UNIFACS
UNIVERSIDADE SALVADOR
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Teoria dos Grafos

Prof. Carlos Helano Email:carloshelano@unifacs.br

Bibliografia

- BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo. Teoria e Modelos de Grafos. São Paulo:Edgard Blucher Ltda, 2006.
- LUCCHESI, Cláudio L. Introdução à teoria dos grafos. IMPA, 1979
- RABUSKE, M. A. Introdução à Teoria dos Grafos, Editora Daufsc - Universidade de Santa Catarina. 1992.
- GERSTING, Judith L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação 5ª ed. LTC

Definição

- **Definição 1** - Um grafo **G = (V,E)** é uma estrutura matemática que consiste em dois conjuntos **V** (finito e não vazio), e **E** (relação binária sobre V). Os elementos de V são chamados vértices (ou nós) e os elementos de E são chamados arestas. Cada aresta tem um conjunto de um ou dois vértices associados a ela. GROSS e YELLEN (1999,p.2)
- **Definição 2** – Um grafo é uma tripla ordenada **G(V,E,g)** onde :
  - V = um conjunto não vazio de vértices (ou nós)
  - E = um conjunto de arestas
  - g = uma função que associa a cada aresta a um par **não-ordenado x-y** de nós, chamados de extremidades de a.

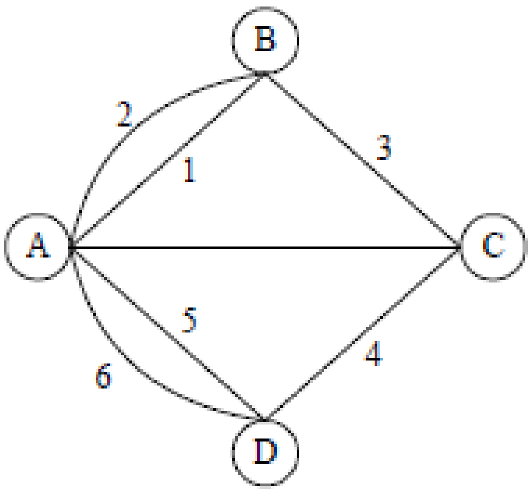
Exemplo

- **Notações**

G = (V,E) ou

G = (V(G),E(G)) ou

G(V,E)



Formalização

G = (V,E)

V = {A, B, C, D} n = |V| → ***Ordem** do grafo G = 4

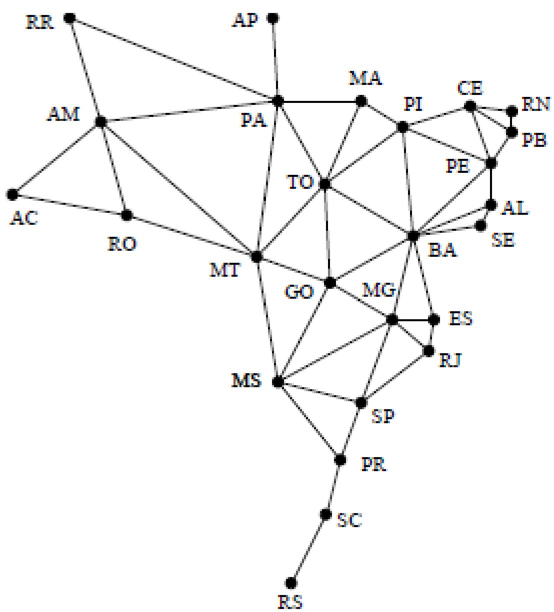
E = {1,2,3,4,5,6,7} ou

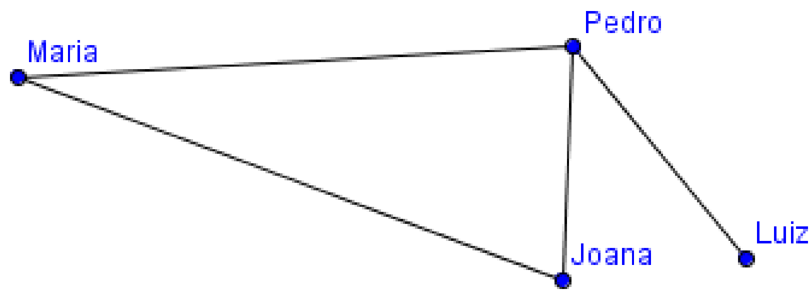
E = {AB, AB, AC, BC, CD, DA, DA}

* A **ordem** de um grafo é dada pela **cardinalidade** do conjunto de vértices

Representação dos Grafos

Grafo dos estados do Brasil. Cada vértice é um dos estados da Republica Federativa do Brasil. Dois estados são adjacentes se têm uma fronteira comum.





Grafo G = (V,E) onde :

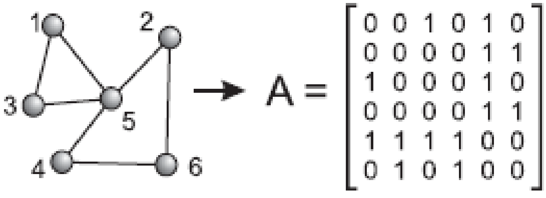
V = {Maria, Pedro, Joana, Luiz}

E = {(v,w) | v é amigo de w}

E = {(Maria, Pedro), (Joana,Maria), (Pedro,Luiz), (Joana,Pedro)}

Representação dos Grafos

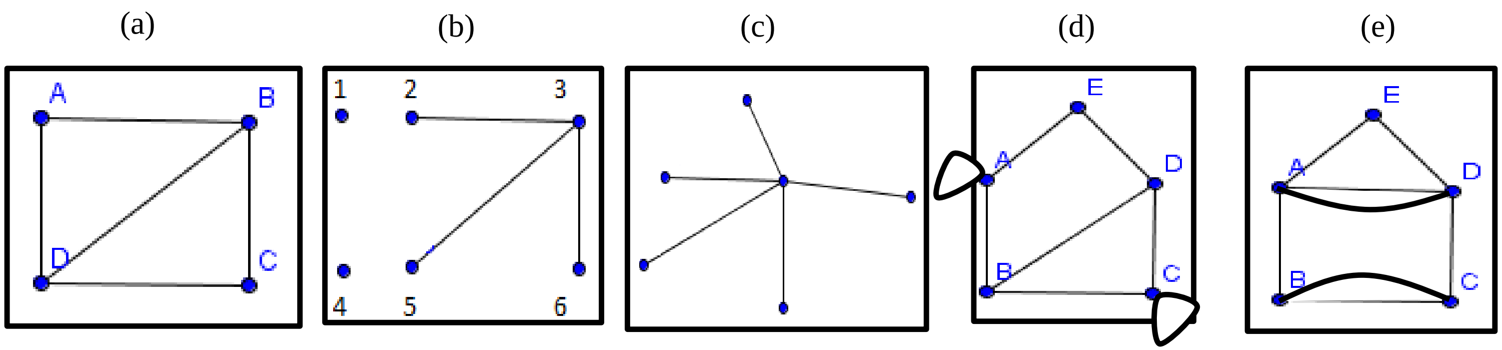
- Considerações
  - Sob a perspectiva visual da inspeção visual
    - Fácil percepção do ponto de vista global pra o ser humano.
    - Aspectos topológicos podem ser observados : Disposição dos vértices e arestas.
  - Sob a perspectiva computacional



    - Necessidade de representação numérica interna
    - Estrutura de dados robusta e eficaz (Processamento e armazenamento)

Representação Gráfica

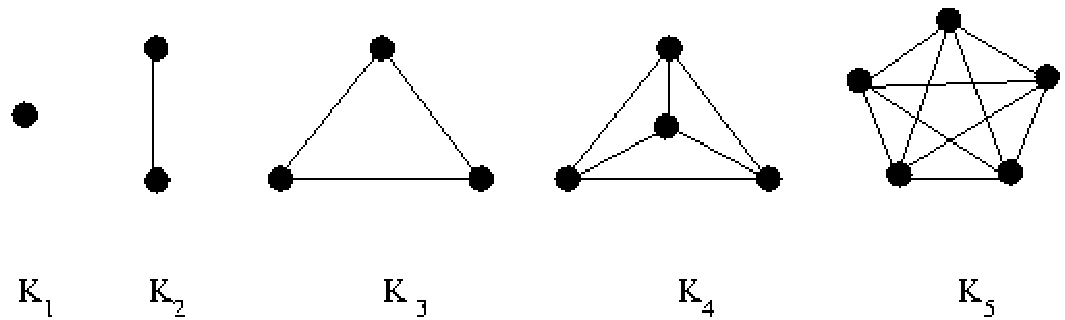
- A representação dos grafos pode ser feita de diversas formas. Com ou sem identificação de vértices ou arestas



- **Laços**: arestas do tipo e = (u,u), com extremidades iguais. **(d)**
- **Multigrafos**: grafos que possuem arestas paralelas ou múltiplas. **(e)**
- **Grafo trivial ou simples**: não possuem laços ou arestas múltiplas. **(a,b,c)**
- **Vértices Adjacentes:** vértices ligados por uma aresta.
    - Exemplo (a) : A e B ; A e C não são adjacentes

Tipos de Grafo

- **Grafo Completo** com *v* vértices (denotado por K_v), é um grafo simples onde todo par de vértices são adjacentes. Existe uma aresta para cada par de vértices distintos.

