

5P

Versió 1.3

Cinemàtica del sòlid rígid 3D
(CSR 3D)

Lluís Ros

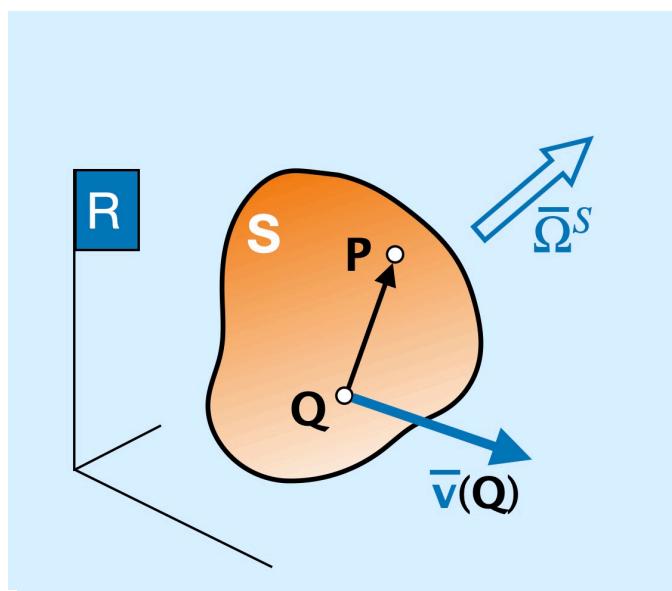
<https://luisros.github.io/mecanica>

Recordatori

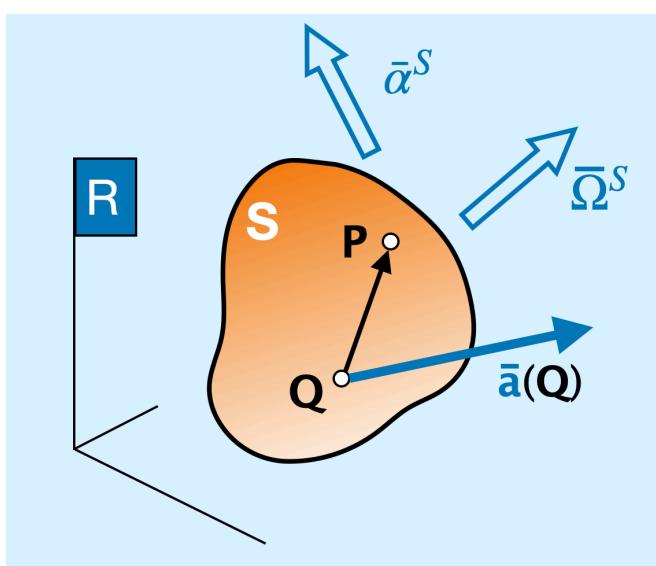
Cinemàtica del sòlid rígid (CSR)

Com que tots els vectors i derivades són en la referència R, hem omès el subíndex R per alleugerir la notació
 (al formulari s'ha fet el mateix)

$$\bar{v}(P) = \bar{v}(Q) + \bar{\Omega}^S \times \bar{QP}$$



$$\bar{a}(P) = \bar{a}(Q) + \bar{\Omega}^S \times (\bar{\Omega}^S \times \bar{QP}) + \bar{\alpha}^S \times \bar{QP} \quad \left. = \frac{d\bar{\Omega}^S}{dt} \right|_R$$



Avui aplicarem les anteriors expressions per calcular velocitats i acceleracions de punts de sòlids rígids.

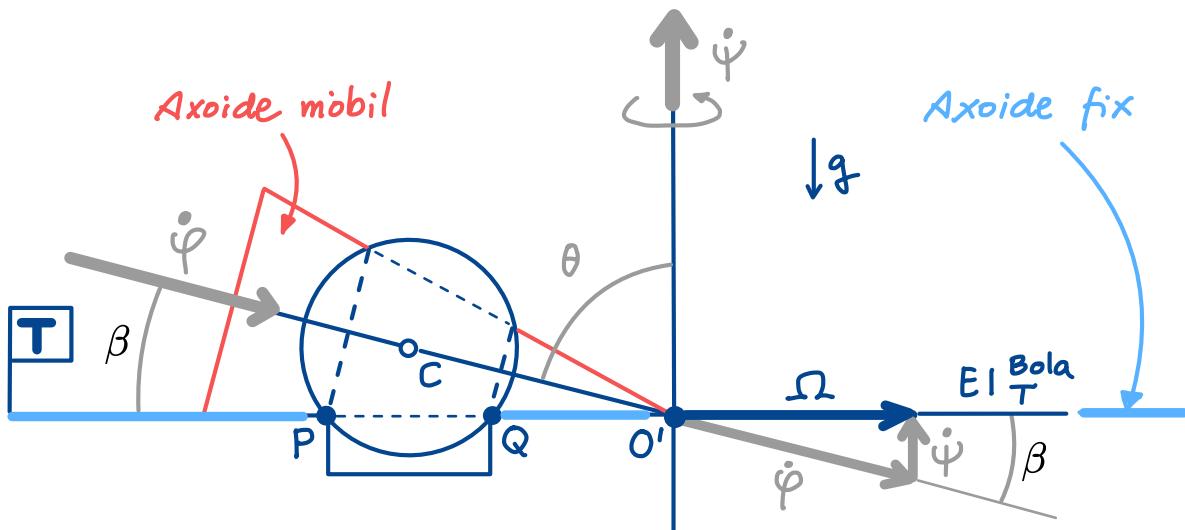
Començarem amb l'exercici de la bola rodolant sobre pista circular (pàgina següent), que ja vareu veure a teoria. Allí el vau treballar a nivell de velocitats, i nosaltres ho farem a nivell d'acceleracions.

Essència de l'argument vist a teoria

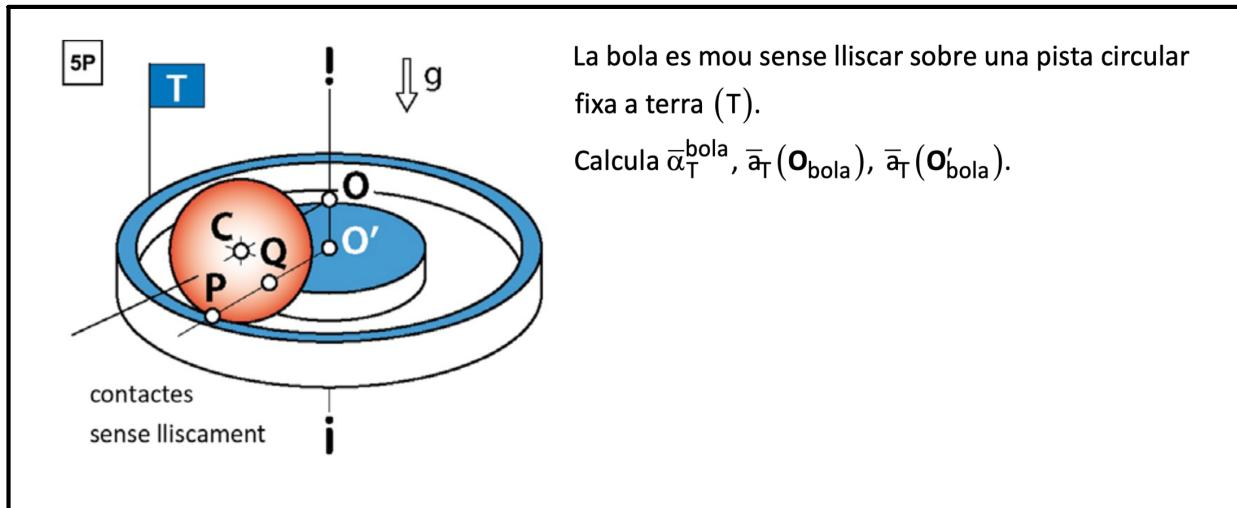
El moviment de la bola sembla complicat. Costa definir uns angles d'Euler que permetin explicar-lo perquè la bola no té cap simetria especial: d'entrada no veiem com podem triar un eix "phipunt" de rotació pròpia (com al giroscopi o a la baldufa).

La solució passa per observar com evoluciona l'eix instantani de la bola al llarg del temps. El conjunt de rectes de la "referència bola" que en algun moment han sigut eix instantani és l'**axoide mòbil** (un con d'obertura β). El conjunt de rectes de la "referència terra" que en algun moment han sigut eix instantani és l'**axoide fix** (el pla horitzontal que passa per O' , vist com a con d'obertura 90°). Ara: l'axoide mòbil rodola sobre el fix al llarg del temps, i es pot veure com una **baldufa caiguda!** El seu eix de simetria ens proporciona l'eix phipunt que volíem, i ara entenem el moviment de la bola. És com el d'una baldufa amb nutació θ constant.

Finalment, veiem que els vectors phipunt i psipunt no són independents: sumats han de donar un vector horitzontal de valor Ω , que és la velocitat angular de la bola respecte T. La bola es mou amb un grau de llibertat, que podem associar a psipunt. Del dibuix queda clar que $\Omega = \text{psipunt} / \tan(\beta)$.



Passem a fer l'exercici, recordant en cada pas allò que s'ha fet a teoria.



