NLR Cheat Cheetos (yumyum)

1 LTV Systeme

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{y} &= C(t)\boldsymbol{x} + D(t)\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

1.1 Transitionsmatrix und Lösung der Zustandsdifferenzialgleichung

Lösung für $\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$ in der Form $\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t, t_0)\boldsymbol{x}_0$ mit Transitionsmatrix $\Phi(t, t_0)$ aus der Peano-Baker-Reihe.
Eigenschaften der Transitionsmatrix:
Anfangswert: $\Phi(t_0, t_0) = E$, Produkteigenschaft: $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)$, Invertierbarkeit: $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$, Differenzierbarkeit: $\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$, Determinante: $\det \Phi(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau) \mathrm{d}\tau\right)$.
Eigenwerte von $A(t)$ geben keine Aussage über Stabilität.

1.1.1 Spezialfälle geschlossener Lösungen

$\dot{x} = a(t)x$ mit Lösung $x = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau\right) x_0$. Bei $\dim \boldsymbol{x} > 1$ und $A(t)A(\tau) = A(\tau)A(t)$ dann gilt $\Phi(t, \tau) = \exp\left(\int_{\tau}^{t} A(s)\mathrm{d}s\right)$

1.1.2 Periodische Matrizen

Für $\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$ mit $A(t) = A(t + \omega)$ dann gilt $\Phi(t, \tau) = P(t, \tau)e^{R(t-\tau)}$ mit $P(t, \tau) = P(t + \omega, \tau)$ und $R = \text{const.}$

1.1.3 Lösung der nicht-autonomen Zustandsdifferenzialgleichung

Lösung von

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{y} &= C(t)\boldsymbol{x} + D(t)\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

lautet

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \Phi(t, t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
\boldsymbol{y} &= C(t)\Phi(t, t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + D(t)\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

1.2 Zustandstransformationen und äquivalente Systemdarstellungen

Zustandstransformation $\boldsymbol{z} = V(t)\boldsymbol{x}$ mit Transformationsmatrix $V(t)$ regulär im betrachteten Zeitintervall und $\dot{V}(t)$ existiert und ist stetig im Intervall.

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{z}} &= [\dot{V}(t) + V(t)A(t)]V^{-1}(t)\boldsymbol{z} + V(t)B(t)\boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{y} &= C(t)V^{-1}(t)\boldsymbol{z}(t) + D(t)\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{z} = V(t)\boldsymbol{x}$ ist eine Lyapunov-Transformation, falls $V(t)$ und $V^{-1}(t)\ \forall t$ beschränkt sind. Dann folgt aus der exponentiellen Stabilität des einen Systems, die exponentielle Stabilität des jeweils anderen Systems.

1.3 Stabilität

$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$ ist stabil wenn $\|\Phi(t, t_0)\| \leq M$ mit $M = \text{const.} \geq 0$. Das System ist asymptotisch stabil falls $\lim_{t\to\infty} \Phi(t, t_0)\boldsymbol{x}_0 \to 0\ \ \forall x_0$. Exponentiell stabil falls $\|\Phi(t, t_0)\| \leq Me^{-\omega(t-t_0)}$

1.4 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Steuerbar falls $\operatorname{rang} S(A(t), B(t)) = n$, mit

$$
S(A(t), B(t)) = \begin{bmatrix} N_A^0 B(t) & N_A^1 B(t) & \cdots & N_A^{n-1} B(t) \end{bmatrix}
$$

wobei $N_A^k B(t) = N_A(N_A^{k-1} B(t))$
$N_A^1 B(t) = -\dot{B}(t) + A(t)B(t), \quad N_A^0 B(t) = B(t)$, also $A(t)$ und $B(t)$ müssen entsprechend $(n-2)$ bzw. $(n-1)$-fach stetig diff.bar sein.
Beobachtbar falls $\operatorname{rang} O(C(t), A(t)) = n$ mit

$$
O(C(t), A(t)) = \begin{bmatrix} M_A^0 C(t) & M_A^1 C(t) & \cdots & M_A^{n-1} C(t) \end{bmatrix}^T
$$

wobei $M_A^k C(t) = M_A(M_A^{k-1} C(t))$ und $M_A^1 C(t) = \dot{C}(t) + C(t)A(t)$.

