Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 6

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 6, 2014

T10. mehrdimensionales Newton-Verfahren an einem Beispiel

Gegeben ist folgendes nicht-lineares Gleichungssystem:

$$e^{1-x} = \cos(y) - 0.2 \tag{1}$$
$$x^2 + y - (1+y)x = \sin(y) + 0.2 \tag{2}$$

Um das Gleichungssystem mittels Newton-Verfahren zu Lösen, stellen wir zunächst die Gleichungen um, und erhalten folgende Abbildung:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(y) - 0.2 - e^{1-x} \\ \sin(y) + 0.2 + (1+y)x - y - x^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Wir berechnen die Jacobi-Matrix:

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{1-x} & -\sin(y) \\ 1 + y - 2x & \cos(y) + x - 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Die Newton-Iterationsvorschrift lautet:

$$\boldsymbol{x}^{(m+1)} = \boldsymbol{x}^{(m)} - Df(\boldsymbol{x}^{(m)})^{-1} f(\boldsymbol{x}^{(m)}) \tag{5}$$

Mit dem Startwert $(1,0)^T$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

T11. Rayleigh-Quotient und Eigenwerte

a) Gegeben ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und symmetrisch. Es soll gezeigt werden, dass der Gradient des Rayleigh-Quotienten

$$\Lambda_A(x) = \frac{\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_2}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_2} \tag{6}$$

in einem Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ durch:

$$\Lambda_A(\boldsymbol{x}) = \frac{2(A\boldsymbol{x} - \Lambda_A(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x})}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_2} \tag{7}$$

gegeben ist.

Zunächst werden die partiellen Ableitungen der Skalarprodukte gebildet:

$$\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_2 = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = (A + A^*)\boldsymbol{x} = 2A\boldsymbol{x} \tag{8}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_2 = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x} \tag{9}$$

Mit Hilfe der Quotientenregel ergibt sich:

$$\nabla \Lambda_A(\boldsymbol{x}) = \frac{\nabla(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x})\nabla(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} \tag{10}$$

$$= \frac{2A\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x})2\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} \tag{11}$$

$$= \frac{2A\boldsymbol{x} - 2\dfrac{\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} \tag{12}$$

$$= \frac{2(A\boldsymbol{x} - \Lambda_A(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x})}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_2} \quad \blacksquare \tag{13}$$

b) Gegeben ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und symmetrisch und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ein Punkt, in dem der Rayleigh Quotient Λ_A ein Maximum besitzt. Es soll gezeigt werden, dass $\Lambda_A(\boldsymbol{x})$ ein Eigenwert zum Eigenvektor $\boldsymbol{x}$ ist, also $A\boldsymbol{x} = \Lambda_A(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$ gilt.

Für das Maximum gilt, dass

$$\nabla \Lambda_A(\boldsymbol{x}) = \frac{2(A\boldsymbol{x} - \Lambda_A(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x})}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_2} = 0 \tag{14}$$

Damit (14) erfüllt werden kann, muss der Zähler Null werden. Es folgt:

$$2(A\boldsymbol{x} - \Lambda_A(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}) \overset{!}{=} 0 \tag{15}$$

$$A\boldsymbol{x} - \Lambda_A(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = 0 \tag{16}$$

$$A\boldsymbol{x} = \Lambda_A(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \quad \blacksquare \tag{17}$$