NLR Cheat Cheetos (yumyum)

1 LTV Systeme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = C(t)\boldsymbol{x} + D(t)\boldsymbol{u}$$

1.1 Transitionsmatrix und Lösung der Zustandsdifferenzialgleichung

Lösung für $\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$ in der Form $\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t,t_0)\boldsymbol{x}_0$ mit Transitionsmatrix $\Phi(t,t_0)$ aus der Peano-Baker-Reihe.
Eigenschaften der Transitionsmatrix:
Anfangswert: $\Phi(t_0,t_0) = E$, Produkteigenschaft: $\Phi(t_2,t_0) = \Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0)$, Invertierbarkeit: $\Phi^{-1}(t,t_0) = \Phi(t_0,t)$, Differenzierbarkeit: $\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$, Determinante: $\det\Phi(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t \mathrm{tr}A(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$.
Eigenwerte von $A(t)$ geben keine Aussage über Stabilität.

1.1.1 Spezialfälle geschlossener Lösungen

$\dot{x} = a(t)x$ mit Lösung $x = \exp\left(\int_{t_0}^t a(\tau)\mathrm{d}\tau\right)x_0$. Bei $\dim\boldsymbol{x} > 1$ und $A(t)A(\tau) = A(\tau)A(t)$ dann gilt $\Phi(t,\tau) = \exp\left(\int_\tau^t A(s)\mathrm{d}s\right)$

1.1.2 Periodische Matrizen

Für $\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$ mit $A(t) = A(t+\omega)$ dann gilt $\Phi(t,\tau) = P(t,\tau)e^{R(t-\tau)}$ mit $P(t,\tau) = P(t+\omega,\tau)$ und $R = \mathrm{const.}$

1.1.3 Lösung der nicht-autonomen Zustandsdifferenzialgleichung

Lösung von

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = C(t)\boldsymbol{x} + D(t)\boldsymbol{u}$$

lautet

$$\boldsymbol{x} = \Phi(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t,\tau)B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$\boldsymbol{y} = C(t)\Phi(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau + D(t)\boldsymbol{u}$$

1.2 Zustandstransformationen und äquivalente Systemdarstellungen

Zustandstransformation $\boldsymbol{z} = V(t)\boldsymbol{x}$ mit Transformationsmatrix $V(t)$ regulär im betrachteten Zeitintervall und $\dot{V}(t)$ existiert und ist stetig im Intervall.

$$\dot{\boldsymbol{z}} = [\dot{V}(t) + V(t)A(t)]V^{-1}(t)\boldsymbol{z} + V(t)B(t)\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = C(t)V^{-1}(t)\boldsymbol{z}(t) + D(t)\boldsymbol{u}$$

$\boldsymbol{z} = V(t)\boldsymbol{x}$ ist eine Lyapunov-Transformation, falls $V(t)$ und $V^{-1}(t)$ $\forall t$ beschränkt sind. Dann folgt aus der exponentiellen Stabilität des einen Systems, die exponentielle Stabilität des jeweils anderen Systems.

1.3 Stabilität

$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$ ist stabil wenn $\|\Phi(t,t_0)\| \leq M$ mit $M = \mathrm{const.} \geq 0$. Das System ist asymptotisch stabil falls $\lim_{t\to\infty}\Phi(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 \to 0 \ \forall x_0$. Exponentiell stabil falls $\|\Phi(t,t_0)\| \leq Me^{-\omega(t-t_0)}$

1.4 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Steuerbar falls $\mathrm{rang}S(A(t),B(t)) = n$, mit

$$S(A(t),B(t)) = \begin{bmatrix} N_A^0 B(t) & N_A^1 B(t) & \cdots & N_A^{n-1}B(t)\end{bmatrix}$$

wobei $N_A^k B(t) = N_A(N_A^{k-1}B(t))$
$N_A^1 B(t) = -\dot{B}(t) + A(t)B(t)$, $\quad N_A^0 B(t) = B(t)$, also $A(t)$ und $B(t)$ müssen entsprechend $(n-2)$ bzw. $(n-1)$-fach stetig diff.bar sein.
Beobachtbar falls $\mathrm{rang}O(C(t),A(t)) = n$ mit

$$O(C(t),A(t)) = \begin{bmatrix} M_A^0 C(t) & M_A^1 C(t) & \cdots & M_A^{n-1}C(t)\end{bmatrix}^T$$

wobei $M_A^k C(t) = M_A(M_A^{k-1}C(t))$ und $M_A^1 C(t) = \dot{C}(t) + C(t)A(t)$.

