



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

TP1 de Métodos Numéricos

3 de mayo de 2024

Métodos Numéricos

Grupo: 21

Estudiante	LU	Correo electrónico
Lucas Mas Roca	122/20	lmasroca@gmail.com
Tomas Pilipski	1007/21	tomagupil@gmail.com
Juan Ignacio Ponce	420/21	juaniponce0@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (+54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

1. Introducción

En este trabajo práctico nos proponemos resolver un problema físico en el cual debemos encontrar la isoterma 500 dentro de las paredes de un horno. Para ello utilizaremos la siguiente fórmula de Laplace e intentaremos conseguir la temperatura en diferentes puntos dentro del radio formado por las paredes externas del horno marcados con posiciones polares.

$$\frac{\partial^2 T(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T(r, \theta)}{\partial \theta^2} = 0$$

El experimento consiste en probar con distintos modelos el cálculo de las temperaturas a partir de la construcción de un sistema de ecuaciones que nos permita conseguir las temperaturas resolviendo el mismo con el uso de eliminación Gaussiana y Factorización LU.

El objetivo de este trabajo práctico es observar la precisión del cálculo y el tiempo de ejecución que se puede conseguir al intentar capturar la isoterma 500 a medida que queremos resolver mas instancias y realizar una comparación entre los distintos algoritmos que implementemos, así como también poner en practica lo visto en la teoría tanto para la resolución de sistemas usando Eliminación Gaussiana y Factorización LU.

Además, haremos otros experimentos para comparar que tanto varia la isoterma variando los parámetros, analizaremos también distintos criterios de peligro para descubrir la más eficiente para la detección de problemas en el horno y por ultimo observaremos como cambia el gráfico de nuestras isotermas teniendo en cuenta distintas maneras de aproximar los valores de los radios para el gráfico de las isotermas. Esto nos servirá para aprender a mejorar la perfomance de nuestros algoritmos y obtener una mejor comprensión de qué tan precisos podemos ser a la hora de implementar estos programas para la resolución de problemas reales.

2. Desarrollo

Para el desarrollo nuestro objetivo es obtener la mejor aproximación a la isoterma 500 una vez calculada la temperatura en cada punto del horno. Como nuestra ecuación para obtener la temperatura en un punto del horno (representado en coordenadas polares) esta dado por una ecuación continua, tendremos que discretizar la ecuación para que el calculo pueda ser computable. Para esto tenemos algunas ecuaciones dadas (ecuaciones de diferencias finitas) que calculan la temperatura de un punto usando sus puntos vecinos. Con cada una de estas ecuaciones para cada uno de los puntos obtendremos un sistema de ecuaciones que tendrá como incógnitas a las temperaturas de cada punto del horno. La cantidad de puntos distintos a medir estará dado como parámetro que nosotros iremos cambiando para cada uno de los modelos que creemos.

2.1. Pasando de la ecuación al sistema

Usando las siguientes formulas de diferencias finitas:

$$\frac{\partial^2 T(r, \theta)}{\partial r^2}(r_j, \theta_k) \simeq \frac{t_{j-1,k} - 2t_{j,k} + t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2}$$

$$\frac{\partial T(r, \theta)}{\partial r}(r_j, \theta_k) \simeq \frac{t_{j,k} - t_{j-1,k}}{\Delta r}$$

$$\frac{\partial^2 T(r, \theta)}{\partial \theta^2}(r_j, \theta_k) \simeq \frac{t_{j,k-1} - 2t_{j,k} + t_{j,k+1}}{(\Delta \theta)^2}$$

Reemplazamos en la ecuación de calor:

$$\frac{t_{j-1,k} - 2t_{j,k} + t_{j+1,k}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_j} \frac{t_{j,k} - t_{j-1,k}}{\Delta r} + \frac{1}{r_j^2} \frac{t_{j,k-1} - 2t_{j,k} + t_{j,k+1}}{(\Delta \theta)^2} = 0$$