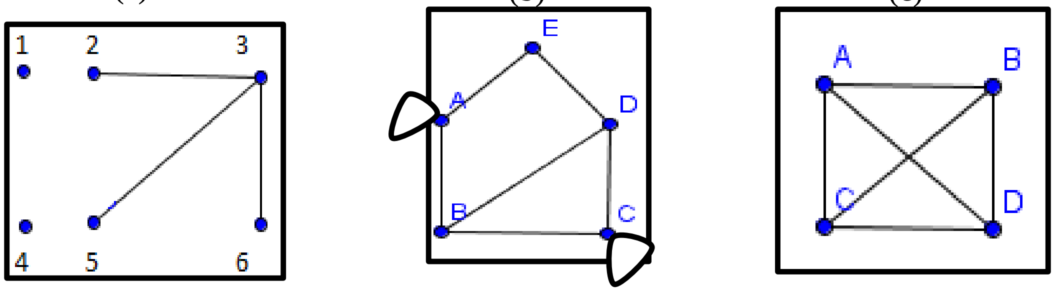


- **Teorema :** Em um grafo completo o número de arestas é igual a $n(n-1)/2$, onde n é o número de vértices do grafo.

Tipos de Grafo

- **Grafo Regular**: Quando os vértices de um grafo G possuem o mesmo **grau.** (c)

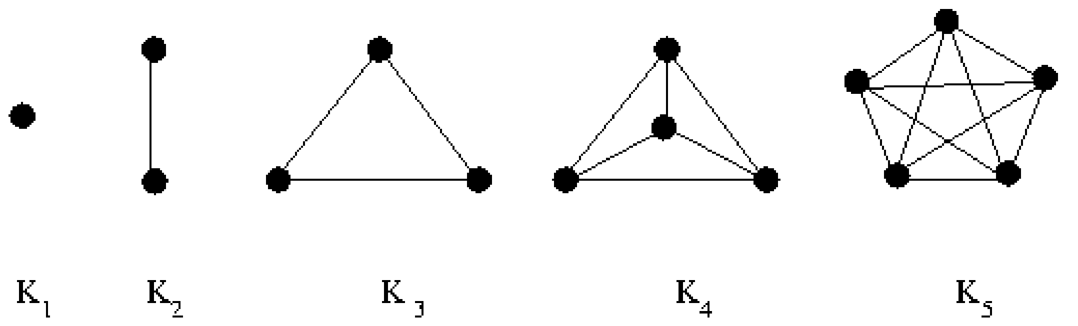
(a) (b) (c)



- Dado um grafo G(V,E) o grau de um vértice $v \in V$, denotado por g(v) é o numero de arestas que incidem nele.
  - Exemplo: g(3) = 3 ; g(6) = 1
    - g(1) = 0 (Obs.: o vértice **"1"** é um **vértice isolado**)
    - g(c) = 4 (Obs.: Laços são contados 2 vezes)

Tipos de Grafo

- Grafos Completos (K_n)



- Grafos Regulares de grau **(n-1)**

  $K_1 \rightarrow$ grau 0

  $K_2 \rightarrow$ grau 1

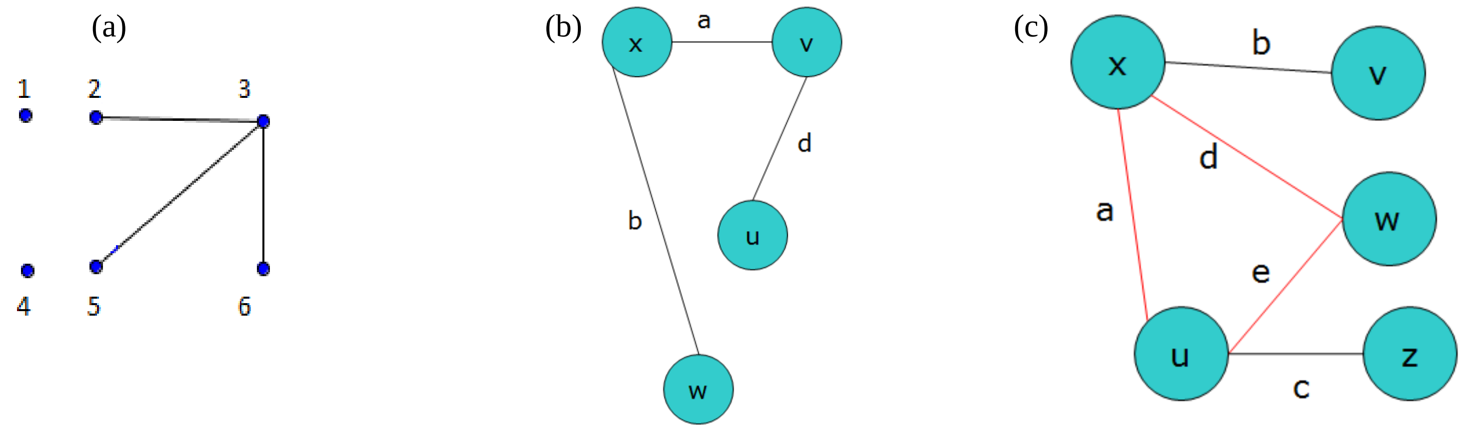
  $K_3 \rightarrow$ grau 2

  $K_4 \rightarrow$ grau 3

  $K_5 \rightarrow$ grau 4

Tipos de Grafo

- **Grafos Conexos**: Se existe um caminho de qualquer vértice para qualquer outro.Exemplos (b) e (c)



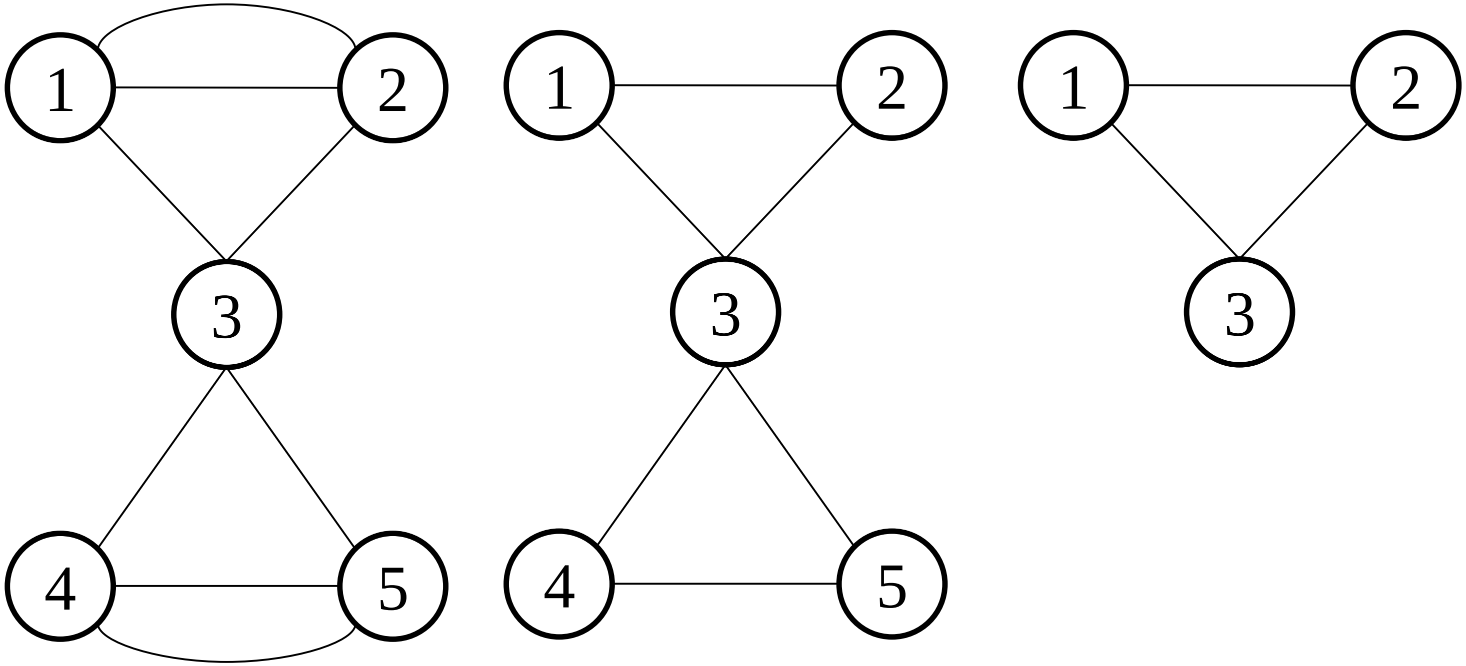
Um **caminho** do vértice n_0 ao vértice n_k é $n_0,a_0,n_1,a_1,\ldots,n_{k-1}\ ,a_{k-1},n_k$ de vértices e arestas onde, para cada i, as extremidades da aresta a_i são n_i e n_{i+1}.

