

Numerik Cheat Sheet

1 Basics

1.1 Sortieren

1.2 FFT

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Allgemeine Aufgabenstellung

Geg.: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

Ges.: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

2.2 Dreiecksmatrizen

Untere Dreiecksmatrix $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und obere Dreiecksmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

REGULÄRE/INVERTIERBARE/NICHT-SINGULÄRE MATRIX
Matrix \mathbf{A} ist regulär, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$. Determinante einer Δ Matrix ist das Produkt ihrer Diagonalelemente. \mathbf{L} und \mathbf{R} sind regulär, wenn alle Diagonalelemente $\neq 0$.

VORWÄRTSEINSETZEN

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

Rechenaufwand: n^2 AO

Um Speicher zu sparen $b_i \leftarrow y_i$.

```
for j = 1 : n
    x_j ← b_j / l_jj
    for i = j + 1 : n
        b_i ← b_i - l_ij x_j
```

RÜCKWÄRTSEINSETZEN

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$$

Rechenaufwand: n^2 AO

Um Speicher zu sparen $b_i \leftarrow x_i$.

```
for j = n : 1
    x_j ← b_j / r_jj
    for i = 1 : j - 1
        b_i ← b_i - r_ij x_j
```

2.3 LR-Zerlegung

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{L}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LR}$$

Ansatz:

Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{L} , \mathbf{R} in Teilmatrizen \mathbf{A}_{**} , \mathbf{A}_{*1} , \mathbf{A}_{1*} , \mathbf{L}_{**} , \mathbf{L}_{*1} , \mathbf{R}_{**} , \mathbf{R}_{1*} zerlegen.

Es folgen 4 Gleichungen aus $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11} r_{11} \\ \mathbf{A}_{*1} &= \mathbf{L}_{*1} r_{11} && \Leftrightarrow \mathbf{L}_{*1} = \mathbf{A}_{*1} / r_{11} \\ \mathbf{A}_{1*} &= l_{11} \mathbf{R}_{1*} && \Leftrightarrow \mathbf{R}_{1*} = \mathbf{A}_{1*} \\ \mathbf{A}_{**} &= \mathbf{L}_{*1} \mathbf{R}_{1*} + \mathbf{L}_{**} \mathbf{R}_{**} \end{aligned}$$

Per Def. $l_{11} = 1$ und damit $r_{11} = a_{11}$, sodass

$$\mathbf{A}_{**} - \mathbf{L}_{*1} \mathbf{R}_{1*} = \mathbf{L}_{**} \mathbf{R}_{**} \quad (1)$$

PRAKTISCHE UMSETZUNG

Elemente von \mathbf{A} überschreiben, sodass:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ l_{21} & r_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & r_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

2.4 Fehlerverstärkung

2.5 QR-Zerlegung

2.6 Ausgleichsprobleme

3 Nichtlineare Gleichungssysteme

3.1 Bisektionsverfahren

3.2 Allgemeine Fixpunktiterationen

3.3 Newton-Verfahren

4 Eigenwertprobleme

4.1 Vektoriteration

4.2 Inverse Iteration

4.3 Orthogonale Iteration

4.4 QR-Iteration

4.5 Praktische QR-Iteration

5 Approximation von Funktionen

5.1 Polynominterpolation

5.2 Neville-Aitken-Verfahren

5.3 Newtons dividierte Differenzen

5.4 Approximation von Funktionen

6 Numerische Integration

6.1 Quadraturformeln

6.2 Fehleranalyse