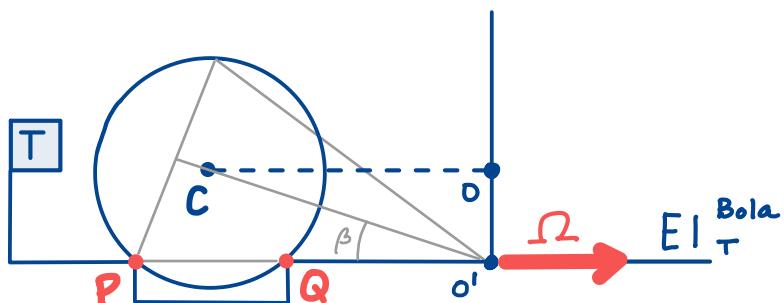
Per trobar $\bar{\alpha}_T^{\text{bola}}$ cal trobar $\bar{\Omega}_T^{\text{bola}}$ i derivar-la respecte el temps.
A teoria ja van calcular $\bar{\Omega}_T^{\text{bola}}$, però recordem com es feia:

$$\bar{\Omega}_T^{\text{bola}}$$

$$\underbrace{v(P) = v(Q) = 0}_{\Downarrow}$$

$$EI_T^{\text{bola}} = \text{---} \quad P \quad Q$$

$\bar{v}_{\text{llisc}} = \bar{\alpha}_T$



Per tant $\bar{\Omega}_T^{\text{bola}}$ ha de tenir la forma

$$\bar{\Omega}_T^{\text{bola}} = (\Rightarrow \Omega)^{\text{pdet}}$$

Axoide fix

Rectes del terra que en algun moment han sigut EI_T^{bola}

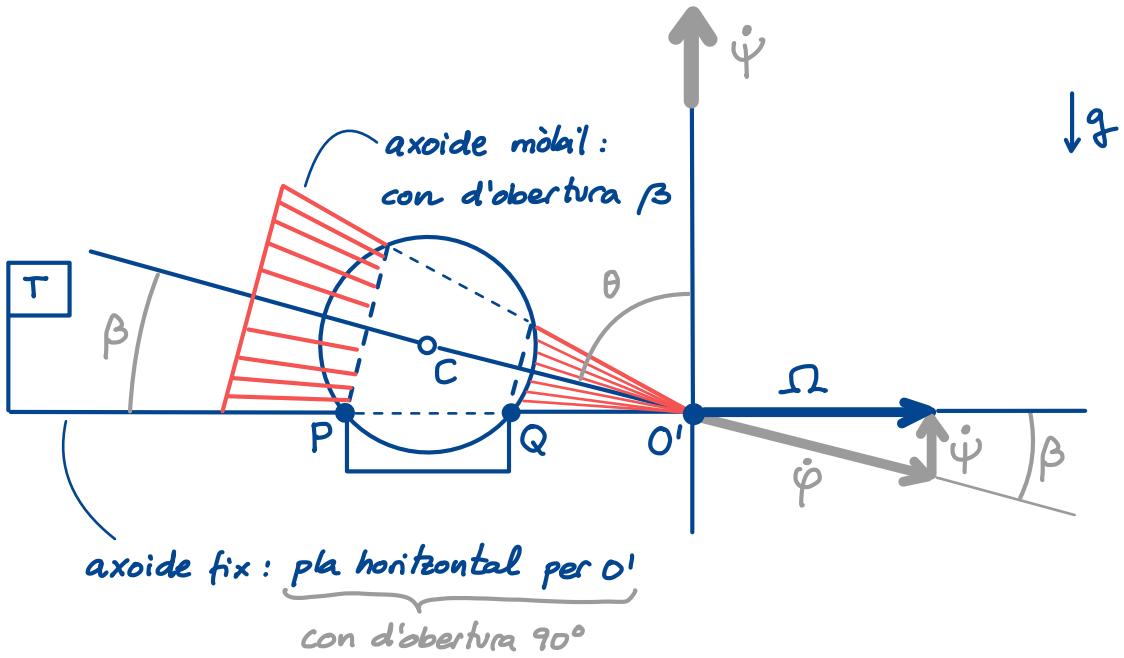
} con d'obertura 90°
(Pla horitz. per O')

Axoide móvil

Rectes de la bola que en algun moment han sigut EI_T^{bola}

} con d'obertura β

Dibuixem els axoides:



En cada instant 1 recta de l'ax. móbil està en contacte amb 1 recta del fix. \Rightarrow L'ax. móbil rodola sobre el fix!

Els punts de l'ax. móbil són fixos a la ref. bola.



Moviment bola resp. $T =$ Movim. ax. móbil resp. ax. fix.



Podem assimilar la bola a una **baldufa cònica caiguda** amb eix de simetria CO' i obertura β .



Podem veure $\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}}$ com suma d'una vel. angular de precessió ($\dot{\psi}$) més una de rotació pròpia ($\dot{\varphi}$):

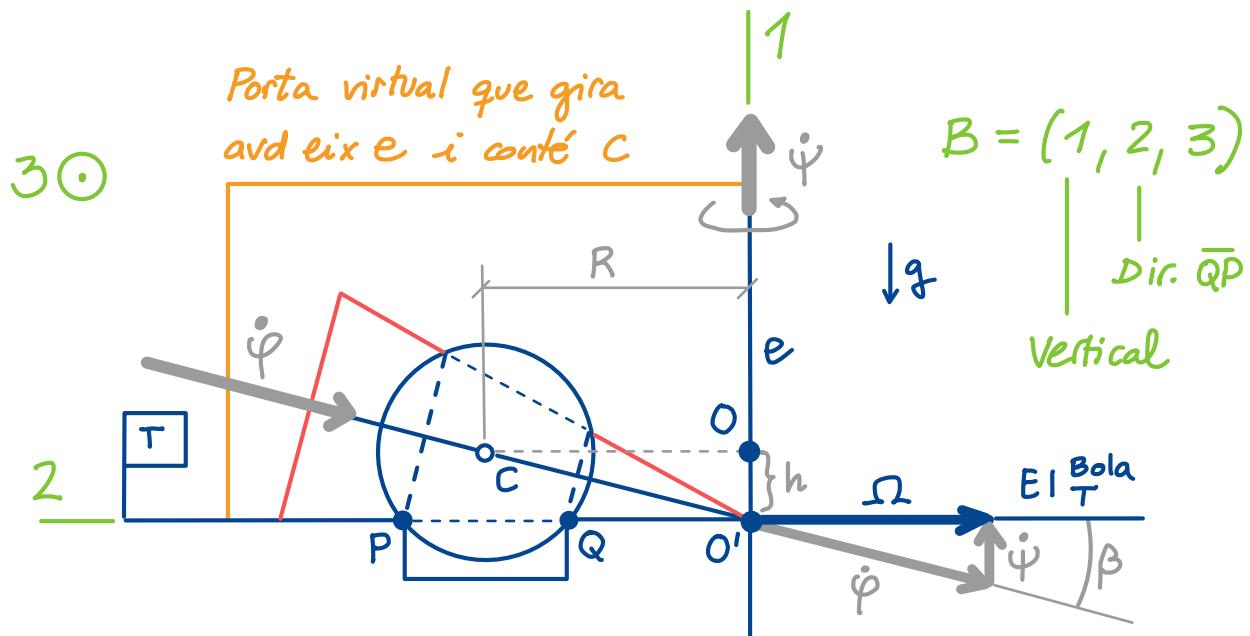
$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = \underbrace{(\uparrow \dot{\psi}) + (\Rightarrow \dot{\varphi})}_{\text{sumades han de donar } (\Rightarrow \Omega)}$$

sumades han de donar ($\Rightarrow \Omega$)

Igual que en una baldufa però amb $\bar{\theta} = 0$
perquè ara l'angle θ es 'ct.'

$(\dot{\psi})$ = vel. angular de precessió d'una porta virtual que gira avd eix e i conté sempre el punt C

$(\dot{\varphi})$ = vel. angular de rotació pròpia de la bola (vista com a baldufa) avd eix co'.



Finalment veiem:

2 maneres de calcular Ω

1 Utilitzant que CE Porta i CE Bola a la vegada:

$$\underbrace{\Omega \dot{\psi} R}_{\bar{v}_T(\text{C Porta})} = \underbrace{\Omega h}_{\bar{v}_T(\text{C Bola})} \Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{R}{h} \dot{\psi}}$$

2 Via el triangle de vel. angulars:

$$\boxed{\Omega = \frac{\dot{\psi}}{\tan \beta} = \frac{\dot{\psi}}{\frac{h}{R}} = \frac{R}{h} \dot{\psi}}$$



En conclusió:

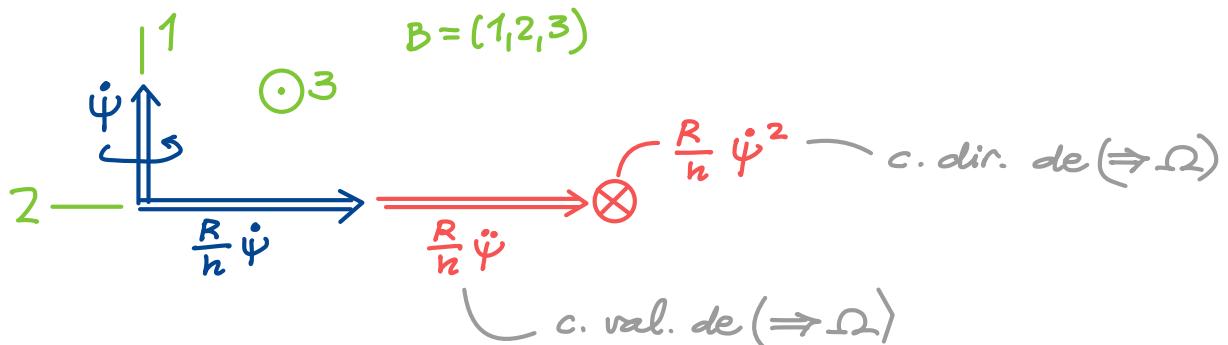
$$\boxed{\Omega_T^{\text{Bola}} = \left(\Rightarrow \frac{\Omega}{h} \dot{\psi} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R}{h} \dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix}_B}$$

