Teoria dos Grafos

Objetivo

- Fornecer uma base sobre a estrutura matemática dos grafos, visando a sua aplicação a eventos relacionados a área computacional
  - Desenvolver a capacidade para abordar problemas diversos que podem ser representados por meio de grafos.

Bibliografia

- BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo. Teoria e Modelos de Grafos. São Paulo:Edgard Blucher Ltda, 2006.

- LUCCHESI, Cláudio L. Introdução à teoria dos grafos. IMPA, 1979

- RABUSKE, M. A. Introdução à Teoria dos Grafos, Editora Daufsc - Universidade de Santa Catarina. 1992

- GERSTING, Judith L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação 5ª ed. LTC

Definição

- **Definição 1** - Um grafo **G = (V,E)** é uma estrutura matemática que consiste em dois conjuntos **V** (finito e não vazio), e **E** (relação binária sobre V). Os elementos de V são chamados vértices (ou nós) e os elementos de E são chamados arestas. Cada aresta tem um conjunto de um ou dois vértices associados a ela. GROSS e YELLEN (1999,p.2)
- **Definição 2** – Um grafo é uma tripla ordenada **G(V,E,g)** onde :
  – V = um conjunto não vazio de vértices (ou nós)
  – E = um conjunto de arestas
  – g = uma função que associa a cada aresta a um par **não-ordenado x-y** de nós, chamados de extremidades de a.

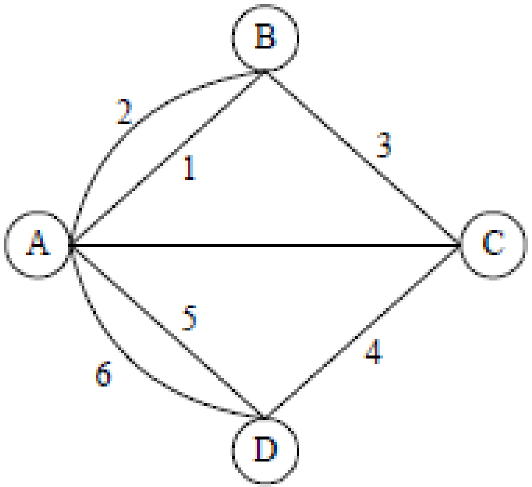
Exemplo

- **Notações**

G = (V,E) ou

G = (V(G),E(G)) ou

G(V,E)



Formalização

G = (V,E)

V = {A, B, C, D}   n = |V| → *__Ordem__ do grafo G = 4

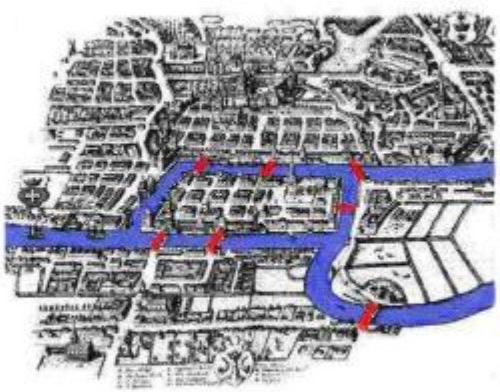
E = {1,2,3,4,5,6,7} ou

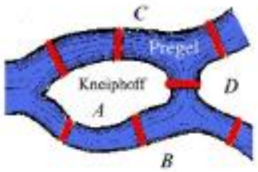
E = {AB, AB, AC, BC, CD, DA, DA}

* A **ordem** de um grafo é dada pela **cardinalidade** do conjunto de vértices

História – Origem da Teoria dos Grafos

- Problema das pontes de Konigsberg
  - No Rio Pengel, junto à cidade de Königsberg (hoje Kaliningrado), na então Rússia, existem ilhas, formando quatro regiões interligadas por um total de sete pontes.

