Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 5

Merikan Koyun & Julian Andrej

May 31, 2014

T8.) Beispiel einer nichtlinearen Gleichung

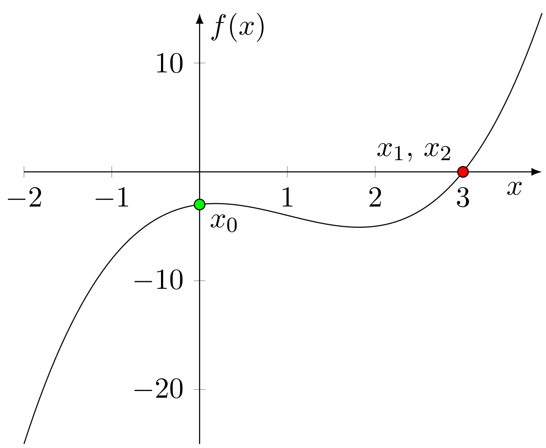
T9.) Newton-Verfahren an einem Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$. Die Ableitung lautet $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$. Die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens ist wie folgt definiert:

$$x \to x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{3x^2 - 6x + 1} \tag{1}$$

Bei $x_0 = 0$ ergeben sich also folgende Iterationsschritte:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 3$$

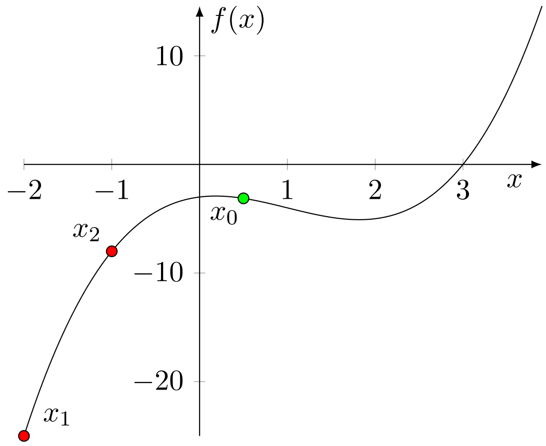


Visualisierung für $x_0 = 0$

Es lässt sich erkennen, dass das Newton-Verfahren in einem Schritt zu der Nullstelle konvergiert. Die schnelle Konvergenz ausgehend von diesem Startpunkts lässt sich anhand der Tangente in diesem Punkt begründen. Diese geht direkt durch den Punkt $(3, 0)$, der offensichtlich eine Nullstelle ist und somit konvergiert das Verfahren in einem Schritt.

Bei $x_0 = 0.5$ ergeben sich folgende Iterationsschritte:

$$x_0 = 0.5, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -1$$

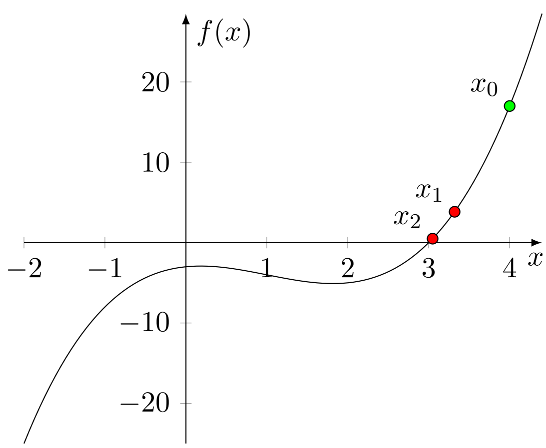


Visualisierung für $x_0 = 0.5$

Hier lässt sich erkennen, dass sich das Newton-Verfahren von der gesuchten Nullstelle entfernt, da die Tangente am Startpunkt eine negative Steigung aufweist, und sich somit der neue Iterationsschritt in negative x-Richtung bewegt. Nach diesem Schritt zeigt die Tangente nun wieder in Richtung der Nullstelle, ähnlich wie bei $x_0 = 0$. Das Verfahren nähert sich also wieder der Nullstelle und wird schlussendlich auch wieder zur Nullstelle konvergieren, jedoch mit einer wesentlich höheren Anzahl an Iterationsschritten als im Fall zuvor.

Bei $x_0 = 4$ ergeben sich folgende Iterationsschritte:

$$x_0 = 4, \quad x_1 = 3.32, \quad x_2 = 3.05$$



Visualisierung für $x_0 = 4$

Das Newton-Verfahren konvergiert fast vollständig in zwei Schritten (quadratische Konvergenz).