
基于高斯过程的巴黎期权定价问题

Author:

Ming Li

Department:

Mathematics

2016 年 6 月 19 日

本文将巴黎期权的定价模型拓展到一般的高斯过程以适应更多的资产运动模型假设。利用 Wick-Ito 积分推导出一般高斯过程下巴黎期权价格的偏微分方程并构造无条件稳定的隐式差分格式。最后使用计算量较小的追赶法分别求解布朗运动，分数布朗运动与次分数布朗运动下的连续型和累计型巴黎期权价格，结果表明，随着分数布朗运动与次分数布朗运动的 Hurst 参数的增大，连续型与累计型向上敲出看涨巴黎期权的价格峰值逐渐减小并向标的资产减少的方向移动。

关键词: 巴黎期权，高斯过程，追赶法，分数布朗运动，次分数布朗运动

1 引言

巴黎期权是一种强路径依赖期权 (path-dependent option)，该合约允许持有人在股票价格于到期日前按照规定的价格向上 (向下) 累计或连续停留一段预先设定的时间 (持续时间)，以预先约定的价格买入或卖出相应的股票。根据持续时间的类型，可分为累积巴黎期权 (cumulative Parisian option) 与连续巴黎期权 (consecutive Parisian option)。累积巴黎期权是指股票价格需要累积在障碍价格之上 (之下) 停留一段时间才允许敲入或敲出；连续巴黎期权是指股票价格连续在障碍价格之上 (之下) 停留预先设定的一段时间才允许敲入或敲出。由于累积巴黎期权的条件比连续巴黎期权更容易触发障碍价格，对敲出期权 (knock-out option) 来说，其价格要高于累积巴黎期权，对敲入期权 (knock-in option) 来说则正好相反。巴黎期权主要应用于外汇市场以及混合金融衍生品的定价。例如，外汇巴黎期权能够减少汇率变化对期权价格带来的影响，从而有效规避市场参与者的投机行为；可转换债券中的回售、赎回、转换等条款均含有巴黎期权的特征。

目前关于巴黎期权定价的主要方法有概率方法与偏微分方程 (PDE) 方法。Haber 等在 Black-Scholes 期权定价的框架下，通过股价、持续时间、终端时间这三个变量推导了巴黎期权定价的偏微分方程，并运用显式差分法 (explicit difference method) 进行求解，但是该数值方法的收敛速度较慢，且稳定性较差。罗俊和吴雄华利用初值的奇性消除技术对两点中心隐式差分格式进行了修正，以提高巴黎期权定价的运算效率。宋斌等在 Haber 等的基础上，重新定义了巴黎期权偏微分方程的定解空间，并用隐式差分法 (implicit difference method) 对巴黎期权进行了定价，该数值方法收敛速度快，且稳定性较好。Kwok 和 Lau 在三叉树模型的框架下，用向前打靶网格法 (forward shooting grid) 对累计、连续以及移动窗口巴黎期权进行了定价。Lonstaff 和 Schwartz 首次利用最小二乘蒙特卡罗 (Least-square Monte Carlo) 对美式巴黎期权进行了计算。宋斌和井帅在连续时间的框架下分别用最小二乘蒙特卡罗、向前打靶网格法以及有限差分法 (finite difference method) 对含有自由边界的美式巴黎期权进行了计算。

2 高斯过程

高斯过程是一种普遍存在和重要的随机过程。一个高斯过程完全由它的均值函数和协方差函数决定，只要均值函数 $E(W_t)$ 和协方差函数 $E(W_t, W_s)$ 确定了，这个高斯过程也就完全确定了。设 $\{W_t\}_{t \geq 0}$ 为概率空间 (Ω, F, P) 上的一个具有独立增量的高斯过程， $W_0 = 0$ ，且满足

$$(1) \text{ 均值 } E(W_t) = 0, t \geq 0$$

$$(2) \text{ 协方差 } E(W_t, W_s) = F(t, s) < \infty, t, s \geq 0$$

当 $F(t, s) = t \wedge s$ 时， W_t 即为标准布朗运动。当 $F(t, s) = 1/2(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$ 时， W_t 为 Hurst 参数为 H 的分数布朗运动。当 $H \in (0, 1/2)$ 时增量负相关， W_t 具有短期依赖性，表现为反持久性，即未来的增