Luego juntamos los coeficientes que multiplican a nuestras incógnitas ($t_{j,k}$):

$$t_{j-1,k} \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_j \Delta r} \right) + t_{j,k-1} \left(\frac{1}{r_j^2 (\Delta \theta)^2} \right) + t_{j+1,k} \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} \right) + t_{j,k+1} \left(\frac{1}{r_j^2 (\Delta \theta)^2} \right) + t_{j,k} \left(\frac{1}{r_j \Delta r} - \frac{2}{(\Delta r)^2} - \frac{2}{r_j^2 (\Delta \theta)^2} \right) = 0$$

Reescribiendo:

$$c_1(r_j) = \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_j \Delta r} ; c_2(r_j) = c_4(r_j) = \frac{1}{r_j^2 (\Delta \theta)^2} ; c_3 = \frac{1}{(\Delta r)^2} \text{ y } c_5(r_j) = \frac{1}{r_j \Delta r} - \frac{2}{(\Delta r)^2} - \frac{2}{r_j^2 (\Delta \theta)^2}$$

Luego:

$$t_{j-1,k} c_1(r) + t_{j,k-1} c_2(r) + t_{j+1,k} c_3 + t_{j,k+1} c_4(r) + t_{j,k} c_5(r) = 0$$

Todos los puntos en el sistema con $0 < j < m$ cumplen esa ecuación, si ordenamos todos esos puntos de la siguiente forma:

$$x = t_{1,0}, t_{1,1}, \dots, t_{1,n-1}, t_{2,0}, \dots, t_{2,n-1}, \dots, t_{m-1,0}, \dots, t_{m-1,n-1}$$

Este x seria nuestro vector incógnita para el sistema a resolver (ya que contiene a todos los puntos cuya temperatura desconocemos)

Vale la pena aclarar que dado un valor de j ($0 \leq j \leq m$) podremos calcular su $r_j = r_i + \Delta r * j$ y dado un valor de k ($0 \leq k \leq n$) podemos calcular su $\theta_k = \Delta \theta * k$

Luego planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{0,0} c_1(r_1) + t_{1,0} c_5(r_1) + t_{1,1} c_4(r_1) + t_{1,n-1} c_2(r_1) + t_{2,0} c_3 = 0 \\ t_{0,1} c_1(r_1) + t_{1,0} c_2(r_1) + t_{1,1} c_5(r_1) + t_{1,2} c_4(r_1) + t_{2,1} c_3 = 0 \\ \dots \\ t_{0,n-1} c_1(r_1) + t_{1,0} c_4(r_1) + t_{1,n-2} c_2(r_1) + t_{1,n-1} c_5(r_1) + t_{2,n-1} c_3 = 0 \\ t_{1,0} c_1(r_2) + t_{2,0} c_5(r_2) + t_{2,1} c_4(r_2) + t_{2,n-1} c_2(r_2) + t_{3,0} c_3 = 0 \\ \dots \\ t_{1,n-1} c_1(r_2) + t_{2,0} c_4(r_2) + t_{2,n-2} c_2(r_2) + t_{2,n-1} c_5(r_2) + t_{3,n-1} c_3 = 0 \\ \dots \\ t_{m-2,0} c_1(r_{m-1}) + t_{m-1,0} c_5(r_{m-1}) + t_{m-1,1} c_4(r_{m-1}) + t_{m-1,n-1} c_2(r_{m-1}) + t_{m,0} c_3 = 0 \\ \dots \\ t_{m-2,n-1} c_1(r_{m-1}) + t_{m-1,0} c_4(r_{m-1}) + t_{m-1,n-2} c_2(r_{m-1}) + t_{m-1,n-1} c_5(r_{m-1}) + t_{m,n-1} c_3 = 0 \end{array} \right.$$

