

# 13P

Versió 1.0

## Teoremes vectorials III

Problemes globals 3D

Lluís Ros

<https://lluisros.github.io/mecanica>

## Pèndol anular giratori

(adaptat de P2, juliol 2016)

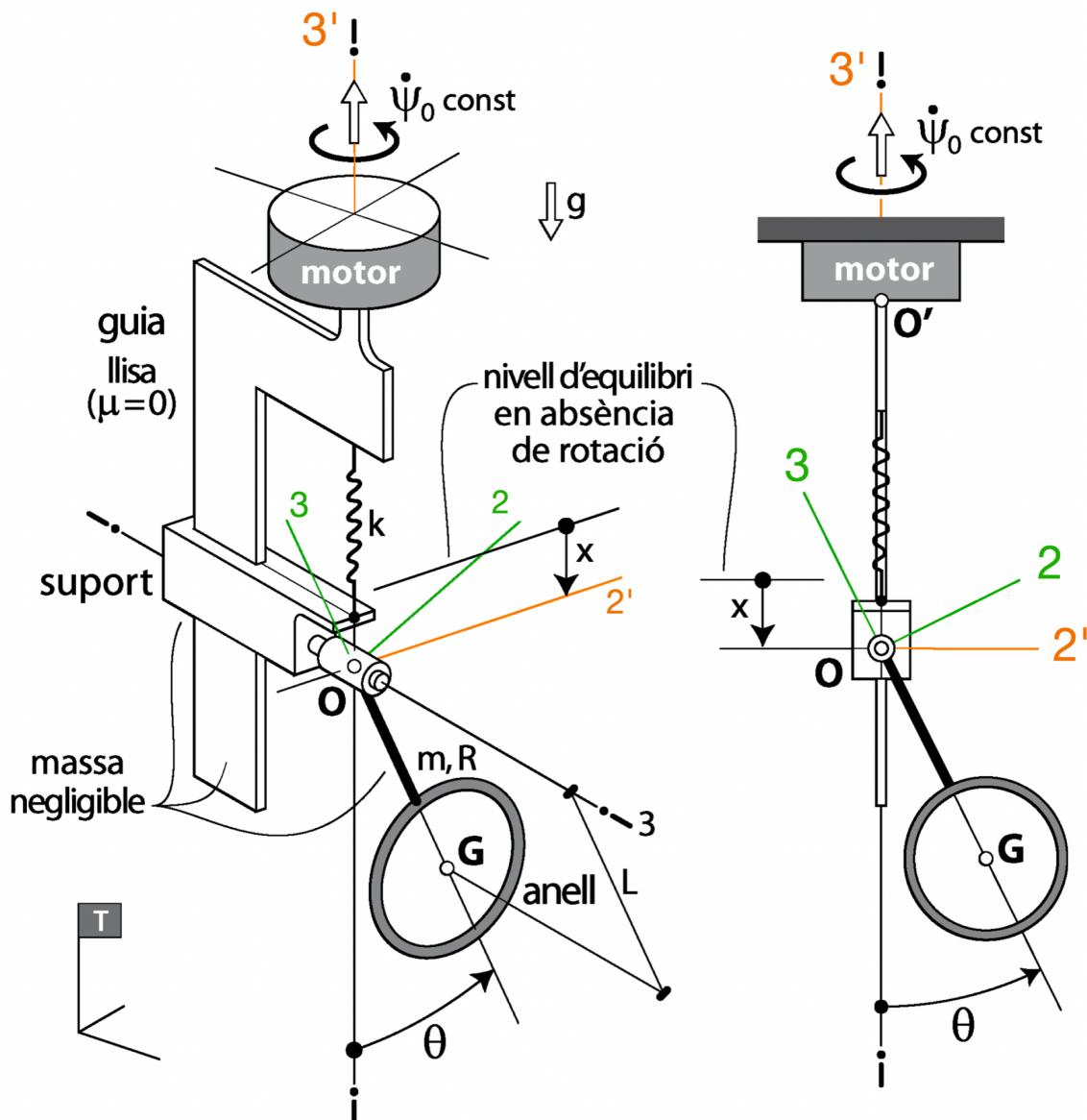
El pèndol, format per un anell homogeni de massa  $m$  i radi  $R$  i una barra de longitud  $(L-R)$ , està articulat al punt  $\mathbf{O}$  del suport, el qual llisca dins d'una guia llisa de secció rectangular. Entre suport i guia hi ha una molla lineal de constant  $k$ . Tot el conjunt es mou amb velocitat angular constant  $\dot{\psi}_0$  respecte al terra **sota l'accio d'un motor**.

Amb el motor aturat, la configuració  $(x=0, \theta=0)$  és d'equilibri.

Les masses de la barra, el suport i la guia, i les fricions associades a les articulacions són negligibles.

Determineu:

- Les equacions del moviment per a les coordenades  $x$  i  $\theta$ .
- El parell  $\Gamma$  que ha d'aplicar el motor per tal de mantenir  $\dot{\psi}_0$  constant.



## Novetat d'aquest problema

En els problemes que hem fet fins ara només hi surt 1 GL lliure, i l'equació del moviment, un cop obtinguda, es pot manipular fàcilment per aillar la variable d'acceleració en funció de les d'estat (obtenint expressions de la forma  $\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta})$ ). En aquest problema, però, hi ha 2 GL lliures ( $\ddot{x}, \ddot{\theta}$ ) i obtindrem 2 eqs. del moviment de la forma

$$\left. \begin{array}{l} f_1(\ddot{x}, \dot{x}, x, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) = 0 \\ f_2(\ddot{x}, \dot{x}, x, \ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Arribats en aquest punt, encara no podem atribuir cap de les equacions de (1) a una coordenada en particular, ja que  $\ddot{x}$  i  $\ddot{\theta}$  intervenen tant a (1a) com (1b). Tanmateix, com que (1) serà un sistema lineal en  $\ddot{x}$  i  $\ddot{\theta}$  (\*), podràem aillar  $\ddot{x}$  i  $\ddot{\theta}$  en funció de les variables d'estat  $x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}$ . Per aconseguir-ho cal rescriure (1) en la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_M \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \\ F_2(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$\leftarrow$  Matriu de coefs que multipliquen  $\ddot{x}$  i  $\ddot{\theta}$

i multiplicar (2) per  $M^{-1}$ :

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = M^{-1} \begin{Bmatrix} F_1(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \\ F_2(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

(\*) Quan formulem TQM o TMC sempre surten sistemes d'equacions que són lineals en les incògnites del problema. Ja ho hem vist.

L'eq. (3) proporciona  $\ddot{x}$  i  $\ddot{\theta}$  en funció de les variables d'estat. Aquesta equació dóna lloc a dues equacions diferencials escalars de la forma

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= F_1(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) & (4a) \\ \ddot{\theta} &= F_2(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) & (4b)\end{aligned}\quad \left. \right\} (4)$$

Ara sí que podem anomenar (4a) i (4b) com les equacions del moviment per a  $x$  i  $\theta$ , respectivament. Cal deixar clar, però, que les evolucions de  $x$  i de  $\theta$  no són independents. Cal integrar (4a) i (4b) conjuntament per obtenir  $x(t)$  i  $\theta(t)$  a partir d'unes condicions inicials

$$x(0), \dot{x}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)$$

En aquest curs és suficient que obtingueu (1). No cal arribar a (4).

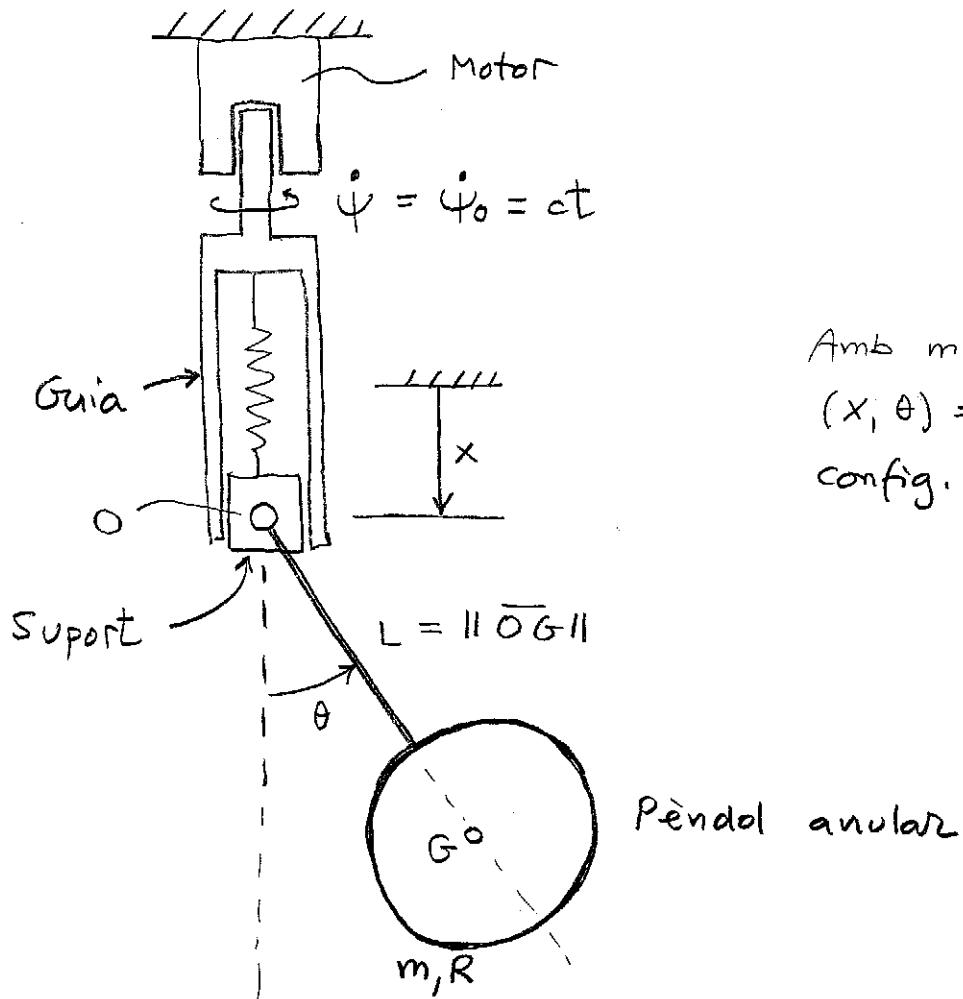
#### Nota pels curiosos

M s'anomena la matríg de masses del sistema. Es demostra que, en general, aquesta matríg:

- només pot dependre de les coordenades de configuració del problema ( $x$  i  $\theta$  en aquest cas)
- és sempre invertible (excepte en situacions molt especials).

