Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 9

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 29, 2014

T16. Lagrange Polynome und Monome

T17. Interpolationsfehler

Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ soll an äquidistanten Stützstellen $x_i = ih, i = 0, 1, 2...$ auf dem Intervall $[0, 1]$ tabelliert werden. Es ist die Schrittweite h gesucht, die bei linearer Interpolation einen Interpolationsfehler kleiner 10^{-6} erzeugt.

Das Interpolationspolynom bei linearer Interpolation ist gegeben durch:

$$p(x) = f(x_i) + (x - x_i)\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{1}$$

Für den Fehler gilt:

$$e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f''(\eta)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \tag{2}$$

Zur Abschätzung des maximalen Fehlers bedienen wir uns der Maximumsnorm

$$\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max\{|g(x)| \,:\, x \in [a, b]\} \tag{3}$$

sodass gilt:

$$\|f(x) - p(x)\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\|f''(\eta)\|_{\infty,[a,b]}}{2}\|(x - x_i)(x - x_{i+1})\|_{\infty,[a,b]} \tag{4}$$

Wir berechnen zunächst die Maximumsnorm von $\|(x - x_i)(x - x_{i+1})\|_{\infty,[a,b]}$.

$$\begin{aligned}
\|(x - x_i)(x - x_{i+1})\|_{\infty,[x_i,x_{i+1}]} &= \max_{[x_i,x_{i+1}]} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| && (5)\\
&= \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4} && (6)\\
&= \frac{(ih + h - ih)^2}{4} && (7)\\
&= \frac{h^2}{4} && (8)
\end{aligned}$$

Es gilt weiterhin:

$$f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2) \tag{9}$$

und

$$\max_{[0,1]} |e^{-x^2}(4x^2 - 2)| = 2 \tag{10}$$

Wir können den Fehler nun abschätzen mit:

$$e(x) \leq \frac{2h^2}{8} = \frac{h^2}{4} \tag{11}$$

Der Fehler soll kleiner als 10^{-6} sein, somit ergibt sich:

$$h \leq \sqrt{4 \cdot 10^{-6}} = 0.002 \tag{12}$$