

---

# 基于高斯过程的巴黎期权定价问题

---

*Author:*

Ming LI

*Department:*

Mathematics

2016 年 8 月 7 日

本文将巴黎期权的定价模型拓展到一般的高斯过程以适应更多的资产运动模型假设。通过利用 Wick-Ito 积分, 推导出一般高斯过程下连续型和累计型巴黎期权价格的偏微分方程并构造无条件稳定的隐式差分格式, 并且提出使用计算量较小的追赶法进行方程组的求解。通过对不同高斯过程下的连续型和累计型巴黎期权价格进行算例分析, 可以看出, 任何高斯过程下, 累计型巴黎期权由于计时器不清零, 因此敲出的可能性更大, 价格比相应的连续型巴黎期权更低。而影响巴黎期权价格的变量只有高斯过程的方程函数是, 其方差函数增长越缓慢, 波动性越小, 盈亏的预测性就越强, 计算得到的巴黎期权价格的函数图像就会更陡峭, 峰值更高。

**关键词:** 巴黎期权, 高斯过程, 追赶法, 布朗运动, 隐式差分方程

## 1 引言

巴黎期权是一种强路径依赖期权 (path-dependent option), 该合约允许持有人在股票价格于到期日前按照规定的价格向上 (向下) 累计或连续停留一段预先设定的时间 (持续时间), 以预先约定的价格买入或卖出相应的股票。根据持续时间的类型, 可分为累积巴黎期权 (cumulative Parisian option) 与连续巴黎期权 (consecutive Parisian option)。累积巴黎期权是指股票价格需要累积在障碍价格之上 (之下) 停留一段时间才允许敲入或敲出; 连续巴黎期权是指股票价格连续在障碍价格之上 (之下) 停留预先设定的一段时间才允许敲入或敲出。由于累积巴黎期权的条件比连续巴黎期权更容易触发障碍价格, 对敲出期权 (knock-out option) 来说, 其价格要高于累积巴黎期权, 对敲入期权 (knock-in option) 来说则正好相反。巴黎期权主要应用于外汇市场以及混合金融衍生品的定价。例如, 外汇巴黎期权能够减少汇率变化对期权价格带来的影响, 从而有效规避市场参与者的投机行为; 可转换债券中的回售、赎回、转换等条款均含有巴黎期权的特征。

目前关于巴黎期权定价的主要方法有概率方法与偏微分方程 (PDE) 方法。Haber 等在 Black-Scholes 期权定价的框架下, 通过股价、持续时间、终端时间这三个变量推导了巴黎期权定价的偏微分方程, 并运用显式差分法 (explicit difference method) 进行求解, 但是该数值方法的收敛速度较慢, 且稳定性较差。罗俊和吴雄华利用初值的奇性消除技术对两点中心隐式差分格式进行了修正, 以提高巴黎期权定价的运算效率。宋斌等在 Haber 等的基础上, 重新定义了巴黎期权偏微分方程的定解空间, 并用隐式差分法 (implicit difference method) 对巴黎期权进行了定价, 该数值方法收敛速度快, 且稳定性较好。Kwok 和 Lau 在三叉树模型的框架下, 用向前打靶网格法 (forward shooting grid) 对累计、连续以及移动窗口巴黎期权进行了定价。Lonstaff 和 Schwartz 首次利用最小二乘蒙特卡罗 (Least-square Monte Carlo) 对美式巴黎期权进行了计算。宋斌和井帅在连续时间的框架下分别用最小二乘蒙特卡罗、向前打靶网格法以及有限差分法 (finite difference method) 对含有自由边界的美式巴黎期权进行了计算。

## 2 高斯过程

高斯过程是一种普遍存在和重要的随机过程。一个高斯过程完全由它的均值函数和协方差函数决定, 只要均值函数  $E(W_t)$  和协方差函数  $E(W_t, W_s)$  确定了, 这个高斯过程也就完全确定了。设  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  为概率空间  $(\Omega, F, P)$  上的一个具有独立增量的高斯过程,  $W_0 = 0$ , 且满足

$$(1) \text{ 均值 } E(W_t) = 0, t \geq 0$$

$$(2) \text{ 协方差 } E(W_t, W_s) = F(t, s) < \infty, t, s \geq 0$$

当  $F(t, s) = t \wedge s$  时,  $W_t$  即为标准布朗运动。当  $F(t, s) = 1/2(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$  时,  $W_t$  为 Hurst 参数为  $H$  的分数布朗运动。当  $H \in (0, 1/2)$  时增量负相关,  $W_t$  具有短期依赖性, 表现为反持久性, 即未来的增长趋势与过去趋势相反; 当  $H \in (1/2, 1)$ ,  $W_t$  具有长期依赖性, 表现为持久性, 即未来的增长趋势将延长过去的增长趋势。双分数布朗运动的协方差函数为  $F(t, s) = 1/2^K[(t^{2H} + s^{2H})^K - |t - s|^{2HK}]$ 。它不仅具有分数布朗运动的自相似性和长记忆性等性质, 而且当  $2HK = 1$  时,  $W_t$  为一个半鞅。

