Ecuaciones algebraicas lineales

Ecuaciones algebraicas lineales

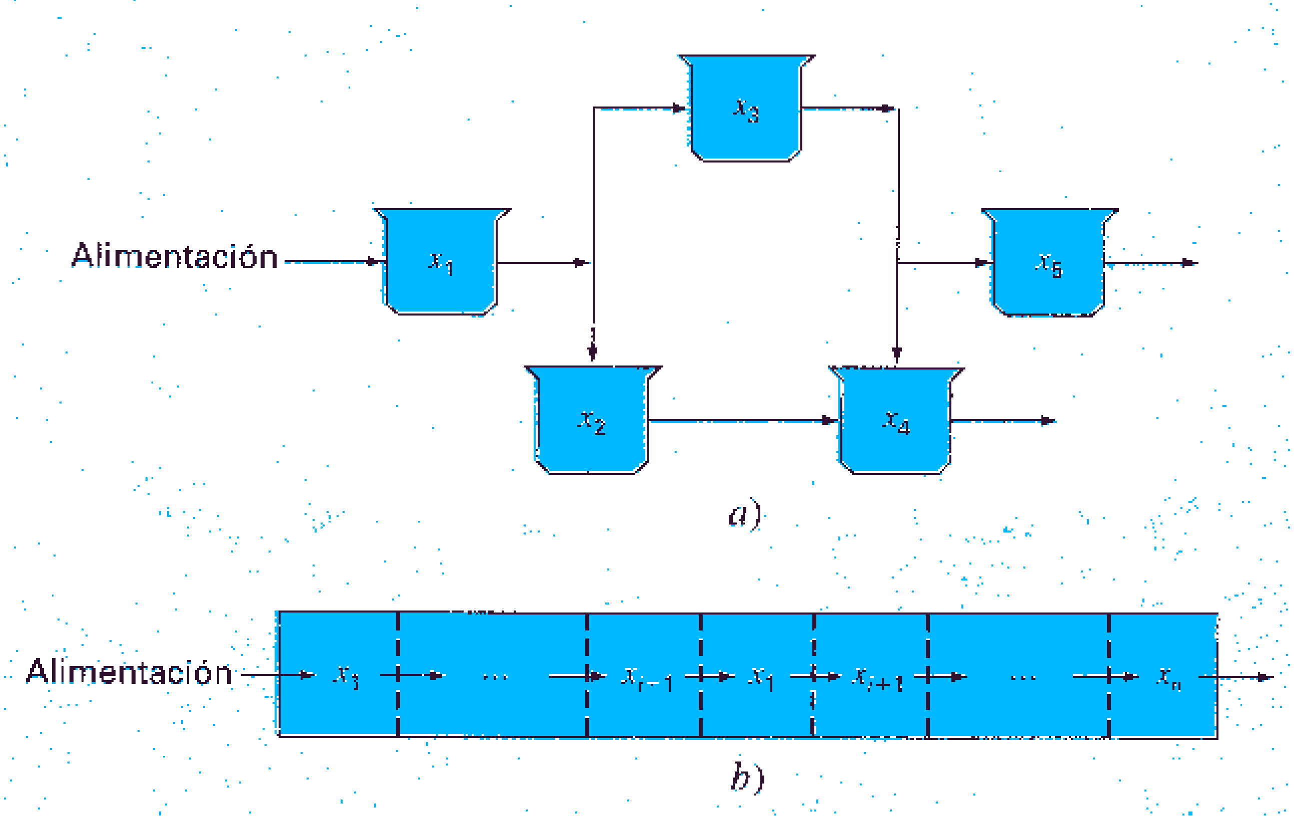
Nos interesa resolver el sistema:

$$\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}$$

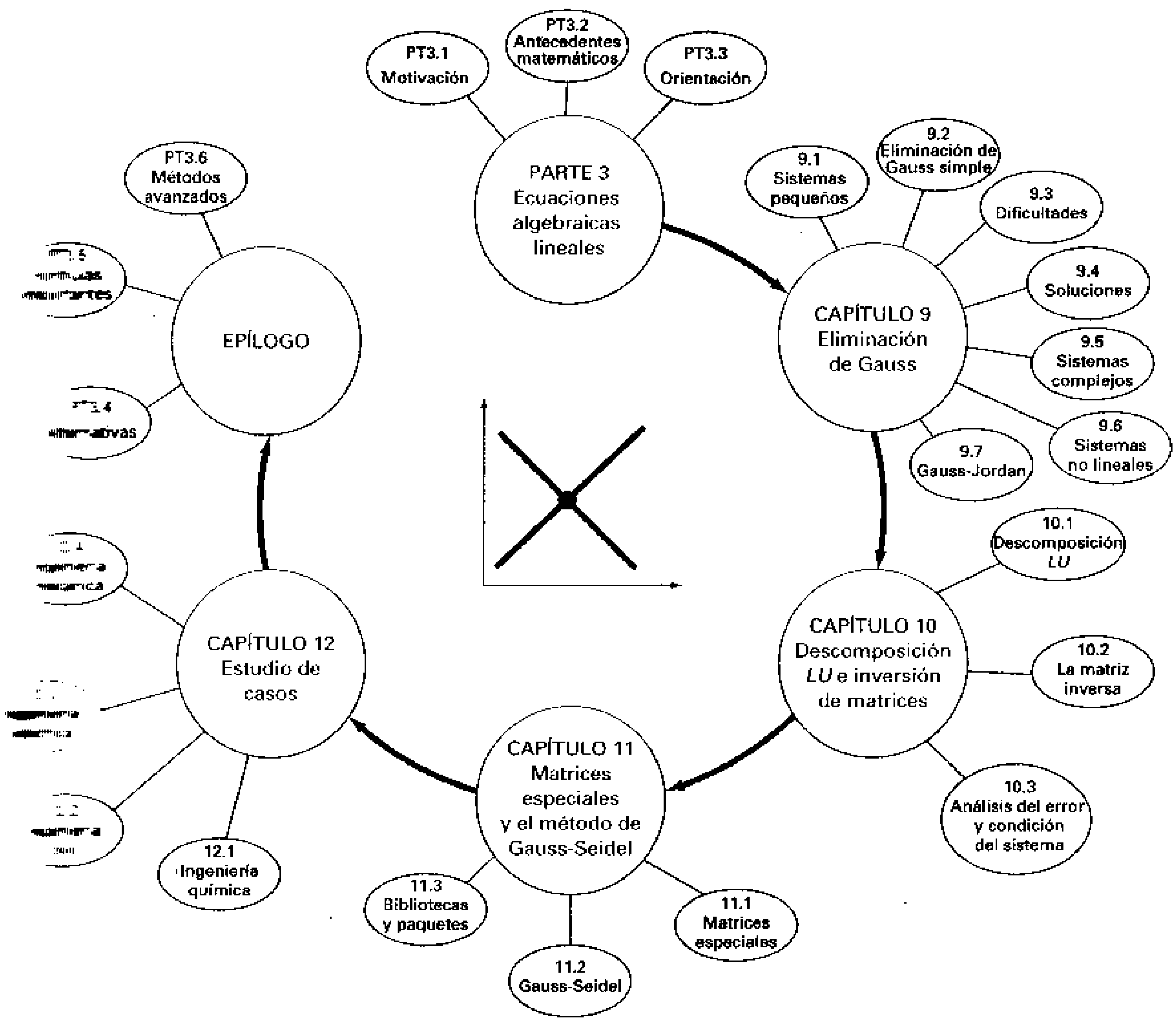
Ecuaciones algebraicas lineales y la práctica de la Ingeniería

Dos tipos de problemas:

- Solución de sistemas discretos o agrupados
- Solución de sistemas continuos a través de ED



Orientación



Solución de pequeños sistemas de ecuaciones

Método gráfico

Regla de Cramer (determinantes)

Sustitución

Eliminación de Gauss simple

Dos pasos:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & c'_2 \\ & & a''_{33} & c''_3 \end{array}\right]$$

Eliminación hacia adelante

$$\Downarrow$$

$$x_3 = c''_3 / a''_{33}$$

$$x_2 = (c'_2 - a'_{23} x_3) / a'_{22}$$

$$x_1 = (c_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3) / a_{11}$$

Sustitución hacia atrás

Eliminación hacia adelante

Se multiplica la ecuación 1 (fila pivote) por

$$f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Y se resta a la ecuación 2 para obtener

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}\right) x_2 + \ldots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n}\right) x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1$$

o

$$a'_{22} x_2 + \ldots + a'_{2n} x_n = b'_2$$

Eliminación hacia adelante

Es decir, $$F'_2 = F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} F_1$$

Se procede igual con las restantes filas,

$$F'_3 = F_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} F_1 \quad ; \ldots ; \quad F'_n = F_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} F_1$$