A banda del que acabem de dir, el problema es pot abordar amb les tècniques que ja sabeu fins ara (anàlisi de GL, DGI, full de ruta, aplicació de TQM/TMC).

## Dibuix esquemàtic equivalent



### GL sistema

Sist amb

3 GL

$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}, \text{ forcat } (\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = ct) \Rightarrow \dot{\psi} \text{ és incògn.} \\ \dot{x}, \text{ lliure } \Rightarrow \ddot{x} \text{ és incògn.} \\ \dot{\theta}, \text{ lliure } \Rightarrow \ddot{\theta} \text{ és incògn.} \end{array} \right.$

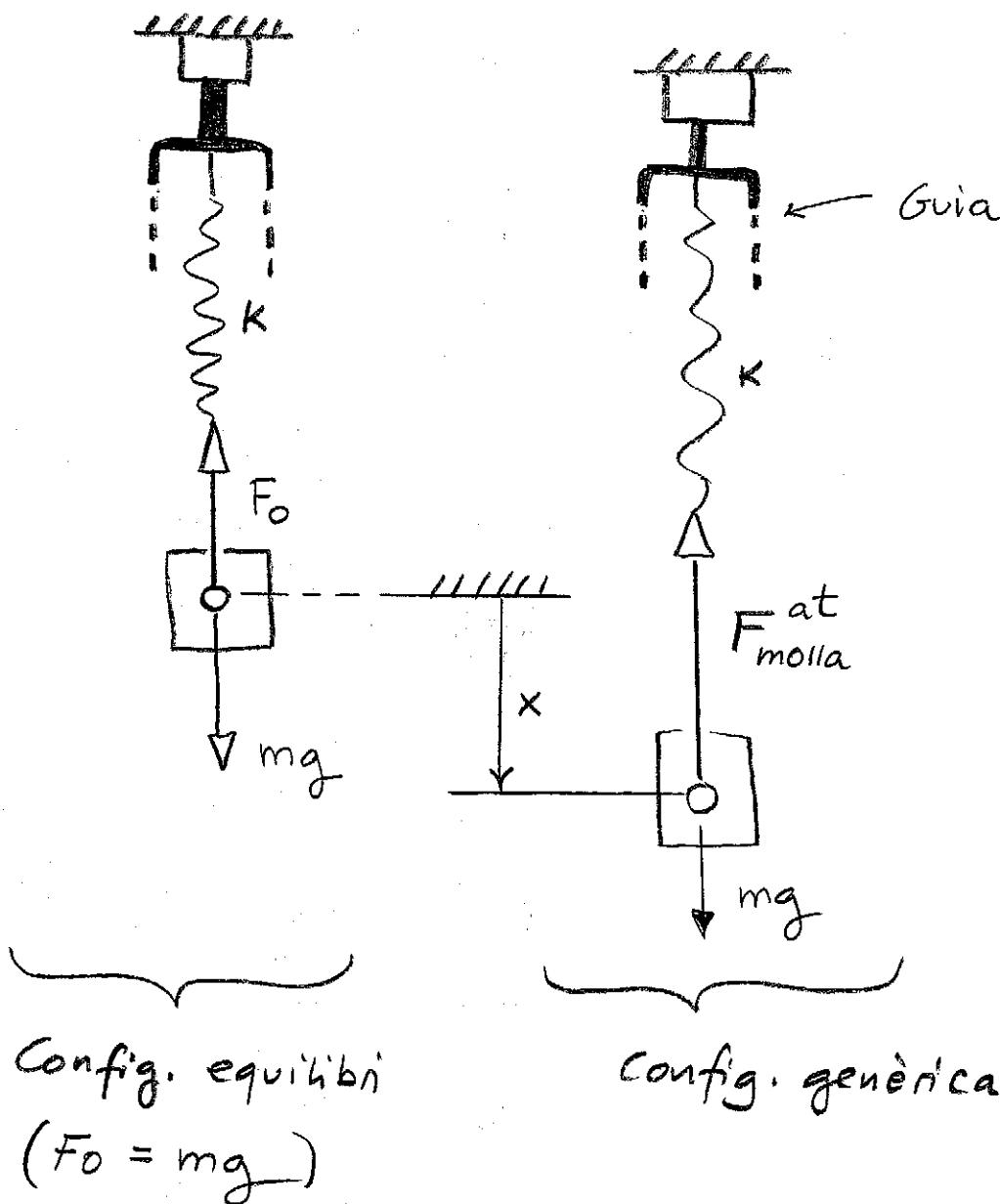


Les incògnites associades a GL són  $\dot{\psi}, \ddot{x}, \ddot{\theta}$

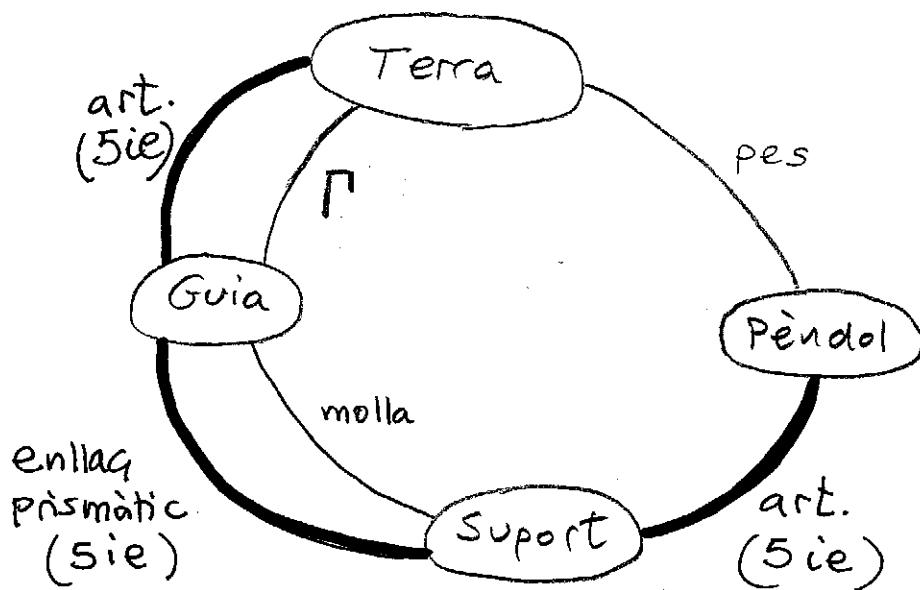
parell motor

## Força molla → suport

Com que la necessitarem, la formularem



$$\boxed{F_{\text{molla}}^{\text{at}} = F_0 + K \Delta g = mg + Kx}$$

DGI $\Gamma$  = parell motor

18 incògnites:

15 ie

 $\Gamma$  ( $\dot{\psi}$  és fregat i sabem  $\ddot{\psi} = 0$ ) } assoc. a GL
 $\ddot{x}$  (GL lliure) $\ddot{\theta}$  (GL lliure)
 Problema global  
 DETERMINAT (\*)

18 eqs:

3 sòlids .  $\frac{6 \text{ eqs}}{\text{sòlid}}$ 

(\*) Podrem determinar les 18 incògnites

Full ruta eqs. mov. coords  $x$  i  $\theta$

$x$  i  $\theta$  només afecten el movim. de  $\left\{ \begin{array}{l} \text{pèndol} \\ \text{suport} \end{array} \right.$

Mirem #incògn. sistemes q incloguin o pèndol o suport

Sist	incògn	#incògn.	Problema
pèndol	5 ie, $\ddot{x}, \ddot{\theta}$	7	IND.
pènd + suport	5 ie, $\ddot{x}, \ddot{\theta}$	7	IND.
pènd + sup + guia	5 ie, $\ddot{x}, \ddot{\theta}, \Pi$	8	IND.
suport	10 ie, $\ddot{x}$	11	IND.
sup + guia	10 ie, $\Pi, \ddot{x}$	12	IND.
pènd + guia	15 ie, $\Pi, \ddot{\theta}, \ddot{x}$	18	IND.

