Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 5

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 2, 2014

T8.) Beispiel einer nichtlinearen Gleichung

Mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes soll gezeigt werden, dass es genau ein $x \in [0, \pi]$ gibt, welches

$$\frac{1}{5}\sin(x)\cos(x) = \frac{2x-3}{6} \tag{1}$$

löst.
Falls Φ einen Fixpunkt besitzt, gilt $\Phi(x) = x$. Umgeformt ergibt sich also für die Gleichung:

$$\Phi(x) = \frac{3}{5}\sin(x)\cos(x) + \frac{3}{2} \tag{2}$$

Laut Fixpunktsatz von Banach gilt für eine Iteration Φ auf einer abgeschlossenen Menge $U \subseteq R^n$ und $x, y \in U$:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x-y\| \qquad \text{mit } L \in [0, 1) \tag{3}$$

Ist dies erfüllt, dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt und die Fixpunktiteration iteriert für beliebige Startwerte $x \in U$.
Um L zu bestimmen benutzen wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\Phi(x) - \Phi(y) \leq \Phi'(\eta)(x-y) \tag{4}$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\eta)||x-y| \qquad \text{mit } x, y \in [0, \pi] \tag{5}$$

mit $\eta \in [0, \pi]$ von x und y abhängige Zwischenpunkte. Es gilt:

$$|\Phi'(\eta)| = \left|\frac{3}{5}\cos(2\eta)\right| \leq 0.6 \quad \forall \eta \tag{6}$$

Nun muss noch geprüft werden, ob Φ das Intervall $[0, \pi]$ auf sich selbst abbildet. Es gilt:

$$\Phi(0) = \frac{6}{5} \geq 0 \qquad \Phi(\pi) = \frac{9}{5} \leq \pi \tag{7}$$

Φ bildet das Intervall $[0, \pi]$ auf sich selbst ab. Somit lässt sich $L = 0.6 \in [0, 1)$ setzen. Demnach ist Φ eine Kontraktion und die Gleichung (1) besitzt genau einen Fixpunkt.

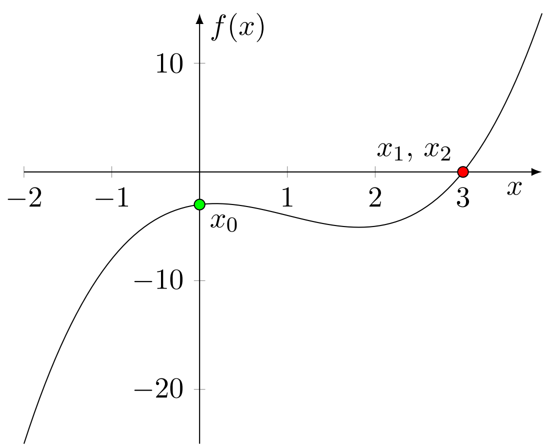
T9.) Newton-Verfahren an einem Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$. Die Ableitung lautet $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$. Die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens ist wie folgt definiert:

$$x \to x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{3x^2 - 6x + 1} \tag{8}$$

Bei $x_0 = 0$ ergeben sich also folgende Iterationsschritte:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 3$$



Visualisierung für $x_0 = 0$

Es lässt sich erkennen, dass das Newton-Verfahren in einem Schritt zu der Nullstelle konvergiert. Die schnelle Konvergenz ausgehend von diesem Startpunkts lässt sich anhand der Tangente in diesem Punkt begründen. Diese geht direkt durch den Punkt $(3, 0)$, der offensichtlich eine Nullstelle ist und somit konvergiert das Verfahren in einem Schritt.

Bei $x_0 = 0.5$ ergeben sich folgende Iterationsschritte:

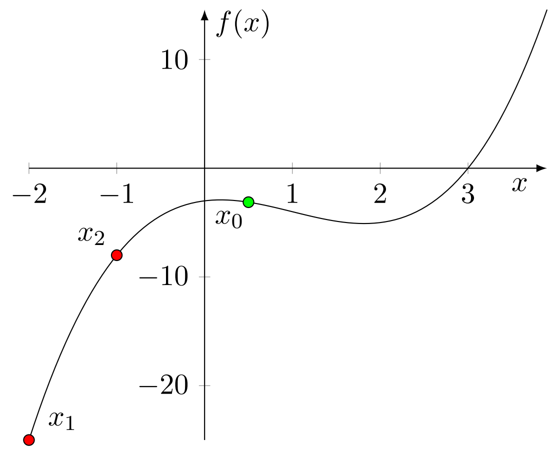
$$x_0 = 0.5, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -1$$

Hier lässt sich erkennen, dass sich das Newton-Verfahren von der gesuchten Nullstelle entfernt, da die Tangente am Startpunkt eine negative Steigung aufweist, und sich somit der neue Iterationsschritt in negative x-Richtung bewegt. Nach diesem Schritt zeigt die Tangente nun wieder in Richtung der Nullstelle, ähnlich wie bei $x_0 = 0$. Das Verfahren nähert sich also wieder der Nullstelle und wird schlussendlich auch wieder zur Nullstelle konvergieren, jedoch mit einer wesentlich höheren Anzahl an Iterationsschritten als im Fall zuvor.

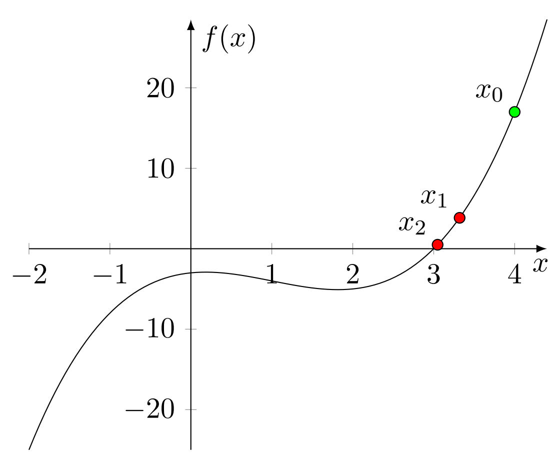
Bei $x_0 = 4$ ergeben sich folgende Iterationsschritte:

$$x_0 = 4, \quad x_1 = 3.32, \quad x_2 = 3.05$$

Das Newton-Verfahren konvergiert fast vollständig in zwei Schritten (quadratische Konvergenz) zur Nullstelle.



Visualisierung für $x_0 = 0.5$



Visualisierung für $x_0 = 4$