Para obtener

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a'_{22} x_2 + \ldots + a'_{2n} x_n &= b'_2 \\
a'_{32} x_2 + \ldots + a'_{3n} x_n &= b'_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \; \cdots\cdots\cdots & \\
a'_{n2} x_2 + \ldots + a'_{nn} x_n &= b'_n
\end{aligned}$$

Eliminación hacia adelante

Se toma como fila pivote la 2, y se efectúan las operaciones

$$F''_3 = F'_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} F'_2 \;\; ; \ldots ; \;\; F''_n = F'_n - \frac{a_{n2}}{a_{22}} F'_2$$

Para obtener

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1\mathrm{n}}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2\mathrm{n}}x_n &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3\mathrm{n}}x_n &= b''_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a''_{n3}x_3 + \ldots + a''_{nn}x_n &= b''_n \end{aligned}$$

Eliminación hacia adelante

Se continua de esta forma hasta tomar la (n-1)ésima ecuación como pivote, efectuar

$$F_n^{(n-1)} = F_n^{(n-2)} - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n-1,n-1}} F_{n-1}^{(n-2)}$$

Y obtener

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}
\end{aligned}$$

Eliminación hacia adelante

Es decir,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \dots \\ b_n^{(n-1)} \end{Bmatrix}$$

Sustitución hacia atrás

De la última ecuación,

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

De la ecuación n-1,

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}$$

En general,

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

Con i = n-1, n-2, ..., 2, 1

Costo computacional (9.2.1)

Se demuestra que el número de operaciones requeridas es del orden de

$$\lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\frac{2n^3}{3}+O\left(n^2\right)}_{\textit{eliminación hacia adelante}}+\underbrace{\frac{n^2}{2}+O\left(n\right)}_{\textit{sustitución hacia atrás}}\right]=\frac{2n^3}{3}+O\left(n^2\right)$$

Ejemplo 9.5 pág. 258

Resolver por Eliminación de Gauss

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

Código en Octave para la eliminación de Gauss

Código: gauss.m

Dificultades en los métodos de eliminación

División por 0:

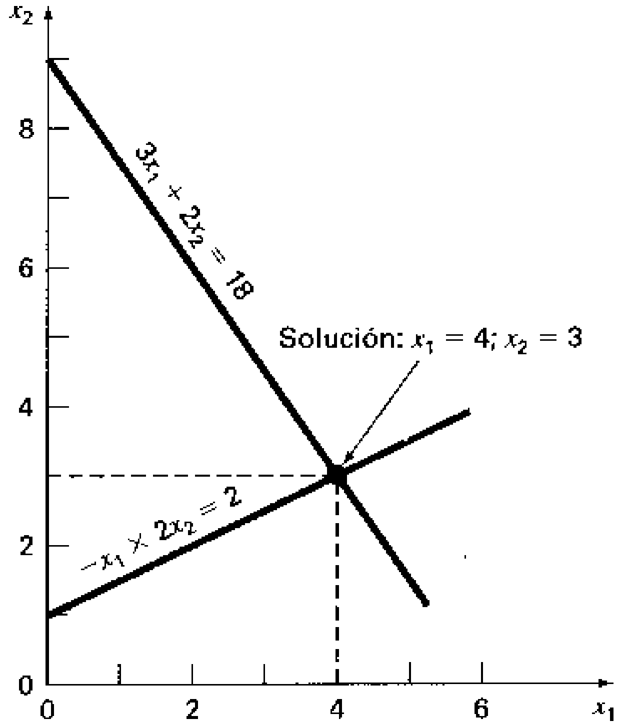
$$2x_2 + 3x_3 = 8$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 = -3$$
$$2x_1 + x_2 + 6x_3 = 5$$

Errores de redondeo

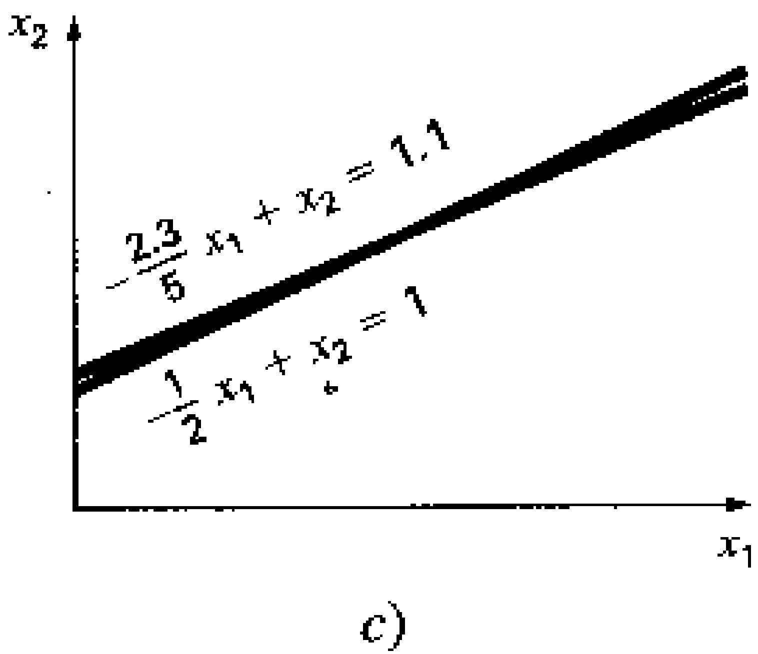
Sistemas mal acondicionados

Sistemas mal acondicionados

Pequeños cambios en los coeficientes provocan grandes cambios en las soluciones



Bien condicionado



Mal condicionado

Técnicas para mejorar las soluciones

- Uso de más cifras significativas
  - Reduce errores de redondeo
- Pivoteo
  - Evita la división por 0
  - Reduce los errores de redondeo
- Escalamiento
  - Gran diferencia de magnitud entre distintos coeficientes

Pivoteo

Antes de de normalizar cada renglón se determina el coeficiente más grande (en valor absoluto) *por debajo* del pivote; y se intercambia, de modo que los pivotes sean los elementos de mayor valor absoluto.

Ejemplo 9.9, pag. 268. Resolver por eliminación de Gauss sin y con pivoteo

$$0.0003\,x_1 + 3.0000\,x_2 = 2.0001$$
$$1.0000\,x_1 + 1.0000\,x_2 = 1.0000$$

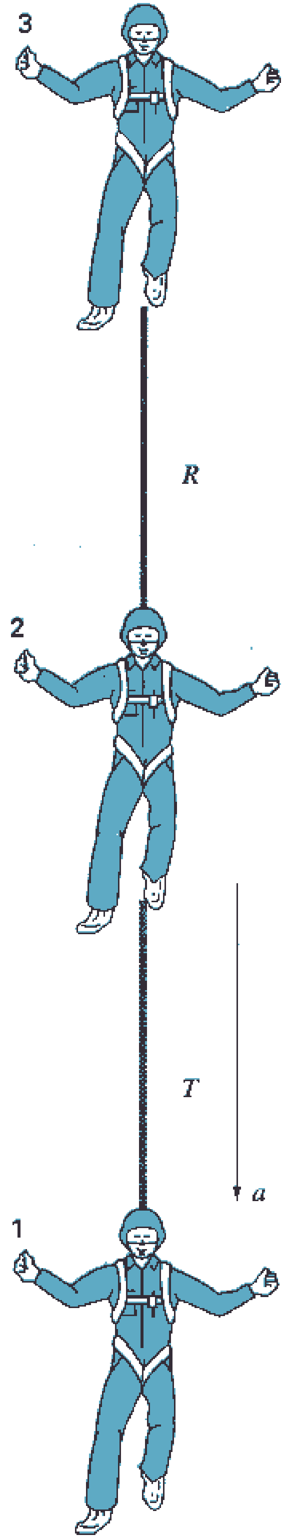
Escalamiento

Se aplica cuando hay diferencias importantes entre coeficientes del sistema, lo que ocurre comúnmente en problemas de la Física (unidades).

Se divide cada renglón del sistema por su coficiente de mayor valor absoluto.

