1P

derivació geomètrica

Els requadres blaus
són petits recordatoris

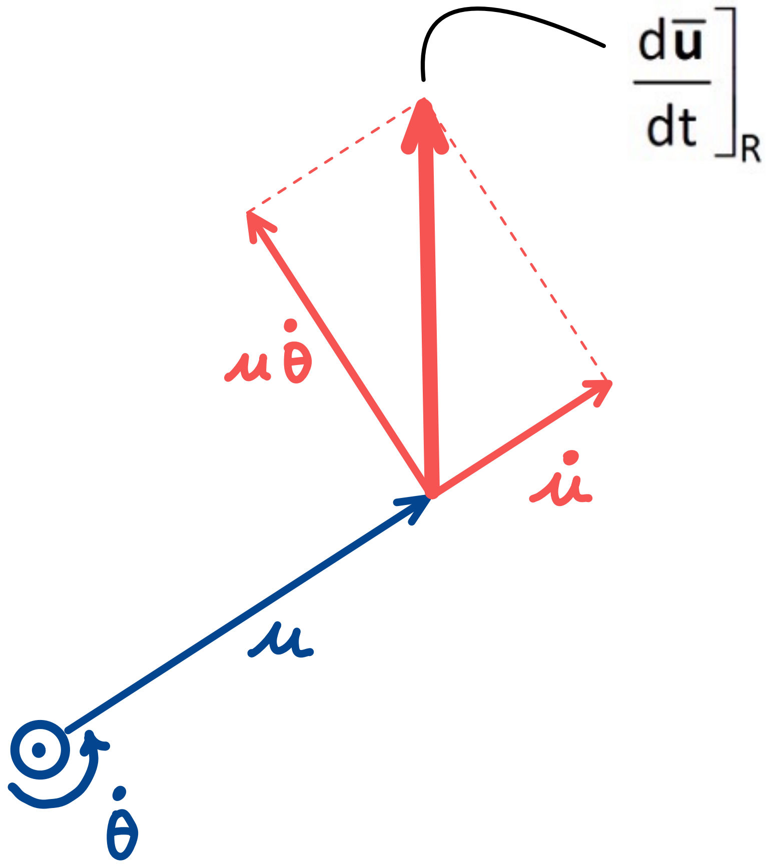
Els requadres negres
són els exercicis

Derivació geomètrica

$$\left.\frac{d\bar{u}}{dt}\right]_R = \underbrace{\begin{bmatrix}\text{canvi de}\\ \text{valor}\end{bmatrix}}_{\parallel \bar{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\text{canvi de}\\ \text{direcció}\end{bmatrix}_R}_{\perp \bar{u}} = \underbrace{\dot{u}\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}}_{\text{canvi val.}} + \underbrace{\bar{\Omega}^{\bar{u}}_R \times \bar{u}}_{\text{canvi dir.}}$$

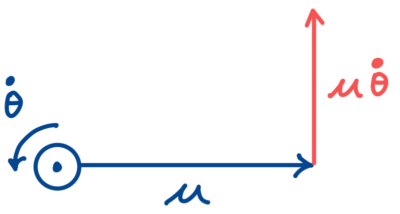
(En general té aquesta forma)

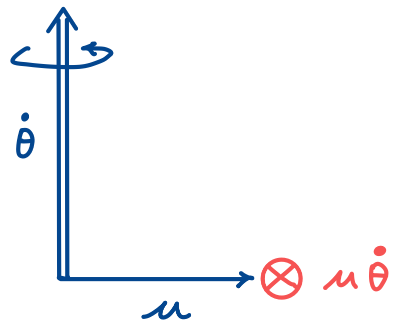
Exemple

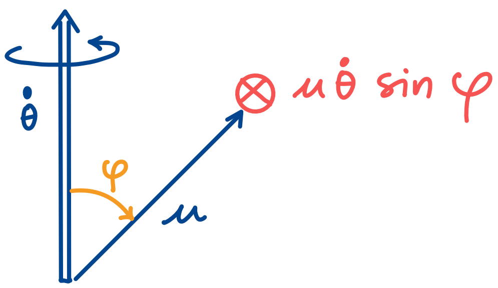


Exemples del canvi dir. $\bar{\Omega}^{\bar{u}}_{R} \times \bar{u}$ quan $u = ct$

