Clase 2

Solución de ecuaciones no Lineales

Raíces de ecuaciones

- Algebraicas y Trascendentes
- Raíces reales de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Determinan sólo una raíz real. (Métodos Cerrados y Métodos Abiertos) –Cap. 5 y Cap. 6 respectivamente-)
- Raíces reales y complejas de polinomios. Determinan todas las raíces. Cap. 7

Problema del paracaidista

- Solución analítica $$v(t) = \frac{g\,m}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

- Forma explícita: calcular v dadas g,m,c y t

- Forma implícita: calcular c dadas g,m,v y t

$$f(c) = \frac{g\,m}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) - v = 0$$

Ecuación no lineal

Métodos Cerrados

- Método de Bisección y Método de la Falsa Posición:
  - La función cambia de signo en la vecindad de una raíz.
  - Dos valores iniciales que “encierren” a la raíz.
  - Reducen el tamaño del intervalo y así convergen a la respuesta correcta.
  - Los métodos gráficos son útiles para determinar los valores iniciales y visualizar propiedades de las funciones.

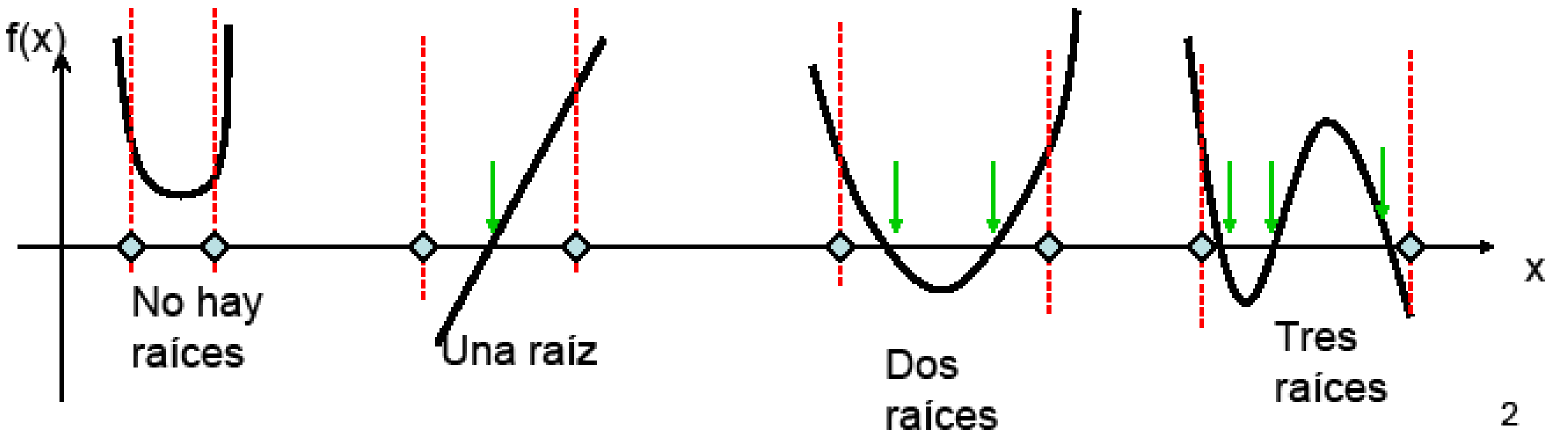
Raíz de una ecuación

- Raíz de la ecuación: x tal que

$$f(x)=0$$

En los *métodos cerrados* se requieren dos valores iniciales para encontrar la raíz: los extremos del intervalo x_l y x_u (left=izquierdo y upper=máximo).

Ejemplos: Notar que si no hay cambio de signo en extremos→ cero o número par de raíces. Si hay cambio de signo→ número impar



Método de bisección

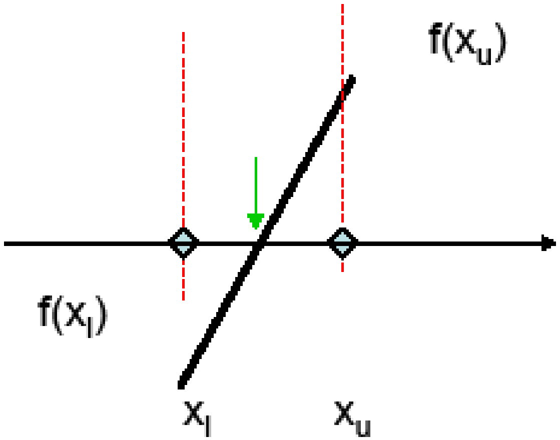
[bisectar=dividir en dos segmentos]

- **A ambos lados de la raíz la función f cambia de signo.**

- **En general, si f(x) es real y continua en el intervalo $[x_l , x_u]$, $f(x_l)$ y $f(x_u)$ tienen signos opuestos, es decir**

$$f(x_l)f(x_u)<0 \qquad (1)$$

hay al menos una raíz en el intervalo.

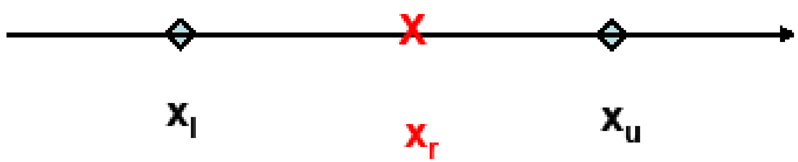


Algoritmo del Método de bisección

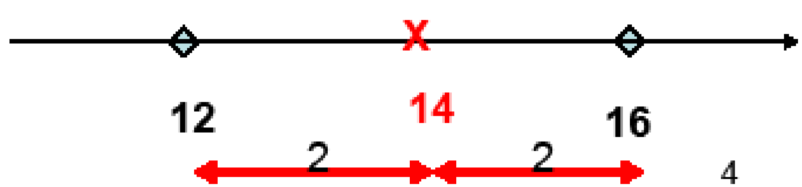
1. **Se elige intervalo [x_l , x_u] donde haya cambio de signo. Checar con (1)**

2. **Se aproxima la raíz como el punto medio de este intervalo**

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$



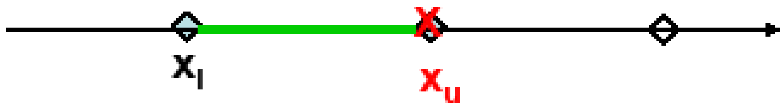
Ejemplo: [12.16], x_r=(12+16)/2=14



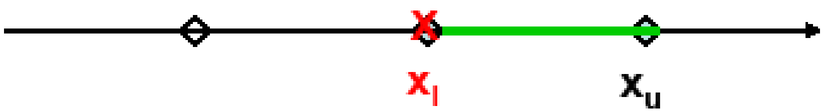
Algoritmo del Método de bisección

3. **Se selecciona aquella mitad del intervalo en la que la función cambia de signo. Revisamos el subintervalo izquierdo**

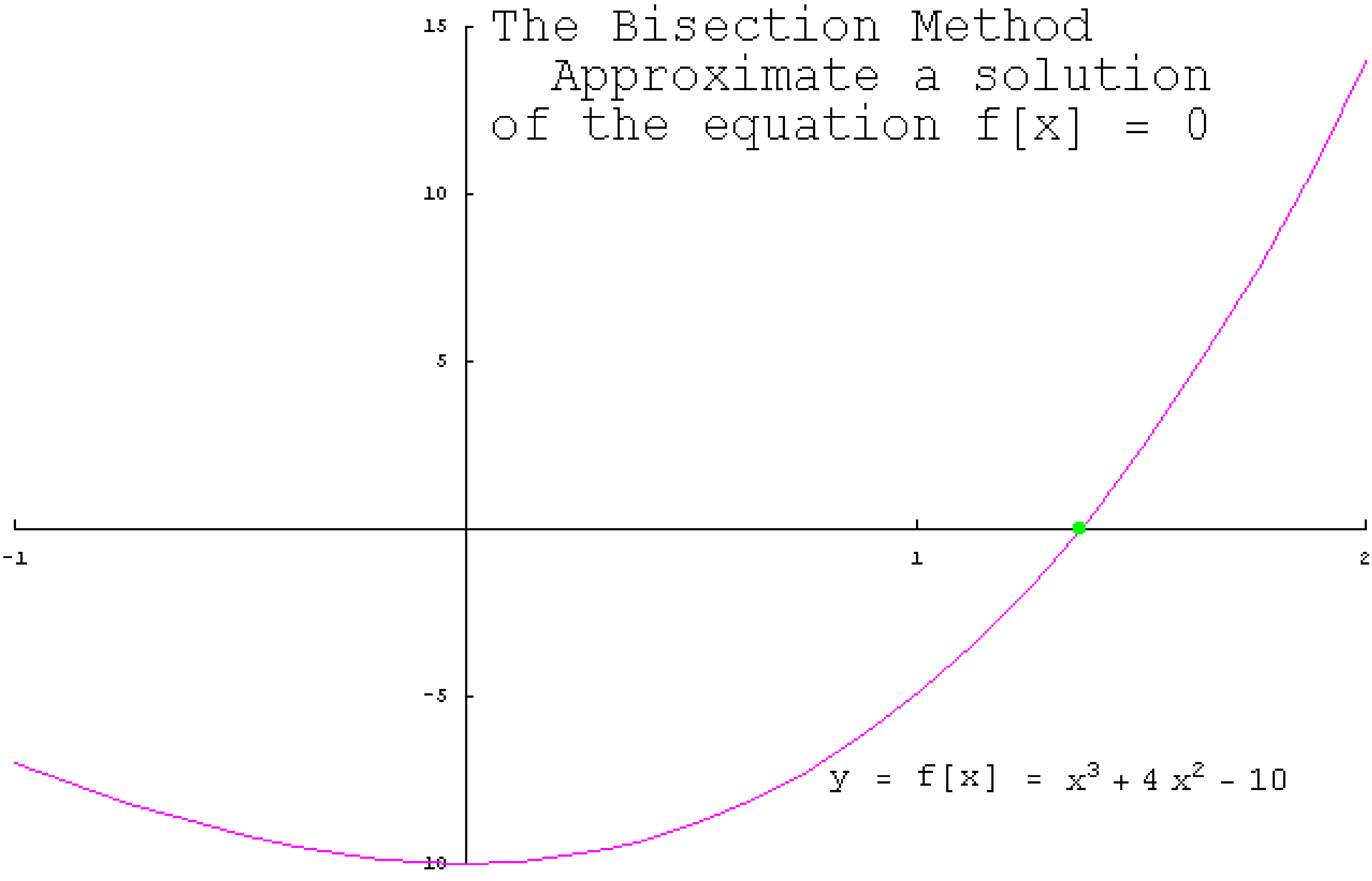
a) $f(x_l)f(x_r)<0$ Este es el intervalo, hacemos $x_r \rightarrow x_u$ y regresamos a paso

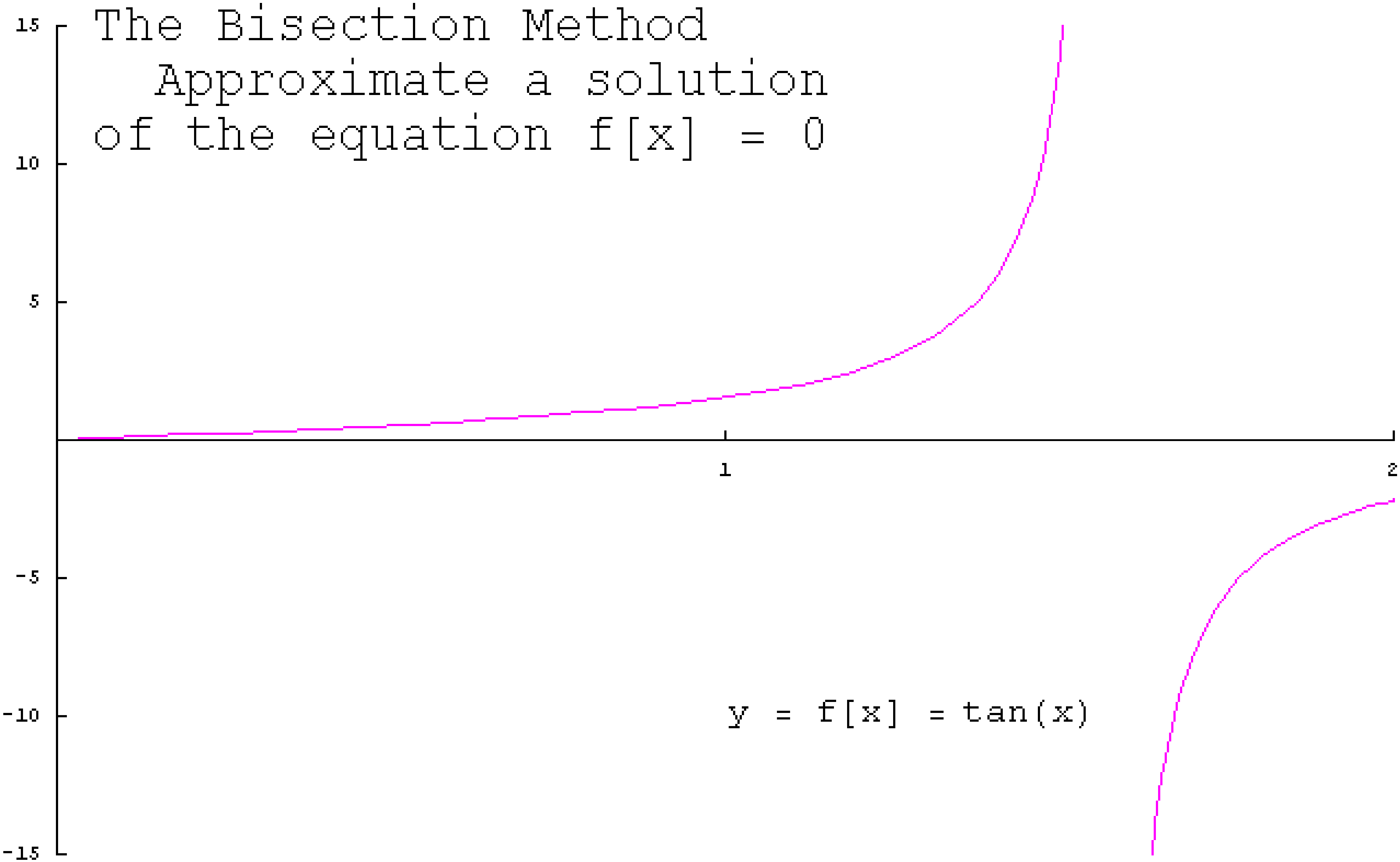


b) $f(x_l)f(x_r)>0$ Raíz en intervalo derecho $x_r \rightarrow x_l$ y regresamos al paso 2



c) $f(x_l)f(x_r)=0$ La raíz es x_r, termina el cálculo.

