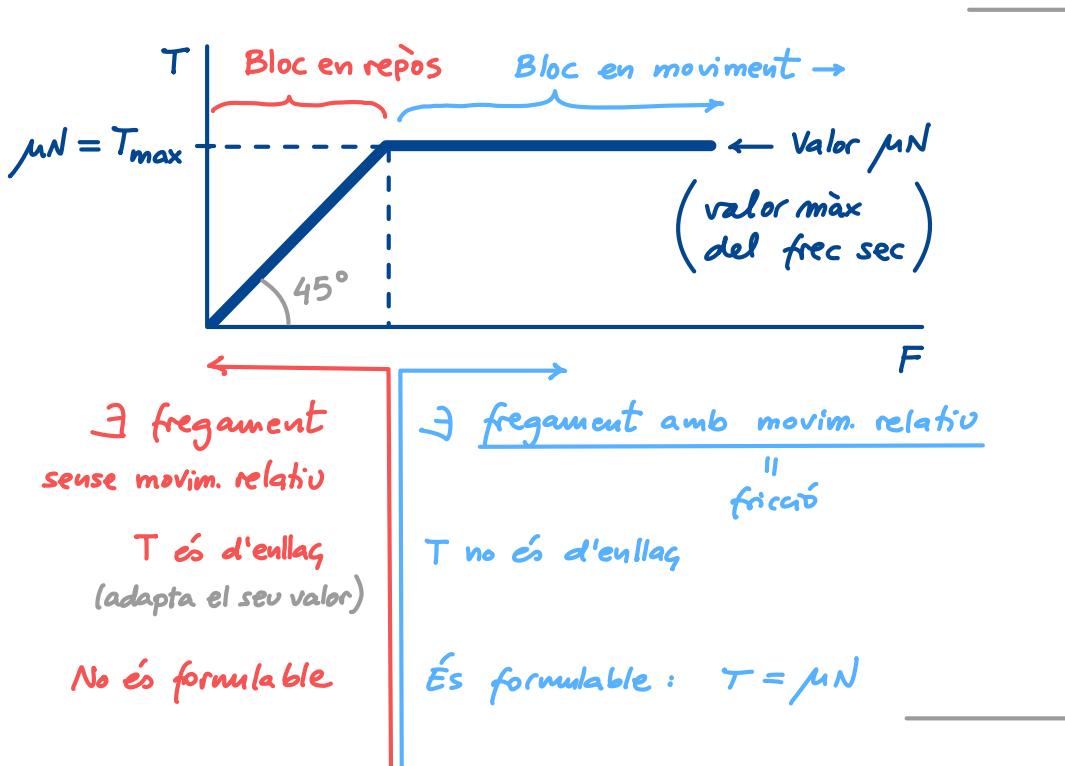


Per  $F$  baix, el terra respon amb  $T = F$  sobre bloc, impedint el moviment. Si  $F$  augmenta,  $T$  també (s'adapta).  $T$  es i un fregament degut a les rugositats del contacte

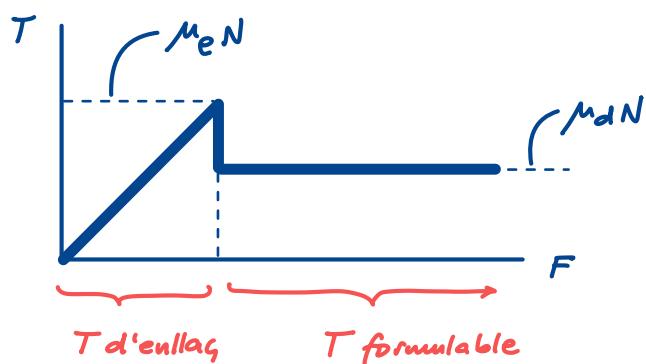


Cal utilitzar algun model de freg per descriure el comportament

A partir d'un cert  $F$ , bloc es mourà  $\rightarrow$ . Si suposem el model de freg sec de Coulomb trobarem:



El següent model de freg sec és més acurat:

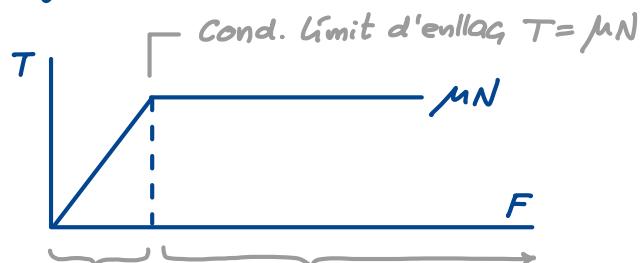
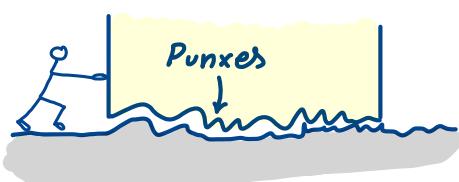


$M_e$  = coef. freg estàtic

$M_d$  = " " dinàmic

D'on surten les forces de fregament?

De les rugositats al contacte!



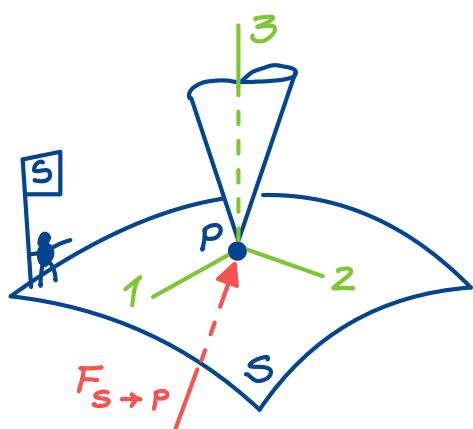
Aquí cal aixafar les punxes per iniciar el movim.

