Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 9

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 30, 2014

T16. Lagrange Polynome und Monome

Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} x_i^k l_i(x) \tag{1}$$

Der Grad des Polynoms ist also höchstens m und es gilt $p(x_s) = x_s^k$ für $k = 0, ..., m$. Weiterhin hat das neue Polynom $q(x) = p(x) - x^k$ die $m + 1$ Nullstellen $x_0, ..., x_m$.

$k = 0$:
Es gilt somit $q(x) = p(x) - x^0 = p(x) - 1$. $q(x)$ ist ein Polynom vom Grad m mit $m + 1$ Nullstellen $x_0, ..., x_m$ und ist daher das Nullpolynom, sodass $p(x) = x^0 = 1$ für alle x. Dann gilt trivialerweise auch für $p(0) = 1$.

$k = 1, ..., n$:
$q(x) = p(x) - x^k$ ist ebenfalls ein Polynom vom Grad m und hat die $m + 1$ Nullstellen $x_0, ..., x_m$. Es ist ebenfalls das Nullpolynom, sodass gilt $p(x) = x^k$ für alle x, sodass $p(0) = 0$ gilt.

$k = m + 1$:
$q(x) = p(x) - x^{m+1}$ ist ein Polynom vom Grad $m+1$ mit $m+1$ Nullstellen $x_0, ..., x_m$. Der Koeffizient $a_{m+1} = -1$ (Leitkoeffizient). Es gilt also $q(x) = p(x) - x^{m+1} = -\prod_{i=0}^{m}(x - x_i)$. Umgestellt ergibt sich

$$p(x) = \left(-\prod_{i=0}^{m}(x - x_i) \right) + x^{m+1} \tag{2}$$

Es folgt:

$$p(0) = -\prod_{i=0}^{m} -x_i \tag{3}$$

$$= (-1)^m \prod_{i=0}^{m} x_i \tag{4}$$

T17. Interpolationsfehler

Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ soll an äquidistanten Stützstellen $x_i = ih, i = 0, 1, 2...$ auf dem Intervall $[0, 1]$ tabelliert werden. Es ist die Schrittweite h gesucht, die bei linearer Interpolation einen Interpolationsfehler kleiner 10^{-6} erzeugt.

Für den Fehler gilt:

$$e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f''(\eta)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \tag{5}$$

Zur Abschätzung des maximalen Fehlers bedienen wir uns der Maximumsnorm

$$\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max\{|g(x)| \,:\, x \in [a,b]\} \tag{6}$$

sodass gilt:

$$\|f(x) - p(x)\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\|f''(\eta)\|_{\infty,[a,b]}}{2}\|(x - x_i)(x - x_{i+1})\|_{\infty,[a,b]} \tag{7}$$

Wir berechnen zunächst die Maximumsnorm von $\|(x - x_i)(x - x_{i+1})\|_{\infty,[x_i,x_{i+1}]}$.

$$\begin{aligned}
\|(x - x_i)(x - x_{i+1})\|_{\infty,[x_i,x_{i+1}]} &= \max_{[x_i,x_{i+1}]} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| && (8)\\
&= \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4} && (9)\\
&= \frac{(ih + h - ih)^2}{4} && (10)\\
&= \frac{h^2}{4} && (11)
\end{aligned}$$

Es gilt weiterhin:

$$f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2) \tag{12}$$

und

$$\max_{[0,1]} |e^{-x^2}(4x^2 - 2)| = 2 \tag{13}$$

Wir können den Fehler nun abschätzen mit:

$$e(x) \leq \frac{2h^2}{8} = \frac{h^2}{4} \tag{14}$$

Der Fehler soll kleiner als 10^{-6} sein, somit ergibt sich:

$$h \leq \sqrt{4 \cdot 10^{-6}} = 0.002 \tag{15}$$