Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 9

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 29, 2014

T16. Lagrange Polynome und Monome

Fall $k = 0$:
Es gilt:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{m} l_i(x) = 1 \tag{1}$$

Wir wählen ein Polynom

$$P(x) = L(x) - 1 = \sum_{i=0}^{m} l_i(x) = \sum_{i=0}^{m} \prod_{j=0, j\neq i}^{m} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{2}$$

Es lässt sich erkennen, dass

$$P(x_i) = 0 \quad \forall i = 0, ..., m \tag{3}$$

Dieses Polynom ist demnach vom Grad n und besitzt $n + 1$ Nullstellen. Daraus folgt, dass $P(x)$ das Nullpolynom sein muss.
Es folgt, dass $L(x)$ das konstante Polynom 1 und es folgt:

$$\sum_{i=0}^{m} l_i(x) = 1 \tag{4}$$

T17. Interpolationsfehler

Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ soll an äquidistanten Stützstellen $x_i = ih, i = 0, 1, 2...$ auf dem Intervall $[0, 1]$ tabelliert werden. Es ist die Schrittweite h gesucht, die bei linearer Interpolation einen Interpolationsfehler kleiner 10^{-6} erzeugt.

Für den Fehler gilt:

$$e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f''(\eta)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \tag{5}$$

Zur Abschätzung des maximalen Fehlers bedienen wir uns der Maximumsnorm

$$\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max\{|g(x)| \, : \, x \in [a, b]\} \tag{6}$$

sodass gilt:

$$\|f(x) - p(x)\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\|f''(\eta)\|_{\infty,[a,b]}}{2} \|(x - x_i)(x - x_{i+1})\|_{\infty,[a,b]} \tag{7}$$

Wir berechnen zunächst die Maximumsnorm von $\|(x-x_i)(x-x_{i+1})\|_{\infty,[a,b]}$.

$$\begin{aligned}
\|(x-x_i)(x-x_{i+1})\|_{\infty,[x_i,x_{i+1}]} &= \max_{[x_i,x_{i+1}]} |(x-x_i)(x-x_{i+1})| && (8)\\
&= \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4} && (9)\\
&= \frac{(ih+h-ih)^2}{4} && (10)\\
&= \frac{h^2}{4} && (11)
\end{aligned}$$

Es gilt weiterhin:

$$f''(x) = e^{-x^2}(4x^2-2) \tag{12}$$

und

$$\max_{[0,1]} |e^{-x^2}(4x^2-2)| = 2 \tag{13}$$

Wir können den Fehler nun abschätzen mit:

$$e(x) \leq \frac{2h^2}{8} = \frac{h^2}{4} \tag{14}$$

Der Fehler soll kleiner als 10^{-6} sein, somit ergibt sich:

$$h \leq \sqrt{4 \cdot 10^{-6}} = 0.002 \tag{15}$$