Ex. (b) : Caminho do vértice w ao vértice u: w,b,x,a,v,d,u ; **Comprimento = 3**
O **comprimento** de um caminho é o número de arestas que ele contém.

Ex. (c) : Um **ciclo** é um caminho de um vértice para ele mesmo, em que nenhuma aresta é percorrida mais de uma vez. Um grafo que não tem ciclo é **acíclico**.

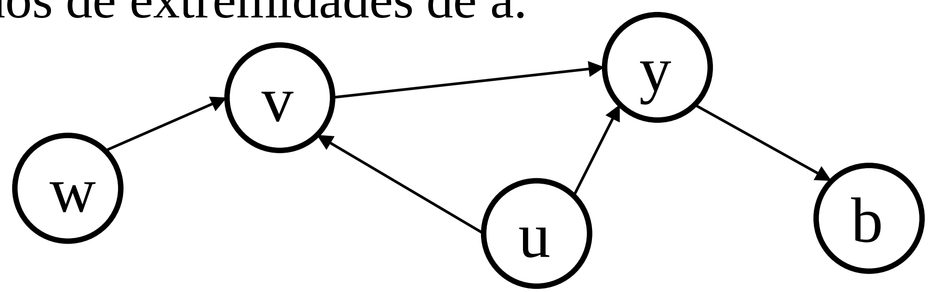
Tipos de Grafo

- **Subgrafos**: Dado um grafo G(V,E). H(V',E') é dito um subgrafo de G se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$



Tipos de Grafo

- **Digrafo**: Um grafo é uma tripla ordenada **G(V,E,g)** onde :
  - V = um conjunto não vazio de vértices (ou nós)
  - E = um conjunto de arcos (arestas)
  - g = uma função que associa a cada aresta a um par **ordenado x-y** de nós, chamados de extremidades de a.



Grau de entrada de v = 2
Grau de saída de v = 1

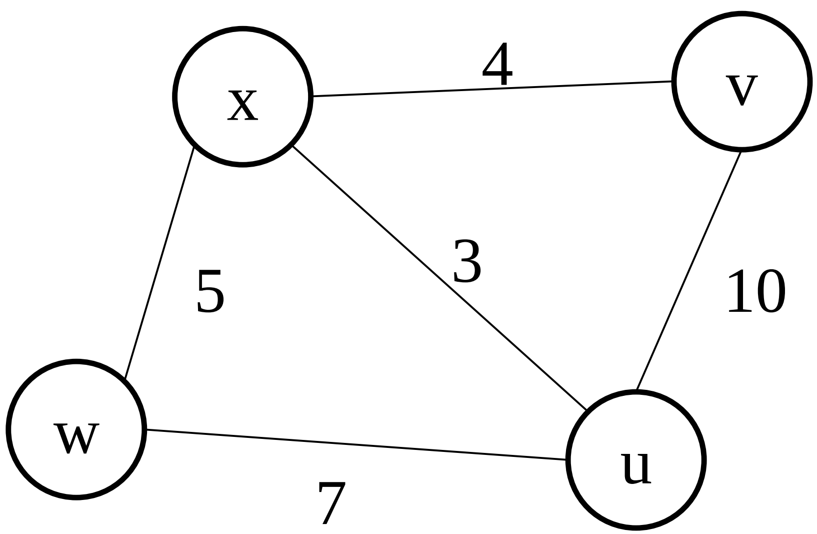
- Conceitos Básicos:
  - **Adjacência e Incidência**

    Dizemos que u **incide** em v, quando existir uma aresta A={u,v}

    Dizemos que u é **adjacente** ou vizinho a v quando existir uma aresta A interligando-os

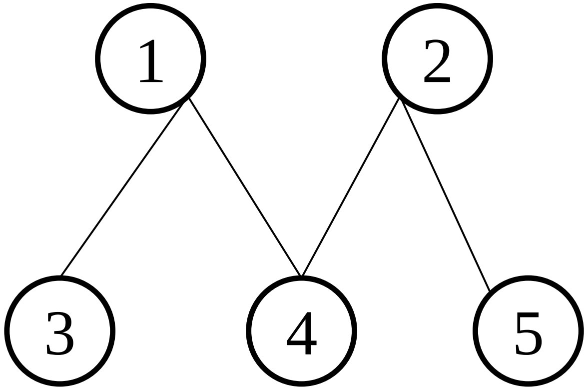
Tipos de Grafo

- **Ponderado**: Um grafo é aquele com peso nas arestas. Este peso pode representar por exemplo uma distância ou um custo.



Tipos de Grafo

- **Grafo bipartido** : Se seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos não vazios N_1 e N_2, tais que dois vértices são adjacentes se, e somente se, um deles pertence a N_1 e o outro pertence a N_2.



• Os vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos {1,2} e {3,4,5}

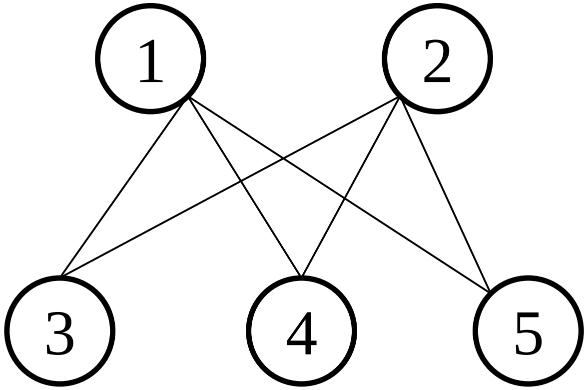
• Dois vértices quaisquer escolhidos **no mesmo conjunto não são adjacentes**.

• Somente dois vértices escolhidos em **conjuntos diferentes podem ser adjacentes.**

Tipos de Grafo

- **Grafo bipartido Completo**: Se seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos não vazios N_1 e N_2, tais que dois vértices são adjacentes para **todo par de vértices** u e v, sendo: $u \in N_1$ $\quad v \in N_2$

Se $|N_1| = m$ e $|N_2| = n$, um tal grafo é denotado por $K_{m,n}$



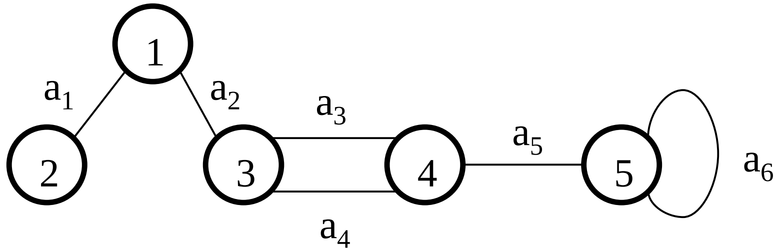
$K_{2,3}$

- Este Grafo não é completo.
- Os vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos {1,2} e {3,4,5}
- Dois vértices quaisquer escolhidos **no mesmo conjunto não são adjacentes**.
- Dois vértices quaisquer escolhidos em **conjuntos diferentes são adjacentes.**

Exercício

1. Esboce um grafo com os vértices {1,2,3,4,5}, arestas $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$, e a função g dada por $g(a_1)=1\text{-}2$, $g(a_2)=1\text{-}3$, $g(a_3) = 3\text{-}4$, $g(a_4) = 3\text{-}4$, $g(a_5) = 4\text{-}5$, $g(a_6) = 5\text{-}5$
   a. Encontre dois vértices não adjacentes
   b. Encontre um nó adjacente a si mesmo
   c. Encontre um laço
   d. Encontre duas arestas paralelas
   e. Encontre o grau do vértice 3
   f. Encontre o caminho de comprimento 5
   g. Encontre um ciclo
   h. Esse grafo é completo ?
   i. Esse grafo é conexo ?
   j. Encontre o grau mínimo, o grau máximo e o grau médio
2. Prove que um grafo acíclico é simples. A recíproca desta afirmação acima é verdadeira ?
3. Desenhe o grafo $K_{3,3}$

Resolução



a. Encontre dois vértices não adjacentes. **(2 e 3)**
b. Encontre um nó adjacente a si mesmo. **(5)**
c. Encontre um laço. **(a_6)**
d. Encontre duas arestas paralelas. **(a_3 e a_4)**
e. Encontre o grau do vértice 3. **(3)**
f. Encontre o caminho de comprimento 5. **($2,a_1,1,a_2,3,a_3,4,a_4,3,a_3,4$)**
g. Encontre um ciclo.**($3,a_3,4,a_4,3$)**
h. Esse grafo é completo ? **Não**
i. Esse grafo é conexo ? **Sim**
j. Encontre o grau mínimo, o grau máximo e o grau médio. **(1, 3, 2.4)**

Resolução

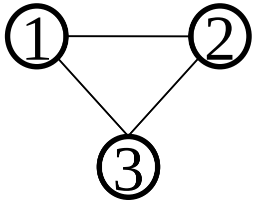
2. Prove que um grafo acíclico é simples. A recíproca desta afirmação acima é verdadeira ?

