4P

Composició de movіments

Avui practicarem:

$$\overline{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P}) + \overline{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P})$$

$$\text{amb} \quad \overline{\mathbf{v}}_{ar}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{v}}_{AB}(\mathbf{P} \in \text{REL})$$

$$\overline{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{a}}_{REL}(\mathbf{P}) + \overline{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) + \overline{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P})$$

$$\text{amb} \quad \begin{cases} \overline{\mathbf{a}}_{ar}(\mathbf{P}) = \overline{\mathbf{a}}_{AB}(\mathbf{P} \in \text{REL}) \\ \overline{\mathbf{a}}_{Cor}(\mathbf{P}) = 2\overline{\Omega}_{AB}^{REL} \times \overline{\mathbf{v}}_{REL}(\mathbf{P}) \end{cases}$$

Recordeu:

Sempre cal declarar les referències.

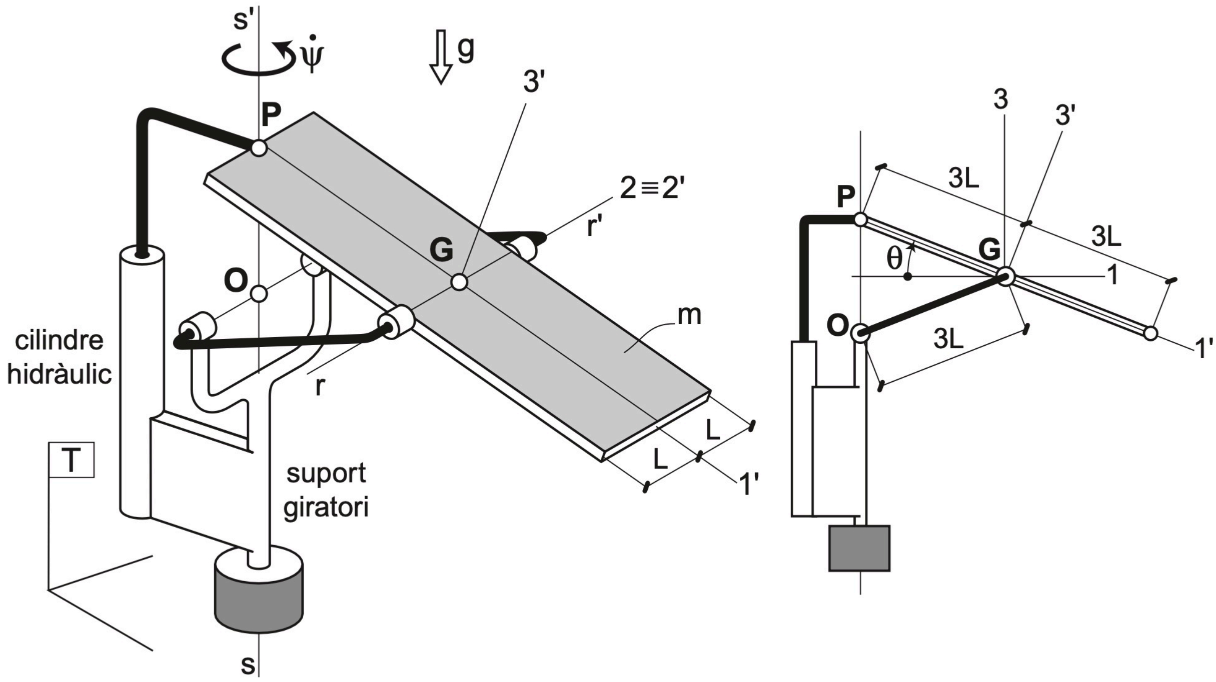
Quan feu composició de moviments, cal declarar què feu servir com a referències absoluta i relativa (AB i REL)

Si expresseu els resultats en alguna base, indiqueu a què són fixes les direccions d’aquesta base.

