

# Minimização com Restrições de Igualdade

## Método de penalização

Lucas Magno

### 1 INTRODUÇÃO

A fim de generalizar os métodos estudados anteriormente, neste trabalho serão considerados problemas de minimização com restrições não-lineares de igualdade, isto é, cuja região viável é um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  determinado por várias equações não-lineares. Para tal será estudado um método que aborda o problema transformando numa sequência de problemas mais simples (a saber, irrestritos) e suas limitações.

### 2 OTIMIZAÇÃO RESTRITA

Podemos formular o problema na seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeita a} & c_i(x) = 0, \quad i = 1, m \end{array} \quad (2.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e <sup>1</sup>

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ c_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, m \end{array}$$

Portanto, não podemos mais utilizar os algoritmos já desenvolvidos e precisamos definir as condições de otimalidade neste novo problema. Para isto, é preciso que se defina uma condição de qualificação, isto é, hipóteses adicionais que nos permitirão qualificar os minimizadores.

---

<sup>1</sup>Assumindo  $f$  e  $c_i$  continuamente diferenciáveis.

## 2.1 LICQ E MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Uma qualificação possível (de fato a mais fraca [Wachsmuth, 2013]) é a *Linear Independence Constraint Qualification* ou LICQ, definida a seguir.

**Definição 2.1.** Um ponto  $x^*$  é dito satisfazer LICQ se e somente o conjunto formado pelos gradientes das restrições em  $x^*$

$$\{\nabla c_1(x^*), \dots, \nabla c_m(x^*)\}$$

é linearmente independente.

Assim, podemos agora enunciar a condição necessária de primeira ordem [Friedlander, 1994]:

**Teorema 2.1.** Seja  $x^*$  um minimizador local do problema 2.1 que satisfaça LICQ, então existe  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{L}(x^*) &= \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla c_i(x^*) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde  $\lambda^*$  é conhecido como o vetor de multiplicadores de langrange.

Uma vez que temos uma condição de otimalidade, podemos a utilizar como critério de parada no algoritmo a ser implementado.

Vale notar também que podemos generalizar este método para restrições de *desigualdade*, da forma

$$c_i(x) \geq 0$$

e então obtemos as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). [Nocedal and Wright, 2006]

### 3 MÉTODO DE PENALIZAÇÃO

Mas como lidar com as restrições? A solução simples é não lidar com elas! [Friedlander, 1994] Quer dizer, podemos definir o seguinte problema irrestrito

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} \quad Q(x, \mu) = f(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=0}^m c_i(x)^2 \quad (3.1)$$

para dado  $\mu \in \mathbb{R}$ , no qual pontos fora da região viável recebem uma *penalidade* com peso  $1/2\mu$  e assim, para  $\mu$  suficientemente grande, espera-se que o algoritmo descarte pontos fora da região viável.

De fato, pode-se mostrar que, sendo a sequência  $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$  tal que

$$\mu_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (3.2)$$

então a sequência  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  de soluções dos subproblemas

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} \quad Q(x, \mu_k)$$

tende a  $x^*$ , que é solução do problema 2.1.

No entanto, isso requer a solução exata do subproblema 3.1. Por outro lado, se tivermos  $x_k$  tal que

$$\|\nabla Q(x_k, \mu_k)\| \leq r_k, \quad r_k \in \mathbb{R}$$

e

$$r_k \rightarrow 0$$

também é possível mostrar que  $x_k \rightarrow x^*$  e

$$\lambda_i^k = -\frac{c_i(x_k)}{\mu_k} \rightarrow \lambda_i^* \quad i = 1, m$$

o que é muito mais útil de um ponto de vista prático.

## 4 ALGORITMO

Tendo isto, podemos montar um algoritmo a fim de resolver o problema 2.1.