Ejemplo 9.10, pag. 270. Resolver sin y con escalamiento

$$2x_1 + 100000\,x_2 = 100000$$
$$x_1 + x_2 = 2$$



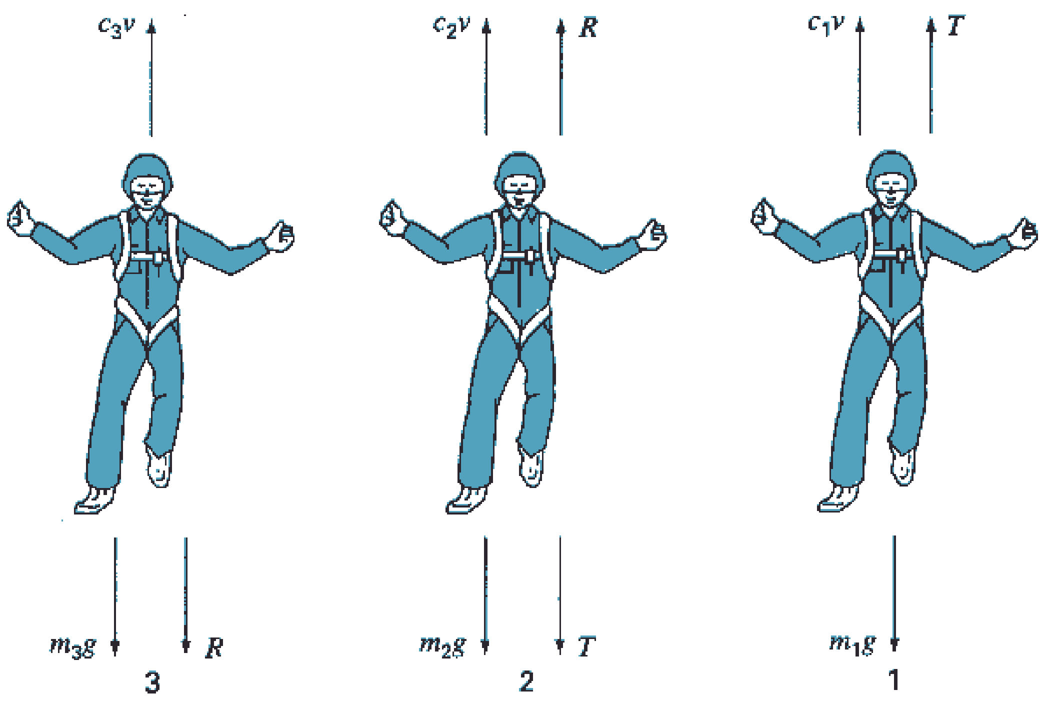
Ejemplo 9.11

Un equipo de tres paracaidistas está unido por una cuerda ligera mientras cae a 5 m/s. Calcule la tensión en cada sección de la cuerda y la aceleración del equipo

Paracaidista	Masa, kg	Coef. de arrastre, kg/s
1	70	10
2	60	14
3	40	17

Ejemplo 9.11

A partir de los diagramas de cuerpo libre de cada paracaidista,



Se plantea la segunda ley de Newton para cada uno:

Ejemplo 9.11

$$
\begin{aligned}
m_1 g - T - c_1 v \quad\quad &= m_1 a \\
m_2 g + T - c_2 v - R &= m_2 a \\
m_3 g \quad\quad - c_3 v + R &= m_3 a
\end{aligned}
$$

Reemplazando y reordenando,

$$
\begin{bmatrix} 70 & 1 & 0 \\ 60 & -1 & 1 \\ 40 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} a \\ T \\ R \end{Bmatrix} =
\begin{Bmatrix} 636 \\ 518 \\ 307 \end{Bmatrix}
$$

Resolver con el programa en Octave

Problemas 9.1 a 9.18 pag. 279

Descomposición LU

Es más eficiente que la eliminación de Gauss cuando deben resolverse numerosos sistemas con los mismos coeficientes [A], pero distintos términos {B}

La propia eliminación de Gauss se puede expresar como una descomposición LU

Descomposición LU

Sea un sistema de ecuaciones

$$[A]\{X\}=\{B\} \;\Rightarrow\; [A]\{X\}-\{B\}=0$$

Que pueda expresarse de la forma

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; [U]\{X\}-\{D\}=0$$

Luego de la eliminación hacia adelante de

Descomposición LU

Y que existe una matriz [L] de la forma

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

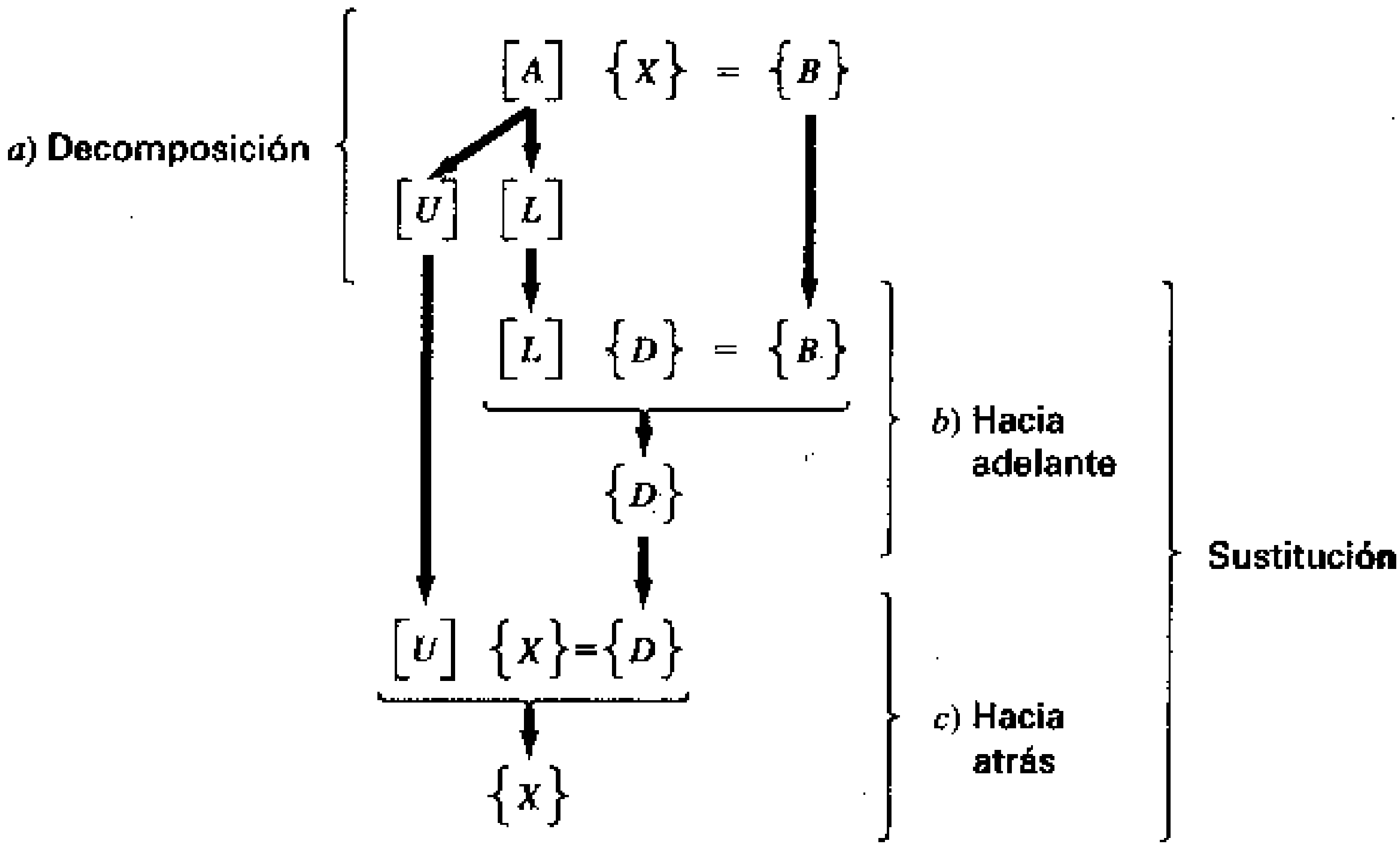
Tal que

$$[L]\{[U]\{X\} - \{D\}\} = [A]\{X\} - \{B\}$$

Por lo tanto

$$[L][U] = [A] \quad , \quad [L]\{D\} = \{B\}$$

Pasos en la descomposición LU



Descomposición LU con eliminación de Gauss

Se puede demostrar que

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \quad , \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$a'_{22} = a_{22} - f_{21} a_{12} \quad ; \quad a'_{23} = a_{23} - f_{21} a_{13}$$

$$a''_{33} = a_{33} - f_{31} a_{13} - f_{32} a'_{23}$$

y

$$f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \quad , \quad f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \quad , \quad f_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

Ejemplo 10.1

Obtenga una descomposición LU para la matriz del ejemplo 9.5

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{Bmatrix}$$

Solución del sistema

Sustitución hacia adelante para resolver

$$[L]\{D\}=\{B\}$$

$$d_1=b_1$$

$$d_i=b_i-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}d_j=b_i-\sum_{j=1}^{i-1} f_{ij}d_j \quad , \quad i=2,3,\ldots,n$$