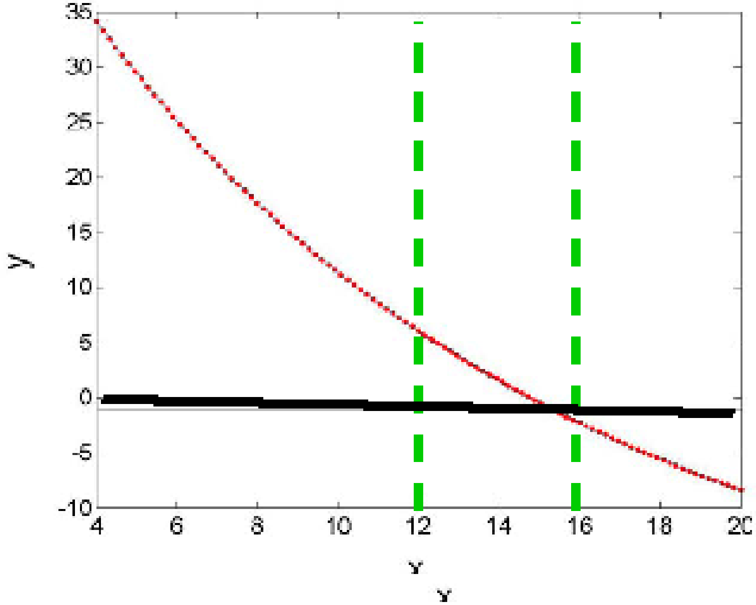

The Bisection Method
Approximate a solution
of the equation f[x] = 0
y = f[x] = x3 + 4 x2 - 10
15
10
5
-5
-10
-1
1
2


The Bisection Method
Approximate a solution
of the equation f[x] = 0
15
10
5
-5
-10
-15
1
2
y = f[x] = tan(x)

Ejemplo

- Encontrar la raíz de la función

$$f(x)=\frac{667.38}{x}(1-e^{-0.146843x})-40$$



Elegimos Intervalo donde hay cambio de signo, por ejemplo [12,16]

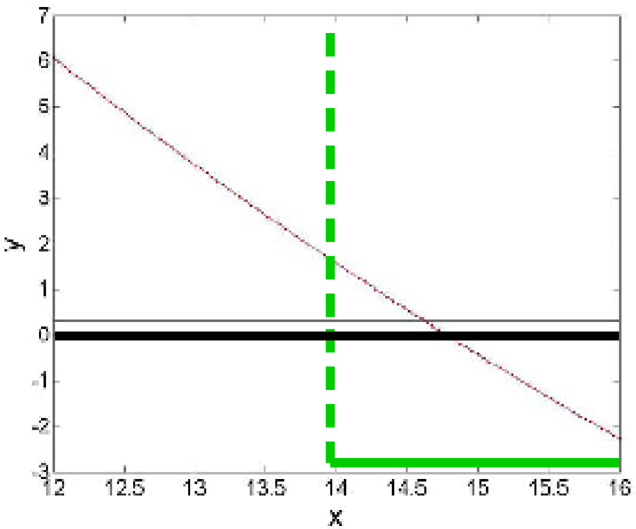
Itera-ción	x_l	x_u	$f(x_l)$	$f(x_u)$
0	12	16	6.06	-2.26

•el signo del producto es - pues

$f(x_l)f(x_r)<0$

Revisamos intervalo izquierdo

Itera-ción	x_l	x_u	$f(x_l)$	$f(x_u)$	x_r	$f(x_r)$	Signo $f(x_l)\,f(x_r)$
1	12	16	6.06	-2.26	**14**	**1.56**	**+**



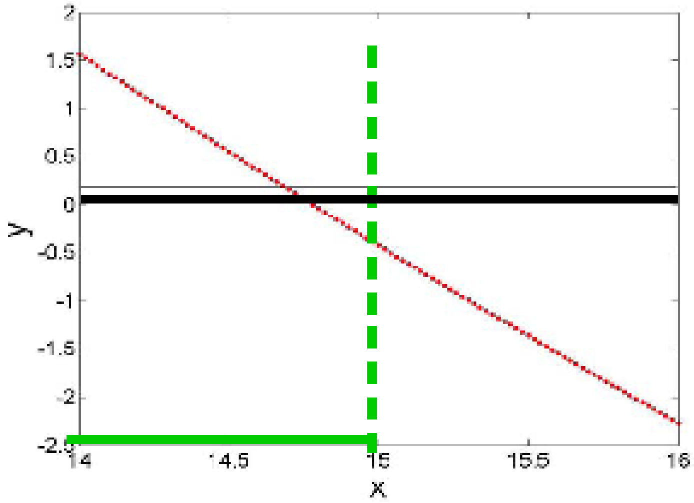
- **$f(xl\ )f(xr)>0$ y el signo es +, entonces el cambio de signo está en intervalo DERECHO**

- **Seleccionamos este intervalo haciendo $x_l = x_r = 14$**

- **Tenemos ahora el intervalo [14,16]**

Repetimos con el nuevo intervalo…

Itera-ción	x_l	x_u	$f(x_l)$	$f(x_u)$	x_r	$f(x_r)$	Signo $f(x_l)\ f(x_r)$
2	14	16	1.56	-2.26	**15**	**-0.42**	**-**



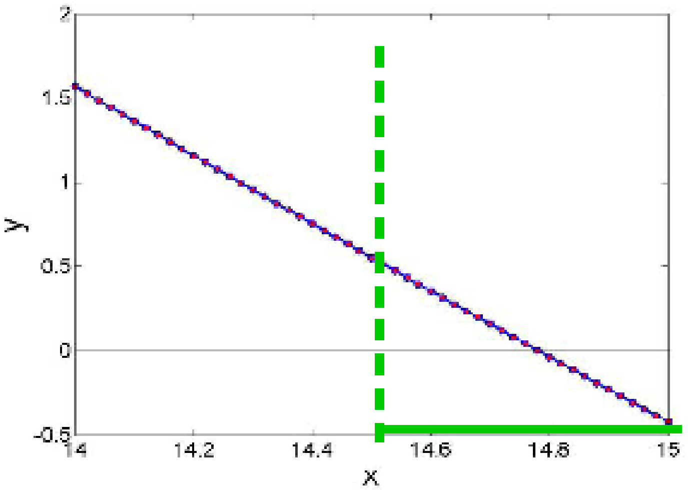
- **f(xl)f(xr)<0 y el signo es -, entonces el cambio de signo está en intervalo IZQUIERDO**

- **Seleccionamos este intervalo haciendo $x_u = x_r = 15$**

- **Tenemos ahora el intervalo [14,15]**

Repetimos con el nuevo intervalo…

Itera-ción	x_l	x_u	$f(x_l)$	$f(x_u)$	x_r	$f(x_r)$	Signo $f(x_l)\,f(x_r)$
3	14	15	1.56	-0.42	**14.5**	**0.55**	**+**



- **$f(xl\ )f(xr)>0$ y el signo es +, entonces el cambio de signo está en intervalo DERECHO**

- **Seleccionamos este intervalo haciendo $x_l=x_r=14.5$**

- **Tenemos ahora el intervalo [14.5,15]**

Estimación del error

Valor *"verdadero"* hasta 4 cifras $x_r^{verdadero} = 14.7802$

Error relativo porcentual

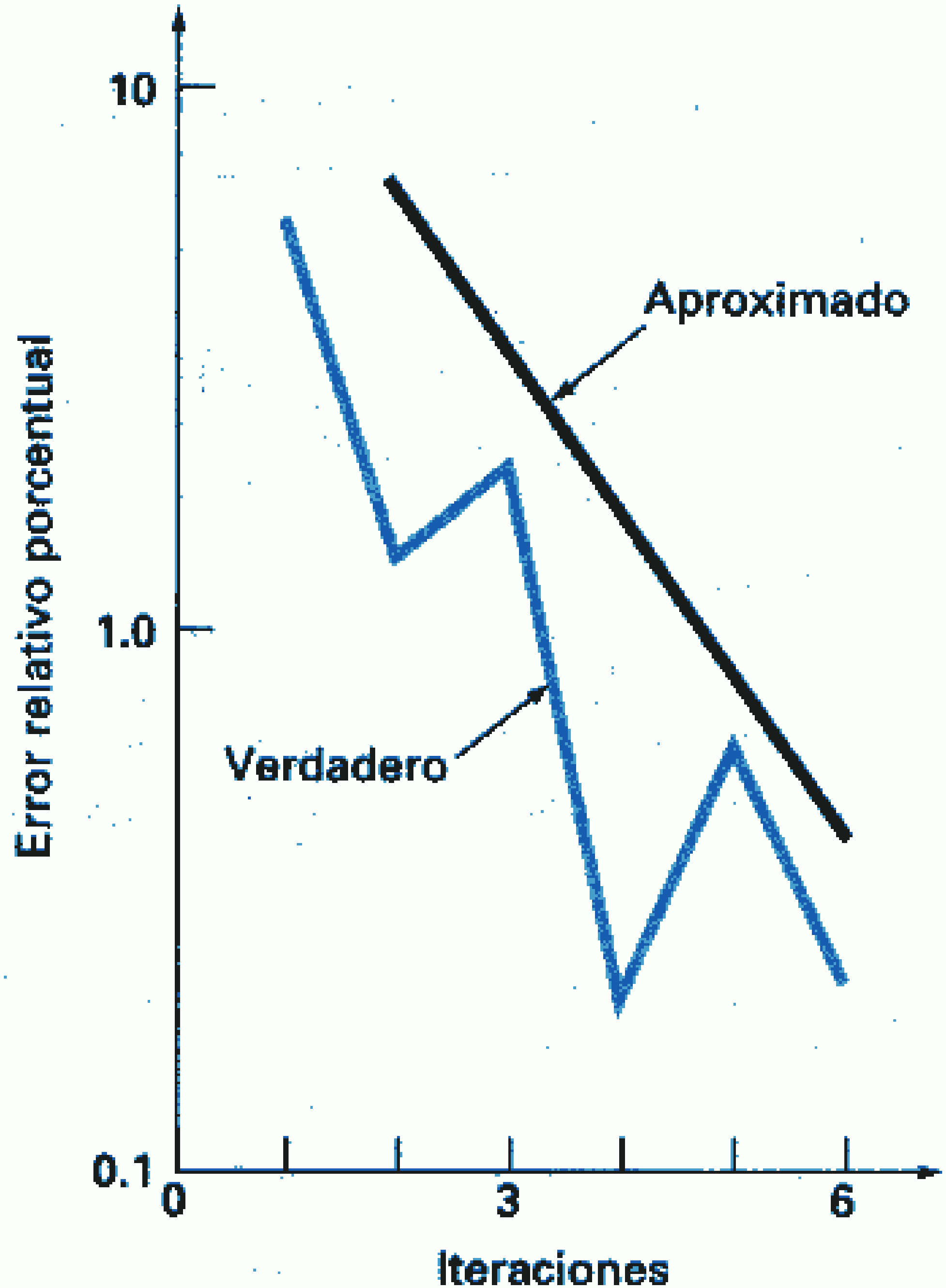
$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}} \right| 100\%$$

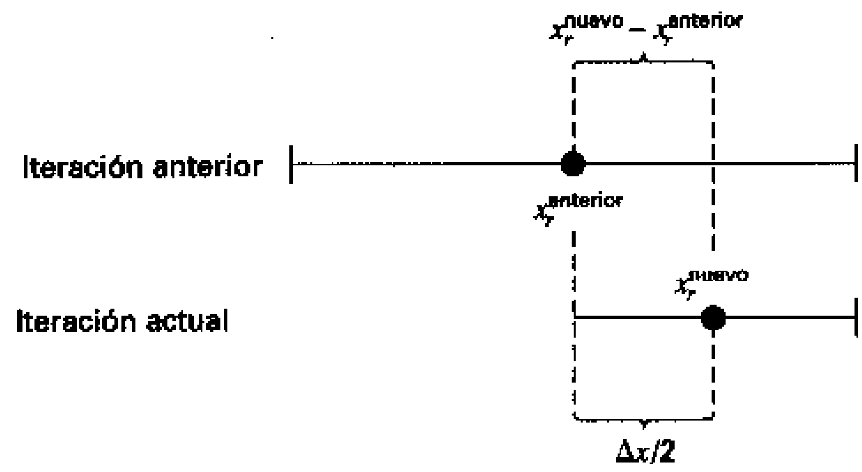
Error relativo porcentual *verdadero*

$$\varepsilon_t = \left| \frac{x_r^{nuevo} - x_r^{verdadero}}{x_r^{verdadero}} \right| 100\%$$

Iter	x_l	x_u	x_r	$\varepsilon_a(\%)$	$\varepsilon_t(\%)$
1	12	16	14		5.279
2	14	16	15	6.667	1.487
3	14	15	14.5	3.448	1.896
4	14.5	15	14.75	1.695	0.205
5	14.75	15	14.875	0.840	0.641

Otro criterio de terminación:
cuando el error relativo porcentual < valor dado $\varepsilon_a < \varepsilon_s$


10
1.0
0.1
Error relativo porcentual
Aproximado
Verdadero
0
3
6
Iteraciones


$x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}$
Iteración anterior
$x_r^{anterior}$
x_r^{nuevo}
Iteración actual
$\Delta x/2$

Número de iteraciones para un error especificado

Sea $E_{a,d}$ el error absoluto deseado en el cálculo y Δx^0 el intervalo inicial de búsqueda. El número de iteraciones *n* que deben realizarse para determinar la raíz con ese error especificado es

$$\boxed{n = \frac{\log(\Delta x^0 / E_{a,d})}{\log 2}}$$

Nota: log denota logaritmo natural.

Pseudocódigo

(función si solo interesa raíz, pero mejor una subrutina)

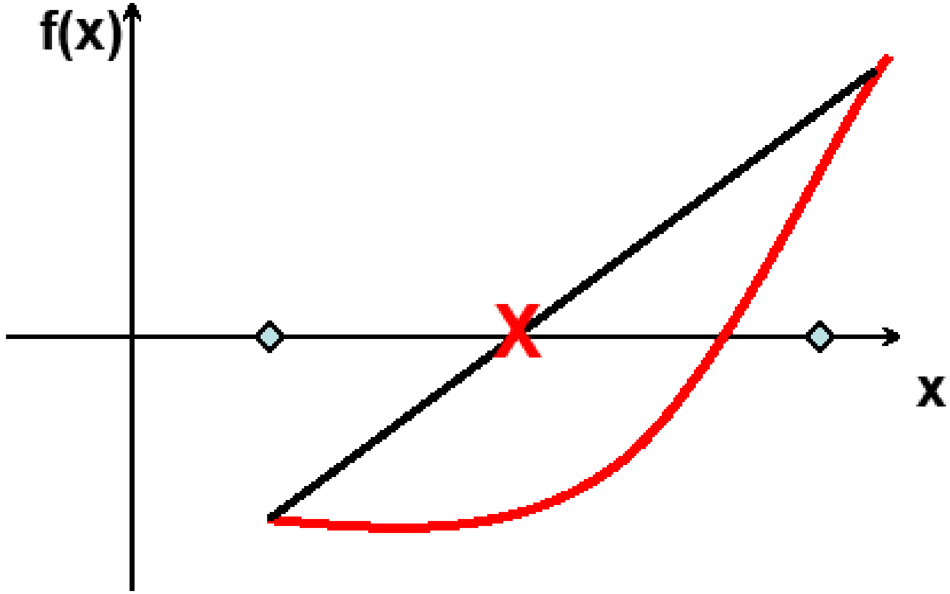
Pseudocódigo	Explicación
`Subroutine Bisect (xl,xu,es,imax,xr,iter,ea)`	Declara subrutina con argumentos
`iter=0`	Valor inicial de iter
`DO`	**INICIA CICLO**
`xrold=xr`	Guarda valor de xr en xrold
`xr=(xl+xu)/2`	calcula x_r
`iter=iter+1`	incrementa iter
`IF xr≠0 THEN`	verifica SI x_r no es cero
`ea=ABS((xr-xold)/xr)*100`	si **NO**, entonces calcula ε_a
`END IF`	si **SI**, no calcula –Fin del if
`test=f(xl)*f(xr)`	calcula producto de prueba
`IF test<0 THEN`	**SI** producto <0 la raíz en int. izq
`xu=xr`	el extremo derecho es x_r
`ELSE IF test>0 THEN`	**SI** producto>0 la raíz en int derecho
`xl=xr`	el extremo izquierdo es x_r
`ELSE`	**CUALQUIER OTRO CASO**
`ea=0`	el producto=0, raiz exacta→error=0
`END IF`	**FIN DE IF**
`IF ea<es OR iter≥imax EXIT`	**SI** se cumple algún criterio, **TERMINA**
`END DO`	**fin de ciclo**: regresa a inicia
`END Bisect`	**Fin de subrutina** Bisect

Basado en Chapra, Cap.5

- Código en Octave: biseccion.m
- Planilla de calculo: biseccion.ods

Método de la falsa posición

- Bisección no es muy eficiente
- Una variante (regula falsi = falsa posición)

