

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 1731

# **Geometrijsko upravljanje multirotorskom letjelicom s benzinskim motorima**

Lovro Marković

Zagreb, srpanj 2018.

*Umjesto ove stranice umetnite izvornik Vašeg rada.  
Da bi ste uklonili ovu stranicu obrišite naredbu \izvornik.*



# SADRŽAJ

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Diferencijalna geometrija</b>	<b>2</b>
2.1. Uvod . . . . .	2
2.2. Topološki prostor . . . . .	2
2.3. Mape . . . . .	3
2.4. Diferencijalne mape višeg reda . . . . .	3
2.5. Karte, atlas i diferencijalne strukture . . . . .	3
2.6. Tangencijalni prostor na manifoldu . . . . .	4
<b>3. Lijeve grupe i Lijeva algebra</b>	<b>6</b>
3.1. Uvod . . . . .	6
3.2. Lijeve grupe . . . . .	6
3.3. Specijalna euklidska grupa - $SE(3)$ . . . . .	7
3.4. Lijeva algebra . . . . .	8
3.5. Algebra specijalne ortogonalne grupe $so(3)$ . . . . .	8
<b>4. Matematički model letjelice</b>	<b>10</b>
<b>5. Geometrijsko upravljanje</b>	<b>11</b>
<b>6. Analiza simulacije</b>	<b>12</b>
<b>7. Zaključak</b>	<b>13</b>
<b>8. literatura</b>	<b>15</b>

# 1. Uvod

Cilj ovoga rada je razviti i implementirati nelinearno geometrijsko upravljanje za multirotorsku letjelicu s benzinskim motorima. U radu će najprije biti postavljeni temelji za razumijevanje geometrijskog načina upravljanja sustavima. Zatim će biti predstavljen sustav multirotorske letjelice te način implementacije nelinearnog geometrijskog upravljanja za takav konkretan sustav. Naposljetku bit će prikazani i komentirani dobiveni rezultati u Gazebo simulatoru.

TODO

## 2. Diferencijalna geometrija

### 2.1. Uvod

Upravljanje mehaničkim sustavima u nastavku ćemo provoditi geometrijskih metodama, odnosno metodama diferencijalne geometrije. Osnovna konstrukcija u diferencijalnoj geometriji je manifold. Ugrubo to je skup koji lokalno izgleda kao otvoreni podskup Euklidskog prostora. Na taj način manifold se može preciznije analizirati koristeći poznate konstrukcije iz analize Euklidskih prostora. Jedna bitna razlika između manifolda i Euklidskih prostora jest koordinatna invarijantnost. Postoji više načina pomoću kojih u manifoldu možemo naći lokalnu sličnost sa Euklidskim prostorom, ali je ključno da su te metode neovisne o proizvoljnim izborima kao što su pristranost određenim koordinatnim sustavim i slično. To ne znači da se ne potiče korištenje koordinatnih sustava već da same metode i koncepti koji su korišteni budu koordinatno invarijantni, ali prikazani u željenim koordinatama. U nastavku bit će definirana lokalna sličnost manifolda Euklidskom prostoru.

### 2.2. Topološki prostor

Neka je  $S$  skup elemenata i  $2^S$  je skup svih podskupova od  $S$ . Topološki prostor je par  $(S, \mathcal{O})$  gdje je  $\mathcal{O} \subset 2^S$  kolekcija svih podskupova, tj. otvoreni skup koji zadovoljava:

1.  $\emptyset \in \mathcal{O}$  i  $S \in \mathcal{O}$
2. Ako je  $A$  proizvoljni skup cijelih brojeva i vrijedi da je  $\{\mathcal{O}_a\}_{a \in A} \subset \mathcal{O}$  proizvoljna kolekcija otvorenih skupova tada vrijedi  $\bigcup_{a \in A} \mathcal{O}_a \in \mathcal{O}$ , drugim riječima vrijedi da je  $\mathcal{O}$  prebrojiv.
3. Ako  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{O}$  tada  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{O}$

Dakle, ako kažemo da je  $S$  topološki prostor, te vrijede prethodni uvjeti tada se pretpostavlja neka topologija  $\mathcal{O}$  nad prostorom  $S$ .