长趋势与过去趋势相反；当 $H \in (1/2, 1)$, W_t 具有长期依赖性，表现为持久性，即未来的增长趋势将延长过去的增长趋势。双分数布朗运动的协方差函数为 $F(t, s) = 1/2^K [(t^{2H} + s^{2H})^K - |t - s|^{2HK}]$ 。它不仅具有分数布朗运动的自相似性和长记忆性等性质，而且当 $2HK = 1$ 时， W_t 为一个半鞅。

次分数布朗运动，同样也具有自相似性和长记忆性，Yan Litan 等给出了次分数布朗运动的随机积分，并指出次分数布朗运动可以用来刻画金融资产的随机波动性，对应的协方差为 $F(t, s) = t^{2H} + s^{2H} - 1/2(|t + s|^{2H} + |t - s|^{2H})$ 。

混合分数布朗运动为布朗运动和分数布朗运动的线性组合， $W_t = \alpha B_t + \beta B_t^H$ ，其中 B_t 为布朗运动， B_t^H 为布朗运动， $\alpha, \beta \in R$ 。协方差函数为 $F(t, s) = \alpha^2(t \wedge s) + \beta(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})/2$ 。

记 $F(t, t) = F_t$, $dF_t/dt = U_t$ ，综上可以得表 1

表 1: 各种高斯过程的协方差函数		
高斯过程	F_t	U_t
布朗运动	t	1
分数布朗运动	t^{2H}	$2Ht^{2H-1}$
双分数布朗运动	t^{2HK}	$2HKt^{2HK-1}$
次分数布朗运动	$(2 - 2^{2H-1})t^{2H}$	$(4 - 2^{2H})Ht^{2H-1}$
混合分数布朗运动	$\alpha^2 t + \beta^2 t^{2H}$	$\alpha^2 + 2H\beta^2 t^{2H-1}$

本文主要研究在一般的高斯过程下巴黎期权的求解方法，主要围绕布朗运动，分数布朗运动和次分数布朗运动，讨论模型参数对巴黎期权价格的影响。

3 Wick-Ito 积分

当高斯过程 W_t 既不是 Markovian 过程，也不是半鞅时，Rogers 证明了按照路径型积分建立的金融市场数学模型存在套利机会。而在一个存在套利机会的市场中对金融衍生品定价是不切实际的。因此，本文使用如下的 Wick-Ito 积分

$$\int_a^b f(t, \omega) dW_t = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, \omega) \diamond (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \quad (1)$$

其中 \diamond 代表 Wick 乘积。由此定义的随机积分宽假下，金融市场数学模型是无套利的并且市场是完备的。

下面引入关于高斯过程的 Wick-Ito 公式，其证明过程请参加文献 [XX]

引理 3.1 设 Y_t 是一方差有界的中心型高斯变量，记 $F_t = E(Y_t^2)$ ，函数 $f(t, y) : [0, +\infty] \times R \rightarrow R$ 是连续的，其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 均存在且满足指数型增长条件，即 $\forall t \in [0, T]$, $x \in R$ 有

$$\left| \frac{\partial^k f(t, y)}{\partial y^k} \right| \leq C_T \exp(c_T y^2), \quad k = 0, 1, 2 \quad (2)$$

则 Wick-Ito 公式的积分形式为

$$f(T, Y_T) = f(0, Y_0) + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial y}(t, Y_t) dt + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial y}(t, Y_t) \diamond dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, Y_t) dF_t \quad (3)$$

其中, C_T, c_T 均大于零的常数, 且满足 $c_T < \frac{1}{4} \sup_{t \in [0, T]} F_t^{-1}$, \diamond 表示 Wick 乘积, 同时 Wick-Ito 公式的微分形式为

$$df(T, Y_T) = f(0, Y_0) + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial y}(t, Y_t) dt + \frac{\partial f}{\partial y}(t, Y_t) \diamond dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, Y_t) dF_t \quad (4)$$

由引理 3.1, 我们可以得到以下定理

定理 3.2 设 W_t 为一方差有界的高斯过程, 标的资产 S_t 为一随机过程且满足

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t \diamond dW_t \quad (5)$$

$V(S_t, t)$ 为一关于 S_t 的金融衍生品的价格, r 为无风险利率, $F(t) = E(W_t^2)$, $U_t = \frac{dF(t)}{dt}$ 则任意时刻 $t \in [0, T]$, $V(S_t, t)$ 满足偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 U_t \frac{\partial V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial t} = rV \quad (6)$$

