Numerik Cheat Sheeto

1 Basics

1.1 Sortieren

1.2 FFT

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Allgemeine Aufgabenstellung

Geg.: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
Ges.: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

2.2 Dreiecksmatrizen

Untere Dreiecksmatrix $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und obere Dreiecksmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Reguläre/invertierbare/nicht-singuläre Matrix
Matrix $\mathbf{A}$ ist regulär, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$. Determinante einer ΔMatrix ist das Produkt ihrer Diagonalelemente. $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ sind regulär, wenn alle Diagonalelemente $\neq 0$.

Vorwärtseinsetzen

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

Rechenaufwand: n^2 AO
Um Speicher zu sparen $b_i \leftarrow y_i$.

---

for $j = 1 : n$
  $x_j \leftarrow b_j / l_{jj}$
  for $i = j + 1 : n$
    $b_i \leftarrow b_i - l_{ij} x_j$

Rückwärtseinsetzen

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$$

Rechenaufwand: n^2 AO
Um Speicher zu sparen $b_i \leftarrow x_i$.

---

for $j = n : 1$
  $x_j \leftarrow b_j / r_{jj}$
  for $i = 1 : j - 1$
    $b_i \leftarrow b_i - r_{ij} x_j$

2.3 LR-Zerlegung

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{L}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LR}$$

Ansatz:
Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{R}$ in Teilmatrizen $\mathbf{A}_{**}$, $\mathbf{A}_{*1}$, $\mathbf{A}_{1*}$, $\mathbf{L}_{**}$, $\mathbf{L}_{*1}$, $\mathbf{R}_{**}$, $\mathbf{R}_{1*}$ zerlegen.
Es folgen 4 Gleichungen aus $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11} r_{11} & & \\ \mathbf{A}_{*1} &= \mathbf{L}_{*1} r_{11} & &\Leftrightarrow \mathbf{L}_{*1} = \mathbf{A}_{*1}/r_{11} \\ \mathbf{A}_{1*} &= l_{11}\mathbf{R}_{1*} & &\Leftrightarrow \mathbf{R}_{1*} = \mathbf{A}_{1*} \\ \mathbf{A}_{**} &= \mathbf{L}_{*1}\mathbf{R}_{1*} + \mathbf{L}_{**}\mathbf{R}_{**} & & \end{aligned}$$

Per Def. $l_{11} = 1$ und damit $r_{11} = a_{11}$, sodass

$$\mathbf{A}_{**} - \mathbf{L}_{*1}\mathbf{R}_{1*} = \mathbf{L}_{**}\mathbf{R}_{**} \tag{1}$$

Praktische Umsetzung
Elemente von $\mathbf{A}$ überschreiben, sodass:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ l_{21} & r_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & r_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Kriterium
Sei $\mathbf{A}$ regulär, $\mathbf{A}$ besitzt eine LR-Zerlegung $\Leftrightarrow$ Alle Hauptuntermatrizen regulär.

Modellproblem: Bandmatrix
Irgendwas bzgl Effizienz.

LR-Decomp
Aufwand: *kubisch*
$\downarrow$ Aufwand: Nur 1x für jede Matrix betreiben. Sobald LR-Decomp vorliegt nur noch *quadratischer* Aufwand
$\Downarrow$ Aufwand: Tridiagonalmatrix. Erster Schritt mit 3 AOPs. Restmatrix bleibt tridiagonal. Aufwand $3n + 6n$ für R-und F-Einsetzen.

---

for $k = 1 : n$
  for $i = k + 1 : n$
    $a_{ik} \leftarrow a_{ik} / a_{kk}$
    for $j = k + 1 : n$
      $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$

Problem der Existenz einer LR-Z
Falls $\mathbf{A}$ oder $\mathbf{A}_{**}$ eine 0 auf der Diagonalen hat, existiert keine LR-Zerlegung. Lösung: Permutiere die Zeilen von $\mathbf{A}$ so, dass das Ergebnis eine LR-Z besitzt.

Permutationsmatrix
Sei $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Falls in jeder Zeile und Spalte von $\mathbf{P}$ genau ein Eintrag 1 und alle anderen 0, dann ist $\mathbf{P}$ eine Permutationsmatrix. $\mathbf{P}$ ist orthogonal. Ein Produkt zweier Permutationsmatrizen $\mathbf{PQ}$ ist auch eine Permutationsmatrix.

Permutation
Bijektive Abbildung $\pi : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$.

LR-Z mit Pivotsuche
$\mathbf{A}$ regulär. Es existiert $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sodass $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$ gilt.
Pivotisierung: Finde betragsmaximalstes Element in der aktuellen Spalte, welches unter dem aktuellen Diagonalelement von $\mathbf{A}$ liegt und tausche die aktuelle Zeile mit der Zeile in der das betragsmaximalste Element ist, mit Hilfe von $\mathbf{P}$. $a_{11} \neq 0$, da betragsgrößtes Element.

Lösen eines Gleichungssystems mit Pivotsuche
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{PAx} = \mathbf{Pb} \Leftrightarrow \mathbf{LRx} = \mathbf{Pb}$.
1.) $\mathbf{Ly} = \tilde{\mathbf{b}}$ 2.) $\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$

LR PIVOT

---

for $k = 1 : n$
  $i_* \leftarrow k$ // Finde max. Element
  for $i = k + 1 : n$
    if $|a_{ik}| > |a_{i_* k}|$: $i_* \leftarrow i$
  $p_k \leftarrow i_*$
  for $j = 1 : n$ // Tausche Zeilen
    $\gamma \leftarrow a_{kj}$, $a_{kj} \leftarrow a_{i_* j}$, $a_{i_* j} \leftarrow \gamma$
  for $i = k + 1 : n$
    $a_{ik} \leftarrow a_{ik} / a_{kk}$
    for $j = k + 1 : n$
      $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$

2.4 Fehlerverstärkung

2.5 QR-Zerlegung

2.6 Ausgleichsprobleme

3 Nichtlineare Gleichungssysteme

3.1 Bisektionsverfahren

3.2 Allgemeine Fixpunktiterationen

3.3 Newton-Verfahren

4 Eigenwertprobleme

4.1 Vektoriteration

4.2 Inverse Iteration

4.3 Orthogonale Iteration

4.4 QR-Iteration

4.5 Praktische QR-Iteration

5 Approximation von Funktionen

5.1 Polynominterpolation

5.2 Neville-Aitken-Verfahren

5.3 Newtons dividierte Differenzen

5.4 Approximation von Funktionen

6 Numerische Integration

6.1 Quadraturformeln

6.2 Fehleranalyse