Cap sistema surt DETERMINAT  (\*)

Explorem aplicació de TQM / TMC als  
dos sistemes amb meus incògn:

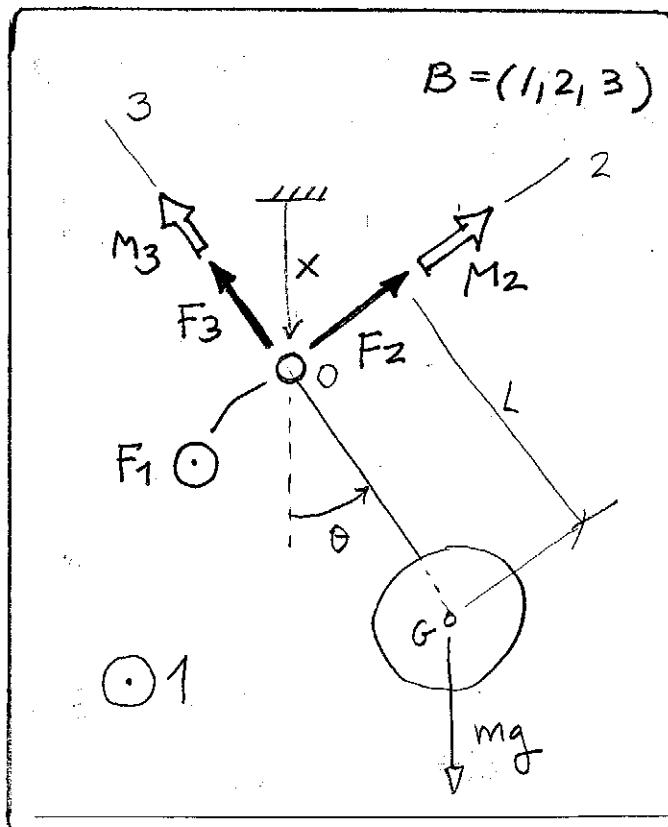
- Pèndol
- Pèndol + suport

← Encerclau-los al  
DGI per poder veure  
quines forces i moments  
els són externament  
aplicats (dibuixats a  
pàg. seg.) ↴

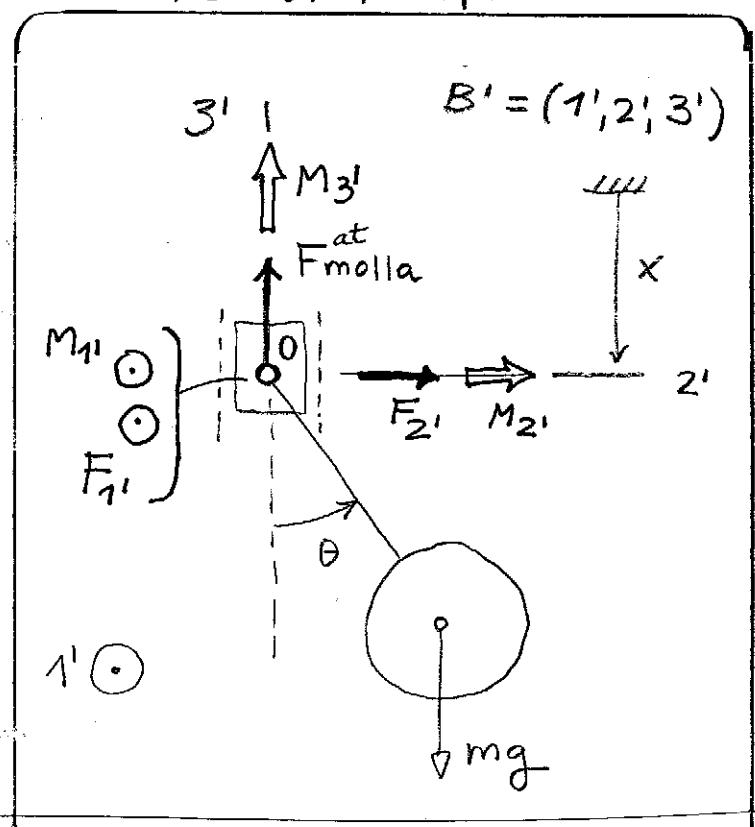
(\*) Que no cunda el pànic!

Forces i moments externs sobre ambdós sistemes:

Pèndol (\*)



Pèndol + Suport



Aquí  $TMC(O)]_1$   
està lliure d'ie?

Aquí,  $TQM]_{3'}$   
està lliure d'ie

Fuks nta  
eqs. mov.  
 $x \perp \theta$

Sist = Pèndol,  $TMC(O)]_1$

Sist = Pèndol + Sup,  $TQM]_{3'}$

(\*) Triem la base indicada perquè és fixa al sòlid (i així  $[II(O)]_B$  serà constant) i alhora permet la caracterització immediata del torsor suport  $\rightarrow$  pèndol a O.

TMC (0) ]<sub>1</sub> sobre sist = pèndol

O té' acceleració resp. T  $\Rightarrow \exists$  terme complementari!

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) - \overline{OG} \times m \bar{a}_T(0) = \dot{\bar{H}}_{RTD}(0)$$

terme complem.

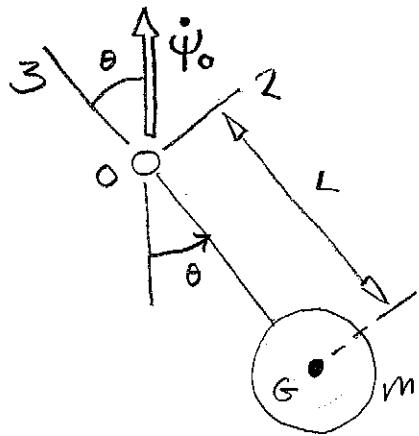
$$\left\{ \sum \bar{M}_{ext}(0) \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} -mgL \sin \theta \\ M_2 \\ M_3 \end{array} \right\} \quad (\text{I})$$

$$\begin{aligned} \overline{OG} \times m \bar{a}_T(0) &= (\rightarrow L) \times (\downarrow m \ddot{x}) = \\ &= [(\downarrow L \cos \theta) + (\rightarrow L \sin \theta)] \times (\downarrow m \ddot{x}) = \\ &= (\otimes mL \ddot{x} \sin \theta) = \left\{ \begin{array}{l} -mL \ddot{x} \sin \theta \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}_B \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

$$\overline{H}_{RTD}(0) = \underbrace{\mathbb{I}(0)}_{O \in \text{pèndol}} \cdot \underbrace{\bar{\Omega}}_{\substack{\text{pèndol} \\ RTD}} = \mathbb{I}(0) \bar{\Omega} \underbrace{\frac{\text{pèndol}}{T}}_{\text{iguals!}}$$

Calculem  $\bar{H}_{RTD}(0)$  en la base B perquè en aquesta base, en ser fixa al pèndol, el tensor  $\mathbb{I}(0)$  serà constant.

$$[\mathbb{I}(0)]_B = [\mathbb{I}(G) + \mathbb{I}^\oplus(0)] =$$



$$= \begin{bmatrix} 2I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I' & & \\ & I' & \\ & & 0 \end{bmatrix} =$$

$$2I = mR^2$$

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Amb}} \begin{cases} I_{11} = 2I + I' = m(R^2 + L^2) \\ I_{22} = I + I' = m\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right) \\ I_{33} = I = \frac{mR^2}{2} \end{cases}$$

$$\{\bar{H}_{RTO}(0)\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}_0 \sin \theta \\ \dot{\psi}_0 \cos \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{11} \dot{\theta} \\ I_{22} \dot{\psi}_0 \sin \theta \\ I_{33} \dot{\psi}_0 \cos \theta \end{Bmatrix}$$

$$\{\dot{H}_{RTO}(0)\}_B = \begin{Bmatrix} I_{11} \ddot{\theta} \\ I_{22} \dot{\psi}_0 \dot{\theta} \cos \theta \\ -I_{33} \dot{\psi}_0 \dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}_0 \sin \theta \\ \dot{\psi}_0 \cos \theta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} I_{11} \dot{\theta} \\ I_{22} \dot{\psi}_0 \sin \theta \\ I_{33} \dot{\psi}_0 \cos \theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} I_{11} \ddot{\theta} + (I_{33} - I_{22}) \dot{\psi}_0^2 \sin \theta \cos \theta \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (\text{III})$$

Imposant  $\text{I} - \text{II} = \text{III}$  en comp. 1:

$$\cancel{-mgL\sin\theta + mL\ddot{x}\sin\theta} = \underbrace{I_{11}\ddot{\theta}}_{m(R^2+L^2)} + \underbrace{(I_{33}-I_{22})\dot{\psi}_0^2\sin\theta\cos\theta}_{-mL^2}$$

$$(R^2+L^2)\ddot{\theta} + (g - \ddot{x} - L\dot{\psi}_0^2\cos\theta)L\sin\theta = 0$$

Versió  
wikimec

$$(R^2+L^2)\ddot{\theta} - L\sin\theta\ddot{x} = (L\dot{\psi}_0^2\cos\theta - g)L\sin\theta$$

(IV)

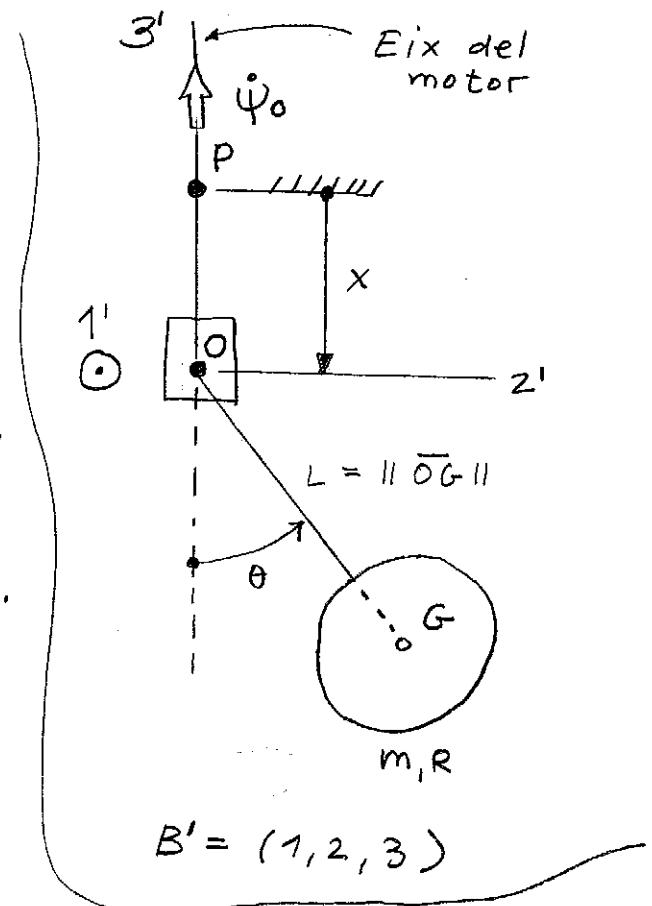
↑  
 Versió que m'agrada més a mi perquè permet identificar la matriu de masses concepte no l'hem explicat en aquest curs, i per tant "no entra" (vegeu pags. 0 i 0bis d'aquest exercici).