## 2.3. Mape

Neka su  $(S, \mathcal{O}_s)$  i  $(T, \mathcal{O}_t)$  topološki prostori i neka je  $f : S \rightarrow T$  mapa, tada vrijedi:

1. Mapa je kontinuirana u  $x_0$  za  $x_0 \in S$  ako za svako susjedstvo  $\mathcal{V}$  od  $f(x_0)$  postoji susjedstvo  $\mathcal{U}$  od  $x_0$  za koje vrijedi  $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$
2. Ako je mapa  $f$  kontinuirana za  $\forall x \in S$  tada je mapa kontinuirana.
3. Ako je  $f$  bijekcija, kontinuirana i ima inverz koji je također kontinuiran tada je mapa  $f$  homeomorfizam. ‘

## 2.4. Diferencijalne mape višeg reda

Neka je  $\mathcal{U}$  otvoreni podskup  $\mathbb{R}^n$  i neka je mapa  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tada:

1. Ako postoji  $r$ -ta kontinuirana derivacija mape  $f$  tada je  $f$   $r$ -puta diferencijabilna tj. klase  $C^r$  (kontinuirane mape su klase  $C^0$ ).
2. Ako je  $f$  klase  $C^r \forall r \in \mathbb{N}$  tada je beskonačno diferencijabilna ili klase  $C^\infty$ . Također se može reći da je mapa  $f$  glatka ako je klase  $C^\infty$ .
3. Mapa  $f$  je  $C^r$ -difeomorfizam ako vrijedi da je bijekcija otvorenih skupova  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ , ako je klase  $C^r$  te ako je inverz mape  $f$  isto klase  $C^r$ .

## 2.5. Karte, atlasi i diferencijalne strukture

Neka je  $S$  skup. Karta od  $S$  je par  $(\mathcal{U}, \phi)$  sa svojstvima:

1.  $\mathcal{U}$  je podskup od  $S$
2.  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  je injekcija pri kojoj je  $\phi(\mathcal{U})$  otvoreni podskup od  $\mathbb{R}^n$

$C^r$  - atlas od  $S$  je skup  $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_a, \phi_a)\}_{a \in A}$  karata sa svojstvom da je  $S = \cup_{a \in A} \mathcal{U}_a$  te kadgod je zadovoljeno  $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \neq \emptyset$  tada dalje vrijedi:

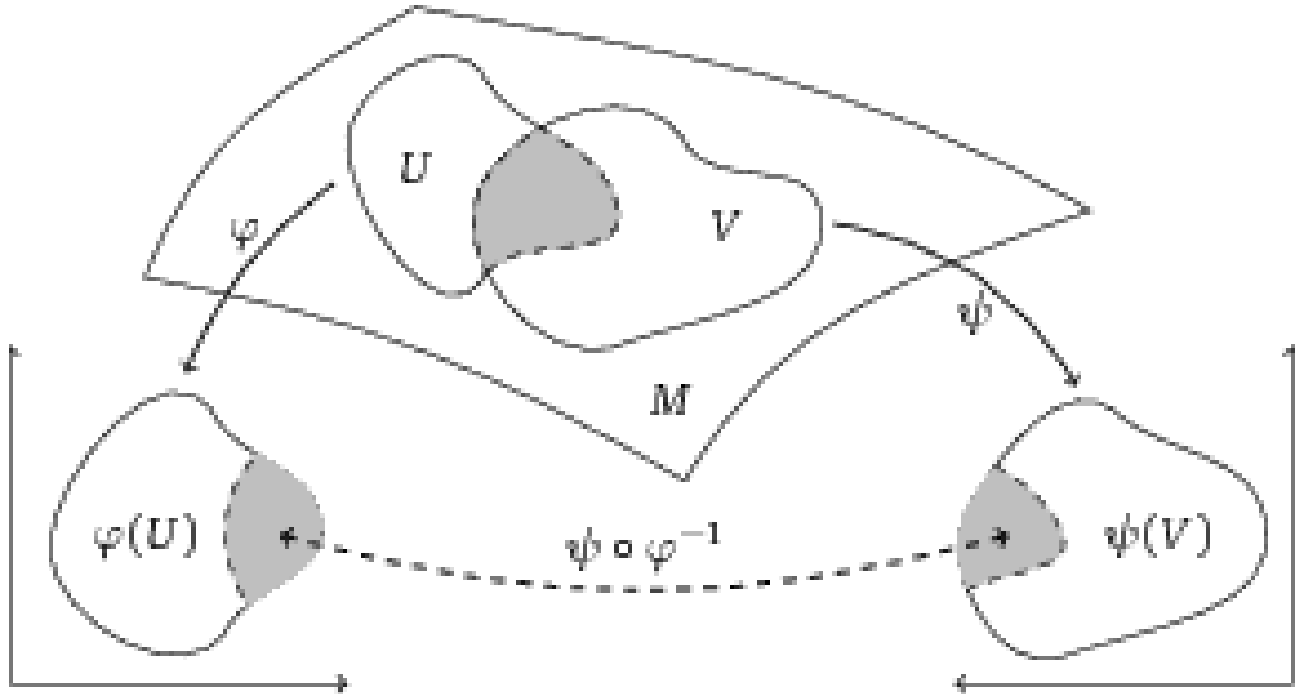
3.  $\phi_a(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b)$  i  $\phi_b(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b)$  su otvoreni podskupovi od  $\mathbb{R}^n$
4. Tranzijentna mapa  $\phi_{ab} \triangleq \phi_b \circ \phi_a^{-1}$  je  $C^r$  - difeomorfizam od  $\phi_a(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b)$  prema  $\phi_b(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b)$ .

Ekvivalenciju među više atlasa možemo uspostaviti na slijedeći način. Neka su dana dva  $C^r$ -atlasa  $\mathcal{A}_1$  i  $\mathcal{A}_2$ . Oni će biti ekvivalentni ako je vrijedi da  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  je isto  $C^r$ -atlas. Nadalje se može definirati  $C^r$ -diferencijabilna struktura na skupu  $S$  kao klasa ekvivalencija atlasa sa prethodno definiranom relacijom ekvivalencije dvaju atlasa.

Naposlijetku definiramo  $C^r$ -diferencijalni manifold ili samo  $C^r$ -manifold  $M$  kao skup  $S$  sa prethodno

definiranom  $C^r$ -diferencijalnom strukturom. Dakle manifold je skup  $S$  sa kolekcijom atlasa koji sadrže mape  $\phi$  pojedinih područja  $\mathcal{U}$  skupa  $S$  prema  $\mathbb{R}^n$ .

Na isti način može se definirati i glatki manifold, odnosno  $C^\infty$ -manifold. Takav manifold sadrži glatku diferencijalnu strukturu što podrazumijeva glatke mape preslikavanja u Euklidski prostor. U nastavku razmatrat će se upravo takve vrste manifolda.



**Slika 5-1:** Grafički prikaz manifolda  $M$  te transportnih funkcija  $\varphi$  i  $\psi$  od manifolda  $M$  prema  $\mathbb{R}^2$  te prikaz kompozicije transportnih mapa kao vezu između slika preklapnih dijelova  $\mathcal{U}$  i  $\mathcal{V}$  u Euklidskom prostoru.

## 2.6. Tangencijalni prostor na manifoldu

Neka je  $M$  manifold. Tada se može konstruirati vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$  na slijedeći način:  $(C^\infty(M), +, \cdot)$ , gdje je  $C^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je glatka}\}$ . Dakle, definiran je vektorski prostor kao skup svih glatkih mapa  $f$  sa pridruženim operatorima zbrajanja i množenja.

**Krivulja na manifoldu:** Neka je definirana krivulja na manifoldu kao glatka mapa  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ , gdje je  $\mathbb{R}$  promatran kao 1-dimenzionalni manifold.