Dados  $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$  e  $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$  como definidos acima e  $x_0^S \in \mathbb{R}^n$

---

### Algorithm 4.1 Método de Penalização

---

**for**  $k = 0, 1, 2, \dots$  **do**

**Passo 1** Usando  $x_k^S$  como ponto inicial, encontrar  $x_k$  solução aproximada do subproblema 3.1 tal que  $\|\nabla Q(x_k, \mu_k)\| \leq r_k$

**Passo 2** Se  $x_k$  satisfaz o critério 2.2, parar.

**Passo 3** Escolher  $x_{k+1}^S$

**Passo 4** Escolher  $\mu_{k+1}$

**end for**

---

Por motivo de simplicidade, serão usadas as fórmulas

$$r_k = \epsilon$$

$$x_{k+1}^S \leftarrow x_k$$

$$\mu_{k+1} \leftarrow \mu_k / 2$$

onde  $\epsilon$  é a tolerância definida para o programa.

Além disso, definimos “satisfazer o critério 2.2” como

$$\|c(x)\| \leq \epsilon \quad (\text{viabilidade})$$

$$\|\nabla \mathcal{L}(x)\| \leq \epsilon \quad (\text{otimalidade})$$

### 4.1 MAL CONDICIONAMENTO

Como método no primeiro passo foi escolhido o de Newton, no entanto é necessário uma observação. Para encontrar uma direção de descida  $d$ , o método resolve um sistema na forma

$$\nabla^2 Q(x, \mu) d = -\nabla Q(x, \mu)$$

Porém, como

$$\begin{aligned} \nabla^2 Q(x, \mu) &= \nabla^2 f(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^m c_i(x) \nabla^2 c_i(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^m \nabla c_i(x) \nabla c_i(x)^\top \\ &= \nabla^2 \mathcal{L}(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^m \nabla c_i(x) \nabla c_i(x)^\top \end{aligned} \tag{4.1}$$

nota-se que o último termo é uma matriz de posto  $m$  e, para  $\mu$  suficientemente pequeno, vale que  $\nabla^2 Q(x, \mu)$  é mal condicionada, o que pode inviabilizar a solução do sistema.

Em seu lugar, podemos utilizar um sistema equivalente introduzindo uma variável auxiliar  $z \in \mathbb{R}^m$ :

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 \mathcal{L}(x) & A(x)^\top \\ A(x) & -\mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla Q(x, \mu) \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$A(x) = \begin{bmatrix} \nabla c_1(x) \\ \vdots \\ \nabla c_m(x) \end{bmatrix}$$

Esse sistema não apresenta mal condicionamento devido a  $\mu$  pequeno e portanto será utilizado na implementação do método de Newton, mas fora isso o método se mantém o mesmo do trabalho anterior.

## 5 O PROGRAMA

Para implementação do algoritmo foi feito um programa em FORTRAN 2008, usando como base o código já desenvolvido anteriormente, portanto aqui só serão mencionadas as adições referentes a este trabalho.

### 5.1 MÓDULOS

Os módulos novos criados foram:

**constrained** Implementa o método de penalização bem como o de Newton modificado.

**stats2** Fornece *wrappers* e subrotinas para automatizar a contagem e a impressão de diversas etapas durante a execução dos algoritmos.

**test** Implementa vários problemas de teste para o programa.

### 5.2 ARQUIVOS

Os arquivos mantiveram a hierarquia, mas foi criado um diretório *data/* para guardar os resultados da execução (*.dat*) e também os códigos para geração dos gráficos (*.gp*), através do programa *gnuplot*.

### 5.3 COMPILAÇÃO

A compilação manteve a mesma estrutura:

**make EP2** Compila o programa, criando o executável.

**make tex2** Gera os gráficos e compila o relatório, criando o arquivo *.pdf*.

**make clean** Realiza a limpeza, deletando os arquivos de saída.

A única observação é que, para o relatório, foi utilizado o programa *rubber* [Kishimoto, 2009], em sua versão 1.4.

