

NLR Cheat Cheetos (yumyum)

1 LTV Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = C(t)\mathbf{x} + D(t)\mathbf{u}$$

1.1 Transitionsmatrix und Lösung der Zustandsdifferenzialgleichung

Lösung für $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ in der Form $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0$ mit Transitionsmatrix $\Phi(t, t_0)$ aus der Peano-Baker-Reihe.

EIGENSCHAFTEN DER TRANSITIONSMATRIX:

Anfangswert: $\Phi(t_0, t_0) = E$, Produkteigenschaft:

$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)$, Invertierbarkeit:

$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$, Differenzierbarkeit:

$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$, Determinante:

$$\det \Phi(t, t_0) = \exp \left(\int_{t_0}^t \text{tr} A(\tau) d\tau \right).$$

Eigenwerte von $A(t)$ geben keine Aussage über Stabilität.

1.1.1 Spezialfälle geschlossener Lösungen

$\dot{x} = a(t)x$ mit Lösung $x = \exp \left(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right) x_0$. Bei $\dim \mathbf{x} > 1$

und $A(t)A(\tau) = A(\tau)A(t)$ dann gilt $\Phi(t, \tau) = \exp \left(\int_{\tau}^t A(s) ds \right)$

1.1.2 Periodische Matrizen

Für $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ mit $A(t) = A(t + \omega)$ dann gilt

$\Phi(t, \tau) = P(t, \tau)e^{R(t-\tau)}$ mit $P(t, \tau) = P(t + \omega, \tau)$ und

$R = \text{const.}$

1.1.3 Lösung der nicht-autonomen Zustandsdifferenzialgleichung

Lösung von

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = C(t)\mathbf{x} + D(t)\mathbf{u}$$

lautet

$$\mathbf{x} = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{y} = C(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau + D(t)\mathbf{u}$$

1.2 Zustandstransformationen und äquivalente Systemdarstellungen

Zustandstransformation $\mathbf{z} = V(t)\mathbf{x}$ mit Transformationsmatrix $V(t)$ regulär im betrachteten Zeitintervall und $\dot{V}(t)$ existiert und ist stetig im Intervall.

$$\dot{\mathbf{z}} = [\dot{V}(t) + V(t)A(t)]V^{-1}(t)\mathbf{z} + V(t)B(t)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = C(t)V^{-1}(t)\mathbf{z}(t) + D(t)\mathbf{u}$$

$\mathbf{z} = V(t)\mathbf{x}$ ist eine Lyapunov-Transformation, falls $V(t)$ und $V^{-1}(t) \forall t$ beschränkt sind. Dann folgt aus der exponentiellen Stabilität des einen Systems, die exponentielle Stabilität des jeweils anderen Systems.

1.3 Stabilität

$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ ist stabil wenn $\|\Phi(t, t_0)\| \leq M$ mit $M = \text{const.} \geq 0$.

Das System ist asymptotisch stabil falls

$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 \rightarrow 0 \quad \forall \mathbf{x}_0$. Exponentiell stabil falls

$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M e^{-\omega(t-t_0)}$

1.4 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Steuerbar falls $\text{rang} S(A(t), B(t)) = n$, mit

$$S(A(t), B(t)) = \begin{bmatrix} N_A^0 B(t) & N_A^1 B(t) & \dots & N_A^{n-1} B(t) \end{bmatrix}$$

wobei $N_A^k B(t) = N_A(N_A^{k-1} B(t))$

$N_A^1 B(t) = -\dot{B}(t) + A(t)B(t)$, $N_A^0 B(t) = B(t)$, also $A(t)$ und

$B(t)$ müssen entsprechend $(n-2)$ bzw. $(n-1)$ -fach stetig diff.bar sein.

Beobachtbar falls $\text{rang} O(C(t), A(t)) = n$ mit

$$O(C(t), A(t)) = \begin{bmatrix} M_A^0 C(t) & M_A^1 C(t) & \dots & M_A^{n-1} C(t) \end{bmatrix}^T$$

wobei $M_A^k C(t) = M_A(M_A^{k-1} C(t))$ und

$$M_A^1 C(t) = \dot{C}(t) + C(t)A(t).$$

1.5 Entwurf von Zustandsreglern

1.5.1 Eingrößensysteme

In SISO-RNF bringen über $V(t)$ mit Ansatz $z_1 = \mathbf{w}^T(t)\mathbf{x}$ und sukzessive Differentiation nach t . Eingangsgröße \mathbf{u} trifft erst in $z_n(t)$ auf.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} M_A^0 \mathbf{w}^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{n-1} \mathbf{w}^T(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = V(t)\mathbf{u}$$

$$V(t)\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

Lemma 2.2 besagt für $k \geq 0$:

$(M_A^0 \mathbf{w}^T(t))\mathbf{v}(t) = 0, \dots, (M_A^k \mathbf{w}^T(t))\mathbf{v}(t) = 0$ bzw.

$\mathbf{w}^T(t)(N_A^0 \mathbf{v}(t)) = 0, \dots, \mathbf{w}^T(t)(N_A^k \mathbf{v}(t)) = 0$ und somit gilt:

$$\mathbf{w}^T(t) = [0 \dots \tilde{b}_{n-1}(t)] S^{-1}(A(t), \mathbf{b}(t))$$

mit Freiheitsgrad $\tilde{b}_{n-1}(t)$.

