5P

Versió 1.1

Cinemàtica del sòlid rígid 3D
(CSR 3D)

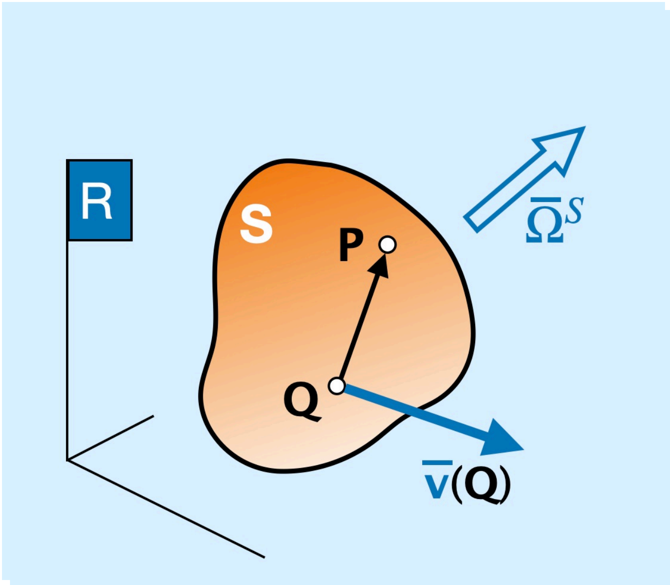
Lluís Ros
https://lluisros.github.io/mecanica

Recordatori

Cinemàtica del sòlid rígid (CSR)

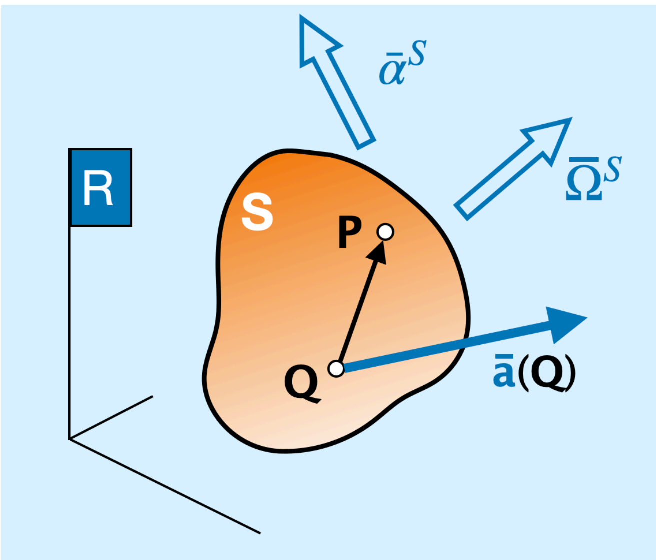
Com que tots els vectors i derivades són en la referència R, hem omès el subíndex R per alleugerir la notació (al formulari s'ha fet el mateix)

$$\overline{\mathbf{v}}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{v}}(\mathbf{Q}) + \overline{\Omega}^S \times \overline{\mathbf{QP}}$$



$$= \left.\frac{d\overline{\Omega}^S}{dt}\right]_R$$

$$\overline{\mathbf{a}}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{a}}(\mathbf{Q}) + \overline{\Omega}^S \times \left(\overline{\Omega}^S \times \overline{\mathbf{QP}}\right) + \overline{\alpha}^S \times \overline{\mathbf{QP}}$$



Avui aplicarem les anteriors expressions per calcular velocitats i acceleracions de punts de sòlids rígids.

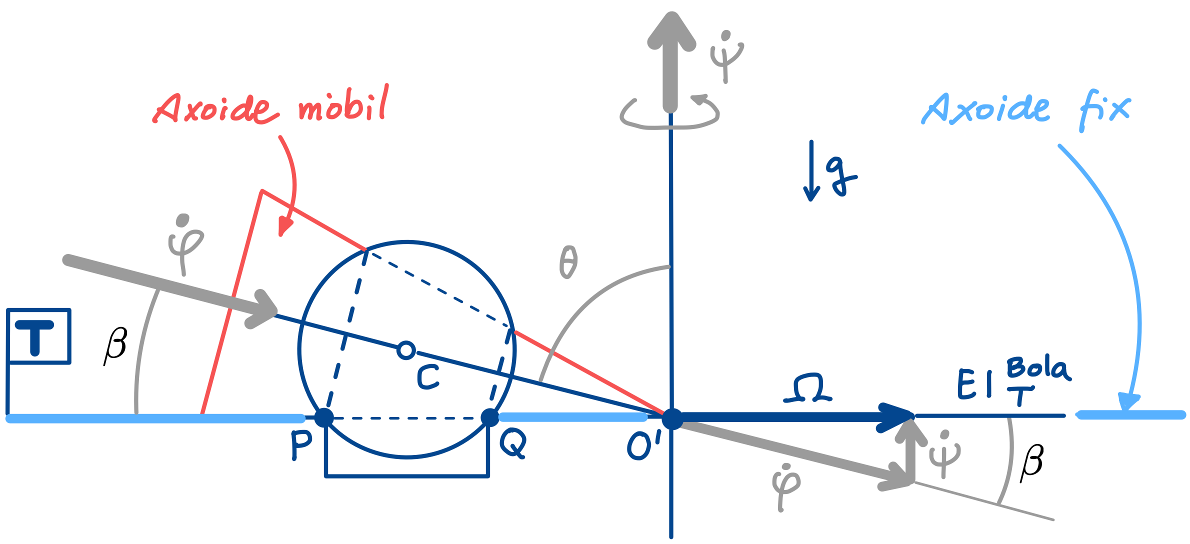
Començarem amb l'exercici de la bola rodolant sobre pista circular (pàgina següent), que ja vàreu veure a teoria. Allí el vau treballar a nivell de velocitats, i nosaltres ho farem a nivell d'acceleracions.

Essència de l'argument vist a teoria

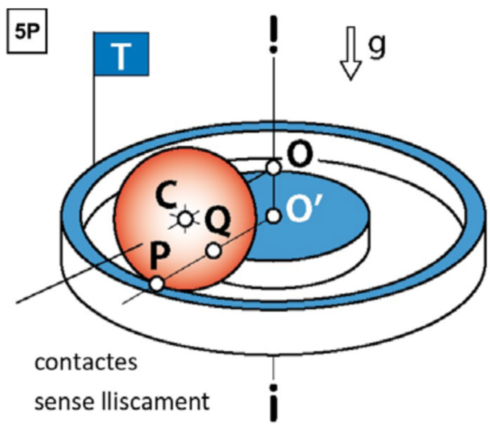
El moviment de la bola sembla complicat. Costa definir uns angles d'Euler que permetin explicar-lo perquè la bola no té cap simetria especial: d'entrada no veiem com podem triar un eix "phipunt" de rotació pròpia (com al giroscopi o a la baldufa).

La solució passa per observar com evoluciona l'eix instantani de la bola al llarg del temps. El conjunt de rectes de la "referència bola" que en algun moment han sigut eix instantani és l'**axoide mòbil** (un con d'obertura β). El conjunt de rectes de la "referència terra" que en algun moment han sigut eix instantani és l'**axoide fix** (el pla horitzontal que passa per **O',** vist com a con d'obertura 90º). Ara: l'axoide mòbil rodola sobre el fix al llarg del temps, i es pot veure com una **baldufa caiguda**! El seu eix de simetria ens proporciona l'eix phipunt que volíem, i ara entenem el moviment de la bola. És com el d'una baldufa amb nutació θ constant.

Finalment, veiem que els vectors phipunt i psipunt no són independents: sumats han de donar un vector horitzontal de valor Ω, que és la velocitat angular de la bola respecte T. La bola es mou amb un grau de llibertat, que podem associar a psipunt. Del dibuix queda clar que Ω = psipunt / tan(β).



Passem a fer l'exercici, recordant en cada pas allò que s'ha fet a teoria.



La bola es mou sense lliscar sobre una pista circular fixa a terra (T).

Calcula $\bar{\alpha}_T^{bola}$, $\bar{a}_T(\mathbf{O}_{bola})$, $\bar{a}_T(\mathbf{O}'_{bola})$.

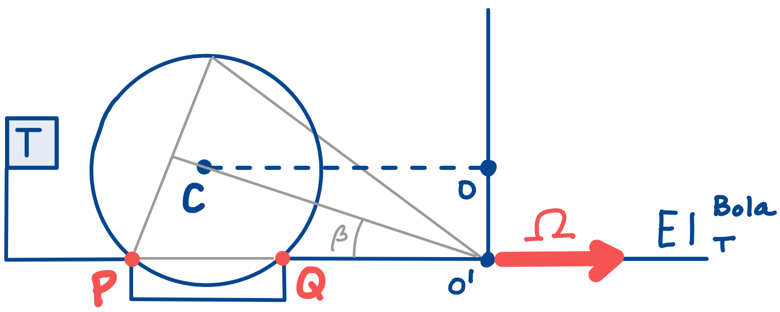
Per trobar $\bar{\alpha}_T^{Bola}$ cal trobar $\bar{\Omega}_T^{Bola}$ i derivar-la respecte el temps.
A teoria ja vam calcular $\bar{\Omega}_T^{bola}$, però recordem com es feia:

$\bar{\Omega}_T^{Bola}$

$$\underbrace{v(P) = v(Q) = 0}_{\Downarrow}$$

EI_T^{Bola} = recta per P i Q

$\bar{v}_{llisc} = \bar{0}$!