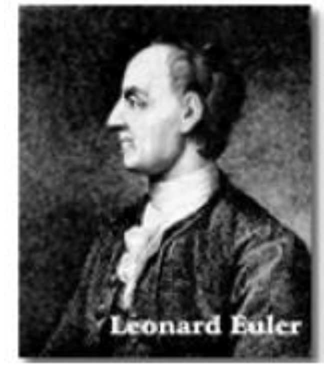




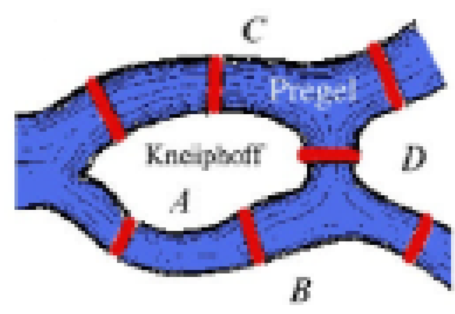
  - É possível cruzar as 7 pontes numa caminhada contínua sem que se passe duas vezes por qualquer uma delas?

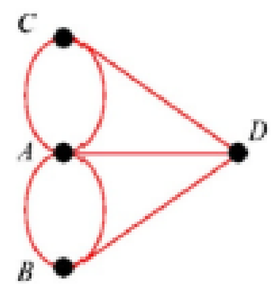
História – Origem da Teoria dos Grafos

- Problema das pontes de Konigsberg



O matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783) ficou intrigado com o problema popularmente conhecido entre os habitantes e propôs uma solução em 1736.





Esta solução ficou conhecida como o caminho de Euler. Consiste na existência de um caminho em um grafo G onde cada aresta de G é usada apenas uma vez.

Áreas de Aplicação

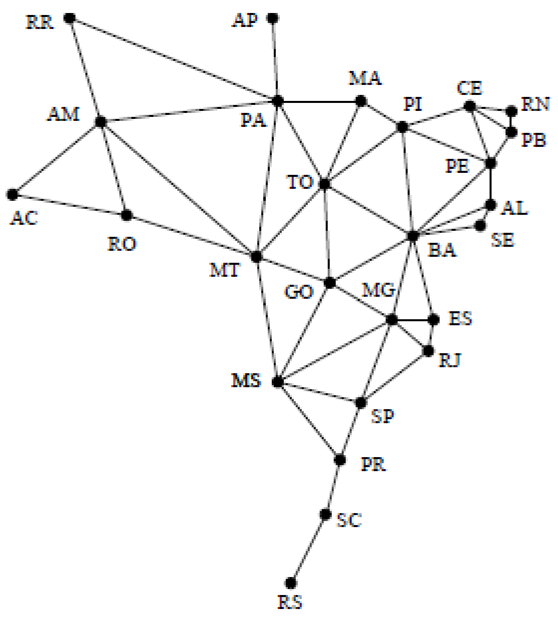
- O estudo da teoria dos grafos engatinhou até os anos 40.
- Com o advento dos computadores, pode-se esquematizar soluções para vários problemas até então insolúveis.

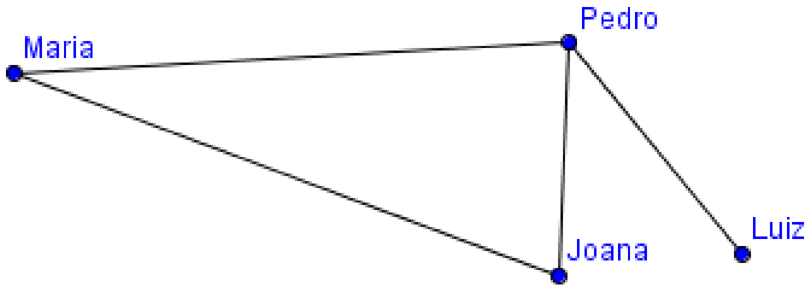
✓ Psicologia
✓ Genética
✓ Redes elétricas
✓ Computação
✓ Economia
✓ Antropologia

✓ Processos industriais (PERT/CPM)
✓ Tática e logística
✓ Sistemas de comunicação
✓ Fluxos de rede
✓ Jogos
✓ Lingüística

Representação dos Grafos

Grafo dos estados do Brasil. Cada vértice é um dos estados da Republica Federativa do Brasil. Dois estados serão considerados adjacentes se tiverem uma fronteira comum.





