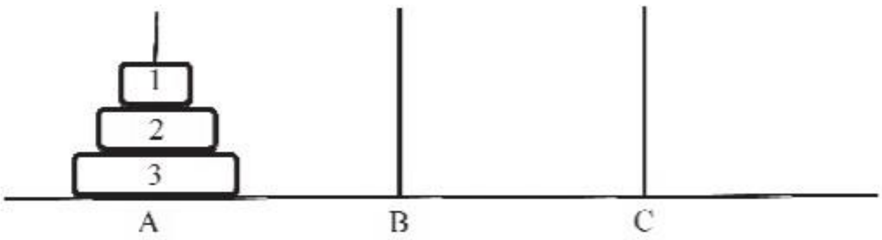
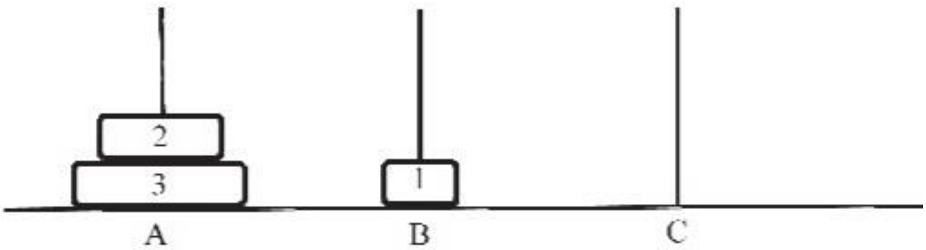
Analiza algorytmów – Problem Wieży z Hanoi

Imię, nazwisko, klasa:

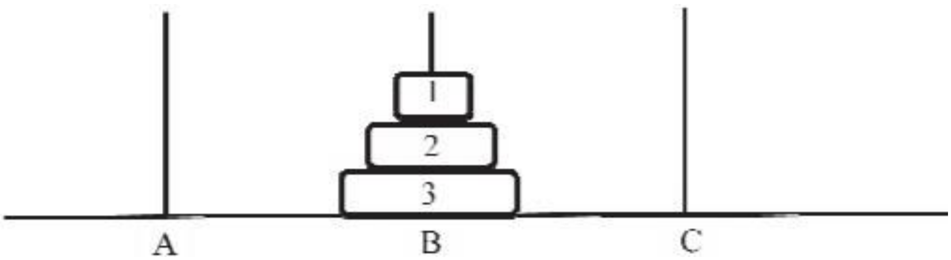
W problemie wież z Hanoi mamy trzy pręty oznaczone A, B i C oraz n okrągłych krążków o średnicach odpowiednio 1, 2, …, n. Na początku wszystkie krążki nałożone są na pręt A, w kolejności od największego do najmniejszego (największy na dole, najmniejszy na górze). Układ ten (dla n = 3) został przedstawiony na poniższym rysunku.



Zgodnie z regułami problemu krążki można przekładać między prętami. W jednym ruchu możliwe jest przełożenie krążka znajdującego się na szczycie jednego z prętów na szczyt innego pręta, pod warunkiem że nie kładziemy przekładanego krążka na krążek mniejszy od niego. Na przykład na poniższym rysunku krążek 2 możemy przełożyć z pręta A na pręt C, natomiast niemożliwe jest przełożenie go na pręt B.



Zadanie polega na przełożeniu wszystkich krążków z pręta A na pręt B, przy czym można korzystać z pomocniczego pręta C. Na poniższym rysunku przedstawiono efekt końcowy.



Problem wież z Hanoi można rozwiązać za pomocą algorytmu rekurencyjnego. W algorytmie pręty: startowy, docelowy i pomocniczy, podane są jako parametry wejściowe, odpowiednio x, y i z. Algorytm polega na tym, że najpierw przenosimy n – 1 krążków na pręt pomocniczy z, potem największy krążek zostaje przeniesiony na pręt docelowy y, a na koniec n – 1 krążków zostaje przeniesionych z pręta pomocniczego z na pręt docelowy y, przy czym pręt startowy x traktowany jest jako pomocniczy.

Specyfikacja algorytmu:

Dane:

n — liczba całkowita dodatnia,

x — nazwa pręta startowego,

y — nazwa pręta docelowego,

z — nazwa pręta pomocniczego.

Wynik:

ciąg ruchów opisujący rozwiązanie problemu wież z Hanoi z n krążkami, w którym na początku wszystkie krążki znajdują się na pręcie x, a na końcu mają znaleźć się na pręcie y, zaś pomocniczym prętem jest z.