Solución del sistema

Sustitución hacia atrás para resolver

$$[U]\{X\}=\{D\}$$

$$x_n=\frac{d_n}{u_{nn}}$$

$$x_i=\frac{d_i-\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}} \quad , \quad i=n-1,n-2,\dots,1$$

Ejemplo 10.2

Encontrar la solución del problema 10.1

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{Bmatrix}$$

Costo computacional

El trabajo total es igual a la Eliminación de Gauss,

$$\frac{2n^3}{3}+O\left(n^2\right)$$

Sólo que se distribuye en partes iguales entre la descompisición y la sustitución

Algoritmo

Codigo en Octave para descomposición LU:
descLU.m

Matriz Inversa

Es aquella que satisface

$$[A][A]^{-1}=[A]^{-1}[A]=I$$

Supongamos un sistema de 3 x 3. Para calcular la primera columna de inv A, se resuelve el sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11}^{-1} \\ a_{21}^{-1} \\ a_{31}^{-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Matriz Inversa

para calcular la segunda columna de inv A,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{12}^{-1} \\ a_{22}^{-1} \\ a_{32}^{-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Y la tercera columna de inv A,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{13}^{-1} \\ a_{23}^{-1} \\ a_{33}^{-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Matriz inversa

Es decir, resolver n sistemas para una matriz de n x n

Como A no cambia, conviene usar el algoritmo de descomposición LU visto

Ejemplo 10.3, pag. 293

Código en Octave para el cálculo de la inversa: inversa.m

Problemas 10.1 a 10.8, pag. 303

Sistemas mal acondicionados

Cuatro formas de detectar el mal acondicionamiento:

- Escalar la matriz A e invertirla. Observar si hay elementos mucho mayores a 1
- Multiplicar la inversa de A por A y estimar qué tan lejos está el resultado de I
- Invertir la inversa y estiamr qué tan lejos está el resultado de A
- Calcular el número de condición de A, cond[A]

Normas vectoriales y matriciales

Proporciona una medida del tamaño o "longitud" de una matriz o vector

Por ejemplo, el módulo de un vector es una norma

Normas de vectores y matrices

Vectores

$$\|X\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Norma euclideana

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|X\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i|$$

Matrices

$$\|A\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Norma de Frobenius

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Número de condición

Se define como

$$cond[A] = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| > 1$$

Ejemplo 10.4

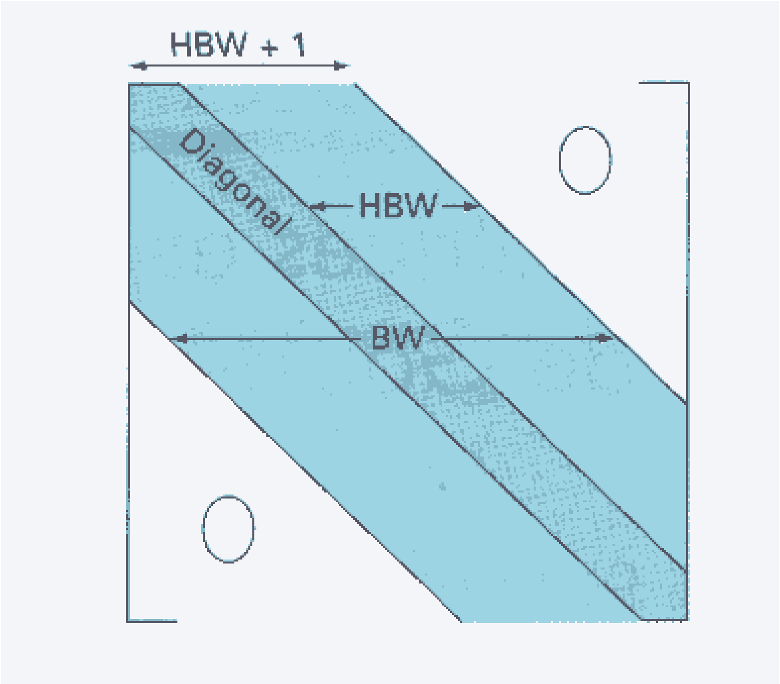
Calcular el número de condición de la matriz de Hilbert de rango 3

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Problemas 10.9 a 10.21

Matrices bandeadas

Aparecen en la solución numérica de EDs



Eliminación de Gauss o descomposición LU ineficientes

Sistemas tridiagonales

$$\begin{bmatrix} f_1 & g_1 & & & & & & \\ e_2 & f_2 & g_2 & & & & & \\ & e_3 & f_3 & g_3 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & e_{n-1} & f_{n-1} & g_{n-1} \\ & & & & & & e_n & f_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{n-1} \\ r_n \end{Bmatrix}$$

Se almacenan 4 vectores de O(n) en lugar de una matriz de O(n^2) esencialmente llena de ceros

Algoritmo de Thomas

Un método de descomposición LU eficiente para sistemas tridiagonales

Descomposición

```
for k = 2:n
   e(k) = e(k)/f(k-1);
   f(k) = f(k) –
  e(k)*g(k-1);
endfor
```

Sustitución hacia adelante

```
for k = 2:n
   r(k) = r(k) - e(k)*r(k-1);
endfor
```

Sustitución hacia atrás

```
x(n) = r(n)/f(n);
for k = n-1:-1:1
   x(k) = (r(k) – g(k)*...
   x(k+1))/f(k);
endfor
```

Ejemplo 11.1 pag. 307

Resolver el siguiente sistema tridiagonal con el algoritmo de Thomas

$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & & \\ -1 & 2.04 & -1 & \\ & -1 & 2.04 & -1 \\ & & -1 & 2.04 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 200.8 \end{Bmatrix}$$

Matrices simétricas

Son las que cumplen

$$a_{ij}=a_{ji} \quad , \quad \forall\, i\,,\, j$$

Es decir

$$[A]=[A]^T$$

Requieren la mitad de memoria de almacenamiento

Descomposición de Cholesky

Si [A] es simétrica, puede descomponerse como

$$[A]=[L][L]^T$$

Se demuestra que

$$l_{ki}=\frac{a_{ki}-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}l_{kj}}{l_{ii}} \quad , \quad i=1,2,\ldots,k-1$$

$$l_{kk}=\sqrt{a_{kk}-\sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

Ejemplo 11.2, pag. 308

Aplique la descomposición de Cholesky a la matriz simétrica

$$[A] = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

Algoritmo de Cholesky

Código en Octave para la descomposición de Cholesky: cholesky.m

Métodos iterativos

Sea el sistema

$$[A]\{X\}=\{B\}$$

Si es de 3 x 3, es posible despejar cada incógnita como

$$x_1=\frac{b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_2=\frac{b_2-a_{21}x_1-a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_3=\frac{b_3-a_{31}x_1-a_{32}x_2}{a_{33}}$$

Métodos iterativos

En general,

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

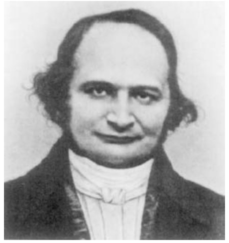
Se debe partir de un conjunto de valores iniciales para x (pueden ser 0). Se reemplazan en los miembros derechos para obtener los valores más actuales en los miembros izquierdos. Se repite hasta que

$$|\varepsilon_{a,i}| = \left| \frac{x_i^{j} - x_i^{j-1}}{x_i} \right| 100\% < \varepsilon_s \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Métodos iterativos

Método de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \quad , \quad i = 1,2, \ldots, n$$



Método de Jacobi

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \quad , \quad i = 1,2, \ldots, n$$

Métodos iterativos

Primera iteración

$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11}$	$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11}$
$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) / a_{22}$	$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) / a_{22}$
$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) / a_{33}$	$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) / a_{33}$

Segunda iteración

$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11}$	$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11}$
$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) / a_{22}$	$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) / a_{22}$
$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) / a_{33}$	$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) / a_{33}$

Gauss - Seidel | **Jacobi**

Ejemplo 11.3 pag. 311

Use los métodos de Gauss-Seidel y de Jacobi para resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{Bmatrix}$$