Además para los puntos tales que $j = 0$ ó $j = m$ ya sabemos algunas de sus temperaturas ($t_i(\theta_k)$ y $t_e(\theta_k)$), con lo cual podemos reemplazar sus valores y restarlos a ambos lados:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\cancel{t_i(\theta_2)c_1(r_1)} - \cancel{t_i(\theta_2)c_1(r_1)} + t_{1,0}c_5(r_1) + t_{1,1}c_4(r_1) + t_{1,n-1}c_2(r_1) + t_{2,0}c_3 = -t_i(\theta)c_1(r_1) \\
\cancel{t_i(\theta_2)c_1(r_1)} - \cancel{t_i(\theta_2)c_1(r_1)} + t_{1,0}c_2(r_1) + t_{1,1}c_5(r_1) + t_{1,2}c_4(r_1) + t_{2,1}c_3 = -t_i(\theta_2)c_1(r_1) \\
\dots \\
\cancel{t_i(\theta_{n-1})c_1(r_1)} - \cancel{t_i(\theta_{n-1})c_1(r_1)} + t_{1,0}c_4(r_1) + t_{1,n-2}c_2(r_1) + t_{1,n-1}c_5(r_1) + t_{2,n-1}c_3 = -t_i(\theta_{n-1})c_1(r_1) \\
t_{1,0}c_1(r_2) + t_{2,0}c_5(r_2) + t_{2,1}c_4(r_2) + t_{2,n-1}c_2(r_2) + t_{3,0}c_3 = 0 \\
\dots \\
t_{1,n-1}c_1(r_2) + t_{2,0}c_4(r_2) + t_{2,n-2}c_2(r_2) + t_{2,n-1}c_5(r_2) + t_{3,n-1}c_3 = 0 \\
\dots \\
t_{m-2,0}c_1(r_{m-1}) + t_{m-1,0}c_5(r_{m-1}) + t_{m-1,1}c_4(r_{m-1}) + t_{m-1,n-1}c_2(r_{m-1}) + \cancel{t_e(\theta_0)c_3} - \cancel{t_e(\theta_0)c_3} = -t_e(\theta_0)c_3 \\
\dots \\
t_{m-2,n-1}c_1(r_{m-1}) + t_{m-1,0}c_4(r_{m-1}) + t_{m-1,n-2}c_2(r_{m-1}) + t_{m-1,n-1}c_5(r_{m-1}) + \cancel{t_e(\theta_{n-1})c_3} - \cancel{t_e(\theta_{n-1})c_3} = \\
= -t_e(\theta_{n-1})c_3
\end{array} \right.$$

Finalmente el sistema queda de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l}
t_{1,0}c_5(r_1) + t_{1,1}c_4(r_1) + t_{1,n-1}c_2(r_1) + t_{2,0}c_3 = -t_i(\theta)c_1(r_1) \\
t_{1,0}c_2(r_1) + t_{1,1}c_5(r_1) + t_{1,2}c_4(r_1) + t_{2,1}c_3 = -t_i(\theta_2)c_1(r_1) \\
\dots \\
t_{1,0}c_4(r_1) + t_{1,n-2}c_2(r_1) + t_{1,n-1}c_5(r_1) + t_{2,n-1}c_3 = -t_i(\theta_{n-1})c_1(r_1) \\
t_{1,0}c_1(r_2) + t_{2,0}c_5(r_2) + t_{2,1}c_4(r_2) + t_{2,n-1}c_2(r_2) + t_{3,0}c_3 = 0 \\
\dots \\
t_{1,n-1}c_1(r_2) + t_{2,0}c_4(r_2) + t_{2,n-2}c_2(r_2) + t_{2,n-1}c_5(r_2) + t_{3,n-1}c_3 = 0 \\
\dots \\
t_{m-2,0}c_1(r_{m-1}) + t_{m-1,0}c_5(r_{m-1}) + t_{m-1,1}c_4(r_{m-1}) + t_{m-1,n-1}c_2(r_{m-1}) = -t_e(\theta_0)c_3 \\
\dots \\
t_{m-2,n-1}c_1(r_{m-1}) + t_{m-1,0}c_4(r_{m-1}) + t_{m-1,n-2}c_2(r_{m-1}) + t_{m-1,n-1}c_5(r_{m-1}) = -t_e(\theta_{n-1})c_3
\end{array} \right.$$