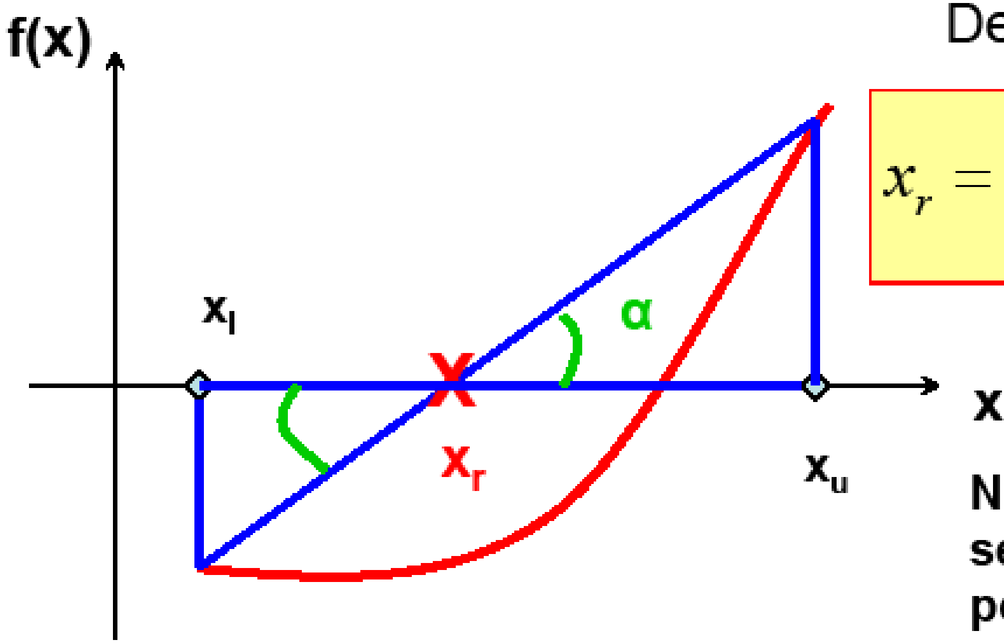


En lugar de punto medio, elegimos la intersección de la recta con el eje x

Cálculo de x_r

- Triángulos semejantes: ángulos iguales

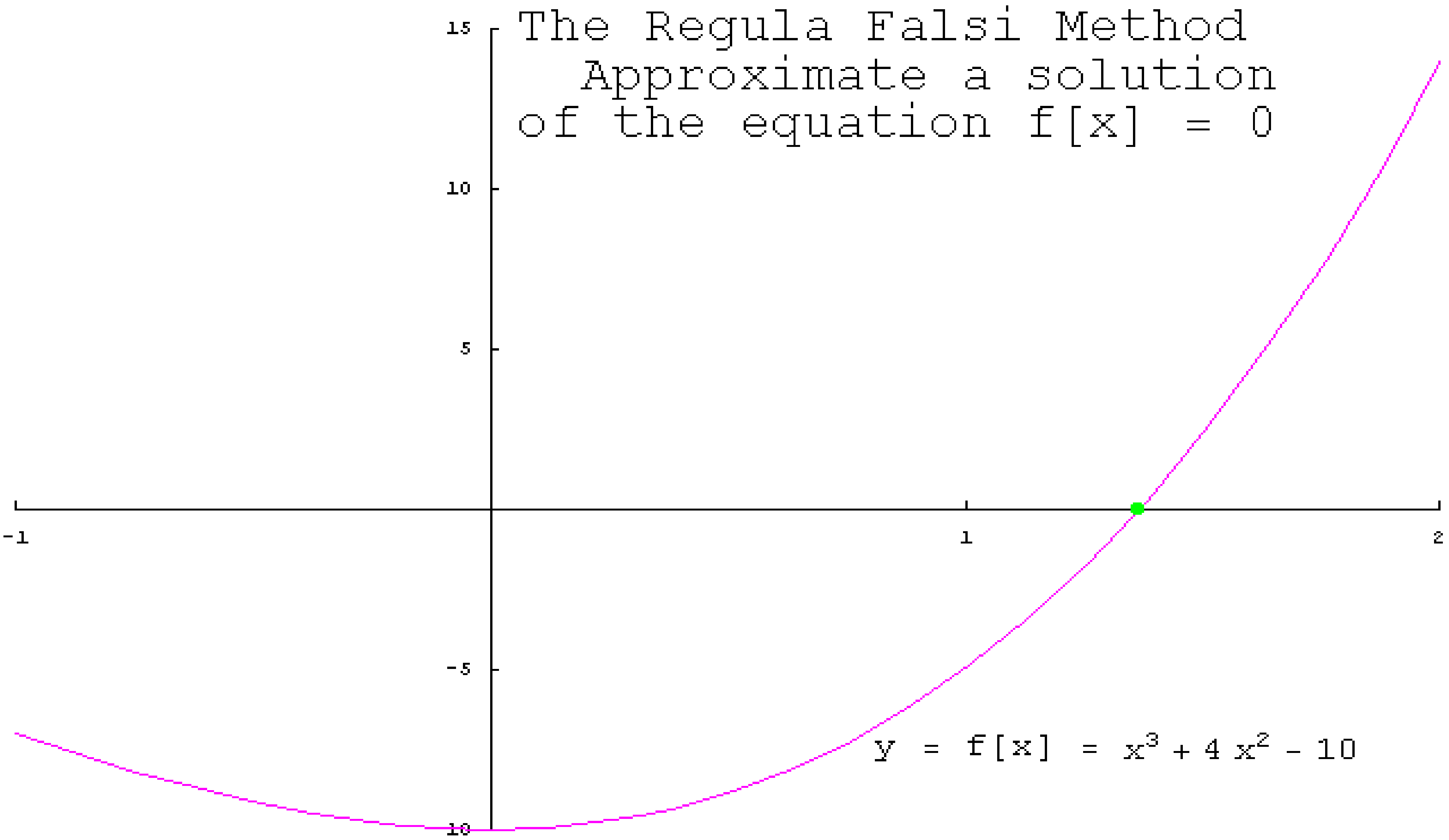
$$\cos\alpha = \frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$



Despejando x_r

$$\boxed{x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}}$$

Note que los criterios de selección no cambian → podemos usar el mismo programa.


The Regula Falsi Method
Approximate a solution
of the equation f[x] = 0
y = f[x] = x3 + 4 x2 - 10
15
10
5
-5
-10
-1
1
2

Programa

- A partir del programa del método de bisección, hacer el programa para el método de la falsa posición modificado:

  a) crear un nuevo proyecto

  b) cambiar en la subrutina la expresión para xr por la de la página 16.

  c) modificar la subrutina introduciendo

  > cambios para reducir evaluaciones de la función,

  > los contadores para evitar estancamiento

  (ver pseudocódigo).

- Resolver Problemas 9, 11 y 16 del Chapra

Pseudocódigo

(función si solo interesa raíz, pero mejor una subrutina)

```
Subroutine Fal_pos_mod (xl,xu,es,imax,xr,iter,ea)
iter=0
fl = f(xl)
fu = f(xu)
DO
   xrold=xr
   xr = xu – fu * (xl - xu) / (fl-fu)
   fr = f(xr)
   iter = iter + 1
   IF xr≠0 THEN
        ea = ABS ( (xr - xold) / xr) * 100
   END IF
   test = fl*fr
  IF test < 0 THEN
        xu = xr
        fu = f(xu)
        iu = 0
        il = il+1
        if il ≥ 2 then fl=fl/2
ELSE IF test>0 THEN
        xl = xr
        fl = f(xl)
        il = 0
        iu = iu+1
        if iu ≥ 2 then fu = fu/2
   ELSE
        ea=0
   END IF
   IF ea<es OR iter≥imax
EXIT
END DO
END Fal_pos_mod
```

Basado en Chapra, Cap.5

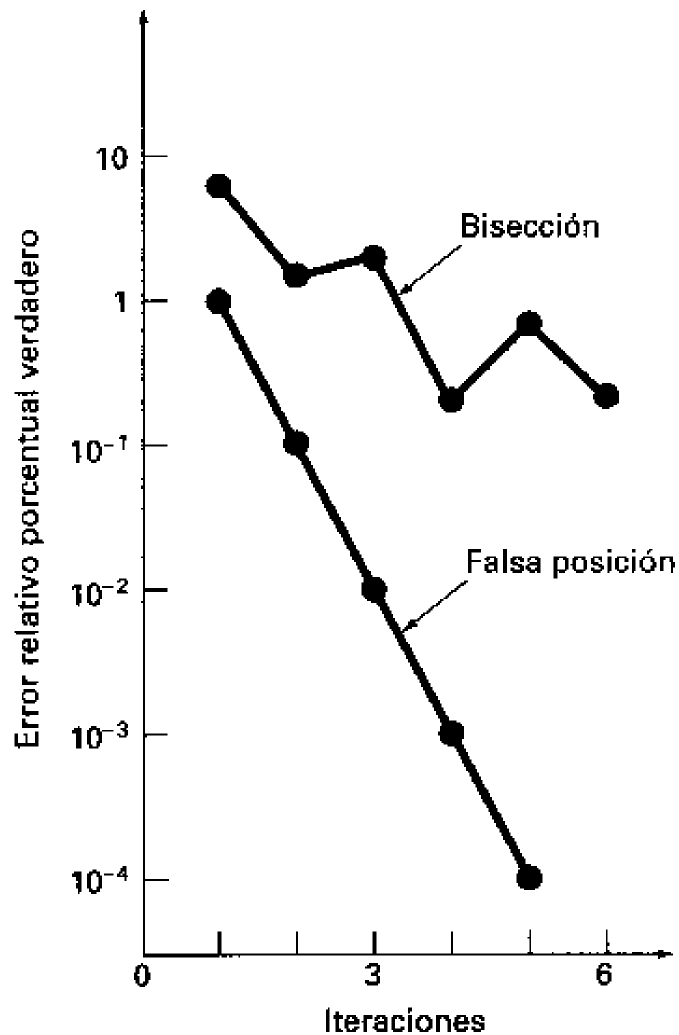
Ejemplo 5.5

- Resolver, por el método de la Falsa Posición, con g = 9.8, m = 68.1, t = 10

$$f(c) = \frac{g\,m}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) - v = 0$$

- Solución en planilla de cálculo: regula_falsi.ods
- Solución en Octave: regula_falsi.m

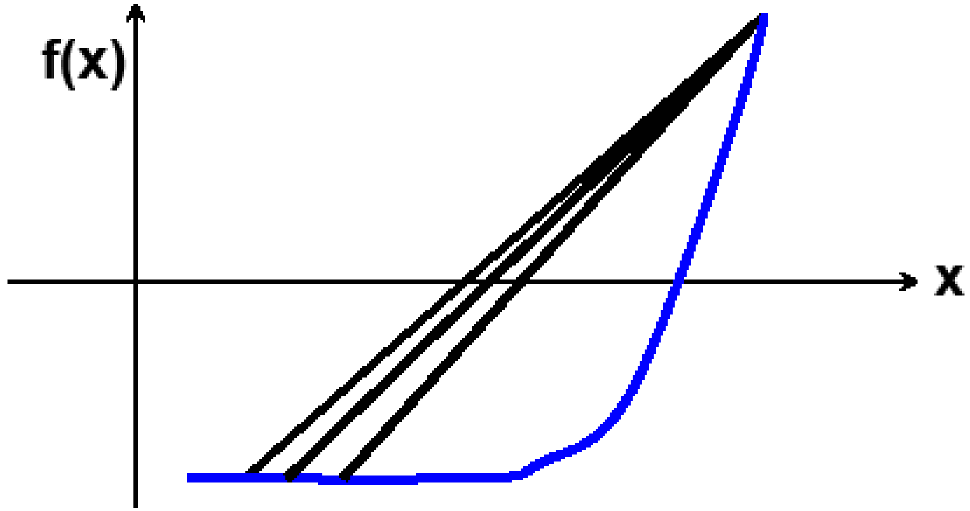
Errores



10
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
Error relativo porcentual verdadero
Bisección
Falsa posición
0
3
6
Iteraciones

Método de la falsa posición modificado

- **Problemas si la función es casi una constante, el avance hacia la raíz es lento, es decir, la función se “estanca”, ver figura.**
- **Una variante del regula falsi: si la función se “estanca”, se divide a la mitad el valor de la función en el punto de estancamiento.**
- **Se detecta el estancamiento a través de contadores.**

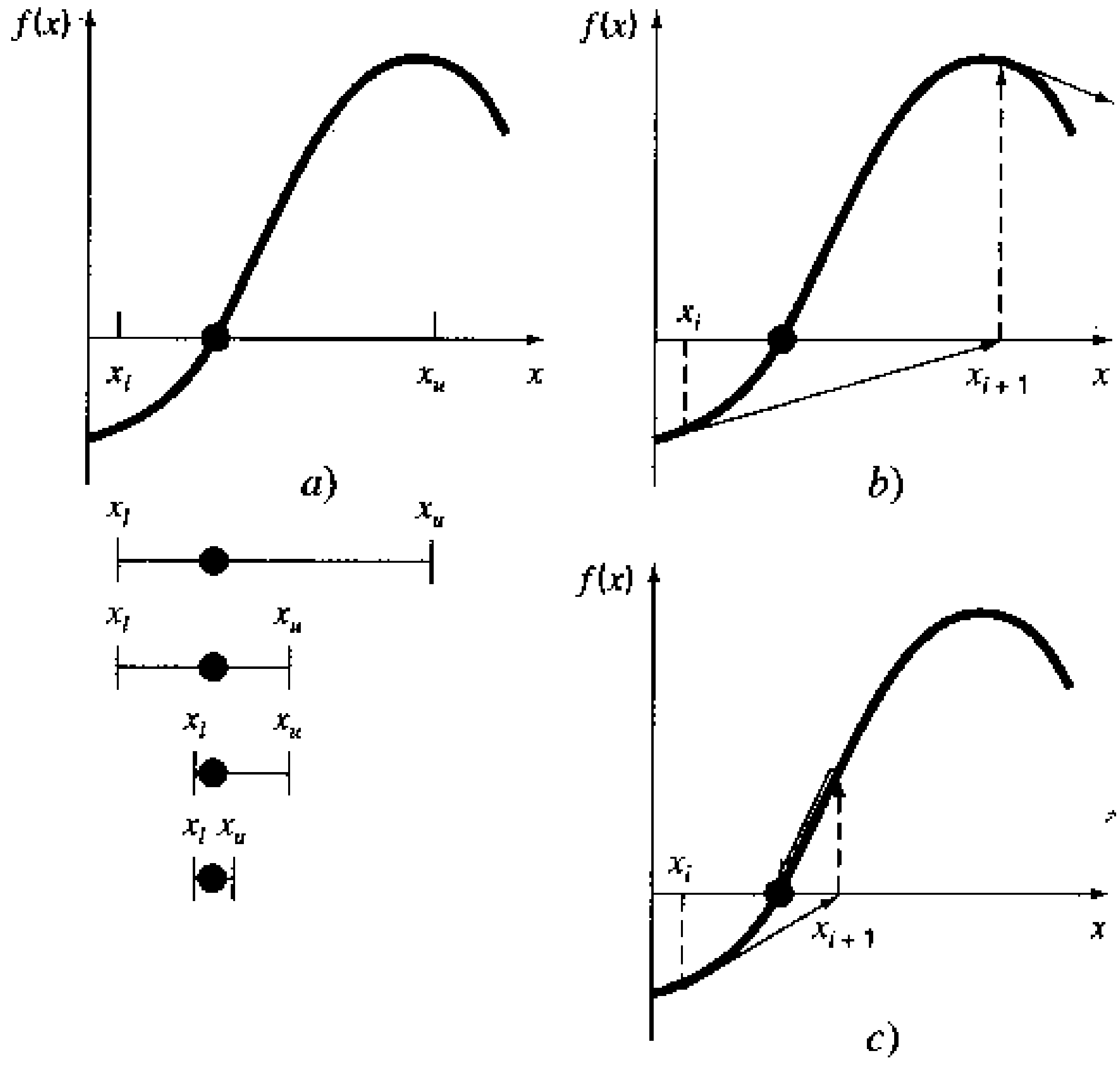


Problemas 5.1 a 5.19, pag. 139

Métodos Abiertos (cap. 6)

- También emplean iteraciones sucesivas.
- No requieren que el intervalo inicial encierre a la raíz.
- En general, son más eficientes que los cerrados, aunque no siempre funcionan.
- Se extienden para sistemas de ecuaciones no lineales.

