Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 5

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 1, 2014

T8.) Beispiel einer nichtlinearen Gleichung

Mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes soll gezeigt werden, dass es genau ein $x \in [0, \pi]$ gibt, welches

$$\frac{1}{5} \sin(x) \cos(x) = \frac{2x - 3}{6} \tag{1}$$

löst.
Falls ein Fixpunkt existiert, gilt $\Phi(x) = x$. Umgeformt ergibt sich also:

$$\Phi(x) = \frac{3}{5} \sin(x) \cos(x) + \frac{3}{2} \tag{2}$$

Laut Fixpunktsatz von Banach gilt für eine Iteration Φ auf einer abgeschlossenen Menge $U \in R^n$ und $x, y \in U$:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \text{mit } L \in [0, 1) \tag{3}$$

Ist dies erfüllt, dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt und die Fixpunktiteration iteriert für beliebige Startwerte $x \in U$.
Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt:

$$\Phi(x) - \Phi(y) \leq \Phi'(\eta)x - y \tag{4}$$

Kombiniert man obige Ansätze, so ergibt sich:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\eta)||x - y| \tag{5}$$

mit

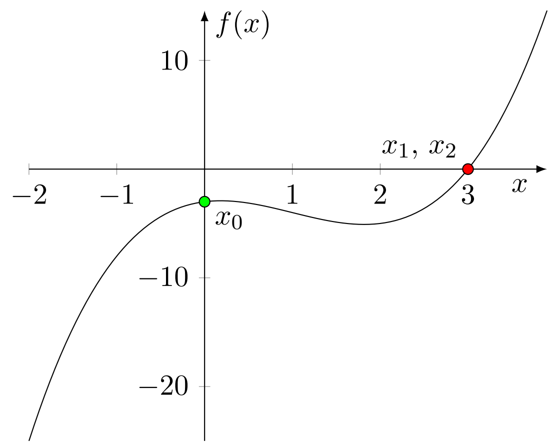
$$|\Phi'(\eta)| = \left|\frac{3}{5} \cos(2\eta)\right| \leq 0.6 \quad \forall \eta \tag{6}$$

Somit lässt sich $L = 0.6$ setzen und erfüllt die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes. Somit ist Φ eine Kontraktion und die Gleichung (1) besitzt einen Fixpunkt.

T9.) Newton-Verfahren an einem Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$. Die Ableitung lautet $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$. Die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens ist wie folgt definiert:

$$x \to x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{3x^2 - 6x + 1} \tag{7}$$



Visualisierung für $x_0 = 0$

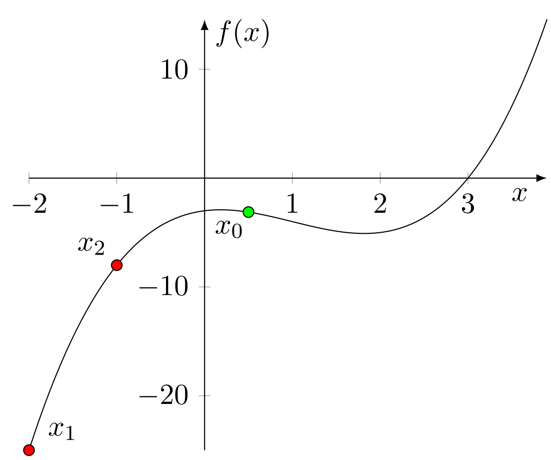
Bei $x_0 = 0$ ergeben sich also folgende Iterationsschritte:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 3$$

Es lässt sich erkennen, dass das Newton-Verfahren in einem Schritt zu der Nullstelle konvergiert. Die schnelle Konvergenz ausgehend von diesem Startpunkts lässt sich anhand der Tangente in diesem Punkt begründen. Diese geht direkt durch den Punkt $(3, 0)$, der offensichtlich eine Nullstelle ist und somit konvergiert das Verfahren in einem Schritt.

Bei $x_0 = 0.5$ ergeben sich folgende Iterationsschritte:

$$x_0 = 0.5, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -1$$

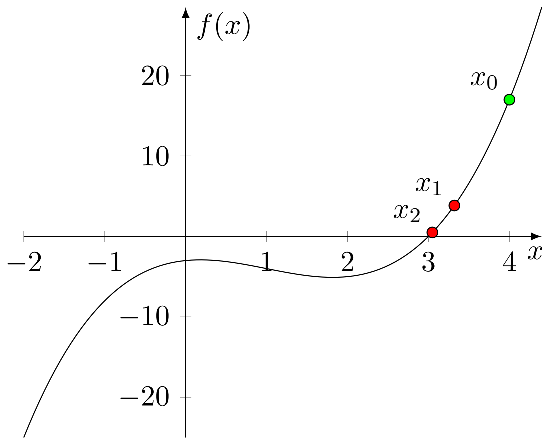


Visualisierung für $x_0 = 0.5$

Hier lässt sich erkennen, dass sich das Newton-Verfahren von der gesuchten Nullstelle entfernt, da die Tangente am Startpunkt eine negative Steigung aufweist, und sich somit der neue Iterationsschritt in negative x-Richtung bewegt. Nach diesem Schritt zeigt die Tangente nun wieder in Richtung der Nullstelle, ähnlich wie bei $x_0 = 0$. Das Verfahren nähert sich also wieder der Nullstelle und wird schlussendlich auch wieder zur Nullstelle konvergieren, jedoch mit einer wesentlich höheren Anzahl an Iterationsschritten als im Fall zuvor.

Bei $x_0 = 4$ ergeben sich folgende Iterationsschritte:

$$x_0 = 4, \quad x_1 = 3.32, \quad x_2 = 3.05$$



Visualisierung für $x_0 = 4$

Das Newton-Verfahren konvergiert fast vollständig in zwei Schritten (quadratische Konvergenz).