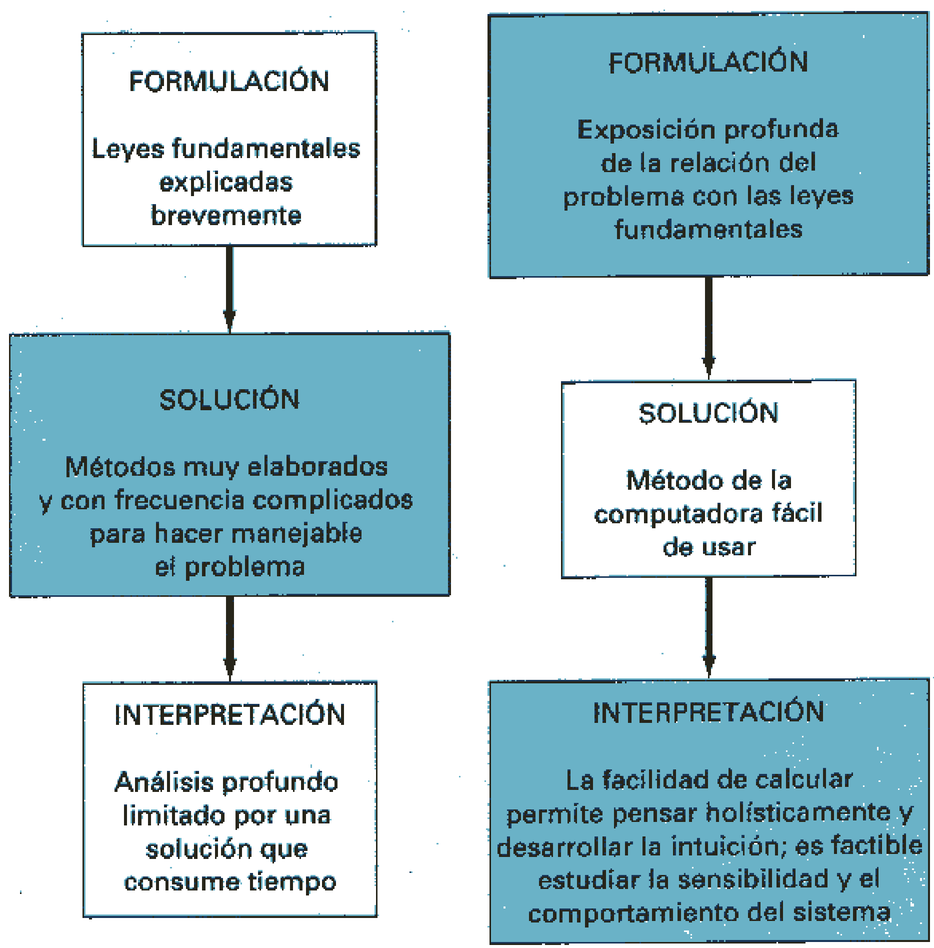
Clase 1

Modelos, computadoras y análisis del error

Métodos numéricos

Técnicas que permiten resolver problemas matemáticos (de cierta complejidad) a través de (uan gran cantidad de) operaciones aritméticas.

Solución de problemas en Ingeniería



a) *b)*

Los métodos numéricos y la práctica en ingeniería

Razones por la que estudiar MN:

Los MN son herramientas muy poderosas para la solución de problemas

Dan los fundamentos del software 'enlatado'

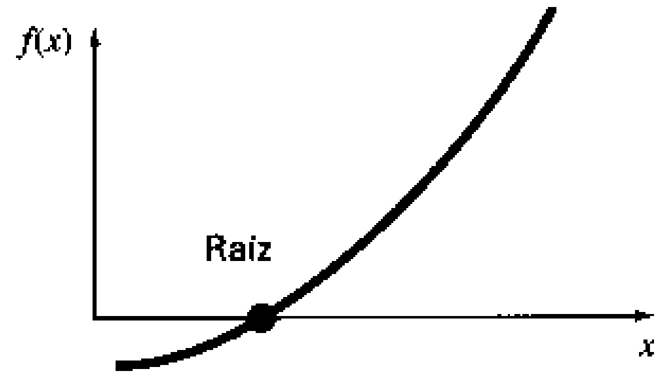
Permiten resolver problemas sin el uso de software 'enlatado'

Permiten cuantificar y acotar los errores que producen las computadoras

Ayudan a entender distintas ramas de la Matemática

Resumen

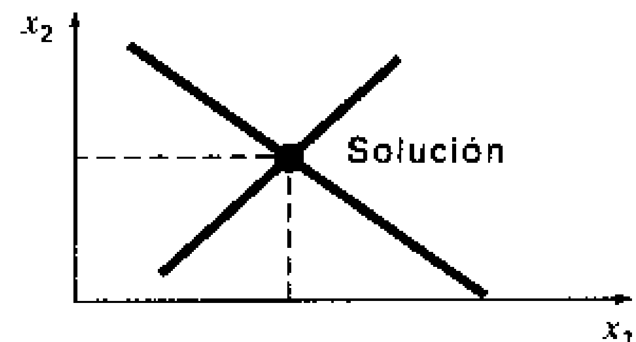
a) *Parte 2*: Raíces de ecuaciones
Resuelva $f(x) = 0$ para x.



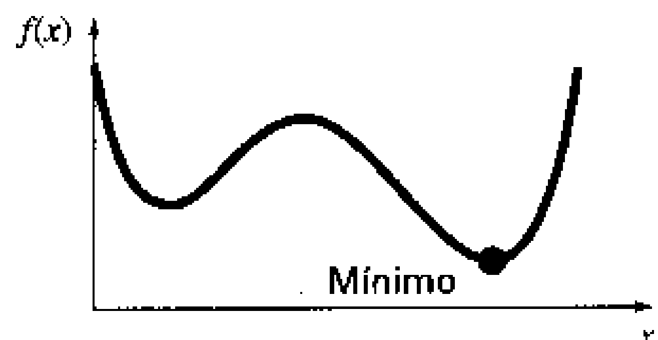
b) *Parte 3*: Sistema de ecuaciones algebraicas lineales
Dadas las a's y las c's, resolver

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$$

para las x's.

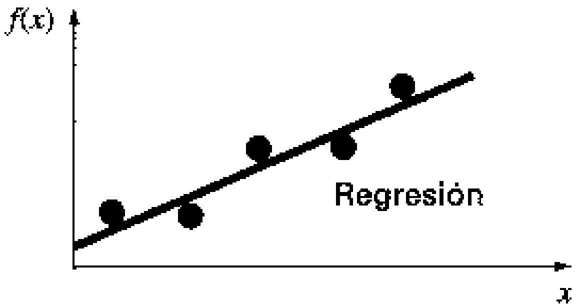


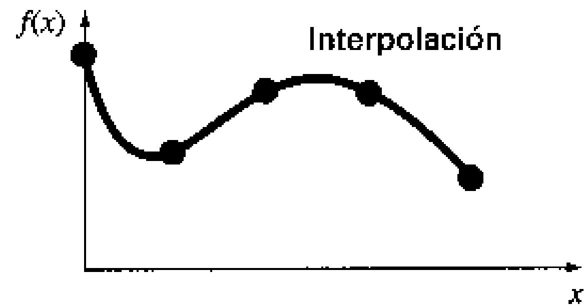
c) *Parte 4*: Optimización
Determine la x que da el óptimo de $f(x)$.



Resumen

d) *Parte 5*: Ajuste de curvas

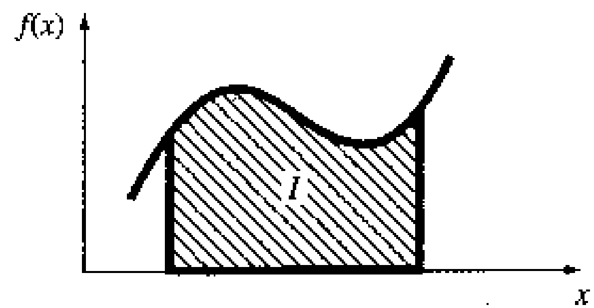




e) *Parte 6*: Integración

$I = \int_a^b f(x)\,dx$

Encuentre el área bajo la curva.