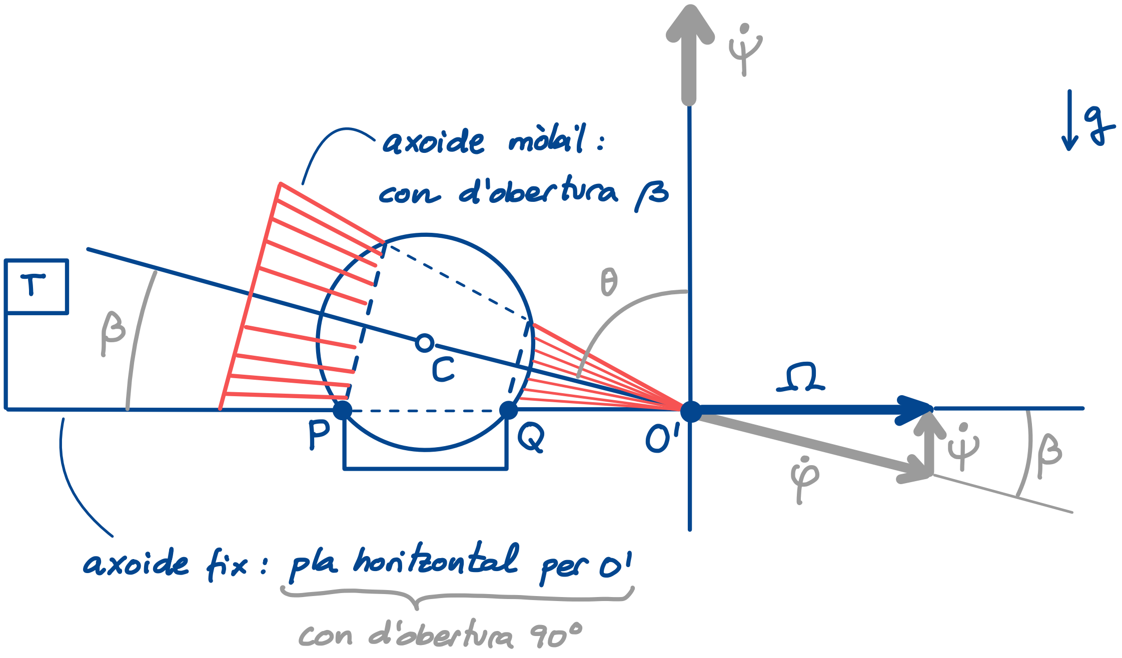


Per tant $\bar{\Omega}_T^{Bola}$ ha de tenir la forma

$$\bar{\Omega}_T^{Bola} = (\Rightarrow \overset{\text{pdet}}{\Omega})$$

Axoide fix	Rectes del terra que en algun moment han sigut EI_T^{Bola}	con d'obertura 90° (Pla horitz. per O')
Axoide mòbil	Rectes de la bola que en algun moment han sigut EI_T^{Bola}	con d'obertura β

Dibuixem els axoides:



En cada instant 1 recta de l'ax. mòbil està en contacte amb 1 recta del fix. $\Rightarrow$ L'ax. mòbil <u>rodola</u> sobre el fix!

Els punts de l'ax. mòbil són fixos a la ref. bola.

$\Downarrow$

Moviment bola resp. T = Movim. ax. mòbil resp. ax. fix.

$\Downarrow$

Podem assimilar la bola a una baldufa cònica caiguda amb eix de simetria CO' i obertura β.

$\Downarrow$

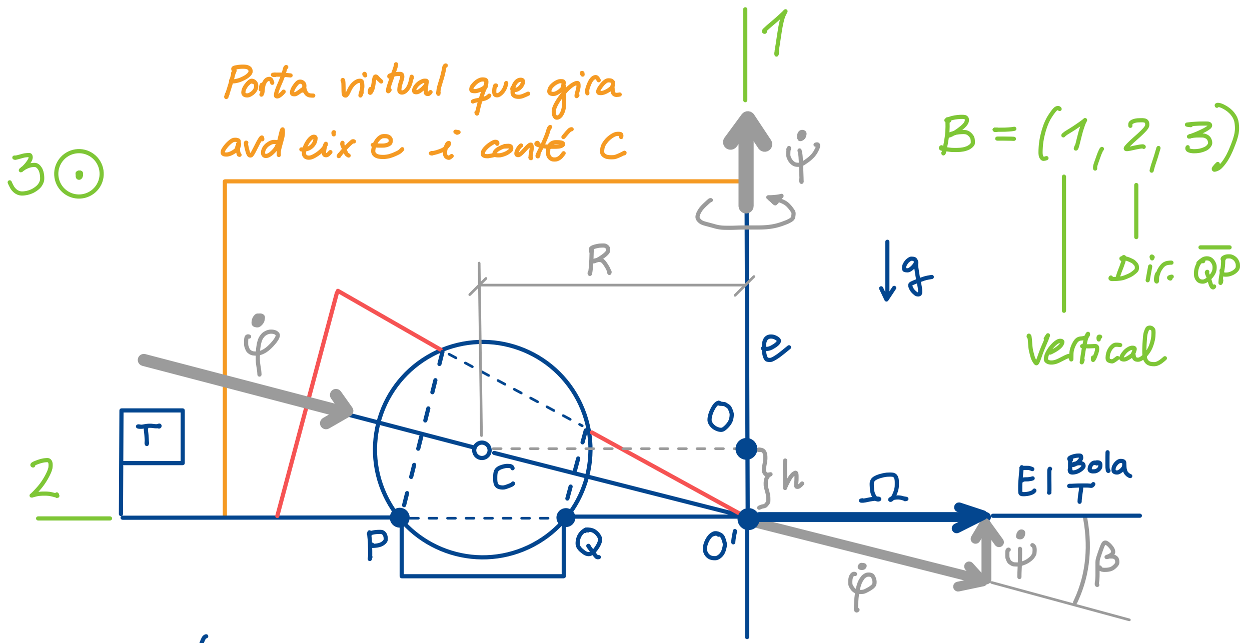
Podem veure $\overline{\Omega}^{\text{Bola}}_{T}$ com suma d'una vel. angular de precessió $(\bar{\dot\psi})$ més una de rotació pròpia $(\bar{\dot\varphi})$:

Igual que en una baldufa però amb $\bar{\dot\theta} = \bar 0$ perquè ara l'angle θ és c.t.

$$\overline{\Omega}^{\text{Bola}}_{T} = \underbrace{(\Uparrow \dot\psi) + (\searrow \dot\varphi)}_{\text{sumades han de donar } (\Rightarrow \Omega)}$$

$(\Uparrow \dot\psi)$ = vel. angular de precessió d'una porta virtual que gira avd eix e i conté sempre el punt C

$(\searrow \dot\varphi)$ = vel. angular de rotació pròpia de la bola (vista com a baldufa) avd eix CO'.



Finalment veiem :

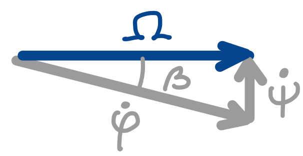
2 maneres de calcular Ω

1 Utilitzant que C∈Porta i C∈Bola a la vegada:

$$\underbrace{\odot \dot\psi R}_{\bar v_T(C_{Porta})} = \underbrace{\odot \Omega h}_{\bar v_T(C_{Bola})} \Longrightarrow \boxed{\Omega = \frac{R}{h}\dot\psi}$$

2 Via el triangle de vel. angulars:

$$\boxed{\Omega = \frac{\dot\psi}{tg\beta} = \frac{\dot\psi}{\frac{h}{R}} = \frac{R}{h}\dot\psi}$$



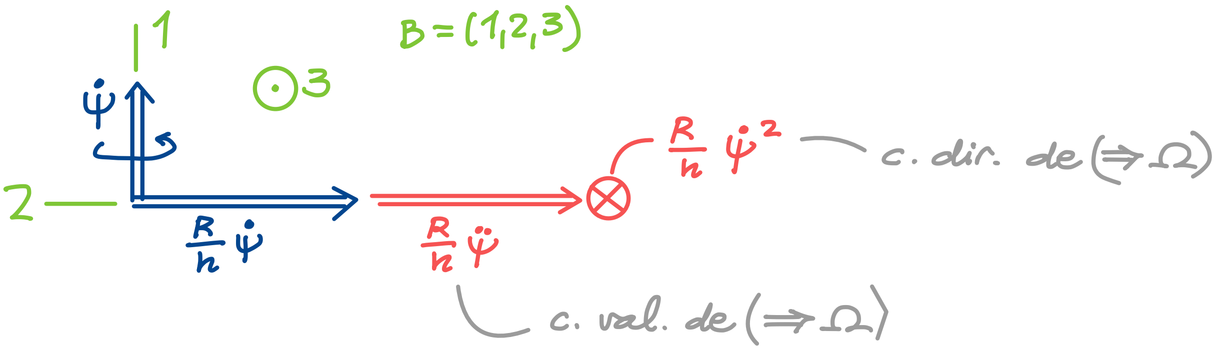
En conclusió:

$$\boxed{\bar\Omega^{Bola}_{T} = \left(\Rightarrow \overbrace{\frac{R}{h}\dot\psi}^{\Omega}\right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R}{h}\dot\psi \\ 0 \end{Bmatrix}_B \quad \text{VEC. PEL·LI!}}$$

