Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 3

Merikan Koyun & Julian Andrej

May 16, 2014

T4. Spaltensummennorm

Es soll gezeigt werden, dass $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ gilt, wobei $\|\cdot\|_1$ die induzierte Matrixnorm ist. Es gilt ausserdem $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
Zunächst wird gezeigt, dass gilt

$$\|Ax\|_1 \leq m\|x\|_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad m = \|A\|_1 \tag{1}$$

Wir beginnen mit der linken Seite der Ungleichung. Da das Produkt Ax einem Vektor entspricht, so muss auch $\|\cdot\|_1$ für Ax definiert sein. Wir definieren uns die i-te Zeile der Matrix A als a_{i*}. Es gilt also:
Die Ungleichung lässt sich also schreiben als:

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i*}x| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \right| \ \leq \ m \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

Trivialerweise muss gelten, dass:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \sum_{j=1}^{n} |x_j| \tag{2}$$

Es folgt die Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \tag{3}$$

Es lässt sich unmittelbar erkennen, dass die linke Ungleichung zu einer Gleichheit wird für $a_{ij} \geq 0$ und $x_i \geq 0$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, da die Beträge gestrichen werden können. Sobald $a_{ij} < 0$ oder $x_i < 0$ für ein beliebiges $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt die Ungleichung.

Um nun die Rückrichtung zu beweisen genügt es einen Vektor zu finden, der (1) mit Gleichheit erfüllt, da dann die Ungleichheit aus (1) wegfällt. Wir wählen $x = e_k$ und wählen k so, dass $\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$ maximal wird, wobei $e_k \in \mathbb{R}^n$ der k-te Einheitsvektor ist. Es gilt offensichtlich $\|e_k\|_1 = 1$. Somit lässt sich die linke Seite von (1) schreiben als:

$$\|Ae_k\|_1 = \|A_{*k}\|_1 \tag{4}$$

Wir erhalten also eine Spalte aus der Matrix A, die maximal ist. Für die Spalte lässt sich wiederum $\|\cdot\|_1$ anwenden, da wir einen Spaltenvektor haben. Es gilt also:

$$\|A_{*k}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \tag{5}$$

woraus sich mit $\|e_k\|_1 = 1$ für (1) Gleichheit ergibt, da wir k so gewählt haben, dass die Spalte maximal ist:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{6}$$

Somit ist die Behauptung bewiesen. ■

T5. QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen an einem Beispiel

a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 7 \\ -4 & -13 & -1 \\ 0 & -20 & -35 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Wir wollen den Eintrag $a_{21} = -4$ Null setzen. Dazu wenden wir eine Givens-Rotation Q_{12} auf A an. Wir wählen $a = 3$ und $b = -4$. Wir berechnen uns die Einträge von Q:

$$c = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$s = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Q ist definiert als:

$$Q = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \tag{8}$$

Wir wollen Q_{12} bestimmen:

$$Q_{12} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Nun berechnen wir:

$$A' = Q_{12}A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & -15 & 5 \\ 0 & -20 & -35 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Da der Eintrag $a'_{31} = 0$ ist, können wir diesen überspringen und den Eintrag $a'_{32} = -20$ Null setzen. Dazu wenden wir die Givens-Rotation Q_{23} an. Wir setzen $a = -15$ und $b = -20$ und berechnen Q_{23} analog zu oben:

$$Q_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Anschliessend wird die Rotation auf A' angewendet und ergibt:

$$R = Q_{23}A' = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 25 & 25 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Q lässt sich nun einfach folgendermassen berechnen:

$$Q = (Q_{23}Q_{12})^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Zur Probe wird QR gerechnet:

$$QR = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 7 \\ -4 & -13 & -1 \\ 0 & -20 & -35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 7 \\ -4 & -13 & -1 \\ 0 & -20 & -35 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Dies entspricht A und somit ist die QR-Zerlegung richtig.

b) Gegeben ist das Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Es wird zunächst z bestimmt.

$$z = Q^T b = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{18}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Nun kann $Rx = z$ gelöst werden mittels Rückwärtseinsetzen:

$$Q \tag{17}$$