Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 4

Merikan Koyun & Julian Andrej

May 26, 2014

T6. Householdermatrizen

a) Für $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert:

$$H = I - \frac{2}{v^*v} vv^* \tag{1}$$

Bei Orthogonalität gilt $HH^* = I$:

$$\begin{aligned} HH^* &= \left(I - \frac{2}{v^*v} vv^*\right)\left(I - \frac{2}{v^*v} vv^*\right) && (2)\\ &= I - \frac{4}{v^*v} vv^* + \frac{4}{(v^*v)^2} vv^*vv^* && (3)\\ &= I - \frac{4}{v^*v} vv^* + \frac{4}{v^*v} vv^* = I && (4) \end{aligned}$$

b) Nach Anwendung der Vorgaben aus b) gilt:

$$H = I - 2vv^* \tag{5}$$

$$\begin{aligned} Hx &= x - 2v\langle v, x\rangle && (6)\\ &= x - 2(x - ke_1)\frac{\|x\|^2 - k\langle e_1, x\rangle}{\|x\|^2 - 2k\langle x, e_1\rangle + k^2\|e_1\|^2} && (7)\\ &= x - 2(x - ke_1)\frac{k^2 - k\langle e_1, x\rangle}{2(k^2 - k\langle x, e_1\rangle)} && (8)\\ &= ke_1 && (9) \end{aligned}$$

c) Die Householder Matrix H ist, wie oben bewiesen, orthogonal. Dadurch erfüllt sie eine der Bedingungen für eine QR Zerlegung, da zur Anwendung eben dieser, orthogonale Matrizen benötigt werden.

Die Anwendung der Householdermatrix auf eine Matrix A führt eine Spiegelung der Einträge a_{ij} an einer Hyperebene, beschrieben durch v, durch. Die sukzessive Anwendung der Householdermatrix auf A kann zur Bildung einer oberen-rechten Dreiecksmatrix R verwendet werden, ähnlich, wie bei der QR-Zerlegung mittels Givens-Rotationen.

Der elementare Unterschied zur QR-Zerlegung mit Givens-Rotation, besteht darin, dass die Householder Transformation pro Anwendung auf A eine gesamte (Unter-)Spalte eliminiert; im Gegensatz zu einzelnen Einträgen.

T7. Lineares Ausgleichsproblem

a) Das lineare Ausgleichsproblem lautet

$$\min = \left\| \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|. \tag{10}$$

Daraus folgt die Normalengleichung:

$$\begin{bmatrix} n & x_1^2 + \cdots + x_n^2 \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 & x_1^4 + \cdots + x_n^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1^2 & \dots & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{11}$$

b) Aus dem Zahlenbeispiel ergibt sich fuer die Normalengleichung:

$$\begin{bmatrix} 30b + 4a \\ 354b + 30a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 375 \end{bmatrix} \tag{12}$$

die Loesung dieses Systems beschreibt die Werte a und b.

$$a = -\frac{23}{43} \approx -0.5348837 \tag{13}$$

$$b = \frac{95}{96} \approx 1.1046511 \tag{14}$$