Grafo G = (V,E) onde :

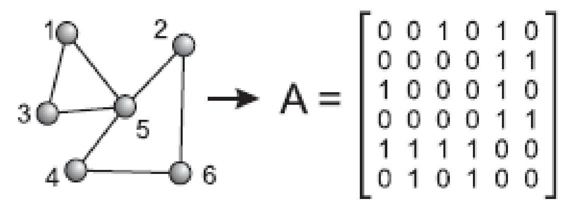
V = {Maria, Pedro, Joana, Luiz}

E = {(v,w) | v é amigo de w}

E = {(Maria, Pedro), (Joana,Maria), (Pedro,Luiz), (Joana,Pedro)}

Representação dos Grafos

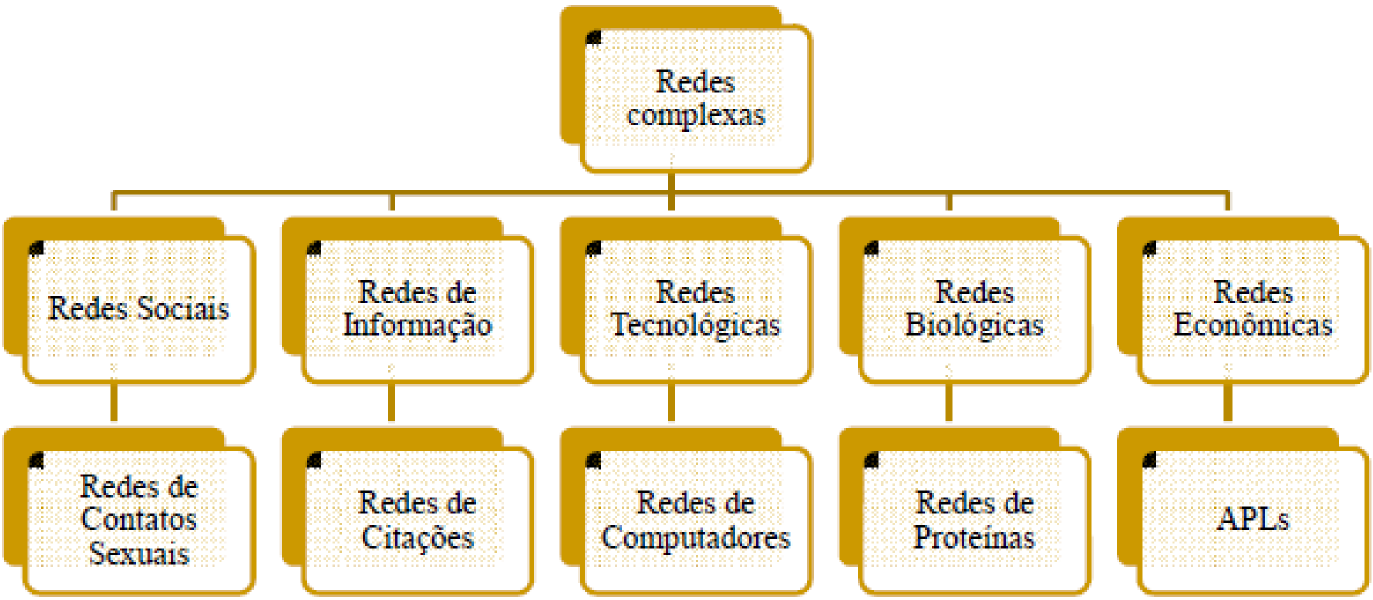
- Considerações
  - Sob a perspectiva visual da inspeção visual
    - Fácil percepção do ponto de vista global para o ser humano.
    - Aspectos topológicos podem ser observados : Disposição dos vértices e arestas.



  - Sob a perspectiva computacional
    - Necessidade de representação numérica interna
    - Estrutura de dados robusta e eficaz (Processamento e armazenamento)

Curiosidades – Redes Complexas

- Contextualizando o estudo de grafos na aplicação de redes complexas



Curiosidades – Redes Complexas

- Qual a razão de estudar as redes ?
  - Questões relacionadas à estrutura da rede podem nos ajudar a entender o **comportamento "coletivo"** de um sistema.
  - Exemplos:
    - Como a topologia de uma **Rede Social** pode afetar na **difusão de uma informação** ou de uma determinada doença ?
    - Como a estrutura de uma Rede Elétrica pode afetar na **solidez e estabilidade** de transmissão de energia.

