

# Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 7

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 7, 2014

## T12. Eigenwerte und Eigenvektoren des eindimensionalen Modellproblems

Es seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ,  $h := \frac{1}{n+1}$ :

$$A = h^{-2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Definiere den Vektor  $e^k \in \mathbb{R}^n$

$$e_j^k := \sin(\pi j k h) \text{ für alle } j, k \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

und

$$\lambda_k := 4h^{-2} \sin^2(\pi k h / 2) \text{ für alle } k \in \{1, \dots, n\}. \quad (3)$$

Zeige, dass

$$Ae^k = \lambda_k e^k \quad (4)$$

gilt.

Wir betrachten eine beliebige  $j$ -te Komponente von  $(Ae^k)_j$ . Mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 2h^{-2} & \text{falls } i = j \\ -h^{-2} & \text{falls } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(Ae^k)_j &= h^{-2}(2e_j^k - e_{j-1}^k - e_{j+1}^k) \\
&= h^{-2}(2\sin(\pi jkh) - \sin(\pi(j-1)kh) - \sin(\pi(j+1)kh)) \\
&= h^{-2}(2\sin(\pi jkh) - \sin(\pi jkh - \pi kh) - \sin(\pi jkh + \pi kh)) \\
&\stackrel{(1)}{=} h^{-2}(2\sin(\pi jkh) - \sin(\pi jkh)\cos(-\pi kh) - \cos(\pi jkh)\sin(-\pi kh) \\
&\quad - \sin(\pi jkh)\cos(\pi kh) - \cos(\pi jkh)\sin(\pi kh)) \\
&\stackrel{(2)}{=} h^{-2}(2\sin(\pi jkh) - 2\sin(\pi jkh)\cos(\pi kh)) \\
&= h^{-2}\sin(\pi jkh)(2 - 2\cos(\pi kh)) \\
&\stackrel{(3)}{=} h^{-2}\sin(\pi jkh)4\sin^2(\pi kh/2) \\
&= \underbrace{4h^{-2}\sin^2(\pi kh/2)}_{\lambda_k} \underbrace{\sin(\pi jkh)}_{e_j^k} = \lambda_k e_j^k
\end{aligned}$$

mit folgenden Theoremen:

$$\begin{aligned}
(1): \quad & \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
(2): \quad & \sin(-x) = -\sin(x) \text{ und } \cos(-x) = \cos(x) \\
(3): \quad & 2 - 2\cos(x) = 4\sin^2(x/2)
\end{aligned}$$

## T13. Hauptachsentransformation