Solución con planilla de cálculo: GaussSeidel.ods

Criterio de convergencia

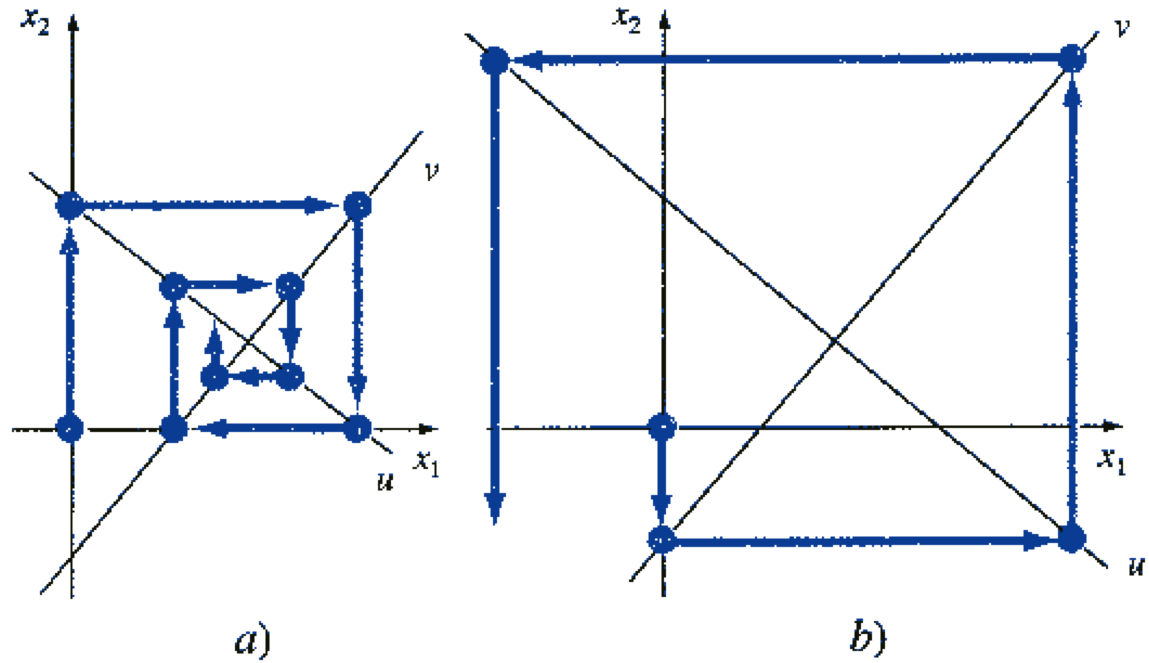
Se demuestra (11.2.1) que el método es convergente si [A] es diagonalmente dominante:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad \forall\, i$$

Si no se puede cumplir lo anterior, al menos se intentará

$$|a_{ii}| = \max_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad \forall\, i$$

Criterio de convergencia



Relajación

$$x_i^{(k)} = \lambda\, x_i^{(k)} + (1-\lambda)\, x_i^{(k-1)}$$

λ = 1, el resultado no se modifica

λ < 1, subrelajación (desaceleración)

λ > 1, sobrerrelajación (aceleración)

Algoritmo de Gauss-Seidel

Codigo en Octave para el algoritmo de Gauss-Seidel: seidel.m

Uso de software

Resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1+1/2+1/3 \\ 1/2+1/3+1/4 \\ 1/3+1/4+1/5 \end{Bmatrix}$$

utilizando

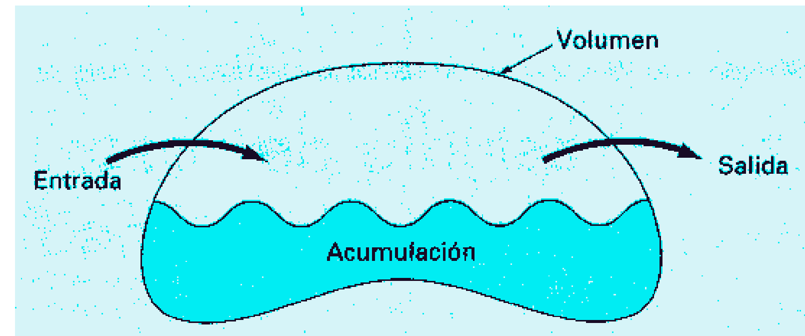
- Planilla de cálculo
- Octave

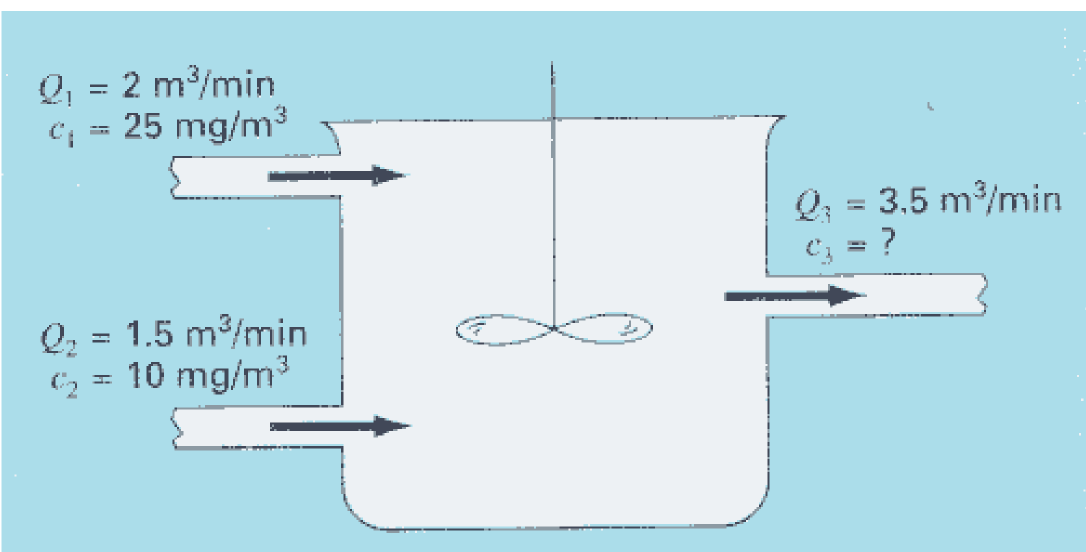
Estudio de casos

Sistema de reactores

Balance de masa

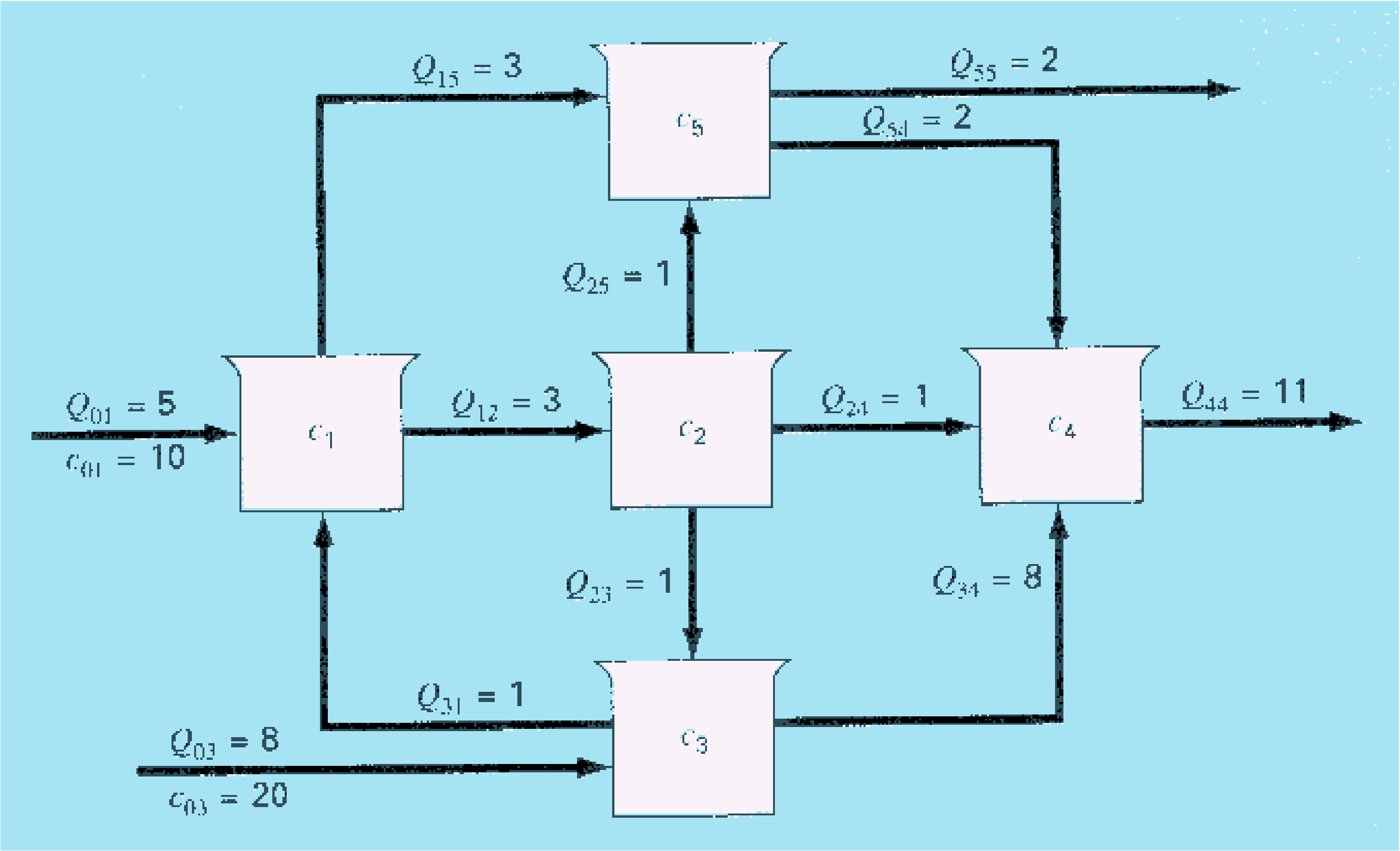
$$\sum_i (Q_i \cdot C_i)_{saliente} = \sum_i (Q_j \cdot C_j)_{entrante}$$





