Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 7

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 16, 2014

T12. Eigenwerte und Eigenvektoren des eindimensionalen Modellproblems

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $1 \leq n \in \mathbb{N}, h := \frac{1}{n+1}$:

$$A = h^{-2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Definiere den Vektor $e^k \in \mathbb{R}^n$

$$e^k_j := \sin(\pi jkh) \text{ für alle } j,k \in \{1,...,n\} \tag{2}$$

und

$$\lambda_k := 4h^{-2}\sin^2(\pi kh/2) \text{ für alle } k \in \{1,...,n\}. \tag{3}$$

Zeige, dass

$$Ae^k = \lambda_k e^k \tag{4}$$

gilt.

Wir betrachten eine beliebige j-te Komponente von $(Ae^k)_j$. Mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 2h^{-2} & \text{falls } i = j \\ -h^{-2} & \text{falls } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5}$$

ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
(Ae^k)_j &= h^{-2}(2e_j^k - e_{j-1}^k - e_{j+1}^k) \\
&= h^{-2}(2\sin(\pi jkh) - \sin(\pi(j-1)kh) - \sin(\pi(j+1)kh) \\
&= h^{-2}(2\sin(\pi jkh) - \sin(\pi jkh - \pi kh) - \sin(\pi jkh + \pi kh) \\
&\overset{(1)}{=} h^{-2}(2\sin(\pi jkh) - \sin(\pi jkh)\cos(-\pi kh) - \cos(\pi jkh)\sin(-\pi kh) \\
&\quad - \sin(\pi jkh)\cos(\pi kh) - \cos(\pi jkh)\sin(\pi kh)) \\
&\overset{(2)}{=} h^{-2}(2\sin(\pi jkh) - 2\sin(\pi jkh)\cos(\pi kh)) \\
&= h^{-2}\sin(\pi jkh)(2 - 2\cos(\pi kh)) \\
&\overset{(3)}{=} h^{-2}\sin(\pi jkh) 4\sin^2(\pi kh/2) \\
&= \underbrace{4h^{-2}\sin^2(\pi kh/2)}_{\lambda_k}\underbrace{\sin(\pi jkh)}_{e_j^k} = \lambda_k e_j^k
\end{aligned}
$$

mit folgenden Theoremen:

$$
\begin{aligned}
&(1): \quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
&(2): \quad \sin(-x) = -\sin(x) \text{ und } \cos(-x) = \cos(x) \\
&(3): \quad 2 - 2\cos(x) = 4\sin^2(x/2)
\end{aligned}
$$

T13. Hauptachsentransformation

a) Es soll gezeigt werden, dass ein Vektor $e \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren mit $Ae = \lambda e$.

Der Satz von Heine-Borel besagt, dass, wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = A^*$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$, ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 = 1$ existiert, mit $\Lambda_A(\boldsymbol{v}) \geq \Lambda_A(\boldsymbol{x})$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Heine-Borel besagt, dass v ein Punkt ist, in dem $\Lambda_A(\boldsymbol{v})$ ein Maximum besitzt. Der Satz in T11b) zeigt, dass dann $\lambda = \Lambda_A(\boldsymbol{v})$ ein Eigenwert zum Eigenvektor v ist, sodass gilt $Av = \lambda v$. Da $\|v\|_2 = 1$ gilt, folgt $v \neq 0$. Somit gilt $e = v$ und die Behauptung wurde gezeigt.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = A^*$ und $\hat{e} = (1, 0, ..., 0)^* \in \mathbb{R}^n$. Es soll gezeigt werden, dass eine Householder-Matrix $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $He = \alpha\hat{e}, \alpha \in \mathbb{R}$ und ein $\hat{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ mit

$$
HAH^* = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{6}
$$

existieren.

$H_1 e = \alpha\hat{e}$ spiegelt die erste Spalte von A auf ein Vielfaches des ersten Einheitsvektors. Es gilt also (siehe T13a) dass $\|e\|_2 = 1$, da $\|v\|_2 = 1$ und somit $\alpha = 1$. H ist, wie in T6 bewiesen, orthogonal.

Mit $\hat{e} = (1, 0, \dots, 0)^*$ und $\alpha = 1$ und der Symmetrie von A und H, sowie Orthogonalität von H, ergibt sich:

$$
HAH^* = H \left(\begin{array}{c|c} \lambda e & \lambda e \\ \hline & \\ \lambda e & \times \\ & \end{array}\right) \tag{7}
$$

$$
= \left(\begin{array}{c|c} \alpha\lambda\hat{e} & \alpha\lambda\hat{e} \\ \hline & \\ \alpha\lambda\hat{e} & \times \\ & \end{array}\right) \tag{8}
$$

$$
= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{9}
$$

$$
\tag{10}
$$

c) Es soll bewiesen werden, dass eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existieren mit $UAU^* = D$.

Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang $n = 2$:
Man wählt U als Householdermatrix, also $U = H$. Es gilt:

$$
HAH^* = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \times \end{pmatrix} \tag{11}
$$

und somit ist D diagonal.

Induktionsannahme: $UAU^* = D$ gilt für n.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ und $\tilde{A} = \tilde{A}^*$, sodass auch alle Hauptuntermatrizen von $\tilde{A}$ symmetrisch sind. Mit Hilfe von b) existiert auch eine Householdermatrix $\tilde{H} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$. Es gilt also:

$$
\tilde{H}\tilde{A}\tilde{H}^* = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \tilde{D} \tag{12}
$$

wobei $\hat{A}$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix ist. Laut Induktionsannahme, ist $\hat{A}$ diagonalisierbar, sodass gilt:

$$
C\hat{A}C^* = D \tag{13}
$$

Somit existiert eine orthogonale $(n+1) \times (n+1)$ Matrix U, sodass gilt:

$$U = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tilde{H} \tag{14}$$

U ist orthogonal, da $\tilde{H}$ orthogonal ist und C per Definition auch orthogonal sein muss. Es lässt sich einfach zeigen $UU^* = I$ (wegen Orthogonalität).

Nun muss noch gezeigt werden, dass $U\tilde{A}U^*$ eine Diagonalmatrix ist. Einfacher zu zeigen ist, dass $U^*\hat{A}U$ eine Diagonalmatrix ist:

$$\begin{aligned} U^*\tilde{A}U &= \left[\tilde{H}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\right]^* \tilde{A}\tilde{H}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}^* \tilde{H}^*\tilde{A}\tilde{H}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \hat{A}C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & C\hat{A}C^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \blacksquare \end{aligned}$$