Un cop aixafades, el bloc ja llisca cap a la dreta →.

Important: En sistemes que impliquin contactes entre sòlids, com el bloc-terra en l'anterior exemple, típicament farem la hipòtesi inicial de que  $\nexists$  lliscament en el contacte, i q per tant  $T$  serà una força d'enllaç, incògnita del problema. Si ens surt un valor de  $T$  que supera la condició límit d'enllaç ( $T=\mu N$ ), refarem el problema novament suposant que  $\exists$  lliscament, i que  $T$  passa a ser formulable ( $T=\mu N$ ), deixant de ser incògnita.

### Caracterització de forces d'enllaç partícula - superfície

Quan hi ha un contacte entre una partícula  $P$  i una superfície  $S$  cal saber identificar la forma genèrica que tindrà la força  $\bar{F}_{S \rightarrow P}$  que fa  $S$  sobre  $P$  (quines components seran zero i quines no en les direccions d'una base):



força que  $S$  aplica a  $P$   
( $S$  = superfície d'un sòlid)

Quina forma tindrà el vector

$$\left\{ \bar{F}_{S \rightarrow P} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

$$B = (1, 2, 3)$$

?

Quines components  
seran zero i quines no?

Caracteritzar l'enllaç vol  
dir determinar això

Aquesta caracterització és necessària  
per poder aplicar bé la 2a Llei de Newton  
(ja ho veurem)

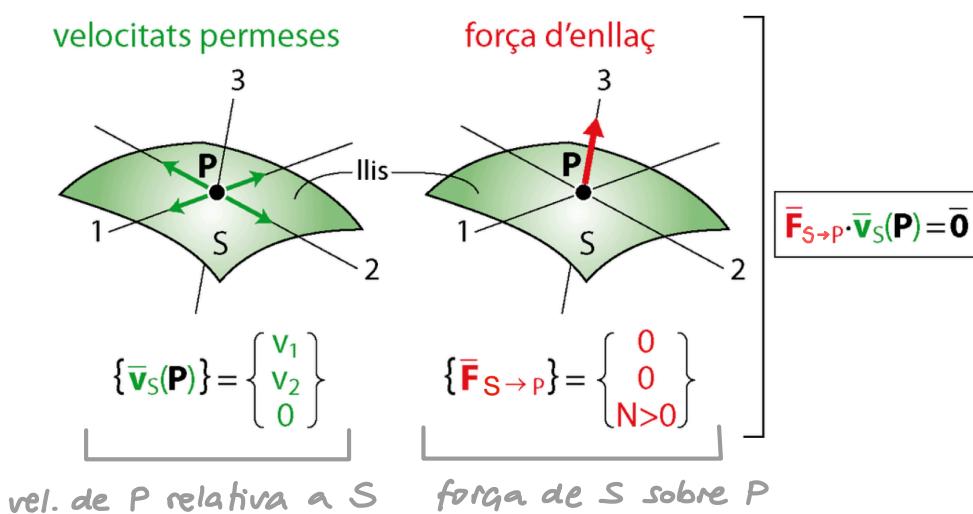
Per caracteritzar un enllaç cal pensar en quines velocitats permet S a P, vistes des de S (relatives a S). Hi haurà zeros de força en les direccions en les que hi hagi velocitat permesa.

Considerarem 2 casos :

- P en contacte amb una superfície S llisa
- " " " " " rugosa

### Partícula sobre superfície llisa

S li permet a P de tenir components en les direccions 1 i 2 del pla tangent a S en el punt P, però no en dir. 3 negativa (altrament P penetraria S i no pot) :



Per tant, la forma genèrica de  $\bar{v}_S(P)$  i  $\bar{F}_{S \rightarrow P}$  serà la indicada a la figura ↗ [en la base  $B = (1, 2, 3)$ ]. La força  $\bar{F}_{S \rightarrow P}$  serà  $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{Bmatrix}$ , amb  $N > 0$ , ja que S només pot empènyer P en dir. 3 positiva, no estirar-la cap ↘.

Fixeu-vos que sempre es complirà

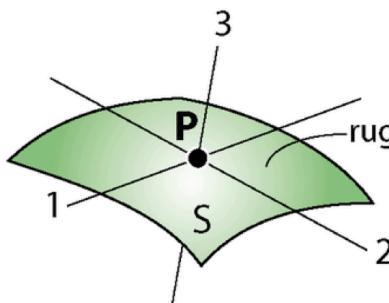
$$\bar{F}_{S \rightarrow P} \cdot \bar{v}_S(P) = \bar{0}$$

Aquesta equació "caracteritza l'enllaç P-S", i + endavant la generalitzarem per poder caracteritzar enllaços sólid-sòlid.

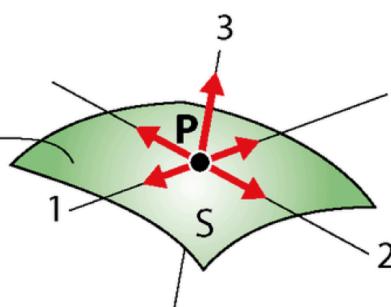
## Partícula sobre superfície rugosa, sense lliscar-hi

Quan  $S$  és rugosa,  $S$  s'oposa al moviment de  $P$  no només en la dir. 3- sinó també en les direccions tangencials 1 i 2. En principi,  $S$  no permetrà a  $P$  de lliscar en aquestes direccions (a menys que hi hagi forces sobre  $P$  suficientment grans com per forçar el lliscament). Per tant, si  $P$  no llisca sobre  $S$  (és en repòs respecte  $S$ ) tindrem, en base  $B = \{1, 2, 3\}$ :

velocitats permeses  
(sense lliscament)



força d'enllaç



$$\{\bar{v}_S(P)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{F}_{S \rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ N > 0 \end{Bmatrix}, \sqrt{F_1^2 + F_2^2} < F_{\max}$$

