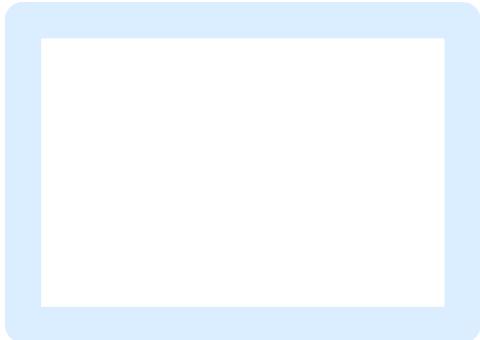


3P

Angles d'Euler



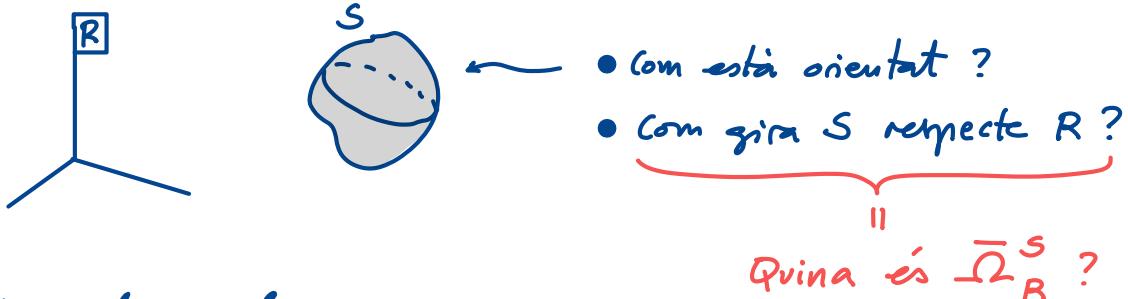
= Recordatori de teoria



= Exercicis a resoldre

Repàs Angles Euler

Permeten orientar un sòlid respecte una ref. i expressar la vel. angular del sòlid respecte aquesta ref.

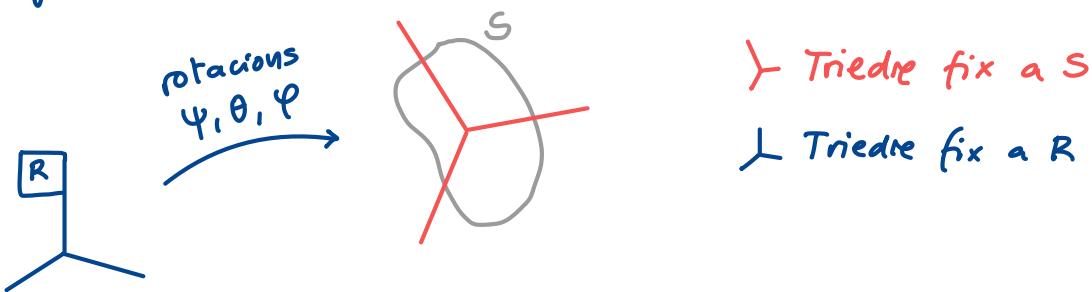


Recordem els angles

ψ	θ	φ
psi	theta	phi
precessió	nutació	spin

Sempre en aquest ordre!

Sigui un sòlid S amb un triedre fix a ell. Les rotacions d'Euler són 3 rotacions encaadenades (en sèrie), al voltant de 3 eixos, que permeten definir l'orientació del triedre fix a S relativa a un triedre fix a la referència :



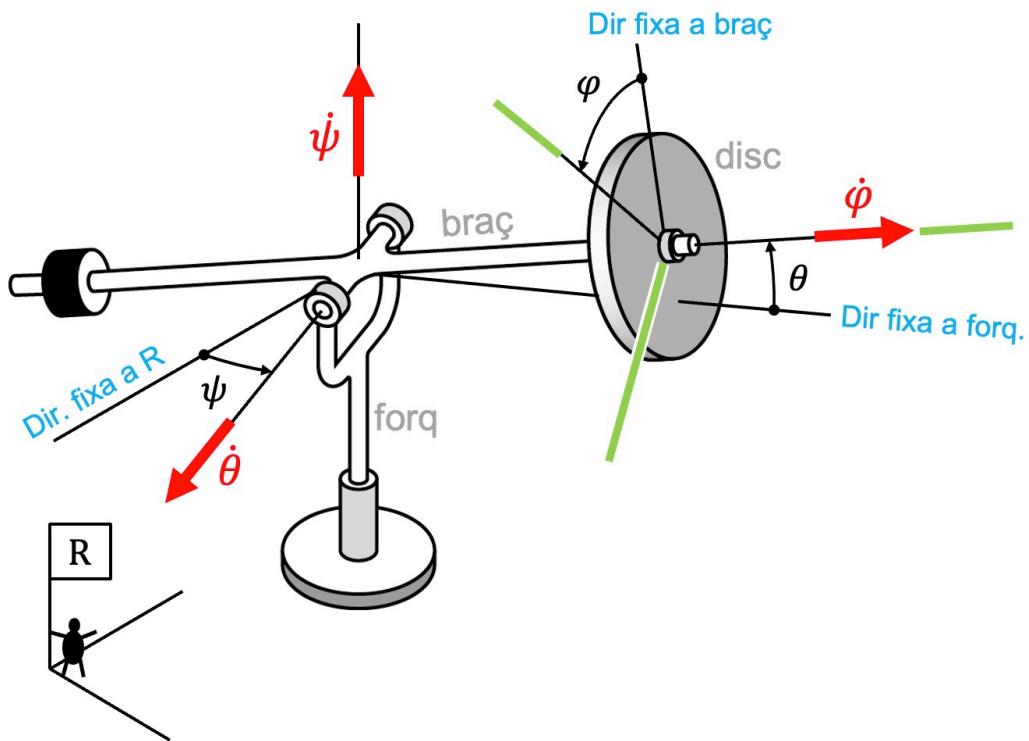
A teoria heu vist com són aquestes rotacions en el cas del giroscopi. Vegeu apartat C1.4 de mec.etscib.edu wikimec

Però una cosa és com queda orientat aquest triedre fix al sòlid, i una altra de ben diferent és com queden els eixos de rotació després de cada gir. Vegeu-ho:

Tot això es veu clar al giroscopi, on $S = \text{disc}$:

Eixos fixs a S ? \rightarrow El verd!

Eixos d'Euler? \rightarrow Els dels vecs. vermellos! $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}$



Eix	Com queda?	Gira amb vel. ang.
A 90° $\bar{\psi}$	Fix a R \perp a $\bar{\varphi}$ i $\bar{\psi}$	Res! $\bar{\psi}$
A 90° $\bar{\theta}$	Fix a S	$\bar{\varphi} + \bar{\theta}$

$$\text{Eix } \bar{\theta} = (\text{Pla } \perp \bar{\psi}) \cap (\text{Pla } \perp \bar{\varphi})$$