VEC.
PEL·LI!

$$\bar{\alpha}_T^{Bola}$$

Cal derivar $\bar{\Omega}_T^{Bola}$ resp. t (geomètricament o analíticament)

Derivant geomètricament:



$$\bar{\alpha}_T^{Bola} = \left(\Rightarrow \frac{R}{n} \ddot{\psi} \right) + \left(\otimes \frac{R}{n} \dot{\psi}^2 \right) = \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{\frac{R}{n} \ddot{\psi}} \\ -\frac{R}{n} \dot{\psi}^2 \end{Bmatrix}_B$$

Derivant analíticament:

$$\left\{ \bar{\alpha}_T^{Bola} \right\}_B = \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{-\frac{R}{n} \ddot{\psi}} \\ -\frac{R}{n} \dot{\psi}^2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{-\frac{R}{n} \dot{\psi}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{-\frac{R}{n} \ddot{\psi}} \\ -\frac{R}{n} \dot{\psi}^2 \\ 0 \end{Bmatrix}_B$$

[Deriv. components de $\bar{\Omega}_T^{Bola}$] [$\bar{\Omega}_T^B$] [$\bar{\Omega}_T^{Bola}$]

$$\bar{\alpha}_T(O_{Bola})$$

A teoria ja vau calcular $\bar{v}_T(O_{Bola})$. Recordem-ho^(*):

$$\bar{v}_T(O_{Bola}) = (\odot \bar{\Omega}_T h) = (\odot R \dot{\psi}) \xleftarrow[\text{Dist. de } O_{Bola} \text{ a } EI_T^{Bola}]{\Omega = \frac{R}{n} \dot{\psi}}$$

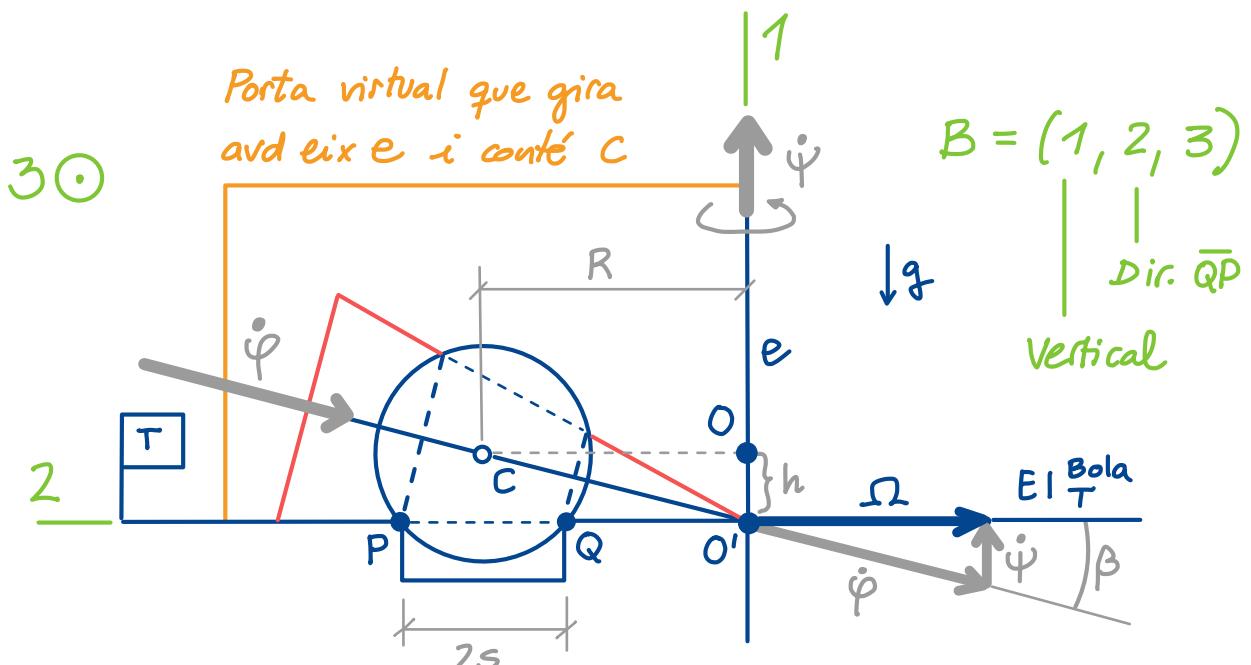
VEC.
FOTO!

(*) En detall, aquest càlcul és, aplicant CSR des de O'_{Bola} :

$$\bar{v}_T(O_{Bola}) = \underbrace{\bar{v}_T(O'_{Bola})}_{0} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Bola} \times \overline{O' O}}_{(\Rightarrow \frac{R}{n} \dot{\psi})} = (\odot R \dot{\psi})$$

Ara, per trobar $\ddot{\alpha}_T(O_{Bola})$ pots estem temptats de derivar $\dot{v}_T(O_{Bola})$ resp. el temps (geomètricament o analítica). Seria un error! Fixem-nos que $\odot R \dot{\psi}$ només és la velocitat de O_{Bola} en l'instant en que O_{Bola} passa pel punt més alt. Un picosegon + tard, O_{Bola} tindrà una vel. diferent, amb components $\odot, \downarrow, \rightarrow$, que no sabem quines seran. Per tant, $\odot R \dot{\psi}$ és un vector particularitat (o "foto") i no el podem derivar. Com calcularrem $\ddot{\alpha}_T(o)$, doncs? Aplicant CSR des de C, o des de O'. Fem-ho des de C:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_T(o) &= \underbrace{\ddot{\alpha}_T(C)}_A + \underbrace{\ddot{\alpha}_T^{Bola} \times \overline{CO}}_B + \underbrace{\overline{\Omega}_T^{Bola} \times (\overline{\Omega}_T^{Bola} \times \overline{CO})}_0 \quad \begin{matrix} \text{Aplicant CSR} \\ \text{des de } O' \text{ ag.} \\ \text{pq } \overline{\Omega}_T^{Bola} \parallel \overline{CO} \end{matrix} \\ &= \underbrace{(\odot \ddot{\psi} R)}_A + \underbrace{\left[\left(\Rightarrow \frac{R}{h} \ddot{\psi} \right) + \left(\vec{\otimes} \frac{R}{h} \dot{\psi}^2 \right) \right] \times (\rightarrow R)}_B = \quad \begin{matrix} \text{ferme no} \\ \text{s'anul·laria} \\ \text{i surt un} \\ \text{xic + laborios} \end{matrix} \\ &= (\odot \ddot{\psi} R) + (\rightarrow \ddot{\psi}^2 R) + (\downarrow \frac{R^2 \dot{\psi}^2}{h}) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{R^2 \dot{\psi}^2}{h} \\ -\dot{\psi}^2 R \\ \ddot{\psi} R \end{array} \right\}_B \end{aligned}$$



$\bar{a}_T(O'Bola)$

$O'Bola$ és l'extrem de l'axoide mòbil, que roman fix a T

$$\text{Per tant } \bar{v}_T(O'Bola) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \bar{a}_T(O'Bola) = 0$$

Així doncs $O'Bola = O'Terra$

$\bar{a}_T(P_{Bola})$

Això no ens ho demanen però ho fem per practicar.

Apliquem CSR des de O' , utilitzant dibuix anterior:

$$\begin{aligned}
 \boxed{\bar{a}_T(P_{Bola})} &= \underbrace{\bar{a}_T(O'Bola)}_{\bar{o}} + \bar{\alpha}_T^{Bola} \times \bar{O}'P + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Bola} \times (\bar{\Omega}_T^{Bola} \times \bar{O}'P)}_{\bar{o}, \text{ ja que } \bar{O}'P \parallel \bar{\Omega}_T^{Bola}} = \\
 &= \boxed{\left[\left(\Rightarrow \frac{\ddot{\psi}_R}{h} \right) + \left(\otimes \frac{R}{h} \dot{\psi}^2 \right) \right] \times \left[\leftarrow (R+S) \right] = \boxed{\uparrow \left(\frac{R(R+S)}{h} \dot{\psi}^2 \right)}}$$

5P

L'eix del corró està articulat a una forquilla que gira amb $\dot{\psi}$ constant respecte del terra (T). El corró manté contacte amb el terra i no llisca a P .
Determina l'EIRL_T^{corró}, i calcula $\bar{v}_T(Q)$, $\bar{a}_T(P)$.

$|\overline{OQ}| = R$

$|\overline{PQ}| = 1.5R$

Afegir-ho

Solució:

Pàg. següent.