## 6 RESULTADOS

Foram escolhidos quatro problemas para testar o programa, definidos no  $\mathbb{R}^2$  a fim de ilustração, cujos resultados foram:

	$\ c^*\ $	$\ \nabla \mathcal{L}^*\ $	sub	$f$	$\nabla f$	$\nabla^2 f$	armijo	norma	ângulo
teste 1	0.60E-06	0.50E-12	25	2368	1000	949	470	0	5320
teste 2	0.98E-06	0.37E-08	36	7934	3979	3906	122	0	16251
teste 3	0.60E-06	0.91E-06	26	2816	1099	1046	724	0	5774
teste 4	FC								

Tabela 6.1: Saída do programa para os quatro problemas testados, com  $\epsilon = 10^{-6}$ ,  $\theta = 10^{-5}$ ,  $\gamma = \sigma = 10^{-4}$  e ponto inicial  $(1, 1)$ .

E a seguir vamos analisar cada um.

### 6.1 NÃO-LINEARIDADE DAS RESTRIÇÕES

Os problemas 1 e 2 são, respectivamente

$$\text{minimizar } x^2 + y^2$$

$$\text{sujeita a } x + y - 1 = 0$$

$$\text{minimizar } x^2 + y^2$$

$$\text{sujeita a } (x + y - 1)^3 = 0$$

Ou seja, ambos consistem em achar o ponto da reta  $x + y = 1$  mais próximo à origem e a única diferença entre eles é que a restrição é linear no primeiro, mas não no segundo.

Visualizando o progresso do algoritmo através dos gráficos

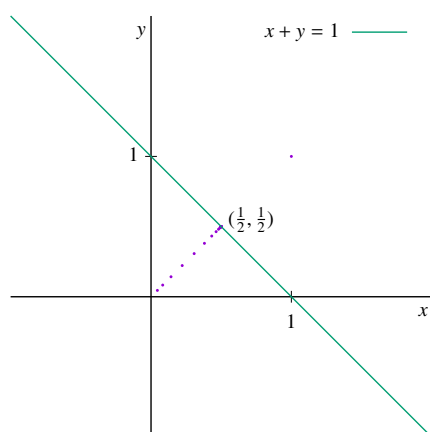


Figura 6.1: Sequência de soluções  $x_k$  para o problema 1.

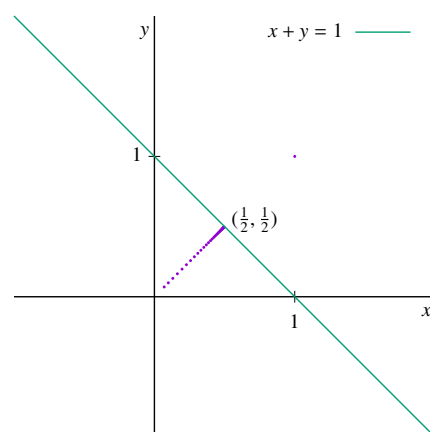


Figura 6.2: Sequência de soluções  $x_k$  para o problema 2.

fica claro que ambos chegam à mesma solução de forma similar. No entanto, tanto pelo gráfico quanto pela tabela de resultados 6, nota-se que o segundo caso resolve um número maior de subproblemas e ainda assim termina com uma precisão pior do que o primeiro, então restrições não-lineares introduzem uma certa dificuldade comparadas às lineares para este algoritmo.

## 6.2 LICQ

Para ilustrar a necessidade da LICQ para o método, dois outros problemas foram testados:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && x^2 + y^2 \\ &\text{sujeita a} && x = 1 \\ &&& y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && x^2 + y^2 \\ &\text{sujeita a} && (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \\ &&& (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1 \end{aligned}$$

nos quais em ambos a região viável se restringe a um único ponto,  $x^* = (1, 0)$ , e cujos gradientes da função e das restrições nesse ponto são, respectivamente:

$$\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla c_1(x^*) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla c_2(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla c_1(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \nabla c_2(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

em que fica claro que, enquanto os gradientes das restrições do primeiro são linearmente independentes, os do segundo não o são.