Especificació rigorosa de la posició del 2^o eix

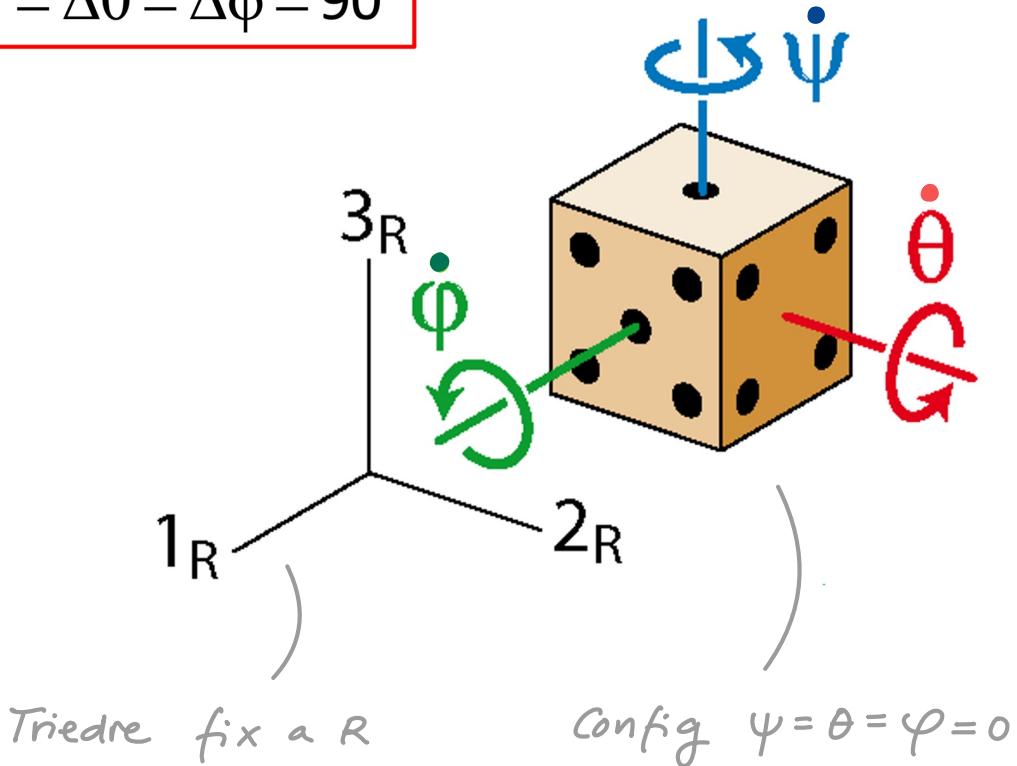
$\bar{\psi}$ i $\bar{\varphi}$ poden tenir un angle qualsevol!

Orientació d'un dau

El dau s'orienta respecte d'una referència R mitjançant tres angles d'Euler. Per a la configuració $\psi = \theta = \varphi = 0$, les tres velocitats angulars associades tenen l'orientació indicada a la figura.

Quina serà l'orientació de $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ i $\dot{\varphi}$ si es modifiquen els angles d'acord amb els increments $\Delta\psi = \Delta\theta = \Delta\varphi = 90^\circ$? I com quedarà orientat el dau?

$$\Delta\psi = \Delta\theta = \Delta\varphi = 90^\circ$$

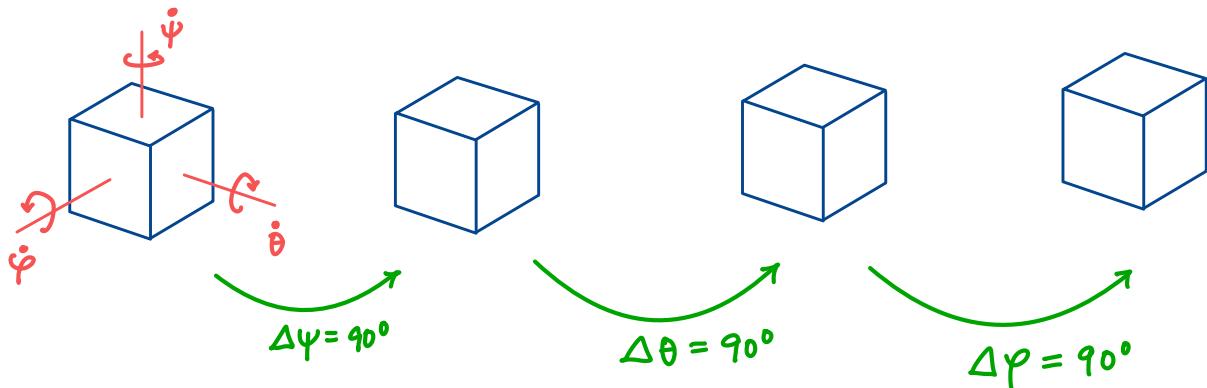


Pistes :

Recordeu com funcionen les rotacions d'Eucler en el cas del giroscopi (C7.4 Wikimec) :

- Eix $\bar{\psi}$ és fix a la ref.
- Eix $\bar{\theta}$ gira amb ψ
- Eix $\bar{\varphi}$ gira amb ψ i θ
però és fix al solid (dau)

Pinteu com queden els eixos $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$ del dau després de les rotacions:

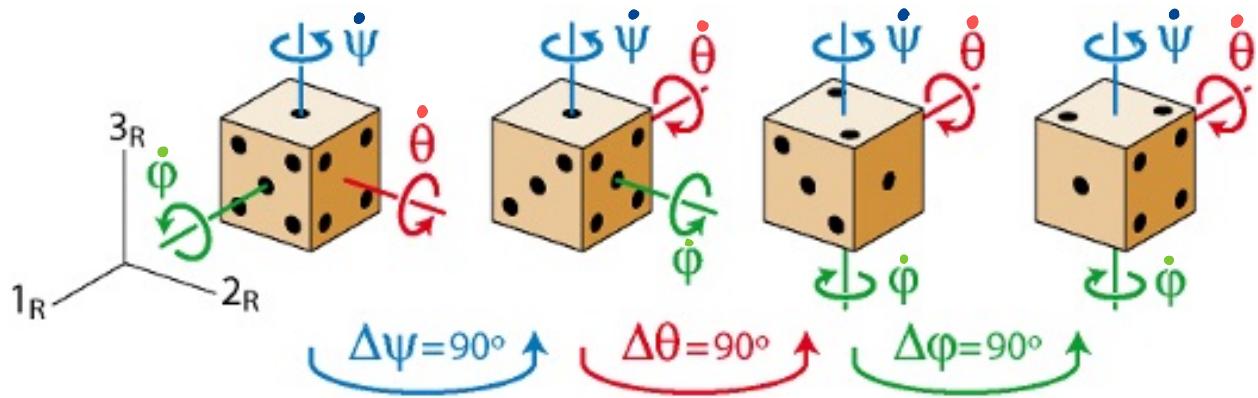


Després pinteu les cares del dau

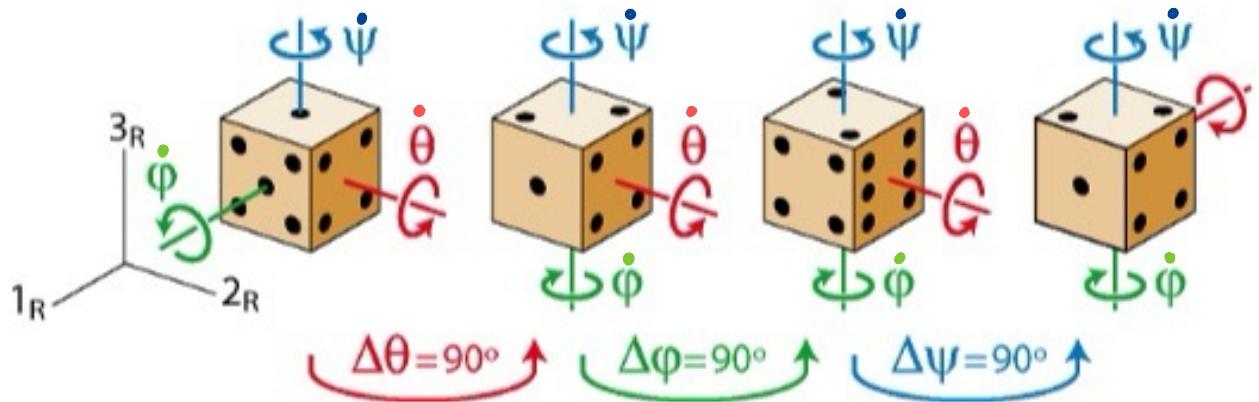
Recorden : les cares oposades sumen 7.