EIGENWERTVORGABE MIT ACKERMANN-FORMEL

Mit $\tilde{\mathbf{a}} = -(M_A^n \mathbf{w}^T(t))V^{-1}(t)$ wähle $\mathbf{u} = \frac{1}{\tilde{b}_{n-1}(t)}(\tilde{\mathbf{a}}(t)\mathbf{z} + \mathbf{v})$

mit neuem Eingang $\mathbf{v}(t)$ als Integratorkette

$\dot{z}_1 = z_2, \dots, \dot{z}_n = \mathbf{v}$ (Brunovsky-Normalform). Mit

$p^*(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j^*)$ als gewünschtes CharPoly wähle:

$\mathbf{v} = -p_0 z_1 - \dots - p_{n-1} z_n$ ergibt $\mathbf{u} = -\tilde{\mathbf{k}}^T(t)\mathbf{z}$. Es folgt für

$$\dot{\mathbf{z}} = (\tilde{A}(t) - \tilde{\mathbf{b}}(t)\tilde{\mathbf{k}}^T(t))\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

Im Originalzustand $\dot{\mathbf{x}}(t)$ folgt die exp. Stabilität, falls $V(t)$ eine Lyapunov Transformation ist:

$$\dot{\mathbf{x}} = (A(t) - \mathbf{b}(t)\mathbf{k}^T(t))\mathbf{x}$$

mit $\tilde{\mathbf{k}}^T(t) = \mathbf{k}^T(t)V^{-1}(t)$.

1.5.2 Mehrgrößensysteme

Steuerbarkeitsindizes ρ_j einführen. Es gilt

$$S(A(t), B(t)) =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(t) \dots \mathbf{b}_m(t) \mid N_A^1 \mathbf{b}_1(t) \dots N_A^1 \mathbf{b}_m(t) \mid N_A^{n-1} \mathbf{b}_1(t) \dots N_A^{n-1} \mathbf{b}_m(t) \end{bmatrix}$$

Reduzierte Steuerbarkeitsmatrix:

$$\tilde{S}(A(t), B(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(t) \dots N_A^{\rho_1-1} \mathbf{b}_1(t) \mid \dots \mid \mathbf{b}_m(t) \dots N_A^{\rho_m-1} \mathbf{b}_m(t) \end{bmatrix}$$

Anleitung:

- Beginne mit $\mathbf{b}_1(t)$. Berechne $N_A \mathbf{b}_1(t), \dots, N_A^{\rho_1-1} \mathbf{b}_1(t)$. Abbruch, wenn $N_A^{\rho_1} \mathbf{b}_1(t)$ linear abhängig von den vorherigen Vektoren der Sequenz.
- Falls $\rho_1 \neq n$ nutze $\mathbf{b}_2(t)$ mit der Sequenz $N_A \mathbf{b}_2(t), \dots, N_A^{\rho_2} \mathbf{b}_2(t)$ bis linear abhängig von den vorherigen Sequenzen.
- Es muss gelten: $\sum_{j=1}^m \rho_j = n$

Die MIMO-RNF kann mit $\mathbf{z}(t) = V(t)\mathbf{x}(t)$ erreicht werden wenn $\tilde{S}(A(t), B(t))$ regulär ist, mit

$$V(t) = \begin{bmatrix} M_A^0 \mathbf{w}_1^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{\rho_1-1} \mathbf{w}_1^T(t) \\ \vdots \\ M_A^0 \mathbf{w}_m^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{\rho_m-1} \mathbf{w}_m^T(t) \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T(t) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_m^T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \dots \tilde{b}_{1, \rho_1-1}(t) & \dots & 0 \dots \tilde{b}_{1, \rho_m-1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \dots \tilde{b}_{m, \rho_1-1}(t) & \dots & 0 \dots \tilde{b}_{m, \rho_m-1}(t) \end{bmatrix} \tilde{S}^{-1}(\cdot)$$

mit $\tilde{b}_{j,\rho_j-1}(t)$ als Freiheitsgrade. Kompakte Darstellung über $\zeta = \mathbf{w}_j^T(t)\mathbf{x}$ und Ausnutzung der kanonischen Form ergibt

$$\begin{bmatrix} \frac{d\rho_1}{dt} \zeta_1 \\ \vdots \\ \frac{d\rho_m}{dt} \zeta_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_A^{\rho_1} \mathbf{w}_1^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{\rho_m} \mathbf{w}_m^T(t) \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} (M_A^{\rho_1-1} \mathbf{w}_1^T(t) \mathbf{b}_1(t) \cdots (M_A^{\rho_1-1} \mathbf{w}_1^T(t) \mathbf{b}_m(t) \\ \vdots \\ (M_A^{\rho_m-1} \mathbf{w}_m^T(t) \mathbf{b}_1(t) \cdots (M_A^{\rho_m-1} \mathbf{w}_m^T(t) \mathbf{b}_m(t) \end{bmatrix}}_{\text{Kopplungsmatrix } \mathcal{K}(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}} \mathbf{u}$$

$$K(t) = \mathcal{K}^{-1}(t) \begin{bmatrix} (p_{1,0} M_A^0 + \cdots + p_{1,\rho_1-1} M_A^{\rho_1-1} + M_A^{\rho_1}) \circ \mathbf{w}_1^T(t) \\ \vdots \\ (p_{m,0} M_A^0 + \cdots + p_{m,\rho_m-1} M_A^{\rho_m-1} + M_A^{\rho_m}) \circ \mathbf{w}_m^T(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{k}}_1^T(t) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{k}}_m^T(t) \end{bmatrix} V(t)$$