Novament tenim:

$$\bar{F}_{S \rightarrow P} \cdot \bar{v}_S(P) = \bar{0}$$

$P$  està en repòs  
respecte  $S$

$S$  farà una força  $\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ N \end{Bmatrix}$  sobre  $P$ , amb:

- $N > 0$

- $\sqrt{F_1^2 + F_2^2} < F_{\max}$

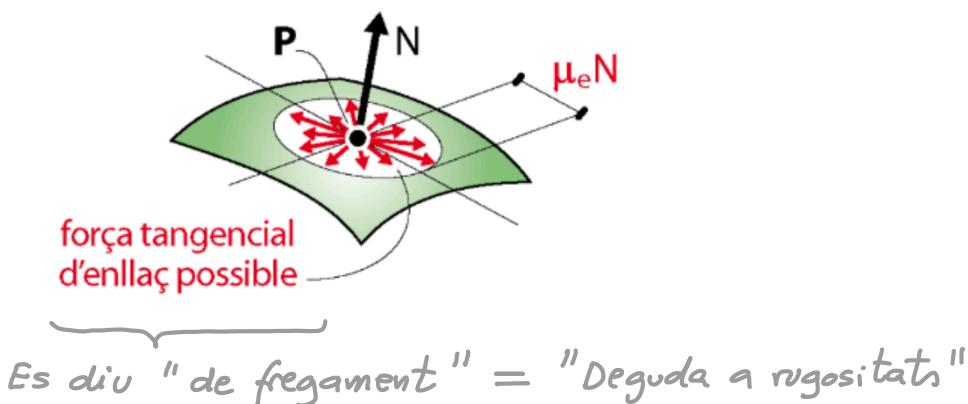
Aquí,  $F_{\max}$  és el valor màxim que pot tenir la força tangencial abans no s'aixafin les rugositats i  $P$  comenci a lliscar sobre  $S$ . En aquesta assignatura assumirem:

- O bé  $F_{\max} = \mu N$  (quan suposem  $\mu_e = \mu_d = \mu$ )
- O bé  $F_{\max} = \mu_e N$  (quan suposem  $\mu_e \neq \mu_d$ )

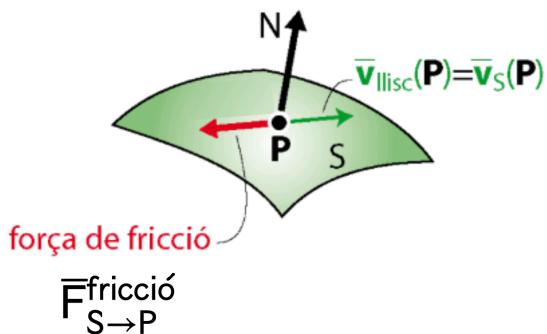
## Forces de fricció (fregament amb lliscament)

I què passa si P llisca sobre S rugosa?

La imatge a retenir és la següent. Mentre no hi hagi lliscament, la força tangencial de contacte de S sobre P és d'enllaç (pren el valor q. calgui x impedir el lliscament, sempre i quan aquest valor sigui inferior a  $\mu_e N$ ):



En canvi, si la força d'enllaç tangencial arriba al valor  $\mu_e N$ , l'enllaç tangencial es trenca, P comença a lliscar sobre S i la força tangencial passa a ser de fricció, (fregament amb lliscament). Aquesta força, denotada  $\bar{F}_{S \rightarrow P}^{\text{fricció}}$ , es ara formulable, i sempre va dirigida en sentit oposat al de la velocitat de lliscament de P respecte S:



Hi ha diversos models per formular el valor de  $\bar{F}_{S \rightarrow P}^{\text{fricció}}$  segons les característiques del contacte entre P i S. Els principals són el model de freg sec de Coulomb, ja anticipat prèviament, i el model de freg viscos.

En el model de freq sec de Coulomb el valor de la fricció és proporcional a  $N$ :

$$F_{S \rightarrow P}^{\text{fricció}} = \mu_d N$$

(típicament  $\mu_d = \mu_e = \mu$ , però no sempre)

En el model de freq viscós, en canvi, aquest valor és proporcional al de la velocitat  $v_s(P)$ :

$$F_{S \rightarrow P}^{\text{fricció}} = c \cdot v_s(P)$$

└ coef. de freq viscós ( $\frac{Ns}{m}$ )

Aquest darrer model és molt adequat quan entre  $P$  i  $S$  hi ha una certa lubricació.

En els problemes que fem hi pot haver fricció del primer tipus, del segon, o de tots dos. L'enunciat, el context, o el dibuix ho hauran de deixar clar.

#### Alerta amb el vocabulari

" $\exists$  lliscament" = " $\exists$  velocitat relativa al contacte"

Expressió de  
cinemàtica, no  
de dinàmica

Però l'expressió no diu res sobre  
si el terra és llis o rugós !

" $\exists$  fregament" = " $\exists$  rugositat que s'oposa al lliscament"

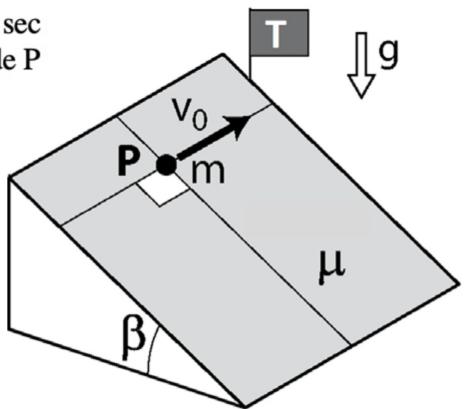
Però no vol dir que hi hagi lliscament !

