

Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 6

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 4, 2014

T10. mehrdimensionales Newton-Verfahren an einem Beispiel

Gegeben ist folgendes nicht-lineares Gleichungssystem:

$$e^{1-x} = \cos(y) - 0.2 \quad (1)$$

$$x^2 + y - (1 + y)x = \sin(y) + 0.2 \quad (2)$$

Um das Gleichungssystem mittels Newton-Verfahren zu Lösen, stellen wir zunächst die Gleichungen um, und erhalten folgende Abbildung:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(y) - 0.2 - e^{1-x} \\ \sin(y) + 0.2 + (1 + y)x - y - x^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Wir berechnen die Jacobi-Matrix:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{1-x} & -\sin(y) \\ 1 + y - 2x & \cos(y) + x - 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Die Newton-Iterationsvorschrift lautet:

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} - Df(\mathbf{x}^{(m)})^{-1} f(\mathbf{x}^{(m)}) \quad (5)$$

Mit dem Startwert $(1, 0)^T$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(m+1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

T11. Rayleigh-Quotient und Eigenwerte

a) Gegeben ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und symmetrisch. Es soll gezeigt werden, dass der Rayleigh-Quotient

$$\Lambda_A(x) = \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2} \quad (6)$$

in einem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ durch:

$$\Lambda_A(\mathbf{x}) = \frac{2(A\mathbf{x} - \Lambda_A(\mathbf{x})\mathbf{x})}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2} \quad (7)$$

Zunächst werden die partiellen Ableitungen der Skalarprodukte gebildet:

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2 = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (A + A^*)\mathbf{x} = 2A\mathbf{x} \quad (8)$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 2\mathbf{x} \quad (9)$$

Mit Hilfe der Quotientenregel ergibt sich:

$$\nabla \Lambda_A(\mathbf{x}) = \frac{\nabla(\mathbf{x}^T A\mathbf{x})(\mathbf{x}^T \mathbf{x}) - (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})\nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (10)$$

$$= \frac{2A\mathbf{x}(\mathbf{x}^T \mathbf{x}) - (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})2\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (11)$$

$$= \frac{2A\mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (12)$$

$$= \frac{2(A\mathbf{x} - \Lambda_A(\mathbf{x})\mathbf{x})}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2} \quad \blacksquare \quad (13)$$

- b) Gegeben ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und symmetrisch und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Punkt, in dem der Rayleigh Quotient Λ_A ein Maximum besitzt. Es soll gezeigt werden, dass $\Lambda_A(\mathbf{x})$ ein Eigenwert zum Eigenvektor \mathbf{x} ist, also $A\mathbf{x} = \Lambda_A(\mathbf{x})\mathbf{x}$ gilt.

Für das Maximum gilt, dass

$$\nabla \Lambda_A(\mathbf{x}) = \frac{2(A\mathbf{x} - \Lambda_A(\mathbf{x})\mathbf{x})}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2} = 0 \quad (14)$$

Damit (14) erfüllt werden kann, muss der Zähler Null werden. Es folgt:

$$2(A\mathbf{x} - \Lambda_A(\mathbf{x})\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (15)$$

$$A\mathbf{x} - \Lambda_A(\mathbf{x})\mathbf{x} = 0 \quad (16)$$

$$A\mathbf{x} = \Lambda_A(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad \blacksquare \quad (17)$$