Afirmação : **Um grafo acíclico → Simples (Verdade)**

Não Simples → Não é acíclico (Contêm Ciclo)

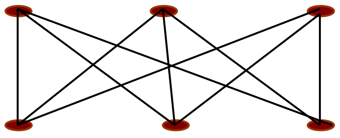
Se um grafo não for simples significa que ele tem arestas paralelas ou laços. E grafos que possuem arestas paralelas ou laços, também possuem ciclos. Ou seja, o grafo não seria acíclico.

Recíproca: Um grafo simples é acíclico (Falso)



3 . Desenhe o grafo $K_{3,3}$

Bipartido Completo



Teoremas

- Para todo grafo G, considerando que em cada vértice $v \in V$ incidem g(v) arestas e que cada aresta incide em 2 vértices, logo:

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2\,|E|$$

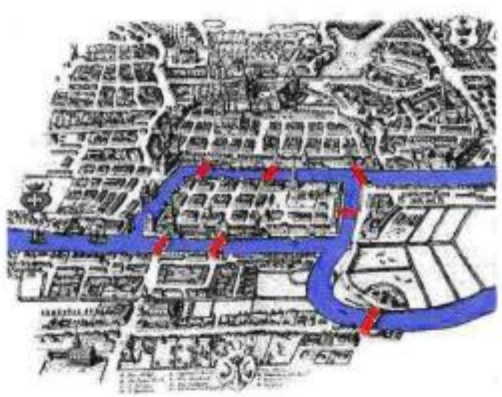
onde |E| representa o número de arestas

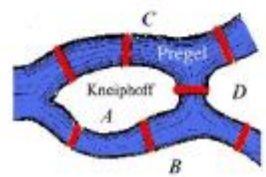
- Em todo grafo o número de vértices com grau impar é par

- Teorema sobre os Caminhos de Euler

História – Origem da Teoria dos Grafos

- Problema das pontes de Konigsberg
  - No Rio Pengel, junto à cidade de Königsberg (hoje Kaliningrado), na então Rússia, existem ilhas, formando quatro regiões interligadas por um total de sete pontes.

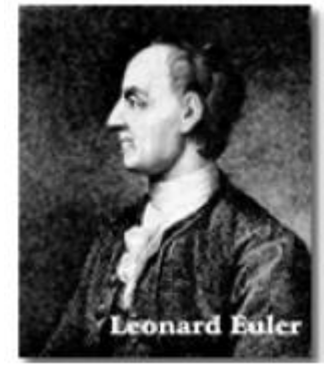




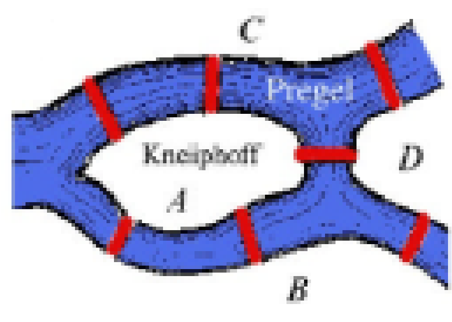
  - É possível cruzar as 7 pontes numa caminhada contínua sem que se que passasse duas vezes por qualquer uma delas?

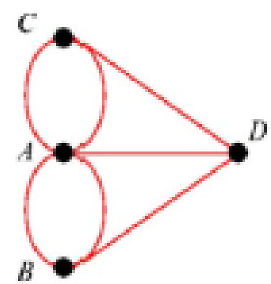
História – Origem da Teoria dos Grafos

- Problema das pontes de Konigsberg



O matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783) ficou intrigado com o problema popularmente conhecido entre os habitantes e propôs uma solução em 1736.





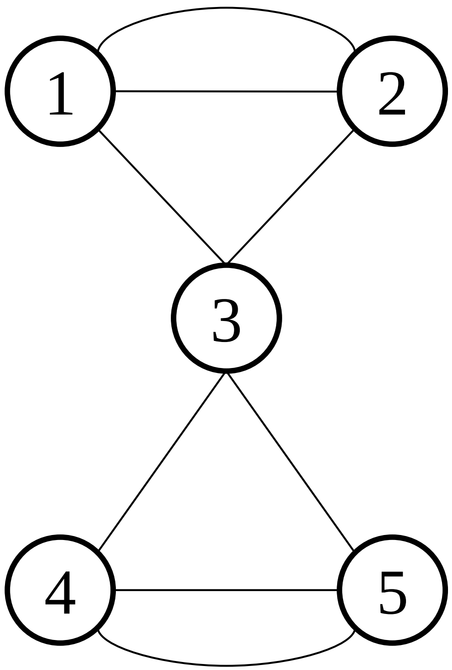
Esta solução ficou conhecida como o caminho de Euler. Consiste na existência de um caminho em um grafo G onde cada aresta de G é usada apenas uma vez.

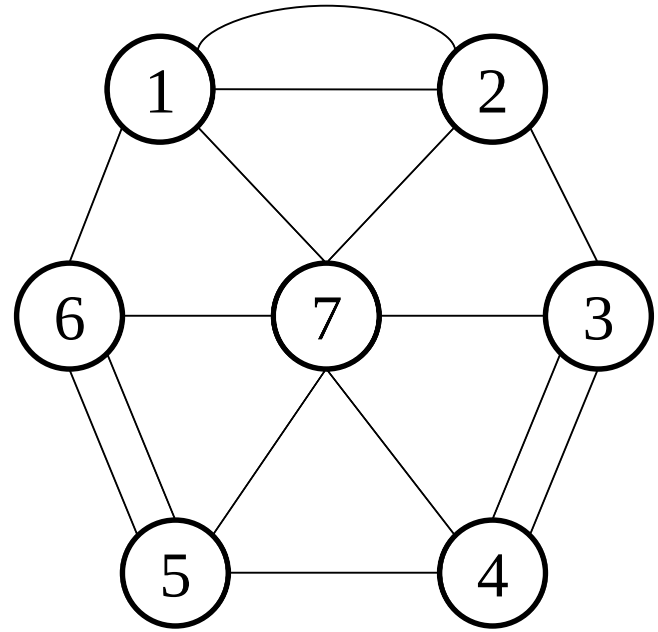
Caminhos de Euler

- Existe um caminho de Euler em um grafo conexo se, e somente se, **não existem vértices de grau impar** ou **existem exatamente dois vértices de grau impar**.

Exercício

- Existem Caminhos de Euler para os grafos abaixo ?



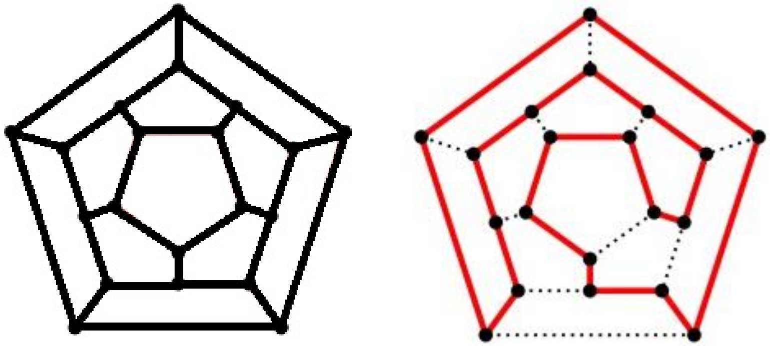


Não existe um Caminho de Euler

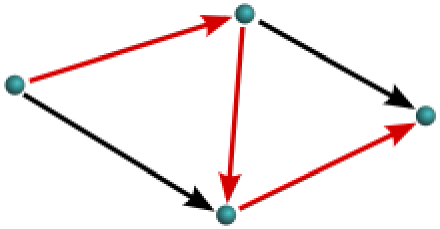
Existe um Caminho de Euler

Caminhos de Hamilton

- Um outro matemático famoso, William Rowan Hamilton (1805 - 1865), colocou um problema semelhante ao de Euler. Ele perguntou como dizer se um grafo tem um **ciclo** contendo todos os vértices do grafo. **(Circuito Hamiltoniano)**.



- Um **caminho hamiltoniano** é um caminho que permite passar por todos os vértices de um grafo G, uma única vez.