Sist = pèndol + suport, TQM]\_31

$$\sum \bar{F}_{ext} = m \bar{a}_T(G)$$

Podem calcular  $\bar{a}_T(G)$  derivant dues vegades el vector de posició  $\bar{PG}$  respecte el temps, on P és el punt de l'eix del motor que queda a l'alçada de l'origen de la coordenada x.

$$\{\bar{PG}\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L \sin \theta \\ -x - L \cos \theta \end{Bmatrix}$$



$\frac{d}{dt}$  tenint en compte que  $B'$  gira amb ( $\uparrow \dot{\psi}_0$ ) resp. +

$$\{\bar{v}_T(G)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L\dot{\theta} \cos \theta \\ -\dot{x} + L\dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ L \sin \theta \\ -x - L \cos \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L\dot{\psi}_0 \sin \theta \\ L\dot{\theta} \cos \theta \\ -\dot{x} + L\dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix}$$

$(d/dt)$

$$\{\bar{a}_T(G)\}_{B'} = \begin{Bmatrix} -L\dot{\psi}_0 \dot{\theta} \cos \theta \\ L\ddot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ -\ddot{x} + L\ddot{\theta} \sin \theta + L\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -L\dot{\psi}_0 \sin \theta \\ L\dot{\theta} \cos \theta \\ -\dot{x} + L\dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -2L\dot{\psi}_0 \dot{\theta} \cos \theta \\ L\ddot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta - L\dot{\psi}_0^2 \sin \theta \\ -\ddot{x} + L\ddot{\theta} \sin \theta + L\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{Bmatrix}$$

(V)

Només ens caldrà aquesta component

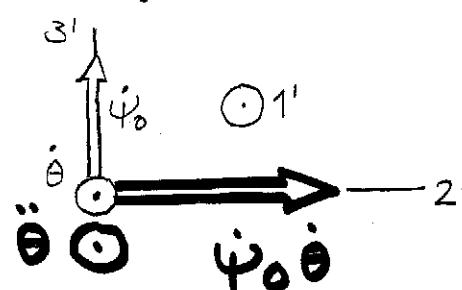
Via alternativa per calcular  $\bar{a}_T(G)$

Com que  $O \in$  Pèndol, podem aplicar cinemàtica del sòlid rígid, d'acceleracions:

$$\bar{a}_T(G) = \bar{a}_T(O) + \bar{\omega}_T^{\text{Pènd}} \times (\bar{\omega}_T^{\text{Pènd}} \times \bar{OG}) + \bar{\alpha}_T^{\text{Pènd}} \times \bar{OG}$$

$$\bar{\omega}_T^{\text{Pènd}} = (*) \\ (\uparrow \dot{\psi}_0) + (\odot \dot{\theta}) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix}_{B^1}$$

Derivant geomètricament



$$\bar{\alpha}_T^{\text{Pènd}} = (\odot \ddot{\theta}) + (\Rightarrow \dot{\psi}_0 \dot{\theta}) = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\psi}_0 \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}_{B^1}$$

$$\left\{ \bar{a}_T(G) \right\}_{B^1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} \times \left( \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi}_0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ L \sin \theta \\ -L \cos \theta \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\psi}_0 \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ L \sin \theta \\ -L \cos \theta \end{Bmatrix} =$$

$$= \dots = \begin{Bmatrix} -2L\dot{\psi}_0 \dot{\theta} \cos \theta \\ L\ddot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta - L\dot{\psi}_0^2 \sin \theta \\ -\ddot{x} + L\ddot{\theta} \sin \theta + L\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{Bmatrix}$$

(\*) D'acord amb dibuix de pàg. anterior

Veure dibuix pag. 5, areta

$$\left\{ \sum \overline{F}_{ext} \right\}_{B^1} = \left\{ \begin{array}{l} F_{11} \\ F_{21} \\ \cancel{mg + kx} - \cancel{mg} \\ \hline F_{molla}^{at} \end{array} \right\} \quad (VI)$$

Imposant  $(VI) = m(v)$  en dir. 3<sup>1</sup> obtenim

$$Kx = m(-\ddot{x} + L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x - L(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = 0$$

Versió  
Wikimec

$$\ddot{x} - (L\sin\theta)\ddot{\theta} = -\frac{k}{m}x + L\dot{\theta}^2\cos\theta$$

(VII)

(IV) i (VII) formen l'EDO vectorial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R^2 + L^2 & -L\sin\theta \\ -L\sin\theta & 1 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (L\dot{\theta}_0^2\cos\theta - g)L\sin\theta \\ -\frac{k}{m}x + L\dot{\theta}^2\cos\theta \end{bmatrix}}_F$$

$M \leftarrow$  Matrícul de masses

Material extra que no entra  
en aquest curs (vegeu pàgs 0, obis)

$M$  és invertible perquè  $\det(M) = R^2 + L^2 - L^2\sin^2\theta > 0$

Per tant, multiplicant per  $M^{-1}$  podem aillar  $\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$ :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot \underline{F}$$

Aquest terme depèn de les variables d'estat mecànic  $(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x})$

Així doncs, obtenim una EDO de 2<sup>nd</sup> ordre amb dues variables, de la forma

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}) \quad (\text{VIII})$$

on

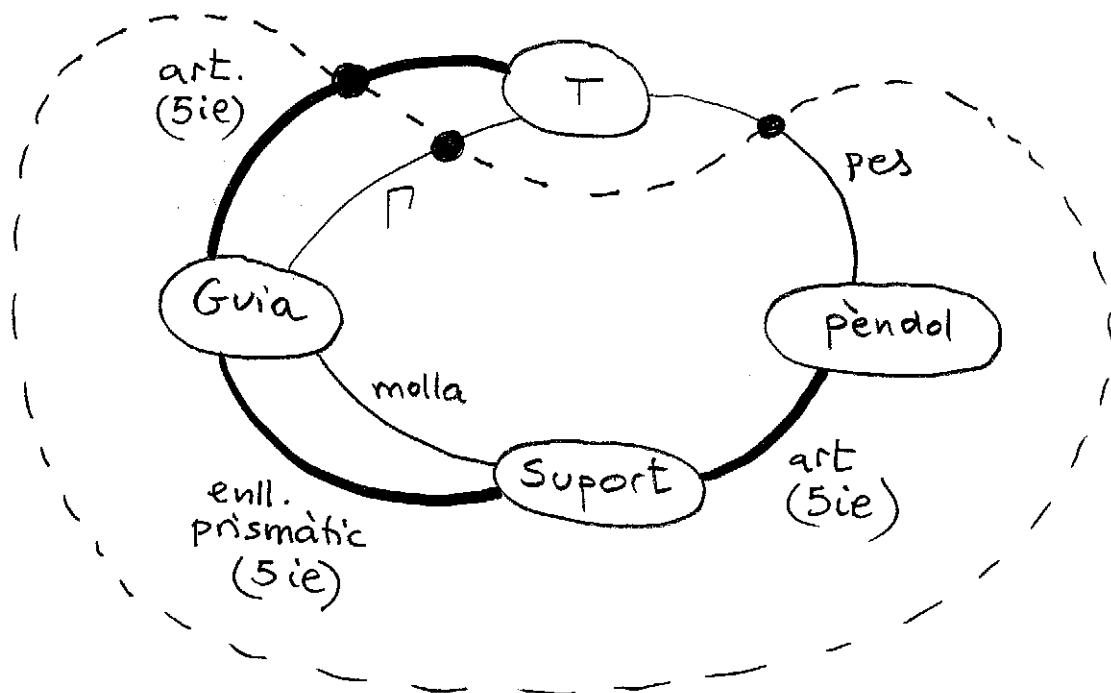
$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} \quad \left( q \text{ és una tupla de 2 variables} \right)$$

L'equació (VIII) és la que us permetria simular l'evolució del sistema aplicant, per exemple, el mètode d'Euler, o Runge-Kutta IV, a una reducció de l'eq. (VIII) a sistema de primer ordre.

Si algú en vol més detalls, pregunteu-m'ho!

