Numerische Mathematik für Ingenieure (SS 14) - Übung 8

Merikan Koyun & Julian Andrej

June 22, 2014

T14. Eigenwerte und orthogonale Iteration

Es seien $n, k \in \mathbb{N}, n > k$ und $A \in \mathbb{R}^{(n \times n)}, Q \in \mathbb{R}^{(n \times k)}$ orthogonal. Es sei $\Lambda := Q^*AQ$ mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^k$, sodass $\Lambda x = \lambda x$. Es sei $y := Qx$. Zu zeigen:

$$\frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|y\|_2} \leq \|Q\Lambda - AQ\|_2 \tag{1}$$

Es gilt $\Lambda \in \mathbb{R}^{(k \times k)}$. Wir beginnen zunächst mit der linken Seite der Ungleichung. Da Q orthogonal ist, gilt $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^k$, woraus folgt:

$$\frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|y\|_2} = \frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|Qx\|_2} = \frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|x\|_2}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|x\|_2} &\leq \|Q\Lambda - AQ\|_2 \\
&\leq \|Q(Q^*AQ) - AQ\|_2 \\
&\leq \|(QQ^*)AQ - AQ\|_2 \\
&\leq \|AQ - AQ\|_2 \\
&\leq \|0\|_2 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Es folgt somit, dass $\frac{\|Ay - \lambda y\|_2}{\|x\|_2} = 0$ sein muss. Der Nenner darf nicht Null sein, somit muss gelten $\|Ay - \lambda y\|_2 = 0$. Mit der Definitheit der euklidischen Norm folgt $Ay - \lambda y = 0$. Mit $y = Qx$ folgt:

$$AQx - \lambda Qx = 0 \tag{2}$$

T15. Wilkinson-Shift

Gegeben:

$$S = \begin{pmatrix} a_{n-1,n-1}^{(m)} & a_{n-1,n}^{(m)} \\ a_{n,n-1}^{(m)} & a_{n,n}^{(m)} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Wir suchen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$
\begin{aligned}
p_S(\lambda) &= |\lambda I - S| && (4)\\
&= \left| \begin{pmatrix} \lambda - a^{(m)}_{n-1,n-1} & -a^{(m)}_{n-1,n} \\ -a^{(m)}_{n,n-1} & \lambda - a^{(m)}_{n,n} \end{pmatrix} \right| && (5)\\
&= (\lambda - a^{(m)}_{n-1,n-1})(\lambda - a^{(m)}_{n,n}) - |a^{(m)}_{n-1,n}|^2 && (6)
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe des Hinweises

$$
m := \frac{a^{(m)}_{n-1,n-1} + a^{(m)}_{n,n}}{2} \qquad d := \frac{a^{(m)}_{n-1,n-1} - a^{(m)}_{n,n}}{2} \tag{7}
$$

ergibt sich:

$$
p_S(\lambda) = (\lambda - m - d)(\lambda - m + d) - |a^{(m)}_{n-1,n}|^2 \tag{8}
$$

Mit Hilfe der dritten binomischen Gleichung erhalten wir

$$
p_S(\lambda) = (\lambda - m)^2 - d^2 - |a^{(m)}_{n-1,n}|^2 \tag{9}
$$

und damit ergibt sich für die Eigenwerte, nach Umstellen:

$$
\lambda = m \pm \sqrt{d^2 + |a^{(m)}_{n-1,n}|^2} \tag{10}
$$

Laut Wilkinson, soll der Shift als Eigenwert der rechtsuntersten 2×2-Teilmatrix gewählt werden, der am nächsten an $a_{n,n}$ liegt. Wir wählen also als Nullstelle von $p_S(\lambda)$, diejenige bei der der Shift μ am nächsten am derzeitigen Iterationsschritt von $a^{(m)}_{n,n}$ liegt.
Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

$$
\begin{aligned}
d > 0 \quad &\Rightarrow \quad a^{(m)}_{n-1,n-1} > a^{(m)}_{n,n} \quad &\Rightarrow \quad a^{(m)}_{n,n} < m\\
d = 0 \quad &\Rightarrow \quad a^{(m)}_{n-1,n-1} = a^{(m)}_{n,n} \quad &\Rightarrow \quad a^{(m)}_{n,n} = m\\
d < 0 \quad &\Rightarrow \quad a^{(m)}_{n-1,n-1} < a^{(m)}_{n,n} \quad &\Rightarrow \quad a^{(m)}_{n,n} > m
\end{aligned}
$$

Es lässt sich erkennen, dass bei $d > 0$, $a^{(m)}_{n,n} < m$ gilt. Somit muss μ nach unten korrigiert werden. Es ergibt sich der erste Fall in (11). Die beiden letzten Fälle fassen wir zusammen, sodass aus $d \leq 0$, $a^{(m)}_{n,n} \geq m$ folgt. μ muss also gar nicht, oder nach oben korrigiert werden.

$$
\mu = \begin{cases} m - \sqrt{d^2 + |a^{(m)}_{n-1,n}|^2} & \text{falls } d > 0, \\ m + \sqrt{d^2 + |a^{(m)}_{n-1,n}|^2} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{11}
$$