Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 7

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 9, 2014

T12. Eigenwerte und Eigenvektoren des eindimensionalen Modellproblems

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $1 \leq n \in \mathbb{N}, h := \frac{1}{n+1}$:

$$A = h^{-2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Definiere den Vektor $e^k \in \mathbb{R}^n$

$$e_j^k := \sin(\pi jkh) \text{ für alle } j,k \in \{1,...,n\} \tag{2}$$

und

$$\lambda_k := 4h^{-2}\sin^2(\pi kh/2) \text{ für alle } k \in \{1,...,n\}. \tag{3}$$

Zeige, dass

$$Ae^k = \lambda_k e^k \tag{4}$$

gilt.

Wir betrachten eine beliebige j-te Komponente von $(Ae^k)_j$. Mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 2h^{-2} & \text{falls } i = j \\ -h^{-2} & \text{falls } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5}$$

ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
(Ae^k)_j &= h^{-2}(2e_j^k - e_{j-1}^k - e_{j+1}^k) \\
&= h^{-2}(2\sin(\pi jkh) - \sin(\pi(j-1)kh) - \sin(\pi(j+1)kh) \\
&= h^{-2}(2\sin(\pi jkh) - \sin(\pi jkh - \pi kh) - \sin(\pi jkh + \pi kh) \\
&\overset{(1)}{=} h^{-2}(2\sin(\pi jkh) - \sin(\pi jkh)\cos(-\pi kh) - \cos(\pi jkh)\sin(-\pi kh) \\
&\quad - \sin(\pi jkh)\cos(\pi kh) - \cos(\pi jkh)\sin(\pi kh)) \\
&\overset{(2)}{=} h^{-2}(2\sin(\pi jkh) - 2\sin(\pi jkh)\cos(\pi kh)) \\
&= h^{-2}\sin(\pi jkh)(2 - 2\cos(\pi kh)) \\
&\overset{(3)}{=} h^{-2}\sin(\pi jkh)4\sin^2(\pi kh/2) \\
&= \underbrace{4h^{-2}\sin^2(\pi kh/2)}_{\lambda_k}\underbrace{\sin(\pi jkh)}_{e_j^k} = \lambda_k e_j^k
\end{aligned}
$$

mit folgenden Theoremen:

$$
\begin{aligned}
&(1): \quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
&(2): \quad \sin(-x) = -\sin(x) \text{ und } \cos(-x) = \cos(x) \\
&(3): \quad 2 - 2\cos(x) = 4\sin^2(x/2)
\end{aligned}
$$

T13. Hauptachsentransformation

a) Es soll gezeigt werden, dass ein Vektor $e \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren mit $Ae = \lambda e$.

   Der Satz von Heine-Borel besagt, dass, wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = A^*$, $1 \le n \in \mathbb{N}$, ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 = 1$ existiert, mit $\Lambda_A(\boldsymbol{v}) \ge \Lambda_A(\boldsymbol{x})$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Heine-Borel besagt, dass v ein Punkt ist, in dem $\Lambda_A(\boldsymbol{v})$ ein Maximum besitzt. Der Satz in T11b) zeigt, dass dann $\lambda = \Lambda_A(\boldsymbol{v})$ ein Eigenwert zum Eigenvektor v ist, sodass gilt $Av = \lambda v$. Da $\|v\|_2 = 1$ gilt, folgt $v \ne 0$. Somit gilt $e = v$ und die Behauptung wurde gezeigt.

   KP OP DAS REICHT.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = A^*$ und $\hat{e} = (1, 0, ..., 0)^* \in \mathbb{R}^n$. Es soll gezeigt werden, dass eine Householder-Matrix $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $He = \alpha\hat{e}, \alpha \in \mathbb{R}$ und ein $\hat{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ mit

$$
HAH^* = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{6}
$$

   existieren.

   MAH PROOF!

   $H_1 e = \alpha\hat{e}$ spiegelt die erste Spalte von A auf ein Vielfaches des ersten Einheitsvektors. Laut Vorlesung (4.6)/(4.7) bzw. T6b) ist der erste Einheitsvektor ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. H ist per Definition orthogonal. Man definiert einen normierten Eigenvektor v_1 von

A zum Eigenwert λ. Bei der Anwendung der Householder-Matrix H auf die symmetrische Matrix A ergibt sich SHIAT.

PROOF KOPIERT AUS SKRIPT UNI SAARBRUECKEN! UMSCHREIBEN

Zu einem reellen Eigenwert λ_1 wähle man einen Eigenvektor v der Länge eins und ergänze ihn zu einer Orthonormalbasis $(v, w_2, ..., w_n)$. Ist H die Matrix mit diesen Spaltenvektoren, so gilt:

$$HAH^* = \begin{pmatrix} v^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$= \begin{pmatrix} v^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda v & Aw_2 & \dots & Aw_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda v^T v & v^T A w_2 & \dots & v^T A w_n \\ \lambda w_2^T v & w_2^T A w_2 & \dots & w_2^T A w_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda w_n^T v & w_n^T A w_2 & \dots & w_n^T A w_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

Da v auf die Länge eins normiert ist und senkrecht auf $w_i, i = 2, \dots, n$ steht, ist der oberste Eintrag in der ersten Spalte λ, alle anderen verschwinden. In der ersten Zeile beachtet man, dass aufgrund der Symmetrie von A für $i = 2, \dots, n$ gilt:

$$v^T A w_i = (A^T v)^T w_i = (Av)^T w_i = \lambda v^T w_i = 0 \tag{10}$$

wobei in der letzten Gleichheit wieder die Orthogonalität ausgenutzt wurde. Es ist gezeigt

$$HAH^* = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2^T A w_2 & \dots & w_2^T A w_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & w_n^T A w_2 & \dots & w_n^T A w_n \end{pmatrix} \tag{11}$$

wobei die verbleibende $(n-1) \times (n-1)$ Restmatrix $\hat{A}$ aufgrund der Symmetrie selbst wieder symmetrisch ist.

c) Es soll bewiesen werden, dass eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existieren mit $UAU^* = D$.

Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion.

$n = 1$: Trivial

$n \leq 2$.