" $\exists$  fricció" = " $\exists$  fregament i lliscament"

de  $P$  sobre  $S$

## Exercicis de dinàmica de la partícula

La partícula P de massa m, que es mou sobre un pla inclinat, passa per la posició indicada amb velocitat  $v_0$  perpendicular a la línia de màxim pendent del pla. Entre partícula i pla hi ha freq sec de coeficient  $\mu$ . Quant val el radi de curvatura de la trajectòria de P sobre el pla a la posició indicada?



Atenció: aquí acostumeu a preguntar per què cal dinàmica per obtenir  $R_T(P)$ , quan fins ara, a cinemàtica, no calia. Però no calia perquè preguntarem  $R_T(P)$  en sistemes d'un sol GL, en els quals la trajectòria de P quedava únicament determinada. La partícula de la figura, en canvi, té 2 GL sobre el pla, i ens cal aplicar la 2<sup>a</sup> llei de Newton per determinar  $\bar{a}_T(P)$  (i  $\bar{a}_n(P)$ ).

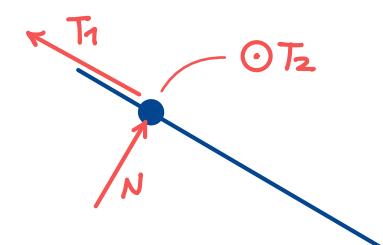
### Solució

Volem  $R_T(P) = \frac{v_0^2}{a_T^n(P)}$ . Calcularem  $a_T^n(P)$  aplicant 2<sup>a</sup>LN.

### Forces d'enllaç sobre P

El pla és rugós pq ens diuen que hi ha freq sec de coef.  $\mu$ . Si P no es mogués resp. el pla tindriem

$$\bar{F}_{\text{Pla}+P}^{\text{Enllaç}} = (\uparrow N) + (\leftarrow T_1) + (\odot T_2)$$



Forces d'enllaç del pla sobre P si  $\bar{v}_T(P)$  fos zero

però com que es mou amb  $\bar{v}_T(P) = (\odot v_0)$ , s'han superat les condicions límit d'enllaç tangencial i P està sotmés a una força de fricció ( $\odot \mu N$ ) en aquest pla (oposada a  $\bar{v}_T(P)$ ). Aquesta força ( $\odot \mu N$ ) no és d'enllaç!

Per tant, l'única força d'eulla que actua sobre P és la normal del pla sobre P:

$$\bar{F}_{\text{pla} \rightarrow P}^{\text{eulla}} = (\uparrow N)$$

### Forces formulables aplicades a P

- La fricció ( $\odot \mu N$ ) que deiem
- El pes ( $\downarrow mg$ )

### Acceleració de P

P té una acceleració desconeguda sobre el pla, que podem descompondre en components tangencial ( $\odot a^s$ ) i normal ( $\rightarrow a^n$ )

### 2<sup>a</sup> Llei de Newton sobre P

$$\text{En dir. 1: } (\rightarrow mg \sin \beta) = m (\rightarrow a^n) \quad (\text{I})$$

$$\text{En dir. 2: } (\uparrow N) + (\downarrow mg \cos \beta) = 0 \quad (\text{II})$$

$$\text{En dir. 3: } (\odot \mu N) = m (\odot a^s) \quad (\text{III})$$

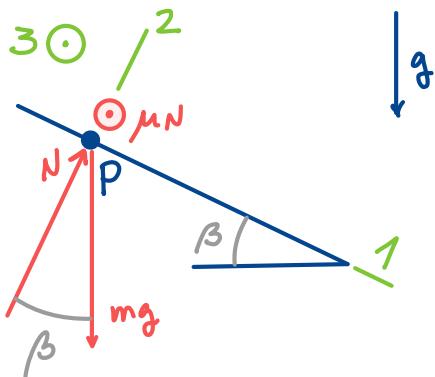
Com que volem  $a^n$ , l'àïllem de (I):

$$a^n = g \sin \beta$$

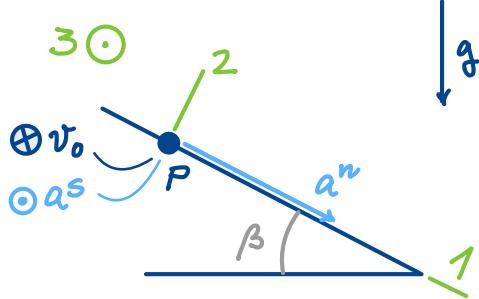
### $R_T(P)$

Finalment:

### Forces realment aplicades a P

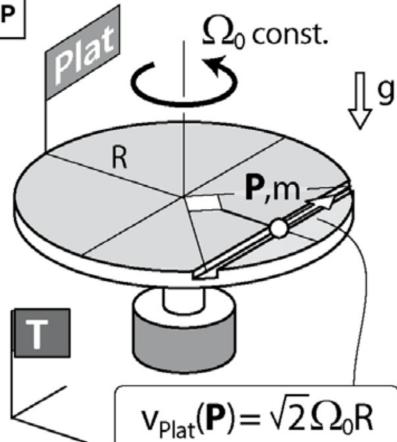


### Velocitat i acceleració de P



$$R_T(P) = \frac{v_0^2}{g \sin \beta}$$

8P



Una partícula  $\mathbf{P}$  de massa  $m$  es mou dins una guia d'una plataforma giratòria de radi  $R$ . En la posició indicada, la seva velocitat respecte de la plataforma és  $\sqrt{2}\Omega_0 R$ . Troba:

- la força de la guia sobre  $\mathbf{P}$  a la posició indicada.