4 高斯运动下巴黎期权定价模型

设 $S(t)$ 为一个公司股票的价格过程, 满足下列随机微分方程

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (7)$$

其中 r 为无风险利率, σ^2 为股票价格波动率方差。 W_t 为一高斯过程, $F_t = E(W_t^2)$, $dF_t/dt = U_t$ 。

4.1 连续型向上敲出看涨巴黎期权

考虑向上敲出看涨欧式巴黎期权 (Up-and-Out Call) 的定价问题。 J 表示股票价格 S_t 在障碍水平 L 之上连续时间的长度, 定义为

$$J(t) = t - \sup(t' \leq t | S_{t'} \leq D) \quad (8)$$

于是有

$$dJ(t) = \begin{cases} dt, & S_t > L \\ -J(t_-), & S_t = L \\ 0, & S_t < L \end{cases} \quad (9)$$

巴黎期权的价格 V 是标的资产价格 S , 时间 t 及资产价格连续超过障碍的时间当前计数值 J 的函数, 记为 $V(S, J, t)$ 。假定障碍价格 $L > E$, 根据动态复制的理论, 结合方程 6, 向上敲出看涨的巴黎期权的价格应满足方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(S - L) \frac{\partial V}{\partial J} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 U \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (10)$$

求解区间为 $0 \leq J \leq D$, $0 \leq t \leq T$, $0 < S < \infty$, 其中函数

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

根据巴黎期权的定义, 当标的资产价格连续超过障碍 L 的时间达到 D 时 (即 $J = D$ 时) 即敲出, 其价值为零。

$$V(S, t, D) = 0 \quad (12)$$

每当发生 $S < L$ 时, J 重置为零。当 $J = 0$ 时, 考虑 V 在 $J = 0$ 处的连续性, 定解条件为

$$V(L, t, J) = V(L, t, 0) \quad (13)$$

当 $t = T$ 时, 期权没有敲出, 执行期权的终端支付, 即满足

$$V(S, T, J) = (S - E)^+ \quad (14)$$

由于当 $S < L$ 时, J 恒为 0, 因此可以简记为 $V(S, t)$, 满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 U_t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (15)$$

当 $S > L$, $0 < J < D$ 时, $V(S, t, J)$ 满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial J} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 U_t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (16)$$

4.2 累计型向上敲出看涨巴黎期权

在累计时间下, 在 $S < L$ 时, 计时器 J 不清零也不计时, 其微分表达式为

$$dJ(t) = \begin{cases} dt, & S_t \geq L \\ 0, & S_t < L \end{cases} \quad (17)$$

累计型向上敲出看涨巴黎期权的价值同样满足方程(10), 但是由于 J 不重置, 其定解条件不包含(13)

$$\begin{cases} V(S, T, J) = (S - E)^+ \\ V(S, t, D) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

5 数值求解

离散化方程(15)与(16), 令 $S_i = S_0 + i\Delta h$, $i \in [0, M]$, $S_I = L$; $t_n = n\Delta t$, $n \in [0, N]$, $N\Delta t = T$; $J_j = j\Delta t$, $j \in [0, K]$, $K\Delta t = D$ 。

当 $S < L$ 时, 构造差分格式

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} + (r - q)S_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta h} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 U_n \frac{V_{i+1}^n - 2V_i^n + V_{i-1}^n}{\Delta h^2} - rV_i^n = 0 \quad (19)$$

即

$$V_i^n - (a_i^n V_{i-1}^n + b_i^n V_i^n + c_i^n V_{i+1}^n) = V_i^{n+1} \quad (20)$$

其中

$$a_i^n = -\frac{(r - q)S_i \Delta t}{2\Delta h} + \frac{\sigma^2 S_i^2 U_n \Delta t}{2\Delta h^2}, \quad b_i^n = -r\Delta t - \frac{\sigma^2 S_i^2 U_n \Delta t}{\Delta h^2}, \quad c_i^n = \frac{(r - q)S_i \Delta t}{2\Delta h} + \frac{\sigma^2 S_i^2 U_n \Delta t}{2\Delta h^2}$$

当 $S > L$ 时, 构造差分格式

$$\frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} + (r - q)S_i \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta h} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 U_n \frac{V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{\Delta h^2} - rV_{i,j}^n = 0 \quad (21)$$