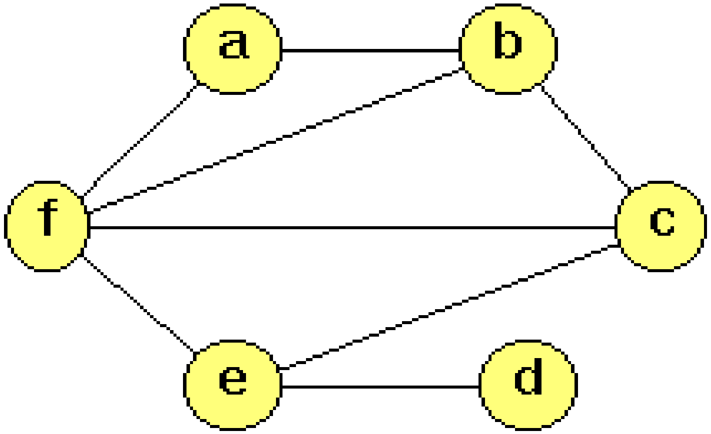
Caminhos de Euler e de Hamilton

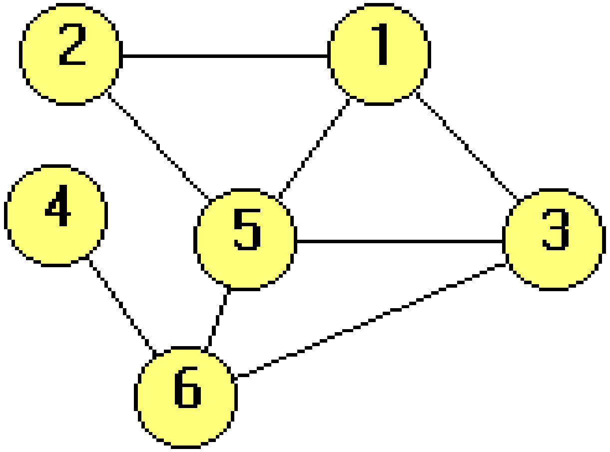
- Caminho Hamiltoniano: É um caminho que contém **cada vértice** do grafo exatamente uma vez.

- Caminho Euleriano: É um caminho que contém **cada aresta** do grafo exatamente uma vez

Tipos de Grafo - Isomorfos

- **Isomorfos**: Dois grafos $G_1(V_1,A_1,g_1)$ e $G_2(V_2,A_2,g_2)$ são isomorfos se existem bijeções $f_1:V_1 \to V_2$ e $f_2:A_1 \to A_2$ tais que, para todo arco $a \in A_1$, $g_1(a)=(x,y)$ se, e somente se, $\mathbf{g_2[f_2(a)]=(f_1(x),f_1(y))}$



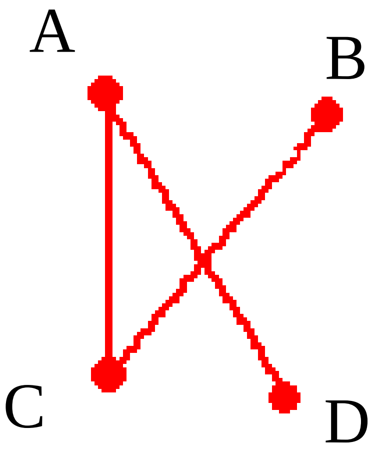


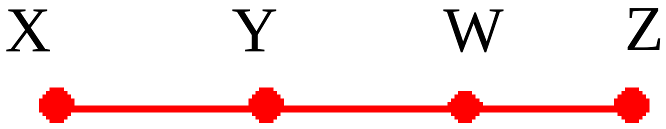
Isomorfismo:

{ (a→2), (b → 1), (c → 3), (d → 4), (e → 6), (f → 5) }

Tipos de Grafo - Isomorfos

- Verifique se estes grafos são isomorfos

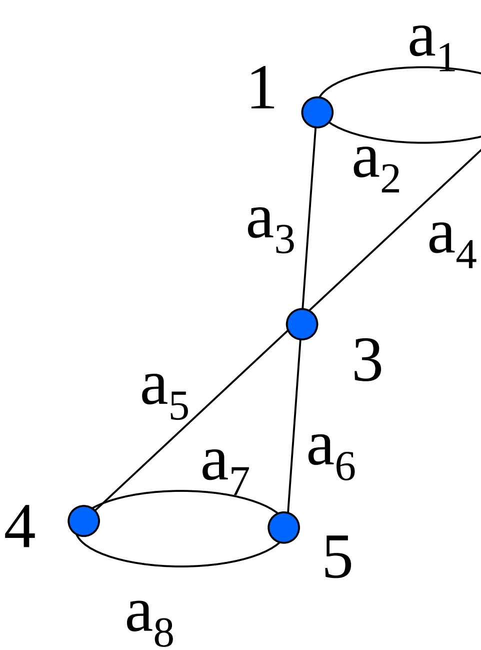


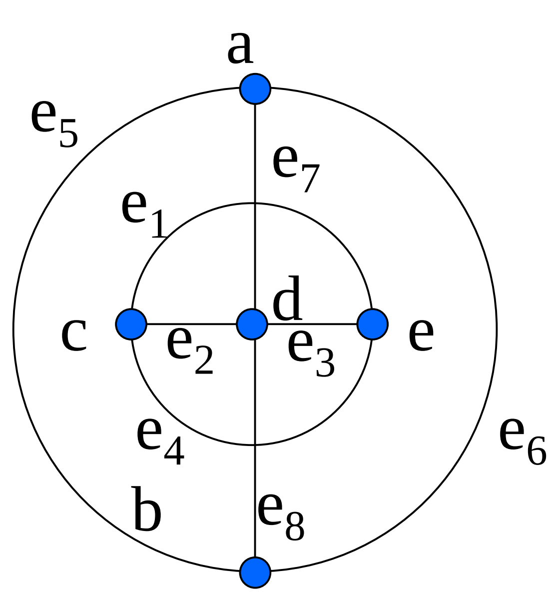


Tipos de Grafo - Isomorfos

- Verifique se estes grafos são isomorfos.

Identificar as relações entre vértices e arestas





f_1 :	f_2 :
$1 \rightarrow c$	$a_1 \rightarrow e_1$
$2 \rightarrow e$	$a_2 \rightarrow e_4$
$3 \rightarrow d$	$a_3 \rightarrow e_2$
$4 \rightarrow b$	$a_4 \rightarrow e_3$
$5 \rightarrow a$	$a_5 \rightarrow e_8$
	$a_6 \rightarrow e_7$
	$a_7 \rightarrow e_5$ (ou e_6)
	$a_8 \rightarrow e_6$ (ou e_5)

Tipos de Grafo - Isomorfos

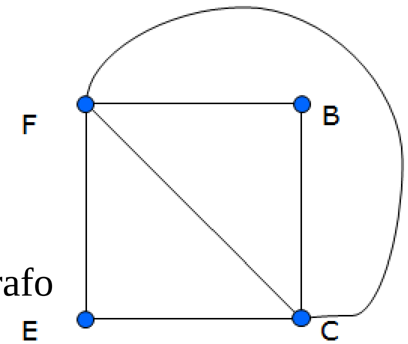
- Algumas dicas para identificar se dois grafos são isomorfos.
  - Um grafo tem mais vértices do que o outro
  - Um grafo tem mais arcos do que o outro
  - Um grafo tem arcos paralelos e o outro não
  - Um grafo tem laço e o outro não
  - Um grafo tem um vértice de grau k e o outro não

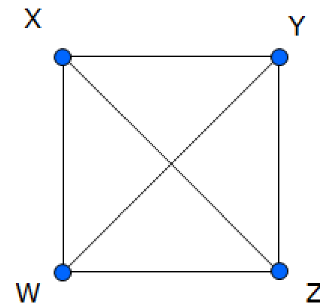
- Obs.: Estas condições não são suficientes

Tipos de Grafo - Isomorfos

- Verifique se estes grafos são isomorfos. **(1º Caso)**

• 4 Vértices
• 6 Arestas
• 2 Vértices possuem grau 2
• Existem arestas paralelas no grafo



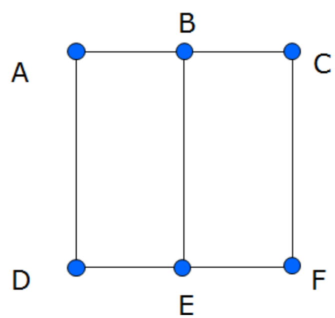


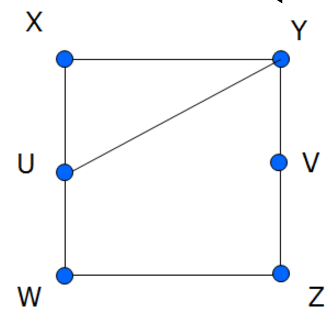
• 4 Vértices
• 6 Arestas
• Todos vértices possuem grau 3
• Não existem arestas paralelas

- Verifique se estes grafos são isomorfos. **(2º Caso)**

• 6 Vértices
• 7 Arestas
• 4 Vértices possuem grau 2
• 2 Vértices possuem grau 3
• Não existem arestas paralelas