$\overline{\alpha}_T^{Bola}$

Cal derivar $\overline{\Omega}_T^{Bola}$ resp. t (geomètricament o analítica)

Derivant geomètricament:



$$\overline{\alpha}_T^{Bola} = \left(\Rightarrow \frac{R}{h}\ddot\psi\right) + \left(\otimes \frac{R}{h}\dot\psi^2\right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R}{h}\ddot\psi \\ -\frac{R}{h}\dot\psi^2 \end{Bmatrix}_B$$

Derivant analíticament:

$$\left\{\overline{\alpha}_T^{Bola}\right\}_B = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R}{h}\ddot\psi \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Deriv. components de } \overline{\Omega}_T^{Bola}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot\psi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\overline{\Omega}_T^{B}} \times \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R}{h}\dot\psi \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\overline{\Omega}_T^{Bola}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{R}{h}\ddot\psi \\ -\frac{R}{h}\dot\psi^2 \end{Bmatrix}_B$$

$\overline{a}_T(O_{Bola})$

A teoria ja vau calcular $\overline{v}_T(O_{Bola})$. Recordem-ho(*):

$$\overline{v}_T(O_{Bola}) = (\odot\, \overset{\Omega = \frac{R}{h}\dot\psi}{\Omega}\, \underbrace{h}_{\text{Dist. de } O_{Bola} \text{ a } EI_T^{Bola}}) = (\odot R\dot\psi) \longleftarrow \text{VEC. FOTO!}$$

(*) En detall, aquest càlcul és, aplicant CSR des de O'_{Bola}:

$$\overline{v}_T(O_{Bola}) = \underbrace{\overline{v}_T(O'_{Bola})}_{0} + \underbrace{\overline{\Omega}_T^{Bola}}_{(\Rightarrow \frac{R}{h}\dot\psi)} \times \underbrace{\overline{O'O}}_{(\uparrow h)} = (\odot R\dot\psi)$$

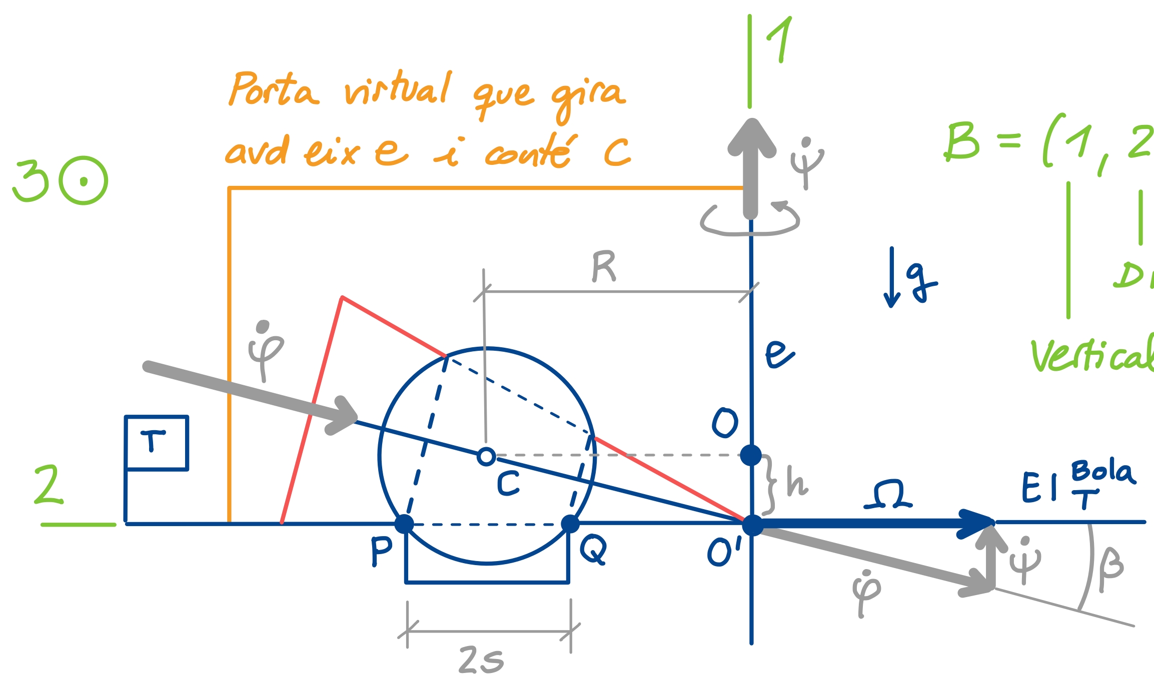
Ara, per trobar $\bar{a}_T(O_{Bola})$ potser estem temptats de derivar $\bar{v}_T(O_{Bola})$ resp. el temps (geomètricament o analítica). Seria un error! Fixem-nos que $\odot R\dot{\psi}$ només és la velocitat de O_{Bola} en l'instant en que O_{Bola} passa pel punt més alt. Un picosegon + tard, O_{Bola} tindrà una vel. diferent, amb components $\odot, \downarrow, \rightarrow$, que no sabem quines seran. Per tant, $\odot R\dot{\psi}$ és un vector particularitzat (o "foto") i no el podem derivar. Com calcularem $\bar{a}_T(0)$, doncs? Aplicant CSR des de C, o des de O'. Fem-ho des de C:

$$\bar{a}_T(0) = \underbrace{\bar{a}_T(C)}_{A} + \underbrace{\bar{\alpha}_T^{Bola} \times \overline{CO}}_{B} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Bola} \times (\bar{\Omega}_T^{Bola} \times \overline{CO})}_{0 \text{ pq } \bar{\Omega}_T^{Bola} \parallel \overline{CO}} =$$

Aplicant CSR des de O' aq. terme no s'anul·laria i surt un xic + laboriós

$$= \underbrace{(\odot \ddot{\psi} R) + (\rightarrow \dot{\psi}^2 R)}_{A} + \underbrace{\left[\left(\Rightarrow \frac{R}{h}\ddot{\psi}\right) + \left(\vec{\otimes} \frac{R}{h}\dot{\psi}^2\right)\right] \times (\rightarrow R)}_{B} =$$

$$= (\odot \ddot{\psi} R) + (\rightarrow \dot{\psi}^2 R) + \left(\downarrow \frac{R^2\dot{\psi}^2}{h}\right) = \left\{\begin{matrix} -\frac{R^2\dot{\psi}^2}{h} \\ -\dot{\psi}^2 R \\ \ddot{\psi} R \end{matrix}\right\}_B$$



$\bar{a}_T(O'_{Bola})$

O'_{Bola} és l'extrem de l'axoide mòbil, que roman fix a T

Per tant $\bar{v}_T(O'_{Bola}) = 0 \ \forall t \Rightarrow \bar{a}_T(O'_{Bola}) = 0$

Així doncs $O'_{Bola} = O'_{Terra}$

$\bar{a}_T(P_{Bola})$

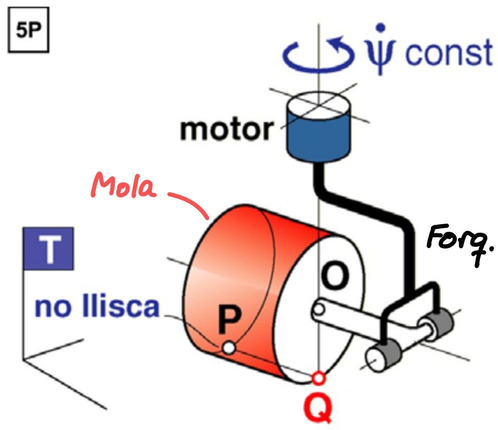
Això no ens ho demanen però ho fem per practicar.

Apliquem CSR des de O', utilitzant dibuix anterior:

$$\boxed{\bar{a}_T(P_{Bola})} = \underbrace{\bar{a}_T(O'_{Bola})}_{\bar{0}} + \bar{\alpha}_T^{Bola} \times \overline{O'P} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Bola} \times (\bar{\Omega}_T^{Bola} \times \overline{O'P})}_{\bar{0}, \text{ ja que } \overline{O'P} \parallel \bar{\Omega}_T^{Bola}} =$$

$$= \left[\left(\Rightarrow \frac{\ddot{\psi} R}{h}\right) + \left(\otimes \frac{R}{h}\dot{\psi}^2\right)\right] \times \left[\leftarrow (R+s)\right] = \boxed{\uparrow\left(\frac{R(R+s)}{h}\dot{\psi}^2\right)}$$

Mola cilíndrica — Prova NAEP 1998 - 99, 3 febrer 1999



L'eix del corró està articulat a una forquilla que gira amb $\overline{\dot{\psi}}$ constant respecte del terra (T). El corró manté contacte amb el terra i no llisca a **P**.