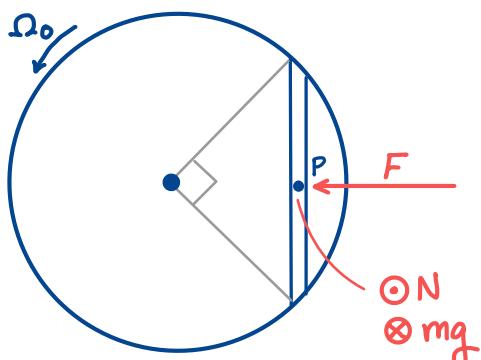
Aplicarem la 2a LN a  $\mathbf{P}$ :  $\sum \bar{F}_{\rightarrow \mathbf{P}} = m_p \cdot \bar{a}_T(\mathbf{P})$

$\sum \bar{F}_{\rightarrow \mathbf{P}}$

Quines forces rep  $\mathbf{P}$ ? Hi ha

- Les d'enllaç Plat -  $\mathbf{P}$
- El pes

### Forces d'enllaç sobre $\mathbf{P}$



El moviment  $\leftrightarrow$  de  $\mathbf{P}$  relatiu a la guia no és possible, ergo la guia aplica una força  $F$  sobre  $\mathbf{P}$  en dir. radial (no sabem si en sentit  $\leftarrow$  o  $\rightarrow$  a priori, però la dibuixem com ( $\leftarrow F$ ) i ja veurem si  $F$  surt  $> 0$  o  $< 0$ ).

A banda, la guia aplica una força normal ( $\odot N$ ) sobre  $\mathbf{P}$ , ja que el moviment de  $\mathbf{P}$  en dir  $\otimes$  està impedit.

$\mathbf{P}$  no rep cap força d'enllaç en dir.  $\ddagger$  perquè el moviment de  $\mathbf{P}$  al llarg de la guia no està impedit.

Per tant, la força d'enllaç Guia  $\rightarrow \mathbf{P}$  té la forma

$$\bar{F}_{\text{Guia} \rightarrow \mathbf{P}} = \underbrace{(\leftarrow F) + (\odot N)}$$

Caracterització de la força d'enllaç Guia  $\rightarrow \mathbf{P}$   
( $F$  i  $N$  són incògnites d'enllaç (no formulables))

## Força pes

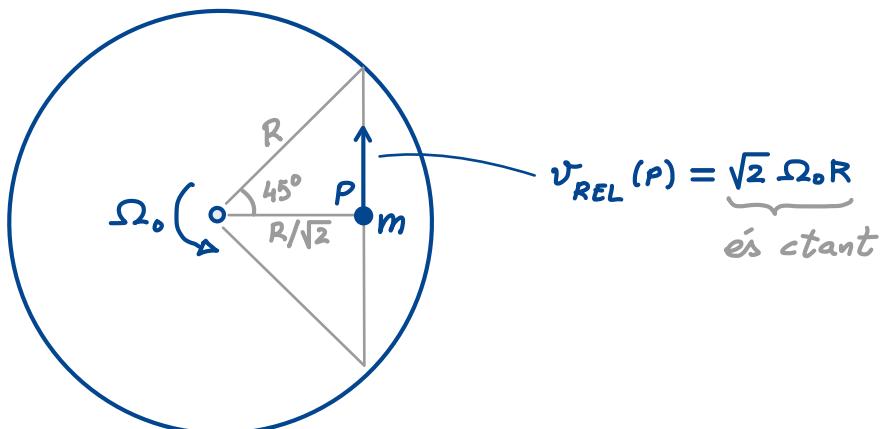
És  $\otimes mg$  (única força formulable aplicada a P)

## Sumatori de forces

$$\sum \bar{F}_{\rightarrow P} = (\leftarrow F) + (\odot N) + (\otimes mg)$$

## Acceleració $\bar{a}_T(P)$

Apliquem comp. movim. amb  $\begin{array}{l|l} AB = T \\ REL = Plat \end{array}$



$$\begin{aligned}
 \bar{a}_T(P) &= \underbrace{\ddot{\theta}}_{REL} + \underbrace{(\leftarrow -\Omega_0^2 \frac{R}{\sqrt{2}})}_{ar} + \underbrace{2 \left[ (\odot \Omega_0) \times (\uparrow \sqrt{2} \Omega_0 R) \right]}_{Coriolis} = \\
 &= \left( \leftarrow -\Omega_0^2 R \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} \right)}_{5/\sqrt{2}} \right) = \left( \leftarrow \frac{5}{\sqrt{2}} \Omega_0^2 R \right)
 \end{aligned}$$

## 2a llei de Newton

$$(\leftarrow F) + (\odot N) + (\otimes mg) = m \left( \leftarrow \frac{5}{\sqrt{2}} \Omega_0^2 R \right)$$

equació vectorial que dóna lloc a 2 eqs. escalars

En dir vertical:

$$(\odot N) + (\odot mg) = 0 \Rightarrow (\odot N) = (\odot mg) \Rightarrow N = mg$$

En dir. radial:

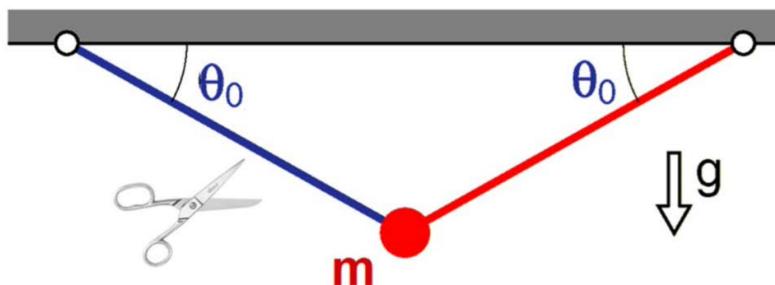
$F_{\text{surf}} > 0 \Rightarrow \bar{F}$  té el sentit  $\leftarrow$  dibuixat abans

$$(\leftarrow F) = \left( \leftarrow \frac{5}{\sqrt{2}} \Omega_0^2 R \right) \Rightarrow F = \frac{5}{\sqrt{2}} \Omega_0^2 R$$