Observacions:

En la versió original d'aquest problema, el corró s'interpreta com una mola abrasiva que llima el terra sense lliscar a P . Mantindrem aquesta interpretació i al corró l'anomenarem "mola".

En la solució he suposat:

$$|\overline{OQ}| = R$$

$$|\overline{PQ}| = 1.5R$$

Important:

Com que ens diuen que la mola manté contacte amb el terra, l'angle entre l'eix de la mola i la forquilla es manté constant. Així doncs, eix i forquilla es poden veure com un únic sòlid si es vol.

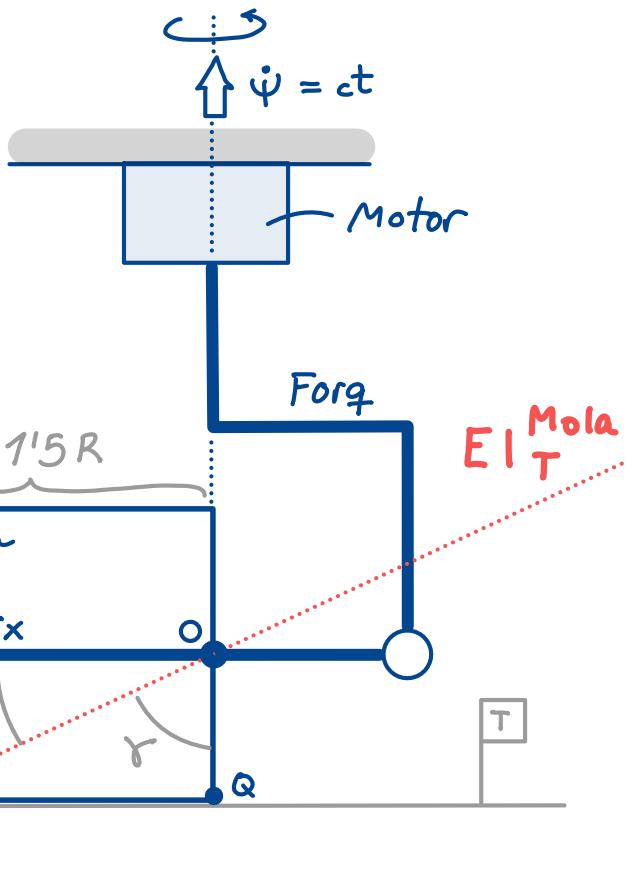
EI_T^{Mola} i axoides

Sist. amb 1 GL, que podem associar a $\dot{\psi}$.

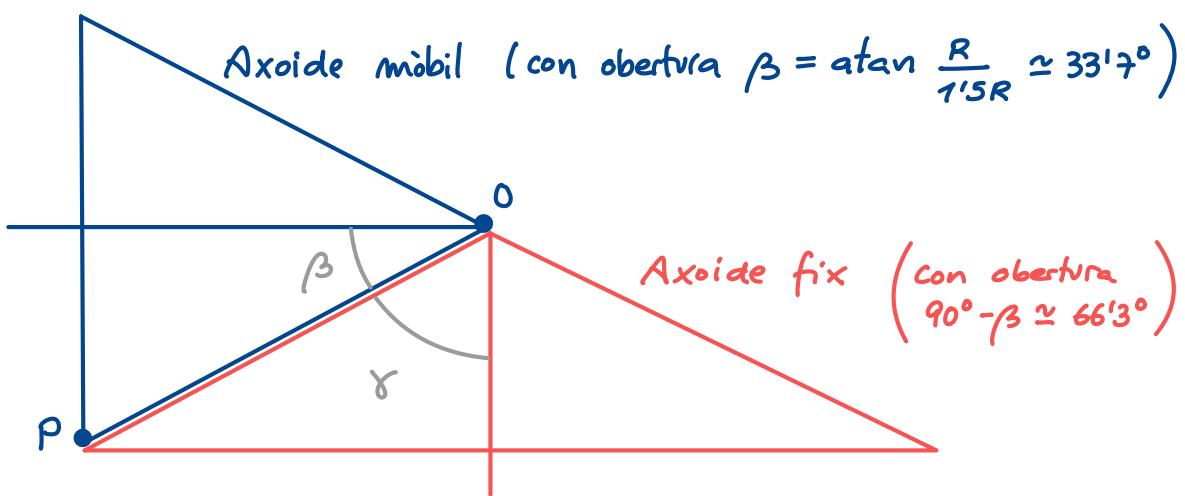
$$\bar{v}_T(P_{\text{Mola}}) = \bar{0}$$

$$v_T(O_{\text{Mola}}) = \bar{0}$$

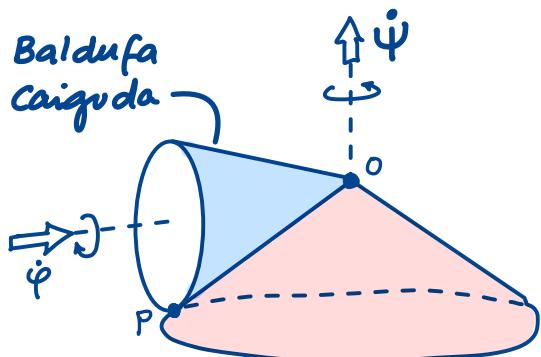
$$EI_T^{\text{Mola}} = \text{recta } OP$$



Q llisca necessàriament pq no es sobre EI_T^{Mola} !



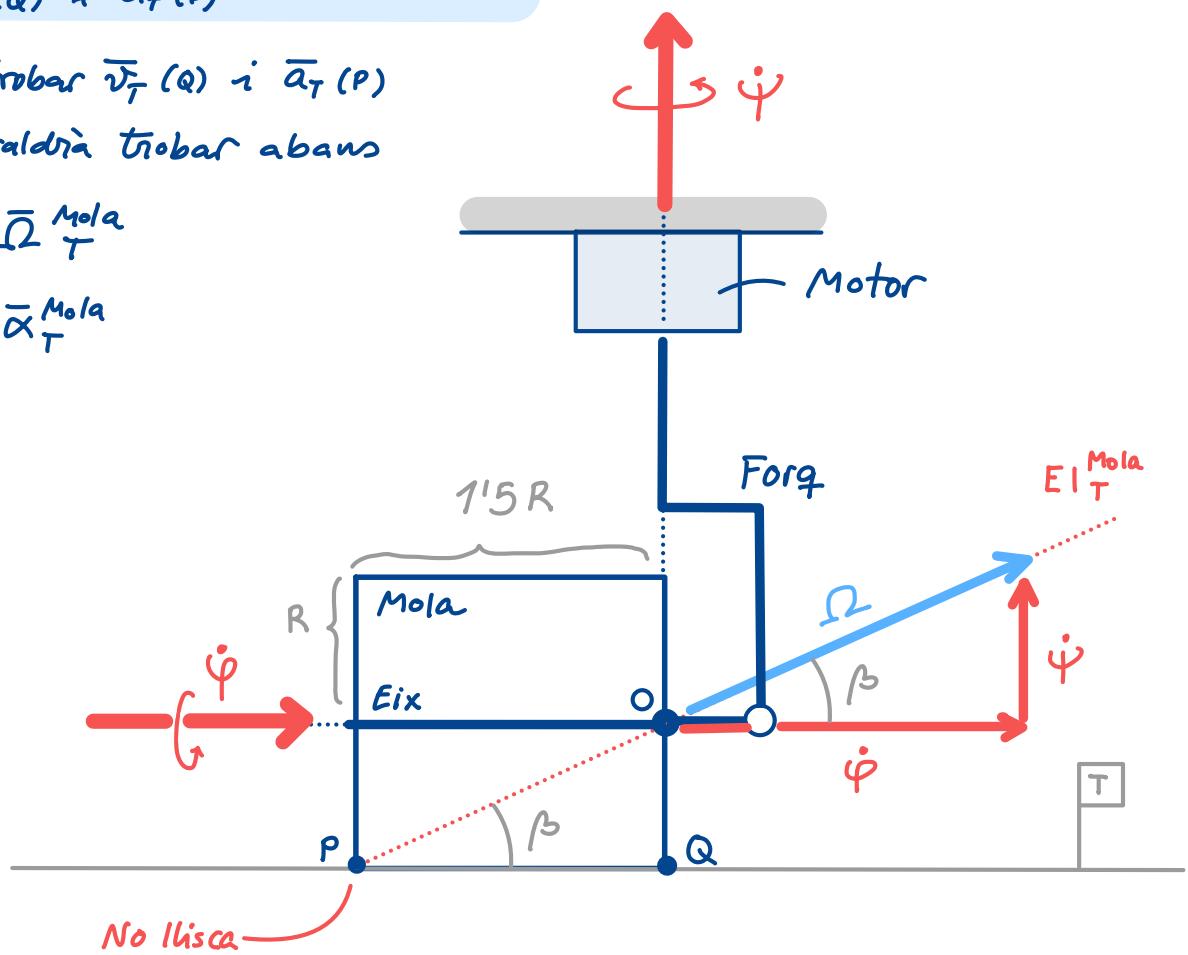
Axoides en 3D →



$\bar{v}_T(Q)$ i $\bar{a}_T(P)$

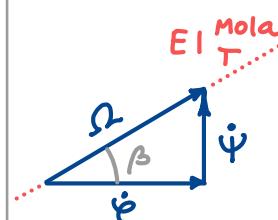
Per trobar $\bar{v}_T(Q)$ i $\bar{a}_T(P)$
eus caldrà trobar abans