$$c_3 \cdot 3.5 = 2 \cdot 25 + 1.5 \cdot 10$$

Sistema de reactores



Sistema de reactores

$$6c_1 - c_3 = 50$$

$$-3c_1 + 3c_2 = 0$$

$$-c_2 + 9c_3 = 160$$

$$-c_2 - 8c_3 + 11c_4 - 2c_5 = 0$$

$$-3c_1 - c_2 + 4c_5 = 0$$

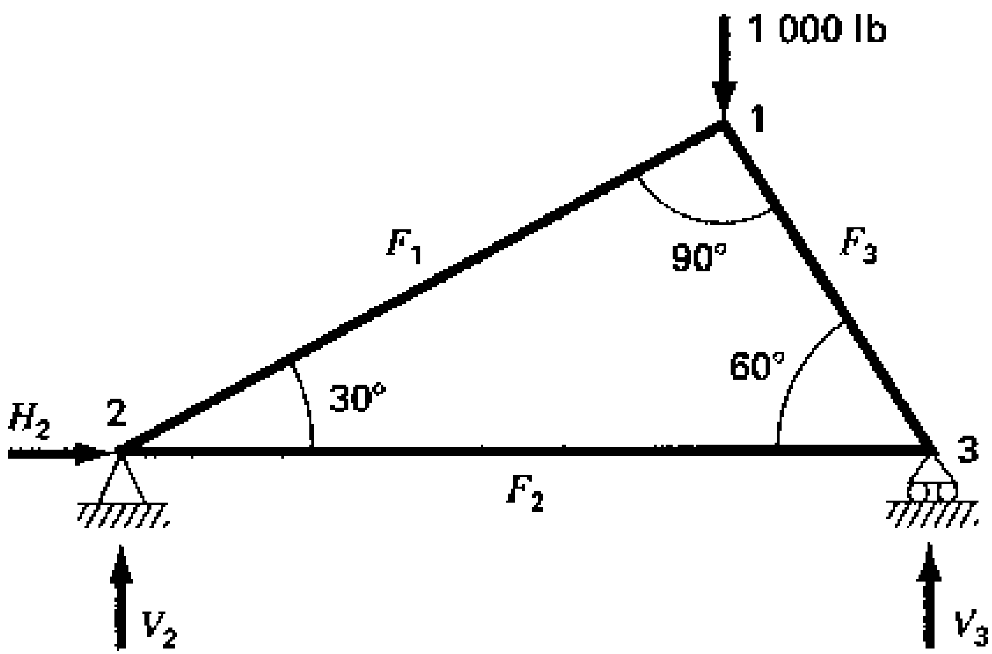
$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & 11 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \\ 160 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Análisis de un reticulado