• Cada vértice de grau 2 é adjacente a apenas um vértice de grau 3



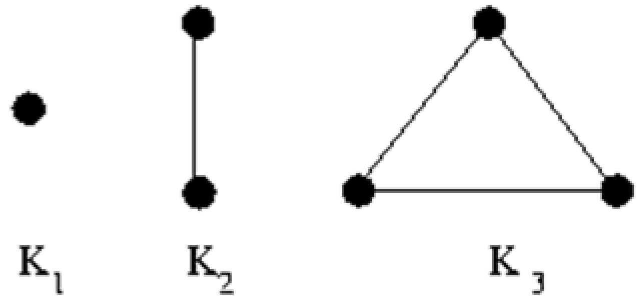


• 6 Vértices
• 7 Arestas
• 4 vértices possuem grau 2
• 2 Vértices possuem grau 3
• Não existem arestas paralelas

• Existe um vértice de grau 2 adjacente aos 2 vértice de grau 3

Tipos de Grafo - Planares

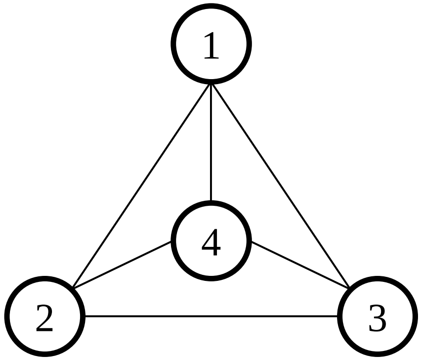
- **Grafo Planar** : São grafos que podem ser representados graficamente em um plano, sem que suas arestas se cruzem.
  - Um grafo é dito **não planar** quando não existe nenhuma forma de representação gráfica deste grafo no plano, sem que suas arestas se cruzem.

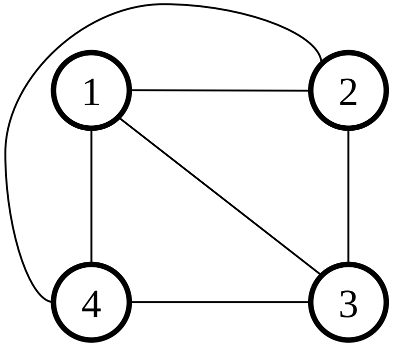


- Os grafos completos K_1, K_2,K_3 são grafos planares. Como representar os grafos K_4 e K_5 como grafos planares ?

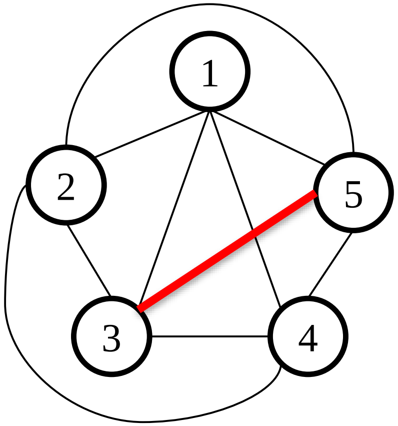
Tipos de Grafo - Planares

- Representação de um grafo K_4 planar



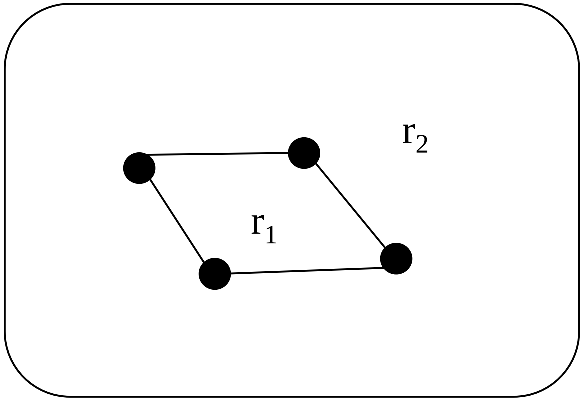


- Representação de um grafo K_5 planar



Tipos de Grafo - Planares

- **Fórmula de Euler** : Em um grafo simples e conexo que divide o plano em um determinado número de regiões, incluindo regiões totalmente limitada por arestas e um região exterior ilimitada, Euler observou a seguinte relação: **$v - a + r = 2$**



Onde,

v = número de vértices

a = número de arestas

r = número de regiões

Fórmula de Euler

- Interpretação – Tentaremos demonstrar por meio da indução os seguintes casos :
  - **Caso 1** – Existe apenas 1 vértice no grafo. v = 1 ; a = 0

$$v - a + r = 2$$

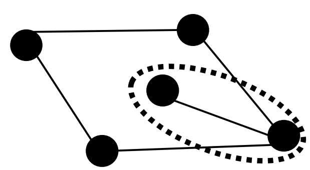
$$1 - 0 + 1 = 2 \rightarrow \boxed{\mathbf{2 = 2}}$$

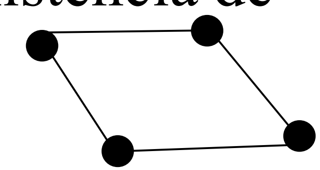
  - **Caso 2** – Considerando a existência de "vértices livres"

$$v - a + r = 2$$

$$5 - 5 + 2 = 2$$

$$\boxed{\mathbf{2 = 2}}$$





$$v - a + r = 2$$

$$4 - 4 + 2 = 2$$

$$\boxed{\mathbf{2 = 2}}$$

Generalizando :

$$(v + 1) - (a + 1) + r = 2$$

$$\boxed{\mathbf{v - a + r = 2}}$$

Generalizando :

$$(v - 1) - (a - 1) + r = 2$$

$$\boxed{\mathbf{v - a + r = 2}}$$

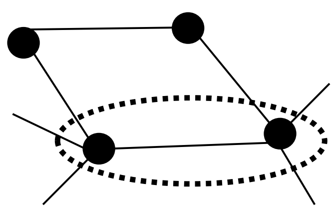
Fórmula de Euler

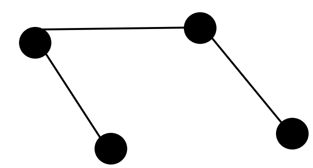
– **Caso 3** – Considerando a **não** existência de **“vértices livres”**

$v – a + r = 2$

$4 – 4 + 2 = 2$

$\boxed{\mathbf{2 = 2}}$





$v – a + r = 2$

$4 – 3 + 1 = 2$

$\boxed{\mathbf{2 = 2}}$

Generalizando :

$V – (a + 1) + (r + 1) = 2$

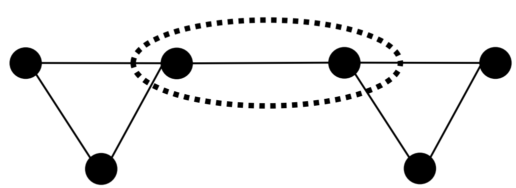
$\boxed{\mathbf{v – a + r = 2}}$

Generalizando :

$V – (a - 1) + (r - 1) = 2$

$\boxed{\mathbf{v – a + r = 2}}$

– **Caso 4** – A aresta a ser retirada não faz fronteira com outra região



Neste caso a remoção desta aresta implicaria na divisão do grafo em 2 subgrafos desconexos.

Fórmula de Euler

- **Teorema** para um grafo planar simples e conexo com *n* vértices e *a* arestas:
  1. Se a representação planar divide o plano em r regiões , então :

     $v - a + r = 2$ **(Equação 1)**

  2. Se $v \geq 3$ então :

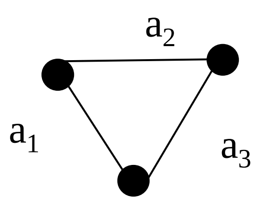
     $a \leq 3v - 6$ **(Inequação 1)**

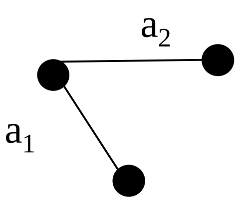
  3. Se $v \geq 3$ e se não existem ciclos de comprimento 3 então :

     $a \leq 2v - 4$ **(Inequação 2)**

Fórmula de Euler

- Exemplos





v – a + r = 2 (Equação 1)
3 – 3 + 2 = 2
2 = 2 (V)

a ≤ 3v – 6 (Inequação 1)
3 ≤ 3.3 – 6
3 ≤ 3 (V)

a ≤ 2v – 4 (Inequação 2)
3 ≤ 2.3 – 4
3 ≤ 2 (F)

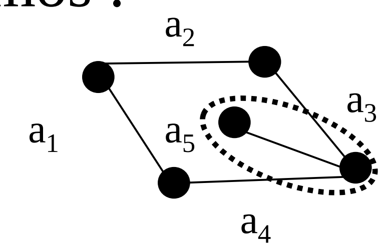
v – a + r = 2 (Equação 1)
3 – 2 + 1 = 2
2 = 2 (V)

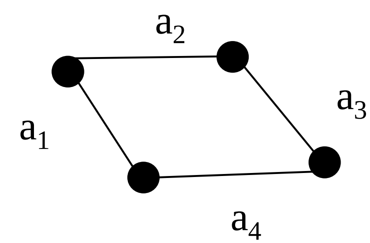
a ≤ 3v – 6 (Inequação 1)
2 ≤ 3.3 – 6
2 ≤ 3 (V)

a ≤ 2v – 4 (Inequação 2)
2 ≤ 2.3 – 4
2 ≤ 2 (V)

Fórmula de Euler

- Deduções :
  - Se percorrermos as fronteiras das regiões dos grafos abaixo teremos :





r1 contêm as arestas $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_5\}$ → 6 arestas
r2 contêm as arestas $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ → 4 arestas

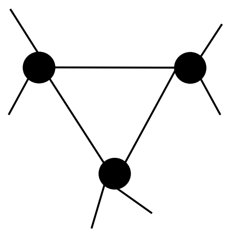
r1 contêm as arestas $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ → 4 arestas
r2 contêm as arestas $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ → 4 arestas

  - Assim o número de **arestas das regiões** pode ser escrito por **2a**

Onde a = número de arestas do grafo

Fórmula de Euler

- Deduções :
  - Cada região tem pelo menos 3 arestas adjacentes. Logo, podemos dizer que **3r** é o número **mínimo** de **arestas de região**.