次分数布朗运动, 同样也具有自相似性和长记忆性, Yan Litan 等给出了次分数布朗运动的随机积分, 并指出次分数布朗运动可以用来刻画金融资产的随机波动性, 对应的协方差为  $F(t, s) = t^{2H} + s^{2H} - 1/2(|t + s|^{2H} + |t - s|^{2H})$ 。

混合分数布朗运动为布朗运动和分数布朗运动的线性组合,  $W_t = \alpha B_t + \beta B_t^H$ , 其中  $B_t$  为布朗运动,  $B_t^H$  为布朗运动,  $\alpha, \beta \in R$ 。协方差函数为  $F(t, s) = \alpha^2(t \wedge s) + \beta(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})/2$ 。

记  $F(t, t) = F_t$ ,  $dF_t/dt = U_t$ , 综上可以得表 1

表 1: 各种高斯过程的协方差函数		
高斯过程	$F_t$	$U_t$
布朗运动	$t$	1
分数布朗运动	$t^{2H}$	$2Ht^{2H-1}$
双分数布朗运动	$t^{2HK}$	$2HKt^{2HK-1}$
次分数布朗运动	$(2 - 2^{2H-1})t^{2H}$	$(4 - 2^{2H})Ht^{2H-1}$
混合分数布朗运动	$\alpha^2 t + \beta^2 t^{2H}$	$\alpha^2 + 2H\beta^2 t^{2H-1}$

本文主要研究在一般的高斯过程下连续型和累计型巴黎期权的偏微分方程, 并通过构造差分方程进行求解。最后选择不同  $U_t$  的高斯过程, 通过算例求解, 讨论各个模型参数对连续型和累计型巴黎期权价格的影响。以及两种类型巴黎期权的比较。

### 3 Wick-Ito 积分

当高斯过程  $W_t$  既不是 Markovian 过程, 也不是半鞅时, Rogers 证明了按照路径型积分建立的金融市场数学模型存在套利机会。而在一个存在套利机会的市场中对金融衍生品定价是不切实际的。因此, 本文使用如下的 Wick-Ito 积分

$$\int_a^b f(t, \omega) dW_t = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, \omega) \diamond (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \quad (1)$$

其中  $\diamond$  代表 Wick 乘积。由此定义的随机积分宽假下, 金融市场数学模型是无套利的并且市场是完备的。

下面引入关于高斯过程的 Wick-Ito 公式, 其证明过程请参考文献 [16]

**引理 3.1** 设  $Y_t$  是一方差有界的中心型高斯变量, 记  $F_t = E(Y_t^2)$ , 函数  $f(t, y) : [0, +\infty] \times R \rightarrow R$  是连续的, 其偏导数  $\frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  均存在且满足指数型增长条件, 即  $\forall t \in [0, T]$ ,  $x \in R$  有

$$|\frac{\partial^k f(t, y)}{\partial y^k}| \leq C_T \exp(c_T y^2), \quad k = 0, 1, 2 \quad (2)$$

则 Wick-Ito 公式的积分形式为

$$f(T, Y_T) = f(0, Y_0) + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial y}(t, Y_t) dt + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial y}(t, Y_t) \diamond dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, Y_t) dF_t \quad (3)$$

其中,  $C_T, c_T$  均大于零的常数, 且满足  $c_T < \frac{1}{4} \sup_{t \in [0, T]} F_t^{-1}$ ,  $\diamond$  表示 Wick 乘积, 同时 Wick-Ito 公式的微分形式为

$$df(T, Y_T) = f(0, Y_0) + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial y}(t, Y_t) dt + \frac{\partial f}{\partial y}(t, Y_t) \diamond dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, Y_t) dF_t \quad (4)$$

由引理 3.1, 我们可以得到以下定理 [16]

**定理 3.2** 设  $W_t$  为一方差有界的高斯过程, 标的资产  $S_t$  为一随机过程且满足

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t \diamond dW_t \quad (5)$$

$V(S_t, t)$  为一关于  $S_t$  的金融衍生品的价格,  $r$  为无风险利率,  $F(t) = E(W_t^2)$ ,  $U_t = \frac{dF(t)}{dt}$  则任意时刻  $t \in [0, T]$ ,  $V(S_t, t)$  满足偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 U_t \frac{\partial V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial t} = rV \quad (6)$$

## 4 高斯运动下巴黎期权定价模型

设  $S(t)$  为一个公司股票的价格过程, 满足下列随机微分方程

$$dS_t = (r - q) S_t dt + \sigma S_t \diamond dW_t \quad (7)$$

其中  $r$  为无风险利率,  $\sigma^2$  为股票价格波动率方差。  $W_t$  为一高斯过程,  $F_t = E(W_t^2)$ ,  $dF_t/dt = U_t$ 。

### 4.1 连续型向上敲出看涨巴黎期权

考虑向上敲出看涨欧式巴黎期权 (Up-and-Out Call) 的定价问题。  $J$  表示股票价格  $S_t$  在障碍水平  $L$  之上连续时间的长度, 定义为

$$J(t) = t - \sup(t' \leq t | S_{t'} \leq D) \quad (8)$$

于是有

$$dJ(t) = \begin{cases} dt, & S_t > L \\ -J(t_-), & S_t = L \\ 0, & S_t < L \end{cases} \quad (9)$$