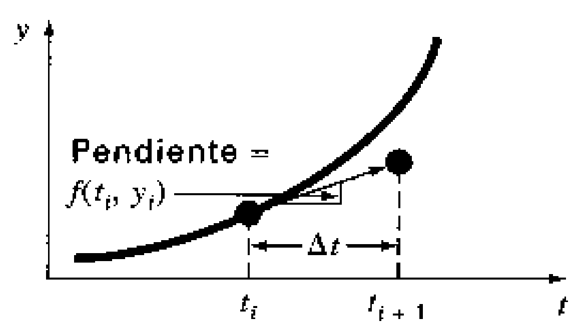
f) *Parte 7*: Ecuaciones diferenciales ordinarias

Dada

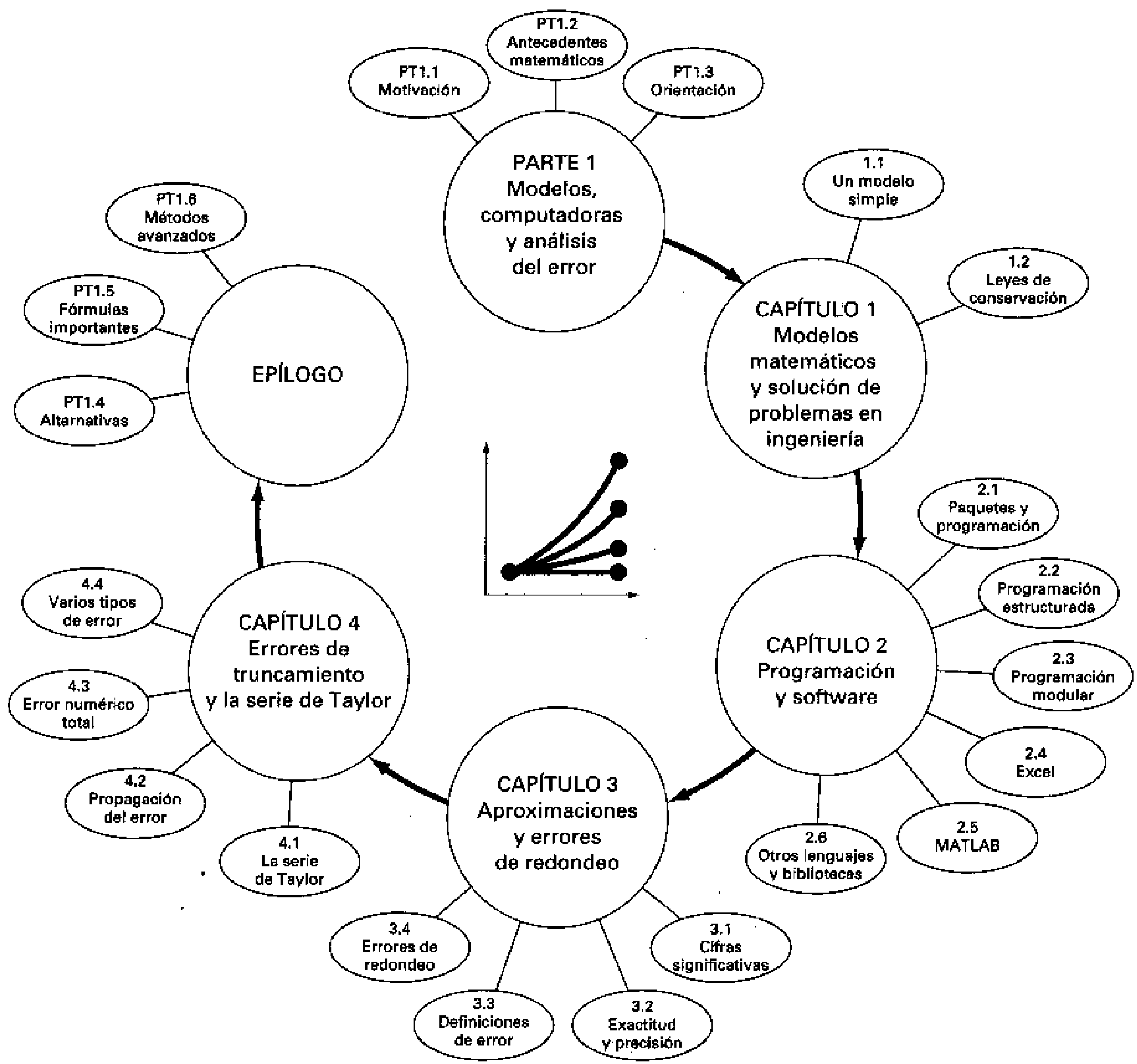
$$\frac{dy}{dt} \simeq \frac{\Delta y}{\Delta t} = f(t, y)$$

resolver para y como función de t.

$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\,\Delta t$



Organización



Modelos matemáticos

Formulación (o ecuación) que expresa las características *esenciales* de un sistema físico:

$$\begin{matrix} variable \\ dependiente \end{matrix} = f\left(\begin{matrix} variables \\ independientes \end{matrix}, parámetros, \begin{matrix} términos \\ fuente \end{matrix} \right)$$

Ejemplo: paracaidista

Modelo matemático

$$F = m\,a$$

Es decir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

siendo

$$F = F_D + F_U$$

con

$$F_D = m\,g \;\;;\;\; F_U = -c\,v$$

Ejemplo: paracaidista

Reemplazando y reordenando,

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v(t)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO). Como se resuelve?:

Por métodos analíticos → Análisis Matemático

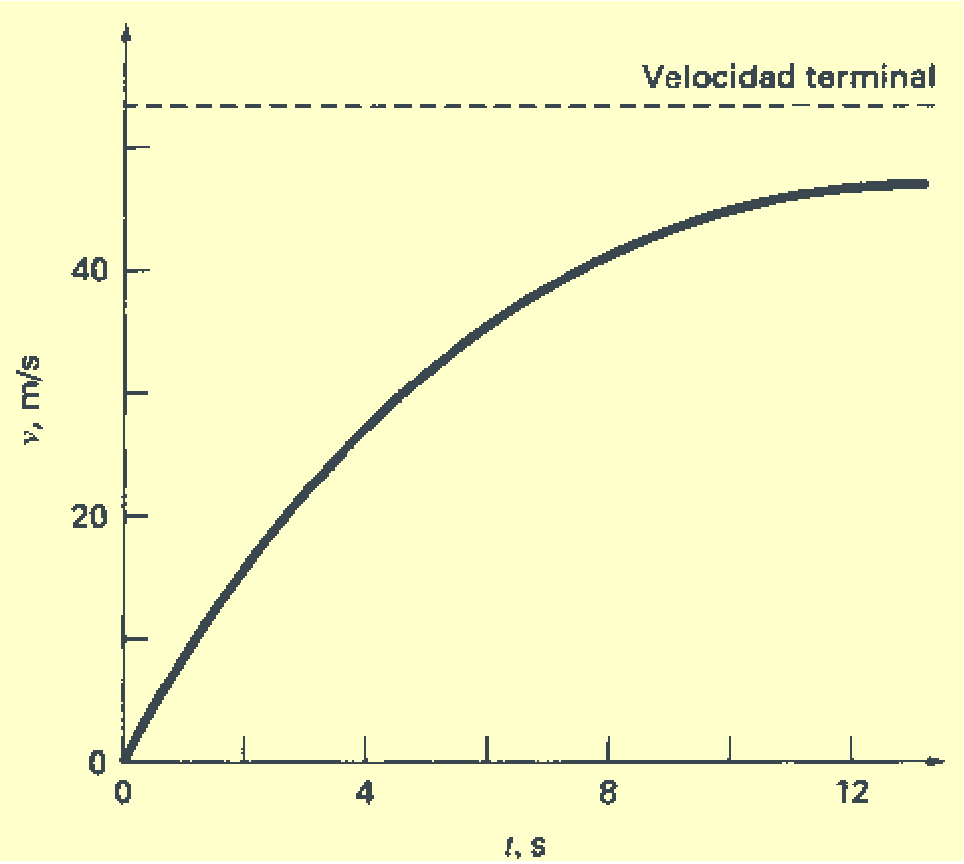
Por métodos numéricos

Solución analítica

$$v(t)=\frac{g\,m}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

Datos: m = 68.1 kg ; c = 12.5 kg/s

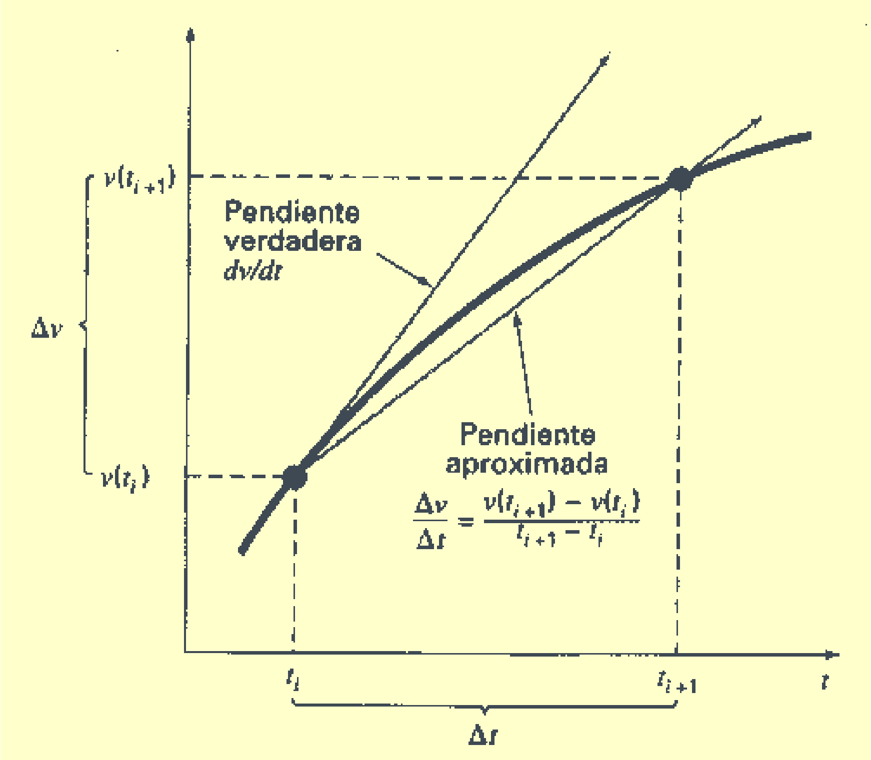
t, s	v m/s
0	0.00
2	16.40
4	27.77
6	35.64
8	41.10
10	44.87
12	47.49
∞	53.39



Solución numérica

Reemplazamos la derivada por el cociente incremental:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$



Reemplazando y reordenando:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m} v(t_i) \right] (t_{i+1} - t_i)$$

Método de Euler

Solución numérica

Con los mismos datos,

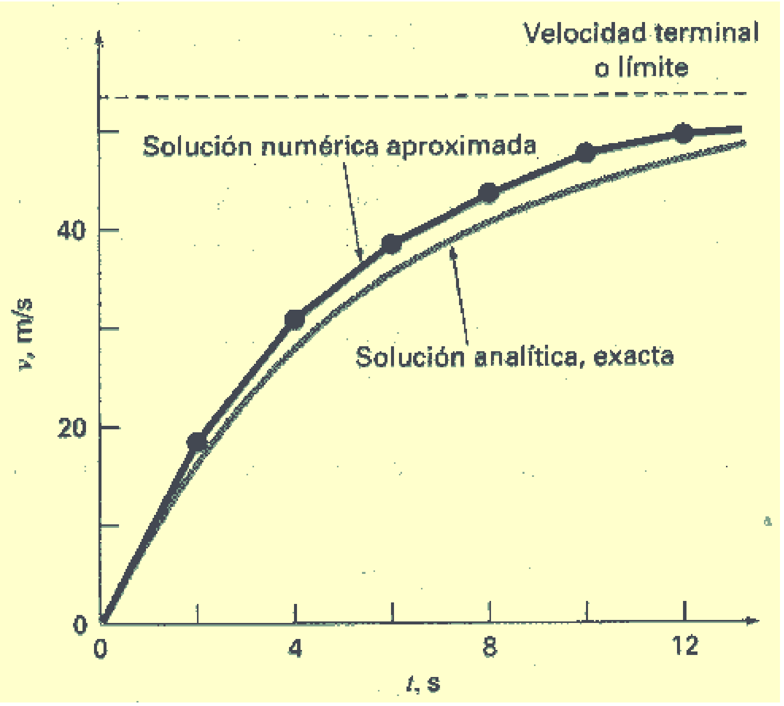
Para t_{i+1} = 2 s

$$v = 0 + \left[9.8 - \frac{12.5}{68.1}(0) \right] 2 = 19.60\, m/s$$

Para t_{i+1} = 4 s

$$v = 19.60 + \left[9.8 - \frac{12.5}{68.1}(19.60) \right] 2 = 32.00\, m/s$$

t, s	v m/s
0	0.00
2	19.60
4	32.00
6	39.85
8	44.82
10	47.97
12	49.96
∞	53.39



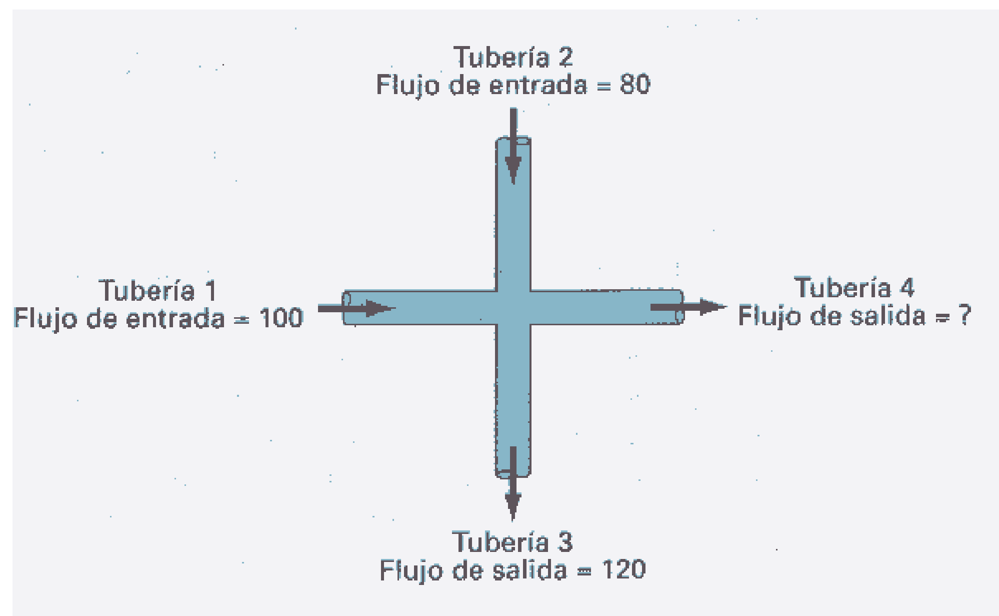
Leyes de conservación e ingeniería

Cambio = incremento – decremento

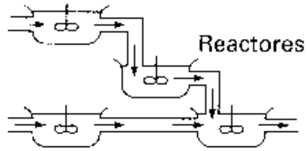
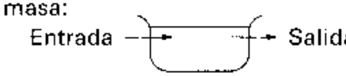
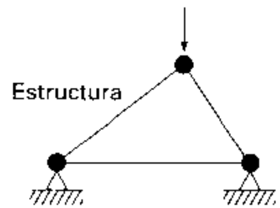
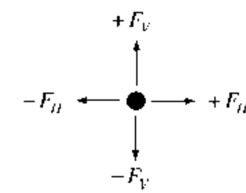
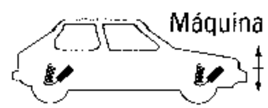
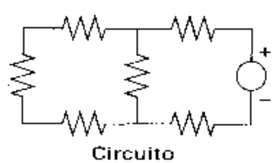
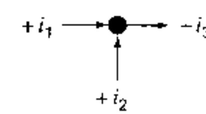
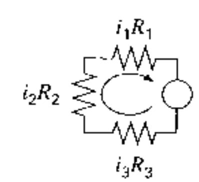
Si el problema es estacionario, cambio = 0 entonces

incremento = decremento

Ejemplo: flujo en tuberías (conservación de masa)