- $\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}$
- $\bar{\alpha}_T^{\text{Mola}}$



$\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} &= \bar{\Omega}_{Eix}^{\text{Mola}} + \cancel{\bar{\Omega}_{Forq}^{Eix}} + \bar{\Omega}_T^{\text{Forq}} = \\ &= (\Rightarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \dot{\psi}) = (\Rightarrow 1.5 \dot{\varphi}) + (\uparrow \dot{\psi}) \end{aligned}$$



$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\psi}}{\tan \beta} = \frac{\dot{\psi}}{\frac{R}{1.5R}} = 1.5 \dot{\psi}$$

Posem $\dot{\varphi}$ est $\dot{\psi}$
(i no a l'inrevés)
perquè $\dot{\psi}$ és la
variable controlada

$\bar{\alpha}_T^{\text{Mola}}$

$$\bar{\alpha}_T^{\text{Mola}} = \left. \frac{d\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}}{dt} \right|_T = (\uparrow \dot{\psi}) \times (\Rightarrow 1.5 \dot{\varphi}) = (\vec{\otimes} 1.5 \dot{\psi}^2)$$

Derivem geomètricament tenint en compte que $\dot{\psi} = ct$ | $(\Rightarrow 1.5 \dot{\varphi})$ solo té canvi de dir.
 $(\uparrow \dot{\psi})$ vector ct!

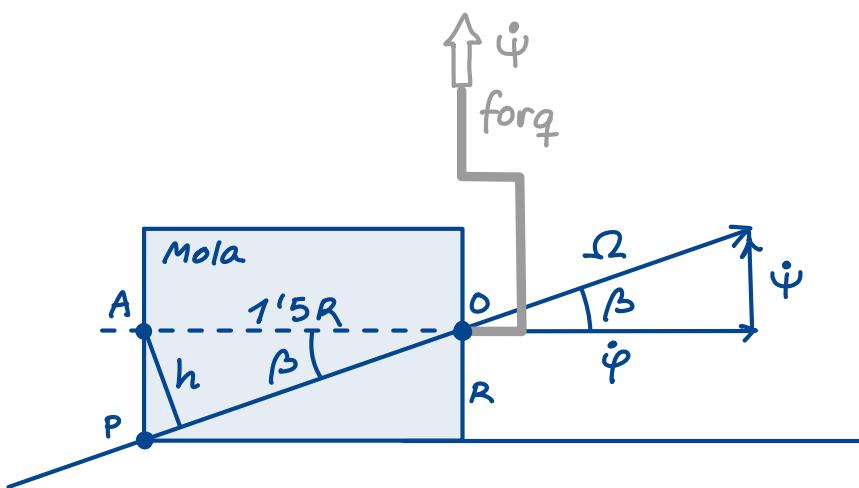
Alternativa per calcular $\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}$ (+ llarga)

En analogia a l'exercici previ de la bola, $\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}$ també es pot obtenir imposant $\bar{v}_T(A_{\text{Mola}}) = \bar{v}_T(A_{\text{Forq}})$:

$$\odot \underbrace{\Omega \frac{1'5R \sin \beta}{h}}_{\bar{v}_T(A_{\text{Mola}})} = \odot \underbrace{\dot{\psi} 1'5R}_{\bar{v}_T(A_{\text{Forq}})}$$

↓

$$\Omega = \frac{\dot{\psi}}{\sin \beta} \Rightarrow \bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = \left(\Rightarrow \frac{\dot{\psi}}{\sin \beta} \right)$$



Expressem $\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}$ en components \rightarrow i \uparrow per comparar amb el resultat obtingut prèviament:

$$\begin{aligned} \boxed{\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}}} &= (\Rightarrow \Omega \cos \beta) + (\uparrow \Omega \sin \beta) = \\ &= \left(\Rightarrow \frac{\dot{\psi}}{\tan \beta} \right) + (\uparrow \dot{\psi}) = \boxed{(\Rightarrow 1'5 \dot{\psi}) + (\uparrow \dot{\psi})} \end{aligned}$$

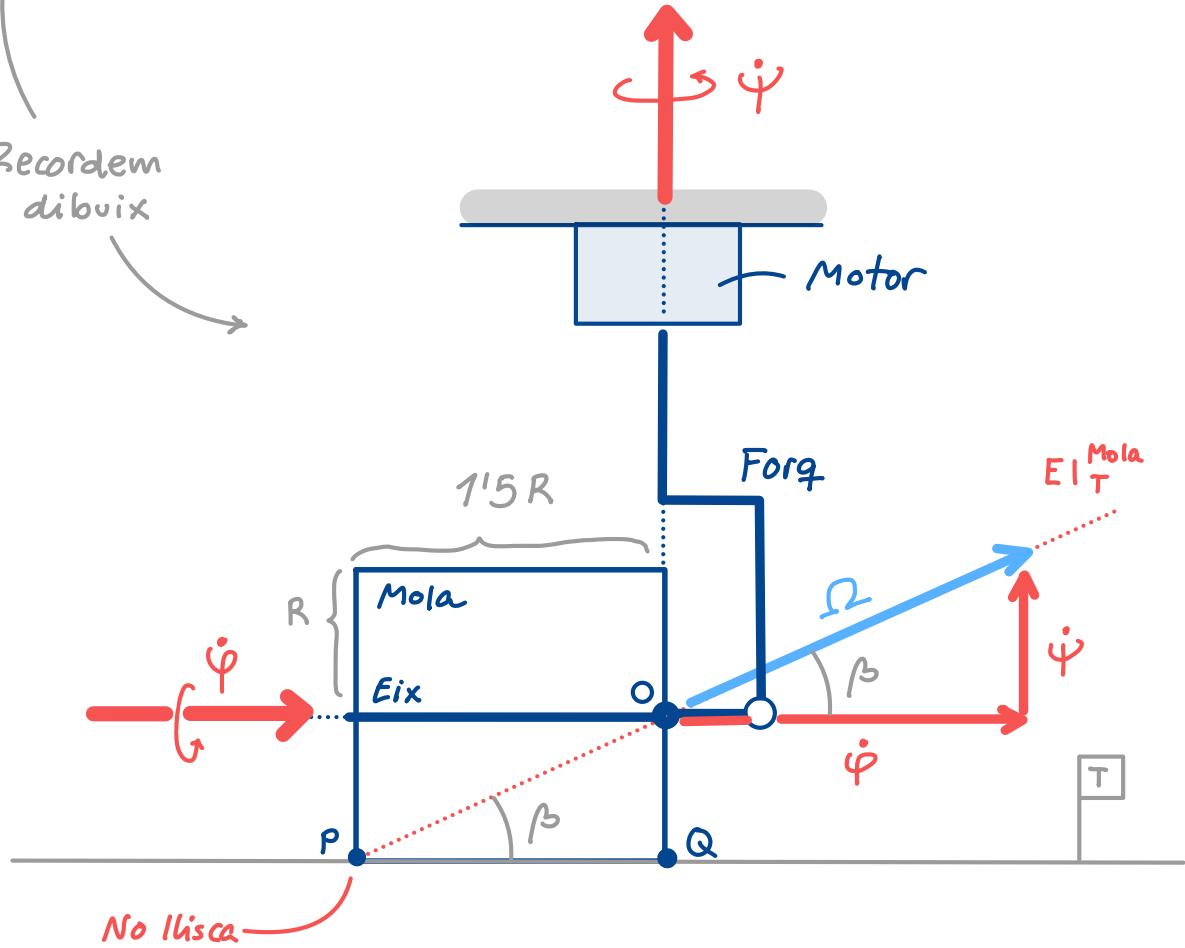
Quadra amb la d'abans

$$\bar{v}_T(Q)$$

$$\bar{v}_T(Q) = \underbrace{\bar{v}_T(0)}_0 + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} \times \bar{OQ}}_{(\Rightarrow 1'5\dot{\varphi} + \uparrow\dot{\psi}) \times (\downarrow R)} = \otimes 1'5\dot{\varphi}R$$

CLARAMENT
Q LLISCA!

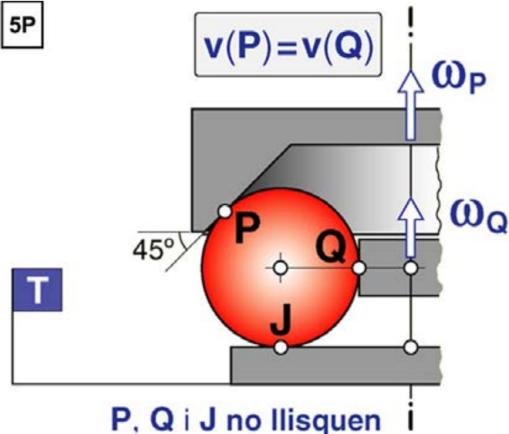
Recordem
dibuix



$$\bar{a}_T(P)$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_T(P) &= \underbrace{\bar{a}_T(0)}_0 + \underbrace{\bar{\alpha}_T^{\text{Mola}} \times \bar{OP} + \bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} \times (\bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} \times \bar{OP})}_{\text{O PQ } \bar{\Omega}_T^{\text{Mola}} \text{ es } \parallel \bar{OP}} = \\ &= (\otimes 1'5\dot{\varphi}^2) \times [(\downarrow R) + (\leftarrow 1'5R)] = \\ &= (\leftarrow 1'5\dot{\varphi}^2R) + (\uparrow 2'25\dot{\varphi}^2R) = \begin{Bmatrix} -1'5\dot{\varphi}^2R \\ 2'25\dot{\varphi}^2R \\ 0 \end{Bmatrix}_B\end{aligned}$$

5P



La bola manté contacte sense lliscar amb el terra, amb un rotor i amb un casquet que giren amb ω_Q i ω_P , respectivament, respecte del terra (T).