Determina l'EIRL$_{\mathrm{T}}^{\text{corró}}$, i calcula $\overline{v}_{\mathrm{T}}(\mathbf{Q})$, $\overline{a}_{\mathrm{T}}(\mathbf{P})$.

$$|\overline{\mathbf{OQ}}| = R$$

$$|\overline{\mathbf{PQ}}| = 1.5R$$

Afegir-ho

Solució:

Pàg. següent.

Observacions:

En la versió original d'aquest problema, el corró s'interpreta com una mola abrasiva que llima el terra sense lliscar a **P**. Mantindrem aquesta interpretació i al corró l'anomenarem "mola".

En la solució he suposat:

$$|\overline{\mathbf{OQ}}| = R$$

$$|\overline{\mathbf{PQ}}| = 1.5R$$

Important:

Com que ens diuen que la mola manté contacte amb el terra, l'angle entre l'eix de la mola i la forquilla es manté constant. Així doncs, eix i forquilla es poden veure com un únic sòlid si es vol.

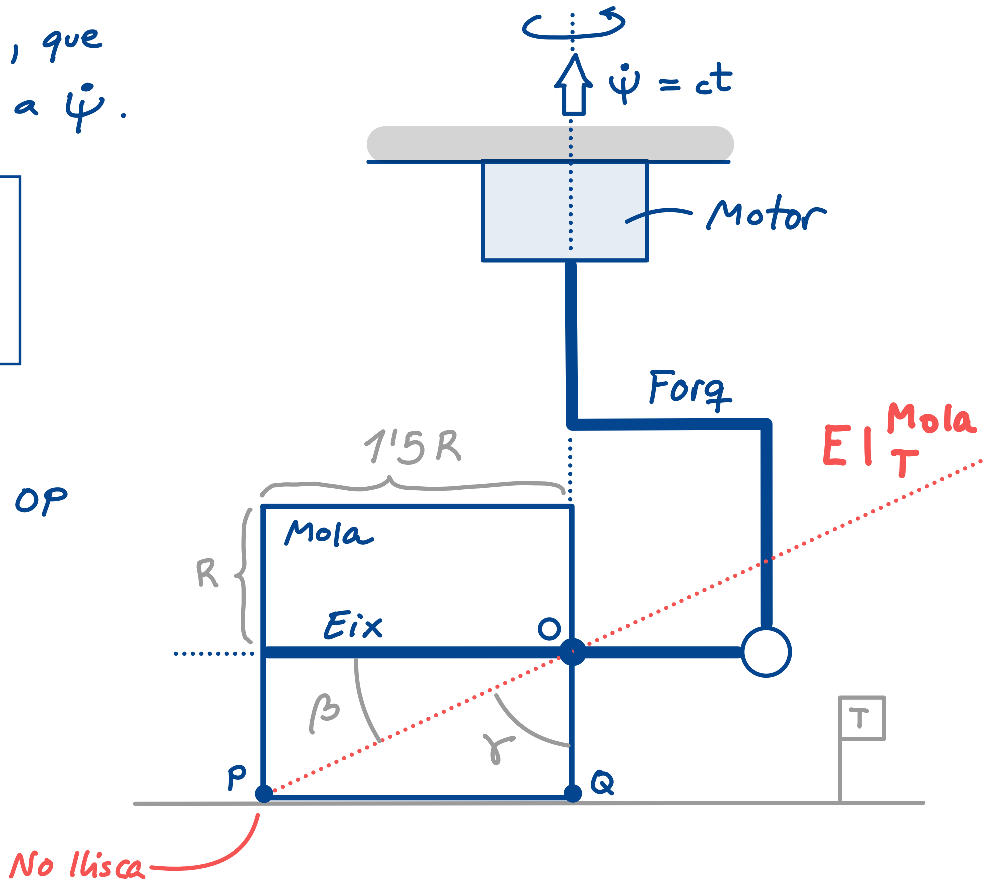
EI_T^{Mola} i axoides

Sist. amb 1 GL, que podem associar a $\dot\psi$.

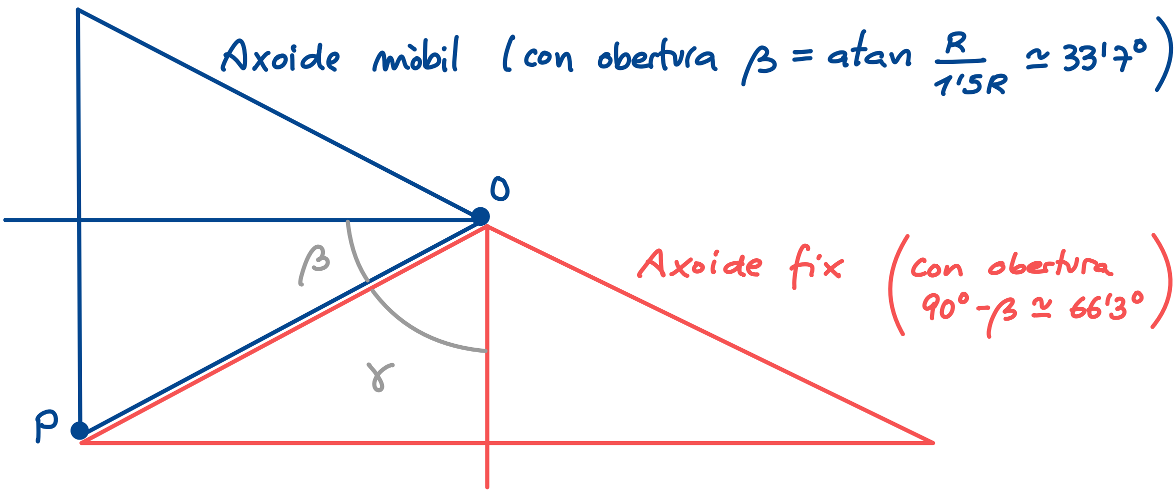
$$\boxed{\begin{array}{c} \bar v_T(P_{Mola}) = \bar 0 \\ v_T(O_{Mola}) = \bar 0 \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

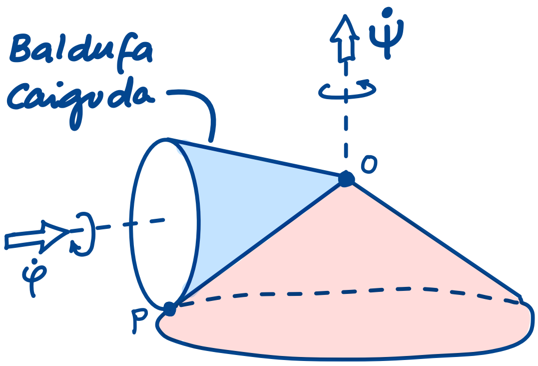
EI_T^{Mola} = recta OP



Q llisca necessàriament pq no és sobre EI_T^{Mola} !