1.5 Entwurf von Zustandsreglern

1.5.1 Eingrößensysteme

In SISO-RNF bringen über $V(t)$ mit Ansatz $z_1 = \boldsymbol{w}^T(t)\boldsymbol{x}$ und sukzessive Differentiation nach t. Eingangsgröße $\boldsymbol{u}$ trifft erst in $z_n(t)$ auf.

$$
\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} M_A^0 \boldsymbol{w}^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{n-1}\boldsymbol{w}^T(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = V(t)\boldsymbol{x}
$$

$$
V(t)\boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-1}(t) \end{bmatrix}
$$

Lemma 2.2 besagt für $k \geq 0$:
$(M_A^0 \boldsymbol{w}^T(t))\boldsymbol{v}(t) = 0, \cdots, (M_A^k \boldsymbol{w}^T(t))\boldsymbol{v}(t) = 0$ bzw.
$\boldsymbol{w}^T(t)(N_A^0 \boldsymbol{v}(t)) = 0, \cdots, \boldsymbol{w}^T(t)(N_A^k \boldsymbol{v}(t)) = 0$ und somit gilt:

$$
\boldsymbol{w}^T(t) = \begin{bmatrix} 0 \cdots \tilde{b}_{n-1}(t) \end{bmatrix} S^{-1}(A(t), \boldsymbol{b}(t))
$$

mit Freiheitsgrad $\tilde{b}_{n-1}(t)$.
Eigenwertvorgabe mit Ackermann-Formel
Mit $\tilde{\boldsymbol{a}} = -(M_A^n \boldsymbol{w}^T(t))V^{-1}(t)$ wähle $u = \frac{1}{\tilde{b}_{n-1}(t)}(\tilde{\boldsymbol{a}}(t)\boldsymbol{z} + v)$ mit neuem Eingang $v(t)$ als Integratorkette $\dot{z}_1 = z_2,\ \cdots,\ \dot{z}_n = v$ (Brunovsky-Normalform). Mit $p^*(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_j^*)$ als gewünschtes CharPoly wähle: $v = -p_0 z_1 - \cdots - p_{n-1}z_n$ ergibt $u = -\tilde{\boldsymbol{k}}^T(t)\boldsymbol{z}$. Es folgt für

$$
\dot{\boldsymbol{z}} = (\tilde{A}(t) - \tilde{\boldsymbol{b}}(t)\tilde{\boldsymbol{k}}^T(t))\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{z}
$$

Im Originalzustand $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ folgt die exp. Stabilität, falls $V(t)$ eine Lyapunov Transformation ist:

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = (A(t) - \boldsymbol{b}(t)\boldsymbol{k}^T(t))\boldsymbol{x}
$$

mit $\tilde{\boldsymbol{k}}^T(t) = \boldsymbol{k}^T(t)V^{-1}(t)$.

1.5.2 Mehrgrößensysteme

Steuerbarkeitsindizes ρ_j einführen. Es gilt

$$
S(A(t), B(t)) = \left[\boldsymbol{b}_1(t) \cdots \boldsymbol{b}_m(t) \,\middle|\, N_A^1 \boldsymbol{b}_1(t) \cdots N_A^1 \boldsymbol{b}_m(t) \,\middle|\, N_A^{n-1}\boldsymbol{b}_1(t) \cdots N_A^{n-1}\boldsymbol{b}_m(t)\right]
$$

Reduzierte Steuerbarkeitsmatrix:

$$
\bar{S}(A(t), B(t)) = \left[\boldsymbol{b}_1(t) \cdots N_A^{\rho_1 - 1}\boldsymbol{b}_1(t) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \boldsymbol{b}_m(t) \cdots N_A^{\rho_m - 1}\boldsymbol{b}_m(t)\right]
$$