Els punts P i Q tenen la mateixa velocitat resp. T .

Determina l'EIRL $_{\text{T}}^{\text{bola}}$.

] Afegir

$$\bar{v}_T(P) = \bar{v}_T(Q) \Rightarrow \text{recta } QP \text{ és } \parallel \text{ a } EI_T^{\text{Bola}}$$

Ha de ser així perquè quan dos punts P i Q diferents tenen igual velocitat, tenim:

$$\cancel{\bar{v}_T(P)} = \cancel{\bar{v}_T(Q)} + \bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} \times \overline{QP}$$



$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} \times \overline{QP} = 0$$



$$\overline{QP} \parallel \bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} \quad (\text{són paral·lels})$$

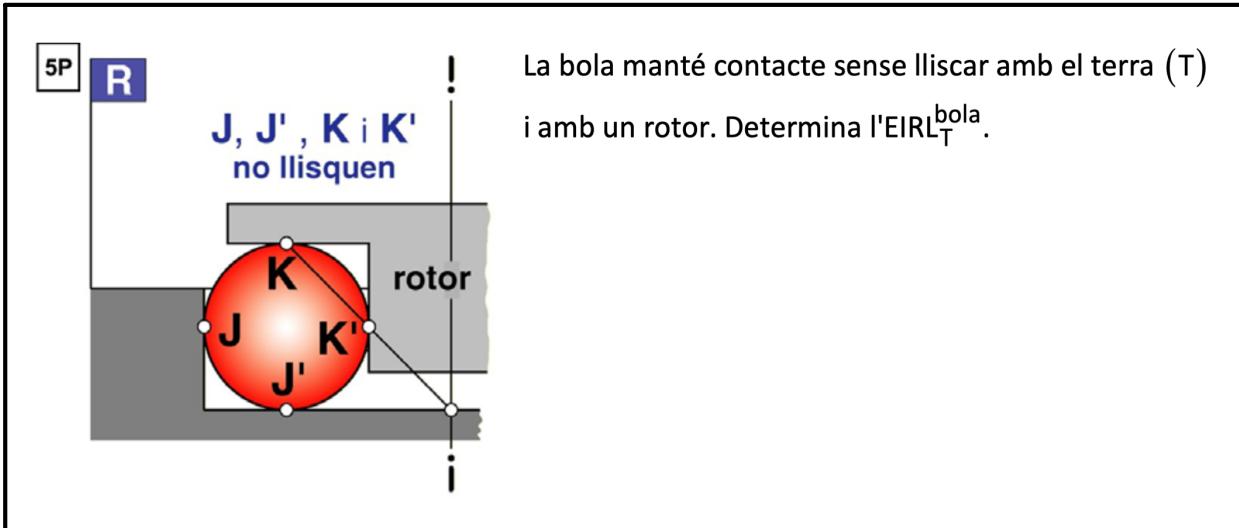
(i l'eix instantani sempre és \parallel a $\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}}$)

Per altra banda, $\bar{v}_T(J_{\text{Bola}}) = \bar{0} \Rightarrow J_{\text{Bola}}$ és un punt de velocitat mínima de la bola $\Rightarrow EI_T^{\text{Bola}}$ necessàriament passa per J_{Bola} .

Per tant

EI_T^{Bola} és una recta \parallel a \overline{PQ} passant per J

Bola amb 4 punts de no lliscament



En principi, sembla evident que

$$EI_T^{\text{Bola}} = \text{recta } JJ'$$

Però això vol dir que les vel. de K i K' són iguals^(*)

$$\bar{v}_R(K) = \bar{v}_R(K') = \odot v$$

Per altra banda, el rotor impulsa K i K' amb velocitats diferents

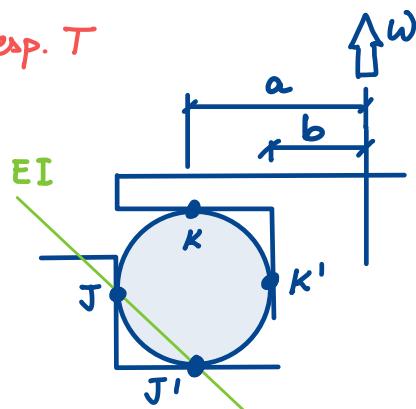
$$\bar{v}_R(K) = \odot \omega \cdot a$$

del rotor resp. T

$$\bar{v}_R(K') = \odot \omega \cdot b$$

Només tindrem

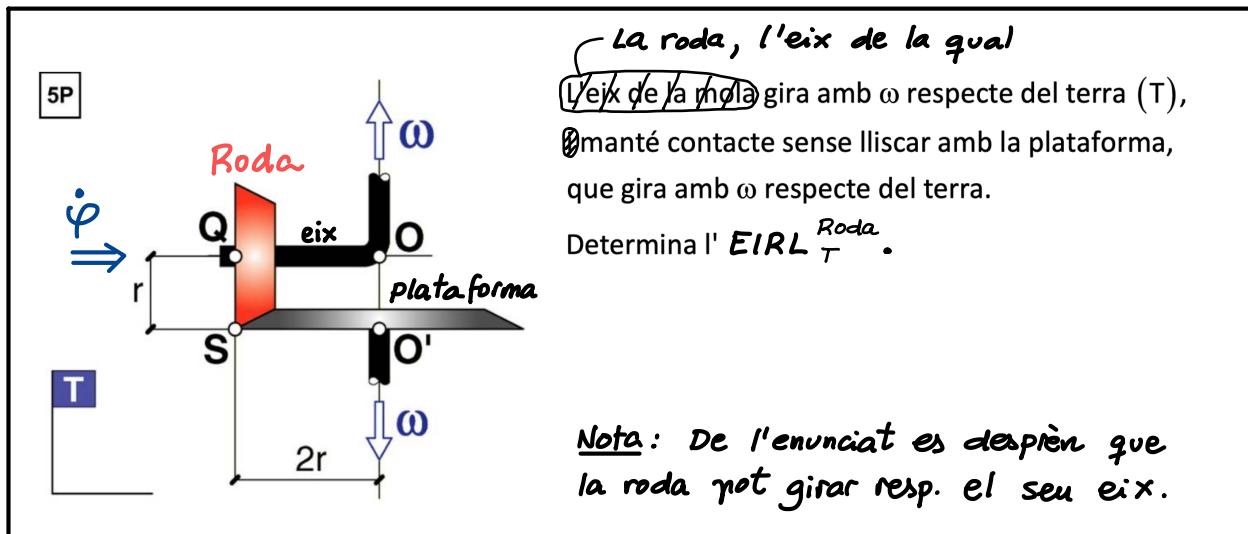
$$\bar{v}_R(K) = \bar{v}_R(K')$$



quan $\omega = 0$, altresment hi hauria lliscament a K o K'. Però si $\omega = 0$, el sistema Bola - Rotor estarà parat, i l'EI no estarà definit.

(*) Ja que són $a =$ distància de EI_T^{Bola}

Roda - Plataforma



Va bé pensar que roda i plataforma són rodets dentats.

O és un punt de l'eix però també de la roda !

$$\bar{v}_T(O_{Roda}) = \bar{o} \Rightarrow EI_T^{Roda} \text{ passa per } O, \text{ i } \bar{v}_{llisc} = \bar{o}.$$

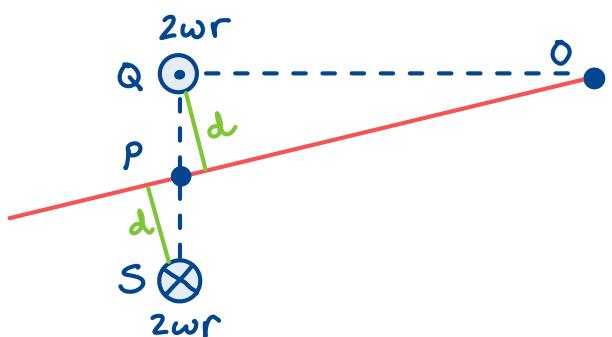
$$\bar{\Omega}_T^{Roda} = \bar{\Omega}_{Brag}^{Roda} + \bar{\Omega}_T^{Brag} = (\Rightarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \omega)$$

pdet (depèn d' ω)
 dada
 $\Rightarrow \bar{\Omega}_T^{Roda}$ és en el pla del dibuix

Ergo EI_T^{Roda} passa per O i E pla del dibuix.

$$\begin{aligned} \bar{v}_T(Q) &= \odot 2wr \\ \bar{v}_T(S) &= \otimes 2wr \end{aligned} \} \Rightarrow EI_T^{Roda} \text{ passa per P}$$

Punt mig entre Q i S



Si EI passés +
amunt o avall de
P les celeritats de Q
i S serien \neq !