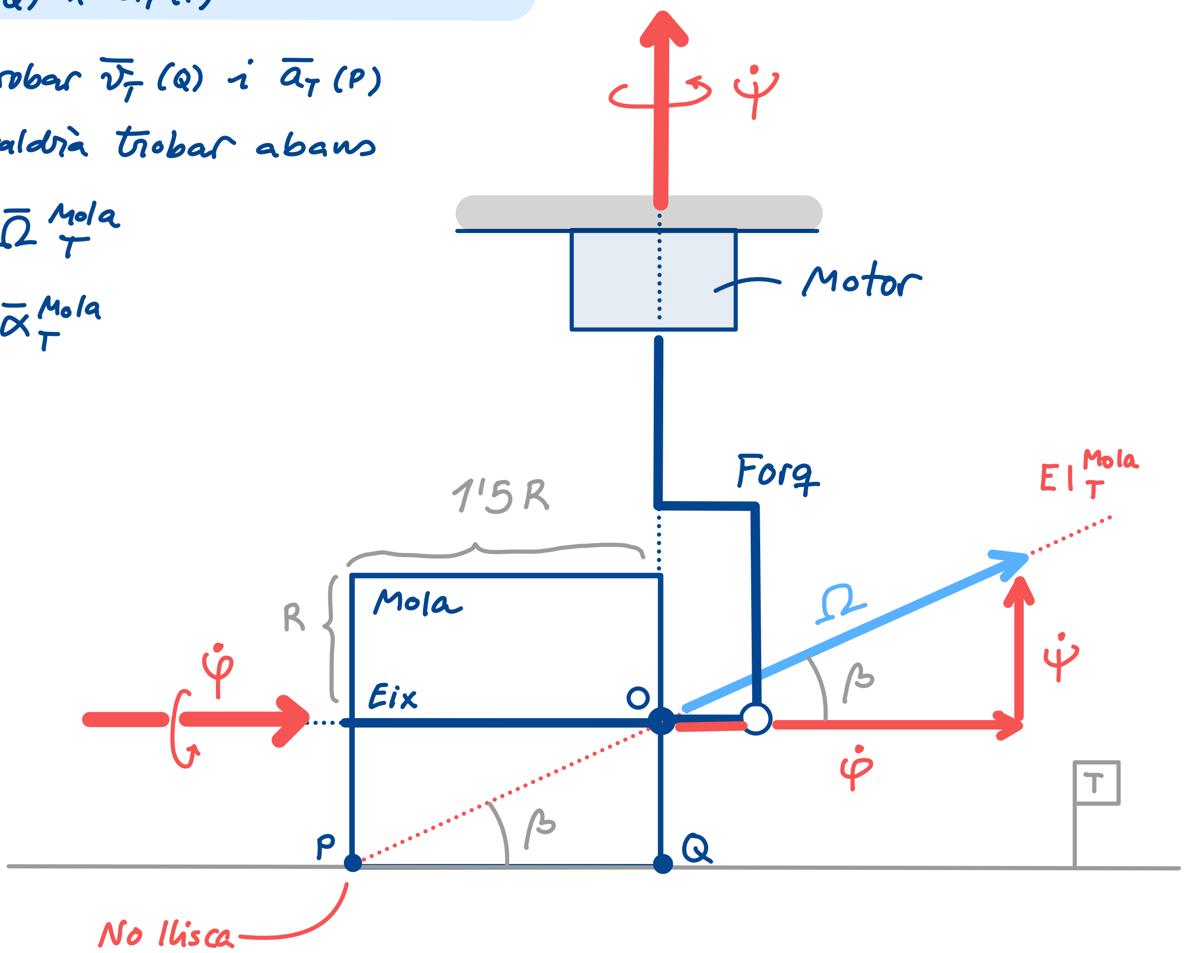
Axoides en 3D →



$\bar{v}_T(Q)$ i $\bar{a}_T(P)$

Per trobar $\bar{v}_T(Q)$ i $\bar{a}_T(P)$ ens caldria trobar abans

- $\bar{\Omega}^{Mola}_{T}$
- $\bar{\alpha}^{Mola}_{T}$

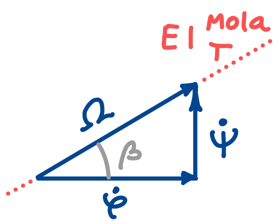


$\bar{\Omega}^{Mola}_{T}$

$= \bar{0}$ perquè l'angle entre eix i forq. és ct.

$$\bar{\Omega}^{Mola}_{T} = \bar{\Omega}^{Mola}_{Eix} + \cancel{\bar{\Omega}^{Eix}_{Forq}} + \bar{\Omega}^{Forq}_{T} =$$

$$= (\Rightarrow \dot\varphi) + (\Uparrow \dot\psi) = (\Rightarrow 1'5\,\dot\psi) + (\Uparrow \dot\psi)$$



$$\dot\varphi = \frac{\dot\psi}{tg\beta} = \frac{\dot\psi}{\frac{R}{1'5R}} = 1'5\,\dot\psi$$

Posem $\dot\varphi$ efd $\dot\psi$ (i no a l'inrevés) perquè $\dot\psi$ és la variable controlada

$\bar{\alpha}^{Mola}_{T}$

$$\bar{\alpha}^{Mola}_{T} = \left.\frac{d\bar{\Omega}^{Mola}_{T}}{dt}\right]_T = (\Uparrow \dot\psi) \times (\Rightarrow 1'5\,\dot\psi) = (\otimes\; 1'5\,\dot\psi^2)$$

Derivem geomètricament tenint en compte que $\dot\psi = ct$

$(\Rightarrow 1'5\,\dot\psi)$ sols té canvi de dir.

$(\Uparrow \dot\psi)$ vector ct!

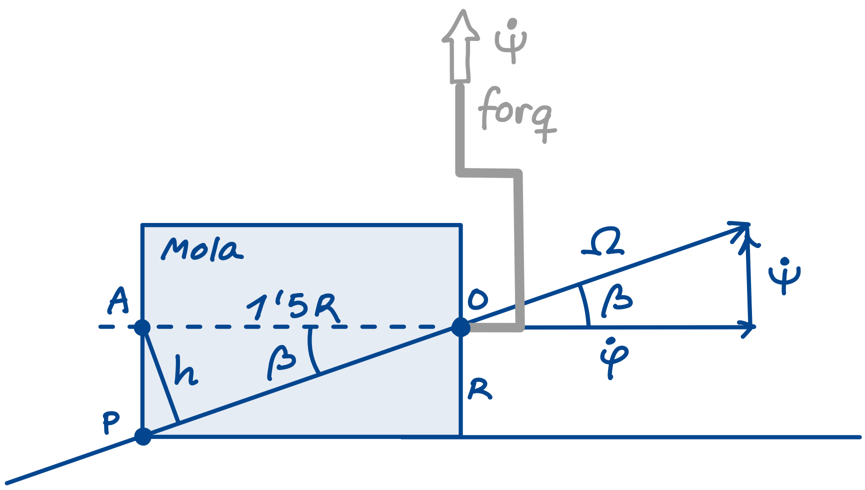
Alternativa per calcular $\bar{\Omega}_T^{Mola}$ (+ llarga)

En analogia a l'exercici previ de la bola, $\bar{\Omega}_T^{Mola}$ també es pot obtenir imposant $\bar{v}_T(A_{Mola}) = \bar{v}_T(A_{Forq})$:

$$\underbrace{\odot\ \Omega\ \overbrace{1'5R\ \sin\beta}^{h}}_{\bar{v}_T(A_{Mola})} = \underbrace{\odot\ \dot{\psi}\ 1'5R}_{\bar{v}_T(A_{Forq})}$$

$$\Downarrow$$

$$\Omega = \frac{\dot{\psi}}{\sin\beta} \Rightarrow \bar{\Omega}_T^{Bola} = \left(\nearrow \frac{\dot{\psi}}{\sin\beta}\right)$$



Expressem $\bar{\Omega}_T^{Mola}$ en components $\rightarrow$ i $\uparrow$ per comparar amb el resultat obtingut prèviament:

$$\boxed{\bar{\Omega}_T^{Mola}} = (\Rightarrow \Omega\cos\beta) + (\Uparrow \Omega\sin\beta) =$$

$$= \left(\Rightarrow \frac{\dot{\psi}}{tg\,\beta}\right) + (\Uparrow \dot{\psi}) = \boxed{(\Rightarrow 1'5\dot{\psi}) + (\Uparrow \dot{\psi})}$$