2.2. Armando la matriz del sistema

Luego planteamos el siguiente sistema $Ax = b$ siendo x el vector de incógnita planteado anteriormente, A la matriz resultante de escribir las ecuaciones del sistema anterior planteando una fila para cada ecuación, ordenadas las filas y las columnas de la misma forma que el vector incógnita, luego el termino independiente b sera lo que se encuentra del lado derecho de la igualdad para cada ecuación. Podemos ver fácilmente que el vector b se construye de la siguiente forma:

$$b = \begin{pmatrix} -t_i(\theta_0)c_1(r_1) \\ -t_i(\theta_1)c_1(r_1) \\ \dots \\ -t_i(\theta_{n-1})c_1(r_1) \\ \dots, 0 \dots \\ -t_e(\theta_0)c_3 \\ \dots \\ -t_e(\theta_{n-1})c_3 \end{pmatrix}$$

Los primeros n elementos dependen de una constante (que se calcula a partir de los datos de la discretización) multiplicada por la temperatura del interior del horno en ese punto, los últimos

n elementos dependen de una constante (que se calcula a partir de los datos de la discretización) multiplicada por la temperatura medida en el sensor correspondiente, mientras que el resto de los valores serán 0.

Luego la matriz A se plantea usando el sistema de ecuaciones (el lado izquierdo de la igualdad), tomando los coeficientes que multiplican a nuestras incógnitas. Es importante tener en cuenta que organizamos las filas de forma que cada ecuación (lo que sería una fila de A) del sistema se utiliza para conocer la temperatura de un punto, el orden de las ecuaciones es el orden que describimos para el vector incógnita x , también resulta ser el orden de las columnas.

Visto de otra forma, cada posición $A[i][j]$ va a ser el coeficiente que multiplica a la incógnita $x[j]$ en la ecuación asociada a la incógnita $x[i]$ (notemos que $|x| = n * (m - 1)$ y además $\text{cantFilas}(A) = \text{cantColumnas}(A) = |x|$) en el sistema final planteado en la sección anterior.

2.3. Demostración EG sin pivoteo

Veamos que la matriz del sistema planteado en la sección anterior es diagonal dominante (no estricta):

Si volvemos a mirar los coeficientes:

$$c_1(r_j) = \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_j \Delta r} ; c_2(r_j) = c_4(r_j) = \frac{1}{r_j^2 (\Delta \theta)^2} ; c_3 = \frac{1}{(\Delta r)^2} \text{ y } c_5(r_j) = \frac{1}{r_j \Delta r} - \frac{2}{(\Delta r)^2} - \frac{2}{r_j^2 (\Delta \theta)^2}$$

Podemos notar que $c_5(r_j) = -(c_1(r_j) + c_2(r_j) + c_3 + c_4(r_j))$

Con lo cual $|c_5(r_j)| = |c_1(r_j) + c_2(r_j) + c_3 + c_4(r_j)|$ Además se puede ver rápidamente que $c_2(r_j), c_3, c_4(r_j) \geq 0$ veamos ahora que $c_1(r_j) \geq 0$:

$$c_1(r_j) \geq 0 \iff \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{r_j \Delta r} \geq 0 \iff \frac{1}{(\Delta r)^2} \geq \frac{1}{r_j \Delta r} \iff \Delta r > 0 \frac{1}{\Delta r} \geq \frac{1}{r_j} \iff \Delta r \leq r_j = r_i + j \Delta r$$

Lo cual se cumple para $j \geq 1$ (y $m \geq 1$)

Para $j = 0$ (radio interno) los valores ya los tengo despejados

Luego $c_1(r_j), c_2(r_j), c_3, c_4(r_j) \geq 0$ para todo $j \geq 1$ entonces:

$$|c_5(r_j)| = |c_1(r_j) + c_2(r_j) + c_3 + c_4(r_j)| = |c_1(r_j)| + |c_2(r_j)| + |c_3| + |c_4(r_j)|$$

Sea A la matriz del sistema planteada en la sección anterior, podemos ver que para cada fila de A , siempre va a haber entre 4 y 5 elementos no nulos, estos van a ser los coeficientes $c_1(r_j), c_2(r_j), c_3, c_4(r_j)$ y $c_5(r_j)$