Temos então a seguinte relação :

$$\boxed{2a \geq 3r}$$

Utilizando a equação 1 de Euler, temos :

Equação 1 de Euler

$$\mathbf{v - a + r = 2}$$

$$2a \geq 3(2 + a - v)$$
$$2a \geq 6 + 3a - 3v)$$
$$-a \geq 6 - 3v$$
$$\boxed{a \leq 3v - 6}$$

Inequação 1

Fórmula de Euler

- Deduções :
  - Se estamos trabalhando com grafos onde não existem ciclos de comprimento 3, então cada região terá pelo menos 4 arestas adjacentes. Logo, podemos dizer que **4r** é o número **mínimo** de **arestas de região**.

Temos então a seguinte relação :

$$\boxed{2a \geq 4r}$$

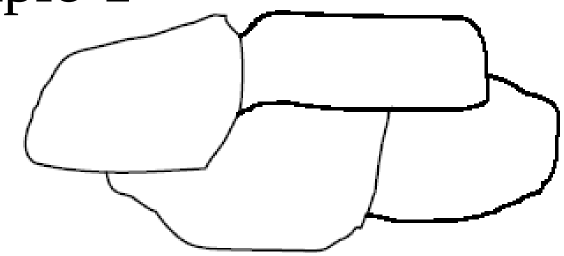
Utilizando de forma análoga a equação 1 de Euler, temos :

$\boxed{a \leq 2v - 4}$ **Inequação 2**

Problema - Coloração

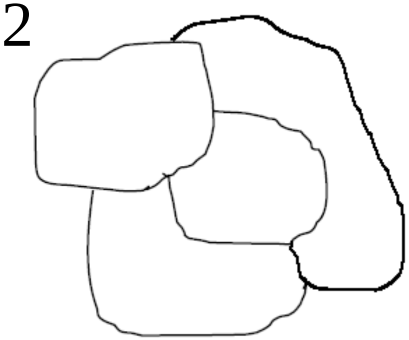
- Um mapa de vários estados ou países, desenhado em uma folha de papel, deve ser colorido da melhor forma possível, de modo que as localidades com fronteiras em comum devem ter cores distintas, facilitando a sua visualização.
- Qual o número mínimo de cores exigidas para a coloração de qualquer mapa ?

Exemplo 1



3 Cores são suficientes

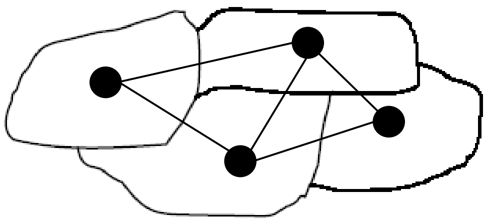
Exemplo 2

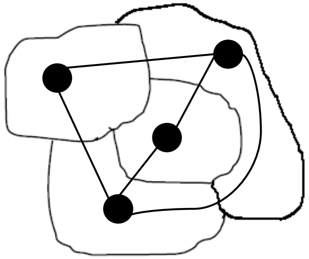


4 Cores são necessárias

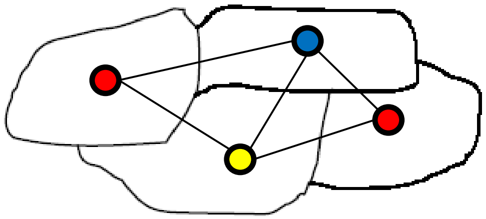
Problema - Coloração

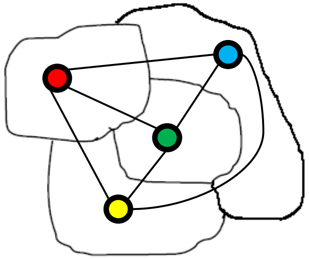
- Como resolver o problema ?
  - Podemos fazer a seguinte associação (**Grafo Dual**) :
    - Cada área com um vértice do grafo.
    - As áreas com fronteira serão vértices adjacentes.





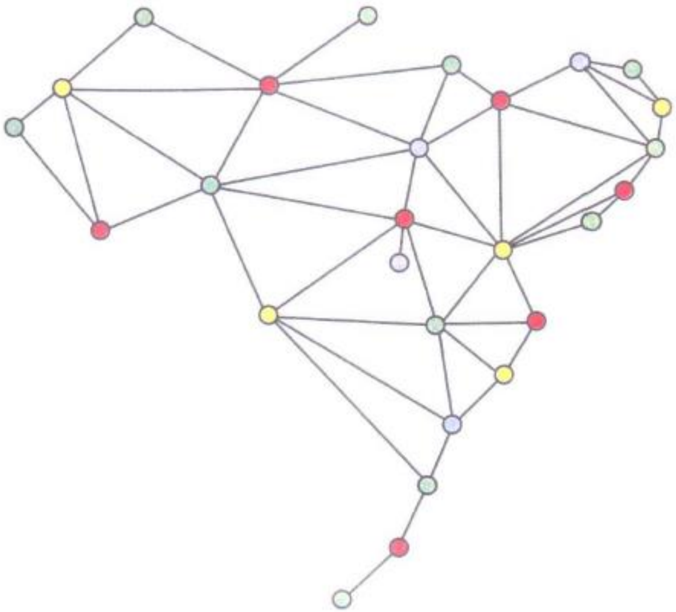
  - Cada vértice recebe uma cor diferente dos vértices adjacentes

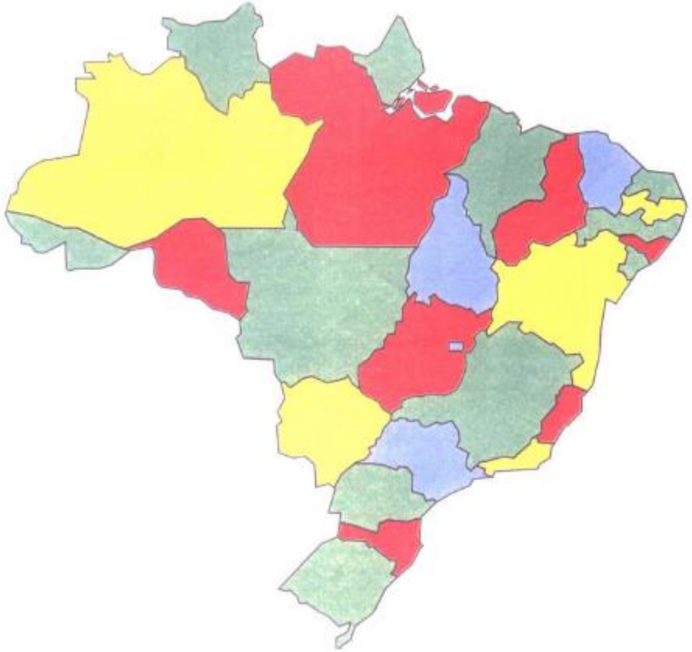




Problema - Coloração

- Podemos repetir este processo de forma análoga para qualquer mapa.
- **Teorema das Quatro Cores** : Todo mapa pode ser colorido com até 4 cores, respeitando-se a condição de que regiões vizinhas, com alguma linha de fronteira em comum, tenham cores diferentes





Problema das Quatro Cores

- Este problema foi proposto em 1852 por **Francis Guthrie**, um jovem matemático formado pela University College em Londres, quando tentava colorir os condados da Inglaterra. Francis percebeu que o problema era bem curioso e apresentou a seu irmão, **Frederick Guthrie**, estudante de matemática da mesma faculdade e aluno do famoso **Augustus De Morgan** (Autor das leis De Morgan – Teoria de Conjuntos).