巴黎期权的价格  $V$  是标的资产价格  $S$ , 时间  $t$  及资产价格连续超过障碍的时间当前计数值  $J$  的函数, 记为  $V(S, J, t)$ 。假定障碍价格  $L > E$ , 根据动态复制的理论, 结合方程 6, 向上敲出看涨的巴黎期权的价格应满足方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(S - L) \frac{\partial V}{\partial J} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 U \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (10)$$

求解区间为  $0 \leq J \leq D$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 < S < \infty$ , 其中函数

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

根据巴黎期权的定义, 当标的资产价格连续超过障碍  $L$  的时间达到  $D$  时 (即  $J = D$  时) 即敲出, 其价值为零。

$$V(S, t, D) = 0 \quad (12)$$

每当发生  $S < L$  时,  $J$  重置为零。当  $J = 0$  时, 考虑  $V$  在  $J = 0$  处的连续性, 定解条件为

$$V(L, t, J) = V(L, t, 0) \quad (13)$$

当  $t = T$  时, 期权没有敲出, 执行期权的终端支付, 即满足

$$V(S, T, J) = (S - E)^+ \quad (14)$$

由于当  $S < L$  时,  $J$  恒为 0, 因此可以简记为  $V(S, t)$ , 满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 U_t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (15)$$

当  $S > L$ ,  $0 < J < D$  时,  $V(S, t, J)$  满足

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial J} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 U_t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (16)$$

## 4.2 累计型向上敲出看涨巴黎期权

在累计时间下, 在  $S < L$  时, 计时器  $J$  不清零也不计时, 其微分表达式为

$$dJ(t) = \begin{cases} dt, & S_t \geq L \\ 0, & S_t < L \end{cases} \quad (17)$$

累计型向上敲出看涨巴黎期权的价值同样满足方程(10), 但是由于  $J$  不重置, 其定解条件不包含(13)

$$\begin{cases} V(S, T, J) = (S - E)^+ \\ V(S, t, D) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

## 5 数值求解

离散化方程(15)与(16), 令  $S_i = S_0 + i\Delta h$ ,  $i \in [0, M]$ ,  $S_I = L$ ;  $t_n = n\Delta t$ ,  $n \in [0, N]$ ,  $N\Delta t = T$ ;  $J_j = j\Delta t$ ,  $j \in [0, K]$ ,  $K\Delta t = D$ 。

当  $S < L$  时, 构造差分格式

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} + (r - q)S_i \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta h} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 U_n \frac{V_{i+1}^n - 2V_i^n + V_{i-1}^n}{\Delta h^2} - rV_i^n = 0 \quad (19)$$

即

$$V_i^n - (a_i^n V_{i-1}^n + b_i^n V_i^n + c_i^n V_{i+1}^n) = V_i^{n+1} \quad (20)$$

其中

$$a_i^n = -\frac{(r - q)S_i \Delta t}{2\Delta h} + \frac{\sigma^2 S_i^2 U_n \Delta t}{2\Delta h^2}, \quad b_i^n = -r\Delta t - \frac{\sigma^2 S_i^2 U_n \Delta t}{\Delta h^2}, \quad c_i^n = \frac{(r - q)S_i \Delta t}{2\Delta h} + \frac{\sigma^2 S_i^2 U_n \Delta t}{2\Delta h^2}$$

当  $S > L$  时, 构造差分格式

$$\frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} + (r - q)S_i \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta h} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 U_n \frac{V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{\Delta h^2} - rV_{i,j}^n = 0 \quad (21)$$

即

$$V_{i,j}^n - (a_i^n V_{i-1,j}^n + b_i^n V_{i,j}^n + c_i^n V_{i+1,j}^n) = V_{i,j+1}^{n+1} \quad (22)$$

当  $S = L$  时, 综合(20)和(22)以及定解条件(13), 需满足

$$V_I^n - (a_I^n V_{I-1}^n + b_I^n V_I^n + c_I^n V_{I+1,0}^n) = V_I^{n+1} \quad (23)$$

$$V_{I+1,0}^n - (a_I^n V_I^n + b_I^n V_{I+1,0}^n + c_I^n V_{I+2,0}^n) = V_{I+1,1}^{n+1} \quad (24)$$

在两端, 使用如下线性近似

$$(1 - 2a_0^n - b_0^n)V_0^n + (a_0^n - c_0^n)V_1^n = V_0^{n+1} \quad (25)$$

$$(1 - 2c_M^n - b_M^n)V_{M,j}^n + (c_M^n - a_M^n)V_{M-1,j}^n = V_{M,j+1}^{n+1} \quad (26)$$