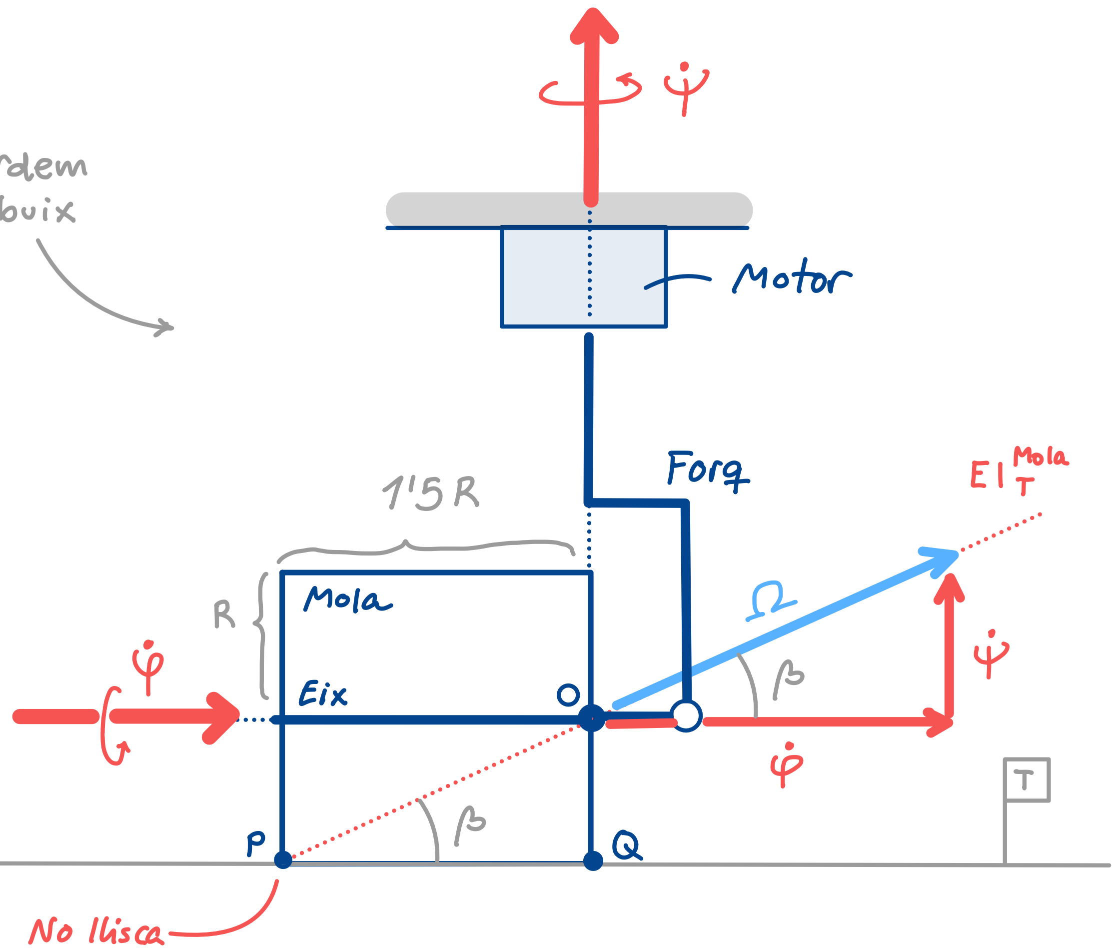
Quadra amb la d'abans

$\bar{v}_T(Q)$

$$\bar{v}_T(Q) = \underbrace{\bar{v}_T(O)}_{\bar{0}} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Mola} \times \overline{OQ}}_{(\Rightarrow 1'5\dot{\psi} + \Uparrow \dot{\psi}) \times (\downarrow R)} = \otimes\, 1'5\, \dot{\psi} R$$

CLARAMENT Q LLISCA!

Recordem dibuix

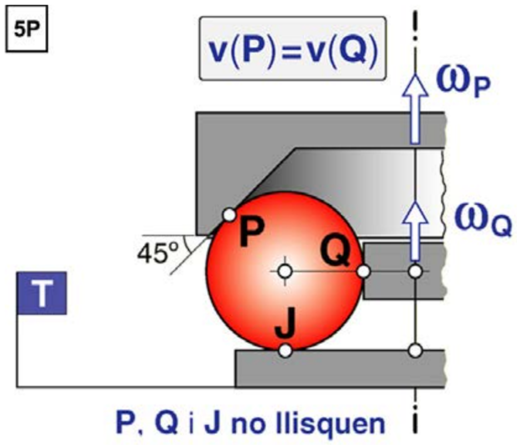


$\bar{a}_T(P)$

$$\bar{a}_T(P) = \underbrace{\bar{a}_T(O)}_{0} + \bar{\alpha}_T^{Mola} \times \overline{OP} + \underbrace{\bar{\Omega}_T^{Mola} \times \left(\bar{\Omega}_T^{Mola} \times \overline{OP}\right)}_{0 \text{ pq } \bar{\Omega}_T^{Mola} \text{ és } // \overline{OP}} =$$

$$= \left(\overset{\curvearrowright}{\otimes}\, 1'5\, \dot{\psi}^2\right) \times \left[(\downarrow R) + (\leftarrow 1'5 R)\right] =$$

$$= \left(\leftarrow 1'5\, \dot{\psi}^2 R\right) + \left(\uparrow 2'25\, \dot{\psi}^2 R\right) = \begin{Bmatrix} -1'5\, \dot{\psi}^2 R \\ 2'25\, \dot{\psi}^2 R \\ 0 \end{Bmatrix}_B$$



La bola manté contacte sense lliscar amb el terra, amb un rotor i amb un casquet que giren amb ω_Q i ω_P, respectivament, respecte del terra (T).
Els punts **P** i **Q** tenen la mateixa velocitat resp. T.] Afegir
Determina l'EIRL$_T^{bola}$.

$\bar{v}_T(P) = \bar{v}_T(Q) \implies$ recta QP és $\parallel$ a $EI{}^{Bola}_T$

Ha de ser així perquè quan dos punts P i Q diferents tenen igual velocitat, tenim:

$$\cancel{\bar{v}_T(P)} = \cancel{\bar{v}_T(Q)} + \bar{\Omega}^{Bola}_T \times \overline{QP}$$
$$\Downarrow$$
$$\bar{\Omega}^{Bola}_T \times \overline{QP} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{QP} \parallel \bar{\Omega}^{Bola}_T \quad \text{(són paral·lels)}$$

(i l'eix instantani sempre és $\parallel$ a $\bar{\Omega}^{Bola}_T$)

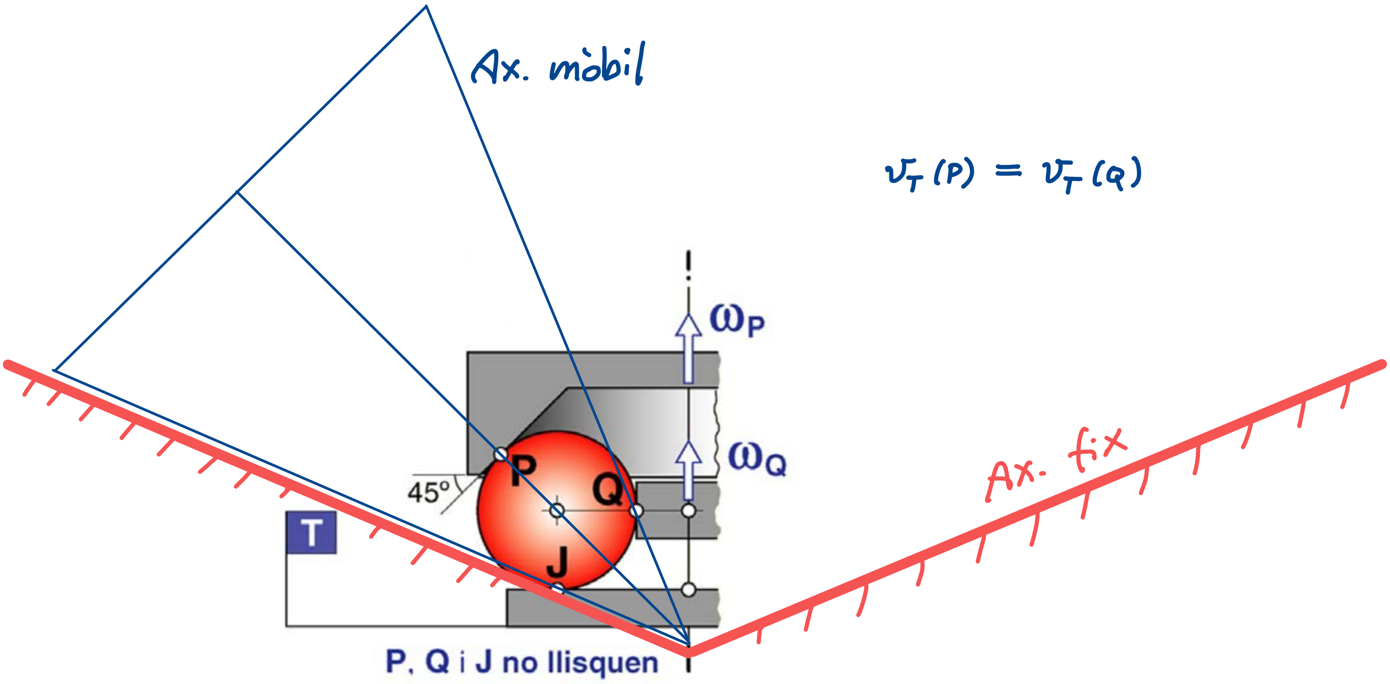
Per altra banda, $\bar{v}_T(J_{Bola}) = \bar{0} \implies J_{Bola}$ és un punt de velocitat mínima de la bola $\implies EI{}^{Bola}_T$ necessàriament passa per J_{Bola}.

Per tant

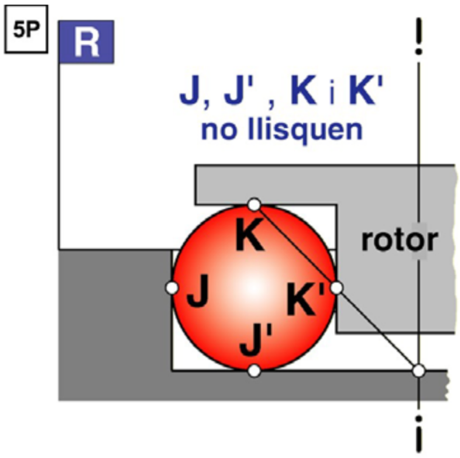
$$\boxed{EI{}^{Bola}_T \text{ és una recta } \parallel \text{ a } \overline{PQ} \text{ passant per } J}$$

Axoides fix i mòbil

No els demanen, però busquem-los. Són aquests:



Bola amb 4 punts de no lliscament



La bola manté contacte sense lliscar amb el terra (T) i amb un rotor. Determina l'EIRL$_T^{bola}$.