即

$$V_{i,j}^n - (a_i^n V_{i-1,j}^n + b_i^n V_{i,j}^n + c_i^n V_{i+1,j}^n) = V_{i,j+1}^{n+1} \quad (22)$$

当 $S = L$ 时, 综合(20)和(22)以及定解条件(13), 需满足

$$V_I^n - (a_I^n V_{I-1}^n + b_I^n V_I^n + c_I^n V_{I+1,0}^n) = V_I^{n+1} \quad (23)$$

$$V_{I+1,0}^n - (a_I^n V_I^n + b_I^n V_{I+1,0}^n + c_I^n V_{I+2,0}^n) = V_{I+1,1}^{n+1} \quad (24)$$

在两端, 使用如下线性近似

$$(1 - 2a_0^n - b_0^n)V_0^n + (a_0^n - c_0^n)V_1^n = V_0^{n+1} \quad (25)$$

$$(1 - 2c_M^n - b_M^n)V_{M,j}^n + (c_M^n - a_M^n)V_{M-1,j}^n = 2$$

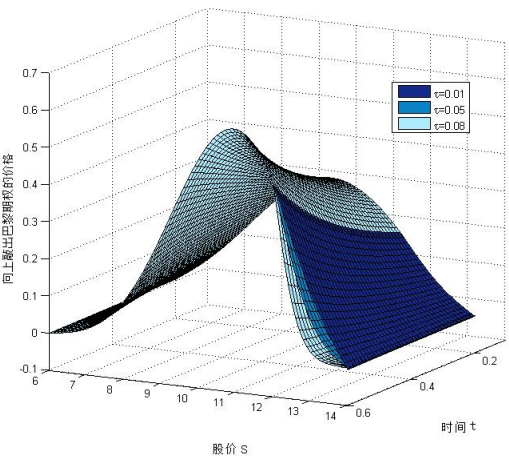


图 1: 连续型向上敲出看涨巴黎期权

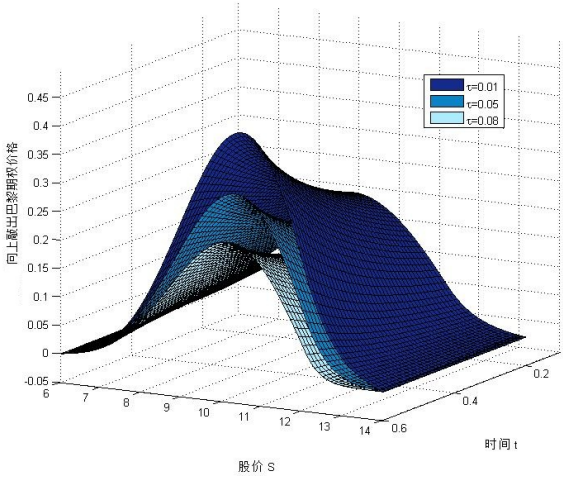


图 2: 累计型向上敲出看涨巴黎期权

图 6.1和 6.1分别为连续型和累计型向上巴黎期权的价格。从整体的图形上两者的图形是相似的，对于任意 τ ，最大值都是出现 $S = 10$ 处。并且随着 t 越接近终点 T , 其最大值越大。只是同样参数下，累计型巴黎期权的价格比连续型巴黎期权的价格更低。由于连续型巴黎期权只有当标的资产超过障碍水平的时候计时器才会开始计时，否者归零，因此 6.1只有在右侧当 $S > 12$ 时，才会随着 τ 增加而下降；而累积型巴黎期权的计时器不会归零，因此 6.1中，整个图形都会随着 τ 增加而下降。