终端函数为

$$V_{i,j}^N = (S_i - E)^+, \quad V_{i,K}^n = 0 \quad (27)$$

方程(20)和(22)可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 1 - 2a_0^n - b_0^n & a_0^n - c_0^n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_1^n & 1 - b_1^n & -c_1^n & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_I^n & 1 - b_I^n & -c_I^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{M-1}^n & 1 - b_{M-1}^n & -c_{M-1}^n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c_M^n - a_M^n & 1 - 2c_M^n - b_M^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0^n \\ V_1^n \\ \vdots \\ V_I^n \\ \vdots \\ V_{M-1,0}^n \\ V_{M,0}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0^{n+1} \\ V_1^{n+1} \\ \vdots \\ V_I^{n+1} \\ \vdots \\ V_{M-1,1}^{n+1} \\ V_{M,1}^{n+1} \end{pmatrix} \quad (28)$$

以及

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_I^n & 1 - b_I^n & -c_I^n & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{M-1}^n & 1 - b_{M-1}^n & -c_{M-1}^n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c_M^n - a_M^n & 1 - 2c_M^n - b_M^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_I^n \\ V_{I+1,j}^n \\ \vdots \\ V_{M-1,j}^n \\ V_{M,j}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_I^n \\ V_{I+1,j+1}^{n+1} \\ \vdots \\ V_{M-1,j+1}^{n+1} \\ V_{M,j+1}^{n+1} \end{pmatrix} \quad (29)$$

求解类似于(28)与(29)的系数矩阵为对角占优的三对角线方程组, 常常使用的方法为追赶法, 追赶法的计算量比 Gauss 消去法的计算量要小的多。设方程组  $Ax = f$  为以下形式

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} \quad (30)$$

求解  $Ax = f$  等价于解两个三角形方程组:

- 计算  $\{\beta_i\}$ :

$$\beta_1 = c_1/b_1, \quad \beta_i = c_i/(b_i - \alpha_i \beta_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (31)$$

- $Ly = f$ , 求  $y$ :

$$y_1 = f_1/b_1, \quad y_i = (f_i - a_i y_{i-1})/(b_i - a_i \beta_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (32)$$

- $Ux = y$ , 求  $x$ :

$$x_n = y_n, \quad x_i = y_i - \beta_i x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (33)$$

当  $V(S, t, J)$  为累计型巴黎期权时, 由于累计型巴黎期权无需重置条件, 故可使用差分方程

$$\begin{cases} V_{i,j}^n - (a_i^n V_{i-1,j}^n + b_i^n V_{i,j}^n + c_i^n V_{i+1,j}^n) = V_{i,j}^{n+1} & S \leq L \\ V_{i,j}^n - (a_i^n V_{i-1,j}^n + b_i^n V_{i,j}^{n+1} + c_i^n V_{i+1,j}^n) = V_{i,j+1}^{n+1} & S > L \end{cases} \quad (34)$$

其对应的三对角矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 1 - 2a_0^n - b_0^n & a_0^n - c_0^n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_1^n & 1 - b_1^n & -c_1^n & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_I^n & 1 - b_I^n & -c_I^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{M-1}^n & 1 - b_{M-1}^n & -c_{M-1}^n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c_M^n - a_M^n & 1 - 2c_M^n - b_M^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{0,j}^n \\ V_{1,j}^n \\ \vdots \\ V_{I,j}^n \\ \vdots \\ V_{M-1,j}^n \\ V_{M,j}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{0,j}^{n+1} \\ V_{1,j}^{n+1} \\ \vdots \\ V_{I,j}^{n+1} \\ \vdots \\ V_{M-1,j+1}^{n+1} \\ V_{M,j+1}^{n+1} \end{pmatrix} \quad (35)$$

## 5.1 稳定性

对于隐式差分方程(20)和(22), 其增长因子为

$$G = \frac{1}{1 - (a_i e^{-ikj\Delta h} + b_i + c_i e^{ikj\Delta h})} \quad (36)$$

可推导出

$$\frac{1}{|G|} = 1 + r\Delta t + \frac{(r-q)S_i\Delta t}{2\Delta h}(1 - \cos k\Delta h) + \frac{2\sigma^2 S_i^2 U_n \Delta t}{\Delta h^2} \sin^2 \frac{kj\Delta h}{2} > 1 \quad (37)$$

因此当  $U_n > 0$  时, 由于  $1 - \cos k\Delta h \geq 0$  以及  $\sin^2(kj\Delta h/2) > 0$ , 因此恒有  $|G| < 1$ , 由 vonNeuman 准则知此隐式差分格式绝对稳定。即差分方程的稳定性不受网格剖分的影响。

## 6 算例

### 6.1 布朗运动

选取参数  $L = 12$ ,  $D = 0.1$ ,  $E = 10$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.05$ ,  $q = 0$ 。当  $W_t$  为布朗运动时, 即  $U_t = 1$ , 使用隐式差分法所得到的连续型和累计型向上敲出看涨巴黎期权价格分别如图 6.1和图 6.1所示