Zustandsrückführung:

$$\mathbf{u} = -K(t)\mathbf{x} = \mathcal{K}^{-1}(t)(-\mathcal{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{v})$$

und m entkoppelte Integratorketten der Länge ρ_j in den Koordinaten $\zeta_j(t)$ erhalten.
Originalkoordinaten

$$\dot{\mathbf{x}} = (A(t) - B(t)K(t))\mathbf{x}$$

1.6 Entwurf von Zustandsbeobachtern

Entwurf eines (vollständigen) Luenberger-Beobachters:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{A(t)\hat{\mathbf{x}} + B(t)\mathbf{u}}_{\text{Simulator}} + \underbrace{L(t)(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}_{\text{Korrektur}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = C(t)\hat{\mathbf{x}} + D(t)\mathbf{u}$$

mit Beobachterfehlerdynamik $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ ergibt sich

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{(A(t) - L(t)C(t))}_{=A_b(t)} \tilde{\mathbf{x}}$$

1.6.1 Eingrößensysteme

ACKERMANN-FORMEL

In SISO-BNF überführen mit Transformation $\mathbf{z} = V(t)\mathbf{x}(t)$, wenn $O(\cdot)$ regulär:

$$V^{-1}(t) = \begin{bmatrix} N_A^0 \mathbf{v}(t) & \cdots & N_A^{n-1} \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(t) = O^{-1}(\mathbf{c}^T(t), A(t)) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

mit Freiheitsgrad $\tilde{c}_{n-1}(t)$. Zeitvariante Beobachterkorrektur

$$\mathbf{l}(t) = \frac{1}{\tilde{c}_{n-1}(t)} \left[p_0 N_A^0 + \cdots + p_{n-1} N_A^{n-1} + N_A^n \right] \circ \mathbf{v}(t)$$

führt auf zeitinvariante Dynamikmatrix $\tilde{A}_b = \tilde{A}(t) - \tilde{\mathbf{l}}(t)\tilde{\mathbf{c}}^T(t)$ mit $\tilde{\mathbf{l}}(t) = V(t)\mathbf{l}(t)$ Wenn die Transformation $\mathbf{z}(t)$ eine Lyapunov-Transformation ist, dann folgt die exp. Stabilität von

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A(t) - \mathbf{l}(t)\mathbf{c}^T(t))\tilde{\mathbf{x}}$$

1.6.2 Mehrgrößensysteme

Reduzierte Beobachtbarkeitsmatrix zusammengesetzt aus den n lin.unabh. Zeilenvektoren von $O(\cdot)$:

$$\bar{O}(C(t), A(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{\rho_1-1} \mathbf{c}_1^T(t) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{\rho_p-1} \mathbf{c}_p^T(t) \end{bmatrix}, \quad \sum_{j=1}^p \rho_j = n$$

TRAFO IN MIMO-BNF

Durch

$$V^{-1}(t) = \left[N_A^0 \mathbf{v}_1(t) \cdots N_A^{\rho_1-1} \mathbf{v}_1(t) \mid \cdots \mid N_A^0 \mathbf{v}_p(t) \cdots N_A^{\rho_p-1} \mathbf{v}_p(t) \right]$$

und

$$[\mathbf{v}_1(t) \cdots \mathbf{v}_p(t)] = \bar{O}^{-1}(\cdot) \bar{C}^T(t)$$

mit

$$\bar{C}^T(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{c}_{1,\rho_1-1}(t) & \cdots & \tilde{c}_{p,\rho_p-1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{c}_{1,\rho_p-1}(t) & \cdots & \tilde{c}_{p,\rho_p-1}(t) \end{bmatrix}$$

2 Analyse nichtlinearer Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

2.1 Fluss einer DGL

$$\mathbf{x} = \Phi_t(\mathbf{x}_0)$$

mit $\mathbf{x}(0) = \Phi_0(\mathbf{x})$ folgt dass $\Phi_0(\cdot) = E$. Axiome:

$\mathbf{x}(t + \tau) = \Phi_\tau(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(t + \tau) = \Phi_{t+\tau}(\mathbf{x}_0) = \Phi_\tau(\Phi_t(\mathbf{x}_0))$.
Transitioneigenschaft:

$$\Phi_\tau \circ \Phi_t = \Phi_{t+\tau} \quad (\text{Komposition})$$

2.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung (NL) DGLSysteme

LOKALE EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT

Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ stückweise stetig und erfülle die Lipschitz Bedingung $\forall t \in [t_0, t_0 + \tau]$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass das System genau eine Lösung für $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ besitzt (Lokal Lipschitz). Gilt die Lipschitz-Bedingung für alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ dann ist $\mathbf{f}(\cdot)$ global Lipschitz.

STETIGKEIT UND LIPSCHITZ-BED.

Sind $\mathbf{f}(\cdot)$ und $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\cdot)$ auf der Menge $\mathcal{B} \times [t_0, t_0 + \delta]$ stetig, dann ist die L-B erfüllt.

GLOBALE EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT

Sei \mathbf{f} stückweise stetig in t und global Lipschitz in $[t_0, t_0 + \delta]$, dann besitzt die DGL eine eindeutige Lösung auf dem Intervall. Sind \mathbf{f} und $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$ in dem Intervall stetig, dann ist \mathbf{f} genau dann global Lipschitz, wenn $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$ im Intervall gleichmäßig beschränkt (induz. Matrixnorm) ist.

