Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 2

Merikan Koyun & Julian Andrej

May 11, 2014

T2. LR-Zerlegung an einem Beispiel

a) Die Berechnung der einzelnen Einträge der $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ Matrix erfolgt über die Matrixmultiplikation. Die fehlenden Einträge der Matrizen sind durch # dargestellt.

$$
\begin{array}{cccc|cccc|}
\cline{5-8}
 & & & & \# & \# & \# & \# \\
 & & & & 0 & \# & \# & \# \\
 & & & & 0 & 0 & \# & \# \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & \# \\
\hline
\multicolumn{1}{|c}{1} & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 & 3 \\
\multicolumn{1}{|c}{\#} & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 1 \\
\multicolumn{1}{|c}{\#} & \# & 1 & 0 & 6 & 1 & -1 & 6 \\
\multicolumn{1}{|c}{\#} & \# & \# & 1 & -2 & -5 & 4 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Für den ersten Schritt gilt $\boldsymbol{R}_{1*} = \boldsymbol{A}_{1*}$. Im Folgenden werden die einzelnen Zeilen bzw. Spalten von $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$, also $\boldsymbol{L}_{*1}$, $\boldsymbol{R}_{2*}$, $\boldsymbol{L}_{*2}$, $\boldsymbol{R}_{3*}$, usw., auf folgende Art berechnet:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot r_{11} &\stackrel{!}{=} 2 \rightarrow r_{11} = 2 \\
l_{21} r_{11} &\stackrel{!}{=} 4 \rightarrow l_{21} = 2 \\
l_{31} r_{11} &\stackrel{!}{=} 6 \rightarrow l_{31} = 3 \\
l_{41} r_{11} &\stackrel{!}{=} -2 \rightarrow l_{41} = -1 \\
2 \cdot -1 + 1 \cdot r_{22} &\stackrel{!}{=} 0 \rightarrow r_{22} = 2 \\
2 \cdot -3 + 1 \cdot r_{23} &\stackrel{!}{=} -3 \rightarrow r_{23} = 3 \\
2 \cdot 3 + 1 \cdot r_{24} &\stackrel{!}{=} 1 \rightarrow r_{24} = -5 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Führt man alle Schritte aus, so kommt man auf:

$$
\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \end{pmatrix}
$$

b) Gesucht wird x in $\boldsymbol{A}x = b$, für

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -16 \\ -12 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Vorwärtseinsetzen Es gilt:

$$\boldsymbol{L}y = b \tag{2}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -16 \\ -12 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Forwärtseinsetzen ergibt folgende Berechnungen:

$$1 \cdot y_1 = 1 \rightarrow y_1 = 1 \tag{4}$$
$$2 + y_2 = -8 \rightarrow y_2 = -10 \tag{5}$$
$$3 - 20 + y_3 = -16 \rightarrow y_3 = 1 \tag{6}$$
$$-1 + 30 + 5 + y_4 = -12 \rightarrow y_4 = -46 \tag{7}$$
$$\tag{8}$$

Durch **Rückwärtseinsetzen** kann x über die Beziehung $y = \boldsymbol{R}x$ berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 1 \\ -46 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt folgende Berechnungen:

$$1 \cdot x_4 = 1 \rightarrow x_4 = 1 \tag{10}$$
$$2x_3 + 7 = -1 \rightarrow x_3 = -3 \tag{11}$$
$$2x_2 - 9 - 5 = -10 \rightarrow x_2 = 2 \tag{12}$$
$$2x_1 - 2 + 9 + 3 = 1 \rightarrow x_1 = -4.5 \tag{13}$$

T3. Hauptuntermatrizen und LR-Zerlegung

Gegeben sei eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Hauptuntermatrix H_m ist regulär $\forall m \in \{1, ..., n\}$. Zeige, dass $\boldsymbol{A}$ eine LR-Zerlegung besitzt.

Induktionsanfang: $n = 1$
Es folgt zwangsweise $l_{11} = 1$ und $r_{11} = a_{11}$.

Induktionsvoraussetzung:
Die Behauptung gilt für alle Matrizen $\mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$

Induktionsschritt: $n > 1$
Es gilt aus der Bedigung dass alle H_m regulär sind. $\boldsymbol{A}$ wird in geeignete Blöcke zerlegt:

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{array}\right) \tag{14}$$

wobei der obere linke Block

$$\boldsymbol{A}_{**} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{15}$$

die obere Hauptuntermatrix H_{n-1} ist. Die verbleibenden Blöcke werden wie folgt, analog zur Vorlesung, bezeichnet:

$$\boldsymbol{A}_{n*} = \begin{pmatrix} a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{A}_{*n} = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Laut Voraussetzung sind die Hauptuntermatrizen H_m regulär, also $\det(H_m) \neq 0$. Da laut IB $\boldsymbol{A}_{**} = \boldsymbol{L}_{**}\boldsymbol{R}_{**}$, gilt

$$\det(\boldsymbol{A}_{**}) = \det(\boldsymbol{L}_{**}\boldsymbol{R}_{**}) = \det(\boldsymbol{L}_{**})\det(\boldsymbol{R}_{**}) \tag{18}$$

und somit muss auch $\det(\boldsymbol{L}_{**}) \neq 0$ und $\det(\boldsymbol{R}_{**}) \neq 0$ gelten und damit sind $\boldsymbol{L}_{**}$ und $\boldsymbol{R}_{**}$ ebenfalls regulär.
Analog zu Abschnitt 2.4 in der Vorlesung gilt:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_{**} & \\ \boldsymbol{L}_{n*} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_{**} & \boldsymbol{R}_{*n} \\ & r_{nn} \end{pmatrix} \tag{19}$$

wobei r_{nn} analog zu T2) berechnet wird, da $l_{11} = 1$:

$$r_{nn} = a_{nn} - \boldsymbol{L}_{n*}\boldsymbol{R}_{*n} \tag{20}$$

Ausserdem gilt für die Blockmatrizen mit Hilfe der Regularität bzw. Invertierbarkeit von $\boldsymbol{L}_{**}$ und $\boldsymbol{R}_{**}$:

$$\boldsymbol{A}_{n*} = \boldsymbol{L}_{n*}\boldsymbol{R}_{**} \text{ bzw. } \boldsymbol{A}_{*n} = \boldsymbol{L}_{**}\boldsymbol{R}_{*n} \tag{21}$$

Mit Hilfe vorangegangener Gleichungen folgt:

$$LR = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_{**}\boldsymbol{R}_{**} & \boldsymbol{L}_{**}\boldsymbol{R}_{*n} \\ \boldsymbol{L}_{n*}\boldsymbol{R}_{**} & \boldsymbol{L}_{n*}\boldsymbol{R}_{*n} + l_{nn}r_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{**} & \boldsymbol{A}_{*n} \\ \boldsymbol{A}_{n*} & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{22}$$

somit lässt sich direkt erkennen, dass $\boldsymbol{LR} = \boldsymbol{A}$ gilt und somit sind $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ eine LR-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$. ∎