Curiosidades – Modelos Clássicos

- Questões relacionada ao estudo da rede
  - Qual o tamanho da rede ?
  - Como se formam as ligações entre os vértices ?
  - Que propriedades emergem e se desenvolvem ?

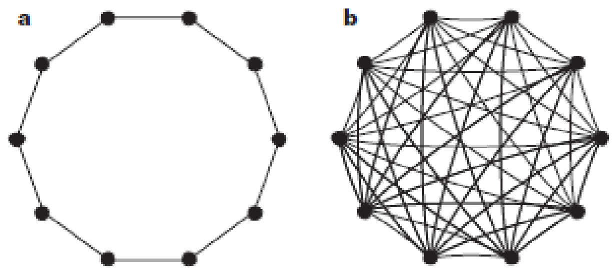
  - Como acontece o crescimento da rede
    - Quais são as regras para o crescimento?

  - Como classificá-las ?
    - Modelos já concebidos de **Redes Complexas**

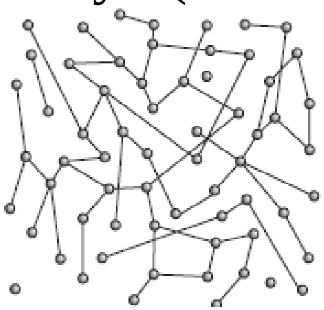
Regulares ; Aleatórias ; Small World ; Livres de Escala

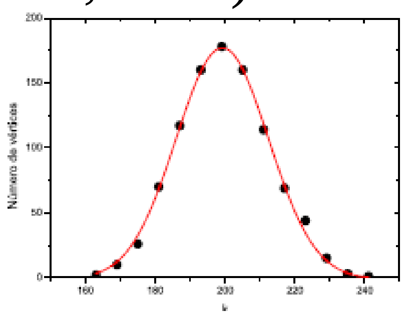
Curiosidades – Modelos Clássicos

- **Redes Regulares** – Todos os vértices possuem a mesma quantidade de conexões.



- **Redes Aleatórias** – A conexão entre os vértices acontece de forma aleatória . Modelo proposto por Paul Erdös e Alfred Rényi. (Modelo ER, 1960)





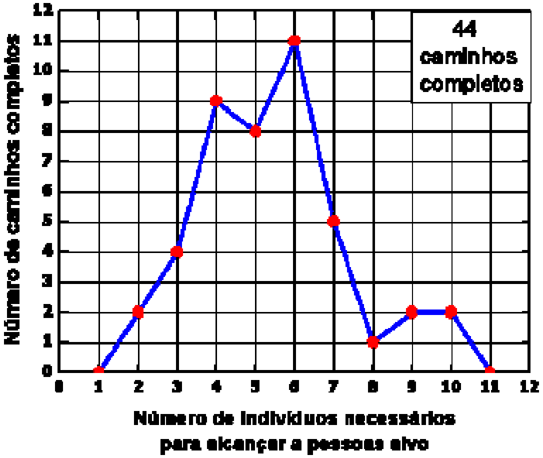
Paul Erdös
(1913-1996)

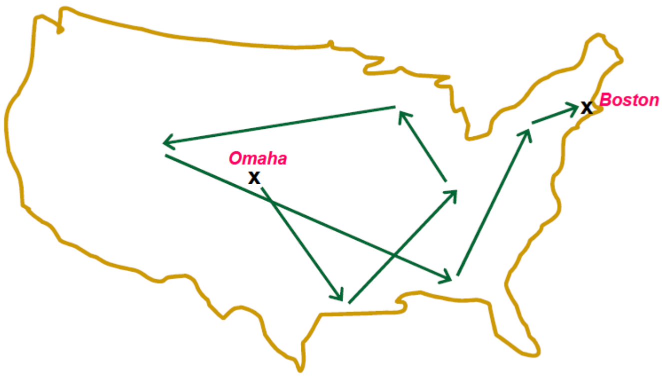
Alfréd Rényi
(1921-1970)

Curiosidades – Modelos Clássicos

- **Redes Small World**
  - Experimento de **Stanley Milgram (1967)** : 160 cartas foram enviadas a pessoas em Omaha (Nebraska), com o pedido de que elas reenviassem a correspondência a conhecidos que pudessem fazê-la chegar mais perto do destinatário alvo: um corretor de valores em Boston (Massachusetts)