SATZ 3.4

2.3 Zustandsraum nichtlinearer Systeme

NKR

2.3.1 Mannigfaltigkeiten

NKR

2.3.2 Tangentialraum und Vektorfeld

NKR

2.3.3 Zusammenhang zwischen Vektorfeld und Differenzialgleichung

NKR

2.4 Zustandstransformationen und Diffeomorphismen

TODO

2.5 Lie-Ableitung und Lie-Klammern

2.5.1 Lie-Ableitung

Lie-Ableitung $L_{\mathbf{f}}h$ bezeichnet die Richtungsableitung einer glatten Funktion h in Richtung eines Vektorfeldes \mathbf{f} am Punkt \mathbf{p} :

$$(L_{\mathbf{f}}h)(\mathbf{p}) = (\mathbf{f}(\mathbf{p}))(h) = \frac{d}{dt} h(\mathbf{p} + t\mathbf{f})|_{t=0} = \frac{d}{dt} h(\boldsymbol{\sigma}(t))|_{t=0}$$

In Originalkoordinaten:

$$(L_{\mathbf{f}}h)(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Außerdem:

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h = \frac{\partial L_{\mathbf{f}}h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}$$

2.5.2 Lie-Klammer

$$\text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

mit Eigenschaften:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, \mathbf{f}] \quad (\text{Schiefsymmetrie})$$

todo

2.6 Distributionen und Involutivität

DISTRIBUTION

Eine Vorschrift, die jedem Punkt \mathbf{p} einen linearen Unterraum $\Delta_{\mathbf{p}}$ des Tangentialraumes $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{M}$ in der Form $\Delta_{\mathbf{p}} = \text{span}\{\mathbf{v}_{1,\mathbf{p}}, \dots, \mathbf{v}_{d,\mathbf{p}}\}$ zuordnet wird als (glatte) Distribution bezeichnet. Sie ist regulär in einer Umgebung V , wenn für alle $\mathbf{q} \in V$ gilt: $\dim(\Delta_{\mathbf{q}}) = d$.

INVOLUTIVITÄT

Eine reguläre Distribution ist dann involutiv auf V , wenn für alle $\mathbf{q} \in V$ gilt: $[\mathbf{v}_{j,\mathbf{q}}, \mathbf{v}_{k,\mathbf{q}}] \in \Delta_{\mathbf{q}} \quad \forall j, k = 1, \dots, d$. Die Lie-Klammer jeder Kombination von Vektorfeldern muss wieder als Linearkombination dieser Vektorfelder darstellen lassen.

2.7 Steuerbarkeit und Erreichbarkeit nichtlinearer Systeme

LOKAL STEUERBAR

Lokal steuerbar am Punkt $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{M}$ wenn eine offene Umgebung V um \mathbf{x}_1 existiert, sodass für alle $\mathbf{x}_2 \in V$ eine Zeit τ und ein \mathbf{u} so existieren, dass $\mathbf{x}(\tau) = \Phi_{\tau}(\mathbf{x}_1)$.

GLOBAL STEUERBAR

Wie lokal, nur für $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$.

Einerseits: Steuerbarkeit um eine Ruhelage bzw. AP linearisierte System impliziert die lokale Steuerbarkeit des NL Systems.

Andererseits: Linearisierung eines NL Systems kann zum Verlust der Steuerbarkeit führen (z.B. kin. Fahrzeugmodell)

2.7.1 Nichtlineare Systeme ohne Driftterm

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{x})u_j$$

Genau dann lokal steuerbar um \mathbf{x}_0 , wenn die Steuerbarkeitsdistribution

$$\Delta_S(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m, [\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j], [\mathbf{g}_i, [\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k]], \dots\}$$

mit $i, j, k, \dots = 1, \dots, m$ die Bedingung $\dim(\Delta_S(\mathbf{x})) = n$ erfüllt.

2.7.2 Nichtlineare Systeme mit Driftterm

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{x})u_j$$

LOKALE ERREICHBARKEIT

Das System ist lokal erreichbar am Punkt \mathbf{x}_1 , wenn eine Umgebung V um \mathbf{x}_1 , so dass für alle $\mathbf{x}_2 \in V$ eine Zeit τ und ein \mathbf{u} existieren, dass gilt $\mathbf{x}(\tau) = \Phi_{\tau}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_2$. Genau dann lokal erreichbar um \mathbf{x}_0 , wenn die Erreichbarkeitsdistribution

$$\Delta_E(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m, [\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j], [\mathbf{g}_i, [\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k]], \dots\}$$

mit $i, j, k, \dots = 0, \dots, m$ und $\mathbf{g}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ die Bedingung $\dim(\Delta_E(\mathbf{x})) = n$.

Lokale Erreichbarkeit schwächere Eigenschaft als die lokale Steuerbarkeit.

3 Exakte Linearisierung und Flachheit

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{x})u_j$$

$$y_j = h_j(\mathbf{x})$$

mit glatten Vektorfeldern $\mathbf{f}, \mathbf{g}_i \in \mathcal{TM}$ und glatten Funktionen $h_i(\mathbf{x})$.

3.1 Exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung für Eingrößensysteme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$$

$$y = h(\mathbf{x})$$

3.1.1 Relativer Grad

Zeitliche Änderung des Ausgangs als lineares System mit neuem Eingang $\dot{y} = v$ mit der Zustandsrückführung:

$$u = \frac{-L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + v}{L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})}$$

DEFINITION

Das System hat den relativen Grad r an der Stelle $\bar{\mathbf{x}}$ wenn (i) $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^k h(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ für $k = 0, \dots, r-2$ und (ii) $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$. Existieren Punkte \mathbf{x} sodass $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x}) = 0$, so ist der RG nicht wohl definiert.