Leyes de conservación e ingeniería

<table>
<tr><th>Campo</th><th>Dispositivo</th><th>Principio aplicado</th><th>Expresión matemática</th></tr>
<tr><td>Ingeniería química</td><td></td><td>Conservación de la masa</td><td>Balance de la masa:

En un periodo
Δmasa = entradas – salidas</td></tr>
<tr><td>Ingeniería civil</td><td></td><td>Conservación del momentum</td><td>Equilibrio de fuerzas:

En cada nodo
Σ fuerzas horizontales $(F_H) = 0$
Σ fuerzas verticales $(F_V) = 0$</td></tr>
<tr><td>ngeniería mecánica</td><td></td><td>Conservación del momentum</td><td>Equilibrio de fuerzas:
Fuerza hacia arriba
$x = 0$
Fuerza hacia abajo
$m\frac{d^2x}{dt^2}$ = Fuerza hacia abajo – fuerza hacia arriba</td></tr>
<tr><td>ngeniería eléctrica</td><td></td><td>Conservación de la carga</td><td>Balance de corriente:
En cada nodo
Σ corriente $(i) = 0$
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Conservación de la energía</td><td>Balance de voltaje:

Alrededor de cada malla
Σ fems – Σ caída de potencial en los resistores = 0
$\Sigma\,\xi - \Sigma\, iR = 0$</td></tr>
</table>

Problemas 1.1 a 1.18 (p. 22)

Programación y software

- Necesidad de realizar numerosos cálculos en forma rápida y eficiente
- Dos paradigmas:
  - Planilla de cálculo
  - Programación estructurada: basada en las estrcturas de control:
    - Secuencia
    - Decisión
    - Repetición

Estrcuturas de control en GNUOctave

Decisión

```
if condicion
   Instruccion;
[else
   Instrucción;]
endif
```

```
switch expresion
   case valor_1
      Instruccion;
   case valor_2
      Instruccion;
...
   otherwise
      Instruccion;
endswitch
```

Repetición

```
while condicion
   Instruccion;
endwhile
```

```
do
   Instruccion;
until condicion;
```

```
for variable = rango
   Instruccion;
endfor
```

```
for var=v_in:[paso:]v_fin
   Instruccion;
endfor
```

Programación y software

Ejemplo: resolver numéricamente el problema del paracaidista con un paso $\Delta t = 0.1$ s, para t entre 0 y 10 s. Comparar las soluciones numérica (aproximada) y analítica (exacta).

Solución

Con planilla de cálculo: paracaidista.ods

Con un programa en GNUOctave (MATLAB):

Código: paracaidista.m

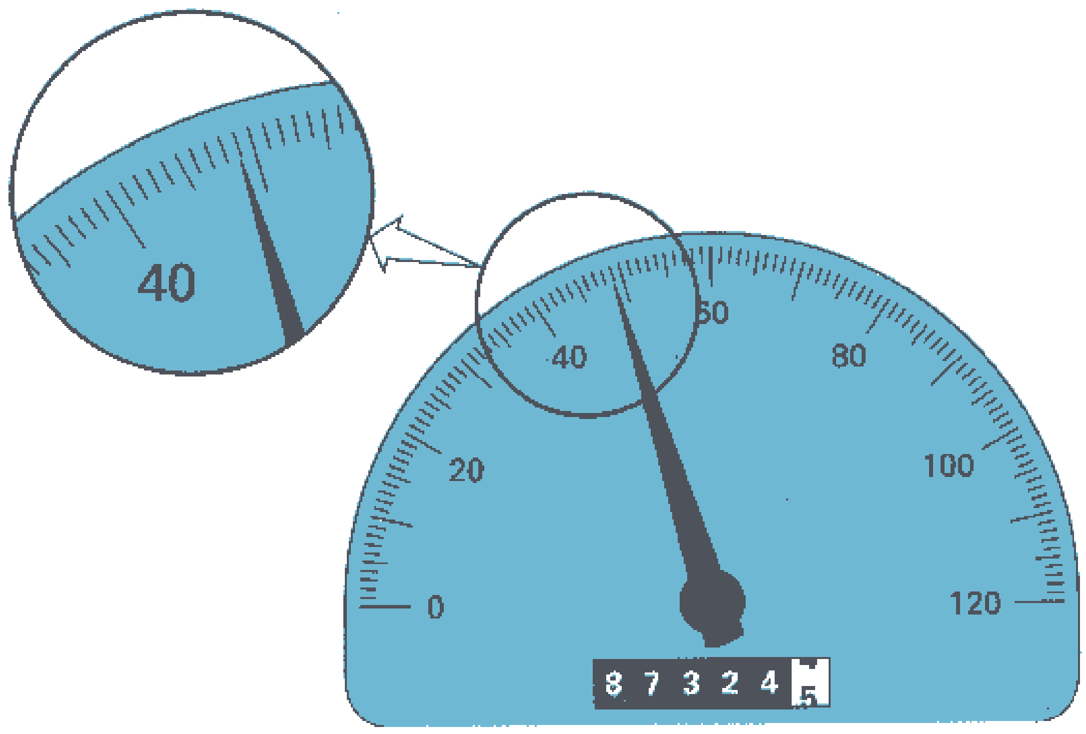
Problemas 2.1 a 2.20 (p. 48)

Errores numéricos

- De redondeo
  - Capacidad limitada de almacenamiento de las computadoras
- De truncamiento
  - Diferencia entre la formulación matemática exacta y la aproximación numérica