Novamente, podemos observar os gráficos:

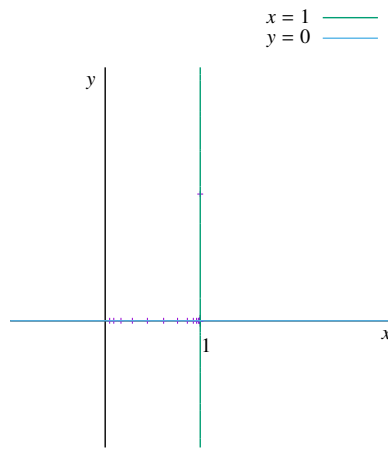


Figura 6.3: Sequência de soluções  $x_k$  para o problema 3.

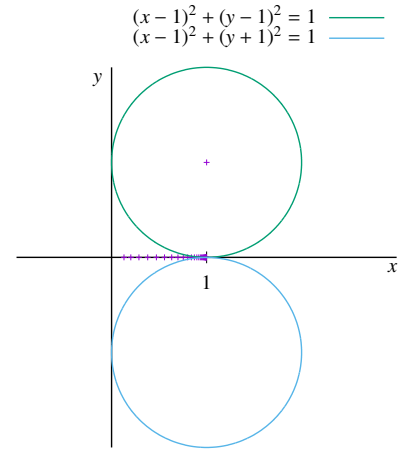


Figura 6.4: Sequência de soluções  $x_k$  para o problema 4.

e se nota que ambos se aproximam da solução  $x^*$ . Apesar disso, como visto na tabela 6, o programa não converge para o problema 4.

A partir da evolução dos valores dos critérios de parada para os últimos pontos do algoritmo em ambos os problemas

$\ c(x)\ $	$\ \nabla \mathcal{L}(x)\ $
0.95E-05	0.54E-06
0.48E-05	0.11E-11
0.24E-05	0.11E-10
0.12E-05	0.28E-11
0.60E-06	0.91E-06

Tabela 6.2: Valores dos critérios de parada para a sequência  $x_k$  do problema 3.

$\ c(x)\ $	$\ \nabla \mathcal{L}(x)\ $
0.10E-03	0.11E-07
0.63E-04	0.20E-06
0.40E-04	0.31E-06
0.25E-04	0.53E-06
0.16E-04	0.32E-07

Tabela 6.3: Valores dos critérios de parada para a sequência  $x_k$  do problema 4.

somado ao fato de que o programa resolveu 26 subproblemas para o problema 3 e 28 para o 4 (embora não esteja informado na tabela 6), observa-se que a convergência se dá muito mais rapidamente para o primeiro, e é possível ver o ponto em que atinge a região viável, na qual vale a condição de parada (dentro da tolerância).

Para o segundo problema, porém, o algoritmo acaba não alcançando a região viável, pois, conforme ele se aproxima dela, os gradientes das restrições se tornam linearmente dependentes e ortogonais a  $\nabla f$ , de forma que não seja possível anular  $\nabla \mathcal{L}$ .

## 7 CONCLUSÃO

O método de penalização é, então, uma forma simples de se resolver problemas de minimização com restrições de igualdade, já que os converte em uma sequência de problemas irrestritos, que são mais fáceis de se tratar.

Entretanto, ao se utilizar os multiplicadores de Lagrange como critério de parada, o método acaba não sendo universal, pois requer condições específicas (LICQ) que não necessariamente são satisfeitas pelas devidas soluções.

Mesmo assim, essa exigência não é muito forte, então seu uso como primeira abordagem a essa classe de problemas é bem justificado.



## REFERÊNCIAS

- A. Friedlander. *Elementos de Programação Não-Linear*. Editora UNICAMP, 1 edition, 1994.
- P. N. Kishimoto. Rubber in launchpad, November 2009. URL <https://launchpad.net/rubber/>.
- J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, New York, 2nd edition, 2006.
- G. Wachsmuth. On {LICQ} and the uniqueness of lagrange multipliers. *Operations Research Letters*, 41(1):78 – 80, 2013. ISSN 0167-6377. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.orl.2012.11.009>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167637712001459>.