Differenziere den Ausgang so oft, bis der Eingang erstmalig explizit auftritt.

Relativer Grad eines LTI Eingrößensystems entspricht dem Differenzgrad von Zähler- und Nennerpolynom der entsprechenden Übertragungsfunktion (Laurent-Reihe).

3.1.2 Byrnes-Isidori-Normalform

Kette von Differentiationen aus RG Def.

$\xi_1 = y, \dots, \xi_r = y^{(r-1)}$ führt auf

$$y^{(r)} = L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x})u$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{-L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x}) + v}{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1} h(\mathbf{x})} \quad \text{mit } y^{(r)} = v$$

lineares E/A Verhalten in Form einer Integratorkette der Länge r .

ZUSTANDSTRANSFORMATION AUF BYRNES-ISIDORI-NORMALFORM

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_r \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-r} \end{bmatrix} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{r-1}h(\mathbf{x}) \\ \Phi_{r+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \Phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Es kann $\Phi_{r+1}, \dots, \Phi_n$ so gewählt werden, dass

$$L_{\mathbf{g}}\Phi_k(\mathbf{x}) = 0 = q_k(\xi, \eta), \quad k = r+1, \dots, n.$$

Diffeomorphismus: $\Phi^{-1}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$ (zumindest lokal)

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_r = a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\eta}_1 = p_1(\xi, \eta) + q_1(\xi, \eta)u \\ \dot{\eta}_2 = p_2(\xi, \eta) + q_2(\xi, \eta)u \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{n-r} = p_{n-r}(\xi, \eta) + q_{n-r}(\xi, \eta)u \end{cases}$$

$$y = \xi_1$$

mit

$$a(\xi, \eta) = L_{\mathbf{f}}^r h \circ \Phi^{-1}(\mathbf{z})$$

$$b(\xi, \eta) = L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{r-1} h \circ \Phi^{-1}(\mathbf{z})$$

$$p_k(\xi, \eta) = L_{\mathbf{f}}\Phi_{r+k} \circ \Phi^{-1}(\mathbf{z})$$

$$q_k(\xi, \eta) = L_{\mathbf{g}}\Phi_{r+k} \circ \Phi^{-1}(\mathbf{z}) \quad k = 1, \dots, n-r$$

EXAKTE E/A-LINEARISIERUNG

$$u = \frac{-a(\xi, \eta) + v}{b(\xi, \eta)}$$

$$v = y^{*(r)} - \sum_{j=0}^{r-1} p_j \left(y^{(j)} - y^{*(j)} \right)$$

3.1.3 Nullodynamik

Wie muss \mathbf{x}_0 und $u(t)$ gewählt werden, damit der Ausgang $y(t) \forall t$ identisch Null ist.

Damit $\dot{\xi}_r = 0$, muss $0 = a(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}) + b(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})u$ bzw. $u = -\frac{a(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})}{b(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})}$ gelten und es ergibt sich die **Nullodynamik**:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{p}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})$$

STABILITÄT DER NULLDYNAMIK

Stabilität der Nullodynamik ist entscheidend für die Anwendung der Exakten E/A-Linearisierung.

STABILISIERUNG MIT DER EXAKTEN E/A-LIN.

Ist die Nullodynamik des Systems lokal asymptotisch (expon.) stabil, dann stabilisiert das nl Regelgesetz:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})} \left(-L_f^r h(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^{*(r)} - \sum_{j=0}^{r-1} p_j \left[L_f^j h(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^{*(j)} \right] \right)$$

mit p_j den Koeffizienten eines Hurwitz-Polynoms das System lokal asymptotisch (expon.).

3.2 Exakte Eingangs-/Zustandslinearisierung für Eingrößensysteme

Wenn $r = n$ Exakte E/A-Linearisierung \Rightarrow Exakte E/Z-Linearisierung.

BRUNOVSKY-NORMALFORM Bezeichne $y = \lambda(\mathbf{x})$ als fiktive Ausgangsgröße mit relativem Grad $r = n$. Dann reduziert sich die Zustandstransformation zu

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \lambda(\mathbf{x}) \\ L_f \lambda(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} \lambda(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

mit (i) $L_g L_f^k \lambda(\mathbf{x}) = 0$ für $k = 0, \dots, n-2$ und (ii)

$L_g L_f^{n-1} \lambda(\mathbf{x}) \neq 0$ ergibt vereinfachte

Byrnes-Isidori-Normalform:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= a(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z})u \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a(\mathbf{z}) &= L_f^n \lambda(\mathbf{x})(\circ \Phi^{-1}(\mathbf{z})) \quad b(\mathbf{z}) = L_g L_f^{n-1} \lambda(\mathbf{x})(\circ \Phi^{-1}(\mathbf{z})) \\ u &= \frac{-a(\mathbf{z}) + v}{b(\mathbf{z})} \end{aligned}$$

$L_g L_f \lambda(\mathbf{x})$ in ein System von partiellen DGL 1. Ordnung vom

Frobenius Typ überführen:

$$\begin{aligned} L_g \lambda(\mathbf{x}) &= 0 \\ L_{\text{ad}_f g} \lambda(\mathbf{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ L_{\text{ad}_f^{n-2} g} \lambda(\mathbf{x}) &= 0 \\ L_{\text{ad}_f^{n-1} g} \lambda(\mathbf{x}) &\neq 0 \\ \frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [g \text{ ad}_f g \cdots \text{ad}_f^{n-2} g \text{ ad}_f^{n-1} g] &= [0 \cdots 0 \beta(\mathbf{x})] \end{aligned}$$

EXISTENZ EINES AUSGANGS MIT RELATIVEM GRAD $r = n$

Es existiert genau eine Lösung $\lambda(\mathbf{x})$ des Systems von PDGL 1.