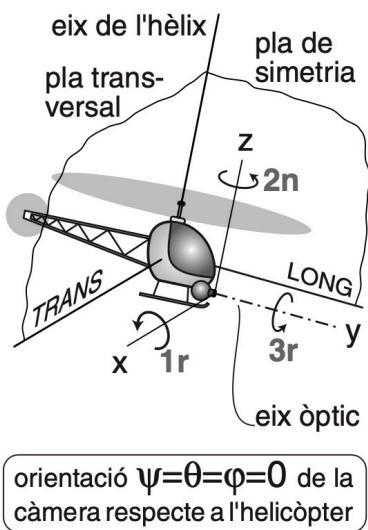
Solució : pàg. següent.

Aplicació en l'ordre $\Delta\psi, \Delta\theta, \Delta\phi$



Aplicació en l'ordre $\Delta\theta, \Delta\phi, \Delta\psi$
(el resultat final ha de ser =)





A2 Una càmera per filmar des d'un helicòpter s'orienta **respecte a l'helicòpter** per mitjà de tres angles d'Euler. Per a l'orientació $\psi = \theta = \phi = 0$, els eixos de rotació d'Euler són els indicats a la figura. Per a una orientació arbitrària de la càmera, quina és la direcció de l'eix de la segona rotació?

- A La de l'eix de l'hèlix.
- B La de la projecció de l'eix z de la càmera sobre el pla transversal de l'helicòpter.
- C La intersecció del pla de la pel·lícula amb el pla transversal de l'helicòpter.
- D La intersecció del pla de la pel·lícula amb el pla de simetria de l'helicòpter.
- E La de la direcció z de la càmera.

Compte :

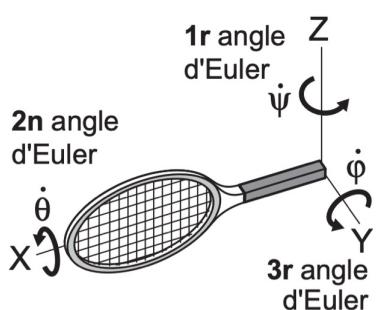
La càmera s'orienta respecte l'helicòpter, no el terra.

Vol dir que el 2^{er} eix d'Euler, $\bar{\theta}$, es fix a l'helicòpter

Pista :

Visualitzeu el moviment del 2^{er} eix $\bar{\theta}$. Aquest eix es manté sempre \perp al 1^{er} eix $\bar{\psi}$ \perp al 3^{er} eix $\bar{\phi}$

Feu-vos un dibuix d'aquest moviment.

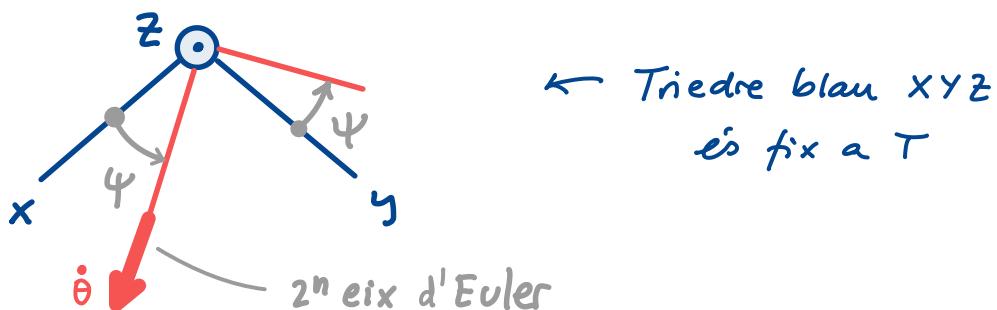


orientació $\psi=\theta=\phi=0$

2 Per estudiar la cinemàtica d'una raqueta, es descriu la seva orientació per mitjà de tres rotacions segons angles d'Euler que, per a $\psi = \theta = \phi = 0$, tenen els eixos indicats a la figura. En aquesta configuració, la raqueta es troba en el pla vertical XZ. Per a una orientació general, quina és la direcció del segon eix d'Euler?

- A La de l'eix X fix a terra
- B La del mànec de la raqueta
- C La de la projecció horitzontal del mànec
- D La de la recta horitzontal del pla de la raqueta
- E La de la recta de màxim pendent del pla de la raqueta

Solució: 2ⁿeix es mou en el pla horitzontal de T:



2ⁿeix
d'Euler
és

\perp al 1er eix \Rightarrow 2ⁿeix \in pla horitzontal
" Dir. vertical
(la gravetat)
PH

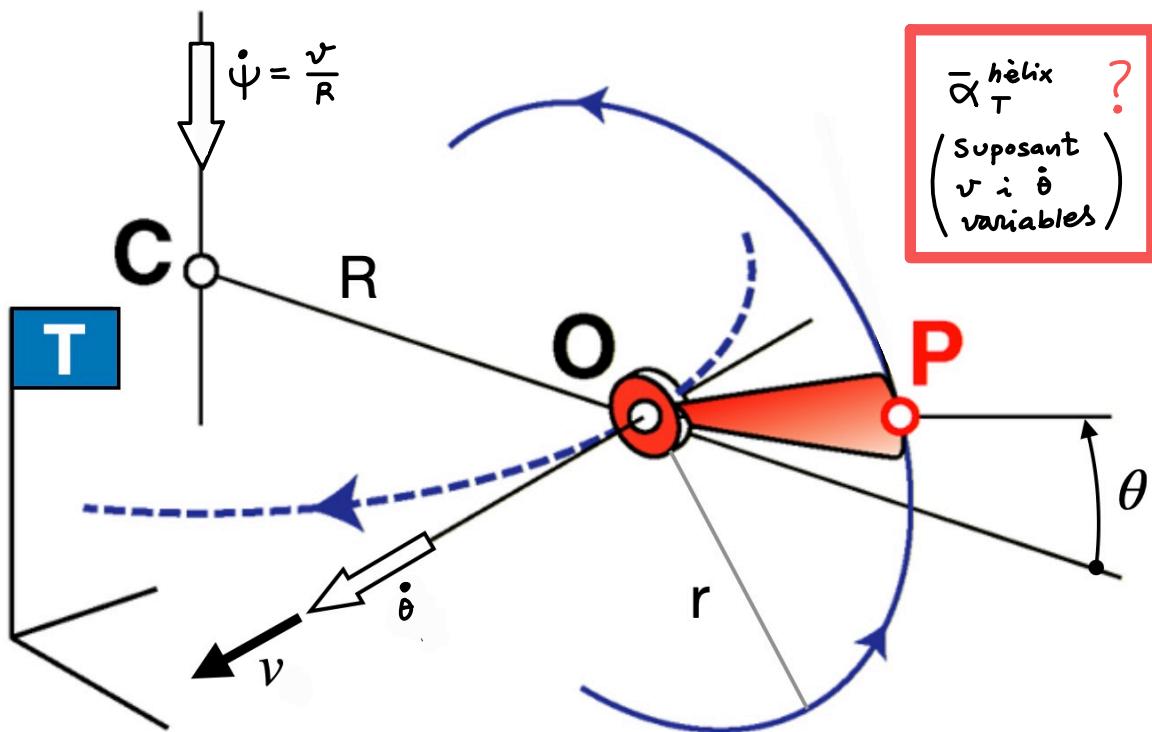
\perp al 3er eix \Rightarrow 2ⁿeix \in pla raqueta
Dir. \perp pla raqueta
PR

Ergo:

$$2^n \text{eix} = PH \cap PR$$

(Resp. = D)

En el problema de l'avió, suposeu ara que $\dot{\theta}$ és variable i que la celeritat del punt O és v , també variable. En particular, això vol dir que la vel. angular de la cabina resp. T és $\dot{\psi} = \frac{v}{R}$. Calculeu $\bar{\alpha}_T^{\text{hèlix}}$.