1.5 Entwurf von Zustandsreglern

1.5.1 Eingrößensysteme

In SISO-RNF bringen über $V(t)$ mit Ansatz $z_1 = \boldsymbol{w}^T(t)\boldsymbol{x}$ und sukzessive Differentiation nach t. Eingangsgröße $\boldsymbol{u}$ trifft erst in $z_n(t)$ auf.

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} M_A^0\boldsymbol{w}^T(t) \\ \vdots \\ M_A^{n-1}\boldsymbol{w}^T(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = V(t)\boldsymbol{x}$$

$$V(t)\boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-1}(t)\end{bmatrix}$$

Lemma 2.2 besagt für $k \geq 0$:
$(M_A^0\boldsymbol{w}^T(t))\boldsymbol{v}(t) = 0, \cdots, (M_A^k\boldsymbol{w}^T(t))\boldsymbol{v}(t) = 0$ bzw. $\boldsymbol{w}^T(t)(N_A^0\boldsymbol{v}(t)) = 0, \cdots, \boldsymbol{w}^T(t)(N_A^k\boldsymbol{v}(t)) = 0$ und somit gilt:

$$\boldsymbol{w}^T(t) = \begin{bmatrix} 0 \cdots \tilde{b}_{n-1}(t)\end{bmatrix} S^{-1}(A(t),\boldsymbol{b}(t))$$

mit Freiheitsgrad $\tilde{b}_{n-1}(t)$.
Eigenwertvorgabe mit Ackermann-Formel
Mit $\tilde{\boldsymbol{a}} = -(M_A^n\boldsymbol{w}^T(t))V^{-1}(t)$ wähle $u = \frac{1}{\tilde{b}_{n-1}(t)}(\tilde{\boldsymbol{a}}(t)\boldsymbol{z} + v)$ mit neuem Eingang $v(t)$ als Integratorkette $\dot{z}_1 = z_2, \cdots, \dot{z}_n = v$ (Brunovsky-Normalform). Mit $p^*(\lambda) = \prod_{j=1}^n(\lambda - \lambda_j^*)$ als gewünschtes CharPoly wähle: $v = -p_0 z_1 - \cdots - p_{n-1}z_n$ ergibt $u = -\tilde{vk}^T(t)\boldsymbol{z}$. Es folgt für

$$\dot{\boldsymbol{z}} = (\tilde{A}(t) - \tilde{\boldsymbol{b}}(t)\tilde{\boldsymbol{k}}^T(t))\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{z}$$

1.5.2 Mehrgrößensysteme

Steuerbarkeitsindizes ρ_j einführen. Es gilt

$$S(A(t),B(t)) = \left[\boldsymbol{b}_1(t)\cdots\boldsymbol{b}_m(t)\,\middle|\,N_A^1\boldsymbol{b}_1(t)\cdots N_A^1\boldsymbol{b}_m(t)\,\middle|\,N_A^{n-1}\boldsymbol{b}_1(t)\cdots N_A^{n-1}\boldsymbol{b}_m(t)\right]$$

Reduzierte Steuerbarkeitsmatrix:

$$\bar{S}(A(t),B(t)) = \left[\boldsymbol{b}_1(t)\cdots N_A^{\rho_1-1}\boldsymbol{b}_1(t)\,\middle|\,\cdots\,\middle|\,\boldsymbol{b}_m(t)\cdots N_A^{\rho_m-1}\boldsymbol{b}_m(t)\right]$$

1.6 Entwurf von Zustandsbeobachtern

1.6.1 Eingrößensysteme

1.6.2 Mehrgrößensysteme

2 Analyse nichtlinearer Systeme

2.1 Fluss einer DGL

2.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung NLDGLSysteme

2.3 Zustandsraum nichtlinearer Systeme

2.3.1 Mannigfaltigkeiten

2.3.2 Tangentialraum und Vektorfeld

2.3.3 Zusammenhang zwischen Vektorfeld und Differenzialgleichung

2.4 Zustandstransformationen und Diffeomorphismen

2.5 Lie-Ableitung und Lie-Klammern

2.5.1 Lie-Ableitung

2.5.2 Lie-Klammer

2.6 Distributionen und Involutivität

2.7 Steuerbarkeit und Erreichbarkeit nichtlinearer Systeme

2.7.1 Nichtlineare Systeme ohne Driftterm

2.7.2 Nichtlineare Systeme mit Driftterm

3 Exakte Linearisierung und Flachheit

3.1 Exakte Eingangs-/Ausgangslinearisierung für Eingrößensysteme

3.1.1 Relativer Grad

3.1.2 Byrnes-Isidori-Normalform

3.1.3 Nulldynamik

3.2 Exakte Eingangs-/Zustandslinearisierung für Eingrößensysteme