Parell motor per mantenir  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = ct$

El motor aplica un parell  $\Gamma$  a la guia  $\Rightarrow$  per trobar  $\Gamma$  el sistema ha d'incloure la guia i  $\Gamma$  ha de ser una interacció externa. Mirant el DGI veiem que triant  $sist = \text{guia} + \text{pènd.} + \text{sup}$  surten 8 incògnites



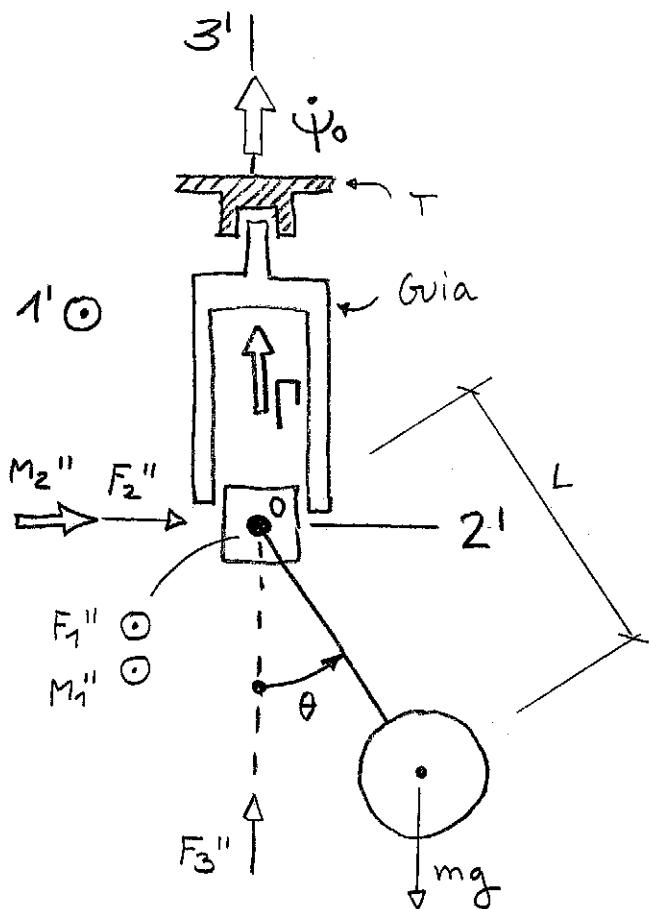
8 Incògnites: 5 ie,  $\Gamma$ ,  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{\theta}$

Ara bé: ja sabem  $\ddot{x}$  i  $\ddot{\theta}$  perquè ja tenim les eqs. del mov. per tant el sistema es'ara determinat (triant altres sistemes això no passa).

Per tant, trarem sistema = guia + sup + pèndol.

Forces d'interacció externes sobre sist = guia + sup + pènd

Són les marcades amb boles al DGI previ.



Torsor T → Guia a O :

$$\{ \bar{F}_{T \rightarrow \text{Guia}} \}_{B'} = \begin{Bmatrix} F_1'' \\ F_2'' \\ F_3'' \end{Bmatrix}$$

$$\{ \bar{M}_{T \rightarrow \text{Guia}(O)} \}_{B'} = \begin{Bmatrix} M_1'' \\ M_2'' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Veiem que si prenem moments respecte O, en direcció vertical (dir. 3') només hi intervé el parell motor  $\Gamma$ .

$$\left\{ \sum \bar{M}_{\text{ext}}(O) \right\}_{B'} = \left\{ \begin{array}{l} M_1'' - mgL \sin \theta \\ M_2'' \\ \Gamma \end{array} \right\} \quad (IX)$$

Per tant :

Full ruta  
per  $\Gamma$

$\text{SIST} = TOT (= \text{guia} + \text{sup} + \text{pèndol})$   
 $TMC(O)_{\text{vertical}} = 3'$

$$TMC(0) \left[ {}_{3'} \right] \text{ per sist} = TOT$$

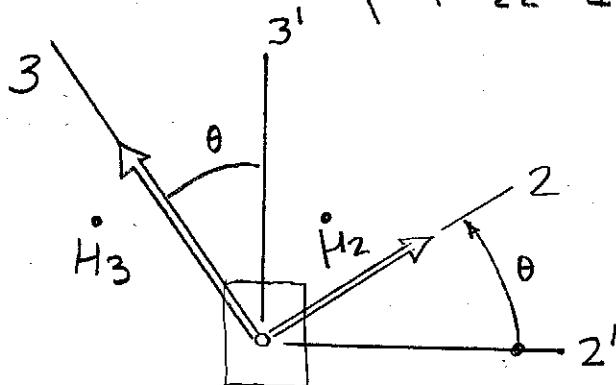
$$\sum \bar{M}_{ext}(0) - \bar{OG} \times m \bar{a}_r(0) = \dot{H}_{RTO}(0) \quad \leftarrow \text{sols ens calen les components en dir. } 3'$$

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) \left[ {}_{3'} \right] = \Pi \quad (X)$$

$$\bar{OG} \times m \bar{a}_r(0) \left[ {}_{3'} \right] = \bar{o} \quad \text{de l'eq. (II)} \quad (XI)$$

Tenim  $\dot{H}_{RTO}(0)$  parcialment calculat a l'Eg. III, en base B. N'acabem el càlcul i n'estreitem la component en dir. 3' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{H}_{RTO}(0) \\ \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} I_{11}\ddot{\theta} + (I_{33} - I_{22})\dot{\psi}_0^2 \sin\theta \cos\theta \\ (I_{11} + I_{22} - I_{33})\dot{\psi}_0 \dot{\theta} \cos\theta \\ (I_{22} - I_{11} - I_{33})\dot{\psi}_0 \dot{\theta} \sin\theta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \end{array} \right\}$$



$$\dot{H}_{RTO}(0) \left[ {}_{3'} \right] = \dot{H}_2 \sin\theta + \dot{H}_3 \cos\theta = \dots$$

$$\dots = 2\dot{\psi}_0 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta \underbrace{(I_{22} - I_{33})}_{mL^2} =$$

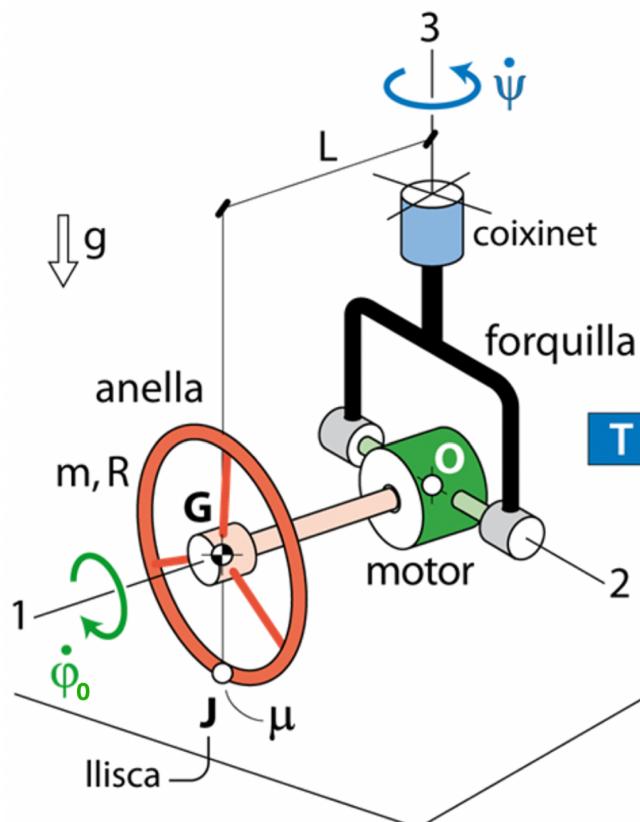
$$= 2mL^2 \dot{\psi}_0 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta \quad (XII)$$

Finalment, fent  $(x) - (x_1) = (x_{11})$ :

$$\boxed{P = 2mL^2 \dot{\psi}_0 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta}$$

Parell que ha d'aplicar el motor per mantenir  $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$  constant

## Anella impulsada per motor articulat a forquilla



L'anella homogènia, de massa  $m$  i radi  $R$ , està articulada a un braç de llargària  $L$ , solidari al rotor d'un motor. L'estatori del motor està articulat a una forquilla enllaçada amb el sostre ( $T$ ) per mitjà d'un coixinet. La velocitat angular del rotor respecte de l'estatori és  $\Omega_0$  (constant).

A  $J$ , l'anella manté un contacte puntual amb un terra rugós de coeficient  $\mu$  (freq sec).

Tots els elements, tret de l'anella, tenen massa negligible.

Feu un diagrama general d'interaccions i trobeu:

- L'equació del moviment per a la coordenada  $\psi$
- La força normal d'enllaç del terra sobre l'anella
- El parell motor  $\Gamma$  que cal per a mantenir  $\dot{\phi}_0$  constant

Per fer els càlculs assumiu que el contacte a  $J$  es manté, però esbrineu si eventualment es podria perdre partint de les condicions inicials  $\psi(0) = \psi_0$ ,  $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$ .

Aquest exercici il·lustra

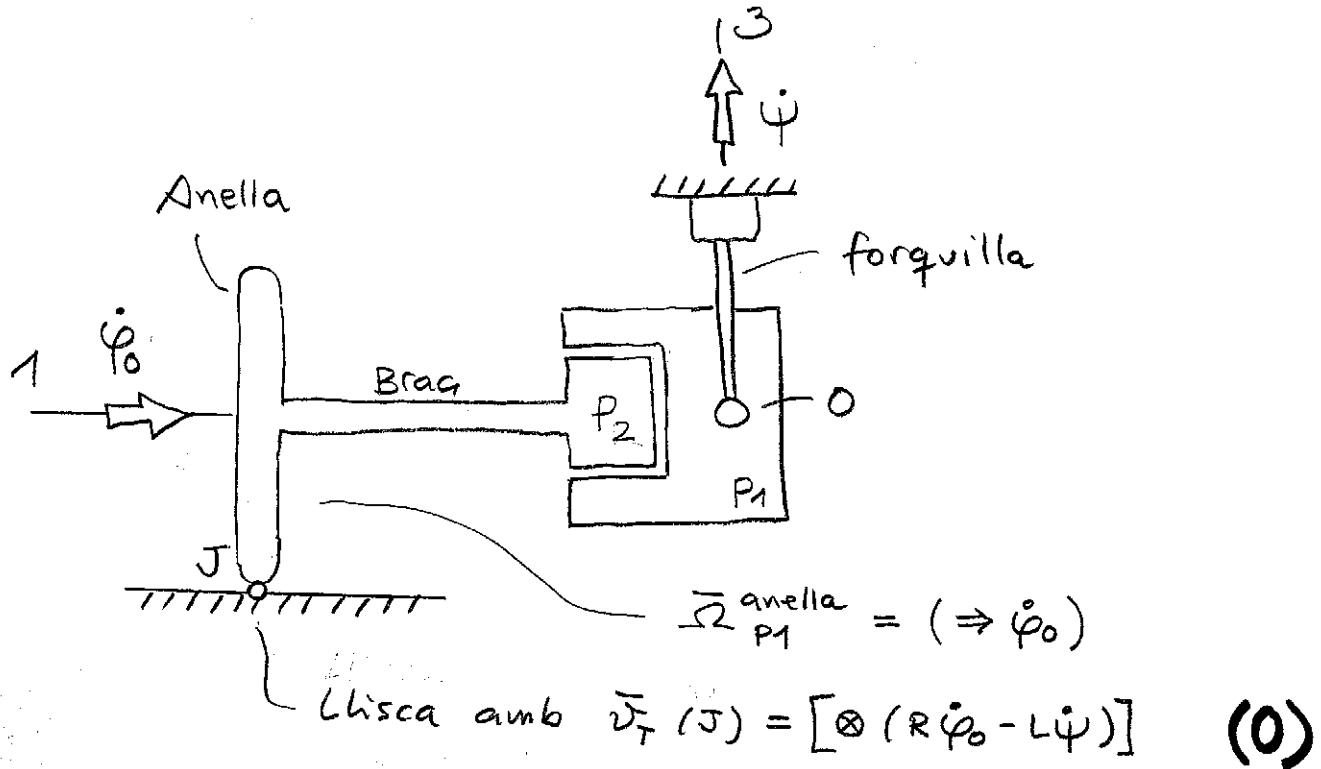
- [1] Com podem simplificar el DGI quan hi apareixen solids auxiliars d'enllaç
- [2] Que de vegades cal treballar amb les 3 components del TMC per obtenir l'equació del moviment desitjada, via resolució de les equacions que surten.