Anleitung:

- Beginne mit $\boldsymbol{b}_1(t)$. Berechne $N_A \boldsymbol{b}_1(t), \cdots, N_A^{\rho_1 - 1}\boldsymbol{b}_1(t)$. Abbruch, wenn $N_A^{\rho_1}\boldsymbol{b}_1(t)$ linear abhängig von den vorherigen Vektoren der Sequenz.
- Falls $\rho_1 \neq n$ nutze $\boldsymbol{b}_2(t)$ mit der Sequenz $N_A \boldsymbol{b}_2(t), \cdots, N_A^{\rho_2}\boldsymbol{b}_2(t)$ bis linear abhängig von den vorherigen Sequenzen.
- Es muss gelten: $\sum_{j=1}^{m} \rho_j = n$

Die MIMO-RNF kann mit $\boldsymbol{z}(t) = V(t)\boldsymbol{x}(t)$ erreicht werden wenn $\bar{S}(A(t), B(t))$ regulär ist, mit

$$
V(t) = \begin{bmatrix} M_A^0 \boldsymbol{w}_1^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{\rho_1 - 1}\boldsymbol{w}_1^T(t) \\ \hline \cdots \\ \hline M_A^0 \boldsymbol{w}_m^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{\rho_m - 1}\boldsymbol{w}_m^T(t) \end{bmatrix}
$$

und

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^T(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_m^T(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 \cdots \tilde{b}_{1,\rho_1 - 1}(t) & \cdots & 0 \cdots \tilde{b}_{1,\rho_m - 1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots \tilde{b}_{m,\rho_1 - 1}(t) & \cdots & 0 \cdots \tilde{b}_{m,\rho_m - 1}(t) \end{array}\right] \bar{S}^{-1}(\cdot)
$$

mit $\tilde{b}_{j,\rho_j-1}(t)$ als Freiheitsgrade. Kompakte Darstellung über $\zeta = \boldsymbol{w}_j^T(t)\boldsymbol{x}$ und Ausnutzung der kanonischen Form ergibt

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{\rho_1}}{dt^{\rho_1}}\zeta_1 \\ \vdots \\ \frac{d^{\rho_m}}{dt^{\rho_m}}\zeta_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_A^{\rho_1}\boldsymbol{w}_1^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{\rho_m}\boldsymbol{w}_m^T(t) \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}(t)\in\mathbb{R}^{m\times n}} \boldsymbol{x}$$
$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} (M_A^{\rho_1-1}\boldsymbol{w}_1^T(t))\boldsymbol{b}_1(t)\cdots(M_A^{\rho_1-1}\boldsymbol{w}_1^T(t))\boldsymbol{b}_m(t) \\ \vdots \\ (M_A^{\rho_m-1}\boldsymbol{w}_m^T(t))\boldsymbol{b}_1(t)\cdots(M_A^{\rho_m-1}\boldsymbol{w}_m^T(t))\boldsymbol{b}_m(t) \end{bmatrix}}_{\text{Kopplungsmatrix } \mathcal{K}(t)\in\mathbb{R}^{m\times m}} \boldsymbol{u}$$

$$K(t) = \mathcal{K}^{-1}(t) \begin{bmatrix} (p_{1,0}M_A^0 + \cdots + p_{1,\rho_1-1}M_A^{\rho_1-1} + M_A^{\rho_1}) \circ \boldsymbol{w}_1^T(t) \\ \vdots \\ (p_{m,0}M_A^0 + \cdots + p_{m,\rho_m-1}M_A^{\rho_m-1} + M_A^{\rho_m}) \circ \boldsymbol{w}_m^T(t) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{k}}_1^T(t) \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{k}}_m^T(t) \end{bmatrix} V(t)$$

Zustandsrückführung:

$$\boldsymbol{u} = -K(t)\boldsymbol{x} = \mathcal{K}^{-1}(t)(-\mathcal{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v})$$

und m entkoppelte Integratorketten der Länge ρ_j in den Koordinaten $\zeta_j(t)$ erhalten.
Originalkoordinaten