Cifras significativas

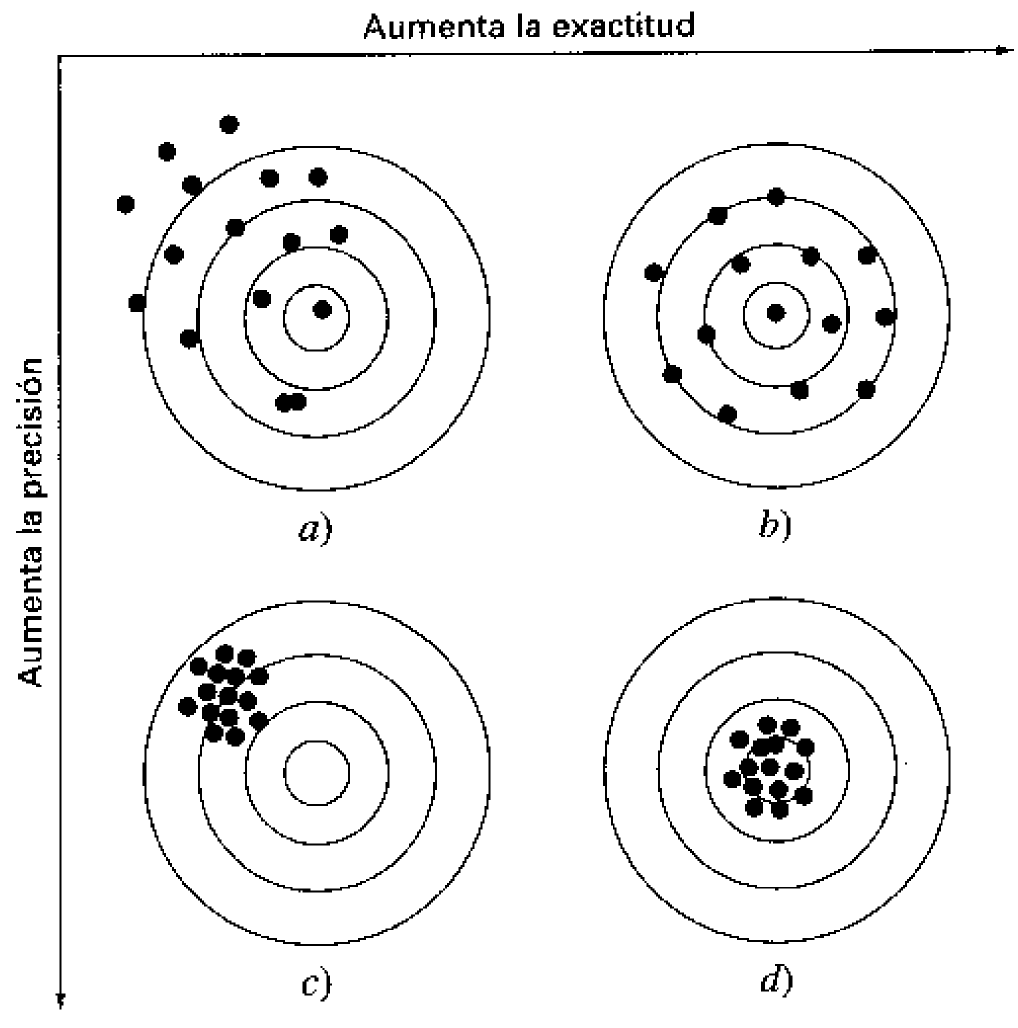
Las que pueden usarse en forma confiable: el número de dígitos certeros, más uno estimado



Exactitud y precisión

Exactitud: qué tan cercano está el valor calculado del verdadero

Precisión: qué tan cercanos se encuentran distintos valores calculados entre sí



Definiciones de error

Valor verdadero = valor aproximado + error

E_t = valor verdadero – valor aproximado

$$\text{Error relativo verdadero} = \frac{\text{error verdadero}}{\text{Valor verdadero}}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\text{error verdadero}}{\text{Valor verdadero}} \times 100\%$$

Definiciones de error

Si se desconoce el valor verdadero:

$$\varepsilon_a = \frac{\text{error aproximado}}{\text{Valor aproximado}} \times 100\%$$

En métodos iterativos:

$$\varepsilon_a = \frac{\text{aprox. Actual} - \text{aprox. ant.}}{\text{Aprox. Actual}} \times 100\%$$

Las iteraciones siguen hasta que

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$$ **Tolerancia porcentual**

Para asegurar n cifras significativas:

$$\varepsilon_s = (٠.٥ \times ١٠^{٢-n})$$

Ejemplo

Estimación del error con métodos iterativos

Expansión en serie de McLaurin de la función exponencial:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Estimar el valor de $e^{0.5}$ con 3 cifras significativas

Ejemplo

Tolerancia porcentual

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-3})\,\% = 0.05\,\%$$

Cálculo: e_ala_05.ods

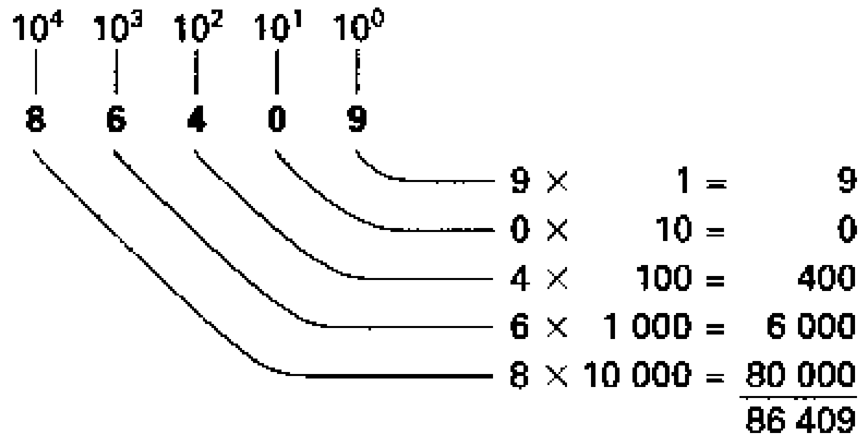
Errores de redondeo

Cantidad limitada de cifras significativas en la computadora

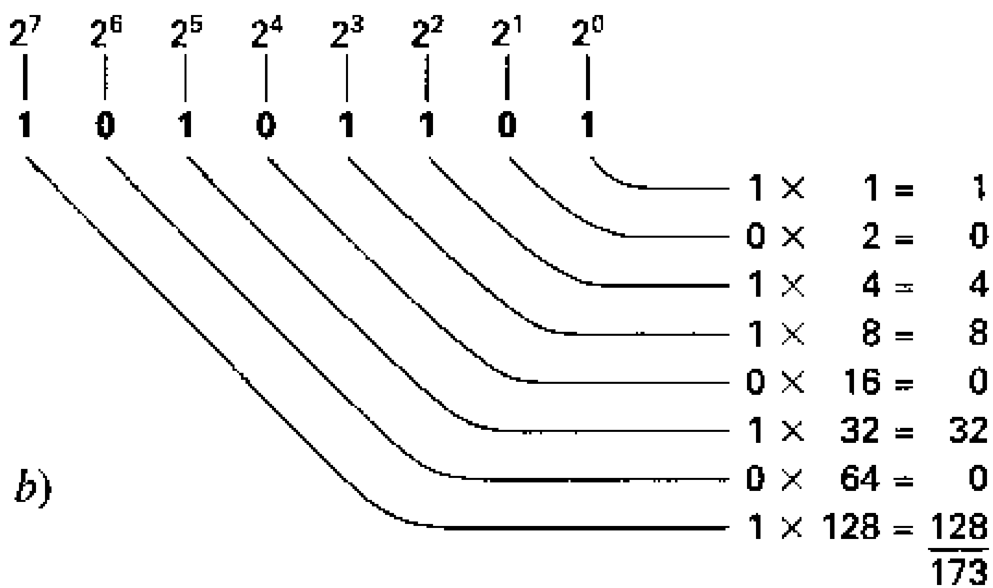
Representación de los números en la computadora: palabra (secuencia de bits – 0's o 1's).

Sistema numérico binario

Notación posicional



a)

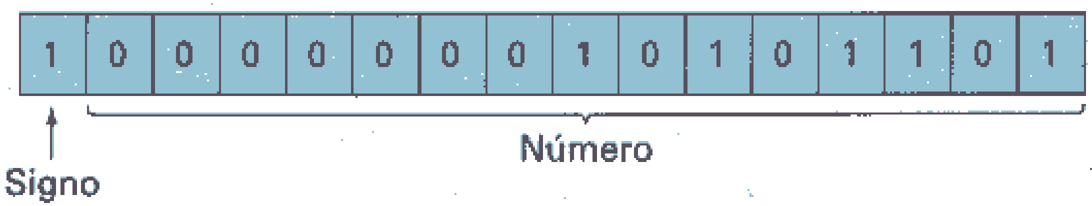


b)