Luego podemos ver que $a_{hj,hj} = c_5(r_j)$ para todo $1 \leq j \leq m - 1$ y $0 < h \leq n$ ya que $A[hj][hj]$ representa el coeficiente hj de la ecuación numero hj (si $\#Ec = \#Coef$ entonces en esa posición el coeficiente es c_5)

Separemos ahora en 3 casos: $1 < j < m - 1$, $j = 1$ y $j = m - 1$:

Primer caso $\sum_{k=1 \neq hj}^{n(m-1)} |a_{hj,k}| = |c_1(r_j)| + |c_2(r_j)| + |c_3| + |c_4(r_j)|$ para todo $1 < j < m - 1$ y $0 < h \leq n$

Mientras que $|a_{hj,hj}| = |c_5(r_j)|$ luego $|a_{hj,hj}| = \sum_{k=1 \neq hj}^{n(m-1)} |a_{hj,k}|$ para todo $1 < j < m - 1$ y $0 < h \leq n$

Segundo caso $\sum_{k=1 \neq hj}^{n(m-1)} |a_{hj,k}| = |c_2(r_j)| + |c_3| + |c_4(r_j)| \leq |c_5(r_j)|$ para $j = 1$ y $0 < h \leq n$ (esto sucede porque en las primeras n filas despejamos $c_1(r_1)$ con lo cual en el lugar del c_1 nos queda un 0)

Con lo cual, $|a_{hj,hj}| \geq \sum_{k=1 \neq hj}^{n(m-1)} |a_{hj,k}|$ para $j = 1$ y $0 < h \leq n$

Ultimo caso $\sum_{k=1 \neq hj}^{n(m-1)} |a_{hj,k}| = |c_1(r_j)| + |c_2(r_j)| + |c_4(r_j)| \leq |c_5(r_j)|$ para $j = m - 1$ y $0 < h \leq n$ (esto sucede porque en las ultimas n filas despejamos c_3 con lo cual en el lugar del c_3 nos queda un

0)

Con lo cual, $|a_{hj,hj}| \geq \sum_{k=1 \neq hj}^{n(m-1)} |a_{hj,k}|$ para $j = m-1$ y $0 < h \leq n$

Juntando los 3 casos, $|a_{hj,hj}| \geq \sum_{k=1 \neq hj}^{n(m-1)} |a_{hj,k}|$ para $0 < j \leq m-1$ y $0 < h \leq n$

Finalmente $|a_{i,i}| \geq \sum_{k=1 \neq i}^{n(m-1)} |a_{i,k}|$ para todo $1 \leq i \leq n(m-1)$, esta es la definición de matriz diagonal dominante (no estricta), con lo cual nuestra matriz A del sistema a resolver es diagonal dominante (no estricta) como queríamos probar.

Vimos que la matriz es diagonal dominante, lo cual nos dice que:

$|a_{i,j}| \geq \sum_{j=1 \neq i}^n |a_{i,j}|$ para todo $i = 1, \dots, n$ (para simplificar los rangos planteemos una matriz cuadrada de dimensión n)

Veamos que sucede si a una matriz de esas características le aplicamos el primer paso de eliminación gaussiana:

$a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}^{(0)} - \frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} a_{1,j}^{(0)}$ para todo $i > 1, j$ en rango de la matriz (para $i = 1, a_{1,j}^{(1)} = a_{1,j}^{(0)}$ para todo j en rango)

Como podemos aplicar EG sin pivoteo, veamos ahora como queda la matriz resultante, en especial miremos la matriz $A_{22}^{(1)}$ que se forma si pensamos a la matriz $A^{(1)}$ como la siguiente partición:

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ \hline A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} \\ \hline 0 & A_{22}^{(1)} \end{array} \right]$$

Sabemos que $A_{22}^{(0)}$ es diagonal dominante ya que si A es diagonal dominante sabemos que:

$|a_{i,i}| \geq \sum_{j=1 \neq i}^n |a_{i,j}|$ para todo $i = 1, \dots, n$ en particular también se cumple

$|a_{i,i}| \geq \sum_{j=1 \neq i}^n |a_{i,j}|$ para todo $i = 2, \dots, n$ pero además