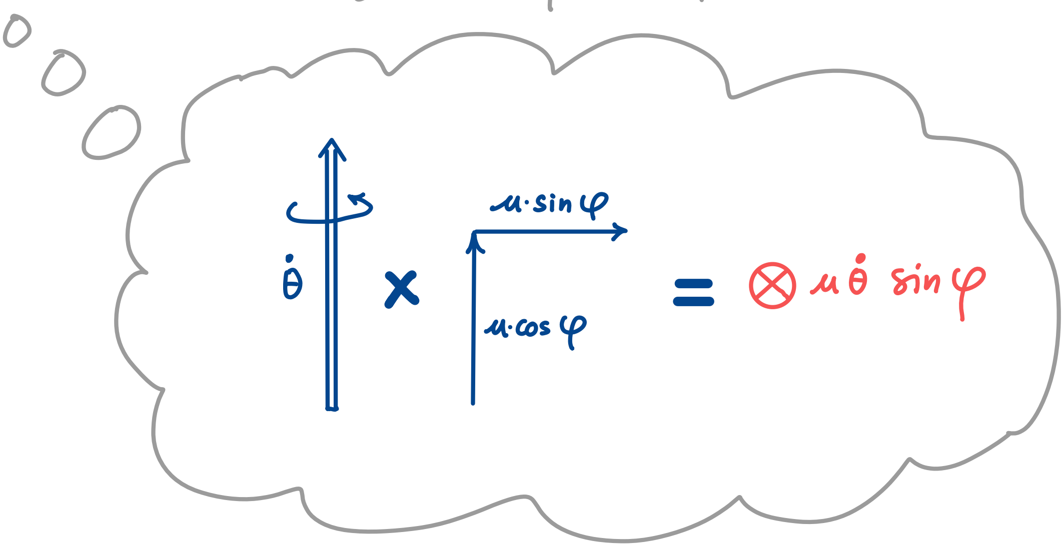
Suposem $\left[\begin{array}{llll} \bar{u} & \text{té} & \text{valor} & u = ct \\ \bar{\Omega}^{\bar{u}}_{R} & \text{"} & \text{"} & \dot{\theta} \end{array}\right.$





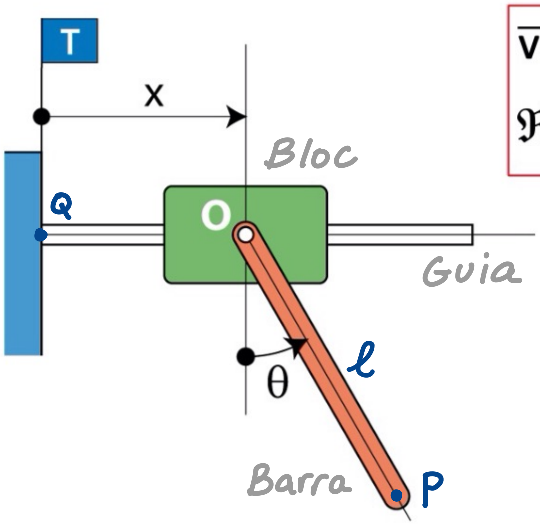


Com ho pensem



El pèndol d'Euler

En el sistema de la figura, el bloc es trasllada horitzontalment damunt la guia i el pèndol està unit al bloc mitjançant una articulació a O. Utilitzant les coordenades indicades, calculeu la velocitat i acceleració de P respecte del terra, i el radi de curvatura de P (també respecte el terra) quan l'angle theta és zero.