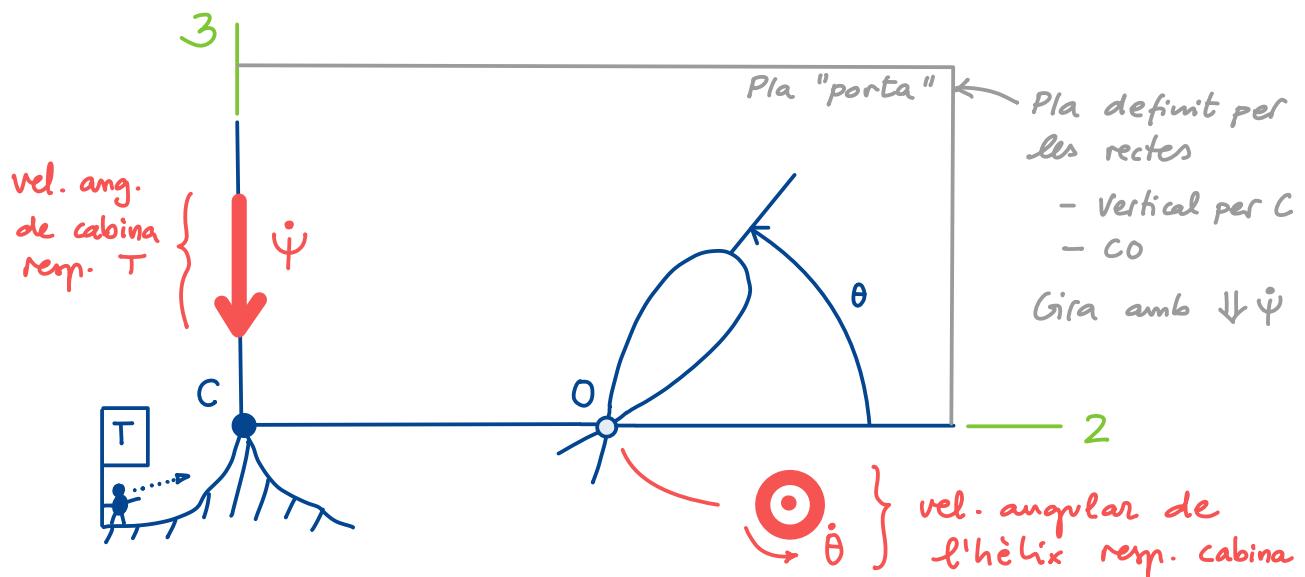


Per exercitar-vos, feu-ho per varíes vies:

- Per derivació geomètrica
- Per derivació analítica
 - { En base B fixa a cabina
 - " " B' " " hèlix

Solució: v. 2 pàgs. següents

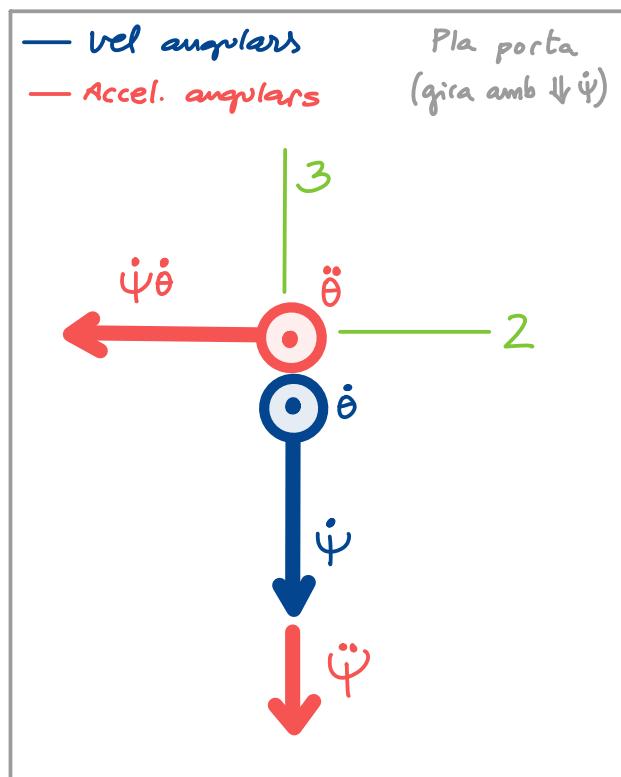
$\bar{\alpha}_T^{\text{hèlix}}$ derivant $\bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}}$ geomètricament



La vel. angular de l'hèlix resp. T és :

$$\bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}} = \bar{\Omega}_{\text{cab}}^{\text{hèlix}} + \bar{\Omega}_T^{\text{cab}} = (\circ \ddot{\theta}) + (\Downarrow \dot{\psi})$$

La representem en el dibuix següent (vecs blaus). Si derivem els vecs. blaus geomètricament, obtenim els vermells, que són les components de $\bar{\alpha}_T^{\text{hèlix}}$:



Definint la base

$$B = (1, 2, 3)$$

Dir. vertical

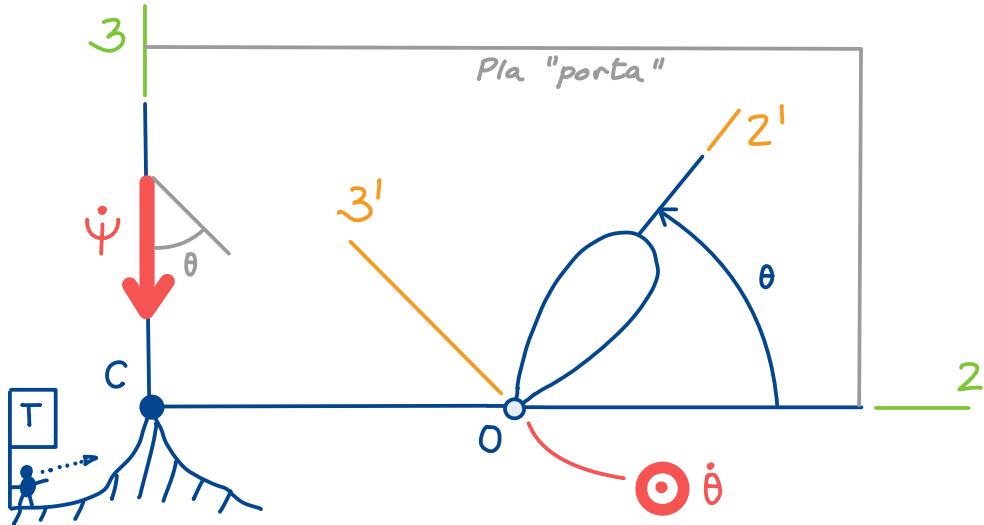
Dir. CO

podem projectar els vecs. vermells sobre B per obtenir:

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_T^{\text{hèlix}} \end{cases}_B = \begin{cases} \ddot{\theta} \\ -\dot{\varphi}\ddot{\theta} \\ -\ddot{\varphi} \end{cases} \quad (A)$$

$\bar{\alpha}_T^{\text{hèlix}}$ derivant analíticament

Ho farem en 2 bases. La $B = (1, 2, 3)$ definida abans (fixa a la cabina) i la $B' = (1', 2', 3')$, fixa a l'hèlix.



La $B = (1, 2, 3)$ sembla + natural p.g. facilita la projecció dels vecs. vermellos que conformen $\bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}}$, però també ho farem en la B' perquè és instructiu (hi ha un detall).

En base B

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}} \\ \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{array} \right\} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{array} \right\}}_{\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -\dot{\psi}\dot{\theta} \\ 0 \end{array} \right\}} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} \\ -\dot{\psi}\dot{\theta} \\ -\ddot{\psi} \end{array} \right\} \quad (A')$$

Mateix resultat que (A), com era d'esperar !