Métodos abiertos y cerrados



Iteración de punto fijo

- Idea: reescribir la ecuación $f(x)=0$
- Como $x=g(x)$
  - Despejando x
  - Sumando x m.a m.
- Ejemplos

$$x^2-2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{x^2+3}{2}$$

$$\sin x=0 \Rightarrow x=\sin x+x$$

Iteración de punto fijo

- Esquema iterativo $$x_{i+1} = g(x_i)$$
- Error aproximado $$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \right| \cdot 100\,\%$$

Ejemplo 6.1

- Encontrar, por la iteración de punto fijo, la raíz de

$$f(x) = e^{-x} - x$$

- Se reescribe como

$$x_{i+1} = e^{-x_i}$$

- Valor inicial : $x_0 = 0$

Ejemplo 6.1

$$x_1 = e^{-x_0} = e^{-0} = 1$$

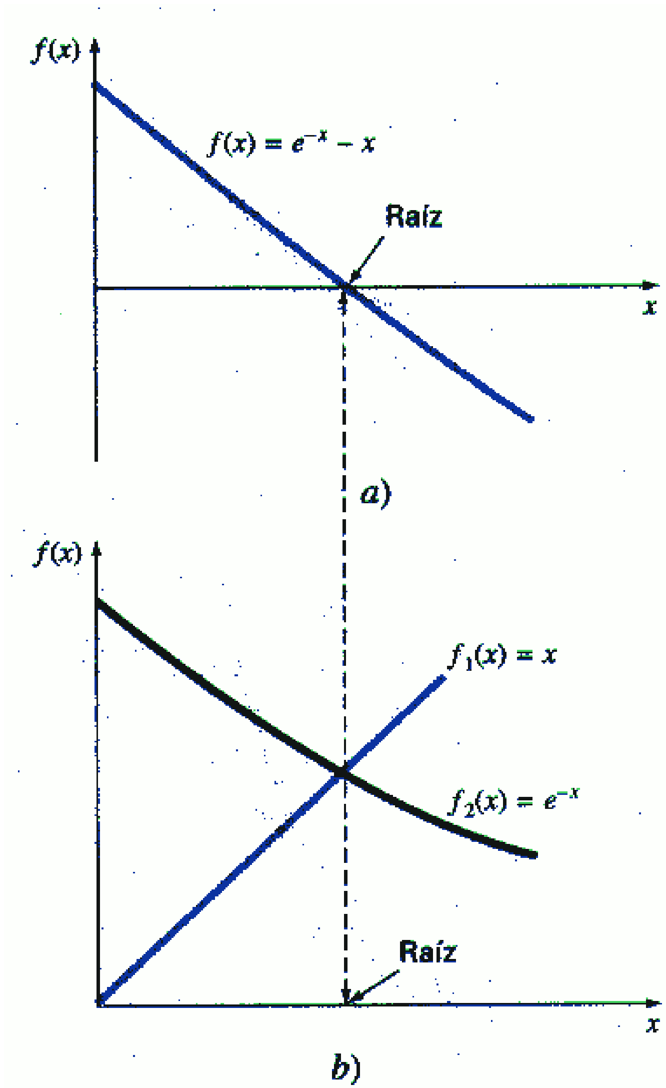
$$x_2 = e^{-x_1} = e^{-1} = 0.367879\ldots$$

- Planilla de cálculo: punto_fijo.ods
- Octave: punto_fijo.m

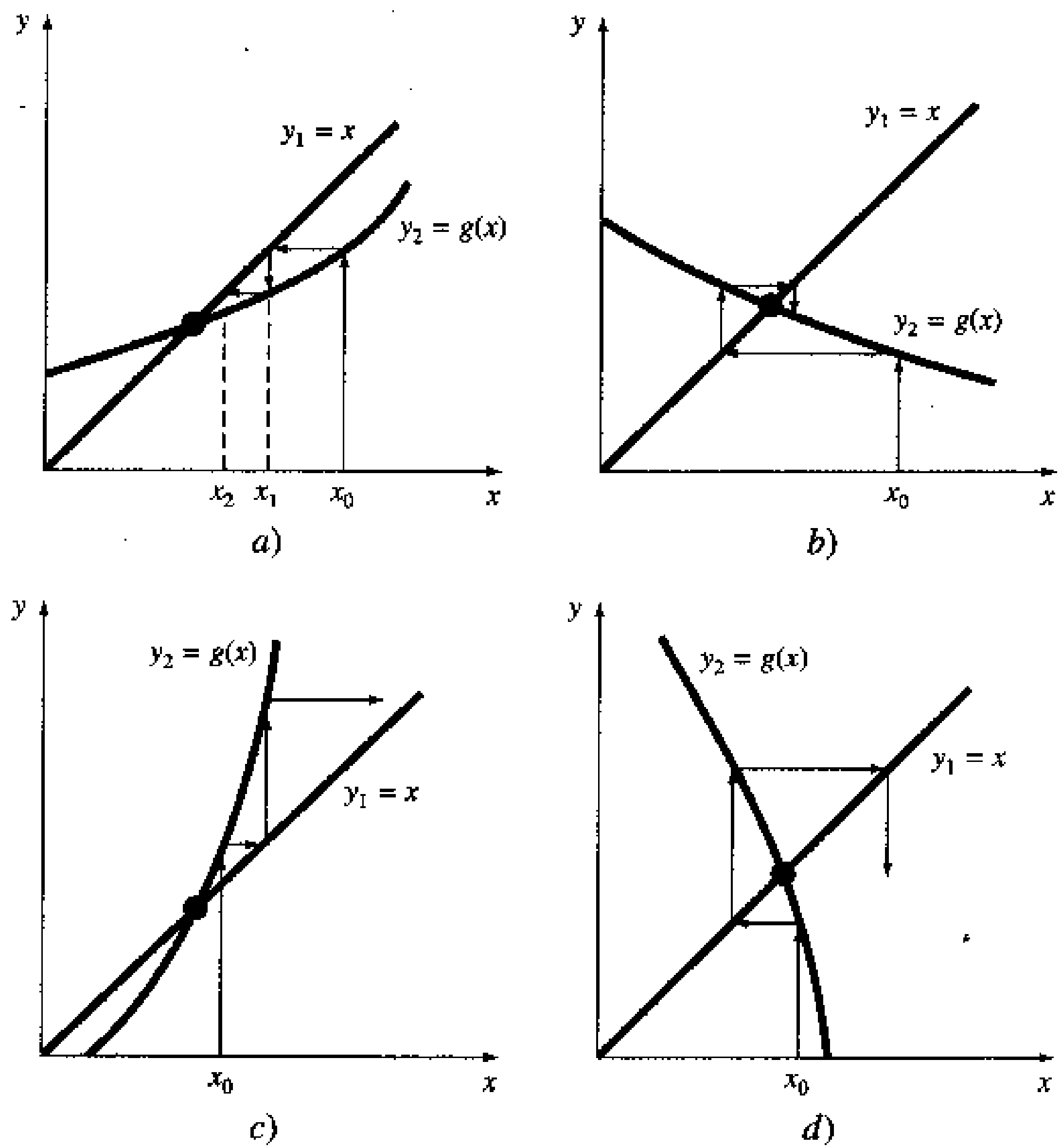
Interpretación geométrica

- Resolver x = g(x) equivale a encontrar la intersección de las gráficas de las funciones

$$f_1(x) = x$$
$$f_2(x) = e^{-x}$$



Convergencia



Condición de convergencia

- Ecuación iterativa $x_{i+1} = g(x_i)$
- Solución exacta $x_r = g(x_r)$
- Restando m. a m., $x_r - x_{i+1} = g(x_r) - g(x_i)$
- Por TVM: $$g'(\xi) = \frac{g(x_r) - g(x_i)}{x_r - x_i}$$
- reemplazando: $E_{t,i+1} = g'(\xi)\, E_{t,i}$

Condición de convergencia

- Por lo tanto, $|g'(\xi)|<1$
- Ejemplo* $x^2-2x-2=0 \quad , \quad x_0=2$

$$g_1(x)=\sqrt{2x+2} \Rightarrow g'_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+2}} \Rightarrow |g'(2)|<1$$

converge

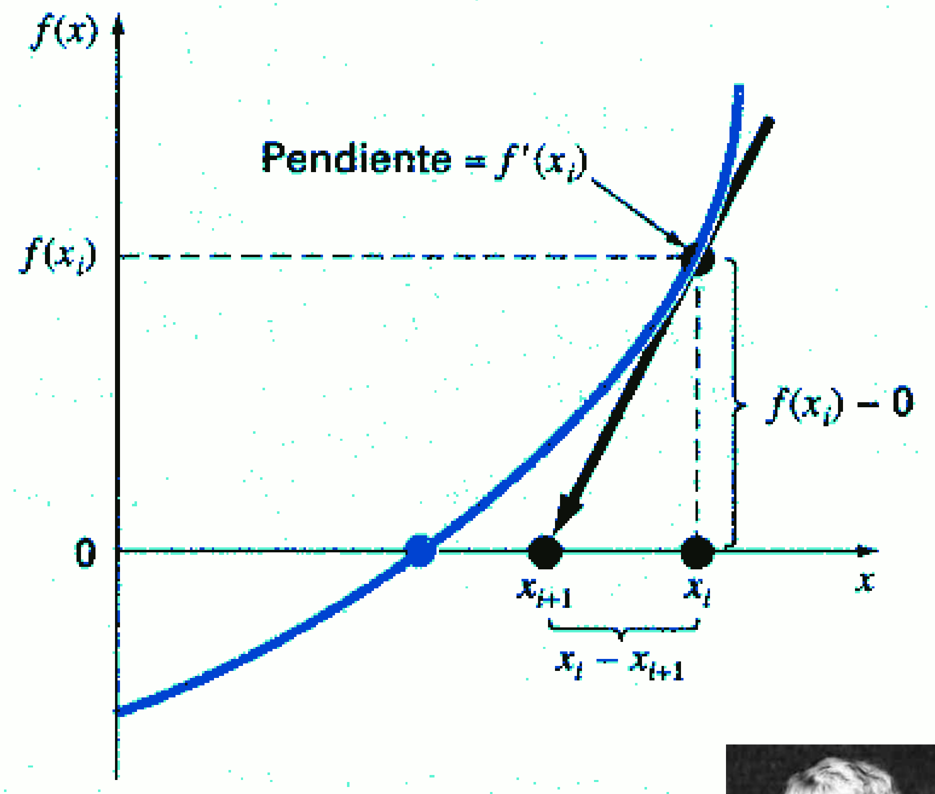
$$g_2(x)=\frac{x^2-2}{2} \Rightarrow g'_1(x)=x \Rightarrow |g'(2)|>1$$

diverge

Método de Newton-Raphson

- Igualando la pendiente a f'(x):

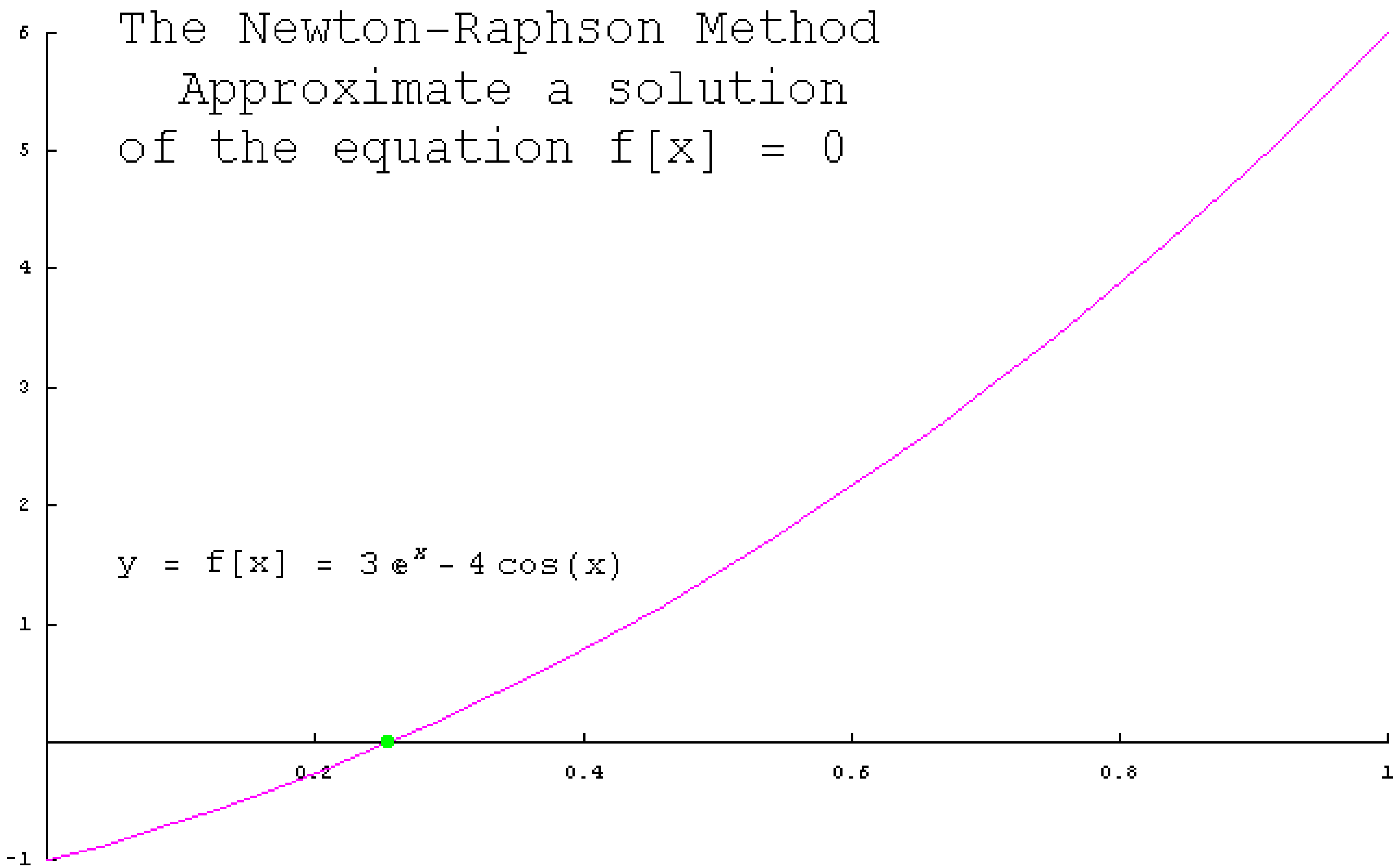
$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$



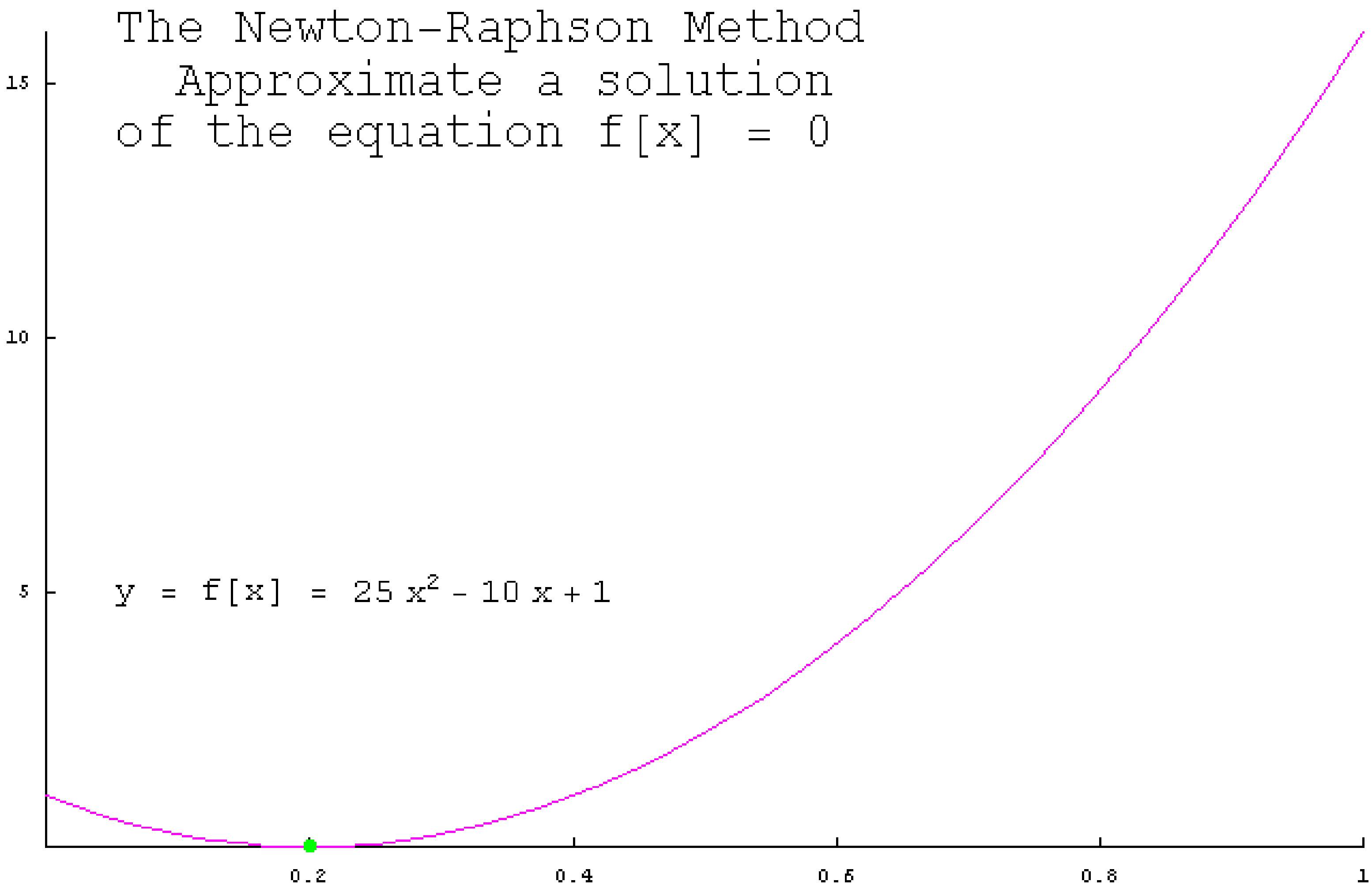
- Despejando (...):