$\bar{v}_T(\mathbf{P}),\ \bar{a}_T(\mathbf{P})$?

$\Re_T(\mathbf{P})\big]_{\theta=0}$?

$\bar{v}_T(P)$

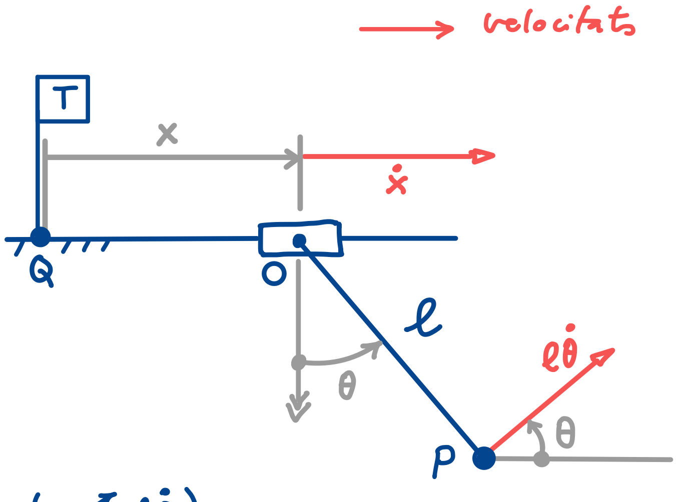
Pista: Deriveu el vector $\overline{QP} = \overline{QO} + \overline{OP}$. Penseu quins són el canvi de valor i el canvi de direcció de $\overline{QO}$ i $\overline{OP}$ per separat. Feu-vos una figura dibuixant aquests canvis.

La solució és a la pàg. seg. i amb tot detall a la wikimec. Intenteu-ho 1er vosaltres!

$\bar{v}_T(P)$

Ref = T

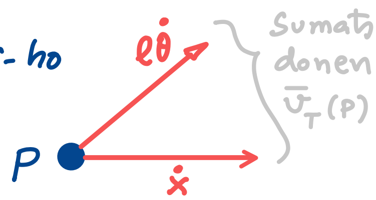
Q = origen vec. pos. de P
└ Fix a T!



$\overline{QP} = \overline{QO} + \overline{OP}$

$$\bar{v}_T(P) = \overbrace{\underbrace{\left.\frac{d\overline{QO}}{dt}\right]_T}_{(\rightarrow \dot{x})}}^{\text{sols té c. val.}} + \overbrace{\underbrace{\left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T}_{(\circlearrowleft \dot\theta)\times(\searrow \ell)}}^{\text{sols té c. dir.}} = (\rightarrow \dot{x}) + (\nearrow \ell\dot\theta)$$