En principi, sembla evident que

$$EI_T^{Bola} = \text{recta } JJ'$$

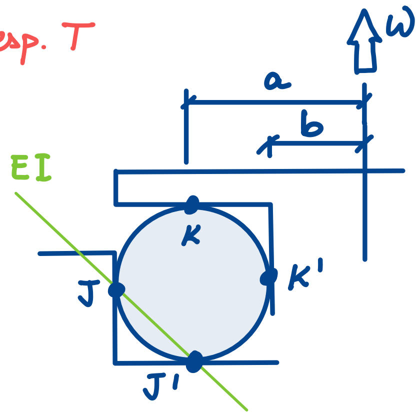
Però això vol dir que les vel. de K i K' són iguals(*)

$$\bar{v}_R(K) = \bar{v}_R(K') = \odot v$$

Per altra banda, el rotor impulsa K i K' amb velocitats diferents

del rotor resp. T

$$\bar{v}_R(K) = \odot\, \omega \cdot a$$
$$\bar{v}_R(K') = \odot\, \omega \cdot b$$



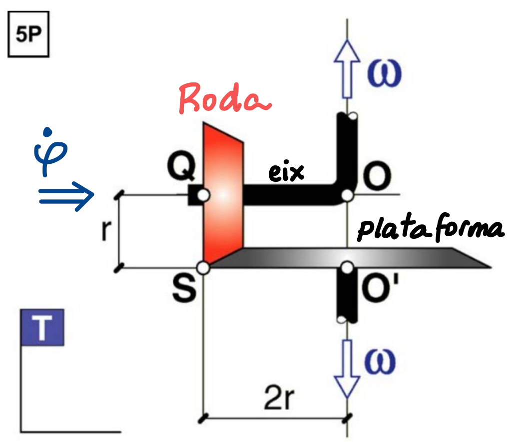
Només tindrem

$$\bar{v}_R(K) = \bar{v}_R(K')$$

quan $\omega = 0$, altrament hi hauria lliscament a K o K'. Però si $\omega = 0$, el sistema Bola-Rotor estarà parat, i l'EI no estarà definit.

(*) Ja que són a = distància de EI_T^{Bola}

Roda - Plataforma



La roda, l'eix de la qual ~~L'eix de la roda~~ gira amb ω respecte del terra (T), ~~i~~ manté contacte sense lliscar amb la plataforma, que gira amb ω respecte del terra.

Determina l' $EIRL_T^{Roda}$.

<u>Nota</u>: De l'enunciat es desprèn que la roda pot girar resp. el seu eix.

Va bé pensar que roda i plataforma són rodes dentades.

O és un punt de l'eix però també de la roda!

$\bar{v}_T(O_{Roda}) = \bar{0} \Rightarrow EI_T^{Roda}$ passa per O, i $\bar{v}_{llisc} = \bar{0}$.

pdet (depèn d'ω)

dada

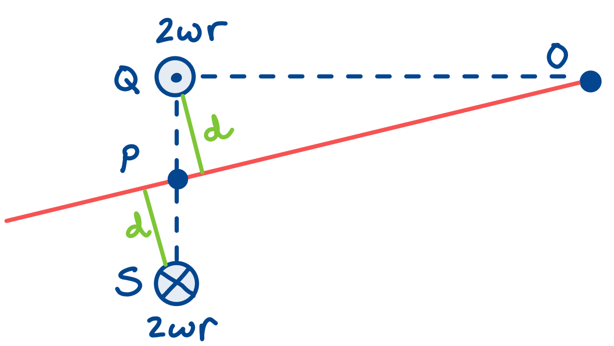
$$\bar{\Omega}_T^{Roda} = \bar{\Omega}_{Braç}^{Roda} + \bar{\Omega}_T^{Braç} = \underbrace{(\Rightarrow \dot\varphi) + (\Uparrow \omega)}$$

$\Rightarrow \bar{\Omega}_T^{Roda}$ és en el pla del dibuix

Ergo EI_T^{RV} passa per O i ∈ pla del dibuix.

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_T(Q) &= \odot\, 2\omega r \\ \bar{v}_T(S) &= \otimes\, 2\omega r \end{aligned}\right\} \Rightarrow EI_T^{Roda} \text{ passa per } P$$

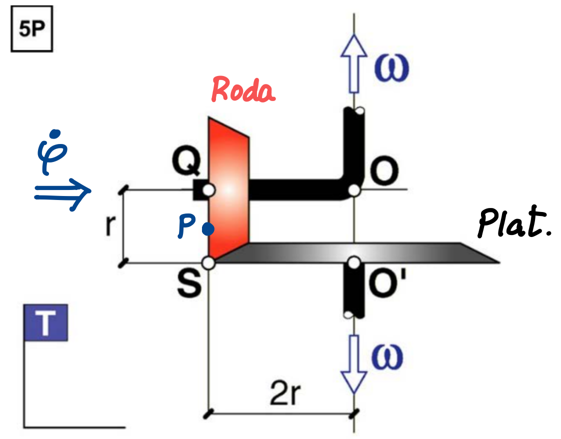
Punt mig entre Q i S



Si EI passés + amunt o avall de P les celeritats de Q i S serien ≠ !

$$\boxed{\text{Resp: } EI_T^{Roda} = \text{recta } OP}$$

Solució alternativa



La primera part és com abans: veiem ràpidament que EI_T^{Roda} passa per O i com que

$$\overline{\Omega}_T^{Roda} = (\Rightarrow \dot\varphi) + (\Uparrow \omega)$$

deduïm que EI_T^{Roda} és en el pla del dibuix. Per trobar la dir. d'EI_T^{Roda} busquem $\dot\varphi$:

Per trobar $\dot\varphi$:
- (1) Calculem $\overline{v}_T(Q)$ amb CSR des de O
- (2) " $\overline{v}_T(S)$ " " " " O'
- (3) " $\overline{v}_T(Q)$ " " " " S
- (4) Igualem (1) = (3)

Fem-ho:

(1) $\overline{v}_T(Q) = (\odot\, \omega 2r)$

(2) $\overline{v}_T(S) = (\otimes\, \omega 2r)$

(3) $\overline{v}_T(Q) = \overline{v}_T(S) + \overline{\Omega}_T^{Roda} \times \overline{SQ} =$

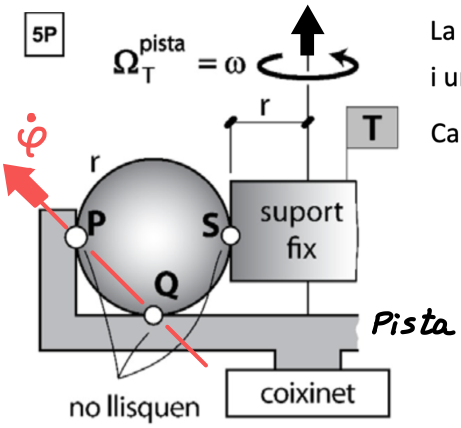
$$= (\otimes\, \omega 2r) + \left[(\Rightarrow \dot\varphi) + (\Uparrow \omega)\right] \times (\uparrow r) =$$

$$= (\otimes\, \omega 2r) + (\odot\, \dot\varphi r) = \left[\odot(\dot\varphi r - \omega 2r)\right]$$

(4) $\omega 2r = \dot\varphi r - \omega 2r \Rightarrow \boxed{\dot\varphi = 4\omega}$

Per tant $\overline{\Omega}_T^{Roda} = (\Rightarrow 4\omega) + (\Uparrow \omega)$. Vol dir que EI_T^{Roda} és una recta de pendent $\frac{1}{4}$ passant per O. És a dir, és la recta OP.

Bola contra suport fix



La bola manté contacte sense lliscar amb un suport fix al terra, i una pista circular que gira amb ω respecte del terra (T).
Calcula $\bar\Omega_T^{bola}$.