(1933 – 1984)

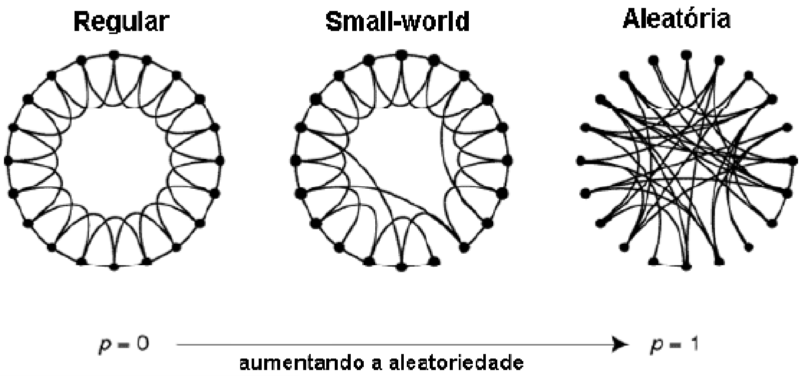


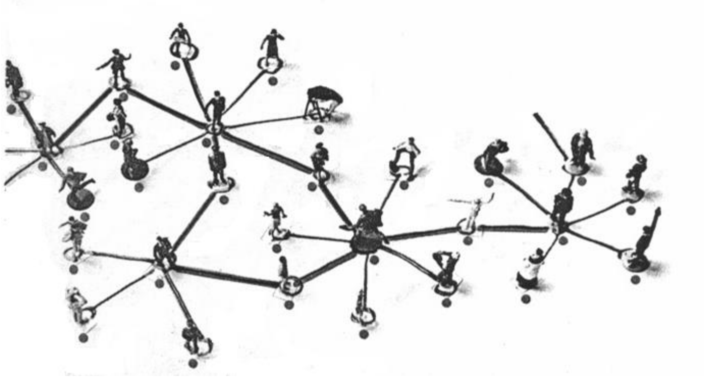


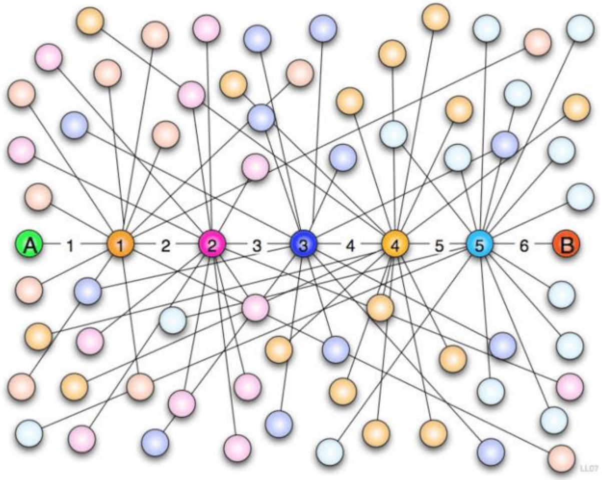
As cartas que chagaram ao seu destino passaram por aproximadamente 6 pessoas. Milgram descobriu que o **mundo é pequeno**

Curiosidades – Modelos Clássicos

- **Redes Small World** – Modelo proposto por Watts e Strogatz em 1998 (Modelo WS). Esta rede não é completamente regular nem completamente aleatória. *($0 \leq p \leq 1$).*