En base B'

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}} \\ \end{array} \right\}_{B'} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ -\dot{\psi}\sin\theta \\ -\dot{\psi}\cos\theta \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}} \\ \end{array} \right\}_{B'} \quad \text{||} \longleftrightarrow \text{p.g. } B' \text{ és solidària a l'hèlix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha}_T^{\text{hèlix}} \\ \end{array} \right\}_{B'} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} \\ -\dot{\psi}\sin\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ -\ddot{\psi}\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \end{array} \right\} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_T^{B'} \\ \end{array} \right\}_{B'} \times \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_T^{\text{hèlix}} \\ \end{array} \right\}_{B'}}_{0 \text{ (matrix vector a banda i banda)}}$$

Pinça braç robòtic

La pinça d'un braç robòtic (no dibuixat) pot tenir una orientació arbitrària. Si utilitzem els eixos d'Euler de la figura per indicar aquesta orientació respecte el terra T, determineu:

(1) - La dir. i sentit de $(\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$ per a $\psi = \theta = \varphi = 90^\circ$

(2) - $\bar{\alpha}_T^{\text{pinça}}$ per a $\psi = \theta = \varphi = 0$ si $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$
tenen valors constants

Pinça de braç robòtic

Dir. i sentit de

$$\bar{\dot{\psi}} \quad \bar{\dot{\theta}} \quad \bar{\dot{\varphi}}$$

?

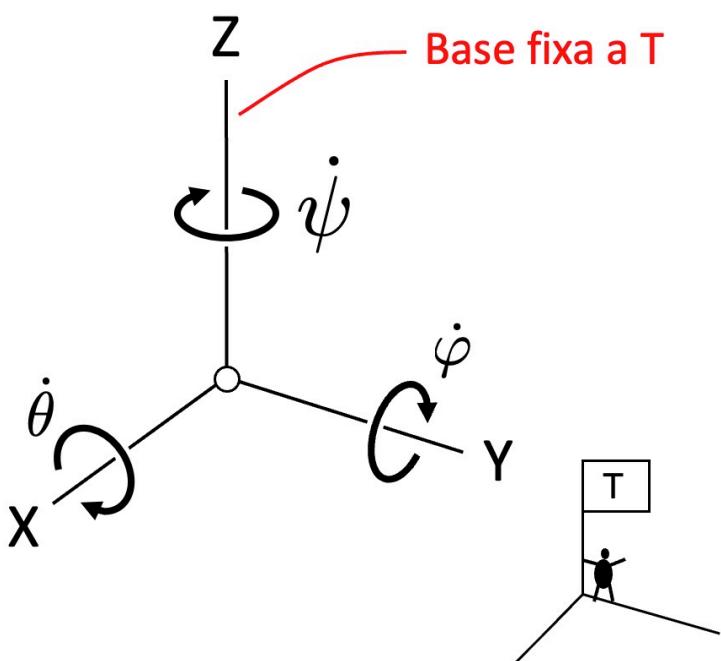
per $\psi = \theta = \varphi = 90^\circ$

$\bar{\alpha}_T^{\text{pinça}}$ per $\psi = \theta = \varphi = 0^\circ$?

si $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ tenen valors ct

eixos d'Euler per a

$$\psi = \theta = \varphi = 0^\circ$$



Pistes

- Per respondre (1) feu-vos un dibuix (3D o 2D)
- Per respondre (2), calculau $\bar{\alpha}_T^{\text{pinga}}$ per derivació geomètrica mitjançant un dibuix i tenint en compte:

Tots només canviem de dir., perquè $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = (ct, ct, ct)$

$$\bar{\alpha}_T^{\text{pinga}} = \underbrace{\frac{d \bar{\psi}}{dt} \Big|_T}_{0} + \underbrace{\frac{d \bar{\theta}}{dt} \Big|_T}_{\bar{\psi} \times \bar{\theta}} + \underbrace{\frac{d \bar{\varphi}}{dt} \Big|_T}_{(\bar{\psi} + \bar{\theta}) \times \bar{\varphi}}$$

És un bon exemple per veure que la derivació analítica pot ser traïdora: la temptació és projectar $\bar{\Omega}_T^{\text{pinga}}$ en tres eixos ortogonals... la qual cosa correspon necessàriament a una expressió particular, ja que $\bar{\psi}$ i $\bar{\varphi}$ no són, en general, perpendiculars.

En canvi, amb la derivació geomètrica, com que sabem de quines rotacions està afectada cada rotació d'Euler, encara que treballen amb el dibuix particularitzat, la derivada surt bé!

Solució :

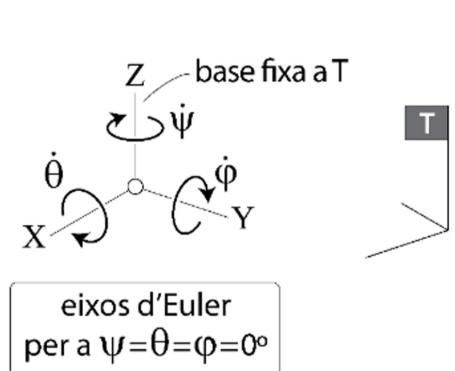
Següents 3 pàgines

Direcció i sentit de $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$ per $\psi = \theta = \varphi = 90^\circ$

Ho podem recordar:

(1) Amb dibuixos 2D

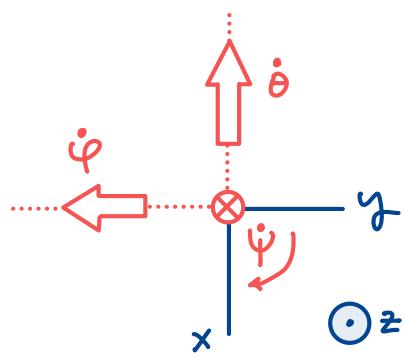
(2) Amb dibuixos 3D
+ fàcil x mi!



Situació inicial

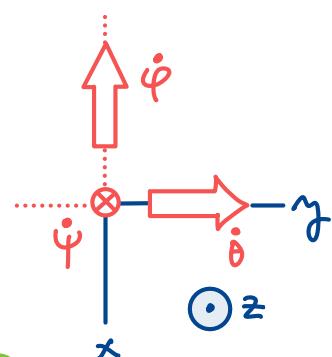
Amb dibuixos 2D

Situació inicial
(Vista des de Z^+)

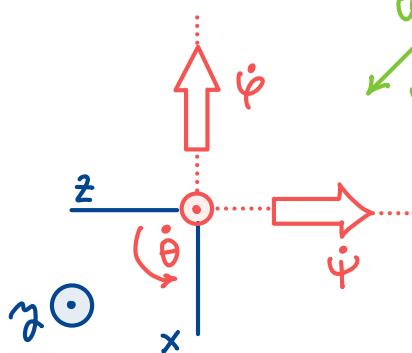


Triedre XYZ fix a T pintat en blau

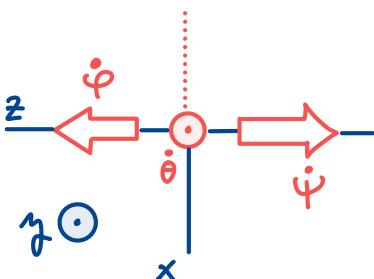
$\Delta\psi = 90^\circ$



Canvi punt de vista
(passem a vista des d'yx)



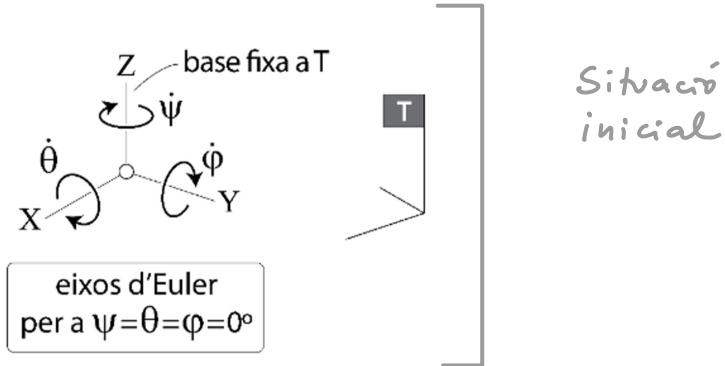
$\Delta\theta = 90^\circ$



Vel. angular	Dir. i sentit
$\bar{\psi}$	z^-
$\bar{\theta}$	y^+
$\bar{\varphi}$	z^+