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

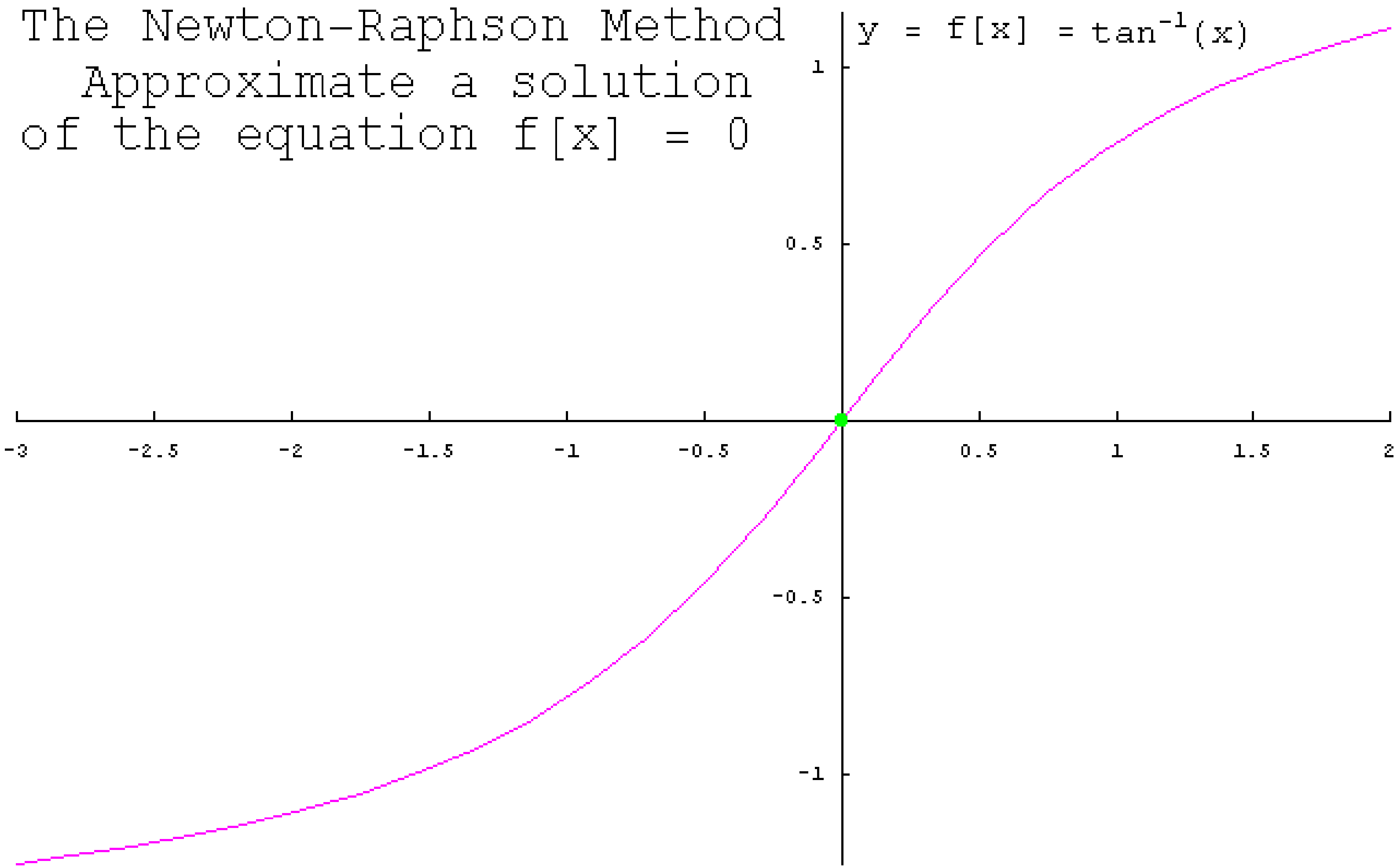
Método de Newton - Raphson



Método de Newton - Raphson



Método de Newton - Raphson



Ejemplo 6.3

- Encontrar, por el método de Newton-Raphson, la raíz de

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

- Valor inicial $x_0 = 0$

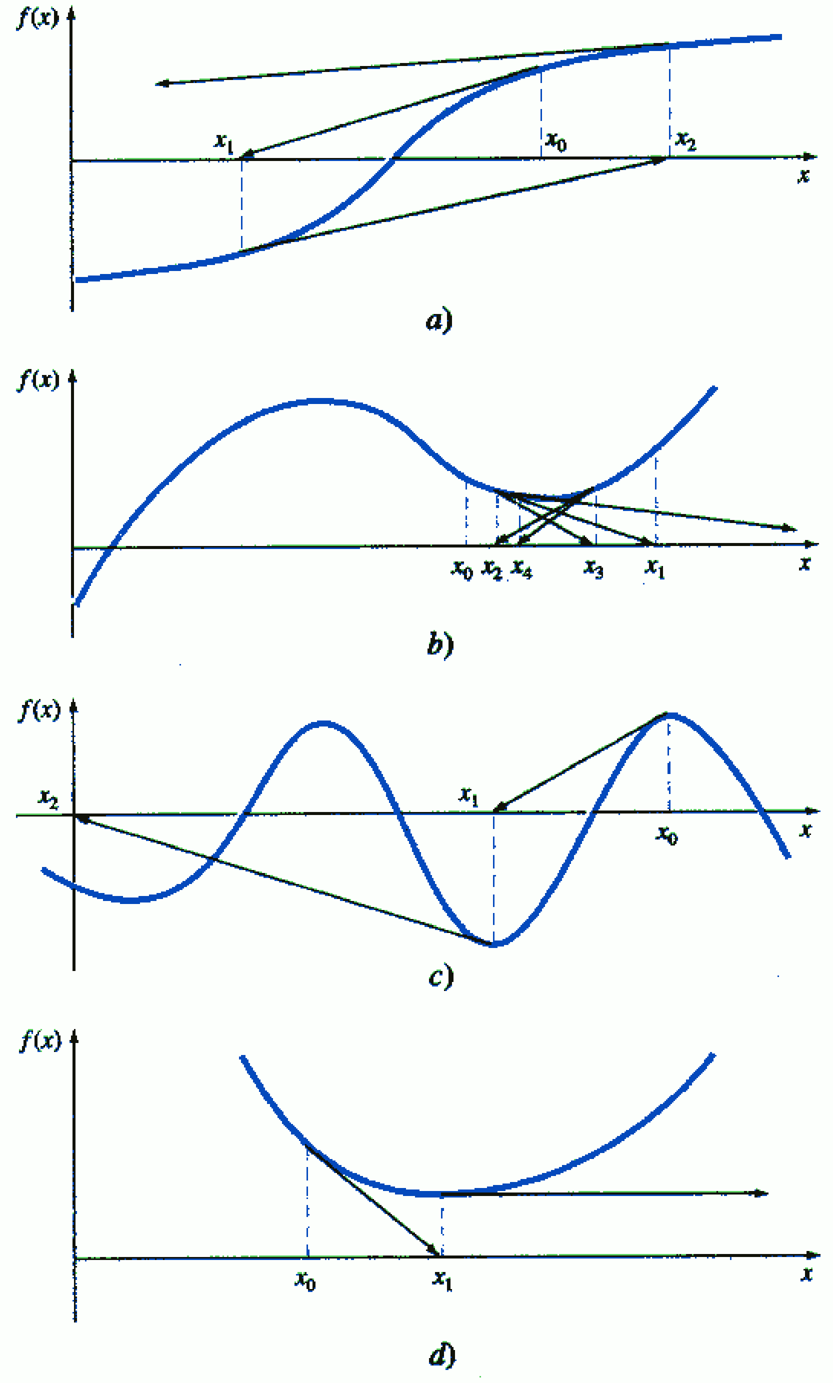
$$f(x_0) = e^{-0} - 0 = 1 \quad ; \quad f'(x_0) = -e^{-0} - 1 = -2$$

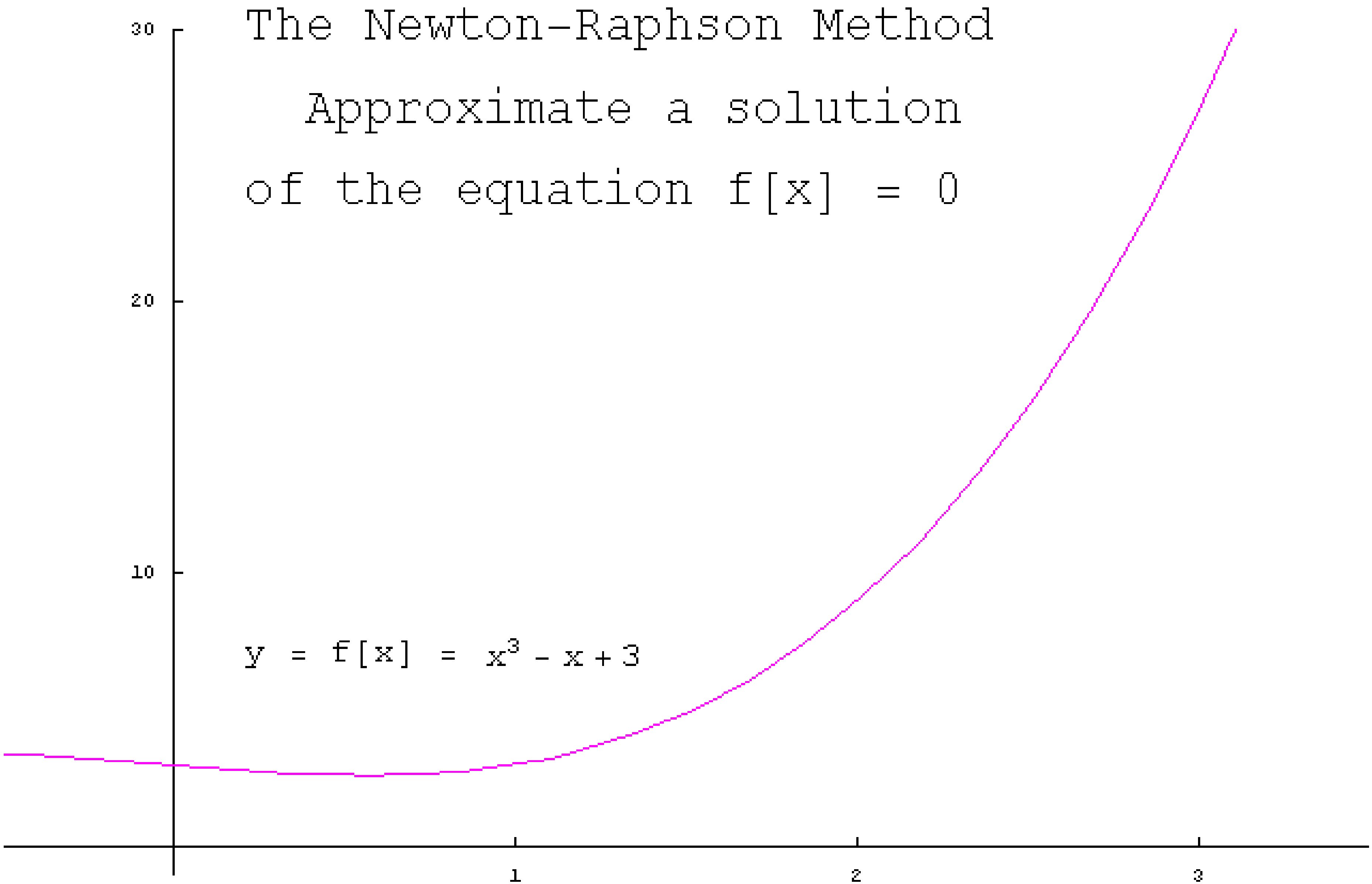
$$f(x_1) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1}{-2} = 0.5 \quad \ldots$$