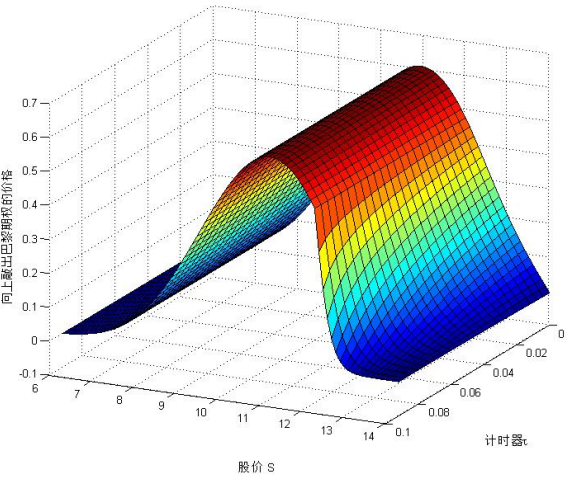


图 3: 连续型向上敲出看涨巴黎期权

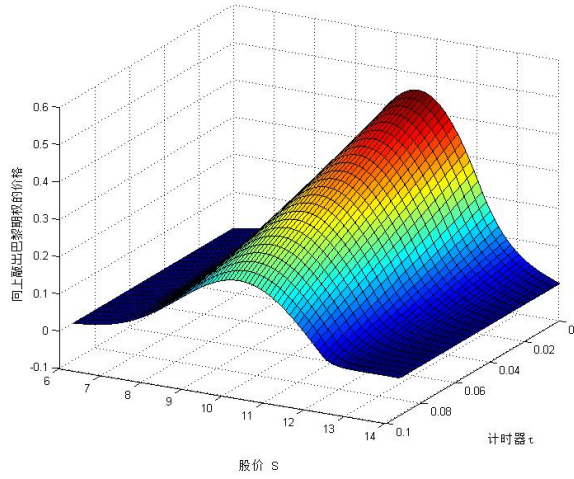


图 4: 累计型向上敲出看涨巴黎期权

固定时间 t ，对比连续型和累计型向上巴黎期权的价格 (如图 6.1和 6.1)，累计型巴黎期权的峰值明显低于连续型巴黎期权并且随着计时值 τ 的增加而快速下降。

6.2 更广泛的高斯过程

观察方程(20)和(22)，不同的高斯过程，影响的只有方程中的参数 U_n ，即协方差函数的导函数 U_t 。为了更一般性的研究不同的高斯过程对巴黎期权价格的影响，我们假设 U_t 可以写成 t 的幂指数的形式 $U_t = \alpha t^\gamma$ 。下面考虑不同的参数 α 和 γ 对连续型向上敲出看涨巴黎期权价格的影响。