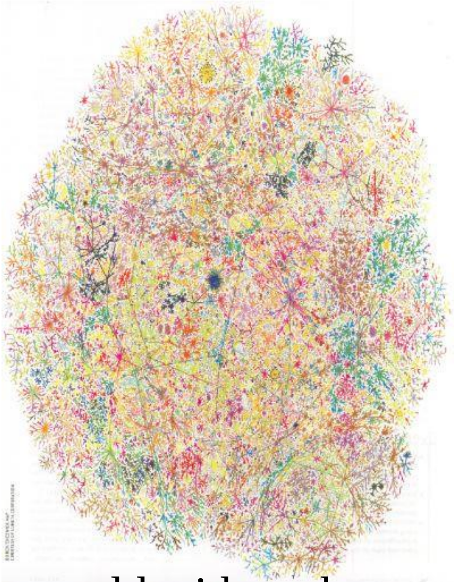




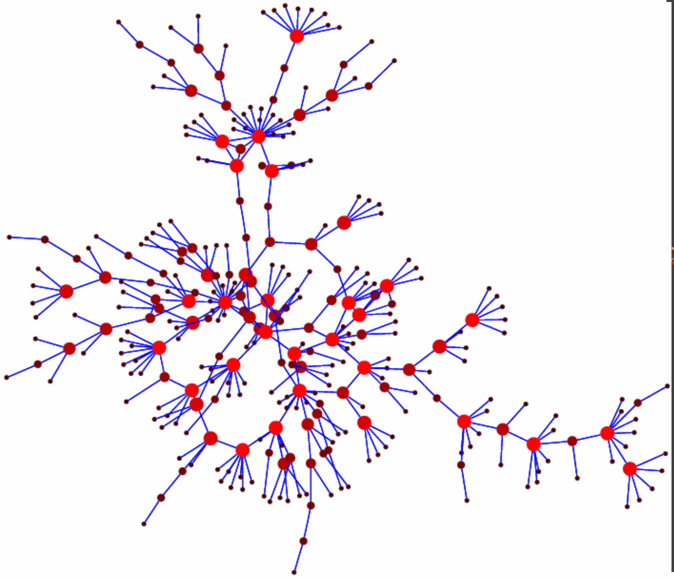
Curiosidades – Modelos Clássicos

- **Redes Scale Free** – Modelo proposto por Barabási e Albert em 1999 (Modelo BA). Sua principal característica implica que poucos vértices possuem muitas conexões e muitos vértices possuem poucas conexões.

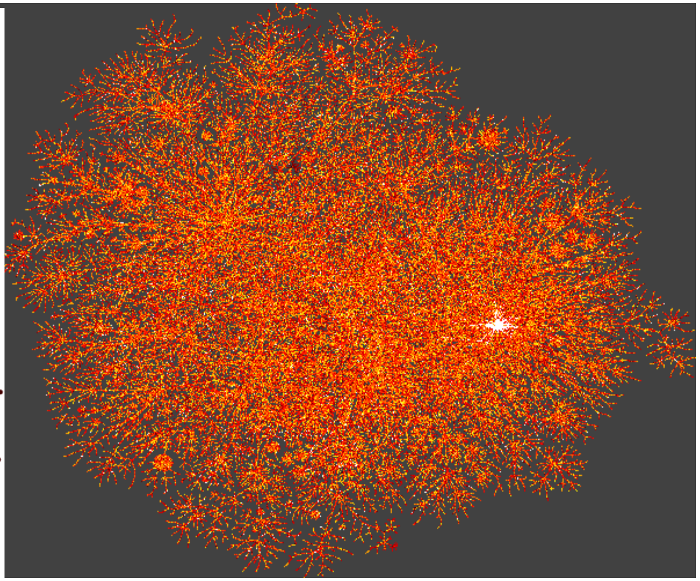
Os vértices mais conectados tendem a possuir mais conexões. "O rico fica mais rico"