## Anàlisi de GL

$P_1$  = estator

$P_2$  = rotor

Anella, braç i  $P_2$  formen un únic sólid



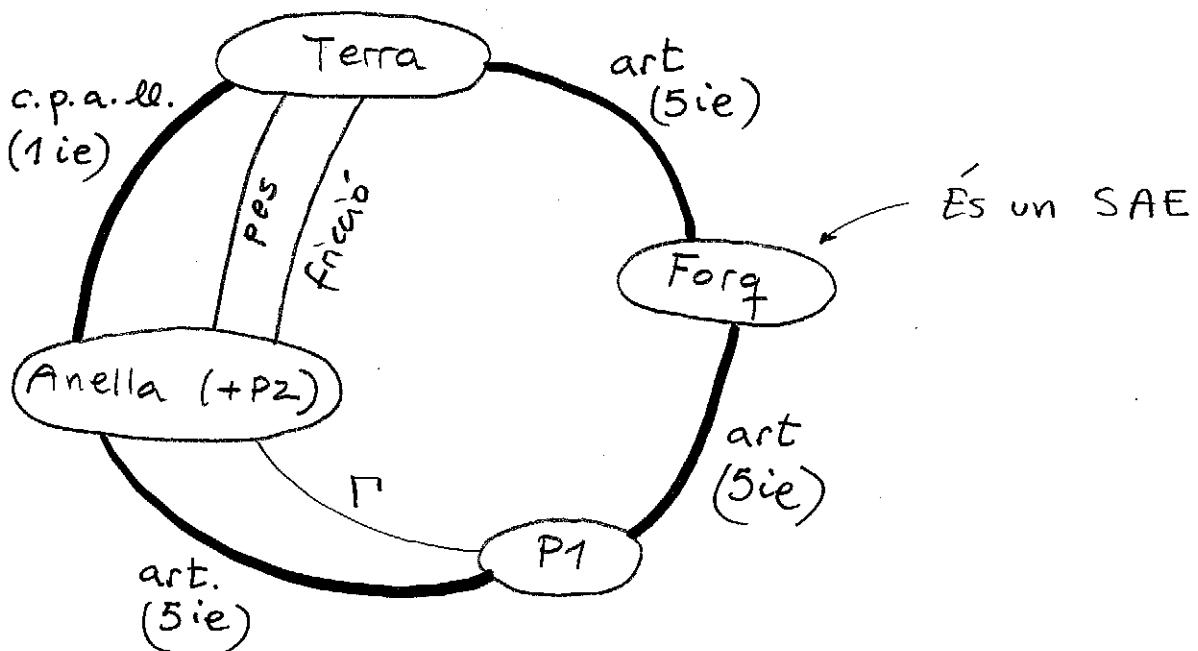
Clarament, a  $J$  hi ha lliscament, ja que el motor obliga l'anella a girar amb  $(\Rightarrow \dot{\varphi}_0)$

Sistema amb  
2 GL

$\dot{\psi}$  (llibre)  $\Rightarrow \dot{\psi}$  és incògnita  
 $\dot{\varphi}_0$  (forçat)  $\Rightarrow \Gamma$  " " "  
parell motor

$\dot{\psi}$  i  $\Gamma$  són les dues incògnites associades als graus de llibertat del sistema

DG i ànalisi del problema dinàmic global



Associades  
a GL

18 incògnites : 16 ie,  $\ddot{\psi}$ ,  $\Pi$

18 equacions : 3 sòlids · 6 egs  
sòlid

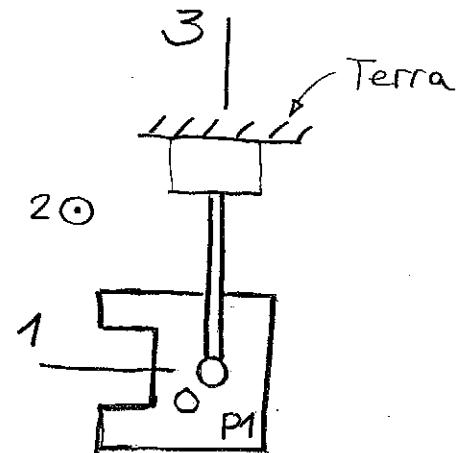
Problema determinat. Vol dir que formulant TQM i TMC sobre cada sòlid per separat, reunirem 18 equacions en 18 incògnites. que, un cop resoltes, ens donaran els valors de  $\ddot{\psi}$ ,  $\Pi$ , i les 16 ie en funció de les variables d'estat ( $\psi$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\varphi}_0$ )

## Caracterització de torsors d'enllaç

Del DGI veiem que la forquilla és un sólid auxiliar d'enllaç (és de massa nula i només rep forces i moments d'enllaç).  $\Rightarrow$  Podem alleujar el DGI substituint la forquilla pel torsor d'enllaç indirecte entre terra i P<sub>1</sub>, que és:

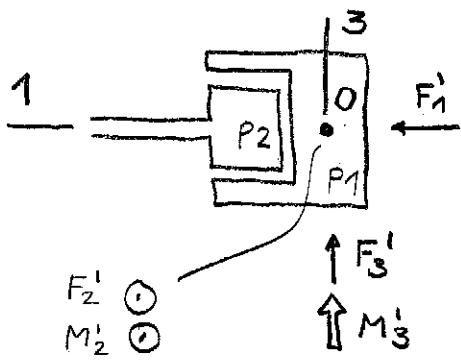
$$\{ \bar{F}_T \rightarrow (\text{forg}) \rightarrow P_1 \}_B = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{ \bar{M}_T \rightarrow (\text{forg}) \rightarrow P_1 (O) \}_B = \begin{Bmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



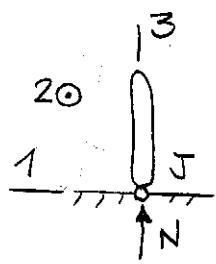
Fixem-nos que:

- P<sub>1</sub> té 2 GL respecte T  $\Rightarrow$  El torsor de T sobre P<sub>1</sub> ha de tenir 6 - 2 = 4 ie independents
- El punt O és de caracterització immediata
- $\bar{U}_T(P) = \bar{O} \Rightarrow$  Tenim  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3 \neq 0$  en ppi
- La rotació de P<sub>1</sub> resp T està permesa en direccions 2 i 3, però no en dir. 1  $\Rightarrow$  tenim  $\{ M_1 \}$  a la part de moments

Torsor  $P_1 \rightarrow P_2$  a 0

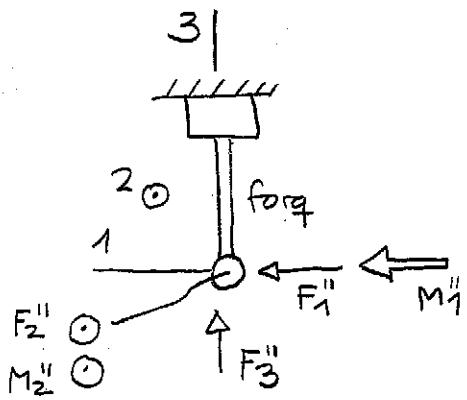
$$\{\bar{F}_{P_1 \rightarrow P_2}\}_B = \begin{Bmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{M}_{P_1 \rightarrow P_2}(0)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_2' \\ M_3' \end{Bmatrix}$$

Torsor  $T \rightarrow$  Anella a J

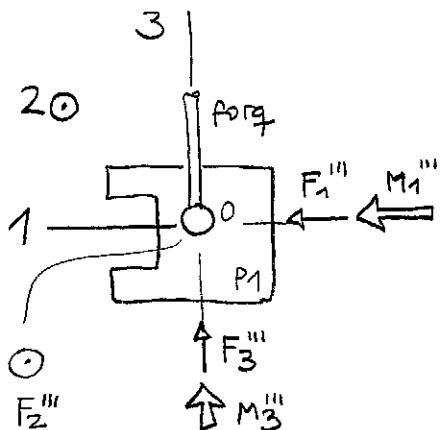
$$\{\bar{F}_{T \rightarrow \text{Anella}}\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{M}_{T \rightarrow \text{Anella}}(J)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Torsor  $T \rightarrow$  Forq a 0

$$\{\bar{F}_{T \rightarrow \text{Forq}}\}_B = \begin{Bmatrix} F_1'' \\ F_2'' \\ F_3'' \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{M}_{T \rightarrow \text{Forq}}(0)\}_B = \begin{Bmatrix} M_1'' \\ M_2'' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