表 2: 高斯过程的协方差函数

α	γ	F_t	U_t
1	1	t	1
0.7	1	$0.7t$	0.7
1.4	0.4	$t^{1.4}$	$1.4t^{0.4}$

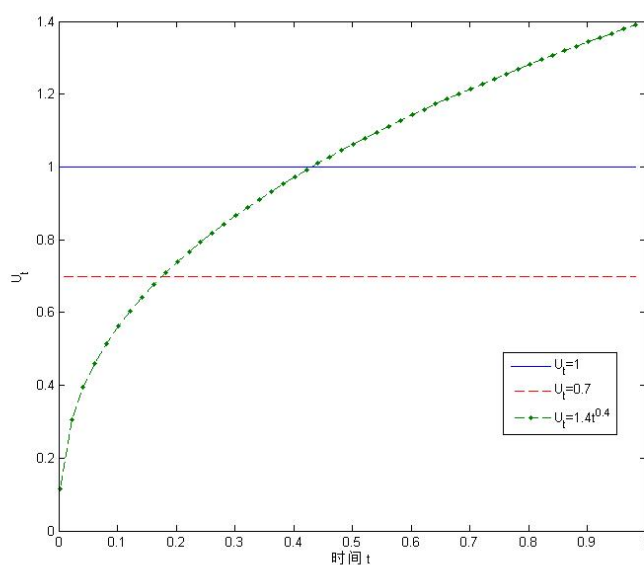
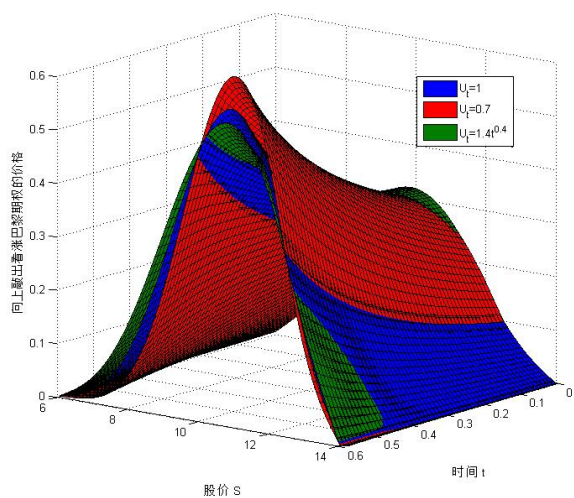
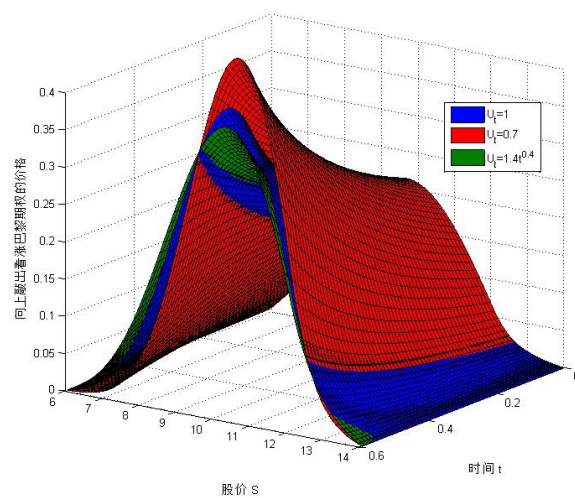
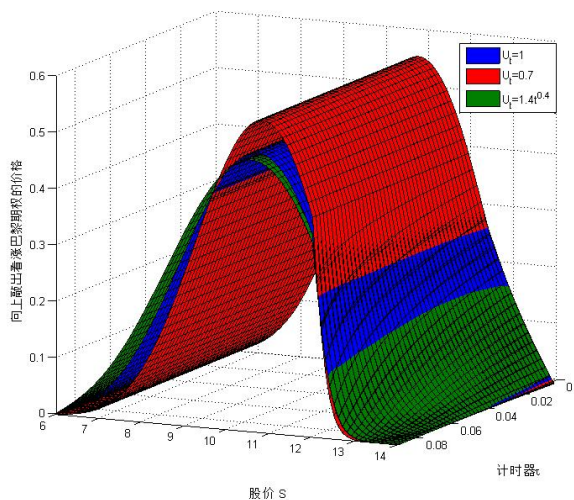
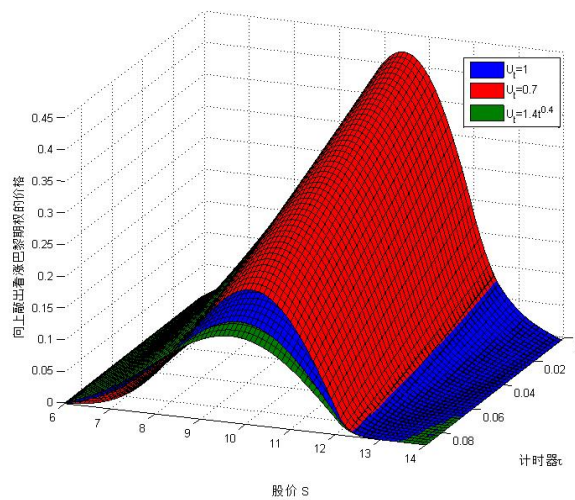
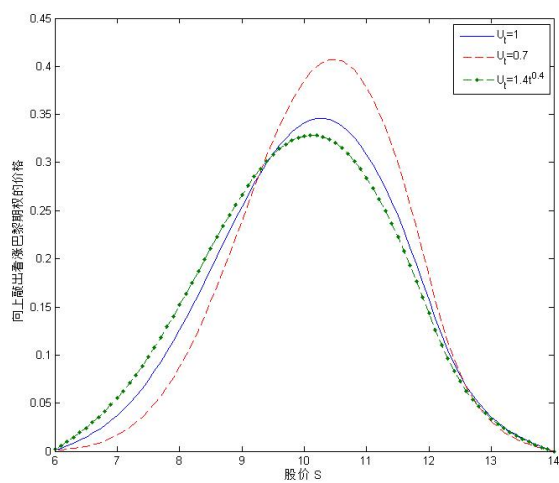
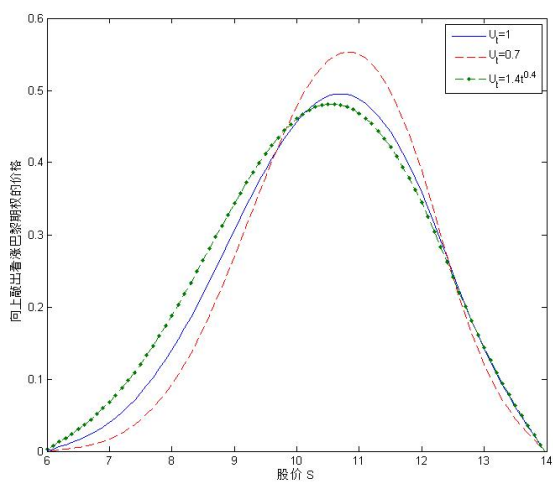
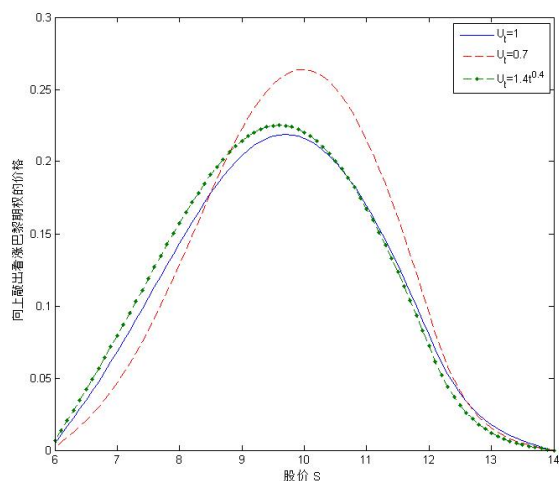
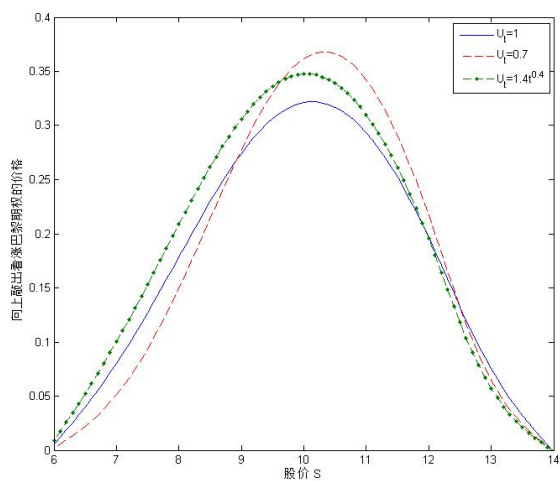