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A(t) - B(t)K(t))\boldsymbol{x}$$

1.6 Entwurf von Zustandsbeobachtern

Entwurf eines (vollständigen) Luenberger-Beobachters:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \underbrace{A(t)\hat{\boldsymbol{x}} + B(t)\boldsymbol{u}}_{\text{Simulator}} + \underbrace{L(t)(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}})}_{\text{Korrektur}}$$
$$\hat{\boldsymbol{y}} = C(t)\hat{\boldsymbol{x}} + D(t)\boldsymbol{u}$$

mit Beobachterfehlerdynamik $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{v}x(t)$ ergibt sich

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \underbrace{(A(t) - L(t)C(t))}_{=A_b(t)}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

1.6.1 Eingrößensysteme

Ackermann-Formel
In SISO-BNF überführen mit Transformation $\boldsymbol{z} = V(t)\boldsymbol{x}(t)$, wenn $O(\cdot)$ regulär:

$$V^{-1}(t) = \begin{bmatrix} N_A^0\boldsymbol{v}(t) & \cdots & N_A^{n-1}\boldsymbol{v}(t) \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{v}(t) = O^{-1}(\boldsymbol{c}^T(t), A(t)) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

mit Freiheitsgrad $\tilde{c}_{n-1}(t)$. Zeitvariante Beobachterkorrektur

$$\boldsymbol{l}(t) = \frac{1}{\tilde{c}_{n-1}(t)} \left[p_0N_A^0 + \cdots + p_{n-1}N_A^{n-1} + N_A^n\right] \circ \boldsymbol{v}(t)$$

führt auf zeitinvariante Dynamikmatrix $\tilde{A}_b = \tilde{A}(t) - \tilde{\boldsymbol{l}}(t)\tilde{\boldsymbol{c}}^T(t)$ mit $\tilde{\boldsymbol{l}}(t) = V(t)\boldsymbol{l}(t)$ Wenn die Transformation $\boldsymbol{z}(t)$ eine Lyapunov-Transformation ist, dann folgt die exp. Stabilität von

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (A(t) - \boldsymbol{l}(t)\boldsymbol{c}^T(t))\tilde{\boldsymbol{x}}$$

1.6.2 Mehrgrößensysteme

Reduzierte Beobachtbarkeitsmatrix zusammengesetzt aus den n lin.unabh. Zeilenvektoren von $O(\cdot)$:

$$\bar{O}(C(t), A(t)) = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{c}_1^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{\rho_1-1}\boldsymbol{c}_1^T(t) \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{c}_p^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{\rho_p-1}\boldsymbol{c}_p^T(t) \end{array}\right], \quad \sum_{j=1}^{p}\rho_j = n$$

Trafo in MIMO-BNF
Durch

$$V^{-1}(t) = \left[N_A^0\boldsymbol{v}_1(t)\cdots N_A^{\rho-1}\boldsymbol{v}_1(t)\middle|\cdots\middle|N_A^0\boldsymbol{v}_p(t)\cdots N_A^{\rho_p-1}\boldsymbol{v}_p(t)\right]$$

und

$$\left[\boldsymbol{v}_1(t)\cdots\boldsymbol{v}_p(t)\right] = \bar{O}^{-1}(\cdot)\bar{C}^T(t)$$

mit

$$\bar{C}^T(t) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{c}_{1,\rho_1-1}(t) & \cdots & \tilde{c}_{p,\rho_1-1}(t) \\ \hline \cdots & & \cdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{c}_{1,\rho_p-1}(t) & \cdots & \tilde{c}_{p,\rho_p-1}(t) \end{array}\right]$$

2 Analyse nichtlinearer Systeme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{bzw.} \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