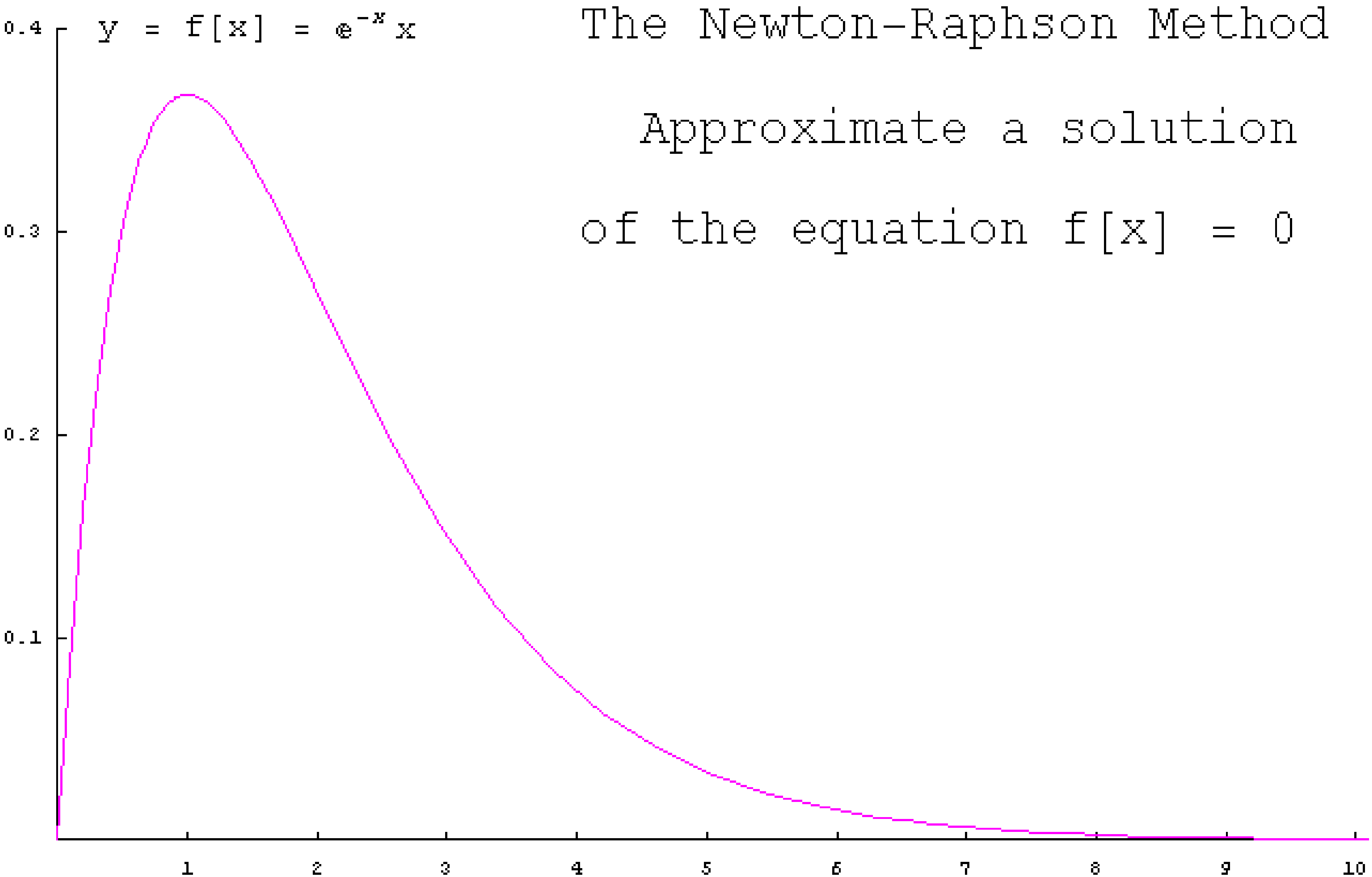
Ejemplo 6.3

- Planilla de cálculo: newton_raphson.ods
- Octave: newton_raphson.m

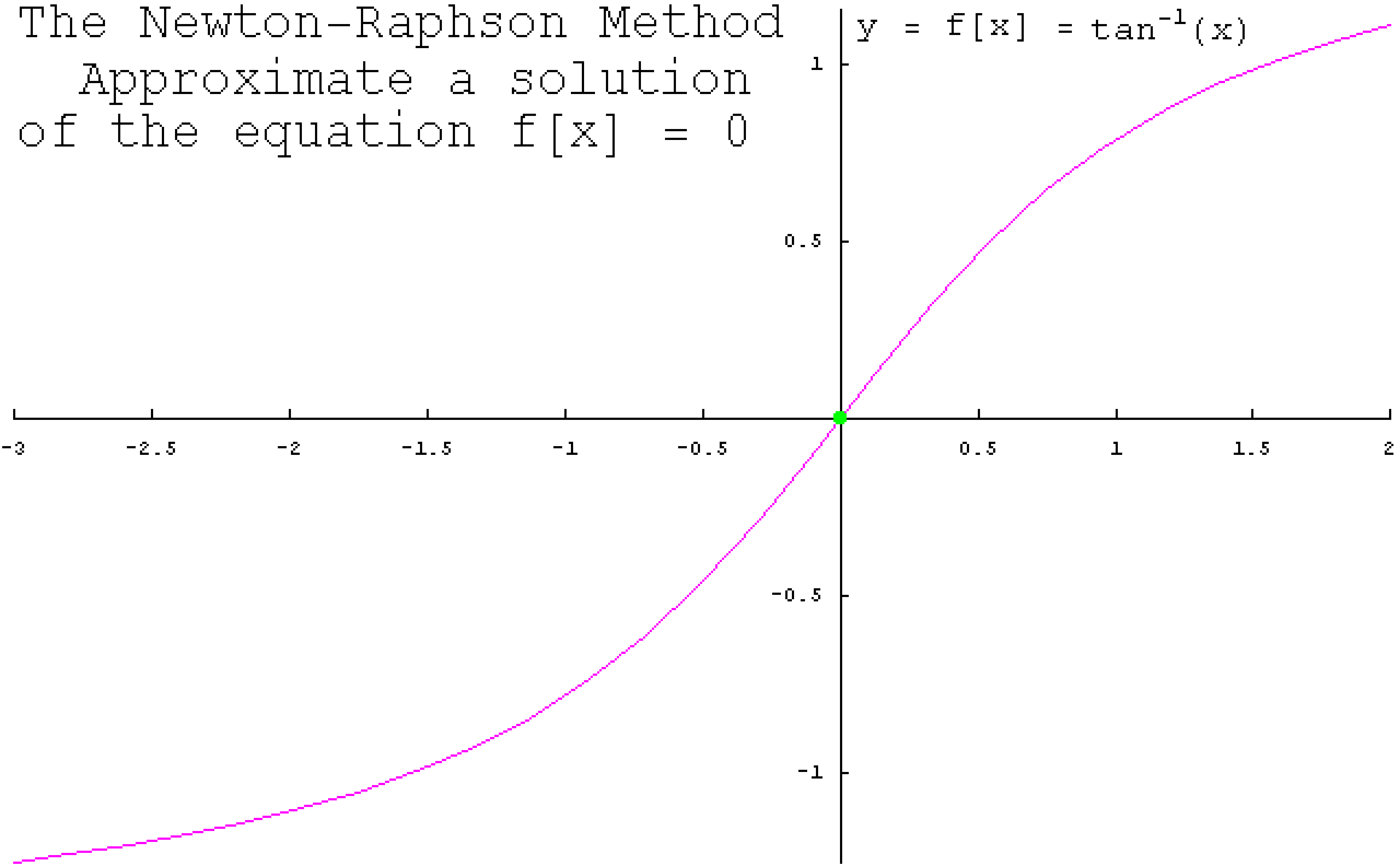
Desventajas del método de Newton-Raphson




The Newton-Raphson Method
Approximate a solution
of the equation f[x] = 0
y = f[x] = $x^3 - x + 3$
30
20
10
1
2
3



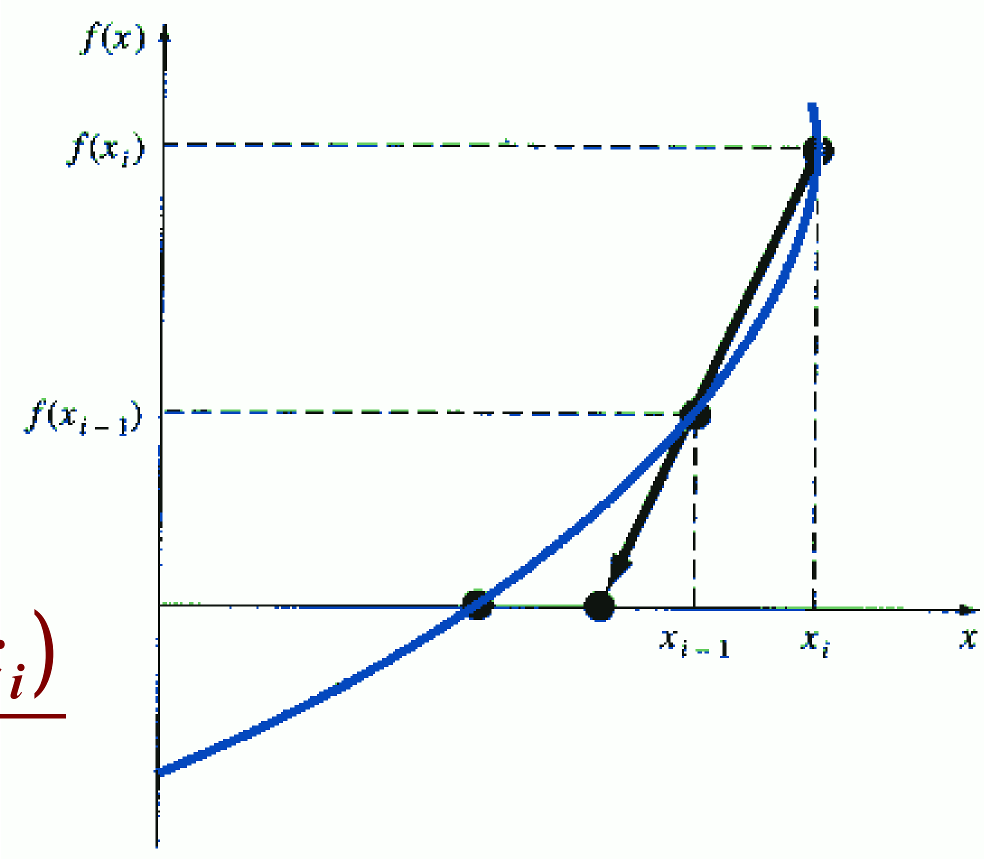
$y = f[x] = e^{-x} x$
The Newton-Raphson Method
Approximate a solution
of the equation f[x] = 0
0.4
0.3
0.2
0.1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


The Newton-Raphson Method
Approximate a solution
of the equation f[x] = 0
y = f[x] = tan^{-1}(x)
1
0.5
-0.5
-1
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2

Método de la Secante

- Se aproxima la derivada de N-R con una diferencia finita dividida hacia atrás:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

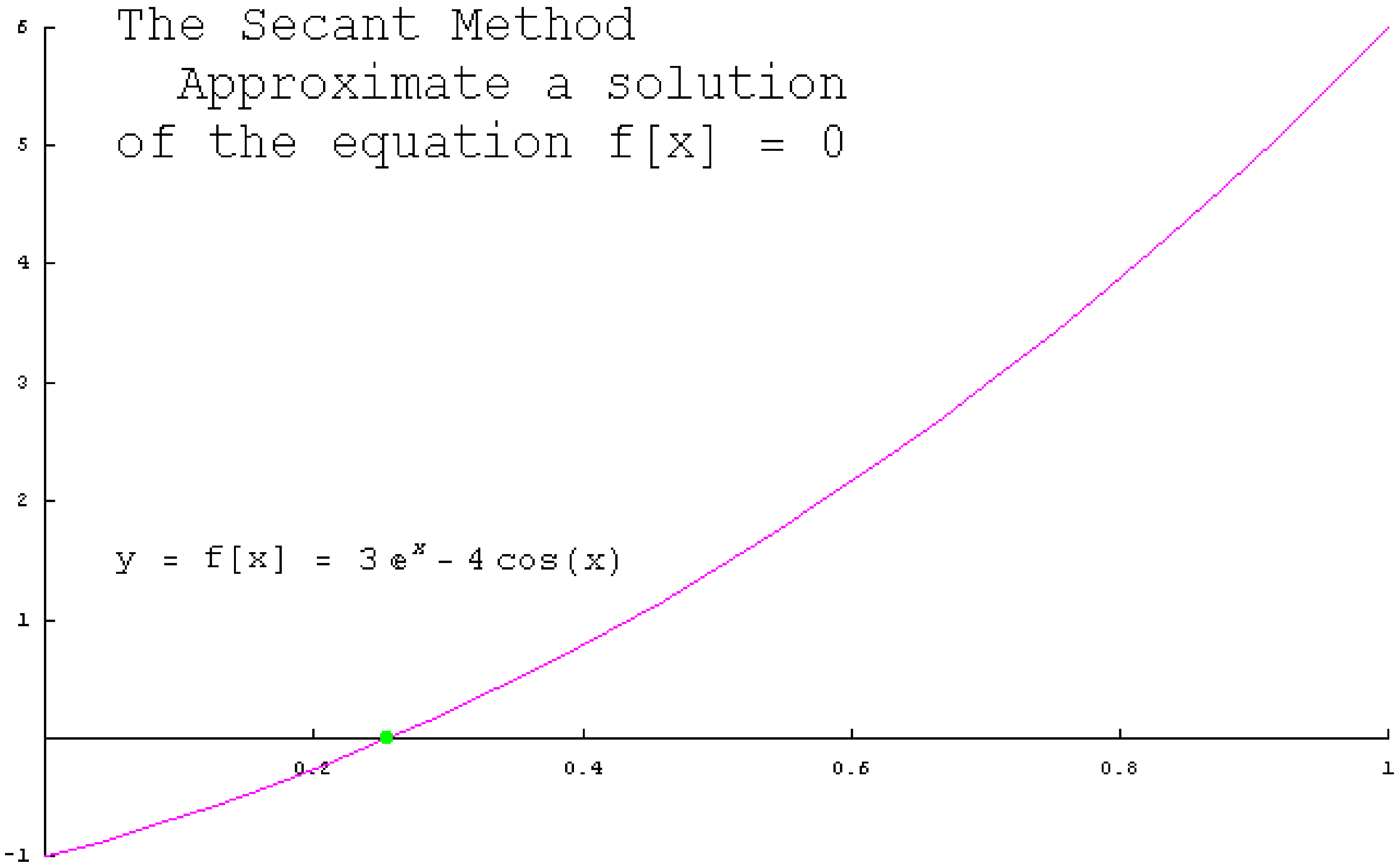


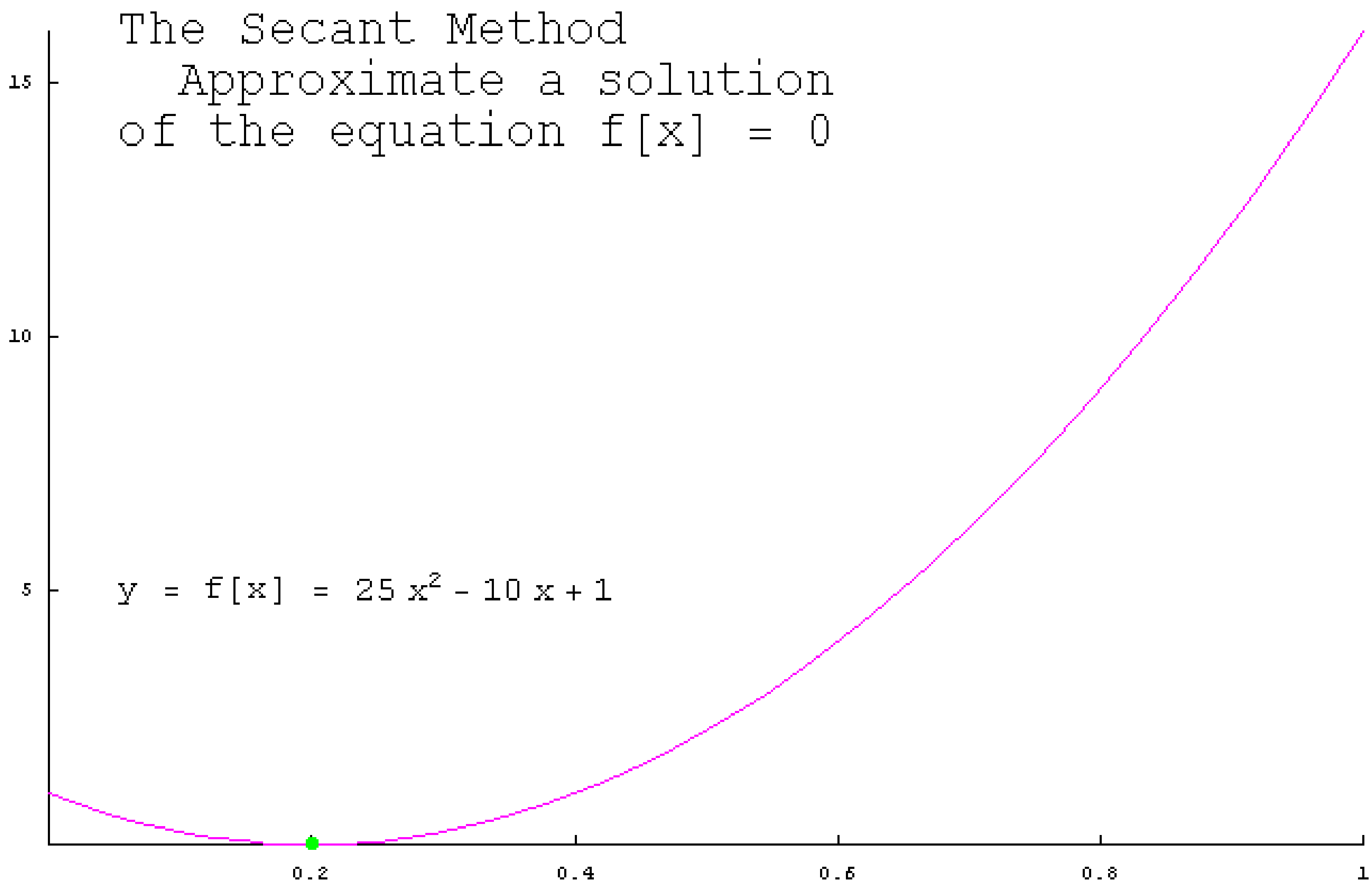
Método de la Secante

- Sustituyendo en la fórmula de Newton-Raphson (...):