Representación entera

Primer bit reservado para el signo

- Ejemplo: almacenar el número -173 en una computadora de 16 bits



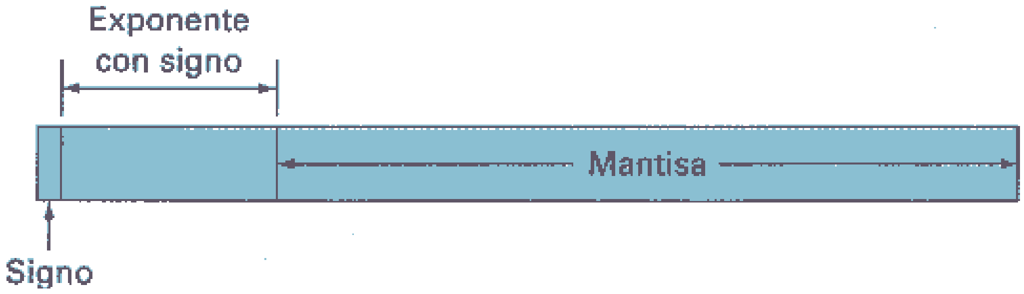
Punto flotante

$$m \cdot b^{e} \;\; , \;\; \frac{1}{b} \leq m < 1$$

m: mantisa ; b: base; e: exponente

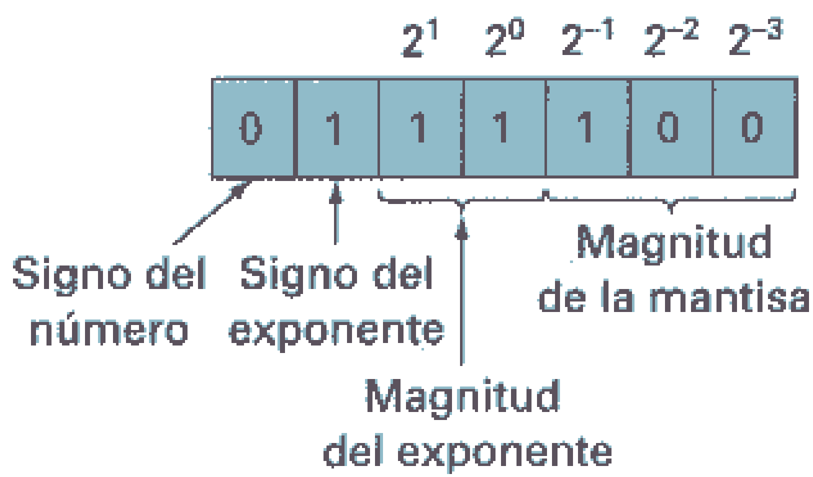
Ejemplo: el número 156.78 se representa como

$$0.15678 \times 10^{3}$$



Ejemplo

Determine un conjunto hipotético de números con punto flotante para una máquina que guarda información usando palabras de 7 bits.



Ejemplo

$0111100 = (1x2^{-1}+0x2^{-2}+0x2^{-3})x2^{-3}=(0.0625)_{10}$

$0111101 = (1x2^{-1}+0x2^{-2}+1x2^{-3})x2^{-3}=(0.078125)_{10}$

$0111110 = (1x2^{-1}+0x2^{-2}+0x2^{-3})x2^{-3}=(0.093750)_{10}$

$0111111 = (1x2^{-1}+0x2^{-2}+0x2^{-3})x2^{-3}=(0.109375)_{10}$

$0110100 = (1x2^{-1}+0x2^{-2}+0x2^{-3})x2^{-2}=(0.125000)_{10}$

$0110101 = (1x2^{-1}+0x2^{-2}+1x2^{-3})x2^{-2}=(0.156250)_{10}$

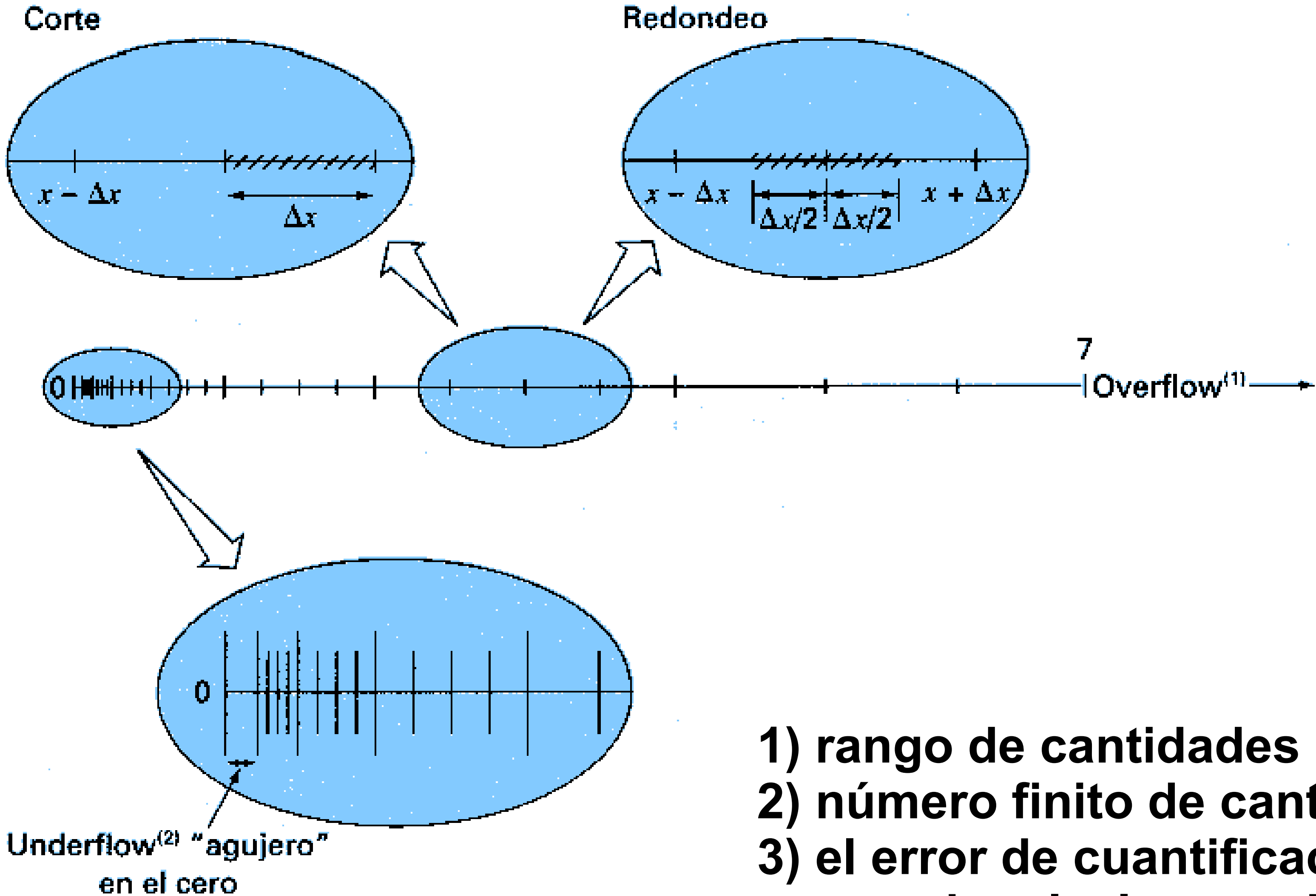
$0110110 = (1x2^{-1}+1x2^{-2}+0x2^{-3})x2^{-2}=(0.187500)_{10}$

$0110111 = (1x2^{-1}+1x2^{-2}+1x2^{-3})x2^{-2}=(0.218750)_{10}$

....