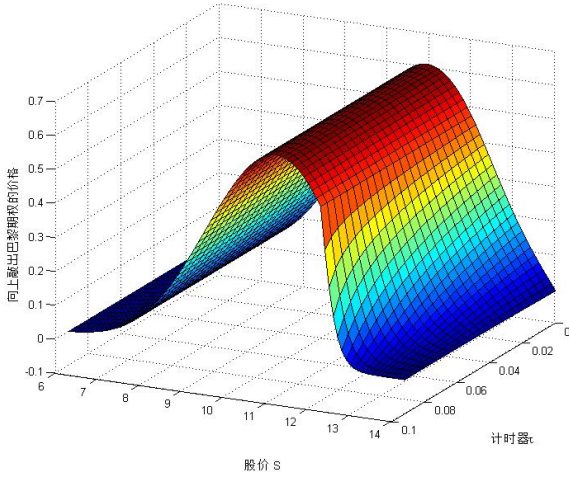
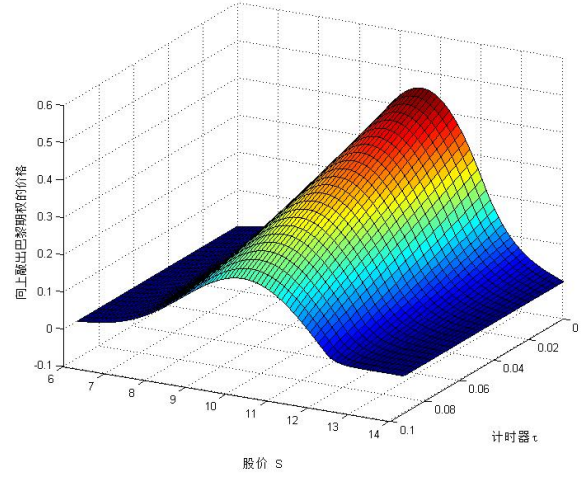
图 1: 连续型向上敲出看涨巴黎期权 ( $t = 0.5$ )图 2: 累计型向上敲出看涨巴黎期权 ( $t = 0.5$ )

图 6.1 为连续型向上敲出巴黎期权的价格，对于任何的参数  $\tau$ ，最高点都约出现在  $S = 10.7$  处，且峰值恒定。峰值左边对任何参数  $\tau$ ，巴黎期权的价格只受股价参数  $S$  的影响。而峰值右边，巴黎期权的价格随着计时器  $\tau$  的增大而具有更快的下降速度。

图 6.1 为累计型向上敲出巴黎期权的价格，峰值会随着计时器  $\tau$  的增大而减小，并且稍稍向股价  $S$  减少的方向便宜。整个函数图像会随着计时器  $\tau$  的增大而变得更平缓。对比连续型和累计型向上巴黎期权的价格，同样参数下，由于累计型巴黎期权中计时器不清零，因此其敲出的可能性更大，从而价格比连续型巴黎期权的价格更低。

## 6.2 更广泛的高斯过程

方程(20)和(22)可写成

$$-a_i^n V_{i-1}^n + (1 - b_i^n) V_i^n - c_i^n V_{i+1}^n = V_i^{n+1} \quad (38)$$

以及

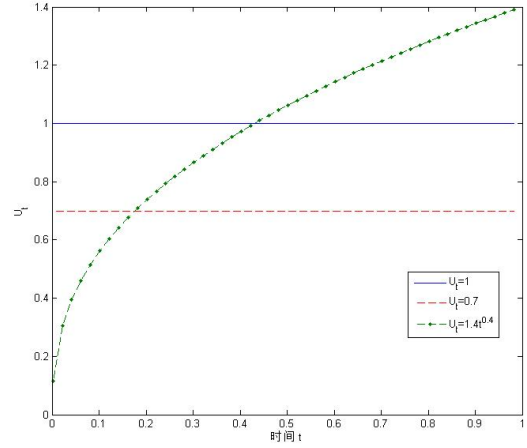
$$-a_{i,j}^n V_{i-1,j}^n + (1 - b_{i,j}^n) V_{i,j}^n - c_{i,j}^n V_{i+1,j}^n = V_{i,j+1}^{n+1} \quad (39)$$

显然不同的高斯过程，影响计算结果的只有方程中的参数  $U_n$ ，即方差函数的导数  $U_t$ 。为了更一般性的研究不同的高斯过程对巴黎期权价格的影响，考虑表 2 中的三个不同的  $U_t$  函数（显然  $U_3$  即为参数  $H = 0.7$  的分形布朗运动），研究不同的高斯过程对巴黎期权价格的影响。

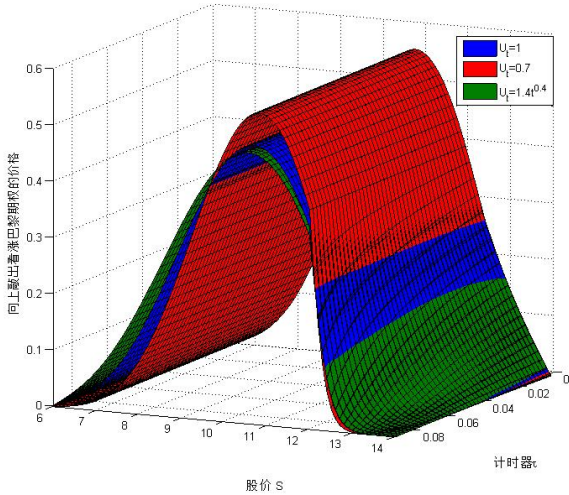
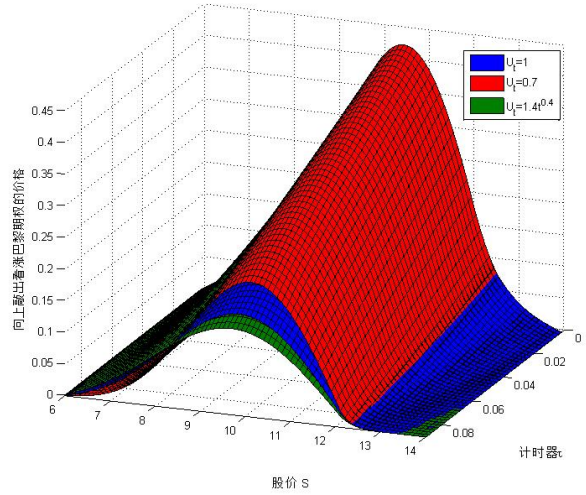