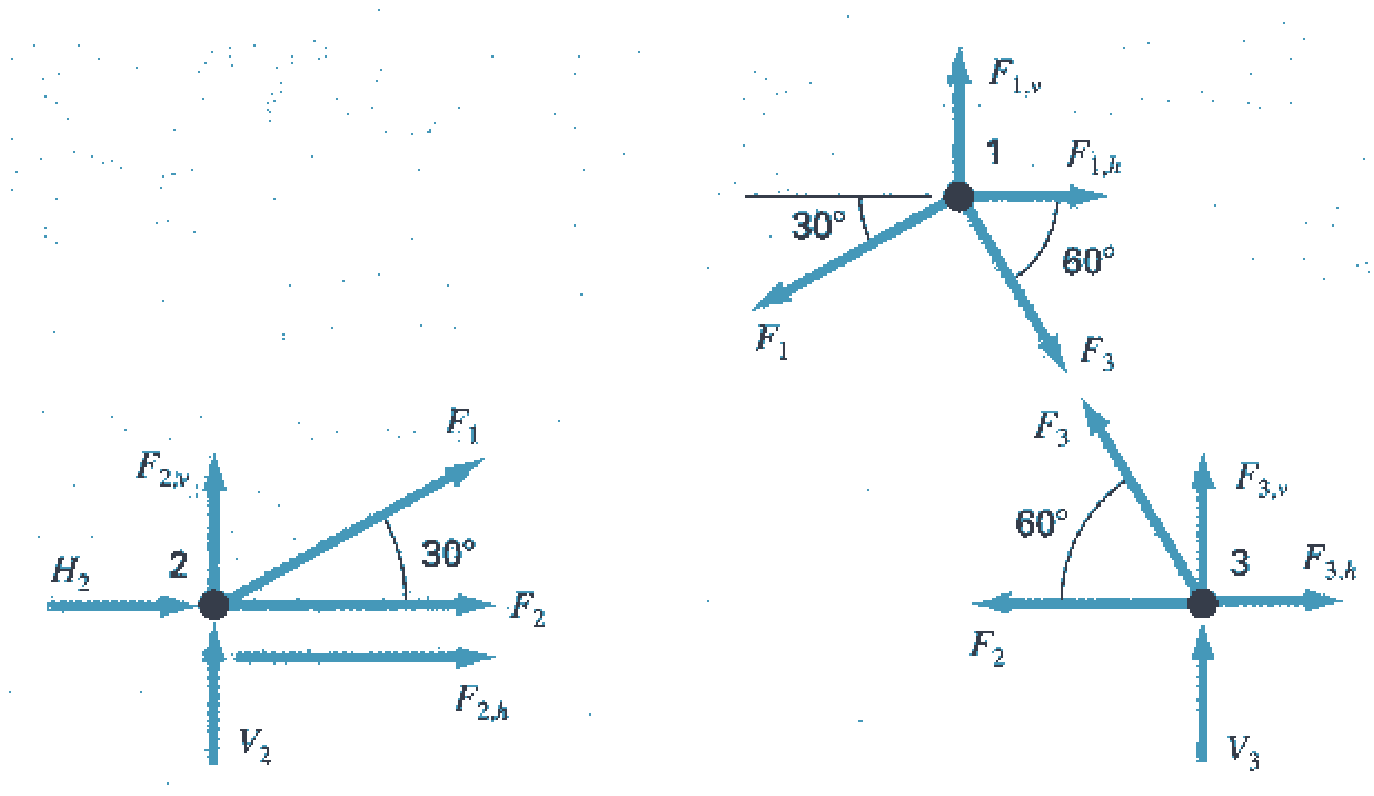
Equilibrio de fuerzas

$$\sum F_H = 0$$

$$\sum F_V = 0$$



Análisis de un reticulado



Análisis de un reticulado

Nodo 1

$$\sum F_H = -F_1 \cos 30° + F_3 \cos 60° + F_{1h} = 0$$

$$\sum F_V = -F_1 \sin 30° - F_3 \sin 60° + F_{1v} = 0$$

Nodo 2

$$\sum F_H = F_2 + F_1 \cos 30° + F_{2h} + H_2 = 0$$

$$\sum F_V = F_1 \sin 30° + F_{2v} + V_2 = 0$$

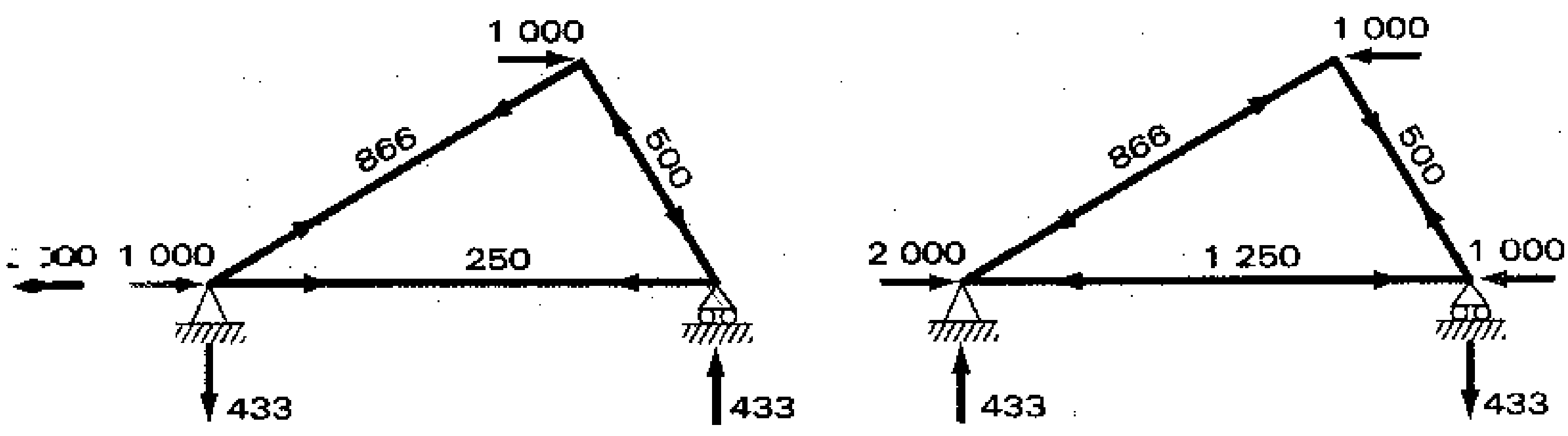
Nodo 3

$$\sum F_H = -F_2 - F_3 \cos 60° + F_{3h} = 0$$

$$\sum F_V = F_3 \sin 60° + F_{3v} + V_3 = 0$$

Análisis de un reticulado

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & 0 & 0 & 0 \\ -0.866 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.866 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ H_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