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

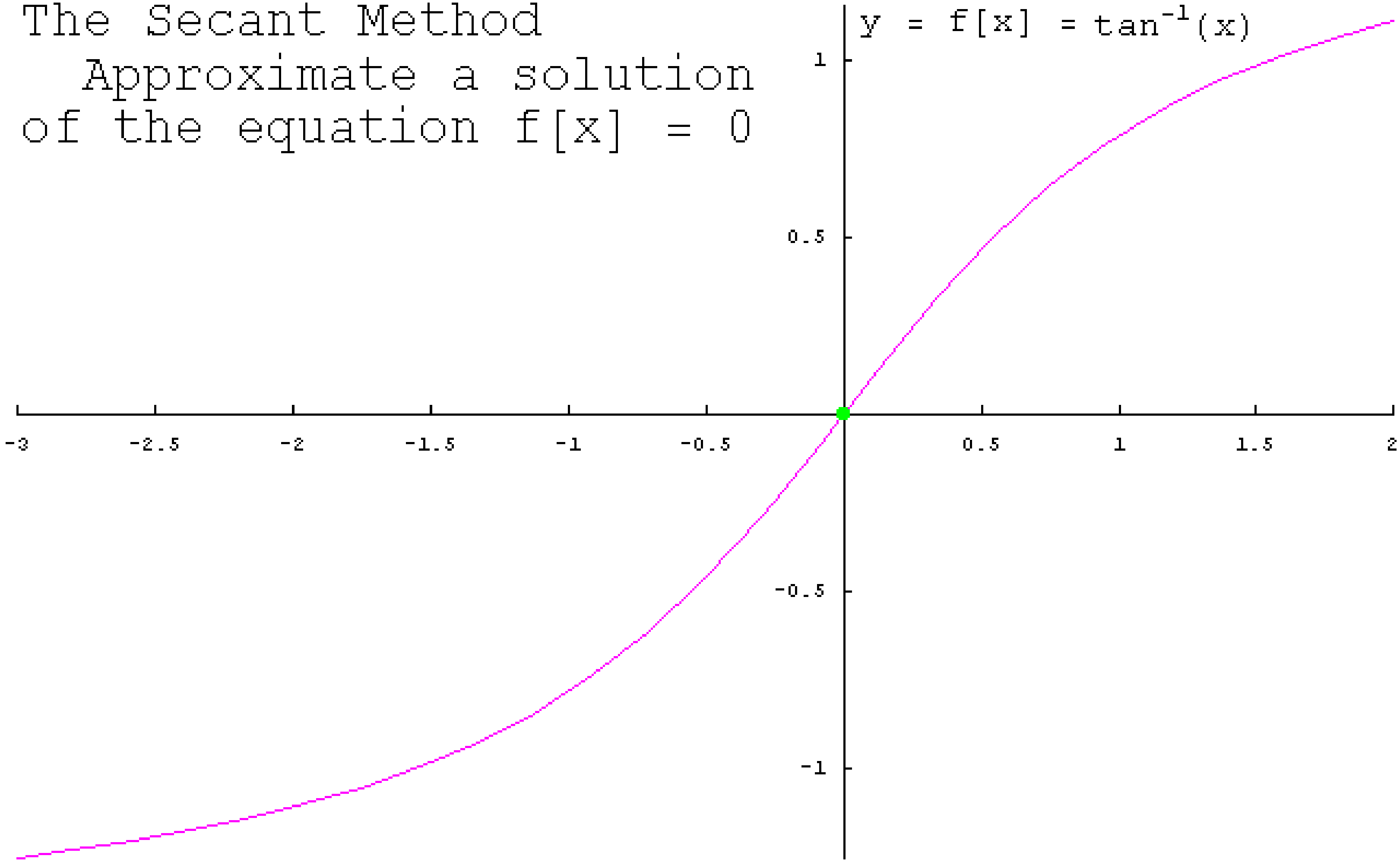
- Si bien necesita 2 puntos, no se clasifica como un método cerrrado


The Secant Method
Approximate a solution
of the equation f[x] = 0
y = f[x] = 3 e^x - 4 cos(x)
6
5
4
3
2
1
-1
0.2
0.4
0.6
0.8
1


The Secant Method
Approximate a solution
of the equation f[x] = 0
y = f[x] = 25 x^2 - 10 x + 1
15
10
5
0.2
0.4
0.6
0.8
1

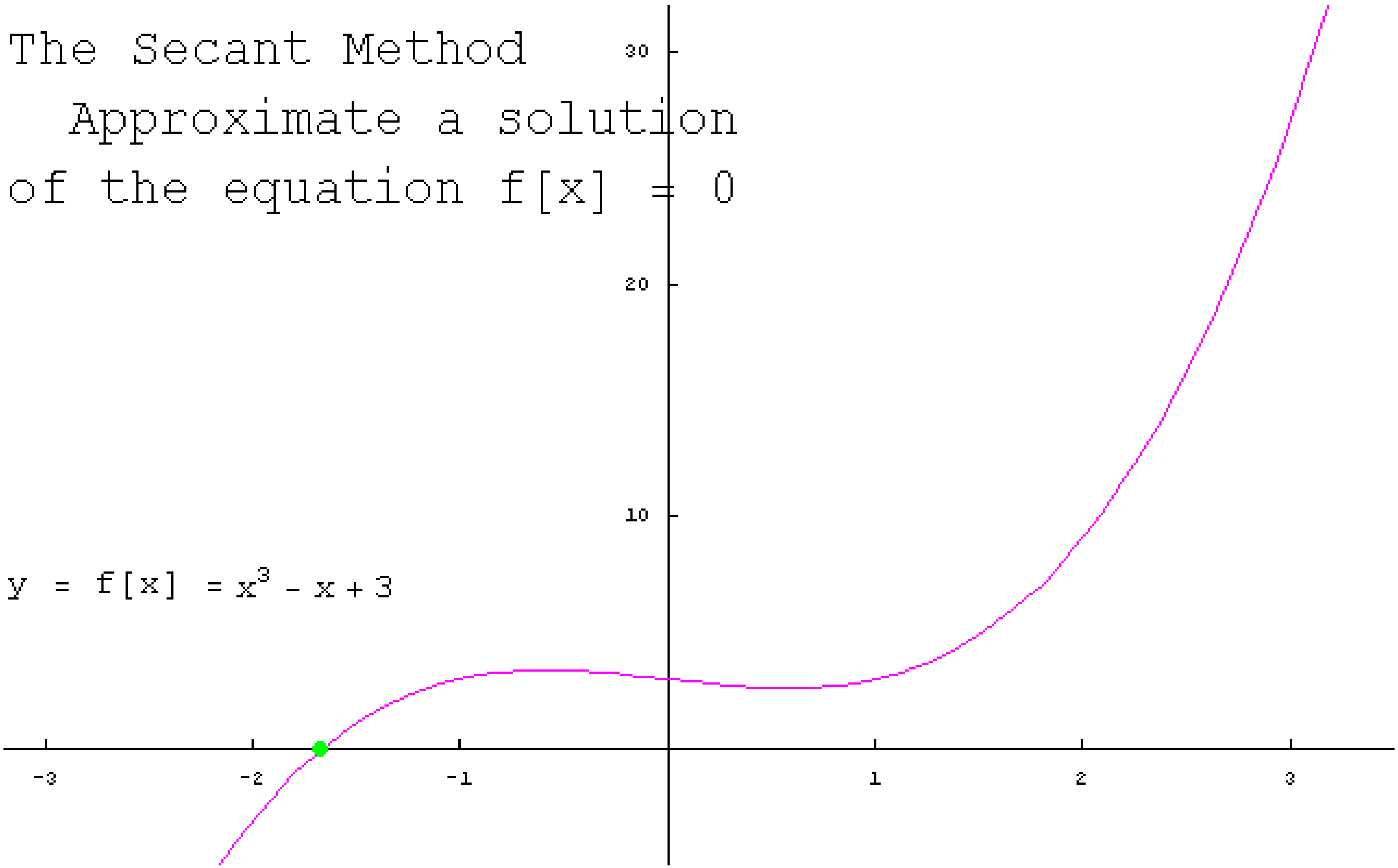
The Secant Method

Approximate a solution of the equation f[x] = 0

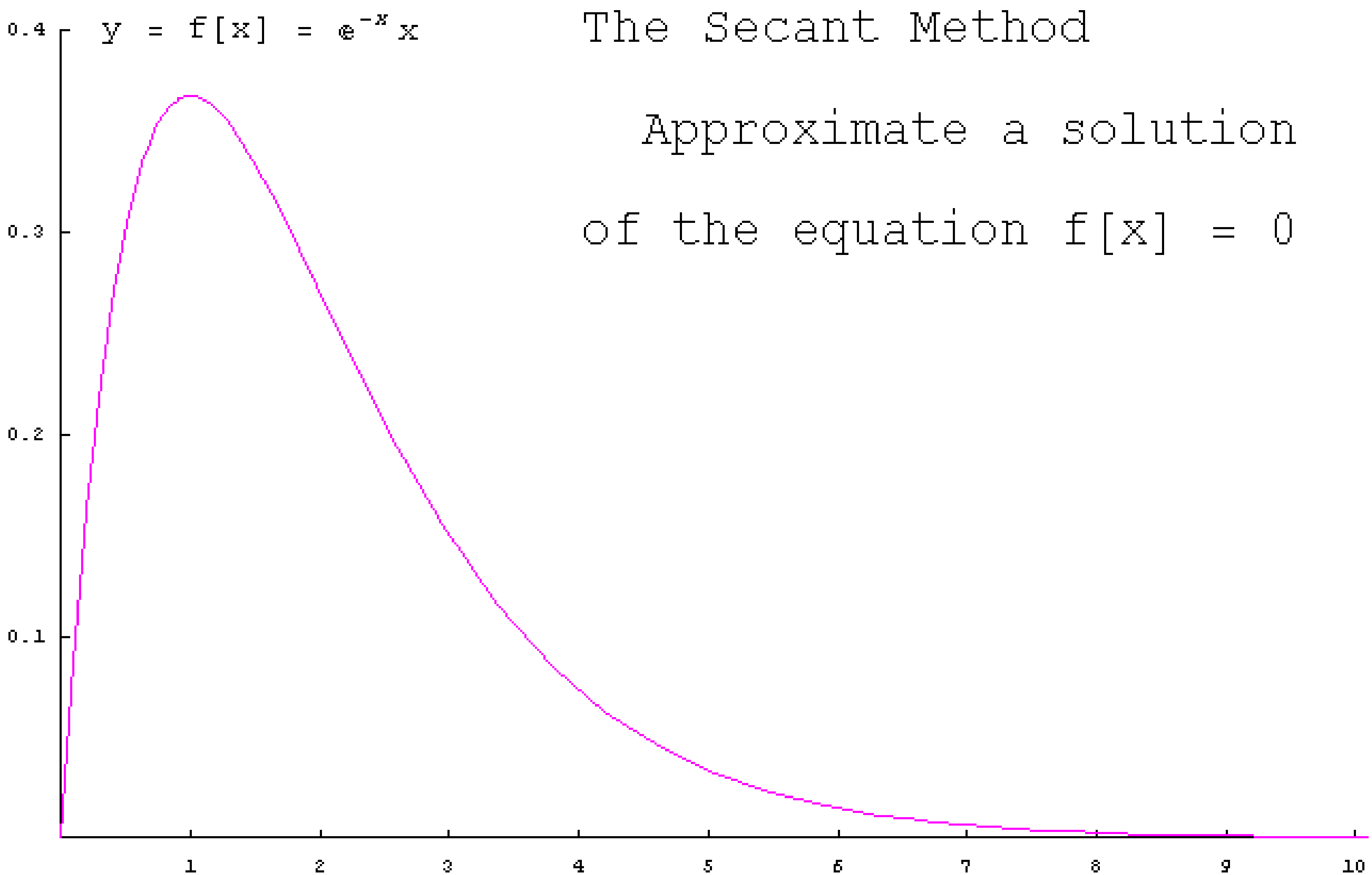


The Secant Method

Approximate a solution of the equation f[x] = 0



$y = f[x] = x^3 - x + 3$



The Secant Method
Approximate a solution
of the equation f[x] = 0
y = f[x] = e^-x x
0.4
0.3
0.2
0.1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Ejemplo 6.6, pág. 155

- Resolver, por el método de la secante,

$$f(x) = e^{-x} - x$$

- Se eligen como valores iniciales,

$$x_{-1} = 0.0 \quad , \quad x_0 = 1.0$$

- Raíz verdadera $x = 0.56714329...$

Ejemplo 6.6, pág. 155

- Primera iteración

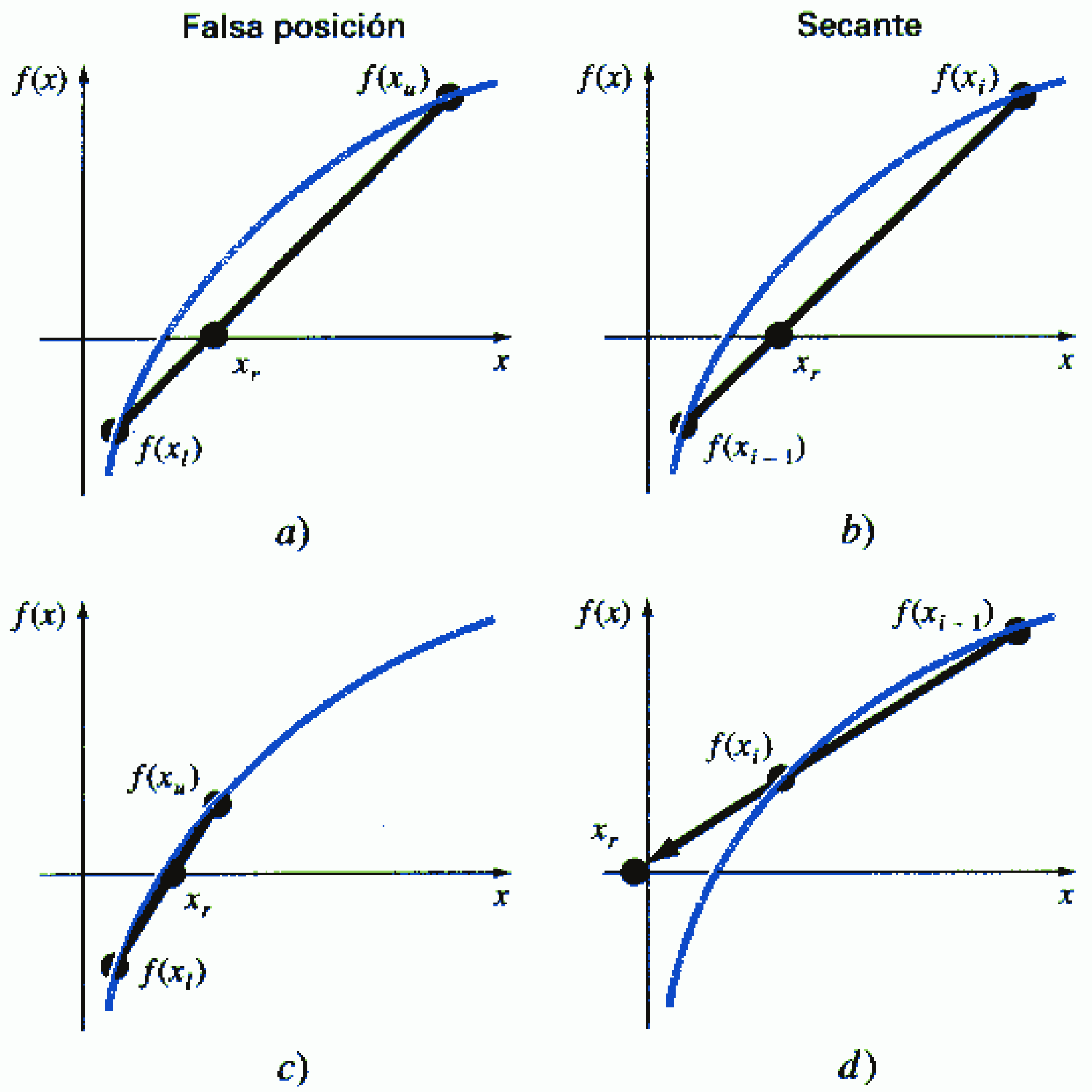
$$x_{-1}=0 \quad , \quad f(x_{-1})=1.00000$$

$$x_{0}=1 \quad , \quad f(x_{0})=-0.63212$$

$$x_{1}=1-\frac{-0.63212(0-1)}{1-(-0.63212)}=0.61270 \quad , \quad \varepsilon_{t}=8.0\,\%$$

- (…)
- Planilla de cálculo: secante.ods
- Octave: secante.m

Diferencias entre los métodos de la secante y de la falsa posición



Método de la secante modificado

- Considera un cambio fraccionario para estimar la derivada:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}{\delta x_i}$$

- Reemplazando en la ecuación de N-R:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}$$

Raíces múltiples

- Se puede demostrar que u(x) tiene las mismas raíces que f(x):

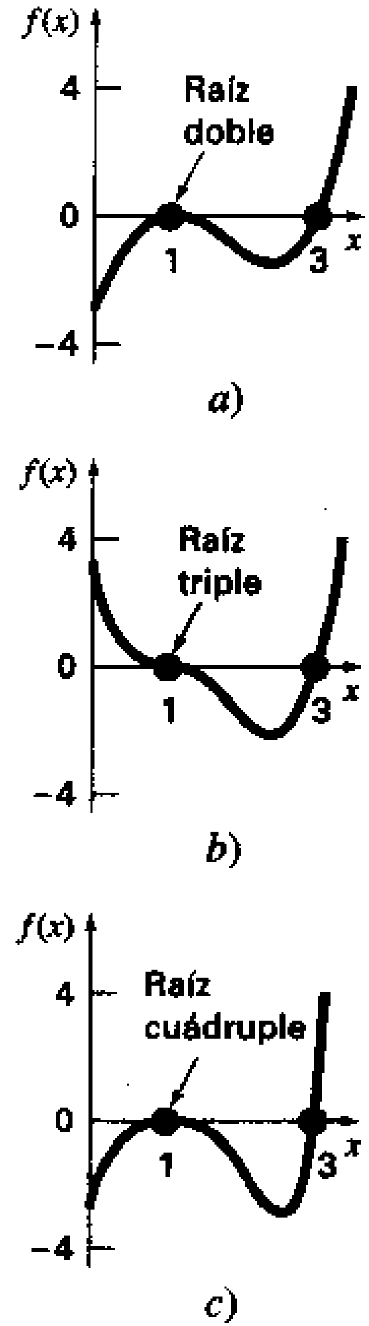
$$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$$

- Planteando N-R para u(x):

$$x_{i+1}=x_i-\frac{u(x)}{u'(x)}$$

- Desarrollando (...),

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)\,f'(x_i)}{\left[f'(x_i)\right]^2-f(x_i)\,f''(x_i)}$$



Problemas 6.1 a 6.25, pag. 167

Raíces de polinomios (cap. 7)

- Deflación polinomial
- Método de Müller

Deflación polinomial*

- Permite encontrar varias raíces (sucesivamente) de un polinomio P(x)
- Una vez encontrada una raíz x_1, para no volver a la misma raíz se divide a P(x) pro $(x – x_1)$. El nuevo polinomio ya no posee la raíz x_1.