Cal pensar-ho així →



$\bar{a}_T(P)$

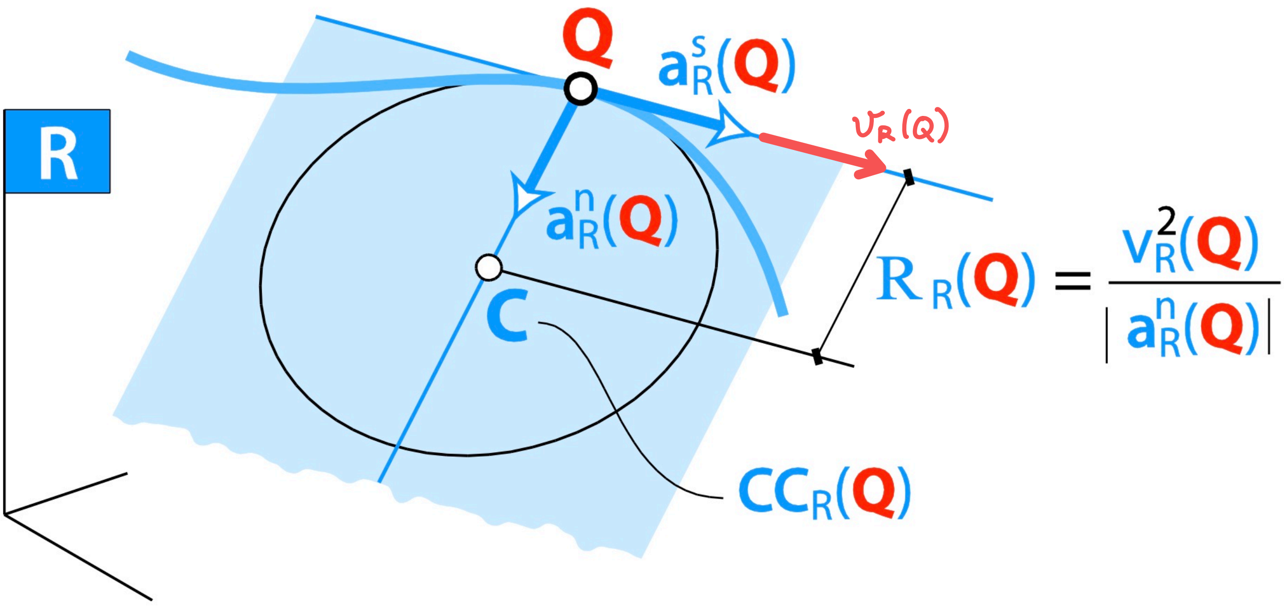
Es fa igual, però derivant els vecs. vermells

Sol:

$$\bar{a}_T(P) = \left[\nearrow (\ell\ddot\theta + \ddot{x}\cos\theta)\right] + \left[\nwarrow (\ell\dot\theta^2 - \ddot{x}\sin\theta)\right]$$

$\mathcal{R}_T(P)\Big]_{\theta=0}$

Recordem:



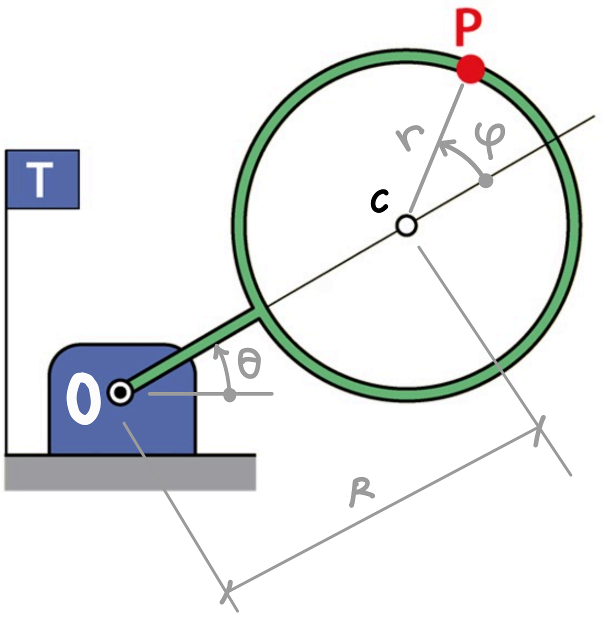
Recomanació: Dibuixeu la configuració del sistema per a $\theta = 0$, pintant-hi $\bar{v}_T(P)$, $\bar{a}_T^n(P)$, i $\bar{a}_T^s(P)$

Sol:

$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{(l\dot{\theta} + \dot{x})^2}{l\dot{\theta}^2}$$

Ex. 2.7 RBK (adaptat): Partícula sobre guia circular

La massa puntual P es mou lliurement sobre el suport circular de radi r. El suport gira al voltant del punt O fix a T. Troben $\bar{v}_T(P)$, $\bar{a}_T(P)$ i $\mathfrak{R}_T(P)\big]_{\theta=0}$ en funció de $\theta, \dot{\theta}, \varphi$ i $\dot{\varphi}$.