Resp: $EI_T^{Roda} = \text{recta OP}$

Solució alternativa

La primera part és com abans: veiem ràpidament que EI_T^{Roda} passa per O i com que

$$\bar{\Omega}_T^{Roda} = (\Rightarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \omega)$$

deduïm que EI_T^{Roda} és en el pla del dibuix. Per trobar la dir. d' EI_T^{Roda} busquem $\dot{\varphi}$:

Per trobar $\dot{\varphi}$

(1)	Calculem $\bar{v}_T(Q)$ amb CSR des de O
(2)	" " $\bar{v}_T(S)$ " " " " O'
(3)	" " $\bar{v}_T(Q)$ " " " " S
(4)	Igualem (1) = (3)

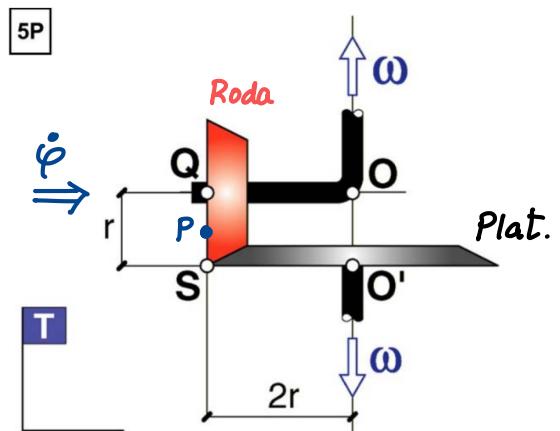
Fem-ho:

$$(1) \bar{v}_T(Q) = (\odot \omega 2r)$$

$$(2) \bar{v}_T(S) = (\otimes \omega 2r)$$

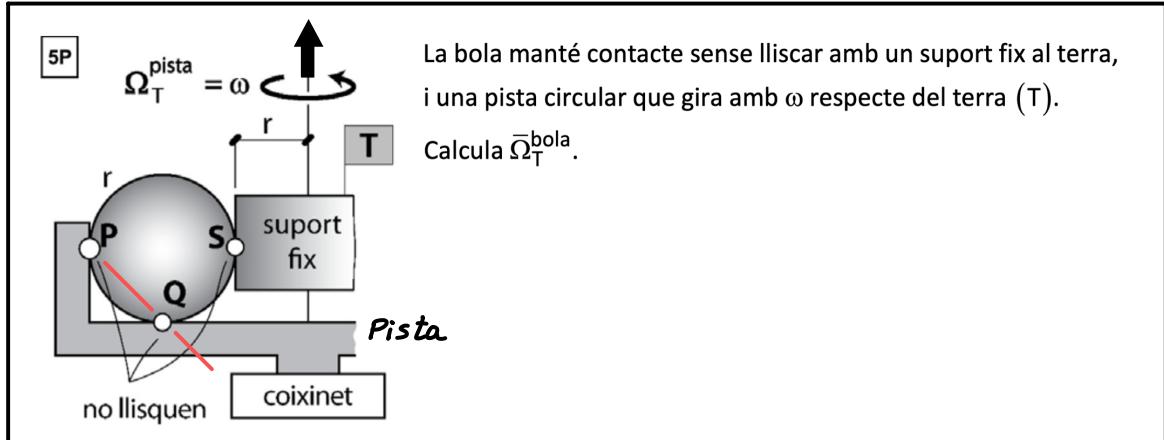
$$(3) \bar{v}_T(Q) = \bar{v}_T(S) + \bar{\Omega}_T^{Roda} \times \bar{SQ} = \\ = (\otimes \omega 2r) + [(\Rightarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \omega)] \times (\uparrow r) = \\ = (\otimes \omega 2r) + (\odot \dot{\varphi} r) = [\odot(\dot{\varphi} r - \omega 2r)]$$

$$(4) \omega 2r = \dot{\varphi} r - \omega 2r \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = 4\omega}$$



Per tant $\bar{\Omega}_T^{Roda} = (\Rightarrow 4\omega) + (\uparrow \omega)$. Vol dir que EI_T^{Roda} és una recta de pendent $\frac{1}{4}$ passant per O. És a dir, és la recta OP.

Bola contra suport fix



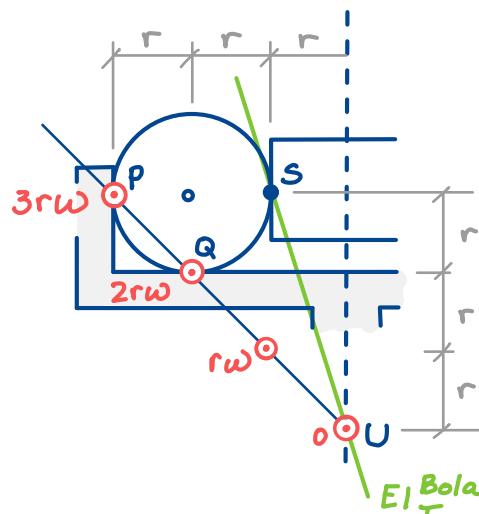
Solució 1: trobant EI_T^{Bola}

$$\bar{v}_T(s_{\text{Bola}}) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} EI_T^{\text{Bola}} \text{ passa per } S \\ \bar{v}_{EI} = \bar{0} \end{cases} (*)$$

Com que $\bar{\Omega}_T^{\text{pista}} = (\uparrow \omega)$ i P i Q no llisquen:

$$\bar{v}_T(P) = \odot 3rw$$

$$\bar{v}_T(Q) = \odot zrw$$



Com que són velocitats en dir. \perp al pla del dibuix, EI_T^{Bola} ha de ser sobre el pla del dibuix. A més, sobre la recta PQ hi ha d'haver una distribució lineal de velocitats, la qual cosa ens fa veure que $\bar{v}_T(u_{\text{Bola}}) = \bar{0}$. Ergo $EI_T^{\text{Bola}} = \text{recta SU}$. Això indica que $\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}}$ ha de ser de la forma

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = \lambda \left[(\uparrow 3) + (\leftarrow 1) \right] \quad (\text{paral·lela a } EI_T^{\text{bola}})$$

pdet

Ara, imosant $\bar{v}_T(P) = \bar{v}_T(S) + \bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} \times \bar{SP}$, tenim

$$(\odot 3rw) = \lambda \left[(\uparrow 3) + (\leftarrow 1) \right] \times (\leftarrow 2r)$$

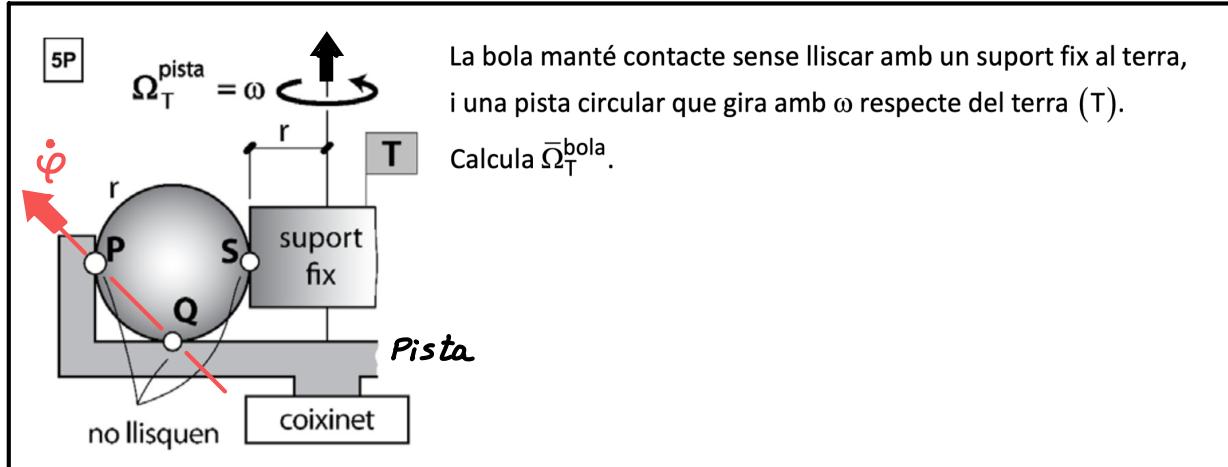
$$\odot 3rw = \odot 6\lambda r$$

$$\lambda = \frac{\omega}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\bar{\Omega}_T^{\text{Bola}} = \left(\uparrow \frac{3w}{2} \right) + \left(\leftarrow \frac{\omega}{2} \right)$$

(*) \bar{v}_{EI} és la vel. de lliscament al llarg de l' EI_T^{Bola}

Bola contra suport fix



Solució 2 via EI_T^{Pista}

$$EI_{Pista}^{Bola} = \text{recta } PQ \Rightarrow \bar{\Omega}_{Pista}^{Bola} = (\nwarrow \dot{\varphi})$$

Desconeguda encara (pdet)

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = \bar{\Omega}_{Pista}^{Bola} + \bar{\Omega}_T^{Pista} = (\nwarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \omega)$$