**Operator usmjerene derivacije:** Neka je  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  glatka krivulja kroz točku  $p \in M$  te bez gubljenja općenitosti može se uzimati da vrijedi  $\gamma(0) = p$ . Tada se može definirati operator usmjerene derivacije duž krivulje  $\gamma$  u točki  $p$  kao mapu na slijedeći način:

$$X_{\gamma,p} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad (6-1)$$

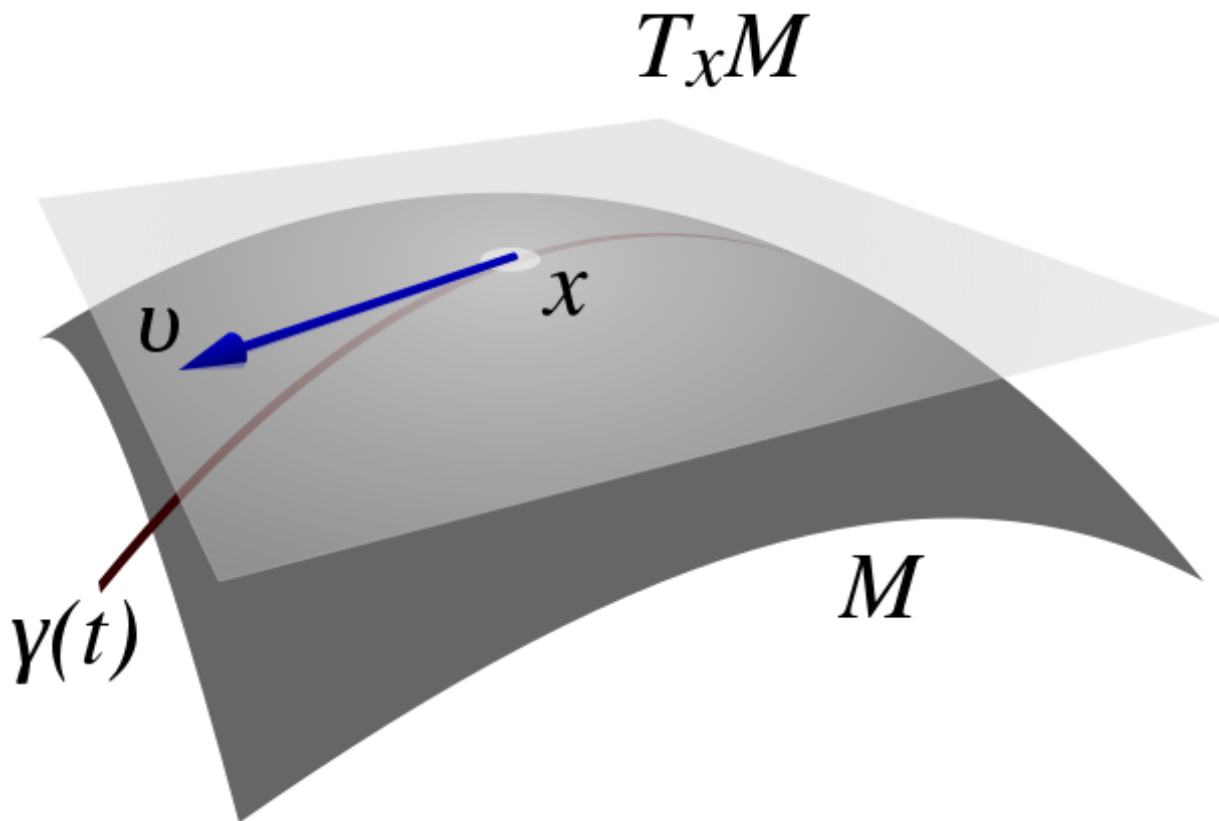
$$f \mapsto (f \circ \gamma)'(0) \quad (6-2)$$



Bitno je primijetiti kako je kompozicija  $(f \circ \gamma)$  mapiranje unutar realnog prostora tako da se toj funkciji na uobičajan način može pronaći i evaluirati derivacija. Intuitivno gledano  $X_{\gamma,p}$  je brzina krivulje  $\gamma$  u točki  $p$ .

