Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 8

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 21, 2014

T14. Eigenwerte und orthogonale Iteration

Es seien $n, k \in \mathbb{N}, n > k$ und $A \in \mathbb{R}^{(n\times n)}, Q \in \mathbb{R}^{(n\times k)}$ orthogonal. Es sei $\Lambda := Q^*AQ$ mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^k$, sodass $\Lambda x = \lambda x$. Es sei $y := Qx$. Zu zeigen:

$$\frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|y\|_2} \leq \|Q\Lambda - AQ\|_2 \tag{1}$$

Es gilt $\Lambda \in \mathbb{R}^{(k\times k)}$. Wir beginnen zunächst mit der linken Seite der Ungleichung. Da Q orthogonal ist, gilt $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^k$, woraus folgt:

$$\frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|y\|_2} = \frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|Qx\|_2} = \frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|x\|_2}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|x\|_2} &\leq \|Q\Lambda - AQ\|_2 \\ &\leq \|Q(Q^*AQ) - AQ\|_2 \\ &\leq \|(QQ^*)AQ - AQ\|_2 \\ &\leq \|AQ - AQ\|_2 \\ &\leq \|0\|_2 \\ &\leq 0\end{aligned}$$

Es folgt somit, dass $\frac{\|Ay-\lambda y\|_2}{\|x\|_2} = 0$ sein muss. Der Nenner darf nicht Null sein, somit muss gelten $\|Ay - \lambda y\|_2 = 0$. Mit der Definitheit der euklidischen Norm folgt $Ay - \lambda y = 0$. Mit $y = Qx$ folgt:

$$AQx - \lambda Qx = 0Q \tag{2}$$

T15. Wilkinson-Shift

Gegeben:

$$S = \begin{pmatrix} a_{n-1,n-1}^{(m)} & a_{n-1,n}^{(m)} \\ a_{n,n-1}^{(m)} & a_{n,n}^{(m)} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Wir suchen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} p_S(\lambda) &= |\lambda I - S| \qquad (4)\\ &= \left| \begin{pmatrix} a^{(m)}_{n-1,n-1} & a^{(m)}_{n-1,n} \\ a^{(m)}_{n,n-1} & a^{(m)}_{n,n} \end{pmatrix} \right| \qquad (5)\\ &= (\lambda - a^{(m)}_{n-1,n-1})(\lambda - a^{(m)}_{n,n}) - |a^{(m)}_{n-1,n}|^2 \qquad (6) \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Hinweises

$$m := \frac{a^{(m)}_{n-1,n-1} + a^{(m)}_{n,n}}{2} \qquad d := \frac{a^{(m)}_{n-1,n-1} - a^{(m)}_{n,n}}{2} \qquad (7)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} p_S(\lambda) &= (\lambda - m - d)(\lambda - m + d) - |a^{(m)}_{n-1,n}|^2 \qquad (8)\\ &= (\lambda - m)^2 - d^2 - |a^{(m)}_{n-1,n}|^2 \qquad (9) \end{aligned}$$

und damit ergibt sich für die Eigenwerte, nach Umstellen:

$$\lambda = m \pm \sqrt{d^2 + |a^{(m)}_{n-1,n}|^2} \qquad (10)$$