Uwaga: Pojedynczy ruch zapisujemy za pomocą znaku =>. Na przykład C => B oznacza przeniesienie krążka z pręta C na pręt B.

funkcja *wieże*(*n*, *x*, *y*, *z*)

jeżeli *n* = 1

wypisz *x* => *y*

w przeciwnym razie

wieże(*n* – 1, *x*, *z*, *y*)

wypisz *x* => *y*

wieże(*n* – 1, *z*, *y*, *x*)

Przykład

Wywołanie *wieże*(2, A, B, C) spowoduje dwa wywołania rekurencyjne: *wieże*(1, A, C, B) oraz *wieże*(1, C, B, A). Ciąg ruchów utworzony przez *wieże*(2, A, B, C) ma postać:

A => C, A => B, C => B,

gdzie podkreślone ruchy są utworzone przez rekurencyjne wywołania *wieże*(1, A, C, B) oraz *wieże*(1, C, B, A).

Zadanie 1

Podaj wszystkie wywołania rekurencyjne funkcji wieże (wraz z ich parametrami), do których dojdzie w wyniku wywołania wieże (3, A, B, C). Odpowiedź podaj w poniższej tabeli, uzupełniając parametry wszystkich wywołań rekurencyjnych.

n	*x*	*y*	*z*
3	A	B	C
2	A	C	B
1	A	B	C
1			
2			
1			
1			

Zadanie 2

Prześledź działanie *wieże*(3, A, B, C) i uzupełnij poniżej wygenerowany ciąg ruchów:

A => B; A => C;.......

Odpowiedź:

Zadanie 3

Niech H(*n*) oznacza liczbę ruchów wykonanych przez podany algorytm dla *n* krążków. Zauważ, że rozwiązanie problemu dla n > 1 krążków wymaga jednego ruchu oraz dwukrotnego rozwiązania problemu dla *n* – 1 krążków. W oparciu o tę obserwację uzupełnij poniższą tabelę.

n	H(*n*)
1	1
2	3
3	
4	
5	
7	
10	

Podaj ogólny wzór określający liczbę ruchów dla n krążków:

Odpowiedź: H(n)=

Zadanie 4

Poniżej znajduje się nierekurencyjne rozwiązanie problemu wież z Hanoi:

Specyfikacja:

Dane:

n — liczba całkowita dodatnia,

Wynik:

ciąg ruchów opisujący rozwiązanie problemu wież z Hanoi z n krążkami, w którym na początku wszystkie krążki znajdują się na pręcie A, a na końcu powinny się znaleźć na pręcie B.

Algorytm

(1) **dopóki** (pręt A jest niepusty lub pręt C jest niepusty) **wykonuj**

(2) **jeżeli** *n* jest parzyste:

(3) **przenieś** krążek nr 1 o jedną pozycję w lewo

(4) **w przeciwnym razie**

(5) **przenieś** krążek nr 1 o jedną pozycję w prawo

(6) **przenieś** krążek między prętami, na których nie ma krążka nr 1

W powyższym algorytmie przeniesienie krążka nr 1 o jedną pozycję w prawo oznacza wykonanie jednego z ruchów A => B, B => C lub C => A, tak aby krążek nr 1 został przeniesiony na inny pręt. Analogicznie przeniesienie krążka w lewo oznacza wybranie jednego z ruchów A => C, B => A lub C => B, tak aby krążek nr 1 został przeniesiony na inny pręt.

Ruch w kroku (6) powyższego algorytmu jest określony jednoznacznie, gdyż dopuszczalne jest tylko położenie mniejszego krążka na większym, a nie odwrotnie.

Przykład

Dla n = 3 powyższy algorytm wykona następujący ciąg ruchów:

<u>A => B</u>; A => C; <u>B => C</u>; A => B; <u>C => A</u>; C => B; <u>A => B</u>,

gdzie ruchy podkreślone przenoszą krążek nr 1 o jedną pozycję w prawo.

Wypisz ciąg ruchów, który poda powyższy algorytm dla n = 4. Uzupełnij poniższą tabelę:

Podkreśl przesunięcia które przenoszą krążek o 1 pozycje w prawo lub w lewo

W kolumnie „Stan wież po przesunięciu" zastosuj format a – b - c, gdzie a,b,c oznaczają krążki na prętach oraz stanem wejściowym jest 1234 – x – x, gdzie x to brak krążków na danym pręcie.

Nr operacji	Przesunięcie krążka	Stan wież po przesunięciu
1	<u>A => C</u>	234 - x – 1
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		