$0011111 = (1x2^{-1}+1x2^{-2}+1x2^{-3})x2^{3}=(7)_{10}$

Ejemplo



1) rango de cantidades limitado
2) número finito de cantidades
3) el error de cuantificación es proporcional a la magnitud del número representado

Manipulación aritmética

Ejemplo: sumar dos números en una computadora con mantisa de 4 dígitos y exponente de 1 dígito:

$0.1557 \cdot 10^1 + 0.4381 \cdot 10^{-1} =$

$$
\begin{array}{l}
0.1557 \quad\ \cdot 10^1 \\
\underline{0.004381 \cdot 10^1} \\
0.160081 \cdot 10^1
\end{array}
$$

se trunca a $0.1600 \cdot 10^1$

Ejemplo

- Sumar 1/10 10 millones de veces
  - Script en Python: suma_redondeo.py
- Ver ejemplos 3.7 y 3.8

Problemas 3.1 a 3.11

Errores de truncamiento

Se presentan al usar una aproximación en lugar de un procedimiento matemático exacto. Por ejemplo:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

Serie de Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$
$$+ \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n$$

Haciendo $h = x_{i+1} - x_i$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

con

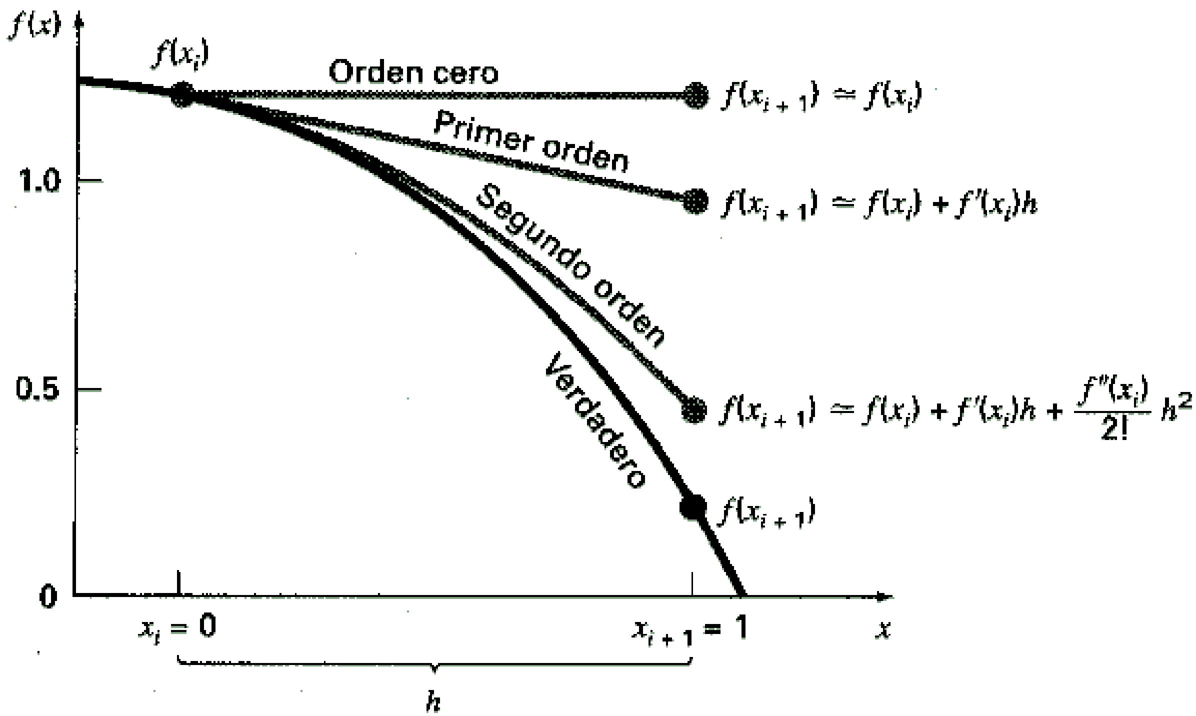
$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad , \quad x_i \le \xi \le x_{i+1}$$

Serie de Taylor

Aproximación de

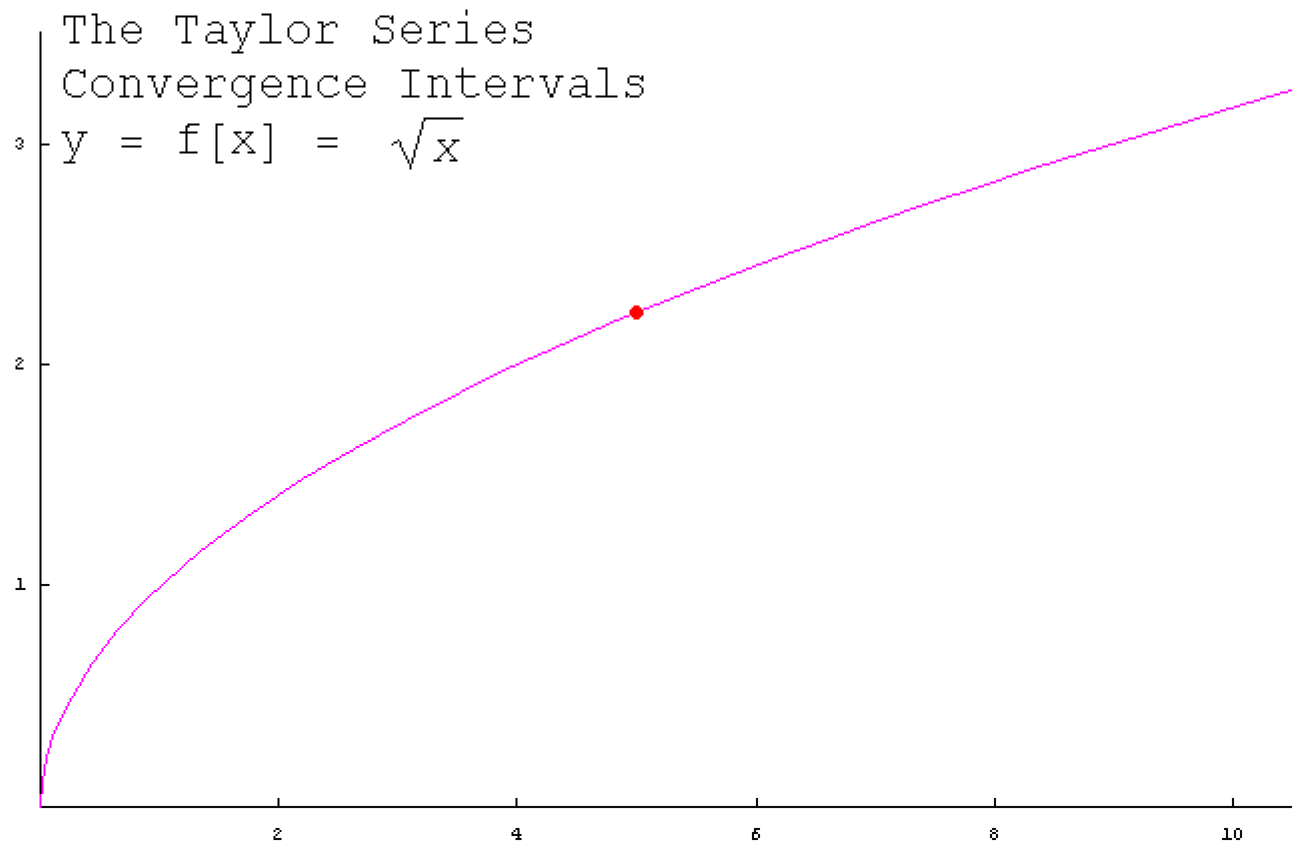
$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

Con $x_i = 0$ y $h = 1$



Serie de Taylor

Aproximación de $f(x)=\sqrt{x}$



Uso de la serie de Taylor para estimar los errores de truncamiento

Diferenciación numérica

Considerando la expansión de Taylor de orden 1,

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)\,h + R_1$$

Despejando y reemplazando,

$$v'(t_i) = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{R_1}{h} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{v''(\xi)}{2!}\frac{h^2}{h}$$

Que también se puede escribir como

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h)$$

Diferencia finita dividida hacia adelante

Diferenciación numérica

Tomando $-h = x_{i-1} - x_i$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \ldots$$

Despejando,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{f''(x_i)}{2!}h - \ldots$$

Es decir,

$$f'(x_i) = \frac{\nabla f_i}{h} + O(h)$$

Diferencia finita dividida hacia atrás

Diferenciación numérica

Restando miembro a miembro,

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \ldots$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \ldots$$