Resposta

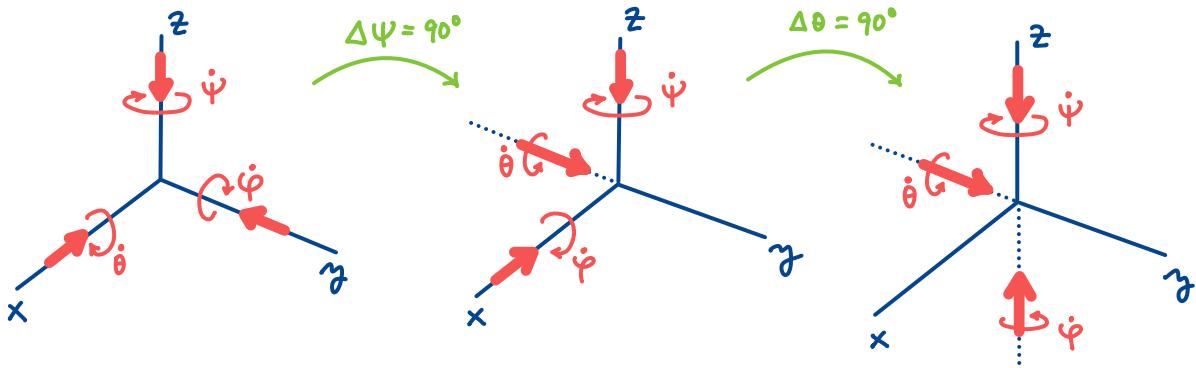
Amb dibuixos 3D



Resposta:

Vel. angular	Dir. i sentit
$\dot{\psi}$	z^-
$\dot{\theta}$	y^+
$\dot{\phi}$	z^+

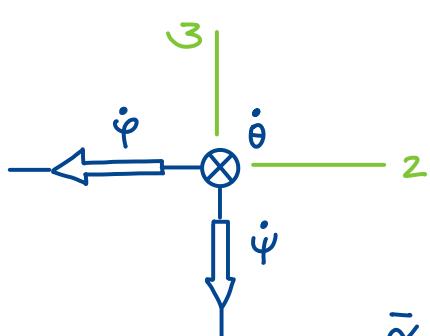
En blau, el triedre XYZ fix a T:



$\bar{\alpha}_T^{\text{pinga}}$ per $\psi=\theta=\phi=0$ si $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ tenen valors ct.

Compte: no podem derivar $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$ analíticament en $B = (1, 2, 3)$ tal i com els tenim, p.q. no són en posició genèrica! Primer els hauríem de convertir a "vec. pel·lícula". En canvi, derivant geomètricament més bé perquè sabem per quines rotacions està afectat cada vector:

Via geomètrica



$\bar{\psi}$ no canvia de dir ni valor

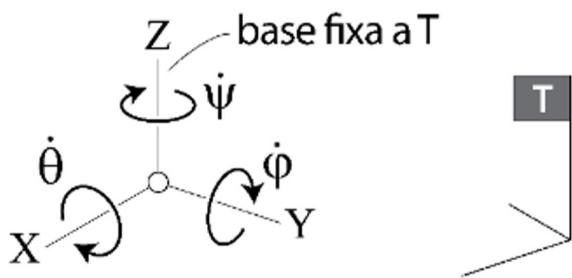
$\bar{\theta}$ canvia de dir, afectat per $\bar{\psi}$

$\bar{\phi}$ " " " , " " $\bar{\psi}, \bar{\theta}$

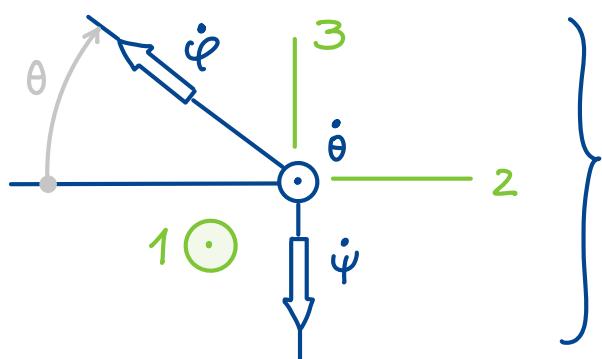
$$\bar{\alpha}_T^{\text{pinga}} = \underbrace{(-\dot{\psi}\dot{\theta})}_{\text{canvi dir de } \dot{\theta}} + \underbrace{(\otimes\dot{\psi}\dot{\phi})}_{\text{canvi dir de } \dot{\phi}} + \underbrace{(+\dot{\phi}\dot{\theta})}_{\text{canvi dir de } \dot{\theta}} \quad (A)$$

Via analítica (per qui la vulgu intentar)

- Cal dibuix genèric!
- $\bar{\theta}$ es mou en el pla horitz.
- Ens ho mirem des de la dir. de $\dot{\theta}$ genèrica i tenim



eixos d'Euler
per a $\psi = \theta = \phi = 0^\circ$



Dibuix genèric
(Eixos $\bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$
en posició genèrica)

En base $B = (1, 2, 3)$:

Això ja és un
vector "pel·lícula" !

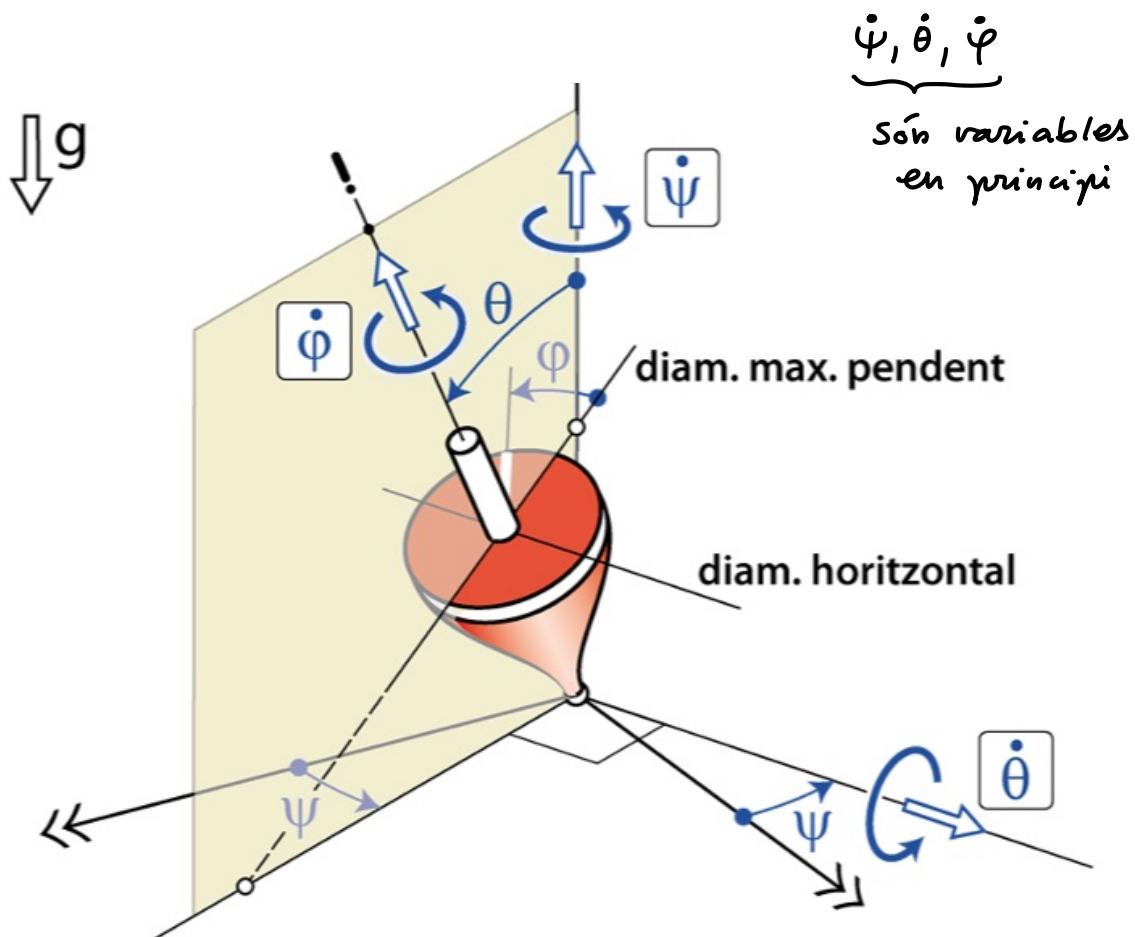
$$\bar{\omega}_T^{\text{pinya}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \cos \theta \\ \dot{\varphi} \sin \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \\ -\dot{\varphi} \cos \theta \\ -\dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin \theta \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\alpha}_T^{\text{pinya}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \\ -\dot{\varphi} \cos \theta \\ -\dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \end{Bmatrix}$$

$$\left[\bar{\alpha}_T^{\text{pinya}} \right]_{\substack{\psi=0 \\ \theta=0 \\ \phi=0}} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (B) \quad \leftarrow \text{Quadra amb (A)}$$