2.1 Fluss einer DGL

$$\boldsymbol{x} = \Phi_t(\boldsymbol{x}_0)$$

mit $\boldsymbol{x}(0) = \Phi_0(\boldsymbol{x})$ folgt dass $\Phi_0(\cdot) = E$. Axiome:
$\boldsymbol{x}(t+\tau) = \Phi_\tau(\boldsymbol{x}(t))$, $\boldsymbol{x}(t+\tau) = \Phi_{t+\tau}(\boldsymbol{x}_0) = \Phi_\tau(\Phi_t(\boldsymbol{x}_0))$.
Transitionseigenschaft:

$$\Phi_\tau \circ \Phi_t = \Phi_{t+\tau} \qquad \text{(Komposition)}$$

2.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung (NL) DGLSysteme

Lokale Existenz und Eindeutigkeit
Sei $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ stückweise stetig und erfülle die Lipschitz Bedingung $\forall t \in [t_0, t_0 + \tau]$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass das System genau eine Lösung für $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ besitzt (Lokal Lipschitz). Gilt die Lipschitz-Bedingung für alle $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ dann ist $\boldsymbol{f}(\cdot)$ global Lipschitz.

Stetigkeit und Lipschitz-Bed.
Sind $\boldsymbol{f}(\cdot)$ und $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\cdot)$ auf der Menge $\mathcal{B} \times [t_0, t_0 + \delta]$ stetig, dann ist die L-B erfüllt.
Globale Existenz und Eindeutigkeit
Sei $\boldsymbol{f}$ stückweise stetig in t und global Lipschitz in $[t_0, t_0 + \delta]$, dann besitzt die DGL eine eindeutige Lösung auf dem Intervall. Sind $\boldsymbol{f}$ und $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ in dem Intervall stetig, dann ist $\boldsymbol{f}$ genau dann global Lipschitz, wenn $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ im Intervall gleichmäßig beschränkt (induz. Matrixnorm) ist.
Satz 3.4

2.3 Zustandsraum nichtlinearer Systeme

NKR

2.3.1 Mannigfaltigkeiten

NKR

2.3.2 Tangentialraum und Vektorfeld

NKR

2.3.3 Zusammenhang zwischen Vektorfeld und Differenzialgleichung

NKR

2.4 Zustandstransformationen und Diffeomorphismen

TODO

2.5 Lie-Ableitung und Lie-Klammern

2.5.1 Lie-Ableitung

Lie-Ableitung $L_{\boldsymbol{f}}h$ bezeichnet die Richtungsableitung einer glatten Funktion h in Richtung eines Vektorfeldes $\boldsymbol{f}$ am Punkt $\boldsymbol{p}$:

$$(L_{\boldsymbol{f}}h)(\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}))(h) = \frac{d}{dt}h(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{f})|_{t=0} = \frac{d}{dt}h(\boldsymbol{\sigma}(t))|_{t=0}$$

In Originalkoordinaten:

$$(L_{\boldsymbol{f}} h)(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Außerdem:

$$L_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}} h = \frac{\partial L_{\boldsymbol{f}} h}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}$$

2.5.2 Lie-Klammer

$$\mathrm{ad}_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{g} = [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}] = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

mit Eigenschaften:

$$[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}] = -[\boldsymbol{g}, \boldsymbol{f}] \quad \text{(Schiefsymmetrie)}$$
todo

2.6 Distributionen und Involutivität

Distribution
Eine Vorschrift, die jedem Punkt $\boldsymbol{p}$ einen linearen Unterraum Δ_p des Tangentialraumes $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ in der Form $\Delta_p = \mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_{1,\boldsymbol{p}}, /cdots, \boldsymbol{v}_{d,\boldsymbol{p}}\}$ zuordnet wird als (glatte) Distribution bezeichnet. Sie ist regulär in einer Umgebung V, wenn für alle $\boldsymbol{q} \in V$ gilt: $\dim(\Delta_{\boldsymbol{q}}) = d$.

