..................INSTITUTO TECNOLÓGICO DE TUXTLA GUTIÉRREZ................. > UNIDAD 5 >

# 5.2 Integración numérica: Método del trapecio, Métodos de Simpson 1/3 y 3/8

## REGLAS TRAPEZOIDALES.

- **REGLA TRAPEZOIDAL SENCILLA.**

La regla del trapecio o regla trapezoidal es la primera de las fórmulas cerradas de Newton-Cote

Corresponde al caso en donde el polinomio de aproximación es de primer orden.

*Regla del Trapecio*. Este nombre se debe a la interpretación geométrica que le podemos fórmula. El polinomio de interpolación para una tabla que contiene dos datos, es una línea integral, corresponde al área bajo la línea recta en el intervalo [a,b] , que es precisamente el trapecio que se forma.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx$$

En donde f1(x) corresponde a una línea recta que se representa como:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot(x - a)$$

El área bajo la línea recta es una aproximación de la integral de f(x) entre los límites a y b:

$$I = \int_a^b \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot(x - a) \right] dx$$

El resultado de la integración es:

$$I = (b - a)\cdot\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

- **REGLA TRAPEZOIDAL DE SEGMENTOS MULTIPLES.**

Una manera de mejorar la exactitud de la regla trapezoidal sencilla es la de dividir el intervalo integración desde "a" hasta "b" en conjunto de segmentos y aplicar el método a cada uno de lo segmentos.

En seguida se suman las áreas de los segmentos individuales y se obtiene la integral sobre el completo.

Por consiguiente, hay n segmentos de igual anchura:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Si a y b se igualan a x**0** y a x**n** (puntos base igualmente espaciados), la integral total se repres como:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Sustituyendo la regla trapezoidal para cada una de las integrales, se obtiene:

$$I = h\cdot\frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + h\cdot\frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \dots + h\cdot\frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2}$$

agrupando términos

$$I = \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_0) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_1) + f(x_n)\right)$$

usando la ecuación en la forma general, se obtiene:

$$I = (b - a)\cdot\frac{f(x_0) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_1) + f(x_n)}{2\cdot n}$$

- **REGLAS DE SIMPSON.**

Ademas de aplicar la regla trapezoidal con segmentos cada vez más finos, otra manera de obte estimación más exacta de una integral, es la de usar polinomios de orden superior para conecta puntos.

A las formulas resultantes de calcular la integral bajo estos polinomios se les llama reglas de S

- **REGLA DE SIMPSON DE 1/3.**

La regla de Simpson de 1/3 resulta cuando se sustituye un polinomio de segundo orden en la e

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_2\cdot(x)\,dx$$

Si a y b se denominan como x0 y x2 , y f2 (x) se representa mediante un polinomio de Lagrang segundo orden, entonces la integral es:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)}{(x - x_1)\cdot(x_0 - x_2)}\cdot f(x_0) + \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_2)}{(x_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_2)}\cdot f(x_1) + \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)}{(x_2 - x_0)\cdot(x_2 - x_1)}\cdot f(x_2)\right] dx$$

Despues de integrar y de reordenar terminos, resulta la siguiente ecuación:

$$I = (b - a)\cdot\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

- **REGLA DE SIMPSON 1/3 DE SEGMENTOS MULTIPLES.**

Asi como la regla trapezoidal, la regla de Simpson se mejora dividiendo el intervalo de integrac segmentos de igual anchura.

**h=(b-a)/n**

La integral total se representa como:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Sustituyendo la regla de Simpson en cada una de las integrales individuales se obtiene:

$$I = 2h \cdot \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h \cdot \frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} + \dots + 2h \cdot \frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n+1}) + f(x_n)}{6}$$

reordenando los terminos, se obtiene:

$$I = (b-a) \cdot \frac{f(x_0) + 4 \cdot \sum_{i=\text{impar}}^{n-1} f(x_i) + 2 \cdot \sum_{j=\text{par}}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

- **REGLA DE SIMPSON DE 3/8.**

De manera similar a la derivación de la regla trapezoidal y a la regla de Simpson de 1/3, se aju polinomios de Lagrange de tercer orden a cuatro puntos e integrar;

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_3 \cdot (x)\,dx$$

para obtener

$$I = (b-a) \cdot \frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

En donde h=(b-a)/3. A esta ecuación se le llama regla de Simpson de 3/8 porque h es un múlti| 3/8. Esta es la tercera regla cerrada de integración de Newton-Cotes.

- **REGLA DE SIMPSON 3/8 MULTIPLES.**

La regla de Simpson de 1/3 es, en general, el método de preferencia ya que alcanza exactitud ( orden con tres puntos en vez de los de cuatro puntos necesarios para la versión de 3/8.

No obstante, la regla de 3/8 tiene utilidad en aplicaciones de segmentos múltiples cuando el n segmentos es impar.

Para una estimación de cinco segmentos una alternativa es la de aplicar la regla de Simpson de los primeros segmentos y la regla de Simpson de 3/8 a los últimos tres.

De esta manera, se obtiene una estimación con exactitud de tercer orden a través del intervalo completo.

### Comentarios

No tienes permiso para añadir comentarios.