Acceleració angular de la baldufa

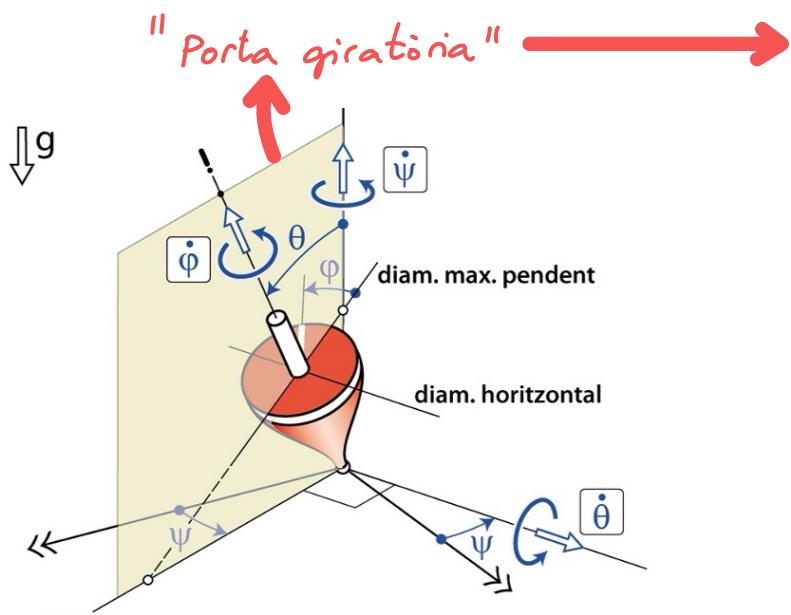
A l'exemple següent, calculeu $\bar{\alpha}_T$ baldufa per derivació geomètrica (descomponent $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_{\text{vert}} + \bar{\varphi}_{\text{horitz}}$), i també per derivació analítica



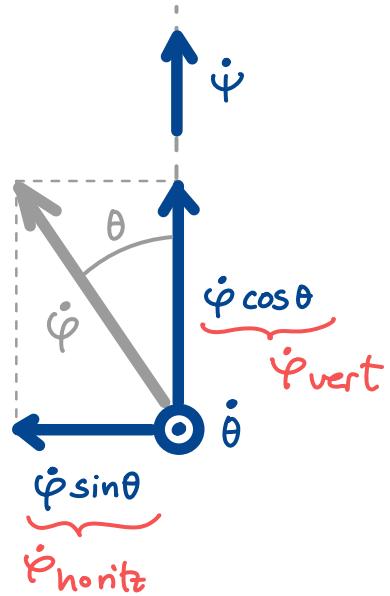
Solució: La descomposició de $\bar{\varphi}$ en $\bar{\varphi}_{\text{vertical}} + \bar{\varphi}_{\text{horizontal}}$ fa que tots els vectors que giren, ho facin amb una rotació simple, que és $\bar{\psi}$. Això facilita la derivació geomètrica, però mostarem també com obtenir $\bar{\alpha}_T$ baldufa sense fer aquesta descomposició. Som-hi!

Derivant geomètricament

Via 1: Fent $\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_{\text{vert}} + \ddot{\varphi}_{\text{horitz}}$

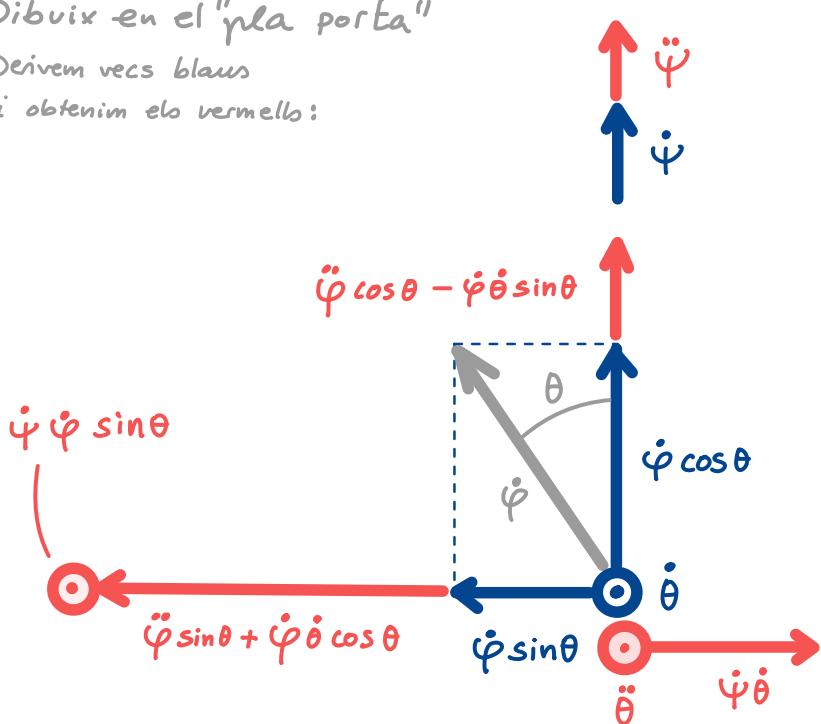


Pla "porta", mirat des de $\ddot{\theta}$.
(gira amb $\dot{\psi}$)



Dibuix en el "pla porta"

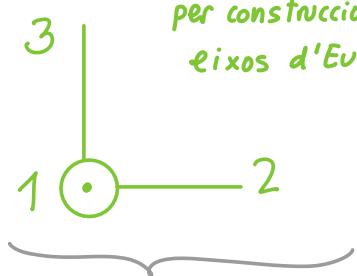
Derivem vecs blaus
i obtenim els vermellos:



$$B = (1, 2, 3)$$

Dir. de $\ddot{\theta}$ Dir. de $\dot{\psi}$

Sempre \perp
per construcció dels
eixos d'Euler



Base fixa
a porta giratòria

Projectant en base B (triada per comoditat, p.q. facilita la projecció):

$$\left\{ \ddot{\alpha}_T^{\text{bold}} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} \dot{\theta} - \ddot{\varphi} \sin \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\}_B \quad (A)$$

Via 2: SENSE descompondre $\ddot{\varphi}$

Tots els vecs. blaus tenen canvi de valor, i els canvis de dir. són:

- $\ddot{\varphi}$ no en té

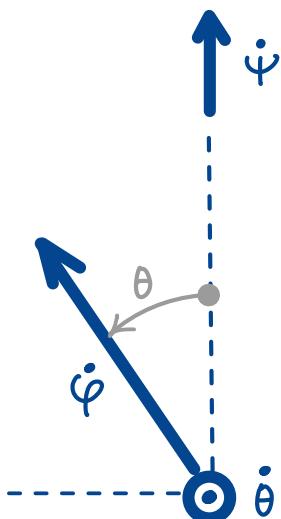
- $\dot{\theta}$ en té, i és $\ddot{\varphi} \times \dot{\theta}$