表 2: 算例使用的协方差函数

	$\alpha$	$\gamma$	$F_t$	$U_t$
$U_1$	1	1	$t$	1
$U_2$	0.7	1	$0.7t$	0.7
$U_3$	1.4	0.4	$t^{1.4}$	$1.4t^{0.4}$

图 3:  $U_t$  的函数图

如图 6.2所示, 当  $t > 0.43$  的时, 有  $U_2 < U_1 < U_3$ ; 当  $0.18 < t < 0.42$  的时候,  $U_2 < U_3 < U_1$ ; 当  $t < 0.17$  时,  $U_3 < U_2 < U_1$ 。对不同的过程, 利用追赶法求解方程(20)和(22), 以及方程组(34), 可分别得到的连续型和累计型向上敲出看涨巴黎期权价格, 分别如图 6.2和图 6.2所示。显然, 在固定的时间  $t$  下, 不同的高斯过程影响了图像的陡峭程度。但类似的, 连续型巴黎期权在不同的参数  $\tau$  下, 峰值都出现在同一股价处。峰值左边只受股价  $S$  的影响, 峰值右边会随着计时器  $\tau$  的增大而具有更快的下滑。同样参数下, 累计型巴黎期权的价格更低。并且峰值会随着计时器  $\tau$  的增大而减小, 并左移。函数图像会随着计时器  $\tau$  的增大而平缓。

图 4: 连续型向上敲出看涨巴黎期权价格 ( $t=0.5$ )图 5: 累计型向上敲出看涨巴黎期权价格 ( $t=0.5$ )

下面考虑不同的时间  $t$  下不同的高斯过程对巴黎期权价格的影响。图 6.2与 6.2为当  $t = 0.5$  的情形,  $U_2$  对应的图像最陡峭, 峰值最高且偏右, 而  $U_3$  对应的图像最平缓, 峰值最低且偏左。当  $t = 0.2$  时, 如图 6.2与 6.2, 高斯过程  $U_1$  对应的图像最平缓, 峰值也最低。当  $t = 0.2$  时, 由图 6.2与 6.2可看出, 连续型巴黎期权的图像中,

最陡峭且峰值最高的图像为  $U_3$ , 而累计型巴黎期权的价格中, 最陡峭, 峰值最高的图像依然为  $U_2$ 。事实上, 任何高斯过程对应的是相同的终端条件 (式(27))。数值计算的过程是从终端往前计算的

$$V^n \rightarrow V^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow V^0$$

$U_n$  的值越大, 数值迭代计算会使图像会更快的趋于平缓, 峰值更快的下降。而从高斯过程的性质来看,  $U_t$  越小, 意味着方差函数增长缓慢, 波动性越小, 其盈亏的预测性更强, 因此巴黎期权价格的函数图像就会更陡峭, 峰值更高。

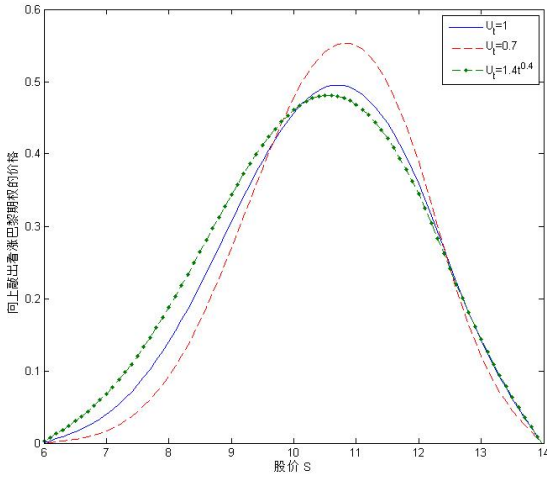


图 6: 连续型巴黎期权的价格 ( $t = 0.5$ ,  $\tau = 0.01$ )

