Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 2

Merikan Koyun & Julian Andrej

May 6, 2014

T2. LR-Zerlegung an einem Beispiel

a)

$$\begin{array}{|cccc|cccc|}
\cline{5-8}
\multicolumn{1}{c}{} & & & & 2 & -1 & -3 & 3 \\
\multicolumn{1}{c}{} & & & & 0 & 2 & 3 & -5 \\
\multicolumn{1}{c}{} & & & & 0 & 0 & 2 & 7 \\
\multicolumn{1}{c}{} & & & & 0 & 0 & 0 & -46 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 & 3 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 1 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 6 & 1 & -1 & 6 \\
-1 & -3 & 5 & 1 & -2 & -5 & 4 & 1 \\
\hline
\end{array} \tag{1}$$

$r_{1j} = a_{1j}, \quad \forall j \in [1, 4]$

$$1 \cdot r_{11} \overset{!}{=} 2 \to r_{11} = 2 \tag{2}$$

$$l_{21} r_{11} \overset{!}{=} 4 \to l_{21} = 2 \tag{3}$$

$$l_{31} r_{11} \overset{!}{=} 6 \to l_{31} = 3 \tag{4}$$

$$l_{41} r_{11} \overset{!}{=} -2 \to l_{41} = -1 \tag{5}$$

$$2 \cdot -1 + 1 \cdot r_{22} \overset{!}{=} 0 \to r_{22} = 2 \tag{6}$$

$$2 \cdot -3 + 1 \cdot r_{23} \overset{!}{=} -3 \to r_{23} = 3 \tag{7}$$

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot r_{24} \overset{!}{=} 1 \to r_{24} = -5 \tag{8}$$

$$3 \cdot -1 + l_{32} \cdot 2 \overset{!}{=} 1 \to l_{32} = 2 \tag{9}$$

$$-1 \cdot -1 + l_{42} \cdot 2 \overset{!}{=} -5 \to l_{42} = -3 \tag{10}$$

$$3 \cdot -3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot r_{33} \overset{!}{=} -1 \to r_{33} = 2 \tag{11}$$

$$3 \cdot 3 + 2 \cdot -5 + 1 \cdot r_{34} \overset{!}{=} 5 \to r_{34} = 7 \tag{12}$$

$$-1 \cdot -3 + -3 \cdot 3 + l_{43} \cdot 2 \overset{!}{=} 4 \to l_{43} = 5 \tag{13}$$

$$-1 \cdot 3 + -3 \cdot -5 + 5 \cdot 7 + 1 \cdot r_{44} \overset{!}{=} 1 \to r_{44} = -46 \tag{14}$$

b) Gesucht wird x in $Ax = b$, für

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -16 \\ -12 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Vorwärtseinsetzen Es gilt:

$$Ly = b \tag{16}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -16 \\ -12 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Forwärtseinsetzen ergibt folgende Berechnungen:

$$1 \cdot y_1 = 1 \rightarrow y_1 = 1 \tag{18}$$

$$2 + y_2 = -8 \rightarrow y_2 = -10 \tag{19}$$

$$3 - 20 + y_3 = -16 \rightarrow y_3 = 1 \tag{20}$$

$$-1 + 30 + 5 + y_4 = -12 \rightarrow y_4 = -46 \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

Durch Rückwärtseinsetzen kann x über die Beziehung $y = Rx$ berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 1 \\ -46 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt folgende Berechnungen:

$$1 \cdot x_4 = 1 \rightarrow x_4 = 1 \tag{24}$$

$$2x_3 + 7 = -1 \rightarrow x_3 = -3 \tag{25}$$

$$2x_2 - 9 - 5 = -10 \rightarrow x_2 = 2 \tag{26}$$

$$2x_1 - 2 + 9 + 3 = 1 \rightarrow x_1 = -4.5 \tag{27}$$

T3. Hauptuntermatrizen und LR-Zerlegung

Gegeben sei eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Hauptuntermatrix H_m ist regulär $\forall m \in \{1, ..., n\}$. Zeige, dass $\boldsymbol{A}$ eine LR-Zerlegung besitzt.

Induktionsanfang: $n = 1$
Es folgt zwangsweise $l_{11} = 1$ und $r_{11} = a_{11}$.

Induktionsvoraussetzung:
Die Behauptung gilt für alle Matrizen $\mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$

Induktionsschritt: $n > 1$
Es gilt aus der Bedigung dass alle H_m regulär sind. $\boldsymbol{A}$ wird in geeignete Blöcke zerlegt:

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{array}\right) \tag{28}$$

wobei

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{29}$$

die obere Hauptuntermatrix H_{n-1} ist. Die verbleibenden Blöcke werden wie folgt bezeichnet:

$$A^{(u)} = \begin{pmatrix} a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix} \tag{31}$$

Laut Voraussetzung sind die Hauptuntermatrizen H_m regulär, also $\det(H_m) \neq 0$. Da laut IB $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{R}$, folgt

$$\det(\tilde{A}) = \det(\tilde{L}\tilde{R}) = \det(\tilde{L})\det(\tilde{R}) \tag{32}$$

und somit müssen auch $\det(\tilde{L}) \neq 0$ und $\det(\tilde{R}) \neq 0$ gelten und damit sind $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ ebenfalls regulär.
Analog zu Abschnitt 2.4 in der Vorlesung gilt:

$$L = \begin{pmatrix} L_{**} & \\ L_{n*} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R = \begin{pmatrix} R_{**} & R_{*n} \\ & r_{nn} \end{pmatrix} \tag{33}$$

wobei r_{nn} analog zu T2, da $l_{11} = 1$:

$$r_{nn} = a_{nn} - L_{n*}R_{*n} \tag{34}$$

Ausserdem gilt für die Blockmatrizen:

$$A_{n*} = L_{n*}R_{**} \text{ bzw. } A_{*n} = L_{**}R_{*n} \tag{35}$$

Mit Hilfe vorangegangener Gleichungen folgt also:

$$LR = \begin{pmatrix} L_{**}R_{**} & L_{**}R_{*n} \\ L_{n*}R_{**} & L_{n*}R_{*n} + l_{nn}r_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{**} & A_{*n} \\ A_{n*} & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{36}$$

somit lässt sich direkt erkennen, dass $LR = A$ gilt und somit sind L und R eine LR-Zerlegung. ∎