Problema 1, gener 2007 (variació del C3-E.2 de la Wikimec)

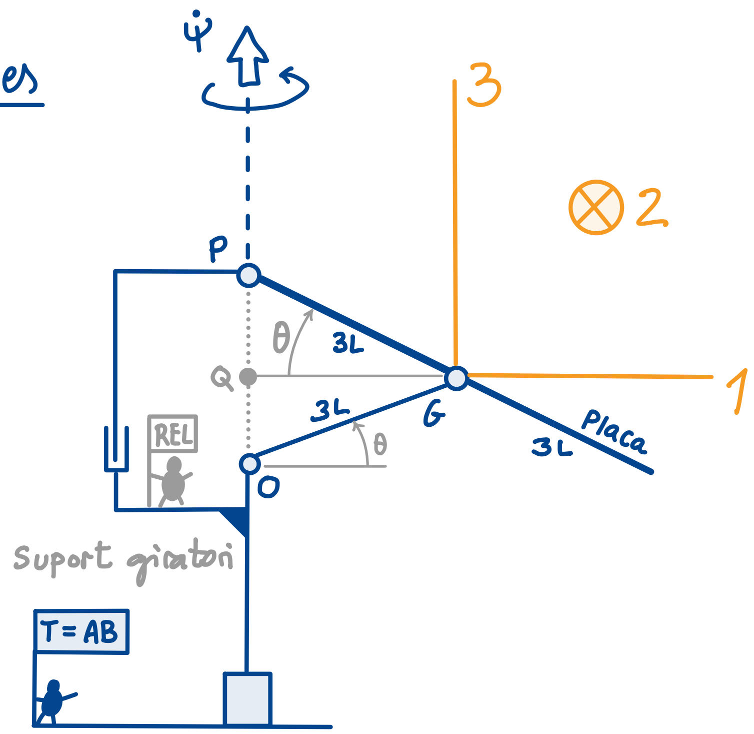
Placa articulada giratòria

La placa rectangular està unida a un suport giratori a través de dues barres amb articulacions als extrems. Una tercera barra està unida a la placa a través d'una **ròtula esfèrica** (a $\mathbf{P}$) i al suport a través d'un **enllaç cilíndric**. El suport gira amb velocitat angular $\bar{\dot{\psi}}$ de valor variable respecte del terra (T).



Determineu les components, en la base d'eixos (1,2,3), de l'acceleració del centre d'inèrcia **G** de la placa respecte al terra per composició de moviments, prenent com a ref. REL. la solidària al suport giratori **[3 p]**

Pistes



→ velocitats
→ accel.

Dir. QG   Dir Vertical

$$\underbrace{B = (1, 2, 3)}_{\text{fixa al suport giratori}}$$

$\bar{v}_T(G)$ via comp. vel.

REL = suport giratori

AB = T

Dibuixo vecs. vermells a la fig. i els projecto

$$\bar{v}_{AB}(G) = \underbrace{(\uparrow \quad)}_{\bar{v}_{REL}(G)} + \overbrace{\underbrace{(\otimes \qquad)}_{\bar{v}_{ar}(G)}}^{\text{la que té G si G} \in \text{REL}} = \begin{Bmatrix} \\ \\ \\ \end{Bmatrix}_B$$

No es demana, però ho fem x practicar

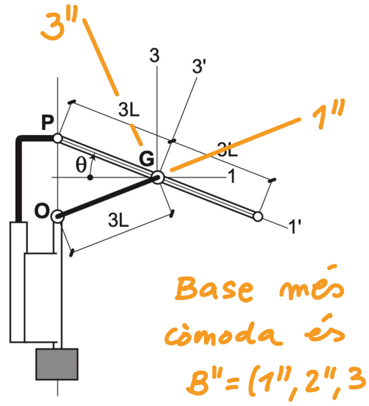
$\bar{a}_T(G)$ via comp. accel.