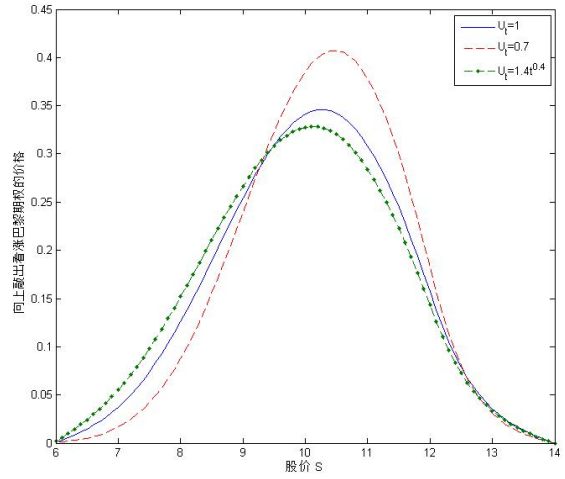


图 7: 累计型巴黎期权的价格 ( $t = 0.5$ ,  $\tau = 0.01$ )

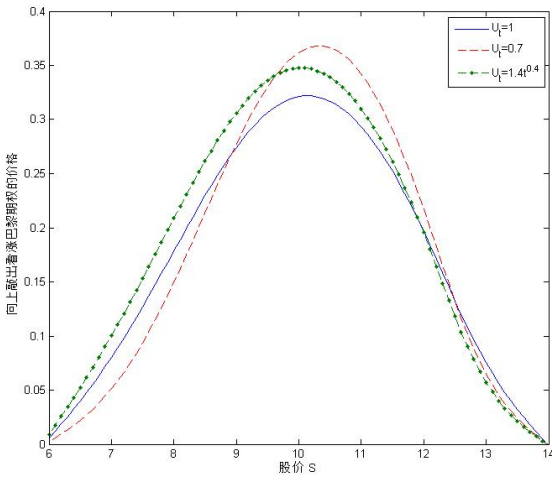


图 8: 连续型巴黎期权的价格 ( $t = 0.2$ ,  $\tau = 0.01$ )

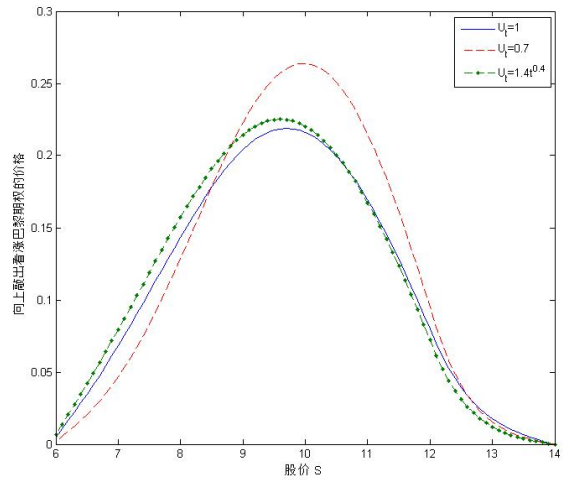
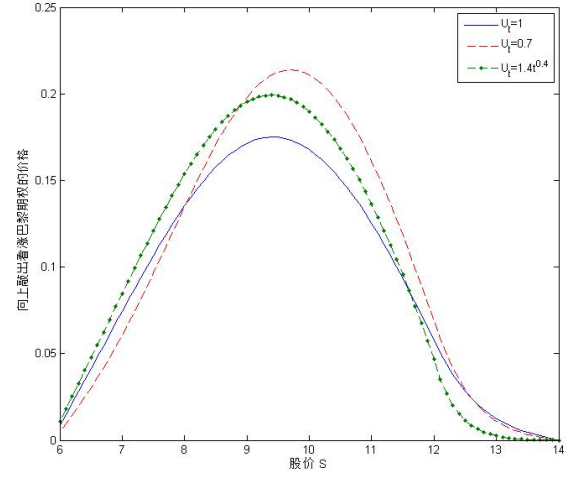
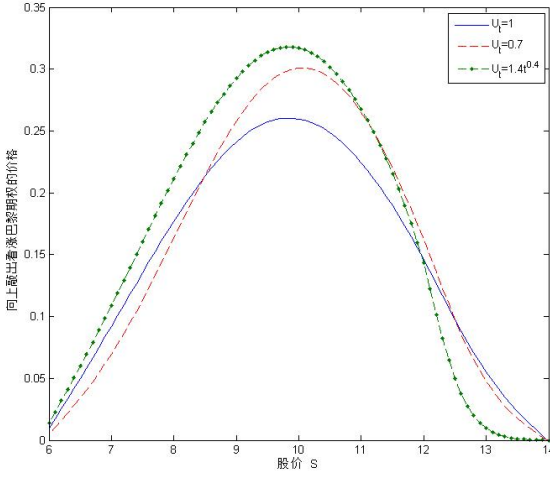


图 9: 累计型巴黎期权的价格 ( $t = 0.2$ ,  $\tau = 0.01$ )

图 10: 连续型巴黎期权的价格 ( $t = 0$ ,  $\tau = 0.01$ )图 11: 累计型巴黎期权的价格 ( $t = 0$ ,  $\tau = 0.01$ )