world wide web



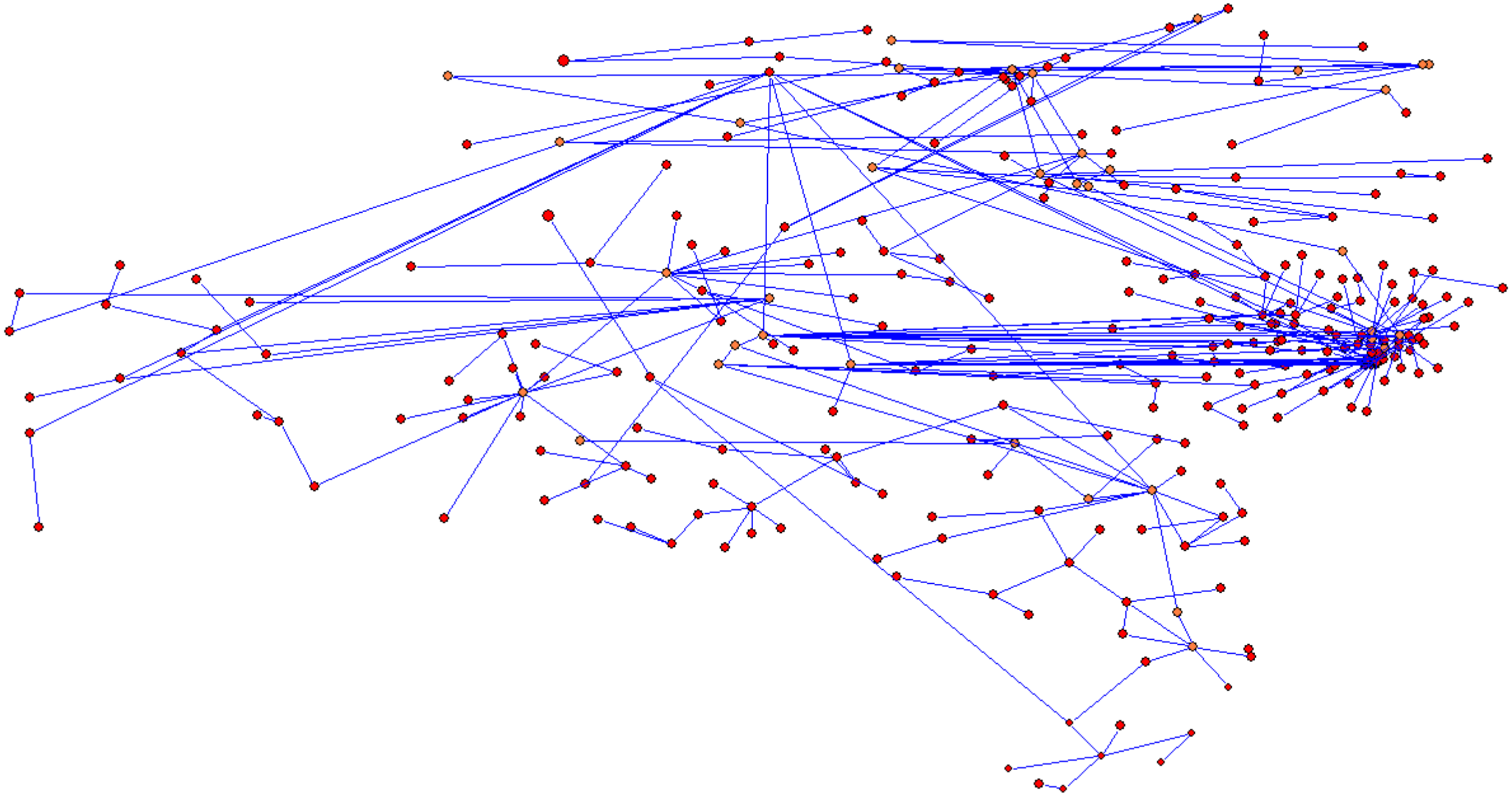
Rede de contatos sexuais



Internet Service Provider

Curiosidades – Modelos Clássicos

- Rede de Subestações de Transmissão de energia elétrica



Marcos Históricos

- Perspectiva da Teoria dos Grafos
  - Grafos (**Leonhard Euler, 1736**)
  - Grafos Aleatórios:
    - **Modelo ER (Erdös & Rényi, 1960**)
  - Redes regulares
  - Redes Small-World:
    - Milgram (1967)
    - **Modelo WS (Watts & Strogatz, 1998)**
  - Redes livres de escala:
    - **Modelo BA (Barabási &Albert, 1999)**

Exercício

- Construção de um Grafo

Cinco turistas se encontraram em um bar em Salvador e começaram a conversar, cada um falando de cada vez, com um só companheiro de mesa. O conhecimento de línguas é mostrado a seguir.

Construa um grafo que represente todas as possibilidades de cada turista dirigir a palavra a outro, sendo compreendido.

	INGLÊS	FRANCÊS	PORTUGUES	ALEMÃO	ESPANHOL
T1	X	X	X		X
T2	X	X		X	
T3		X	X	X	
T4	X		X	X	X
T5		X		X	X