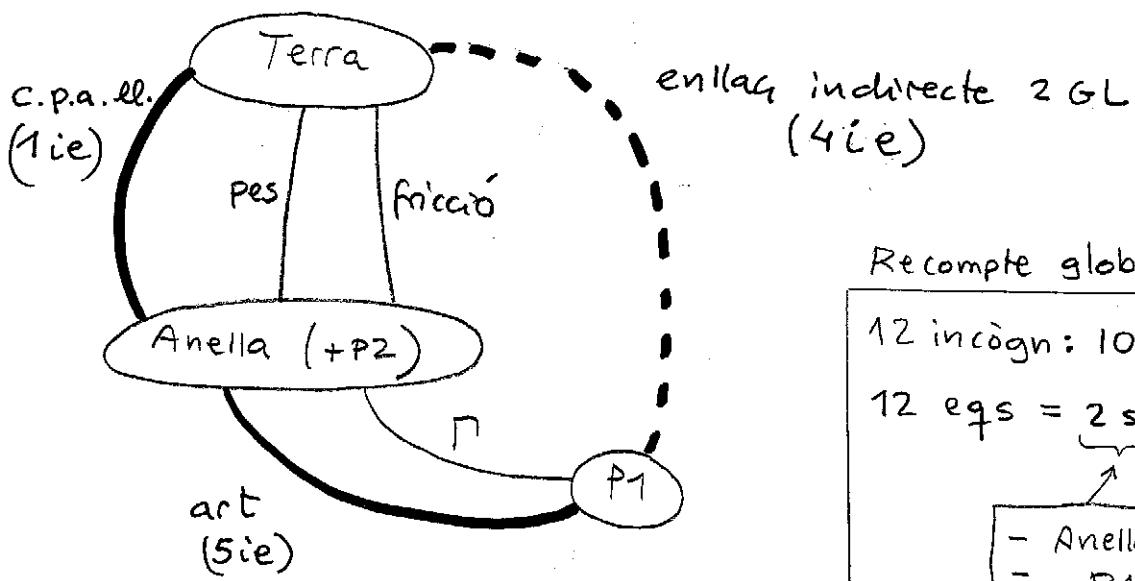
Torsor Forq  $\rightarrow P_1$  a 0

$$\{\bar{F}_{\text{Forq} \rightarrow P_1}\}_B = \begin{Bmatrix} F_1''' \\ F_2''' \\ F_3''' \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{M}_{\text{Forq} \rightarrow P_1}(0)\}_B = \begin{Bmatrix} M_1''' \\ 0 \\ M_3''' \end{Bmatrix}$$

PGI alleujent via l'enllaç indirecte Terra  $\rightarrow P_1$

Substituint la forquilla per l'enllaç indirecte, queda:



Recompte global

12 incògn: 10 ie,  $P$ ,  $\ddot{\psi}$   
 12 eqs = 2 sòlids.  $\frac{6 \text{ eqs}}{\text{sòlid}}$

- Anella + P2
- P1

Ara el problema dinàmic genera un sistema amb 12 eqs i 12 incògn. (6 menys que abans)

Equació del moviment per  $\ddot{\psi}$  i valor de  $N$

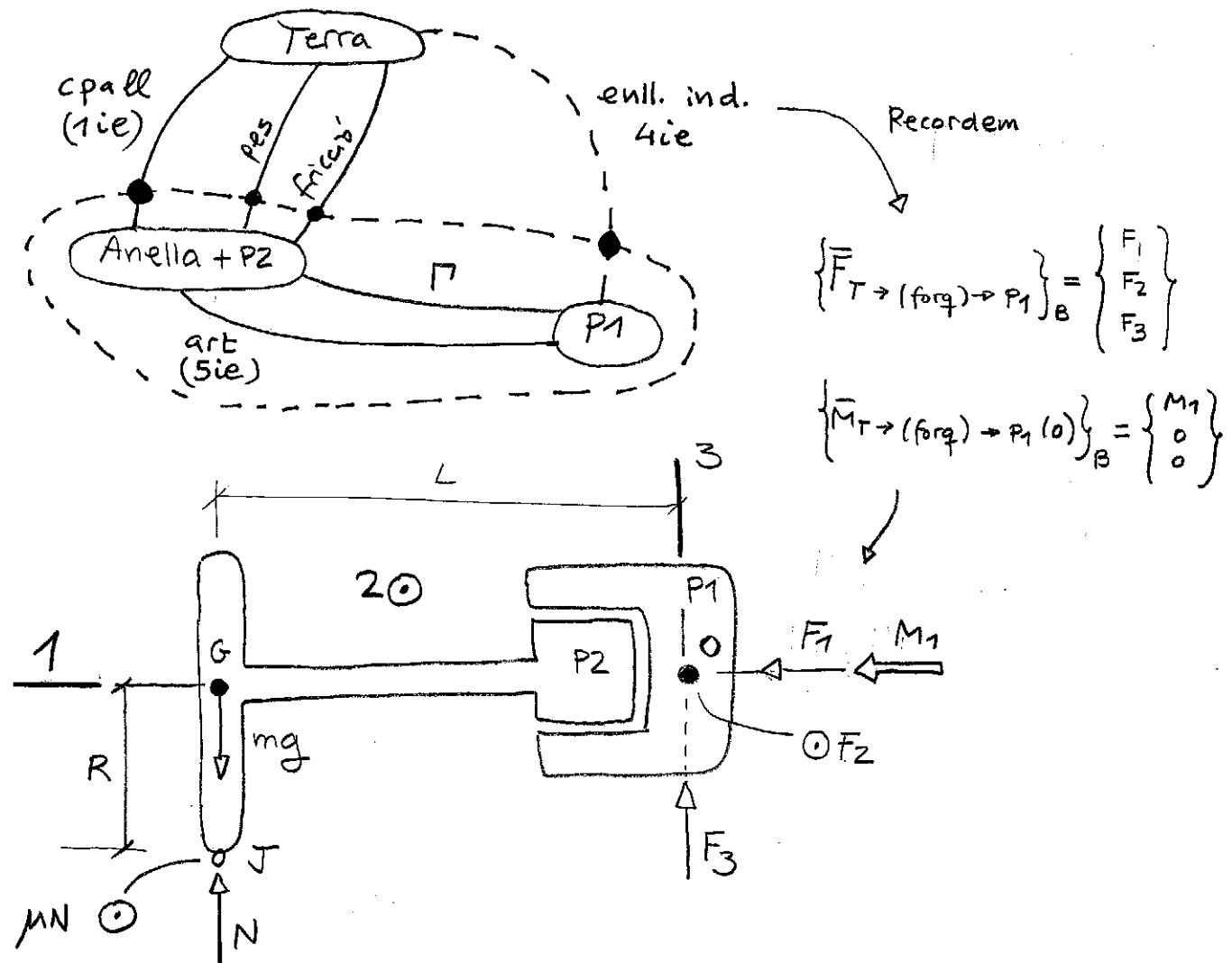
$\ddot{\psi}$  afecta tant la cinemàtica de  $P_1$  com la de l'Anella + P2. Per tant, el sistema haurà d'incloure "P1", o "Anella", o ambdós. Tenim:

Sist	Incògn.	#incògn.	Problema
Anella	6 ie, $N$ , $\ddot{\psi}$	8	INDET x
$P_1$	9 ie, $N$ , $\ddot{\psi}$	11	INDET x
Anella + $P_1$	5 ie, $\ddot{\psi}$	6	DET ✓

Per tant, triarem SIST = Anella +  $P_1$

Forces i moments sobre sist = "Anella + P1"

Examinem aquestes forces i moments  $\uparrow$  per trobar un full de ruta per a l'eq. del mov. Encerclen el sistema al DGI per no descuidar-nos cap interacció externa:



Veiem que:

$$\sum \bar{M}_{ext}(0) = \overbrace{(\bar{O}G) \times (\downarrow mg) + (\bar{O}J) \times (\uparrow N)}^{\textcircled{1} mgL} + \overbrace{\bar{O}J \times (\textcircled{2} \mu_{MN})}^{NL} + \overbrace{(\leftarrow MNR) + (\uparrow \mu_{MN}L)}^{(\leftarrow M_1)}$$

$$\left\{ \sum \bar{M}_{ext}(0) \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} MNR + M_1 \\ mgL - NL \\ \mu_{MN}L \end{array} \right\} \quad (I)$$

Si apliquem TMC a O enten la interacció de  $F_1, F_2, F_3$  i sols apareixeran  $N$  i  $M_1$  pel que fa a incogn. d'enllaç. Sortirà un sistema de 3 eqs i 3 incògn ( $N, M_1, \ddot{\psi}$ ). En no haver-hi cap component de la  $\sum \bar{M}_{ext}(O)$  que estigui lliure d'ie, caldrà treballar amb les 3 eqs. del TMC(O) en principi, i aillar  $\ddot{\psi}$ . Veiem que també podem trobar  $N$ , que també ens demanen.