## 7 结束语

对金融衍生品的定价研究,往往需假设金融资产的运动模型。而最常见的几位即为布朗运动。许多学者也基于布朗运动的假设建立了各类巴黎期权的定价模型。然而常见的金融资产的运动模型还包括分数布朗运动,次分数布朗运动等等各种具有记忆性,相似性的运动模型。各种研究也表明,在某些金融衍生品的定价中,这些具有记忆性和相似性的运动模型更能反映真实金融资产的运动特征。因此,在巴黎期权的定价模型中,将布朗运动的模型假设推广到更一般的高斯过程便是本文研究的初衷。之后在对其他巴黎期权或者可转债等金融衍生品进行定价的时候,可选择最逼近实际资产运动的高斯过程,再对其金融衍生品进行定价求解,由此可以得到更高的准确度。

但是当高斯过程  $W_t$  既不是 Markovian 过程,也不是半鞅时,按照路径型积分建立的金融市场数学模型是存在套利机会的。因此本文通过引入 Wick-Ito 乘积,构造一般高斯过程下,巴黎期权价值需满足的随机偏微分方程。由于微分方程的求解中,隐式差分法往往具有更高的稳定性,因此本文直接构建无条件稳定的隐式差分格式对巴黎期权的偏微分方程进行求解。但是隐式差分法往往也伴随着更庞大的计算量,为此本文通过使用追赶法进行方程组的求解。由于追赶法不要求出矩阵的逆,因此可以将计算量大大的减小。

文章的最后使用算例分别求解连续型和累计型巴黎期权的价格,并讨论各个参数巴黎期权的影响。在任意时刻  $t$  中,连续型巴黎期权在不同的计时器  $\tau$  下,峰值都出现在同一股价处。峰值左边只受股价  $S$  的影响,与  $\tau$  无关,峰值右边会随着计时器  $\tau$  的增大而更快的下滑。而同样参数下,累计型巴黎期权由于计时器不清零,因此比连续型的价格更低。并且峰值会随着计时器  $\tau$  的增大而减小,并稍稍左移。整个函数图像会随着计时器  $\tau$  的增大而趋于平缓。不同的高斯过程,影响巴黎期权计算结果的只有高斯过程的方差函数的导数  $U_t$ 。 $U_t$  越小,意味着方差函数增长缓慢,波动性越小,其盈亏的预测性更强,因此连续型与累计型巴黎期权价格的函数图像就会更陡峭,峰值更高。相反的,当  $U_t$  增大时,巴黎期权价格的函数图像则会更变得更平缓,峰值也会降低。

## 参考文献

- [1] Chesney M, Cornwall J, Jeanblanc M, Kentwell G, Yor M. Parisian pricing [J]. Risk, 1997, 10(1): 77 79.
- [2] 宋斌, 林则夫, 刘黎黎, 张冰洁. 基于博弈期权的可转债定价模型及其实证研究 [J]. 系统管理学报, 2013, 22(6): 758 767.
- [3] Haber J, Schonbucher J, Wilmott P. Pricing Parisian options [J]. The Journal of Theoretical and Applied Finance, 1999, 6(3): 71 79.
- [4] 罗俊, 吴雄华. 巴黎期权定价问题的数值方法 [J]. 数值计算与计算机应用, 2004, 25(2): 81 89.
- [5] 宋斌, 周湛满, 魏琳, 张冰洁. 巴黎期权的 PDE 定价及隐性差分法研究 [J]. 系统工程学报, 2013, 28(6): 764 774.
- [6] wok K, Lau W. Pricing algorithms for options with exotic path dependence [J]. Journal of Derivatives, 2001, 9(1): 28 38.
- [7] Longstaff F A, Schwartz E S. Valuing American options by simulation: A simple least-square approach [J]. Review of Financial Studies, 2001, 14(1): 113 147.
- [8] 宋斌, 井帅. 美式巴黎期权的定价模型与数值方法 [J]. 系统工程, 2015, 33(2): 1 8.
- [9] wok K, Lau W. Pricing algorithms for options with exotic path dependence [J]. Journal of Derivatives, 2001, 9(1): 28 38.
- [10] Longstaff F A, Schwartz E S. Valuing American options by simulation: A simple least-square approach [J]. Review of Financial Studies, 2001, 14(1): 113 147.
- [11] 宋斌, 井帅. 美式巴黎期权的定价模型与数值方法 [J]. 系统工程, 2015, 33(2): 1 8.
- [12] Rogers L. Arbitrage with fractional Brownian motion[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(1): 95 105.
- [13] Nualart D, Taqqu M S. Wick-Ito formula for regular processes and applications to Black and Scholes formula [J]. Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2008, 80(5): 477 487.
- [14] Dai Q, Singleton, K J. Specification analysis of affine term structure models [J]. Journal of Finance, 2000, 55(5): 1943 1978.
- [15] Peters E F. Fractal structure in the capital markets [J]. Financial analyst Journal, 1989, 7(32): 434 453.
- [16] Hu Y, Øksendal B. Fractional white noise calculus and application to finance [J]. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2003, 1(6): 1 32.
- [17] Lei P, Nualart D. A decomposition of the bi-fractional Brownian motion and some applications [J]. Statistics and Probability Letters, 2009, 79(5): 619 624.

- [18] Tudor C. Inner product spaces of integrands associated to sub-fractional Brownian motion [J]. Statistics and Probability Letters, 2008, 78(14): 2201-2209.
- [19] Zili M. On the mixed fractional Brownian motion[J]. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 2006, (32435):1-9.