$\bar{v}_T(P)$?

$\bar{a}_T(P)$?

$\mathfrak{R}_T(P)\big]_{\theta=0}^{\varphi=0}$?

$\bar{v}_T(P)$

Pista : Deriven $\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{PC}$

Utilitzen les coord. θ i φ per expressar-ho tot.

Sol. (agrupant en les dir. indicades):

$$\bar{v}_T(P) = \left[\nwarrow (R\dot{\theta} + r\dot{\psi}\cos\varphi)\right] + \left[\swarrow r\dot{\psi}\sin\varphi\right]$$

(on $\dot{\psi} = \dot{\theta} + \dot{\varphi}$)

$\bar{a}_T(P)$

Sol:

$$\bar{a}_T(P) = \left[\nwarrow \left(R\ddot{\theta} - r\dot{\psi}^2 \sin\varphi + r\ddot{\psi}\cos\varphi\right)\right] +$$
$$\left[\swarrow \left(R\dot{\theta}^2 + r\dot{\psi}^2\cos\varphi + r\ddot{\psi}\sin\varphi\right)\right]$$

on :

$$\dot{\psi} = \dot{\theta} + \dot{\varphi}, \quad \ddot{\psi} = \ddot{\theta} + \ddot{\varphi}$$

$\mathcal{R}_T(P)\Big]_{\varphi=0}$

Sol:

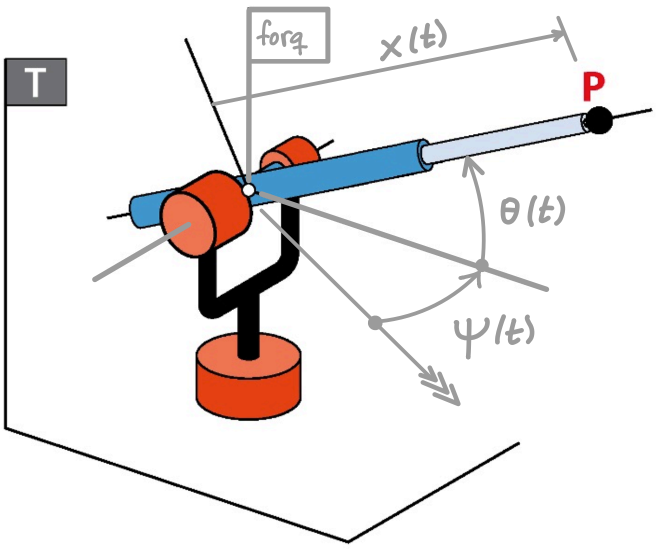
$$\mathcal{R}_T(P) = \frac{\left(r\overbrace{\dot{\psi}}^{\dot{\theta}+\dot{\varphi}} + R\dot{\theta}\right)^2}{R\dot{\theta}^2 + r\dot{\psi}^2}$$

Problema 2.3 MPSR, pàg. 57 (Antena telescòpica)

Una antena telescòpica és orientada per mitjà de les rotacions motoritzades $\psi(t)$ i $\theta(t)$. Un altre accionament fa variar la longitud $x(t)$.

Determineu:

$$\bar{v}_T(P), \quad \bar{a}_T(P), \quad \bar{v}_{forq}(P), \quad \bar{a}_{forq}(P)$$



$\bar{v}_{forq}(\mathbf{P})$, $\bar{a}_{forq}(\mathbf{P})$?

$\bar{v}_T(\mathbf{P})$, $\bar{a}_T(\mathbf{P})$?

Aquest és llarg. A classe prioritzarem el càlcul de $\bar{v}_T(P)$ i deixaré la resta per vosaltres.