Per tant:

$$\bar{F}_{\text{Guia} \rightarrow P} = (\odot mg) + \left( \leftarrow \frac{5}{\sqrt{2}} \Omega_0^2 R \right)$$

8P

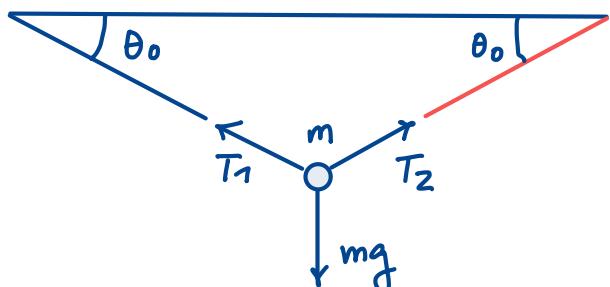


Una partícula **P** de massa **m** penja del sostre per mitjà de dos fils inextensibles.  
Troba:

- el canvi de tensió del fil de la dreta just després de tallar el de l'esquerra.
- l'equació del moviment per la coordenada  $\theta$ .

### Canvi de tensió

#### Tensió abans de tallar



Formulem la 2<sup>a</sup> llei de Newton per a la partícula de massa **m** en direccions vertical i horitzontal :

$$(I) \quad (\downarrow mg) + (\uparrow T_1 \sin \theta_0) + (\uparrow T_2 \sin \theta_0) = 0$$

$$(II) \quad (\leftarrow T_1 \cos \theta_0) + (\rightarrow T_2 \cos \theta_0) = 0$$

$$(II) \Rightarrow \underbrace{T_1 = T_2}_{\text{Anomenem-los } T}$$

Anomenem-los **T**

$$(I) \Rightarrow mg - 2T \sin \theta_0 = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{mg}{2 \sin \theta_0}$$

Tensió abans  
de tallar

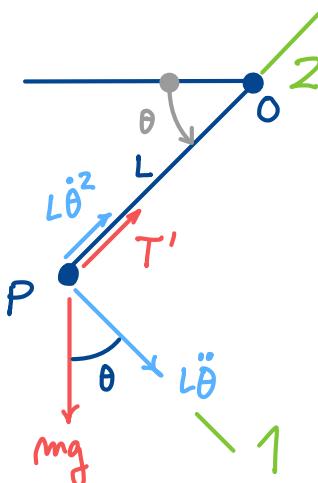
## Tensió després de tallar

Sobre P, tenim les forces i acceleracions de la figura.

No sabem  $T'$ . No és la d'abans!

Degut al cable, P descriura traject. circular avd O, amb les acceleracions blaves

2<sup>a</sup> LN sobre P, dir. 2:



$$T' - mg \sin \theta = m L \ddot{\theta}^2$$

↓

Apliquem c.i.  $\left| \begin{array}{l} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{P en repòs inicialment})$

$$T' = mg \sin \theta_0$$

L'increment de tensió és

$$T' - T = mg \sin \theta_0 - \frac{mg}{2 \sin \theta_0} = mg \underbrace{\left( \sin \theta_0 - \frac{1}{2 \sin \theta_0} \right)}_D$$

Serà positiu quan  $D > 0$ . És a dir, quan

$$\sin^2 \theta_0 > \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \theta_0 > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta_0 > 45^\circ$$

## Equació del moviment per a la coordenada $\theta$

2<sup>a</sup> LN en dir. 1

~~$mg \cos \theta = m L \ddot{\theta}$~~



$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L} \cos \theta$$

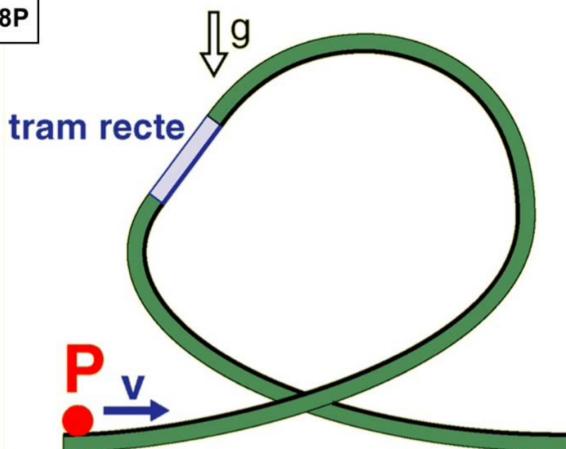
Equació del moviment per la coordenada  $\theta$

Recordeu d'Equacions Diferencials:

Permet saber l'evolució futura del sistema resolent el problema de valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta}(t) = \frac{g}{L} \cos \theta(t) \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \end{array} \right.$$