$$\bar{a}_{AB}(G) = \underbrace{(\qquad) + (\qquad)}_{\bar{a}_{REL}(G)} + \underbrace{(\otimes \qquad) + (\leftarrow \qquad)}_{\bar{a}_{ar}(G)} +$$

$$+ \underbrace{2\overbrace{(\qquad)}^{\bar{\Omega}_T^{REL}} \times \overbrace{(\qquad)}^{\bar{v}_{REL}(G)}}_{\bar{a}_{cor}(G) =} = \begin{Bmatrix} -3L\ddot\theta\sin\theta - 3L\dot\theta^2\cos\theta - 3L\dot\psi^2\cos\theta \\ 3L\ddot\psi\cos\theta - 6L\dot\theta\dot\psi\sin\theta \\ 3L\ddot\theta\cos\theta - 3L\dot\theta^2\sin\theta \end{Bmatrix}_B \quad (A)$$

Dibuixo vecs blaus a la figura i els projecto

Nota: La base + còmoda per expressar els resultats, de fet, és la solidària a les barres laterals, xq només requereix descompondre $\leftarrow \dot{\psi}^2 3L\cos\theta$. <u>Deures</u>: projecten $\bar{v}_{AB}(G)$ i $\bar{a}_{AB}(G)$ en aq. base



Base més còmoda és $B''=(1'',2'',3'')$

Sol. alternativa, derivant un vec. pos. (No la farem)

També és una bona opció!

$$\overline{OG} = \begin{Bmatrix} 3L\cos\theta \\ 0 \\ 3L\sin\theta \end{Bmatrix}_B = 3L \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{Bmatrix}_B \leftarrow$$

com que és un vec. de posició totalment genèric, és un vector "pel·lícula" i el podem derivar!

Derivem dues vegades en base B, que gira amb $\bar{\Omega}^B_T = \Downarrow\dot{\psi}$

$$\bar{v}_T(G) = \left.\frac{d\overline{OG}}{dt}\right]_T = 3L\left[\begin{Bmatrix} \dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\overbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}}^{\{\bar{\Omega}^B_T\}_B} \times \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\psi}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}\right] = 3L\begin{Bmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix}_B$$

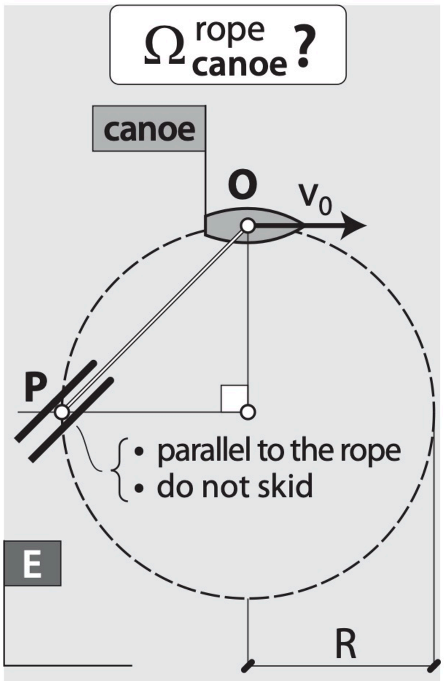
$$\bar{a}_T(G) = 3L\left[\begin{Bmatrix} -\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} -\dot{\psi}^2\cos\theta \\ -\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}}\right] =$$

$$= 3L\begin{Bmatrix} -\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta - \dot{\psi}^2\cos\theta \\ \ddot{\psi}\cos\theta - 2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta \end{Bmatrix}_B \quad (B)$$

(B) = (A)

Com esperàvem!

Canoa i esquiador (qüestió 2.42 RBK, pàg. 96)



2.42 Point **O** of the canoe has a uniform circular motion relative to the ground (E). The canoe drags a skier **P** (modeled as a particle) through a taut rope. What is the rope angular velocity relative to the canoe $\left(\Omega^{\text{rope}}_{\text{canoe}}\right)$ at this particular configuration?