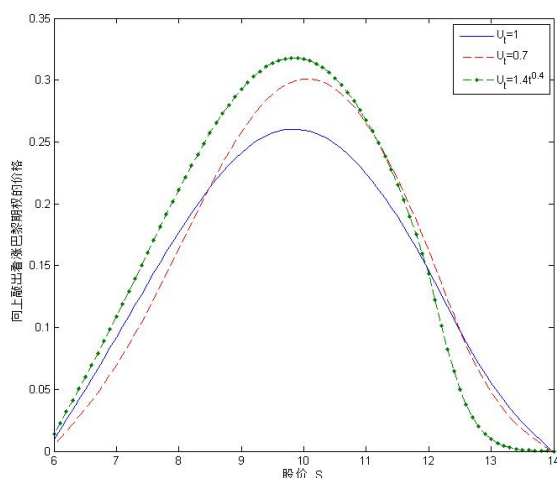
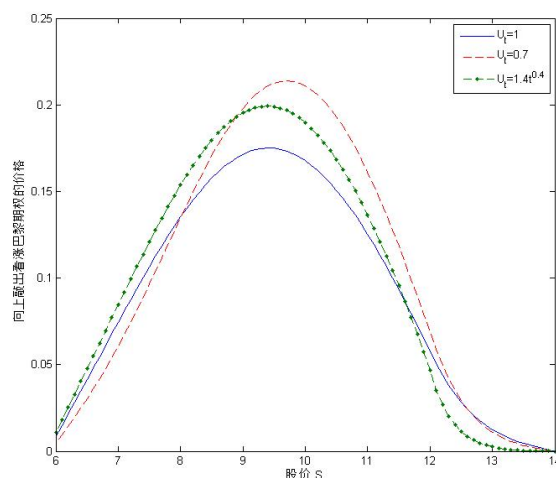
图 5: U_t 的函数图

图 6: 连续型向上敲出看涨巴黎期权价格 ($d=0.01$)图 7: 累计型向上敲出看涨巴黎期权价格 ($d=0.01$)

如图 6.2 所示, 当 $t = 0.7$ 的时候, 有 $0.7t^{0.7} < 0.5 < t^{0.7} < 1$; 当 $t = 0.5$ 的时候, 有 $0.7t^{0.7} < t^{0.7} < 0.5 < 1$ 。观察巴黎期权的图像 6.2, 可以看出对于不同参数 α , γ 的高斯过程, 巴黎期权

