

# Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 2

Merikan Koyun & Julian Andrej

May 6, 2014

## T2. LR-Zerlegung an einem Beispiel

a)

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & & & & 2 & -1 & -3 & 3 \\
 & & & & & 0 & 2 & 3 & -5 \\
 & & & & & 0 & 0 & 2 & 7 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & -46 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -3 & 3 \\
 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 1 \\
 3 & 2 & 1 & 0 & 6 & 1 & -1 & 6 \\
 -1 & -3 & 5 & 1 & -2 & -5 & 4 & 1
 \end{array} \tag{1}$$

$$r_{1j} = a_{1j}, \quad \forall j \in [1, 4]$$

$$1 \cdot r_{11} \stackrel{!}{=} 2 \rightarrow r_{11} = 2 \tag{2}$$

$$l_{21}r_{11} \stackrel{!}{=} 4 \rightarrow l_{21} = 2 \tag{3}$$

$$l_{31}r_{11} \stackrel{!}{=} 6 \rightarrow l_{31} = 3 \tag{4}$$

$$l_{41}r_{11} \stackrel{!}{=} -2 \rightarrow l_{41} = -1 \tag{5}$$

$$2 \cdot -1 + 1 \cdot r_{22} \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow r_{22} = 2 \tag{6}$$

$$2 \cdot -3 + 1 \cdot r_{23} \stackrel{!}{=} -3 \rightarrow r_{23} = 3 \tag{7}$$

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot r_{24} \stackrel{!}{=} 1 \rightarrow r_{24} = -5 \tag{8}$$

$$3 \cdot -1 + l_{32} \cdot 2 \stackrel{!}{=} 1 \rightarrow l_{32} = 2 \tag{9}$$

$$-1 \cdot -1 + l_{42} \cdot 2 \stackrel{!}{=} -5 \rightarrow l_{42} = -3 \tag{10}$$

$$3 \cdot -3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot r_{33} \stackrel{!}{=} -1 \rightarrow r_{33} = 2 \tag{11}$$

$$3 \cdot 3 + 2 \cdot -5 + 1 \cdot r_{34} \stackrel{!}{=} 5 \rightarrow r_{34} = 7 \tag{12}$$

$$-1 \cdot -3 + -3 \cdot 3 + l_{43} \cdot 2 \stackrel{!}{=} 4 \rightarrow l_{43} = 5 \tag{13}$$

$$-1 \cdot 3 + -3 \cdot -5 + 5 \cdot 7 + 1 \cdot r_{44} \stackrel{!}{=} 1 \rightarrow r_{44} = -46 \tag{14}$$

b) Gesucht wird  $x$  in  $Ax = b$ , für

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ -16 \\ -12 \end{bmatrix} \quad (15)$$

**Vorwärtseinsetzen** Es gilt:

$$Ly = b \quad (16)$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ -16 \\ -12 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Forwärtseinsetzen ergibt folgende Berechnungen:

$$1 \cdot y_1 = 1 \rightarrow y_1 = 1 \quad (18)$$

$$2 + y_2 = -8 \rightarrow y_2 = -10 \quad (19)$$

$$3 - 20 + y_3 = -16 \rightarrow y_3 = 1 \quad (20)$$

$$-1 + 30 + 5 + y_4 = -12 \rightarrow y_4 = -46 \quad (21)$$

$$(22)$$

Durch Rückwärtseinsetzen kann  $x$  über die Beziehung  $y = Rx$  berechnet werden:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ 1 \\ -46 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Rückwärtseinsetzen ergibt folgende Berechnungen:

$$1 \cdot x_4 = 1 \rightarrow x_4 = 1 \quad (24)$$

$$2x_3 + 7 = -1 \rightarrow x_3 = -3 \quad (25)$$

$$2x_2 - 9 - 5 = -10 \rightarrow x_2 = 2 \quad (26)$$

$$2x_1 - 2 + 9 + 3 = 1 \rightarrow x_1 = -4.5 \quad (27)$$

### T3. Hauptuntermatrizen und LR-Zerlegung

Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Die Hauptuntermatrix  $H_m$  ist regulär  $\forall m \in \{1, \dots, n\}$ . Zeige, dass  $A$  eine LR-Zerlegung besitzt.

**Induktionsanfang:**  $n = 1$

Es folgt zwangsweise  $l_{11} = 1$  und  $r_{11} = a_{11}$ .

**Induktionsvoraussetzung:**

Die Behauptung gilt für alle Matrizen  $\mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$

**Induktionsschritt:**  $n > 1$

Es gilt aus der Bedingung dass alle  $H_m$  regulär sind.  $\mathbf{A}$  wird in geeignete Blöcke zerlegt:

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{array} \right) \quad (28)$$

wobei

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{array} \right) \quad (29)$$

die obere Hauptuntermatrix  $H_{n-1}$  ist. Die verbleibenden Blöcke werden wie folgt bezeichnet:

$$A^{(u)} = (a_{n,1} \quad \cdots \quad a_{n,n-1}) \quad (30)$$

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Laut Voraussetzung sind die Hauptuntermatrizen  $H_m$  regulär, also  $\det(H_m) \neq 0$ . Da laut IB  $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{R}$ , folgt

$$\det(\tilde{A}) = \det(\tilde{L}\tilde{R}) = \det(\tilde{L})\det(\tilde{R}) \quad (32)$$

und somit müssen auch  $\det(\tilde{L}) \neq 0$  und  $\det(\tilde{R}) \neq 0$  gelten und damit sind  $\tilde{L}$  und  $\tilde{R}$  ebenfalls regulär.

Analog zu Abschnitt 2.4 in der Vorlesung gilt:

$$L = \begin{pmatrix} L_{**} & \\ L_{n*} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R = \begin{pmatrix} R_{**} & R_{*n} \\ & r_{nn} \end{pmatrix} \quad (33)$$

wobei  $r_{nn}$  analog zu T2, da  $l_{11} = 1$ :

$$r_{nn} = a_{nn} - L_{n*}R_{*n} \quad (34)$$

Ausserdem gilt für die Blockmatrizen:

$$A_{n*} = L_{n*}R_{**} \text{ bzw. } A_{*n} = L_{**}R_{*n} \quad (35)$$

Mit Hilfe vorangegangener Gleichungen folgt also:

$$LR = \begin{pmatrix} L_{**}R_{**} & L_{**}R_{*n} \\ L_{n*}R_{**} & L_{n*}R_{*n} + l_{nn}r_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{**} & A_{*n} \\ A_{n*} & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (36)$$

somit lässt sich direkt erkennen, dass  $LR = A$  gilt und somit sind  $L$  und  $R$  eine LR-Zerlegung. ■