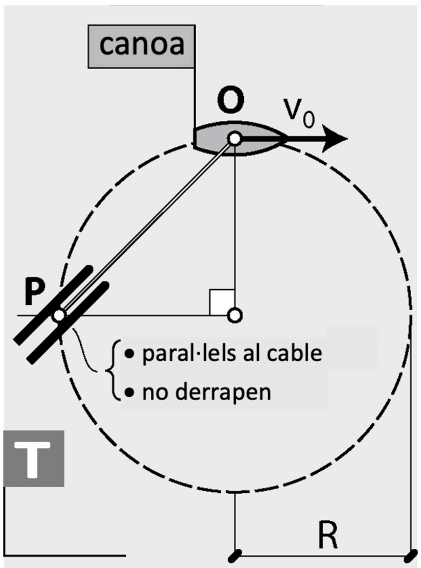
A 0

B $v_0/(\sqrt{2}R)$, clockwise direction

C $v_0/(\sqrt{2}R)$, counterclockwise direction

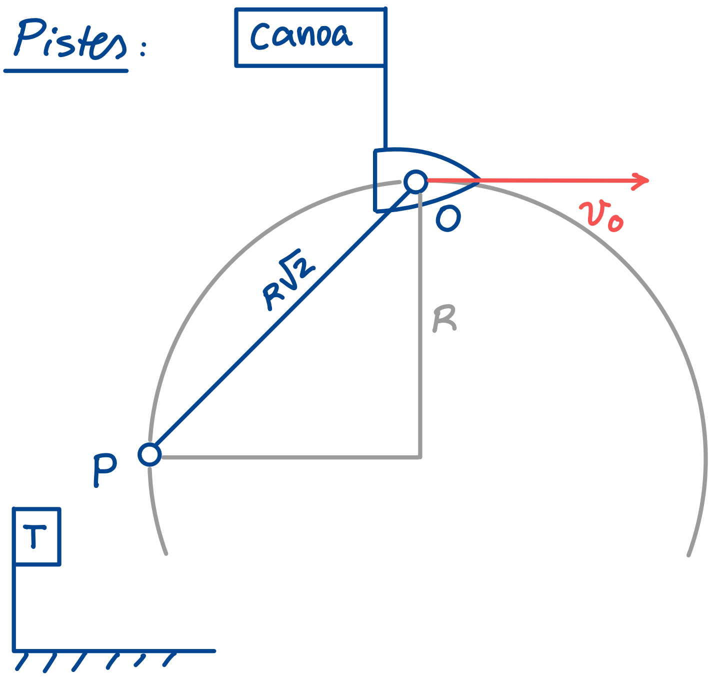
D $v_0/(2R)$, clockwise direction

E $v_0/(2R)$, counterclockwise direction



$\bar{\Omega}^{\text{cable}}_{\text{canoa}}$?

Pistes:



Farem comp. velocitats amb

$AB = T$

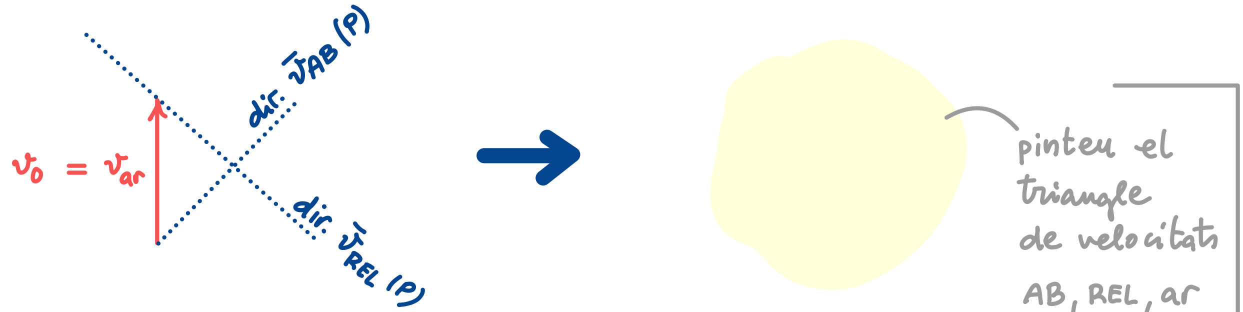
$REL = \text{Canoa}$

$$\bar{v}_{AB}(P) = \bar{v}_{REL}(P) + \bar{v}_{ar}(P)$$

$$\underbrace{\swarrow\!\!\nearrow v_{AB}}_{\text{Ja que esquís no derapen}} = \underbrace{\searrow v_{REL}}_{\text{Ja que mov. rel. és circular}} + \underbrace{\uparrow \;\square}_{\text{Ja que canoa fa movim. circular}} \quad (A)$$

sentit indeterminat

De (A) deduim la següent geometria de velocitats:



Com que des de la canoa veiem que

$$\bar{v}_{REL}(P) = \left(\square \right) \qquad (B)$$

la vel. ang. del cable respecte la canoa ha de tenir la forma $\bar{\Omega}^{\text{cable}}_{\text{canoa}} = \odot\, \omega$. Això implica que

$$\bar{v}_{REL}(P) = \Big(\underbrace{\square}_{\text{Ja que P té movim. circular vist des de la canoa}} \Big) \quad (C)$$

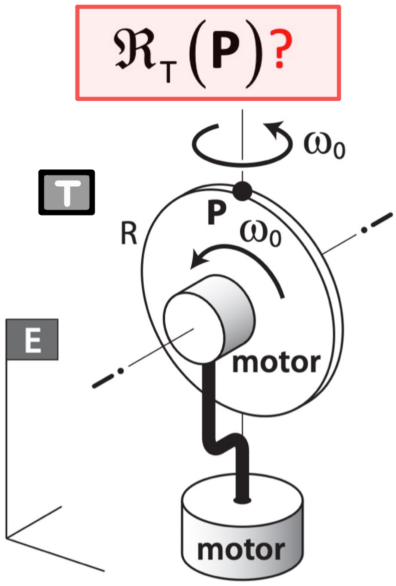
igualant (B) i (C):

$$\square \quad \Rightarrow \quad \omega = \square$$

Per tant:

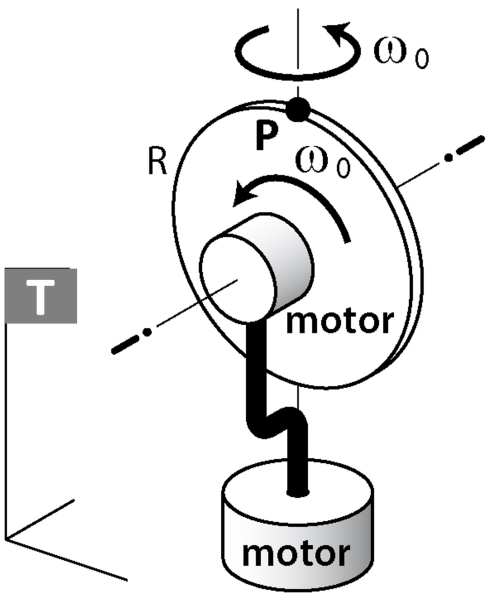
$$\boxed{\bar{\Omega}^{\text{cable}}_{\text{canoa}} = \square}$$

Disc de 2 GL (qüestió 2.18 RBK)



2.18 What is the value of the radius of curvature $\Re_T(\mathbf{P})$ when point **P** of the disk goes through the highest position?

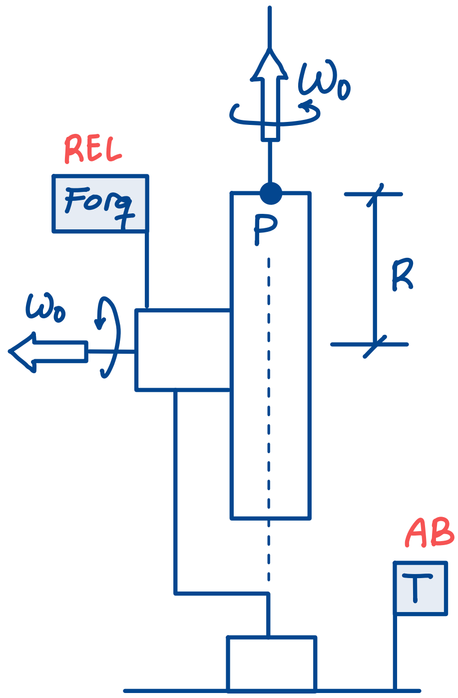
A 0
B R
C R/2
D $R/\sqrt{2}$
E $R/\sqrt{5}$



$\Re_T(\mathbf{P})$?