Involutivität
Eine reguläre Distribution ist dann involutiv auf V, wenn für alle $\boldsymbol{q} \in V$ gilt: $[\boldsymbol{v}_{j,\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{v}_{k,\boldsymbol{q}}] \in \Delta_{\boldsymbol{q}} \quad \forall j, k = 1, ..., d$. Die Lie-Klammer jeder Kombination von Vektorfeldern muss wieder als Linearkombination dieser Vektorfelder darstellen lassen.

2.7 Steuerbarkeit und Erreichbarkeit nichtlinearer Systeme

Lokal steuerbar
Lokal steuerbar am Punkt $\boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{M}$ wenn eine offene Umgebung V um $\boldsymbol{x}_1$ existiert, sodass für alle $\boldsymbol{x}_2 \in V$ eine Zeit τ und ein $\boldsymbol{u}$ so existieren, dass $\boldsymbol{x}(\tau) = \Phi_\tau(\boldsymbol{x}_1)$.
Global steuerbar
Wie lokal, nur für $\boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{M}$.
Einerseits: Steuerbarkeit um eine Ruhelage bzw. AP linearisierte System impliziert die lokale Steuerbarkeit des NL Systems.
Andererseits: Linearisierung eines NL Systems kann zum Verlust der Steuerbarkeit führen (z.B. kin. Fahrzeugmodell)

2.7.1 Nichtlineare Systeme ohne Driftterm

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}) u_j$$

Genau dann lokal steuerbar um $\boldsymbol{x}_0$, wenn die Steuerbarkeitsdistribution

$$\Delta_S(\boldsymbol{x}) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m, [\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j], [\boldsymbol{g}_i, [\boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k]], \cdots\}$$

mit $i, j, k, ... = 1, ..., m$ die Bedingung $\dim(\Delta_S(\boldsymbol{x})) = n$ erfüllt.

2.7.2 Nichtlineare Systeme mit Driftterm

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}) u_j$$

Lokale Erreichbarkeit
Das System ist lokal erreichbar am Punkt $\boldsymbol{x}_1$, wenn eine Umgebung V um $\boldsymbol{x}_1$, so dass für alle $\boldsymbol{x}_2 \in V$ eine Zeit τ und ein $\boldsymbol{u}$ existieren, dass gilt $\boldsymbol{x}(\tau) = \Phi_\tau(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{x}_2$. Genau dann lokal erreichbar um $\boldsymbol{x}_0$, wenn die Erreichbarkeitsdistribution

$$\Delta_E(\boldsymbol{x}) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m, [\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j], [\boldsymbol{g}_i, [\boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k]], \cdots\}$$

mit $i, j, k... = 0, ..., m$ und $\boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ die Bedingung $\dim(\Delta_E(\boldsymbol{x})) = n$.

Lokale Erreichbarkeit schwächere Eigenschaft als die lokale Steuerbarkeit.

3 Exakte Linearisierung und Flachheit

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}) u_j$$
$$y_j = h_j(\boldsymbol{x})$$

mit glatten Vektorfeldern $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}_i \in \mathcal{TM}$ und glatten Funktionen $h_i(\boldsymbol{x})$.

3.1 Exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung für Eingrößensysteme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) u$$
$$y = h(\boldsymbol{x})$$

3.1.1 Relativer Grad

Zeitliche Änderung des Ausgangs als lineares System mit neuem Eingang $\dot{y} = v$ mit der Zustandsrückführung:

$$u = \frac{-L_{\boldsymbol{f}} h(\boldsymbol{x}) + v}{L_{\boldsymbol{g}} h(\boldsymbol{x})}$$

Definition
Das System hat den relativen Grad r an der Stelle $\bar{\boldsymbol{x}}$ wenn **(i)** $L_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}}^k h(\boldsymbol{x}) = 0$ für $k = 0, ..., r-2$ und **(ii)** $L_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}}^{r-1} h(\bar{\boldsymbol{x}}) \neq 0$.
Existieren Punkte $\boldsymbol{x}$ sodass $L_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}}^{r-1} h(\boldsymbol{x}) = 0$, so ist der RG nicht wohl definiert.
Differenziere den Ausgang so oft, bis der Eingang erstmalig explizit auftritt.
Relativer Grad eines LTI Eingrößensystems entspricht dem Differenzgrad von Zähler- und Nennerpolynom der entsprechenden Übertragungsfunktion (Laurent-Reihe).