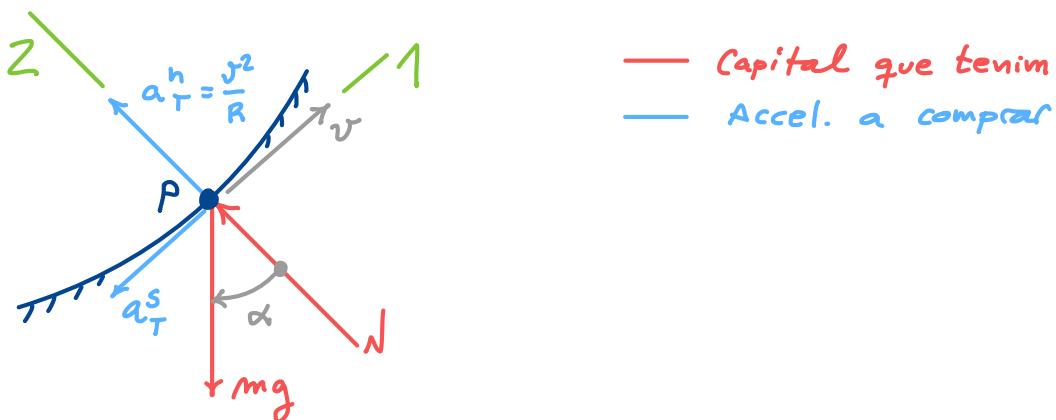
8P



- Una partícula **P** de massa  $m$  llisca al llarg d'un *looping* fix a terra ( $T$ ). Troba:
- $v_{\min}(P)$  per tal que arribi al punt més alt.
  - $v_{\min}(P)$  per tal que recorri tot el *looping*.

Analitzarem què passa a tot el *looping*. No ens diuen si la pista és llisa o rugosa. D'entrada assumirem que és llisa i deixem com exercici pel lector que els resultats no canvién si és rugosa. Anem per trams:

### Ascens rampa



Es perdria el contacte si  $N=0$ . És el cas? No! Com que el camí és curvat,  $\bar{a}_T^n = (\kappa \frac{v^2}{R})$  (on  $R$  és sabut pq. és el radi de curvatura de la pista a P). Del dibuix veiem que  $N$  s'adaptarà per a compensar  $mg \cos \alpha$  i alhora produir  $a_T^n = \frac{v^2}{R}$ . Ho pot fer? Sí, pq. és una força d'eusses unilateral q. s'adapta en dir  $\kappa$ .

El capital de forces possibles ens permet comprar l' $a_T^n$  que desitjo.

L'anàlisi previ es pot fer analíticament aplicant la 2<sup>a</sup> LN] dir. 2

$$(\nwarrow N) + (\searrow mg \cos \alpha) = m (\nwarrow \frac{v^2}{R})$$



$$N - mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R}$$



$$N = mg \cos \alpha + m \frac{v^2}{R}$$

Veiem que  $N > 0$  sempre, fins i tot si  $v = 0$ . Per tant, en el tram d'ascens, on  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ , mai es perde el contacte.

De la 2<sup>a</sup> LN] dir. 1 que en deduïm?

$$(\nwarrow mg \sin \alpha) = m \bar{a}_T^s$$



$$\bar{a}_T^s = (\nwarrow g \sin \alpha)$$

Deduïm que  $\bar{a}_T^s$  és de frenada. Fa minvar la velocitat  $v$ .

### Ascens recte

2<sup>a</sup> LN] dir. 2:

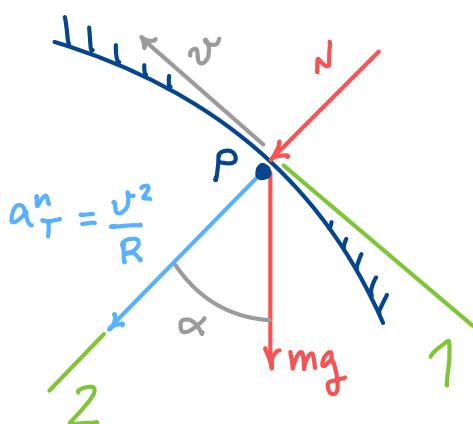
$$(\nwarrow N) + (\searrow mg \cos \alpha) = m (\nwarrow \frac{v^2}{R})$$

$$N + mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

$$N = \frac{mv^2}{R} - mg \cos \alpha$$

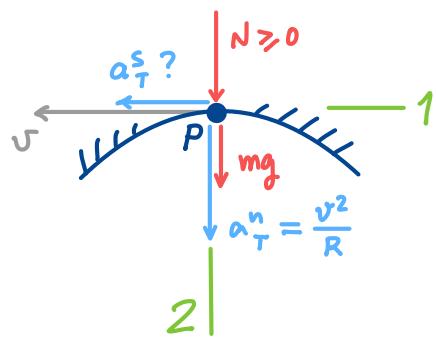
$$N > 0 \Leftrightarrow \frac{v^2}{R} - g \cos \alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$v > \sqrt{Rg \cos \alpha}$$



Ergo, si  $v$  és  $> \sqrt{Rg \cos \alpha}$ , P mantindrà contacte amb la pista.

## Punt més alt



$2^a LN]$  dir. 2 :

$$(\downarrow N) + (\downarrow mg) = m(\downarrow \frac{v^2}{R})$$

$$N + mg = m \frac{v^2}{R}$$

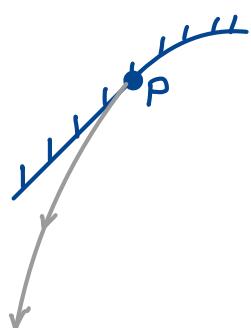
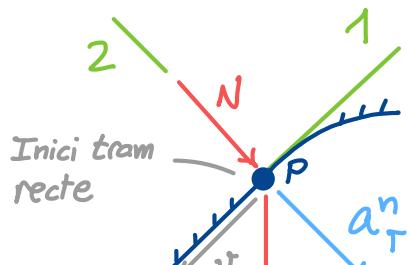
$$N = m \left( \frac{v^2}{R} - g \right)$$

$$N > 0 \Rightarrow \frac{v^2}{R} - g > 0 \Rightarrow v > \sqrt{Rg}$$

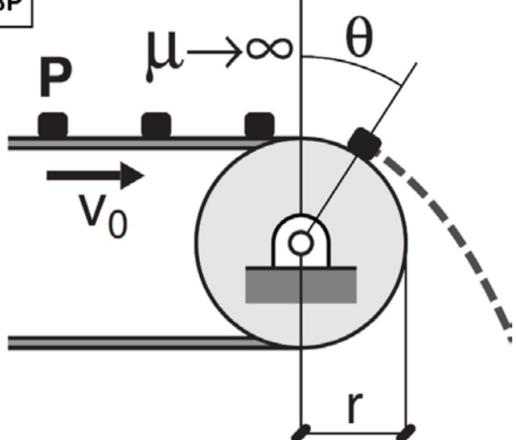
Si  $v > v_{\min} = \sqrt{Rg}$ , P arriba al punt més alt de la pista i no li perd contacte