Pistes:

Comp. mov. $\left| \begin{array}{l} AB = T \\ REL = \text{Forq} \end{array} \right.$



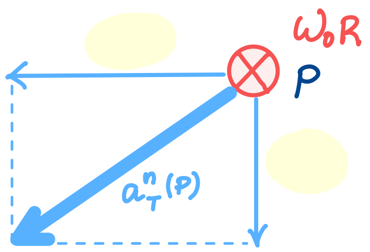
$$\bar v_{AB}(P) = \underbrace{\bar v_{REL}(P)}_{\otimes\, \omega_0 R} + \underbrace{\bar v_{ar}(P)}_{0} = \otimes\, \omega_0 R$$

$$\bar a_{AB}(P) = \bar a_{REL}(P) + \bar a_{ar}(P) + \underbrace{\bar a_{cor}(P)}_{2\,\bar\Omega^{REL}_{AB} \times \bar v_{REL}(P)} =$$

$$= \underbrace{(\downarrow \quad\quad)}_{REL} + \underbrace{(\quad\quad)}_{ar} + \underbrace{2\left[(\quad\quad)\times(\quad\quad)\right]}_{cor} = (\downarrow \quad\quad) + (\leftarrow \quad\quad)$$

Dibuixem vel. i acc. de P per esbrinar quina part és $\bar a^n_T(P)$:

— vel
— acc



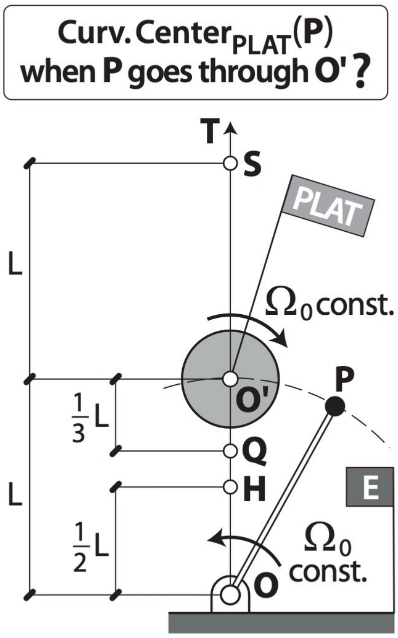
Tota l'accel. és normal!

$$a^n_T(P) = \sqrt{(\quad\quad)^2 + (\quad\quad)^2} =$$

$$\boxed{\mathcal{R}_T(P) = \frac{v_T^2(P)}{|a^n_T(P)|} = \frac{\omega_0^2 R^2}{\quad\quad} = \quad\quad}$$

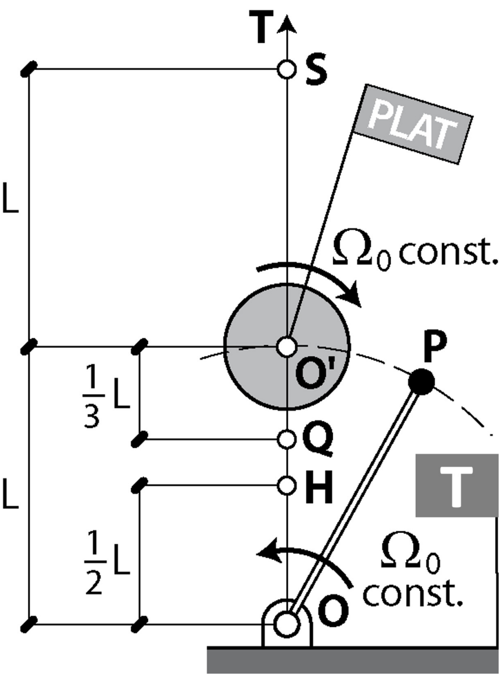
$$\boxed{\text{RESP} = \quad\quad}$$

CC de P (Qüestió 2.21 RBK)



2.21 Where is the **P** curvature center relative to the platform (PLAT) when **P** goes through the platform center **O′** (fixed to the ground E)?