3.1.2 Byrnes-Isidori-Normalform

Kette von Differentiationen aus RG Def.
$\xi_1 = y, ..., \xi_r = y^{(r-1)}$ führt auf

$$y^{(r)} = L_{\boldsymbol{f}}^r h(\boldsymbol{x}) + L_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}}^{r-1} h(\boldsymbol{x}) u$$
$$\Leftrightarrow u = \frac{-L_{\boldsymbol{f}}^r h(\boldsymbol{x}) + v}{L_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}}^{r-1} h(\boldsymbol{x})} \quad \text{mit } y^{(r)} = v$$

lineares E/A Verhalten in Form einer Integratorkette der Länge r.
Zustandstransformation auf Byrnes-Isidori-Normalform

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_r \\ \hline \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-r} \end{array}\right] = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \left[\begin{array}{c} h(\boldsymbol{x}) \\ L_{\boldsymbol{f}} h(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ L_{\boldsymbol{f}}^{r-1} h(\boldsymbol{x}) \\ \hline \Phi_{r+1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \Phi_n(\boldsymbol{x}) \end{array}\right]$$

Es kann $\Phi_{r+1}, ..., \Phi_n$ so gewählt werden, dass $L_{\boldsymbol{g}} \Phi_k(\boldsymbol{x}) = 0 = q_k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \quad k = r+1, ..., n$.
Diffeomorphismus: $\Phi^{-1}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}$ (zumindest lokal)

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_r = a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u \end{cases}$$
$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\eta}_1 = p_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + q_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u \\ \dot{\eta}_2 = p_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + q_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{n-r} = p_{n-r}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + q_{n-r}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u \end{cases}$$
$$y = \xi_1$$

mit

$$a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = L_{\boldsymbol{f}}^r h \circ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{z})$$
$$b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = L_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}}^{r-1} h \circ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{z})$$
$$p_k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = L_{\boldsymbol{f}} \Phi_{r+k} \circ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{z})$$
$$q_k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = L_{\boldsymbol{g}} \Phi_{r+k} \circ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{z}) \qquad k = 1, ..., n-r$$

Exakte E/A-Linearisierung

$$u = \frac{-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + v}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}$$
$$v = y^{*(r)} - \sum_{j=0}^{r-1} p_j \left(y^{(j)} - y^{*(j)} \right)$$

3.1.3 Nulldynamik

Wie muss $\boldsymbol{x}_0$ und $u(t)$ gewählt werden, damit der Ausgang $y(t)$ $\forall t$ identisch Null ist.

Damit $\dot{\xi}_r = 0$, muss $0 = a(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}) + b(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})u$ bzw. $u = -\frac{a(\mathbf{0},\boldsymbol{\eta})}{b(\mathbf{0},\boldsymbol{\eta})}$ gelten und es ergibt sich die **Nulldynamik**:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{p}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})$$

Stabilität der Nulldynamik
Stabilität der Nulldynamik ist entscheidend für die Anwendung der Exakten E/A-Linearisierung.
Stbilisierung mit der Exakten E/A-Lin.
Ist die Nulldynamik des Systems lokal asymptotisch (expon.) stabil, dann stabiliert das nl Regelgesetz:

$$u = \frac{1}{L_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}}^{r-1} h(\boldsymbol{x})} \left(-L_{\boldsymbol{f}}^{r} h(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=0}^{r-1} p_j L_{\boldsymbol{f}}^{j} h(\boldsymbol{x}) \right)$$

mit p_j den Koeffizienten eines Hurwitz-Polynoms das System lokal asymptotisch (expon.).

3.2 Exakte Eingangs-/Zustandslinearisierung für Eingrößensysteme