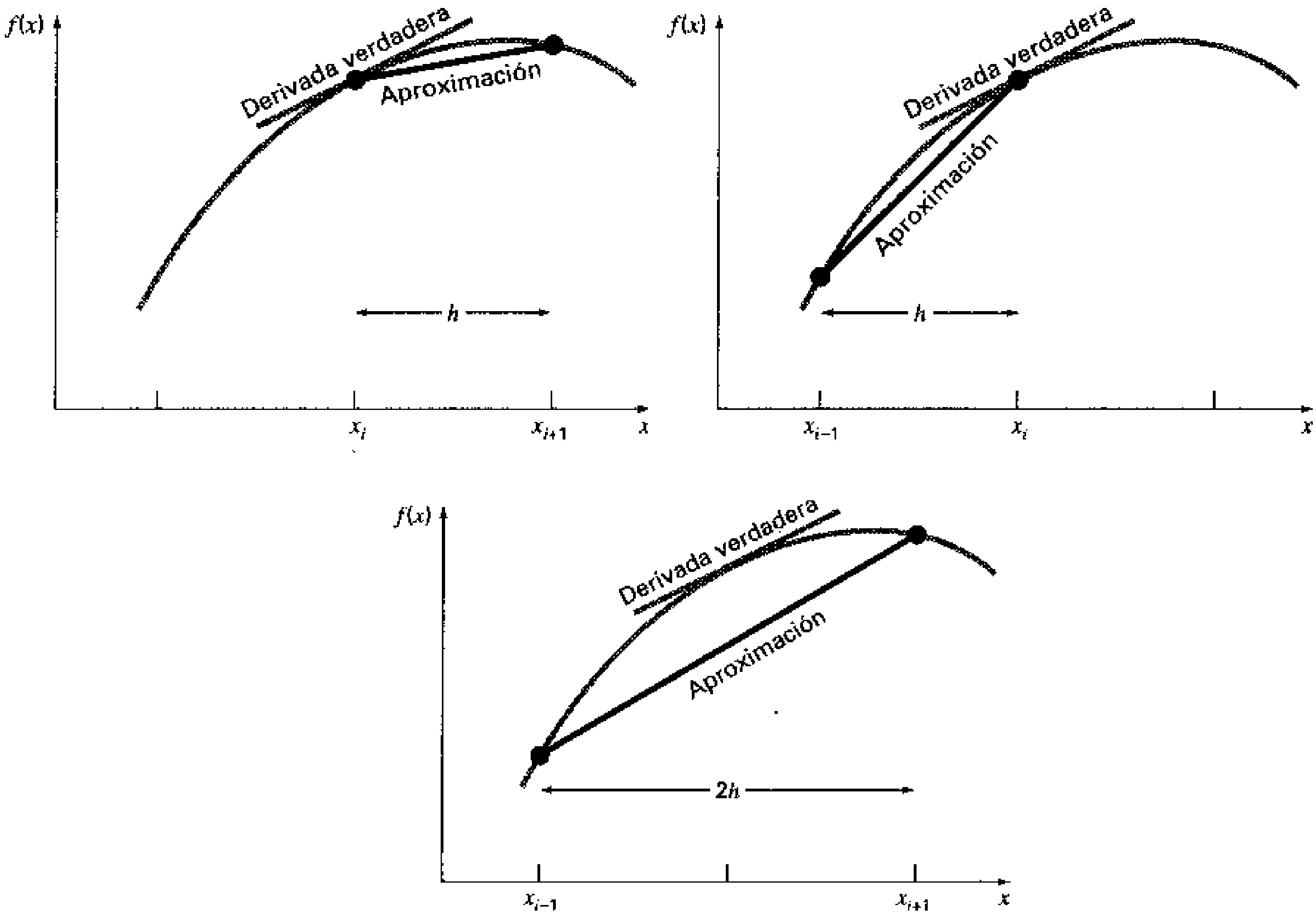
$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + 2\frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \ldots$$

reordenando,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

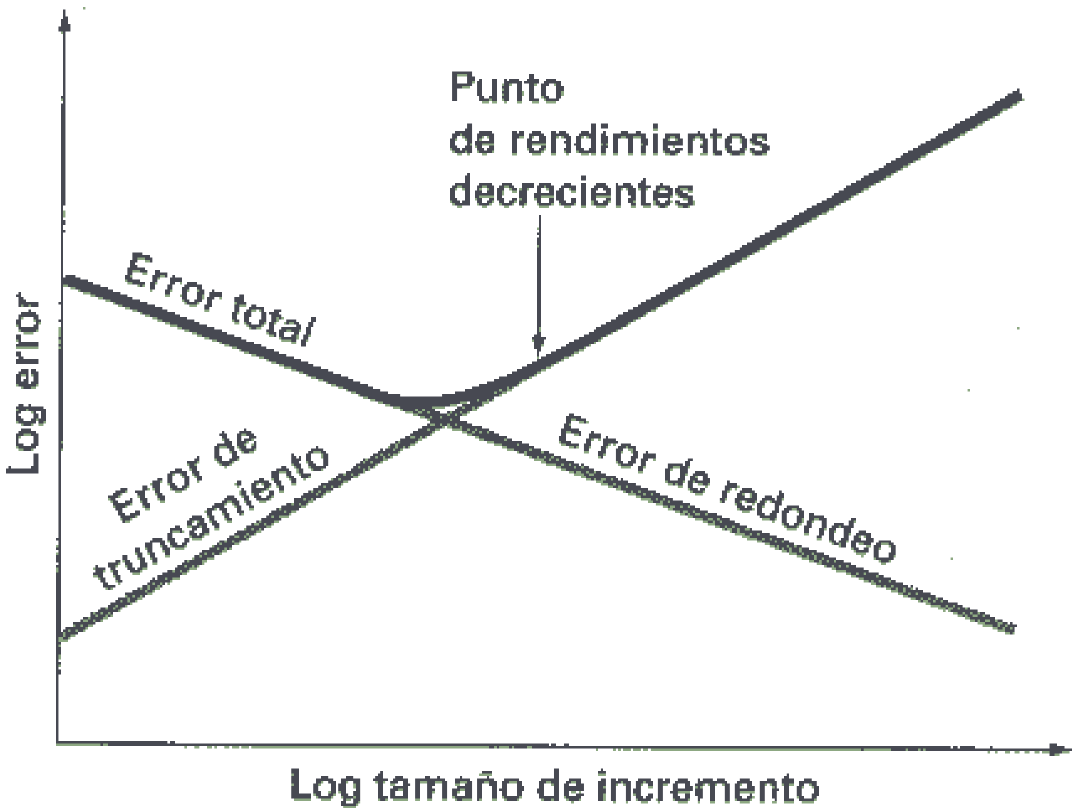
Diferencia finita dividida centrada

Diferenciación numérica



Error numérico total

Es la suma de los errores de truncamiento y de redondeo



Información importante

TABLA PT1.2 Resumen de información importante presentada en la parte uno.

Definiciones de error	
Error verdadero	$E_t =$ valor verdadero − valor aproximado
Error relativo porcentual verdadero	$\varepsilon_t = \dfrac{\text{valor verdadero} - \text{valor aproximado}}{\text{valor verdadero}} 100\%$
Error relativo porcentual aproximado	$\varepsilon_a = \dfrac{\text{aproximación presente} - \text{aproximación anterior}}{\text{aproximación presente}} 100\%$
Criterio de paro	Terminar los cálculos cuando $\varepsilon_a < \varepsilon_s$ donde ε_s es el error relativo porcentual deseado
Serie de Taylor	
Expansión de la serie de Taylor	$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \dfrac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dfrac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$ donde
Residuo	$R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$ o $R_n = O(h^{n+1})$
Diferenciación numérica	
Primera diferencia finita dividida hacia delante	$f'(x) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$ (Otras diferencias divididas se resumen en los capítulos 4 y 23.)