A **O**
B **H**
C **Q**
D **S**
E **T**

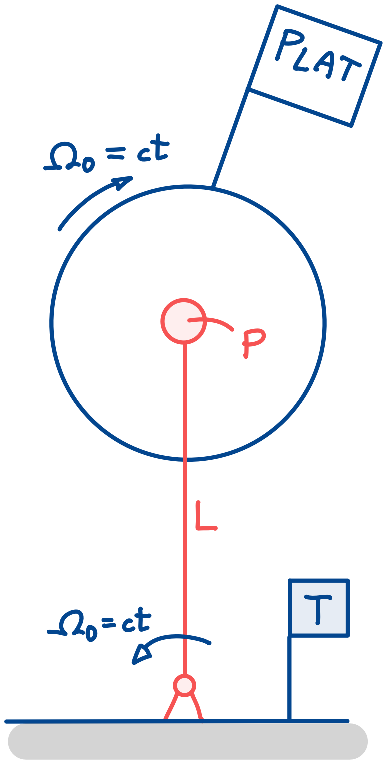


$CC_{PLAT}(\mathbf{P})$ quan

P passa per **O′**?

Sol:

Comp. vel. amb $\left| \begin{array}{l} AB = \\ REL = \end{array} \right.$



$$\boxed{\bar{v}_{REL}(P) = \underbrace{\bar{v}_{AB}(P)}_{} - \underbrace{\bar{v}_{ar}(P)}_{} = (\leftarrow \Omega_0 L)}$$

$$\boxed{\bar{a}_{REL}(P) = \bar{a}_{AB}(P) - \bar{a}_{ar}(P) - \underbrace{\bar{a}_{cor}(P)}_{2\bar{\Omega}^{REL}_{AB} \times \bar{v}_{REL}(P)} =}$$

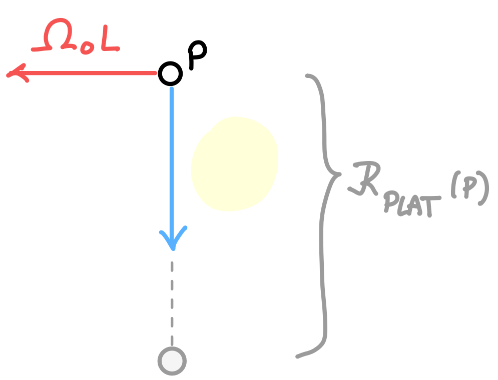
$$= (\downarrow \quad) - 0 - \underbrace{2\left[(\curvearrowright \quad) \times (\leftarrow \quad)\right]}_{\downarrow 2\,\Omega_0^2 L} =$$

$$\boxed{= (\qquad)}$$

Dibuix per esbrinar quina és la component $\bar{a}^n_{PLAT}(P)$

→ vel.

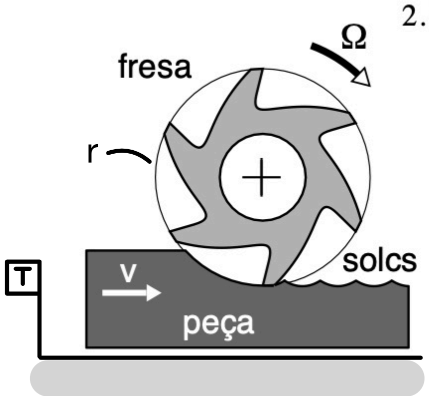
→ acc.



$$\mathcal{R}_{PLAT}(P) = \frac{v^2_{PLAT}(P)}{|a^n_{PLAT}(P)|} = \frac{\quad}{\quad} = $$

$CC_{PLAT}(P) =$

$\boxed{RESP = \qquad}$



2.14 En una fresadora la fresa de radi r gira amb velocitat angular Ω constant al voltant del seu eix, que és fix, i la peça que és fresada avança amb celeritat v. Quin és el radi de curvatura del fons dels solcs que queden al damunt de la superfície fresada?