$\sum_{j=1 \neq i}^n |a_{i,j}| \geq \sum_{j=2 \neq i}^n |a_{i,j}|$ para todo $i = 2, \dots, n$ luego

$|a_{i,i}| \geq \sum_{j=2 \neq i}^n |a_{i,j}|$ para todo $i = 2, \dots, n$ con lo cual $A_{22}^{(0)}$ es diagonal dominante

Queremos ver ahora que $A_{22}^{(1)}$ también es diagonal dominante, ya que si esto es así, significa que al aplicar un paso de EG, la siguiente matriz sobre la cual debemos aplicar EG (matriz de dimensión $(n-1) \times (n-1)$) también será diagonal dominante, y si probamos que $a_{22}^{(1)} = (A_{22}^{(1)})_{11} \neq 0$ sabemos que también podemos aplicarle un paso de EG a $A_{22}^{(1)}$.

Este razonamiento lo podemos generalizar usando inducción, ya que si planteamos un k genérico tal que $A_{22}^{(k)}$ es dd y logramos demostrar a partir de eso que $A_{22}^{(k+1)}$ es dd, estaremos muy cerca de demostrar lo que queríamos.

$a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}^{(0)} - \frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} a_{1,j}^{(0)}$ para todo $i > 1, j$

Sabemos también que $|a_{i,i}^{(0)}| \geq \sum_{j=1 \neq i}^n |a_{i,j}^{(0)}|$ para todo $i \geq 1$

$\sum_{j=2 \neq i}^n |a_{i,j}^{(1)}| = \sum_{j=2 \neq i}^n |a_{i,j}^{(0)} - \frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} a_{1,j}^{(0)}| \leq \sum_{j=2 \neq i}^n |a_{i,j}^{(0)}| + \sum_{j=2 \neq i}^n |\frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} a_{1,j}^{(0)}| = \sum_{j=2 \neq i}^n |a_{i,j}^{(0)}| + |\frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}}| \sum_{j=2 \neq i}^n |a_{1,j}^{(0)}|$

Veamos lo siguiente: $\sum_{j=2}^n |a_{1,j}^{(0)}| \leq_{A^{(0)} dd} |a_{1,1}^{(0)}| \iff \sum_{j=2 \neq i}^n |a_{1,j}^{(0)}| \leq |a_{1,1}^{(0)}| - |a_{1,i}^{(0)}|$

$\sum_{j=2 \neq i}^n |a_{i,j}^{(0)}| + |\frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}}| \sum_{j=2 \neq i}^n |a_{1,j}^{(0)}| = (\sum_{j=1 \neq i}^n |a_{i,j}^{(0)}|) - |a_{i,i}^{(0)}| + |\frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}}| \sum_{j=2 \neq i}^n |a_{1,j}^{(0)}| \leq_{A^{(0)} dd}$

$\leq_{A^{(0)} dd} |a_{i,i}^{(0)}| - |a_{i,i}^{(0)}| + |\frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}}| (|a_{1,1}^{(0)}| - |a_{1,i}^{(0)}|) = |a_{i,i}^{(0)}| - |\frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}}| |a_{1,i}^{(0)}| \leq |a_{i,i}^{(0)} - \frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} a_{1,i}^{(0)}| = |a_{i,i}^{(1)}|$

Si bien planteamos lo que parece ser un caso base, este mismo razonamiento es generalizable, podemos cambiar donde dice (0) por (k) y donde dice (1) por (k+1) ya que lo unico que utilizamos de $A^{(0)}$ es que es dd, pero si planteamos que $A^{(k)}$ es dd podemos usar los mismos pasos para demostrar

que $A^{(k+1)}$ es dd, con lo cual podemos extender esta demostración para toda la matriz (usando inducción). Luego, para cada paso de EG que podamos realizar, la submatriz a la cual le aplicaremos el siguiente paso de EG también sera dd. Finalmente, $\sum_{j=2 \neq i}^n |a_{i,j}^{(1)}| \leq |a_{i,i}^{(1)}|$ para todo $i > 1$ lo cual implica que $A_{22}^{(1)}$ es diagonal dominante como queríamos.