Ordnung wenn (i) $P_E(\mathbf{x}) = [g(\mathbf{x}), \text{ad}_f g(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_f^{n-1} g(\mathbf{x})]$

Rang n besitzt und (ii) die Distribution

$\Delta_E(\mathbf{x}) = \text{span}\{g(\mathbf{x}), \text{ad}_f g(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_f^{n-2} g(\mathbf{x})\}$ involutiv ist in einer Umgebung von $\bar{\mathbf{x}}$.

3.2.1 Theorem von Frobenius

Eine reguläre Distribution ist genau dann vollständig integrabel, wenn sie involutiv ist.

3.2.2 Stabilisierung mit Zustandsrückführung

Regelgesetz wählen als:

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{z})} \left(-a(\mathbf{z}) - \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} p_j z_{j+1}}_v \right)$$

ergibt Matrix mit p und unterster zeile blabla..

3.3 Erweiterung auf Mehrgrößensysteme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m g_j(\mathbf{x}) u_j$$

$$y_i = h_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, \dots, p$$

Annahme: $\dim \mathbf{y} = p = m = \dim \mathbf{u}$

3.3.1 Exakte E/A-Linearisierung

VEKTORIELLER RELATIVER GRAD

Das System hat den vektoriellen relativen Grad $\{r_1, \dots, r_m\}$ an der Stelle $\bar{\mathbf{x}}$, wenn (i) $L_{g_j} L_f^{r_i} h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i, j = 1, \dots, m$ für $k = 0, 1, \dots, r_i - 2$ und (ii) die $(m \times m)$ -Entkopplungsmatrix

$$B(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

am Punkt $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ regulär ist.

BYRNES-ISIDORI-NF UND NULLDYNAMIK

Sei $r \leq n$ die Summe der einzelnen relativen Grade. Ist $r < n$ dann existieren $(n - r)$ Funktionen $\Phi(\mathbf{x})$ so dass mit

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} \\ \vdots \\ \xi_{1,r_1} \\ \vdots \\ \xi_{m,1} \\ \vdots \\ \xi_{m,r_m} \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-r} \end{bmatrix} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_m(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \\ \Phi_{r+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \Phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

ein lokaler Diffeomorphismus gegeben ist. Die Funktionen $\Phi_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x})$ können **nicht** wie im Eingrößenfall zu $L_{g_j} \Phi_k(\mathbf{x}) = 0$ gewählt werden, **außer** wenn

$\Delta_0 = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ um $\bar{\mathbf{x}}$ involutiv ist. BI-NF

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\xi}_{m,1} = \xi_{m,2} \\ \dot{\xi}_{m,2} = \xi_{m,3} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{m,r_m} = a_m(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + b_m^T(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})u \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\eta}_1 = p_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + q_1^T(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})u \\ \dot{\eta}_2 = p_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + q_2^T(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})u \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{n-r} = p_{n-r}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + q_{n-r}^T(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})u \end{cases}$$

$$\mathbf{y} = [\xi_{1,1} \ \xi_{2,1} \ \cdots \ \xi_{m,1}]^T$$

mit

$$B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} b_1^T(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \\ \vdots \\ b_m^T(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} = B(\mathbf{x}) \circ \Phi^{-1}(\mathbf{z})$$

$$\mathbf{u} = B^{-1}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})(-\mathbf{a}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{v})$$

Stabilität des Gesamtsystems bleibt von der Stabilität der entsprechenden Nullodynamik abhängig.

STABILISIERUNG UND AUSGANGSREGELUNG

$$\mathbf{u} = B^{-1}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} -L_f^{r_1} h_1(\mathbf{x}) + \mathbf{y}_1^{*(r_1)} - \sum_{l=0}^{r_1-1} p_{1,l} \left[L_f^l h_1(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_1^{*(l)} \right] \\ \vdots \\ -L_f^{r_m} h_m(\mathbf{x}) + \mathbf{y}_m^{*(r_m)} - \sum_{l=0}^{r_m-1} p_{m,l} \left[L_f^l h_m(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_m^{*(l)} \right] \end{bmatrix}$$

3.3.2 Exakte E/Z-Linearisierung

BLABLA

3.4 Differenzielle Flachheit

Sämtliche Zustands und Eingangsgr. werden durch einen flachen Ausgang und dessen Zeitableitungen parametrisiert.