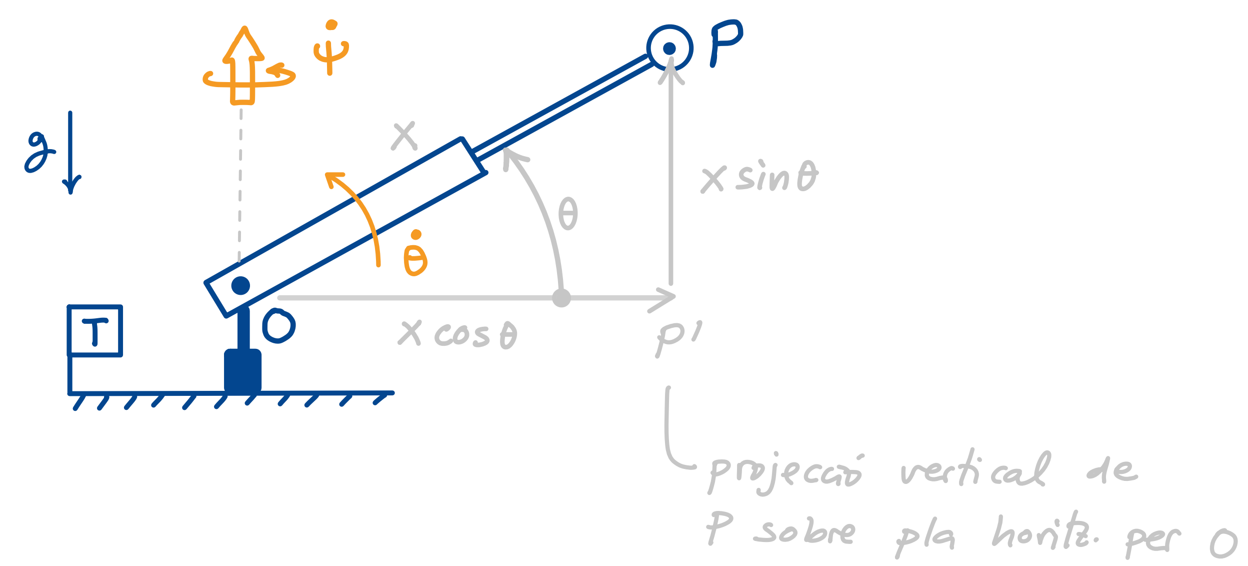
$\bar{v}_T(P)$

Aquí podem descompondre $\overline{OP}$ en suma de les seves components horitzontal i vertical:

$$\overline{OP} = \overline{OP'} + \overline{P'P}$$

Així, $\overline{OP'}$ només queda afectat per $\dot{\psi}$ (ens mantenim en el terreny de les rotacions simples) i $\overline{P'P}$ només canvia de valor.

Dibuixeu-hi les d/dt de $\overline{OP'}$ i $\overline{P'P}$

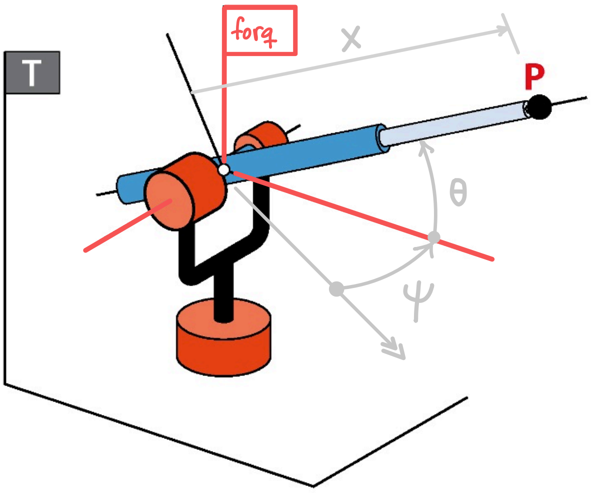


Us ha de sortir:

$$\bar{v}_T(P) = \left.\frac{d\overline{OP}}{dt}\right]_T = \ldots = \left[\uparrow \left(\dot{x}\sin\theta + x\dot{\theta}\cos\theta\right)\right] + \left[\rightarrow \left(\dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\sin\theta\right)\right] + \left[\otimes\ x\dot{\psi}\cos\theta\right]$$

