Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 10

Merikan Koyun & Julian Andrej

July 3, 2014

T18. $\frac{3}{8}$-Regel

Mit l_i aus dem Skript (5.2) und

$$w_i := \int_a^b l_i(x)dx$$

erhalten wir

$$w_i = \int_a^b \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

Durch Substitution von $x = a + sh$ und $s \in [0, m]$ ergibt sich

$$w_i = \int_0^m \prod_{\substack{=0\\k\neq i}}^{m} \frac{s - j}{i - j} ds$$

Damit können wir die Gewichte fuer $m = 3$ bestimmen. Fuer w_{im} ergibt sich damit:

$$w_{03} = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{x-1}{0-1} \frac{x-2}{0-2} \frac{x-3}{0-3} dx = \frac{1}{8}$$

$$w_{13} = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{x-0}{1-0} \frac{x-2}{1-2} \frac{x-3}{1-3} dx = \frac{3}{8}$$

$$w_{23} = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{x-0}{2-0} \frac{x-1}{2-1} \frac{x-3}{2-3} dx = \frac{3}{8}$$

$$w_{33} = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{x-0}{3-0} \frac{x-1}{3-1} \frac{x-2}{3-2} dx = \frac{1}{8}$$

T19. summierte Trapezregel

a) Mit den Voraussetzungen aus der Aufgabe sowie der Beschreibung der äquidstanten Unterteilung in $l \in N$ Teilintervalle auf S.93 im Skript definieren wir

$$\mathbf{Q}_{[a,b],l}(f) := \sum_{i=1}^{l} \mathbf{Q}_{[y_{i-1},y_i]}(f) \ \forall f \in C[a, b]$$

Ausserdem ist aus dem Skript bekannt, dass mit $h = (b - a)/l$ gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{l} \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x)dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{l} (f(y_{i-1}) + f(y_i))$$

dies entspricht der summierten Trapezregel $T(h)$.

Berechnet man die Summe erhalten wir:

$$T(h) = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{l-1}) \right) + f(b) \right]$$

Fassen wir die Terme zusammen ergibt sich

$$T(h) = h \left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{l-1} f(a + ih) + \frac{f(b)}{2} \right]$$

b) Es soll gezeigt werden, dass $T(h)$ für die Bestimmung von $T(\frac{h}{2})$ genutzt werden kann.
Für $T(\frac{h}{2})$ gilt:

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} \left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{2l-1} f\left(a + i\frac{h}{2}\right) + \frac{f(b)}{2} \right] \tag{1}$$

Die Summe lässt sich in zwei Untersummen aufteilen:

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} \left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{l-1} f\left(a + (2i)\frac{h}{2}\right) + \sum_{i=0}^{l-1} f\left(a + (2i+1)\frac{h}{2}\right) + \frac{f(b)}{2} \right] \tag{2}$$

Nun erkennt man, dass die erste Summe der Summe von $T(h)$ entspricht. Man kann also die zweite Summe herausziehen:

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} \underbrace{h \left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{l-1} f\left(a + ih\right) + \frac{f(b)}{2} \right]}_{T(h)} + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{l-1} f\left(a + (2i+1)\frac{h}{2}\right) \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2} T(h) + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{l-1} f\left(a + (2i+1)\frac{h}{2}\right) \tag{4}$$