Full de ruta per a $\ddot{\psi} \text{ i } N$	$Sist = Anella + P_1$ $TMC(O)$ en les 3 components (aillarem $\ddot{\psi} \text{ i } N$ )
--	---

TMC(O)

$$\underbrace{\sum \bar{M}_{ext}(O)}_{\sum \bar{M}_{ext}(O)} - \bar{O}\bar{G} \times m \overline{\dot{\alpha}_T(O)} = \dot{H}_{RTO}(O)$$

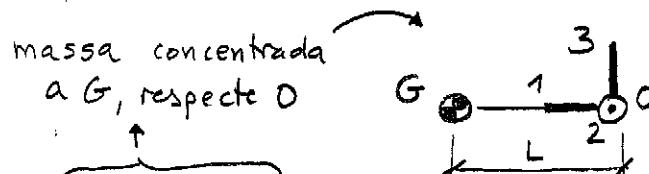
Ja la tenim d'abans

$$\dot{H}_{RTO}(O) = \dot{\Pi}(O) \cdot \overline{\Omega}_{RTO}^{\text{anella}} = \overline{\Omega}_{RTO}^{\text{anella}}$$

Tensor d'inèrcia de l'anella

- Només l'anella té massa

- O és anella  $\Rightarrow$  podem utilitzar "tensor · àmiga"



$$[\mathbf{II}(0)]_B = [\mathbf{II}(G)]_B + [\mathbf{II}^\oplus(0)]_B =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2I \\ I \\ I \end{bmatrix}}_{2I = mR^2} + \begin{bmatrix} 0 & mL^2 \\ mL^2 & mL^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{11} & I_{22} \\ I_{22} & I_{33} \end{bmatrix}}_{I_{33} = I_{22}}$$

$$2I = mR^2$$



$$I = mR^2/2$$

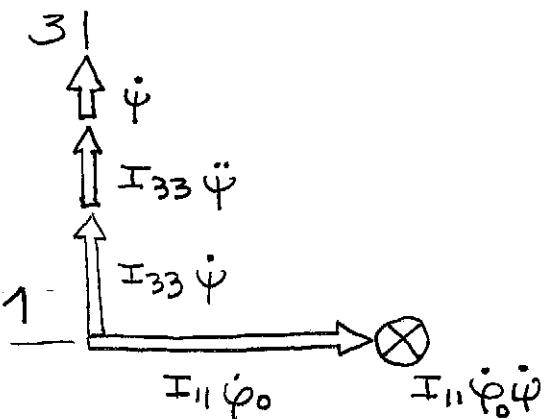
$$I_{11} = mR^2$$

$$I_{22} = \frac{mR^2}{2} + mL^2 = \frac{m(R^2 + 2L^2)}{2}$$

$$I_{33} = I_{22}$$

$$\{\bar{H}_{RTD}(0)\}_B = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{22} \\ I_{22} & I_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}_0 \\ 0 \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_{11}\dot{\varphi}_0 \\ 0 \\ I_{33}\ddot{\psi} \end{Bmatrix}$$

$$\{\dot{H}_{RTD}(0)\}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_{11}\dot{\varphi}_0\dot{\psi} \\ I_{33}\ddot{\psi} \end{Bmatrix}$$



Si ho fem analíticament, quadra:

$$\{\dot{H}_{RTD}(0)\}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33}\ddot{\psi} \end{Bmatrix}}_{\text{Derivada components}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}}_{\bar{\Omega}_T^B} \times \underbrace{\begin{Bmatrix} -I_{11}\dot{\varphi}_0 \\ 0 \\ I_{33}\dot{\psi} \end{Bmatrix}}_{\{\bar{H}_{RTD}(0)\}_B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_{11}\dot{\varphi}_0\dot{\psi} \\ I_{33}\ddot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (\text{II})$$

Derivada  
components

$\bar{\Omega}_T^B$

$\{\bar{H}_{RTD}(0)\}_B$

Compte: No es  $\bar{\Omega}_T^B$  anella

Igualant (I) = (II)

$$\begin{aligned} MNR + M_1 &= 0 & (III_1) \\ mgL - NL &= - I_{11} \dot{\varphi}_0 \dot{\psi} & (III_2) \\ MNL &= I_{33} \ddot{\psi} & (III_3) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (III)$$

Aillant N de (III<sub>3</sub>):

$$N = \frac{I_{33}}{ML} \ddot{\psi} \quad (IV)$$

Substituindo a (III<sub>2</sub>):

$$mgL - \frac{I_{33}}{M} \ddot{\psi} = - I_{11} \dot{\varphi}_0 \dot{\psi}$$

$$\frac{I_{33}}{\mu} \ddot{\psi} - I_{11} \dot{\varphi}_0 \dot{\psi} - mgL = 0$$

$$I_{33} \ddot{\psi} - I_{11} \mu \dot{\varphi}_0 \dot{\psi} - \mu mgL = 0$$

$$\frac{m(R^2 + 2L^2)}{2} \ddot{\psi} - mR^2 \mu \dot{\varphi}_0 \dot{\psi} - \mu mgL = 0$$

$$(R^2 + 2L^2) \ddot{\psi} - 2mR^2 \mu \dot{\varphi}_0 \dot{\psi} - 2\mu gL = 0 \quad (V)$$

Aillant  $\dot{\psi}$   
Eq. mov. per a  $\dot{\psi}$  (forma implícita)

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{R^2 + 2L^2} [2mR^2 \dot{\varphi}_0 \dot{\psi} + 2\mu gL] \quad (VI)$$

Eq. mov. per a  $\dot{\psi}$  (forma explícita)

## Força normal N

Substituint (VI) a (IV)

$$N = \frac{m(R^2 + 2L^2)}{2\mu L} \cdot \frac{1}{(R^2 + 2L^2)} \left[ 2\mu R^2 \dot{\varphi}_0 \dot{\psi} + 2MLg \right]$$

$$\boxed{N = \frac{m}{L} \left[ R^2 \dot{\varphi}_0 \dot{\psi} + Lg \right] = mg + \frac{mR^2}{L} \dot{\varphi}_0 \dot{\psi}} \quad (\text{VII})$$

Es podrà perdre el contacte a J ?

El sistema parteix de  $\psi(0) = 0$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0$ ,  $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ .

De l'eq. (VI) veiem que inicialment  $\ddot{\psi}(0) = \frac{2MLg}{R^2 + 2L^2} > 0$ .

Per tant,  $\dot{\psi}$  serà  $> 0$ : un picosegon més tard. Tornant a

mirar (VI) veiem que  $\ddot{\psi}$  serà  $> 0 \ \forall t > 0$  (ja que  $\dot{\psi} > 0$ ).

És a dir,  $\dot{\psi}$  no pararà de créixer a mida que el temps transcorri. De l'expressió de N a (VII)

obsevem que, en ser  $\dot{\psi}$  creixent, N també

creixerà. En conclusió: el contacte a J mai

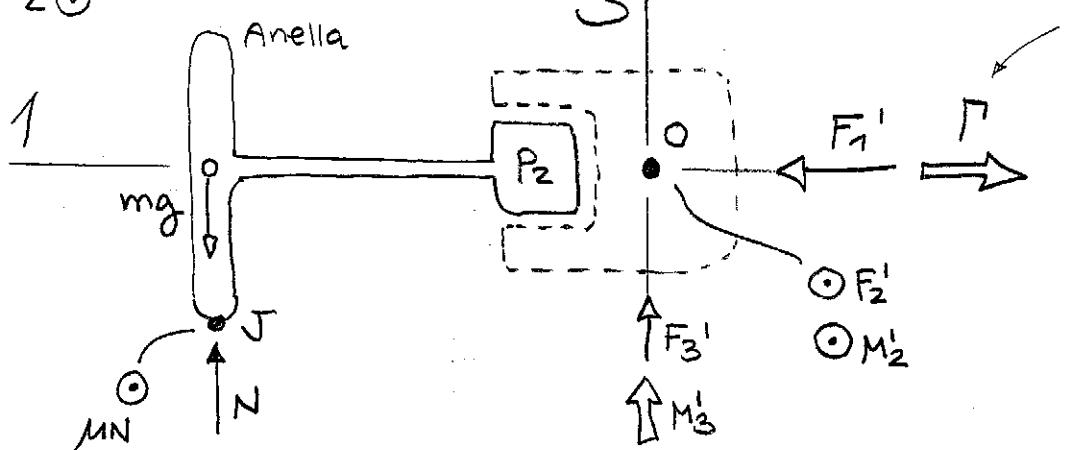
es perdrà partint de les condicions inicials esmentades.

Parell motor que garanteix  $\dot{\varphi}_0 = ct$

De la taula de la pàg. 5 veiem que pel sist = Anella (+P2) tenim 8 incògnites (6 ie,  $\Gamma$ ,  $\ddot{\varphi}$ ) però ara  $\ddot{\varphi}$  i  $N$  són conegudes perquè ja les hem trobat (eqs VI i VII). Per tant, per aquest sistema tindrem un problema determinat ara.

forces i moments sobre sist = Anella (+P2)

20



El definixo com  $(\Rightarrow \Gamma)$  però podria també haver definit com  $\leftarrow \Gamma$

Si prenem moments resp. O veiem que en dir 1 només apareix  $\Gamma$  i el moment de  $MN$  en dir 1. Per tant:

Ful·lota per $\Gamma$	Sist = Anella (+P2) TMC(0)] <sub>1</sub>
-----------------------	---

$TMC(0)$ ] , per sist = Anella (+P2)

$$\sum \bar{M}_{ext}(0)]_3 = \dot{\bar{H}}_{RTO}(0)]_3$$

0 es fix a T  $\Rightarrow$  terme complem = 0

$$\sum \bar{M}_{ext}(0)]_3 = (\Leftarrow \mu_{NR}) + (\Rightarrow \nabla)$$

$$\dot{\bar{H}}_{RTO}(0)]_3 = 0$$

De l'eq. (II)

Per tant :

$$(\Leftarrow \mu_{NR}) + (\Rightarrow \nabla) = 0$$



$$\nabla = \mu_{NR}$$

$\downarrow$  Utilitzant N de (VII)

$$\nabla = \mu R \left( \underbrace{\frac{mR^2}{L} \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi} + mg}_{N} \right)$$

$$\boxed{\nabla = \mu m R \left( g + \frac{R^2}{L} \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi} \right)}$$