<u>Ex. per a vosaltres:</u> Calculeu $\bar{a}_T(P)$

$\bar{v}_{forq}(P)$



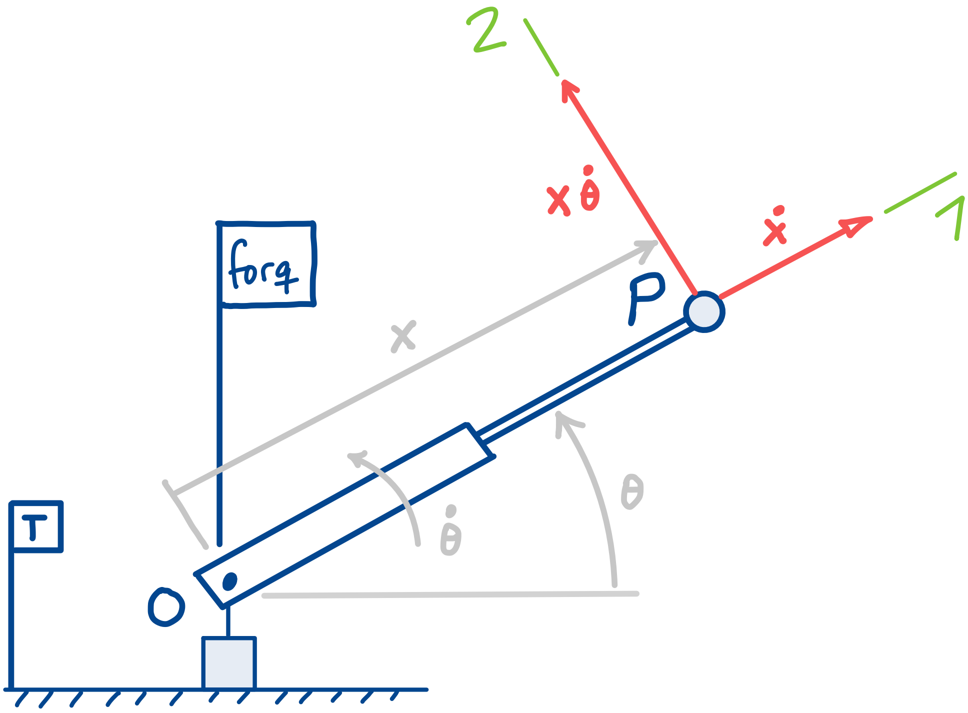
$\bar{v}_{forq}(\mathbf{P})$, $\bar{a}_{forq}(\mathbf{P})$?
$\bar{v}_{T}(\mathbf{P})$, $\bar{a}_{T}(\mathbf{P})$?

Des de ref. "forq" sols veiem movim. degut a $\theta(t)$ i $x(t)$:

O és fix a $\left\{\begin{array}{l}\text{forq.}\\ T\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Serveix com origen vecs. pos. tant a ref "forq" com a ref "T"

$$\bar{v}_{Forq}(P) = \left.\frac{d\,\overline{OP}}{dt}\right]_{forq} = (\nearrow \dot{x}) + (\nwarrow x\dot{\theta})$$

$\overline{OP}$ només afectat per $\bar{\dot{\theta}}$, no per $\bar{\dot{\psi}}$



$\bar{a}_{forq}(P)$

Pista: pinteu les derivades temporals dels vectors vermells sobre el dibuix anterior. Agrupant els vectors en les dirs. 1 i 2 del dibuix, ha de sortir:

$$\bar{a}_{forq}(P) = \left[\nearrow (\ddot{x} - x\dot{\theta}^2) \right] + \left[\nwarrow (2\dot{x}\dot{\theta} + x\ddot{\theta}) \right]$$