A r
B $r(1+v/r\,\Omega)$
C $r(1-v/r\,\Omega)$
D $r(1+v/r\,\Omega)^2$
E $r(1-v/r\,\Omega)^2$

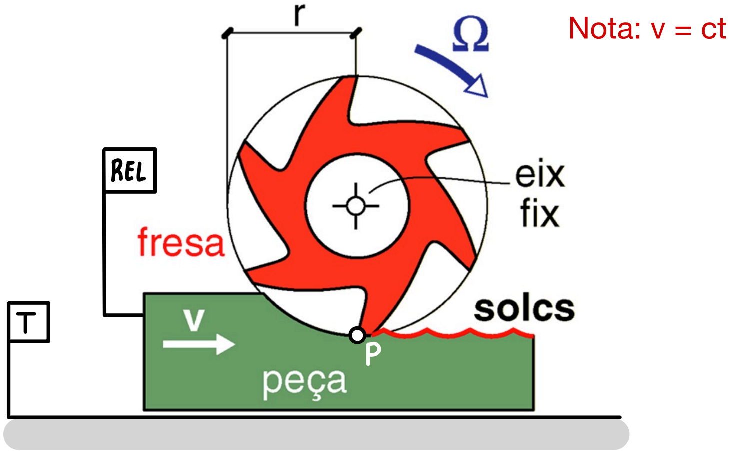
Nota: v = ct

Sol:

Punt clau

> Si definim
>
> $AB = T$
>
> $REL = \text{Peça}$
>
> el radi que ens demanen és
>
> $\mathcal{R}_{\underbrace{REL}_{\text{Peça}}}(P)$

$\mathcal{R}$ del fons dels solcs

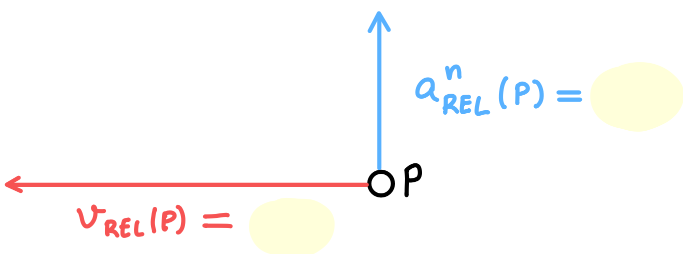


Cal trobar la $\bar{v}_{REL}(P)$ i la $\bar{a}^n_{REL}(P)$, i $\mathcal{R}_{REL}(P) = \dfrac{|v_{REL}(P)|^2}{|a^n_{REL}(P)|}$

$$\bar{v}_{REL}(P) = \bar{v}_{AB}(P) - \bar{v}_{ar}(P) = (\quad) - (\quad) = \left[\leftarrow (\quad)\right]$$

$$\bar{a}_{REL}(P) = \bar{a}_{AB}(P) - \bar{a}_{ar}(P) - 2\,\bar{\Omega}^{REL}_{AB} \times \bar{v}^{REL}_{AB}(P) =$$

$$= (\uparrow \quad) - (\quad) - 2\,(\quad \times \quad) = (\uparrow \quad)$$



$$\mathcal{R}_{REL}(P) = \frac{(\quad)^2}{\quad} = \underline{\qquad\qquad} = r\left(1 + \frac{v}{\Omega r}\right)^2$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2b}{a}\right) = a^2\left(1 + \frac{b}{a}\right)^2}$$

Aquest últim pas només reescriu la resposta en la forma de l'enunciat de la qüestió. Estrictament, no cal!