- $\ddot{\theta}$ en té, i és:

$$(\ddot{\varphi} + \dot{\theta}) \times (\ddot{\theta}) = \ddot{\varphi} \times \ddot{\theta} + \dot{\theta} \times \ddot{\theta}$$

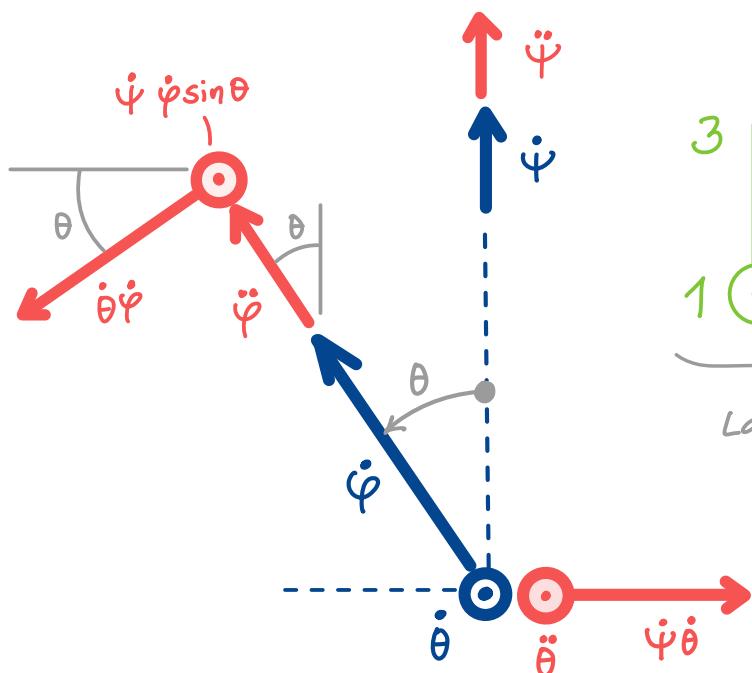
Per això la via 1 era + fàcil
(penso!)

Pla "porta" (gira amb $\ddot{\varphi}$)



Derivem vecs blaus i mirem els vermells:

Pla "porta"



$$B = (1, 2, 3)$$

1 — 2

La matriu d'abaix

Finalment projectem vecs. vermells en base B i mirem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dot{\varphi} \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\theta} - \dot{\varphi} \sin \theta - \dot{\phi} \dot{\phi} \cos \theta \\ \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \theta \end{array} \right\} \quad (A')$$

Coincideix amb A!

Ara s'ha costat + projectar en base B

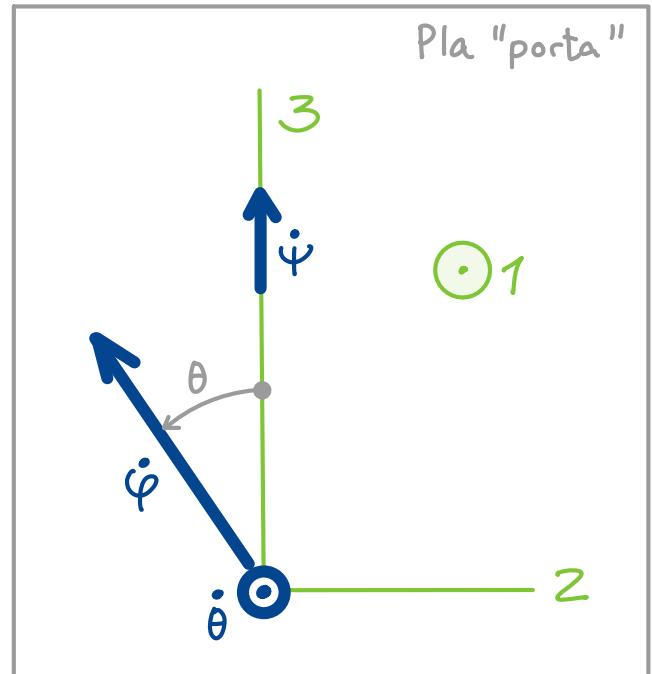
Derivant analíticament

En base B

$$\underline{B = (1, 2, 3)}$$

E's la d'abans
(gira amb $\uparrow \bar{\psi}$)

$$\left\{ \bar{\omega}_T^{\text{bal}d} \right\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{Bmatrix}$$



$$\boxed{\left\{ \bar{\alpha}_T^{\text{bal}d} \right\}_B} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ -\ddot{\varphi} \sin \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\varphi} + \ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{Bmatrix} =$$

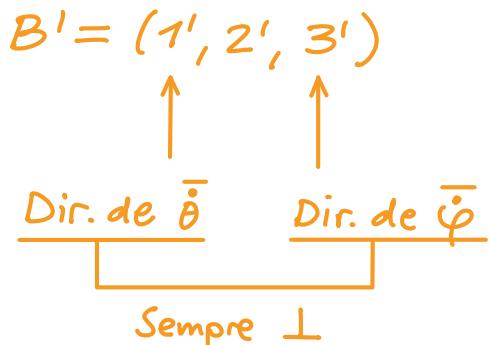
$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta \\ -\ddot{\varphi} \sin \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \\ \ddot{\varphi} + \ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right\} \quad (A'')$$

Quadra amb (A) !

Ara en base $B' = (1', 2', 3')$ que també va bé

B' definida així:



(per construcció dels eixos d'Euler)

$$\left\{ \bar{\omega}_T^{bal'd} \right\}_{B'} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{array} \right\}$$

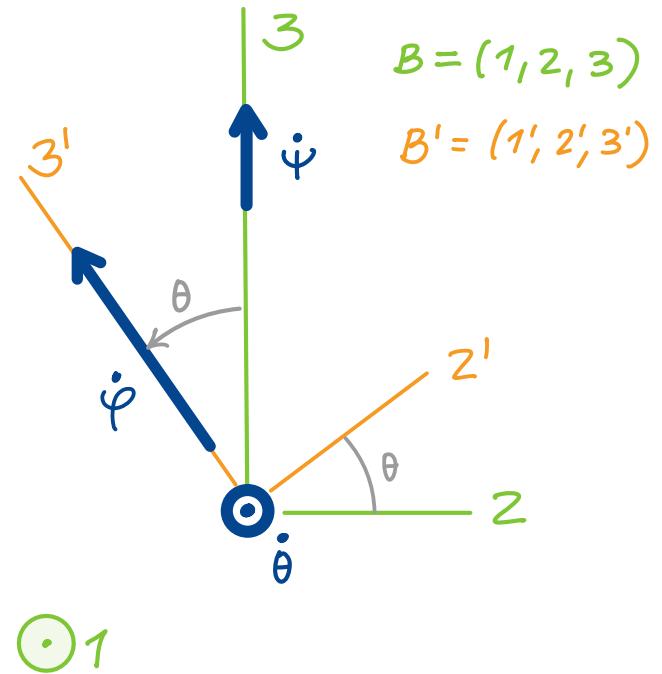
↓
d/dt

$$\boxed{\left\{ \bar{\omega}_T^{bal'd} \right\}_{B'}} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\varphi} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\psi} \sin \theta \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\varphi} \end{array} \right\}$$

↑
Quadra amb la derivada geomètrica
(compareu-ho amb l'obtinguda)
sense descompondre $\dot{\varphi}$

Pla "porta"



$$\bar{\omega}_T^{B'} = \bar{\psi} + \bar{\theta} \quad \leftarrow \text{No intervé } \bar{\varphi}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{array} \right\} =$$

|| ← $\bar{a} \times (\bar{a} + \bar{b}) = \underbrace{(\bar{a} \times \bar{a})}_{0} + (\bar{a} \times \bar{b})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \dot{\psi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} \dot{\varphi} \\ 0 \end{array} \right\}$$