3.4.1 Flache Systeme

FLACHER AUSGANG

Fiktiver Ausgang $\mathbf{z}(t)$ muss folgende Bedingungen erfüllen, um ein flacher Ausgang (flaches System) zu sein:

- (i) z_i mit $i = 1, \dots, m$ lassen sich als Funktionen von \mathbf{x} , \mathbf{u} und einer endlichen Anzahl von Zeitableitungen $u_j^{(k)}(t)$ ausdrücken: $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)})$
- (ii) \mathbf{x} und \mathbf{u} lassen sich als Funktion von $z_i(t)$ und einer endlichen Anzahl von Zeitableitungen $z_i^{(k)}(t)$ darstellen: $\mathbf{x}^* = \theta_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{z}}^*, \dots, \mathbf{z}^{*(\beta-1)})$, $\mathbf{u}^* = \theta_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{z}}^*, \dots, \mathbf{z}^{*(\beta)})$ mit Vorgabe $\mathbf{z}^*(t)$.
- (iii) Die Komponenten von \mathbf{z} sind differenziell unabhängig, d.h. es ex. keine DGL: $\psi(\mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{z}}^*, \dots, \mathbf{z}^{*(\delta)}) = \mathbf{0}$. Äquivalent zu $\dim \mathbf{z} = \dim \mathbf{u}$.

Ausgang darstellbar über $\mathbf{y} = \theta_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{z}}^*, \dots, \mathbf{z}^{*(\gamma)})$.

Der flache Ausgang ist nicht eindeutig. Freie Systeme $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sind nicht flach, da (iii) nicht erfüllt. Triviale Fälle, wie $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{u}^T]^T$, sind ausgeschlossen durch (iii). LTI und LTV Systeme sind genau dann steuerbar, wenn sie flach sind.

3.4.1.1 Flache Eingrößensysteme Mit $\dim \mathbf{u} = 1$ reduzieren sich die Bedingungen auf $z = \phi(\mathbf{x})$, was auf $\mathbf{x} = \theta_{\mathbf{x}}(z, \dots, z^{(n-1)})$, $\mathbf{u} = \theta_{\mathbf{u}}(z, \dots, z^{(n)})$, $\mathbf{y} = \theta_{\mathbf{y}}(z, \dots, z^{(n-r)})$ führt, mit relativem Grad r .

3.4.1.2 Zusammenhang zwischen Flachheit und Exakter EZ-Lin Fiktive Ausgangsgrößen bei Exakter E/Z-Lin stellt einen flachen Ausgang dar. Flachheit umfasst E/Z-Lin.

3.4.2 Flachheitsbasierte Trajektorienplanung und Steuerung

Ausgangsgröße folgt einer vorgegebenen Referenztrajektorie. Besonders einfach für flache Systeme.

3.4.2.1 Realisierung von Übergängen zwischen AP AP ist die Lösung von $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$. AP entsprechen der Form aus (i). Für flache Systeme kann die Vorgabe der AP entweder durch Vorgabe von \mathbf{u}_R^i oder von \mathbf{z}_R^i , $i = 0, \tau$ erfolgen. \mathbf{z}^* als hinreichend oft stet.differenzierbar mit Stationaritätsbed. bei 0 und τ für $\mathbf{z}(\cdot)$ und deren β_i -fachen Ableitungen. Führt auf (ii).

3.4.2.2 Konstruktion polynomialer Solltraj. Um \mathbf{z} zu bestimmen wähle Polynom vom Grad $2\beta + 1$ resultiert in einem algebraischen Gleichungssystem für die Koeffizienten p_i des Polynoms.

3.4.2.3 2-FHG-Regeleung mit flachheitsbasierter Steuerung Praxiseinsatz. Flachheitsbasierte Parametrierung + Referenzgenerator und eine Rückführung mit Beobachter zur Stabilisierung des Trajektorienfolgefehlers. Bei kleinen Abweichungen zwischen \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_0^* kann eine Linearisierung aus der flachheitsbasierten Parametrierung folgen, was auf ein LTI System führt.

3.4.3 Flachheitsbasierte Trajektorienfolgeregelung

Trajektorienfolgeregelung für flachen Ausgang \mathbf{z} . Zwei Fälle (i) $\sum_{i=1}^m \beta_i = n$ und (ii) $\sum_{i=1}^m \beta_i > n$.

3.4.3.1 (i) Statische Zustandsrückführung System besitzt vektoriellen relativen Grad $r = \{r_1, \dots, r_m\} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ und ist damit exakt E/Z-lin.bar. Mit Diffeomorphismus $\xi = \mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ in nichtlineare RNF transformieren. Mit neuem Eingang $\mathbf{v}(t)$ gemäß $\xi_i^{(\beta_i)} = v_i$ (Brunovsky-NF) kann eine exakte Linearisierung und Entkopplung erzielt werden mit $\mathbf{u} = \mathbf{a}^{-1}(\xi, \mathbf{v})$. Vorgabe der Eigenwerte für die Integratorketten. Flachheitsbasierte Trajektorienfolgeregelung ergibt sich aus Eingangsparametrierung

$\mathbf{u} = \Theta_{\mathbf{u}}(z_1, \dots, z_1^{(\beta_1-1)}, v_1, \dots, z_m, \dots, z_m^{(\beta_m-1)}, v_m)$. Statisch da nur v ohne Ableitung vorkommt.

3.4.3.2 (ii.a) Quasi-Statische Zustandsrückführung Suche Diffeomorphismus der in verallgemeinerte RNF transformiert. Definiere κ so, dass $\sum_{i=1}^m \beta_i = n + \sum_{i=1}^m \kappa_i$. Neue Zustände ξ mit $\beta_i - \kappa_i$ beschreiben. Neue Eingänge als m lineare Integratorketten der Länge $\beta_i - \kappa_i$. In der quasi-statischen Zustandsrückführung treten nun Ableitungen $v_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, \kappa_i$ auf. Systemordnung n bleibt erhalten in den transformierten Koordinaten ξ . Bei Trajektorienfolgeregelung: $z_i^*(t) \in C^{\beta_i}$.