a) *b)*

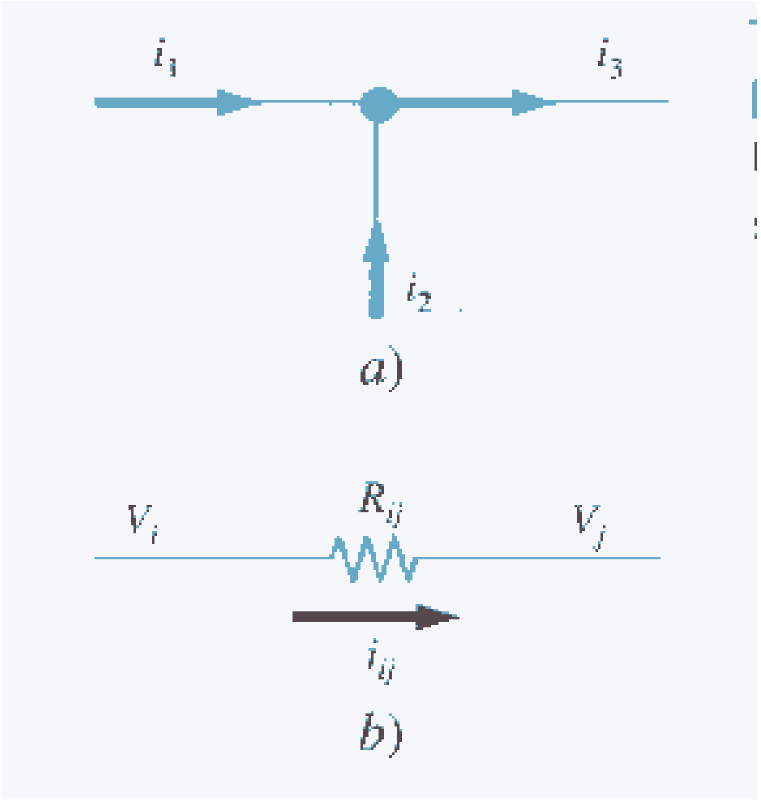
Análisis de un circuito

Ley de Kirchhoff

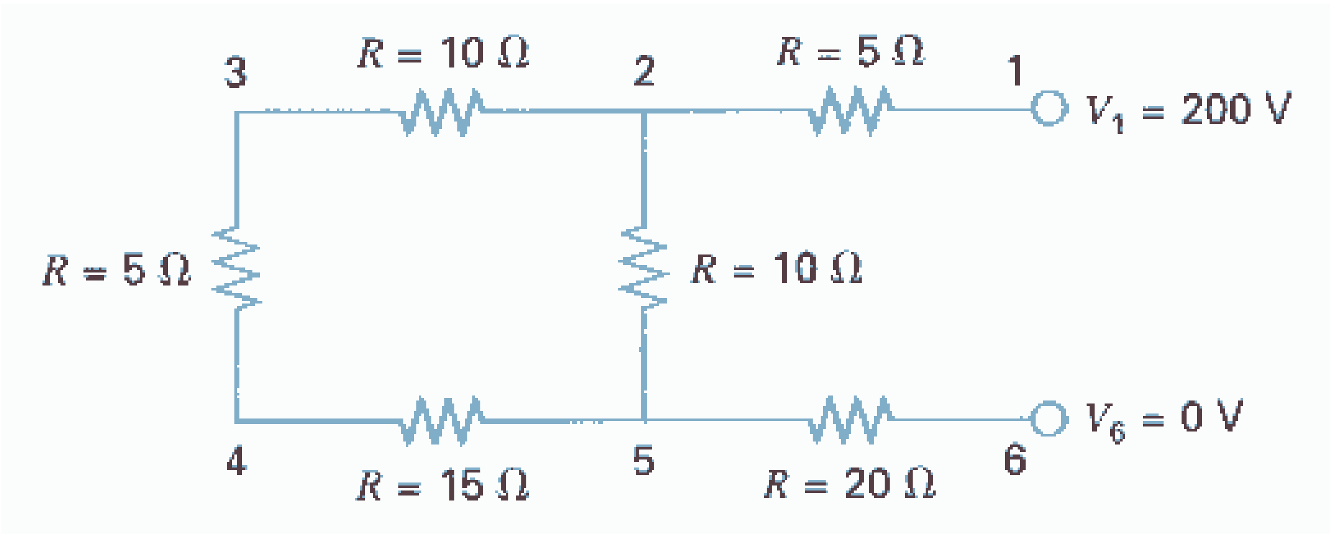
$$\sum i = 0$$

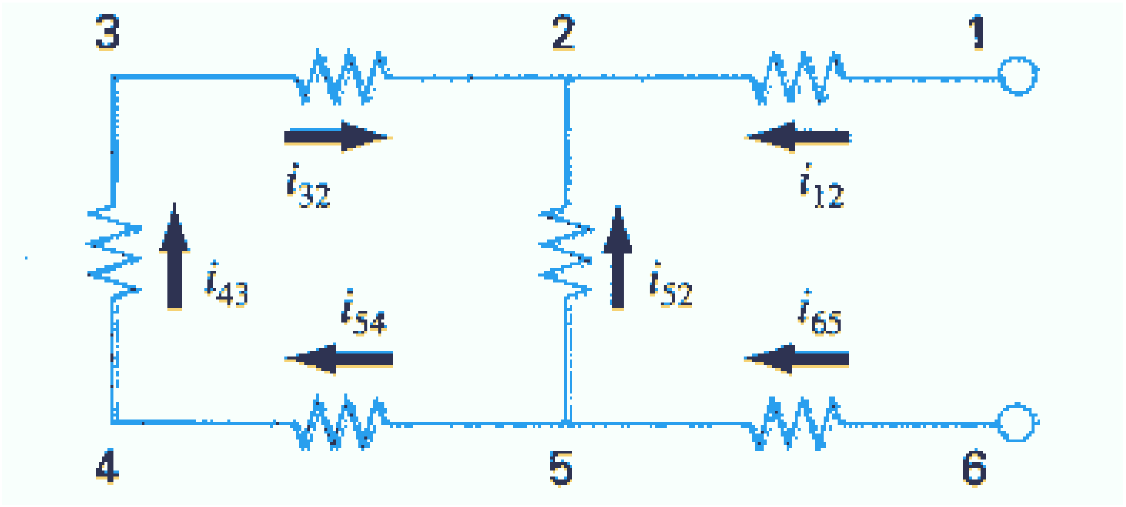
Ley de Ohm

$$\sum iR = \Delta V$$



Análisis de un circuito





Análisis de un circuito

Ley de Kirchhoff

$$i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$$

$$i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$$

$$i_{43} - i_{32} = 0$$

$$i_{54} - i_{43} = 0$$

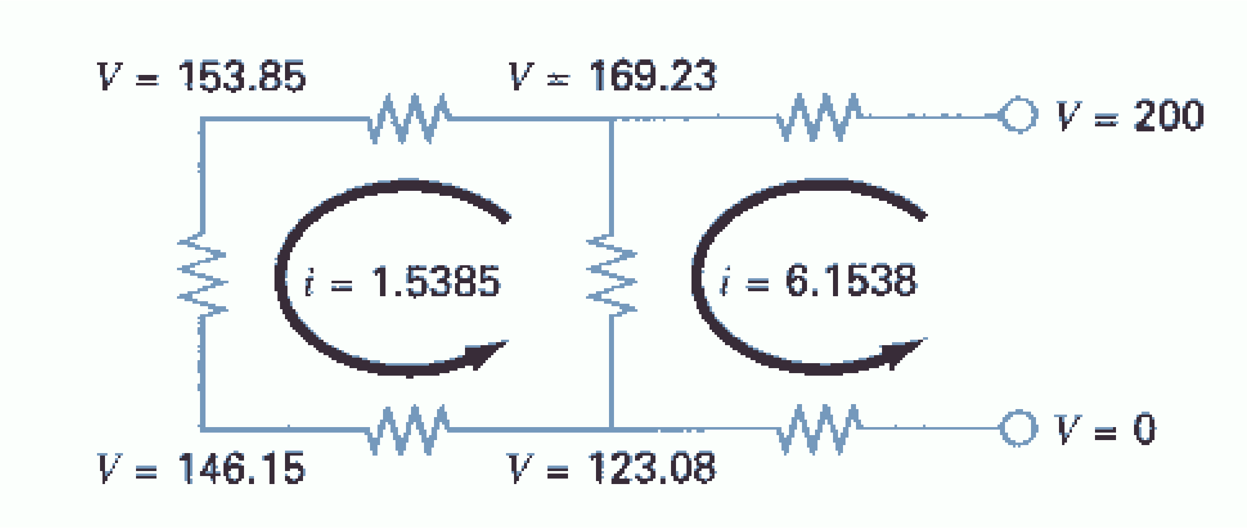
Ley de Ohm

$$-i_{54} R_{54} - i_{43} R_{43} - i_{32} R_{32} + i_{52} R_{52} = 0$$

$$-i_{65} R_{65} - i_{52} R_{52} + i_{12} R_{12} - 200 = 0$$

Análisis de un circuito

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix}$$



Sistemas masa-resorte

Segunda ley de Newton

$$\sum F = m\,a$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_D - F_U$$

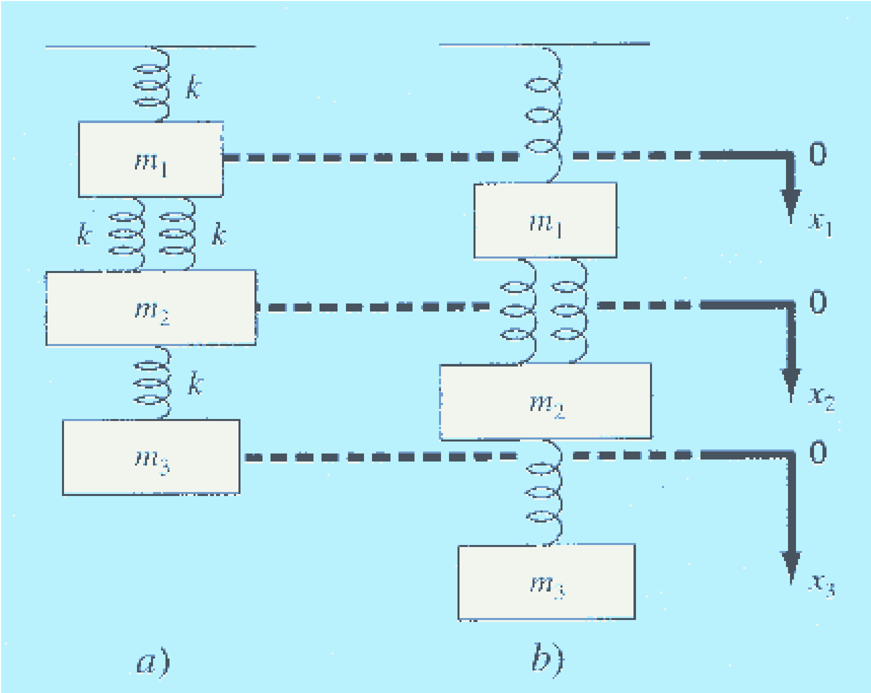
En el reposo, a = 0

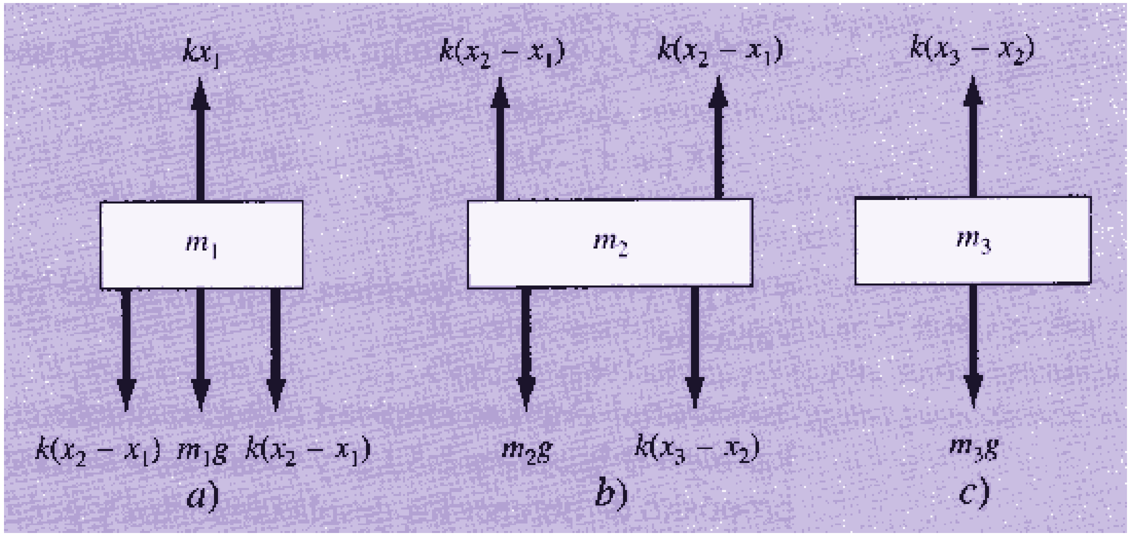
$$\sum F = 0$$

Ley de Hooke

$$F = k\,\Delta x$$

Sistemas masa-resorte





Sistemas masa-resorte

Masa 1

$$2k(x_2 - x_1) + m_1 g - k x_1 = 0$$

Masa 2

$$k(x_3 - x_2) + m_2 g - 2k(x_2 - x_1) = 0$$

Masa 3

$$m_3 g - k(x_3 - x_2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix}$$

$$[K]\{X\} = \{W\}$$

Sistemas masa-resorte

Con m_1 = 2 kg, m_2 = 3 kg, m_3 = 2.5 kg, k = 10 kg/s^2,

$$\begin{bmatrix} 30 & -20 & 0 \\ -20 & 30 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 19.6 \\ 29.4 \\ 24.5 \end{Bmatrix}$$

Problemas 12.1 a 12.40 pag. 339

Lo más importante

[illegible]	Procedimiento	Problemas y soluciones potenciales
Eliminación de Gauss	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \mid & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \mid & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \mid & c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \mid & c_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & \mid & c'_2 \\ & & a''_{33} & \mid & c''_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = c''_3/a''_{33} \\ x_2 = (c'_2 - a'_{23}x_3)/a'_{22} \\ x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \end{matrix}$	**Problemas:** Mal condicionamiento, Redondeo, División entre cero. **Soluciones:** Alta precisión, Pivoteo parcial
Descomposición LU	Descomposición; Sustitución hacia atrás $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$ Sustitución hacia adelante	**Problemas:** Mal condicionamiento, Redondeo, División entre cero. **Soluciones:** Alta precisión, Pivoteo parcial
Gauss-Seidel	$\left.\begin{matrix} x_1^i = (c_1 - a_{12}x_2^{i-1} - a_{13}x_3^{i-1})/a_{11} \\ x_2^i = (c_2 - a_{21}x_1^i - a_{23}x_3^{i-1})/a_{22} \\ x_3^i = (c_3 - a_{31}x_1^i - a_{32}x_2^i)/a_{33} \end{matrix}\right\}$ Continúa iterativamente hasta $\left\vert \frac{x_i^i - x_i^{i-1}}{x_i^i} \right\vert 100\% < \varepsilon_s$ para todas las x_i	**Problemas:** Divergente o converge lentamente. **Soluciones:** Dominancia diagonal, Relajación