## Entrada tram recte

Ara null "comprar" una  $a_T^n = 0$  perquè volria fer el tram recte. No puc "comprar-la" pq. el balanc met de forces sobre P en la dir. 2 apunta cap a  $\rightarrow$ . Esgo  $a_T^n$  serà  $\neq 0$  i cap a  $\rightarrow$ . P perdrà contacte amb la pista a l'inici del tram recte i començarà una trajectòria parabòlica de caiguda independentment de la velocitat  $v$  amb la que entri en el tram.



8P



2 Les partícules P es troben en repòs respecte a la cinta transportadora que avança amb velocitat  $v_0$  constant. Si el coeficient de freqüència entre cinta i partícules és  $\infty$ , en quina posició angular  $\theta$  les partícules perdren contacte amb la cinta?

Cas  $\theta = 0^\circ$

Podria P perdre contacte per  $\theta = 0^\circ$ ? Cal estudiar el valor d' $N$ . Per a que es mantingui el contacte cal  $N > 0$ !

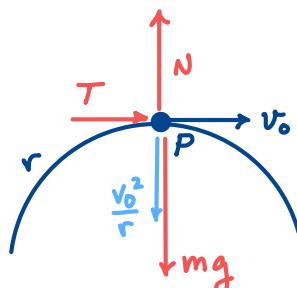
Per trobar  $N$  apliquem 2<sup>a</sup> LN en dir. vert

$$\sum \bar{F}_{\rightarrow P} \Big|_{\text{vert}} = m \bar{a}_T(P) \Big|_{\text{vert}}$$

$$(\uparrow N) + (\downarrow mg) = (\downarrow m \frac{v_0^2}{r})$$

$$N - mg = -m \frac{v_0^2}{r}$$

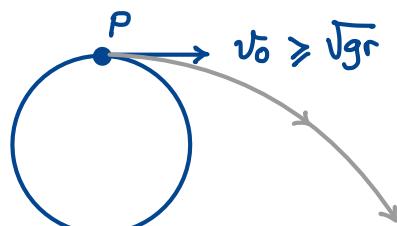
$$N = mg - m \frac{v_0^2}{r}$$



P està en contacte amb la cinta, que és rugosa. Ergo  $\bar{F}_{\text{cinta} \rightarrow P} = (\rightarrow T) + (\uparrow N)$  en principi.

$$N > 0 \Rightarrow \cancel{mg} > \cancel{m \frac{v_0^2}{r}} \Rightarrow v_0 < \sqrt{gr} \quad (\square)$$

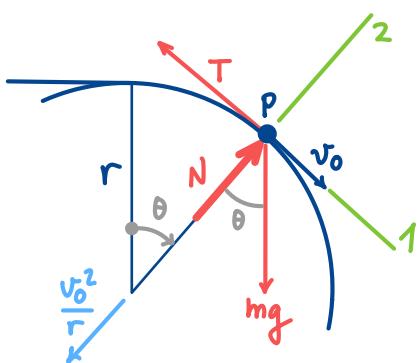
Si per  $\theta = 0^\circ$  tenim  $v_0 \geq \sqrt{gr}$ , P perdrà contacte i sortirà projectada endavant en caiguda lliure parabòlica:



Per  $\theta > 0^\circ$

Suposem ara que  $v_0 \leq \sqrt{gr}$ , de manera que P ha superat  $\theta = 0^\circ$  sense perdre contacte.

Sobre P hi actuen les forces del dibuix adjunt. La força d'enllig ciuta-P segueix tenint una component normal ( $\nearrow N$ ) i una tangencial ( $\nwarrow T$ ). Com que el coef. de fregament  $\mu$  és  $\infty$ ,  $T$  pot valdre el que algui (no hi ha condició límit d'enllig per a  $T$ , ja que  $T < \mu N = \infty$  sempre). La partícula P es desprendrà de la ciuta quan  $N$  passi a ser zero. Obtinguem  $N$  per veure quan passarà això.



2<sup>a</sup> LN en dir. 2 (radial):

$$(\nearrow N) + (\nwarrow mg \cos \theta) = m \underbrace{\left( \nwarrow \frac{v_0^2}{r} \right)}_{\bar{a}_T(P)}$$

$$N - mg \cos \theta = -m \frac{v_0^2}{r}$$

$$N = m \left( g \cos \theta - \frac{v_0^2}{r} \right)$$

Es mantindrà el contacte mentre:

$$N > 0 \Rightarrow g \cos \theta - \frac{v_0^2}{r} > 0 \Rightarrow \cos \theta > \frac{v_0^2}{gr}$$

Per tant, es produirà  $N=0$ , i la pèrdua de contacte, quan

$$\cos \theta = \frac{v_0^2}{gr} \Rightarrow \boxed{\theta = \arccos \left( \frac{v_0^2}{gr} \right)} \quad (\bullet)$$

Cal que  $\frac{v_0^2}{gr} \leq 1$  per a que  $\arccos \left( \frac{v_0^2}{gr} \right)$  estigui definit. És a dir, cal  $v_0 \leq \sqrt{gr}$ . Però hem començat assumint que això es compleix. Per tant, la condició  $(\bullet)$  està ben definida.