**Tangencijalni prostor:** Neka je  $M$  manifold koji sadrži točku  $p$ . Tada je tangencijalni prostor vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$  sa skupom operatora usmjerene derivacije tako da vrijedi:

$T_p M := \{X_{\gamma,p} \mid \gamma \text{ je glatka krivulja kroz } p\}$  te sa nadodanim operatorima zbrajanja i skalarnog množenja.



**Slika 6-1:** Na slici je prikazan manifold  $M$ . Parametrirana krivulja  $\gamma(t)$  koja prolazi točkom  $x$ . Tangencijalni prostor manifolda  $M$  u točki  $x$   $T_x M$  te vektor usmjerene derivacije  $v$  krivulje  $\gamma(t)$  u točki  $x$ .

## 3. Lijeve grupe i Lijeva algebra

### 3.1. Uvod

Lijeva teorija je od velike važnosti i u fizici i u diferencijalnoj geometriji. U ovom dijelu bit će predstavljen koncept Lijeve grupe te pripadajuće Lijeve algebre. Fokus će biti usmjeren prema Specijalnim Euklidskim grupama  $SE(3)$  budući da su one predmet zanimljive u kontekstu ovog rada.

### 3.2. Lijeve grupe

Lijeva grupa je grupa  $(G, \bullet)$  gdje je  $G$  glatki manifold klase  $C^\infty$ , a  $\bullet$  pripadajući operator nad  $G$ . Svojstva operatora  $\bullet$  su slijedeća:

1. Asocijativnost:  $\forall a, b, c \in G : a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$
2. Neutralni element:  $\exists e \in G : \forall g \in G : g \bullet e = e \bullet g = g$
3. Inverz:  $\forall g \in G : \exists g^{-1} \in G : g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = e$

Ako vrijedi i svojstvo komutativnosti:  $a \bullet b = b \bullet a, \forall a, b \in G$  tada je grupa abelijanska. Dana je topologija nad  $G$  preko slijedećih mapa:

$$\mu : G \times G \rightarrow G \quad (2-1)$$

$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 \bullet g_2 \quad (2-2)$$

$$g_1, g_2 \in G \quad (2-3)$$

i:

$$i : G \rightarrow G \quad (2-4)$$

$$g \mapsto g^{-1} \quad (2-5)$$

$$g \in G \quad (2-6)$$

Mape  $g$  i  $i$  su glatke mape. Dakle Lijeve grupe su topološke grupe, čiji se elementi unutar topološkim prostorom, odnosno dio manifolda, a operacija nad grupom  $\bullet$  je kontinuirana, kao i njen inverz.

### 3.3. Specijalna euklidska grupa - SE(3)

U ovom dijelu bit će definirano nekoliko različitih Lijevih grupa s konačnim ciljem definiranja specijalne ortogonalne grupe  $SO(3)$  te njenog proširenja na specijalnu Euklidsku grupu  $SE(3)$ .

**N-dimenzijska translacijska grupa:** Mapa  $\varphi$  je kruta mapa ako vrijedi  $\forall v, w \in \mathbb{R}^n, d(\varphi(v), \varphi(w)) = d(v, w)$ . Drugim riječima mapa je kruta ako su nakon mapiranja duljine očuvane.

Neka je skup  $G$  sačinjena od svih krutih mapa tako da vrijedi  $G = \{\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ je kruta mapa}\} := T(n)$ . Ako se skupu  $T(n)$  pridruži operator kompozicije tada se dobiva translacijska Lijeva grupa  $(T(n), \circ)$ .

**Opća linearna grupa ("General linear group"):** Neka je skup  $G$  sačinjen od matrica, tj. mapa  $\varphi$  tako da vrijedi  $G = \{\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \det \varphi \neq 0\} := GL(n, \mathbb{R}^n)$ . Ako bi tome skupu pridodali operator kompozicije  $\circ$  tada možemo definirati Lijevu grupu  $(GL(n, \mathbb{R}^n), \circ)$ . To je dakle grupa svih invertibilnih matrica koje svoje karakteristike glatkog manifolda naslijeđuju činjenicom da su takve matrice otvoreni podskup grupe svih  $n \times n$  matrica  $\mathbb{R}^{n^2}$  koje čine glatki manifold.