3.4.3.3 (ii.b) Dynamische Zustandsrückführung Geeignete dynamische Erweiterung, um dann wie eine statische ZuRuFu aus (i) zu entwerfen. Ansatz:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{f}_d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d) \quad \mathbf{u} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d) \quad \dim \mathbf{x} = \kappa \\ \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d)) \quad \dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{f}_d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d) \end{aligned}$$

sodass $\dim[\mathbf{x}, \mathbf{x}_d] = n + \kappa = \sum_{i=1}^m \beta_i$

3.4.4 Nichtlinearer Folgebeobachter mit zeitvarianter Beobachterverstärkung

Nichtlinearer Zustandsbeobachter als Ansatz: $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + L(t)(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}))$ mit Beobachterkorrektur $L(t)$. Dimensionierung von $L(t)$ aus der Beobachterfehlerdynamik $\hat{\mathbf{x}}$ im Zustand $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$. Aus der Beobachterfehlerdynamik folgt: $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (A(t) - L(t)C(t))\hat{\mathbf{x}}$ mit $A(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*}$ und $C(t) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*}$. Dimensionierung bspw. aus Ackermann-Formel für LTV-Systeme.

3.4.5 Trajektorienfolgeregelung für einen nicht-flachen Ausgang

Bestimme Referenztrajektorie $\mathbf{z}^*(t)$ aus DGL $\theta_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{z}}^*, \dots, \mathbf{z}^{*(\gamma)}) = \mathbf{y}^*$ um ein Folgeverhalten für $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{y}^*(t)$ zu implizieren. DGL ist stabil: Über numerische Integration $\mathbf{y}^*(t)$ ermitteln. DGL instabil: Numerisch lösen. Nur APwechsel: Direkt aus $\theta_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}_R^*, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \mathbf{y}_R^*$

4 Nichtlinearer Beobachter

4.1 Nichtlineare Beobachtbarkeit

BEOBACHTBARKEIT

Anfangszustände $\mathbf{x}_{01} \neq \mathbf{x}_{02}$ ununterscheidbar, wenn $y_i(t, \mathbf{x}_{01}, \mathbf{u}) = y_i(t, \mathbf{x}_{02}, \mathbf{u})$ für alle \mathbf{u} identisch sind. Beobachtbar wenn $\mathbf{x}_{01} = \mathbf{x}_{02}$.

BEOBACHTBARKEITSRAUM

$$O = \text{span}\{h_1(\mathbf{x}), L_f h_1(\mathbf{x}), \dots, h_p(\mathbf{x}), L_f h_p(\mathbf{x}), \dots\}$$

GLEICHFÖRMIGE BEOBACHTBARKEIT

Systeme, deren Zustände aus aufeinanderfolgenden Zeitableitungen der Messgrößen rekonstruiert werden können sind gleichförmig beobachtbar: $H \subset O$, mit H wie Beobachtbarkeitsraum nur bis $L_f^{\rho_i-1}$ mit Beobachtbarkeitsindex ρ_i .

BEOBACHTBARKEITS-ABBILDUNG

Wenn gleichförmig beobachtbar, dann Beo-Abb. $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ immer invertierbar (lokal), d.h. der unbekannte Zustand \mathbf{x} kann aus dem Vektor $\tilde{\mathbf{y}}$ der Zeitableitungen eindeutig berechnet werden. $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = [\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_p]^T = \tilde{\mathbf{y}}$ mit $\mathbf{q}_i = [L_f^0 h_i(\mathbf{x}) \dots L_f^{n_i-1} h_i(\mathbf{x})]^T$.

LOKALE BEOBACHTBARKEIT

System lokal beobachtbar an $\mathbf{x}_p \Leftrightarrow \exists$ Umgebung U von \mathbf{x}_p , so dass \mathbf{q} für $\mathbf{x} \in U$ invertiert werden kann.

BEOBACHTBARKEITS-MATRIX

Jacobi-Matrix von $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ hat vollen Rang an \mathbf{x}_p , dann ist das System lokal beobachtbar an \mathbf{x}_p .

4.2 Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme

LUENBERGER STRUKTUR

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}_{\text{Simulator}} + \underbrace{G(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}))}_{\text{Korrektur}}$$

DIMENSIONIERUNG

Sinnvoller Anfangswert. Korrektur über Beobachterfehler $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ mit Ziel $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ (Stabilisierungsaufgabe).

4.2.1 Spezialfälle

4.2.1.1 a) Linearisierung um Ruhelage \mathbf{x}_R $\tilde{\mathbf{x}} = \Delta \mathbf{x} - \Delta \hat{\mathbf{x}}$ führt auf $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A - GC)\tilde{\mathbf{x}} + O^2$ und somit beobachtbar, wenn $\text{Re}\{\lambda(A - GC)\} < 0$.

Gegenbsp: $\dot{x} = x$, $y = x^3$ mit $x_R = 0$. Linearisiert nicht beobachtbar, obwohl NLS beobachtbar. Wähle:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{x} + g(\underbrace{\sqrt[3]{y - \hat{x}}}_{\hat{x}}) \Rightarrow \dot{\hat{x}} = \hat{x}(1 - g)$$

4.2.1.2 b) Spezielle Systemstruktur Kein Plan, ob wichtig

Copyright © 2014 Major Ring Ding Ding Dong feat. Jingjong Ba-Dingdong