Ejemplo*

- Encontrar las raíces de

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

- Aplicando el método de Newton-Raphson (x0 = 0)

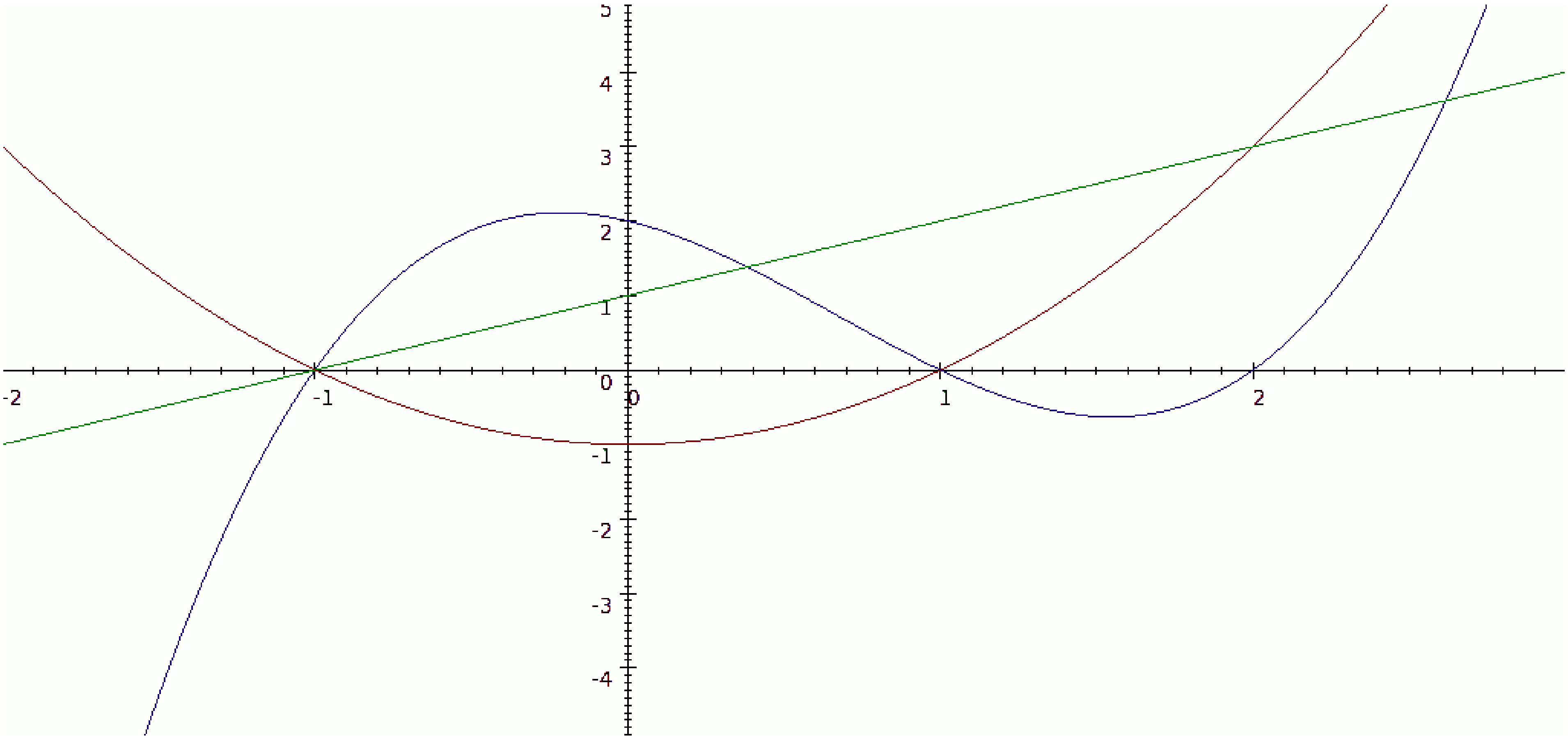
- Primera raíz: 2.00000 (2 iteraciones)

- Nuevo polinomio: $g(x) = x^2 - 1$

Ejemplo*

- Segunda raíz: 1.00000 (1 iteración)
- Nuevo polinomio: $h(x) = x + 1$
- Tercera raíz: -1.00000 (1 iteración)

Ejemplo*



Método de Müller

Método de la secante:

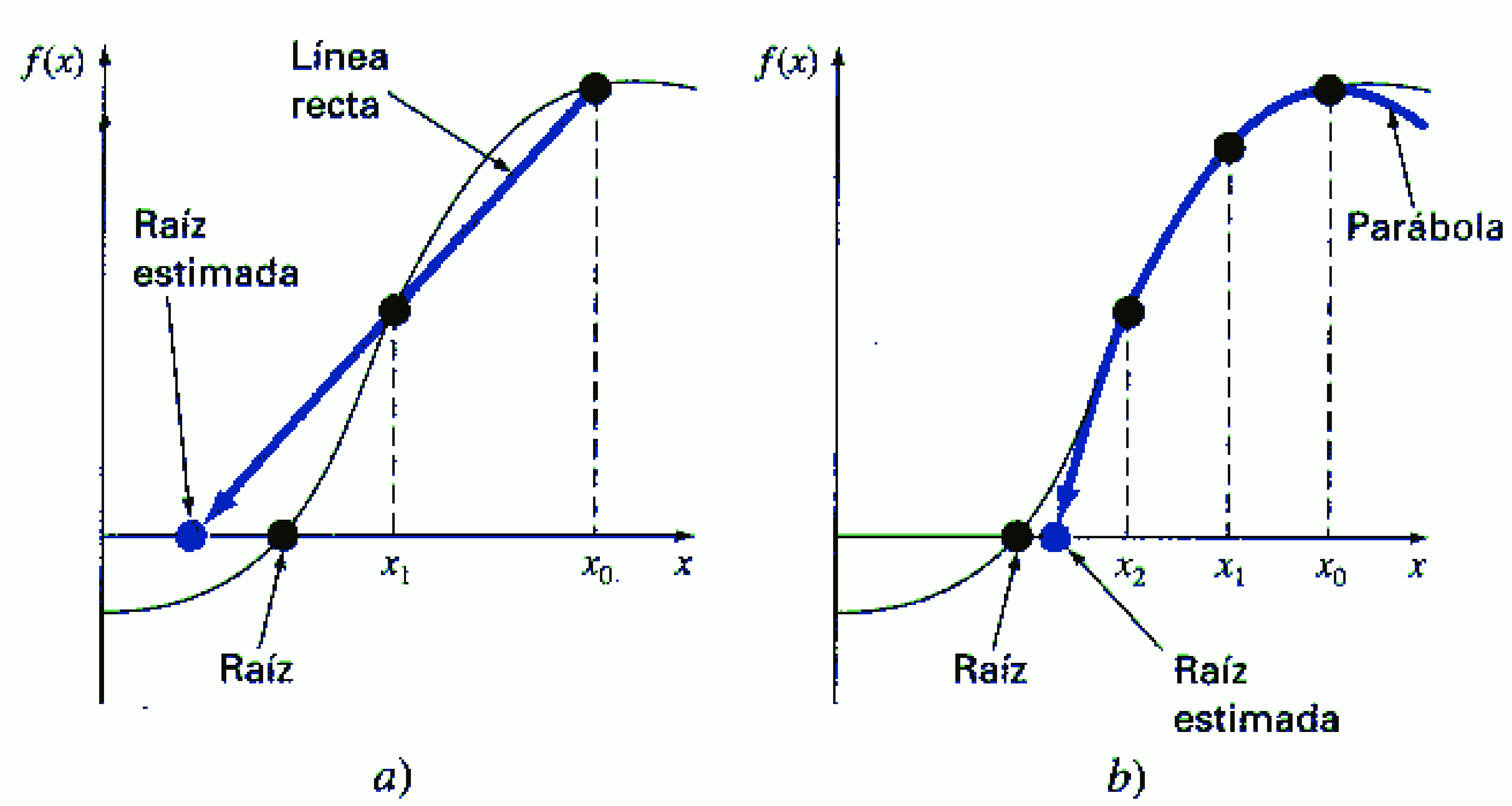
2 puntos → función lineal

↓

Método de Müller:

3 puntos → función cuadrática

Método de Müller



Método de Müller

- Se escribe la función cuadrática de la forma:

$$f(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

- Evaluando en los puntos x0, x1 y x2 (…) se tiene que $c = f(x_2)$
- Reemplazando,

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2)$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2)$$

Método de Müller

- haciendo $h_0 = x_1 - x_0$ $\quad h_1 = x_2 - x_1$

$$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Reemplazando en las anteriores y resolviendo para a y b (...), se tiene

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} \qquad b = a h_1 + \delta_1 \qquad c = f(x_2)$$

Método de Müller

- Para encontrar la raíz,

$$x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

- Se elige el signo central de modo que coincida con el signo de b
- Se descarta un valor (x0, x1 o x2):
  - Raíces reales: el más alejado de x3
  - Raíces complejas: (x0, x1, x2) = (x1, x2, x3)

Ejemplo 7.2, pag. 180

- Encontrar una raíz de la función

$$f(x) = x^3 - 13x - 12$$

- Partiendo de (x0, x1, x2) = (4.5, 5.5, 5.0)

$$f(4.5) = 20.625 \quad , \quad f(5.5) = 82{,}875 \quad , \quad f(5.0) = 48$$

$$h_0 = 5.5 - 4.5 = 1 \qquad h_1 = 5.0 - 5.5 = -0.5$$

$$\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 62.25 \qquad \delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 69.75$$

Ejemplo 7.2, pag. 180

$$a = \ldots = 15 \quad , \quad b = 62.25 \quad , \quad c = 48$$

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \ldots = 31.54461$$

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \ldots = 3.976487$$

$$\varepsilon_a = \left| \frac{3.976487 - 5}{3.976487} \right| = 25.74\%$$

- Planilla de cálculo: muller.ods

Herramientas disponibles

- Planilla de cálculo: búsqueda de valor destino: destino.ods
- Octave: raíces de polinomios – función roots

Problemas 7.1 a 7.25, pag. 197

Estudio de casos (Cap. 8)

Ley de los gases no ideales

- Ley de los gases ideales

$$pV = nRT$$

- Ecuación de Van der Waals

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad , \quad v = \frac{V}{n}$$

Volumen molar

Ley de los gases no ideales

- Calcular el volumen molar para el dióxido de carbono y el oxígeno

$$R = 0{,}082054 \frac{l\ atm}{mol\ K}$$

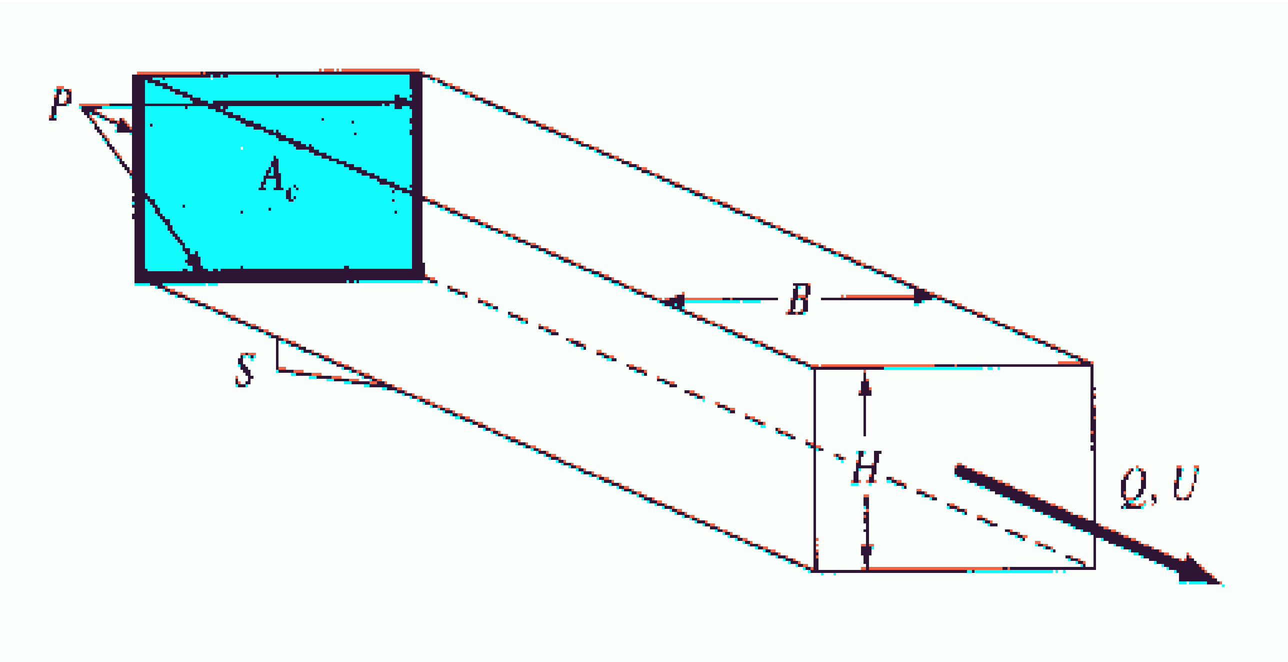
	a	b
CO_2	3,592	0,04267
O_2	1,360	0,03183

- Solucion en Octave: caso_81.m

Flujo en canales abiertos

- Ecuación de continuidad

$$Q = U\,A = U\,B\,H$$



Flujo en canales abiertos

- Ecuación de Manning

$$U = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}$$

$$R = \frac{A}{P}$$ Radio hidráulico

$$P = B + 2H$$ Perímetro mojado

- Reemplazando (...),

$$Q = \frac{S^{1/2}}{n} \frac{(BH)^{5/3}}{(B+2H)^{2/3}}$$

Flujo en canales abiertos

- Datos*: Q = 4 m³/s, B = 2 m, S = 0.001, n = 0.015
- Incógnita = H
- Resolver

$$f(H) = \frac{S^{1/2}}{n} \frac{(BH)^{5/3}}{(B+2H)^{2/3}} - Q = 0$$

- Resuelto por iteración de punto fijo en canales.ods

Problemas 8.1 a 8.46, pag. 216