Dada

Imosem $\bar{v}_T(P_{Pista}) = \bar{v}_T(P_{Bola})$ per trobar $\dot{\varphi}$ efd ω :

$$\bar{v}_T(P_{Pista}) = (\odot \omega 3r)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_T(P_{Bola}) &= \bar{v}_T(S) + \bar{\Omega}_T^{Bola} \times \overline{SP} = \\ &= [(\nwarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \omega)] \times (\leftarrow 2r) = \\ &= \left[(\leftarrow \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{2}}) + (\uparrow \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{2}}) + (\uparrow \omega) \right] \times (\leftarrow 2r) = \\ &= \left(\odot \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{2}} \cdot 2r \right) + \left(\odot \omega 2r \right) = \left[\odot \left(\dot{\varphi} r \sqrt{2} + z \omega r \right) \right] \end{aligned}$$

$$\cancel{\omega 3r} = \cancel{\dot{\varphi} r \sqrt{2} + z \omega r} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{\bar{\Omega}_T^{Bola} = \left(\nwarrow \frac{\omega}{\sqrt{2}} \right) + \left(\uparrow \omega \right) =}$$

$$= \left(\leftarrow \frac{\omega}{z} \right) + \left(\uparrow \frac{\omega}{z} \right) + \left(\uparrow \omega \right) = \left(\leftarrow \frac{\omega}{z} \right) + \left(\uparrow 3 \frac{\omega}{z} \right)$$

Solució 3: Via CSR $Q \rightarrow P$, $Q \rightarrow S$

$$\bar{v}_T(P) = \odot 3r\omega$$

$$\bar{v}_T(S) = \odot 2r\omega$$

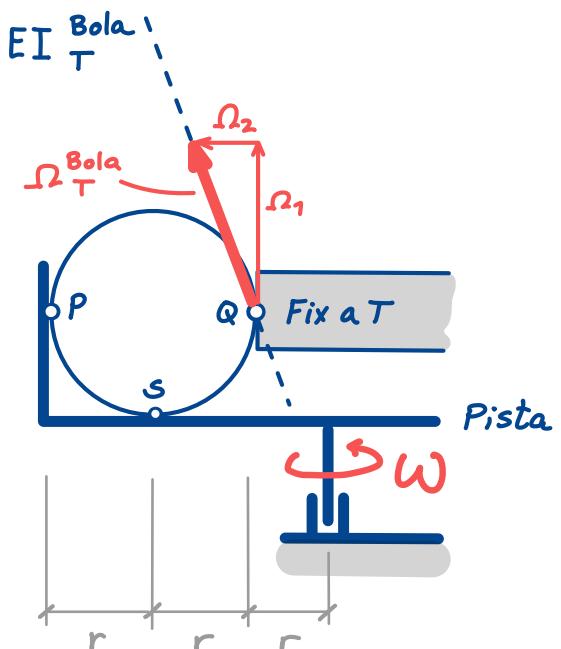
$$\bar{v}_T(Q) = \bar{0}$$

$$EI_T^{Bola} = \text{recta per } Q$$

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = (\uparrow \Omega_1) + (\leftarrow \Omega_2)$$

Ha de ser en el pla del dibuix
vist com són $\bar{v}_T(P)$ i $\bar{v}_T(S)$

Ω_1, Ω_2
pdet



$\bar{v}_T(P)$ calculada des de Q:

$$\odot 3r\omega = [(\uparrow \Omega_1) + (\leftarrow \Omega_2)] \times (\leftarrow 2r)$$

$$\odot 3r\omega = \odot 2\Omega_1 r$$

$$\Omega_1 = \frac{3}{2} \omega \quad (\text{I})$$

2 condicions
que deter-
minen Ω_1
i Ω_2

$\bar{v}_T(S)$ calculada des de Q:

$$\odot 2r\omega = [(\uparrow \Omega_1) + (\leftarrow \Omega_2)] \times [(\leftarrow r) + (\downarrow r)]$$

$$\odot 2r\omega = (\uparrow \Omega_1) \times (\leftarrow r) + (\leftarrow \Omega_2) \times (\downarrow r)$$

$$\odot 2r\omega = (\odot \Omega_1 r) + (\odot \Omega_2 r)$$

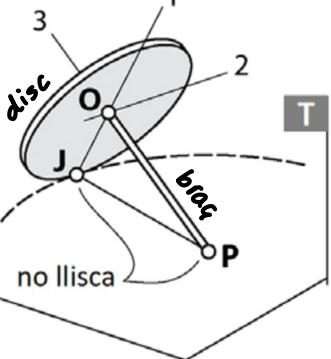
$$2r\cancel{\omega} = (\Omega_1 + \Omega_2)r$$

$$\Omega_2 = 2\omega - \Omega_1 \stackrel{(\text{I})}{=} 2\omega - \frac{3}{2}\omega = \frac{\omega}{2}$$

Per tant

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = \left(\uparrow \frac{3}{2}\omega \right) + \left(\leftarrow \frac{\omega}{2} \right)$$

5P $v_T(O)$ valor variable



El disc i el braç són solidaris, i mantenen contacte sense lliscar amb el terra (T). El centre del disc O té celeritat variable respecte del terra. Determina la direcció de $\bar{\alpha}_T^{\text{disc}}$.

Solució

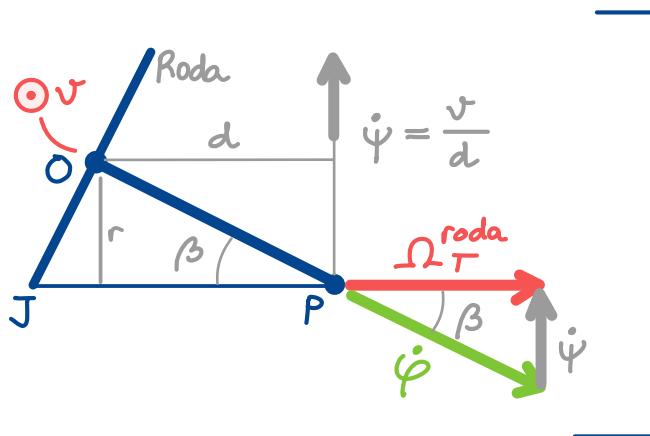
Sigui "roda" el sólid "disc + braç". $\bar{\Omega}_T^{\text{disc}} = \bar{\Omega}_T^{\text{roda}}$.

Clarament $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_T^{\text{roda}} = \text{recta } JP. \\ \bar{\Omega}_T^{\text{roda}} \text{ té la dir. de la recta } JP \end{array} \right.$

Sigui v la celeritat de O. Suposem inicialment que

$$\bar{v}_T(O) = (\odot v)$$

d'acord amb el seg. dibuix:



Podem veure la roda com una baldufa caiguda amb vel. angular:

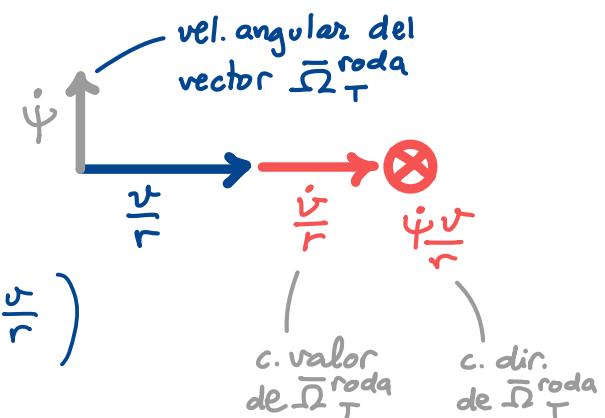
$$\bar{\Omega}_T^{\text{roda}} = (\Rightarrow \dot{\varphi}) + (\uparrow \dot{\psi})$$

Com que $\bar{\Omega}_T^{\text{roda}}$ té la dir de JP:

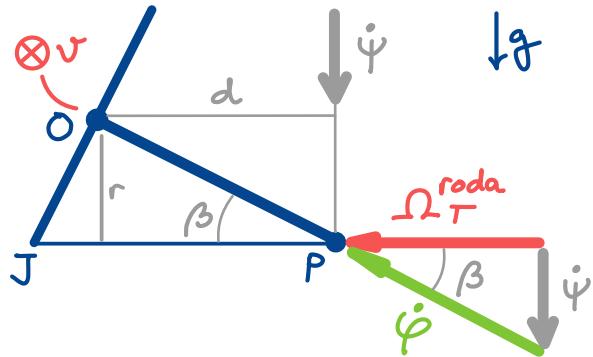
$$\bar{\Omega}_T^{\text{roda}} = (\Rightarrow \frac{v}{r})$$

i derivant-la geomètricament:

$$\bar{\alpha}_T^{\text{roda}} = (\Rightarrow \frac{\ddot{v}}{r}) + (\otimes \dot{\varphi} \frac{v}{r})$$



Si laquèssim assumit $\bar{v}_T(0) = (\otimes v)$, hauríem obtingut



$$\bar{\Omega}_T^{\text{roda}} = \left(\leftarrow \frac{v}{r} \right)$$

$$\bar{\alpha}_T^{\text{roda}} = \left(\leftarrow \frac{\dot{v}}{r} \right) + \left(\otimes \dot{\varphi} \frac{v}{r} \right)$$

En aquest cas la component \otimes es manté, però la \leftarrow , tot i ser del mateix valor, té direcció oposada a la del cas previ.

En resum podem dir que, en ambdós casos, $\bar{\alpha}_T^{\text{roda}}$ és horizontal (*) i amb component 2 negativa (d'acord amb la base de l'enunciat).

(*) Vol dir que es en el pla horitzontal (\perp a \bar{g})