Solució 1

El $^{Bola}_{Pista}$ = recta PQ $\Rightarrow \bar\Omega^{Bola}_{Pista} = (\nwarrow \dot\varphi)$

Desconeguda en cara (pdet)

Dada

$$\bar\Omega^{Bola}_T = \bar\Omega^{Bola}_{Pista} + \bar\Omega^{Bola}_T = (\nwarrow \dot\varphi) + (\Uparrow \omega)$$

Imposem $\bar v_T(P_{Pista}) = \bar v_T(P_{Bola})$ per trobar $\dot\varphi$ efd ω:

$$\bar v_T(P_{Pista}) = (\odot\, \omega 3r)$$

$$\bar v_T(P_{Bola}) = \cancel{\bar v_T(S)}^{\,0} + \bar\Omega^{Bola}_T \times \overline{SP} =$$

$$= \left[(\nwarrow \dot\varphi) + (\Uparrow \omega)\right] \times (\leftarrow 2r) =$$

$$= \left[\left(\Leftarrow \frac{\dot\varphi}{\sqrt2}\right) + \left(\Uparrow \frac{\dot\varphi}{\sqrt2}\right) + (\Uparrow \omega)\right] \times (\leftarrow 2r) =$$

$$= \left(\odot\, \frac{\dot\varphi}{\sqrt2}\cdot 2r\right) + (\odot\, \omega 2r) = \left[\odot\left(\dot\varphi r\sqrt2 + 2\omega r\right)\right]$$

$$\omega 3\cancel{r} = \dot\varphi \cancel{r}\sqrt2 + 2\omega\cancel{r} \Rightarrow \boxed{\dot\varphi = \frac{\omega}{\sqrt2}}$$

$$\boxed{\bar\Omega^{Bola}_T} = \left(\nwarrow \frac{\omega}{\sqrt2}\right) + (\Uparrow \omega) =$$

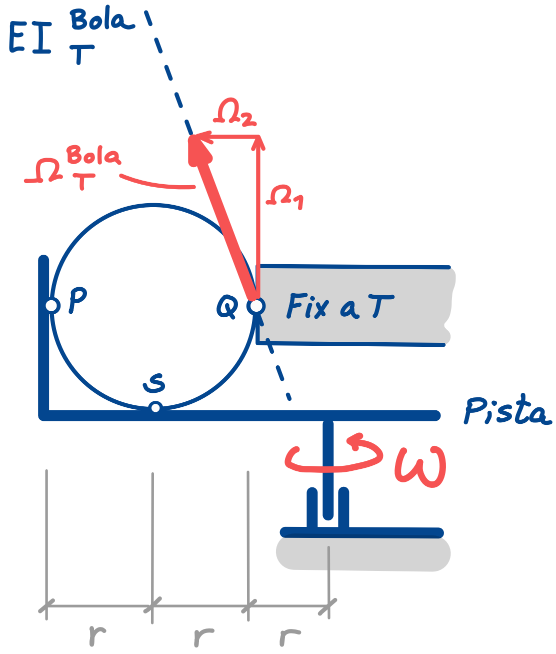
$$= \left(\Leftarrow \frac{\omega}{2}\right) + \left(\Uparrow \frac{\omega}{2}\right) + (\Uparrow \omega) = \boxed{\left(\Leftarrow \frac{\omega}{2}\right) + \left(\Uparrow 3\frac{\omega}{2}\right)}$$

Solució 2 : Sense utilitzar EI^{Bola}_{Pista}

$\bar{v}_T(P) = \odot\, 3r\omega$

$\bar{v}_T(S) = \odot\, 2r\omega$

$\bar{v}_T(Q) = \bar{0}$



EI^{Bola}_{T} = recta per Q

$\bar{\Omega}^{Bola}_{T} = (\Uparrow \Omega_1) + (\Leftarrow \Omega_2)$

Ha de ser en el pla del dibuix vist com són $\bar{v}_T(P)$ i $\bar{v}_T(S)$

$\bar{v}_T(P)$ calculada des de Q:

$$\odot\, 3r\omega = \left[(\Uparrow \Omega_1) + (\Leftarrow \Omega_2)\right] \times (\leftarrow 2r)$$

$$\odot\, 3r\omega = \odot\, 2\Omega_1 r$$

$$\Omega_1 = \frac{3}{2}\omega \qquad (I)$$

$\bar{v}_T(S)$ calculada des de Q:

$$\odot\, 2r\omega = \left[(\Uparrow \Omega_1) + (\Leftarrow \Omega_2)\right] \times \left[(\leftarrow r) + (\downarrow r)\right]$$

2 condicions que determinen Ω_1 i Ω_2

$$\odot\, 2r\omega = (\Uparrow \Omega_1) \times (\leftarrow r) + (\Leftarrow \Omega_2) \times (\downarrow r)$$

$$\odot\, 2r\omega = (\odot\, \Omega_1 r) + (\odot\, \Omega_2 r)$$

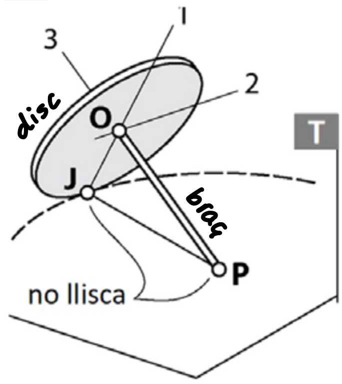
$$2\cancel{r}\omega = (\Omega_1 + \Omega_2)\cancel{r}$$

$$\Omega_2 = 2\omega - \Omega_1 \overset{(I)}{=} 2\omega - \frac{3}{2}\omega = \frac{\omega}{2}$$

Per tant

$$\boxed{\bar{\Omega}^{Bola}_{T} = \left(\Uparrow \frac{3}{2}\omega\right) + \left(\Leftarrow \frac{\omega}{2}\right)}$$

5P $v_T(\mathbf{O})$ valor variable



El disc i el braç són solidaris, i mantenen contacte sense lliscar amb el terra (T). El centre del disc **O** té celeritat variable respecte del terra. Determina la direcció de $\bar{\alpha}_T^{disc}$.

Solució

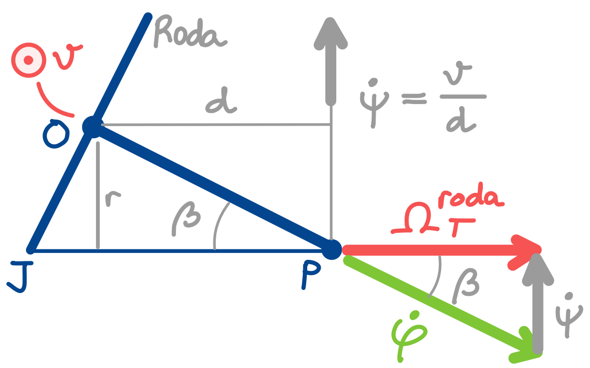
Sigui "roda" el sòlid "disc + braç". $\bar{\alpha}_T^{disc} = \bar{\alpha}_T^{roda}$.

Clarament $\begin{cases} EI_T^{roda} = \text{recta } JP. \\ \bar{\Omega}_T^{roda} \text{ té la dir. de la recta } JP \end{cases}$

Sigui v la celeritat de O. Suposem inicialment que

$$\bar{v}_T(O) = (\odot v)$$

d'acord amb el seg. dibuix:



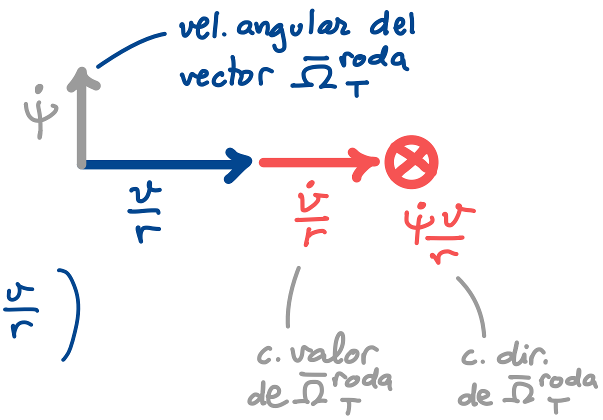
Podem veure la roda com una baldufa caiguda de vel. angular:

$$\bar{\Omega}_T^{roda} = (\searrow \dot{\varphi}) + (\Uparrow \dot{\psi})$$

Com que $\bar{\Omega}_T^{roda}$ té la dir de JP:

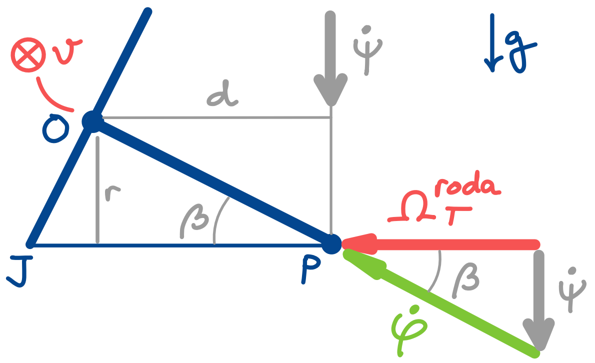
$$\bar{\Omega}_T^{roda} = \left(\Rightarrow \frac{v}{r}\right)$$

i derivant-la geomètricament:



$$\bar{\alpha}_T^{roda} = \left(\Rightarrow \frac{\dot{v}}{r}\right) + \left(\otimes \dot{\psi} \frac{v}{r}\right)$$

Si haguéssim assumit $\bar{v}_T(O) = (\otimes v)$, hauríem obtingut



$$\bar{\Omega}_T^{roda} = \left(\Leftarrow \frac{v}{r}\right)$$

$$\bar{\alpha}_T^{roda} = \left(\Leftarrow \frac{\dot{v}}{r}\right) + \left(\otimes\ \dot\psi \frac{v}{r}\right)$$

En aquest cas la component $\otimes$ es manté, però la $\Leftarrow$, tot i ser del mateix valor, té direcció oposada a la del cas previ.

En resum podem dir que, en ambdós casos, $\bar{\alpha}_T^{roda}$ és horitzontal (*) i amb component z negativa (d'acord amb la base de l'enunciat).

(*) Vol dir que és en el pla horitzontal ($\perp$ a $\bar{g}$)