Francis Guthrie

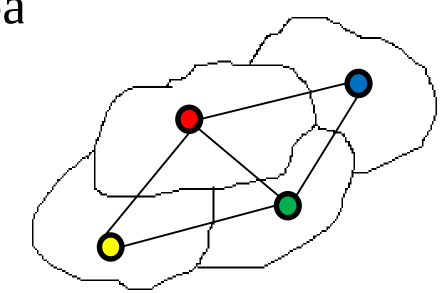
$$\overline{X \cup Y} \leftrightarrow \overline{X} \cap \overline{Y}.$$
$$\overline{X \cap Y} \leftrightarrow \overline{X} \cup \overline{Y}$$

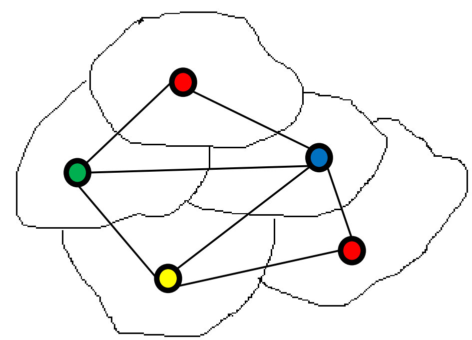
Não (X E Y) = Não (X) Ou Não (Y)
Não (X Ou Y) = Não (X) E Não (Y)

Augustus De Morgan

Problema das Quatro Cores

- Avaliação de Augustus De Morgan sobre o problema
  - Se quatro territórios tem, cada um, fronteira com os outros três, então um deles será circundado pelos demais. Isto impede que um quinto território tenha fronteira com todos os quatro. Se isto for verdade, quatro cores bastam para colorir qualquer mapa



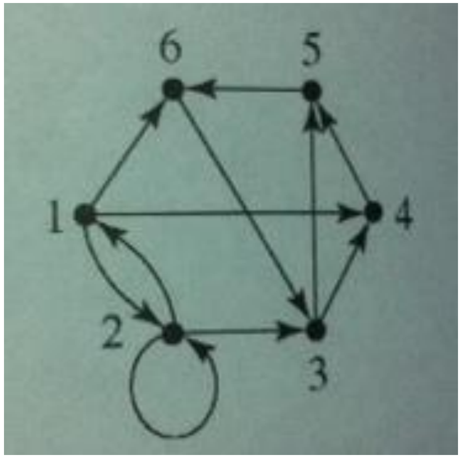


Teorema: Tomando-se cinco países quaisquer em um mapa, ao menos dois deles não serão vizinhos.

Se esses cinco países forem todos vizinhos uns dos outros, os cinco vértices do grafo estariam ligados dois a dois por arestas em um mesmo plano. Esses cinco vértices e suas arestas formariam então o grafo completo de cinco vértices K_5

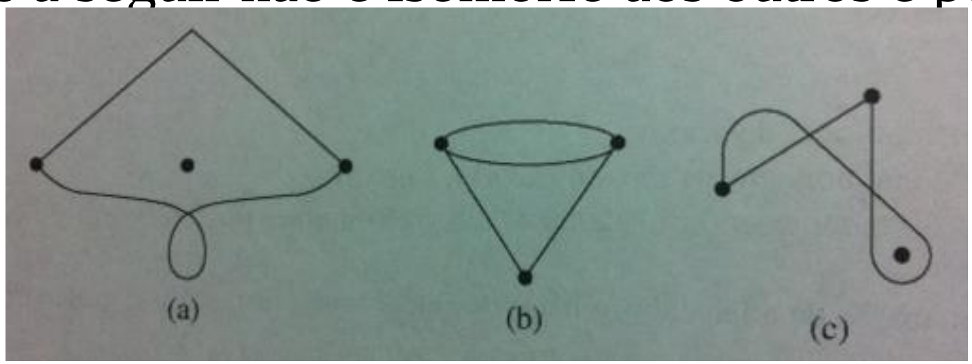
Exercícios

1. Esboce o desenho de um grafo para cada caso indicado a seguir :
   a) Um grafo simples com 3 vértices, cada um de grau 2
   b) Um grafo com 4 vértices e ciclos de comprimento 1, 2, 3 e 4
   c) Um grafo não completo com 4 vértices, cada um de grau 4
2. Use o grafo direcionado na figura para responder as perguntas abaixo:
   a) Quais vértices são acessíveis a partir do vértice 3 ?
   b) Qual o comprimento do caminho mais curto do vértice 3 para o 6 ?
   c) Qual o caminho de comprimento 8 do vértice 1 para o 6 ?



Exercícios

3. Qual dos grafos a seguir não é isomorfo aos outros e porque ?



4. Desenhe todos os grafos não isomorfos simples com 2 vértices.

5. Pode haver um grafo simples com 15 vértices, cada um com grau 5 ? Porque ?

6. Quantos vértices tem um grafo regular de grau 4 com 10 arestas?

7. Pode haver um grafo conexo que possui oito vértices e seis arestas? Justifique a resposta

Exercícios

8. Prove que $K_{2,3}$ é um grafo planar

9. Se um grafo planar simples e conexo tem 6 vértices, e todos são de grau 3 em quantas regiões ele divide o plano ?

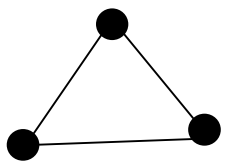
Resolução

1.a. Um grafo simples com 3 vértices, cada um de grau 2

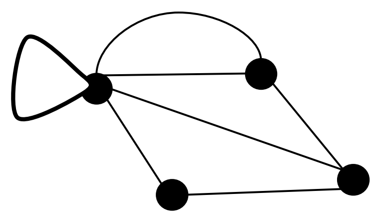
1.b. Um grafo com 4 vértices e ciclos de comprimento 1, 2, 3 e 4

1.c. Um grafo não completo com 4 vértices, cada um de grau 4

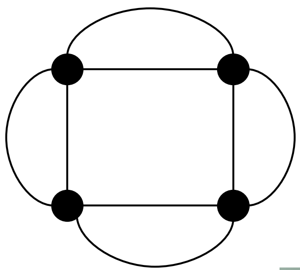
1a



1b



1c

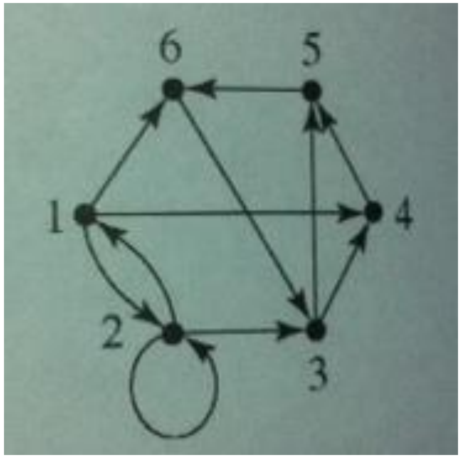


2.a. Quais vértices são acessíveis a partir do vértice 3 ?

vértices 4,5,6

2.b. Qual o comprimento do caminho mais curto do vértice 3 para o 6 ? **Comprimento 2**

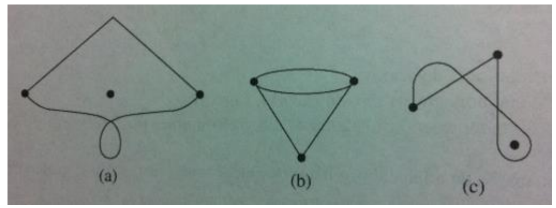
2.c. Qual o caminho de comprimento 8 do vértice 1 para o 6 ? **1 - 2 - 1 - 2 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6**



Resolução

3. Qual dos grafos a seguir não é isomorfo aos outros e porque ?

(b) não é isomorfo



4. Desenhe todos os grafos não isomorfos simples com 2 vértices

5. Pode haver um grafo simples com 15 vértices, cada um com grau 5 ? Porque ?

Teorema

$$\sum g(u) = 2|E|$$

15 Vértices * 5 = 75 Grau Total (Impar)

Resposta : Impossível

Resolução

6. Quantos vértices tem um grafo regular de grau 4 com 10 arestas?

Teorema

$$\sum g(u) = 2|E|$$

$4*V = 2*10$

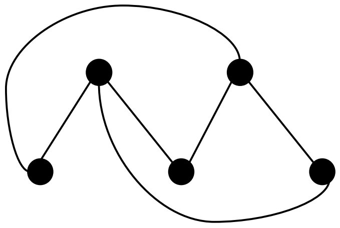
$V = 5$

7. Pode haver um grafo conexo que possui oito vértices e seis arestas?

Não. O número mínimo de arestas para o grafo ser conexo é a quantidade de vértices menos um. Neste caso, seriam necessárias pelo menos sete arestas para o grafo ser conexo.

Resolução

8. Prove que $K_{2,3}$ é um grafo planar



9. Se um grafo planar simples e conexo tem 6 vértices, e todos são de grau 3 em quantas regiões ele divide o plano ?

$$\boxed{\sum g(u) = 18} \qquad \sum g(u) = 2|E| \qquad \boxed{|E| = 9}$$

$$v - a + r = 2$$

$$6 - 9 + r = 2 \qquad \boxed{r = 5}$$