Reci da je  $\mathbb{R}^{n^2}$  stvarno glatki manifold (u appendixu?)

**(Specijalna) Ortogonalna grupa:** Neka je skup  $G$  sačinjen od matrica  $Q$  tako da vrijedi  $G = \{Q \in GL(n, \mathbb{R}^n) \mid \det Q = \pm 1\} := O(n)$ . Budući da su matrice elementi skupa  $GL(n, \mathbb{R}^n)$  njima se može pridodijeliti i naslijeđeni operator  $\circ$ . Takva Lijeva grupa  $(O(n), \circ)$  zove se ortogonalna grupa.

Specijalna ortogonalna grupa  $SO(n)$  je podgrupa ortogonalnoj grupi, uz uvjet da matrice moraju imati determinante jednake 1. Ta grupe se ujedno naziva i rotacijska grupa jer sadrži sve rotacijske matrice.

Obje grupe lančano naslijeđuju karakteristike glatkog manifolda od opće linearne grupe.

**(Specijalna) Euklidska grupa:** Euklidska grupa kao podgrupe sadrži translacijsku Lijevu grupu  $T(n)$  i ortogonalnu grupu  $O(n)$ . Svaki element u  $E(n)$  sastoji se od translacije koju slijedi ortogonalna transformacija.

Specijalna Euklidska grupa kao podskup umjesto ortogonalne grupe sadrži specijalnu ortogonalnu grupu. U tom slučaju svaki član te grupe sadrži translaciju koju slijedi rotacija. Elementi te grupe su  $(n+1) \times (n+1)$  matrice slijedećeg oblika:

$$\left\{ \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & v_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid R \in SO(3), v \in \mathbb{R}^n \right\} \in SE(3) \quad (3-1)$$

### 3.4. Lijeva algebra

**Algebra:** Algebra nad poljem  $K$  je skup od četiri elemenata  $(A, +, \cdot, \bullet)$ , gdje je  $(A, +, \cdot)$  vektorski prostor nad poljem  $K$ , a  $\bullet$  je produkt nad  $A$ , tj. bilinearano mapiranje:  $\bullet : A \times A \rightarrow A$ .

Algebra  $(A, +, \cdot, \bullet)$  može biti:

1. Asocijativna ako vrijedi  $\forall v, w, z \in A : v \bullet (w \bullet z) = (v \bullet w) \bullet z$
2. Unitalna ako vrijedi  $\exists e \in A : \forall v \in A : e \bullet v = v \bullet e = v$
3. Komutativna ili abelijanska ako vrijedi  $\forall v, w \in A : v \bullet w = w \bullet v$

**Lijeva algebra:** Lijeva algebra je algebra čiji operator je Lijeva zagrada  $[-, -]$  (tipično zvana komutator) za koju vrijede svojstva:

1. Antisimetričnost:  $\forall v \in A : [v, v] = 0$
2. Jakobijev identitet:  $\forall v, w, z \in A : [v, [w, z]] + [w, [z, v]] + [z, [v, w]] = 0$

Iz uvjeta o antisimetričnosti odmah vrijedi  $[v, w] = -[w, v]$ . Kod asocijativnih algebri komutator se definira kao  $[v, w] := v \bullet w - w \bullet v$ .

**Lijeva algebra Lijeve grupe:** Svaka Lijeva grupa ima svoju pripadajuću Lijevu algebru. Lijeva algebra  $g$  od Lijeve grupe  $G$  je tangencijalni prostor oko točke identiteta  $T_e G$ .

**Eksponencijalna mapa:** Poveznica između Lijeve grupe i njene pripadajuće Lijeve algebre je eksponencijalna mapa. Ona je definirana na slijedeći način:  $\exp : T_e G \rightarrow G$ , tj.  $\exp : g \rightarrow G$ .

