

# Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 8

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 22, 2014

## T14. Eigenwerte und orthogonale Iteration

Es seien  $n, k \in \mathbb{N}, n > k$  und  $A \in \mathbb{R}^{(n \times n)}, Q \in \mathbb{R}^{(n \times k)}$  orthogonal. Es sei  $\Lambda := Q^* A Q$  mit Eigenwert  $\lambda$  und zugehörigem Eigenvektor  $x \in \mathbb{R}^k$ , sodass  $\Lambda x = \lambda x$ . Es sei  $y := Qx$ . Zu zeigen:

$$\frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|y\|_2} \leq \|Q\Lambda - AQ\|_2 \quad (1)$$

Es gilt  $\Lambda \in \mathbb{R}^{(k \times k)}$ . Wir beginnen zunächst mit der linken Seite der Ungleichung. Da  $Q$  orthogonal ist, gilt  $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$  für alle  $x \in \mathbb{R}^k$ , woraus folgt:

$$\frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|y\|_2} = \frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|Qx\|_2} = \frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|x\|_2}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|x\|_2} &\leq \|Q\Lambda - AQ\|_2 \\ &\leq \|Q(Q^* A Q) - AQ\|_2 \\ &\leq \|(QQ^*)AQ - AQ\|_2 \\ &\leq \|AQ - AQ\|_2 \\ &\leq \|0\|_2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Es folgt somit, dass  $\frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|x\|_2} = 0$  sein muss. Der Nenner darf nicht Null sein, somit muss gelten  $\|Ay - \lambda y\|_2 = 0$ . Mit der Definitheit der euklidischen Norm folgt  $Ay - \lambda y = 0$ . Mit  $y = Qx$  folgt:

$$AQx - \lambda Qx = 0 \quad (2)$$

Wir multiplizieren mit  $Q^*$  auf beiden Seiten und erhalten, unter Ausnutzung der Orthogonalität:

$$\begin{aligned} AQx - \lambda Qx &= Q^* AQx - \lambda Q^* Qx \\ &= (Q^* A Q)x - \lambda (Q^* Q)x \\ &= \Lambda x - \lambda x = 0 \\ &\Rightarrow \Lambda x = \lambda x \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## T15. Wilkinson-Shift

Gegeben:

$$S = \begin{pmatrix} a_{n-1,n-1}^{(m)} & a_{n-1,n}^{(m)} \\ a_{n,n-1}^{(m)} & a_{n,n}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Wir suchen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$p_S(\lambda) = |\lambda I - S| \quad (4)$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \lambda - a_{n-1,n-1}^{(m)} & -a_{n-1,n}^{(m)} \\ -a_{n,n-1}^{(m)} & \lambda - a_{n,n}^{(m)} \end{pmatrix} \right| \quad (5)$$

$$= (\lambda - a_{n-1,n-1}^{(m)})(\lambda - a_{n,n}^{(m)}) - |a_{n-1,n}^{(m)}|^2 \quad (6)$$

Mit Hilfe des Hinweises

$$m := \frac{a_{n-1,n-1}^{(m)} + a_{n,n}^{(m)}}{2} \quad d := \frac{a_{n-1,n-1}^{(m)} - a_{n,n}^{(m)}}{2} \quad (7)$$

ergibt sich:

$$p_S(\lambda) = (\lambda - m - d)(\lambda - m + d) - |a_{n-1,n}^{(m)}|^2 \quad (8)$$

Mit Hilfe der dritten binomischen Gleichung erhalten wir

$$p_S(\lambda) = (\lambda - m)^2 - d^2 - |a_{n-1,n}^{(m)}|^2 \quad (9)$$

und damit ergibt sich für die Eigenwerte, nach Umstellen:

$$\lambda = m \pm \sqrt{d^2 + |a_{n-1,n}^{(m)}|^2} \quad (10)$$

Laut Wilkinson, soll der Shift als Eigenwert der rechtsuntersten  $2 \times 2$ -Teilmatrix gewählt werden, der am nächsten an  $a_{n,n}$  liegt. Wir wählen also als Nullstelle von  $p_S(\lambda)$ , diejenige bei der der Shift  $\mu$  am nächsten am derzeitigen Iterationsschritt von  $a_{n,n}^{(m)}$  liegt.

Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

$$\begin{aligned} d > 0 &\Rightarrow a_{n-1,n-1}^{(m)} > a_{n,n}^{(m)} \Rightarrow a_{n,n}^{(m)} < m \\ d = 0 &\Rightarrow a_{n-1,n-1}^{(m)} = a_{n,n}^{(m)} \Rightarrow a_{n,n}^{(m)} = m \\ d < 0 &\Rightarrow a_{n-1,n-1}^{(m)} < a_{n,n}^{(m)} \Rightarrow a_{n,n}^{(m)} > m \end{aligned}$$

Es lässt sich erkennen, dass bei  $d > 0$ ,  $a_{n,n}^{(m)} < m$  gilt. Somit muss  $\mu$  nach unten korrigiert werden. Es ergibt sich der erste Fall in (11). Die beiden letzten Fälle fassen wir zusammen, sodass aus  $d \leq 0$ ,  $a_{n,n}^{(m)} \geq m$  folgt.  $\mu$  muss also gar nicht, oder nach oben korrigiert werden.

$$\mu = \begin{cases} m - \sqrt{d^2 + |a_{n-1,n}^{(m)}|^2} & \text{falls } d > 0, \\ m + \sqrt{d^2 + |a_{n-1,n}^{(m)}|^2} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11)$$