图 8: 连续型向上敲出看涨巴黎期权价格 ($t=0.5$)图 9: 累计型向上敲出看涨巴黎期权价格 ($t=0.5$)

图 10: 连续型巴黎期权的价格 ($t = 0.5$, $\tau = 0.01$)图 11: 累计型巴黎期权的价格 ($t = 0.5$, $\tau = 0.01$)图 12: 连续型巴黎期权的价格 ($t = 0.2$, $\tau = 0.01$)图 13: 累计型巴黎期权的价格 ($t = 0.2$, $\tau = 0.01$)

图 14: 连续型巴黎期权的价格 ($t = 0$, $\tau = 0.01$)图 15: 累计型巴黎期权的价格 ($t = 0$, $\tau = 0.01$)

7 结束语

本文研究在一般高斯过程下连续型和累计型巴黎期权定价模型，并推导出一般高斯过程下巴黎期权价格的 PDE。使用数值求解的方法，利用网格剖分，构造无条件稳定 PDE 的隐式差分格式，并使用计算量较小的追赶法进行求解。结果表明累计型巴黎期权的峰值明显低于连续型巴黎期权并且随着计时值 τ 的增加而快速下降；分数和次分数布朗运动下，随参数 H 的增加，巴黎期权的峰值减少并向股价 S 减小的方向移动；(还没完)

参考文献

- [1] Chesney M, Cornwall J, Jeanblanc M, Kentwell G, Yor M. Parisian pricing [J]. Risk, 1997, 10(1): 77 79.
- [2] 宋斌, 林则夫, 刘黎黎, 张冰洁. 基于博弈期权的可转债定价模型及其实证研究 [J]. 系统管理学报, 2013, 22(6): 758 767.
- [3] Haber J, Schonbucher J, Wilmott P. Pricing Parisian options [J]. The Journal of Theoretical and Applied Finance, 1999, 6(3): 71 79.
- [4] 罗俊, 吴雄华. 巴黎期权定价问题的数值方法 [J]. 数值计算与计算机应用, 2004, 25(2): 81 89.
- [5] 宋斌, 周湛满, 魏琳, 张冰洁. 巴黎期权的 PDE 定价及隐性差分法研究 [J]. 系统工程学报, 2013, 28(6): 764 774.
- [6] wok K, Lau W. Pricing algorithms for options with exotic path dependence [J]. Journal of Derivatives, 2001, 9(1): 28 38.
- [7] Longstaff F A, Schwartz E S. Valuing American options by simulation: A simple least-square approach [J]. Review of Financial Studies, 2001, 14(1): 113 147.

- [8] 宋斌, 井帅. 美式巴黎期权的定价模型与数值方法 [J]. 系统工程, 2015, 33(2): 1-8.
- [9] wok K, Lau W. Pricing algorithms for options with exotic path dependence [J]. Journal of Derivatives, 2001, 9(1): 28-38.
- [10] Longstaff F A, Schwartz E S. Valuing American options by simulation: A simple least-square approach [J]. Review of Financial Studies, 2001, 14(1): 113-147.
- [11] 宋斌, 井帅. 美式巴黎期权的定价模型与数值方法 [J]. 系统工程, 2015, 33(2): 1-8.
- [12] Rogers L. Arbitrage with fractional Brownian motion[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(1): 95-105.
- [13] Nualart D, Taqqu M S. Wick-Ito formula for regular processes and applications to Black and Scholes formula [J]. Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2008, 80(5): 477-487.
- [14] Dai Q, Singleton, K J. Specification analysis of affine term structure models [J]. Journal of Finance, 2000, 55(5): 1943-1978.
- [15] Peters E F. Fractal structure in the capital markets [J]. Financial analyst Journal, 1989, 7(32): 434-453.
- [16] Hu Y, Øksendal B. Fractional white noise calculus and application to finance [J]. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2003, 1(6):1-32.
- [17] Lei P, Nualart D. A decomposition of the bi-fractional Brownian motion and some applications [J]. Statistics and Probability Letters, 2009, 79(5): 619-624.
- [18] Tudor C. Inner product spaces of integrands associated to sub-fractional Brownian motion [J]. Statistics and Probability Letters, 2008, 78(14): 2201-2209.
- [19] Zili M. On the mixed fractional Brownian motion[J]. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 2006, (32435):1-9.