Postoji i logaritamska mapa koja služi za inverno mapiranje od Lijeve grupe prema pripadajućoj algebri.

Definirati diferencijalne mape između tangencijalnih prostora

### 3.5. Algebra specijalne ortogonalne grupe $so(3)$

Naposlijetku bit će potrebno definirati pripadajuću Lijevu algebru  $so(3)$  nad Lijevom grupom  $SO(3)$ . Lijeva algebra  $so(3)$  je skup anti-simetričnih realnih matrica. Budući da je takav skup matrica proizašao iz tangencijalnog prostora rotacijske grupe  $SO(3)$  tada će te matrice zapravo predstavljati tenzore kutnih brzina oko neke konfiguracije  $R$ .

Na primjer, ako je rotacija u kut  $\psi$  oko  $z$ -osi definirana kao:

$$R(\hat{e}_3, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in SO(3) \quad (5-1)$$

Ako se sada razvije matrica rotacije u Taylorov red prvog stupnja dobit će se matrica infinitezimalne rotacije:

$$R(\hat{e}_3, \partial\psi) = I + \partial\psi \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I + \partial\psi J_z \quad (5-2)$$

Gdje je  $J_z$  jedan od tri elementa koja definiraju bazu algebre  $so(3)$ . Ostali elementi baze su:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

Još se nazivaju i generatori rotacije jer njihovim uzastopnim primjenjivanjem se postiže rotacija za željeni kut na slijedeći način:

$$R(\hat{e}_3, \psi) = (I + \partial\psi J_z)^n \quad (5-4)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + J_z \frac{\psi}{n} \right)^n \quad (5-5)$$

$$= e^{J_z \psi} \quad (5-6)$$

Iz gornje relacije se također vidi veza između matrice rotacije, elementa grupe  $SO(3)$ , i generatora infinitezimalne rotacije, elementa algebre ( $so(3)$ ), preko prethodno definirane eksponencijalne mape. Sada se može definirati opća rotacija oko vektora  $\hat{n}$  za kut  $\psi$  kao:

$$R(\hat{n}, \phi) = e^{(J_1 n_1 + J_2 n_2 + J_3 n_3) \psi} \quad (5-7)$$

Uzevši to u obzir, vektor kutne brzine  $\vec{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ , može se zapisati u obliku tenzora, tj. elementa algebre  $so(3)$  kao:

Provjeriti u kodu matricu rotacije - bookmarkan wiki stranica

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \hat{x} : \mathbb{R}^3 \rightarrow so(3) \quad (5-8)$$

Gdje kapa-operator mapiranje iz Realnog 3-dimenzionalnog prostora prema Lijevoj algebri  $so(3)$ . Njemu inverzan operator je v-operator koja je definirana kao  $\tilde{x} : so(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

## **4. Matematički model letjelice**

## **5. Geometrijsko upravljanje**

## **6. Analiza simulacije**



## **7. Zaključak**

Zaključak.

## **Geometrijsko upravljanje multirotorskom letjelicom s benzinskim motorima**

### **Sažetak**

Ravijen je nelinearni geometrijski regulator za upravljanje multirotorskom letjelicom s benzinskim motorima. Regulator je implementiran u programskom jeziku C++ u ROS okruženju te ispitan korištenjem simulacijskog okruženja Gazebo na postojećem modelu multirotorske bespilotne letjelice s benzinskim motorima i pokretnim masama.

**Ključne riječi:** geometrijsko upravljanje, multirotorska letjelica, Lijeve grupe, SE(3), ROS, Gazebo

### **Title**

### **Abstract**

A nonlinear geometric controller is implemented using C++ programming language within ROS environment. The controller is used on a multirotor unmanned aerial vehicle with internal combustion engines. Results are obtained from Gazebo simulation environment using the existing multirotor UAV model with internal combustion engines and moving masses.

**Keywords:** geometric control, multirotor UAV, Lie groups, SE(3), ROS, Gazebo

## **8. literatura**