Faltaría demostrar que se cumple lo siguiente $a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{12}^{(0)} \neq 0$ y luego concluir que esto es generalizable para los siguientes pasos, de esta forma podríamos concluir que para nuestra matriz de sistema siempre vamos a poder hacer eliminación gaussiana sin pivoteo.

2.4. Aprovechando la banda

Podemos aprovechar que la matriz del sistema sea una matriz banda al realizar eliminación Gaussiana, ya que si ordenamos los puntos de cierta forma podemos obtener una matriz banda con ancho acotado por algo menor a las dimensiones de la matriz, reduciendo así la complejidad de la eliminación Gaussiana. Si ordenamos los puntos $t_{j,k}$ de la siguiente forma (orden del vector incógnita de nuestro sistema):

$$t_{1,0}, t_{1,1}, \dots, t_{1,n-1}, t_{2,0}, \dots, t_{2,n-1}, \dots, t_{m-1,0}, \dots, t_{m-1,n-1}$$

El ancho de la matriz banda estará acotado por n , con lo cual cuando estamos haciendo un paso de eliminación Gaussiana, no hace falta restar la fila actual con filas que estén a mas de n de distancia de la diagonal (distancia vertical hacia abajo), ya que estas ya tendrán un 0 en esa columna.

Para lograr esto, es suficiente con cambiar el rango del segundo ciclo anidado en las implementaciones de EG y LU (cambiamos el rango de $n * m$ a el minimo entre $n * m$ y $(n + k + 1)$ siendo k el numero de paso de EG o LU que estamos realizando).

De esta forma podemos reducir la complejidad de eliminación gaussiana de $O(n^3 * m^3)$ a $O(n^3 * m^2)$

2.5. Aproximando la isoterma

Una vez obtenida la matriz con todas las temperaturas del horno, debemos saber en que distancia de radio se encuentra la isoterma 500 para cada uno de los ángulos de nuestra discretización. Para eso sabemos que cada ángulo posee una temperatura mas cercana al 500, y por lo tanto a partir de esto surgen dos propuestas diferentes: aproximar por truncamiento o linealmente. Para aproximar la isoterma linealmente, utilizamos la siguiente ecuación:

$$r_{iso} = r_j + \Delta r \frac{t_j - temperaturaIsoterma}{t_j - t_{j+1}}$$

siendo t_j la menor temperatura mayor a $temperaturaIsoterma$ para ese valor de θ y t_{j+1} la mayor temperatura menor a $temperaturaIsoterma$ para ese valor de θ . Para aproximar por truncamiento, no es mas que reemplazar por el valor del radio de nuestra discretización que tenga la temperatura mas cercana al 500.

Dependiendo de la granularidad de nuestros ángulos y la distribución de los valores de nuestras temperaturas externas, obtendremos una circunferencia mas detallada usando la aproximación lineal, mientras que con el truncamiento nuestro gráfico de la isoterma será mas propenso a tener picos más frecuentes perdiendo detalle y circularidad. Con respecto a la performance, la complejidad no aumenta ya que simplemente se realizan un par más de operaciones por cada fila de la matriz.

2.6. Criterio de peligro

Para la implementación del criterio de peligro planteamos 2 criterios distintos, el primero es el mas simple, tomar el punto de la isoterma que esta mas cerca de la pared externa, el segundo es un poco mas complejo ya que toma todos los valores de radios de la isoterma y calcula la media alta (percentil 75 de valor de radio de la isoterma para ese ángulo), luego calculamos la distancia de ese punto a la pared externa (lo cual seria el percentil 25 de la distancia entre la isoterma y la pared externa para ese ángulo). En base a los datos de la discretización planteamos que si el valor supera el 80 % de la distancia entre la pared externa y la interna, la estructura se encuentra en peligro.

3. Experimentación

Para la experimentación pensamos en plantear diferentes modelos con igual dimensión en cuanto al radio interno y al externo, con lo cual esos valores no van a variar. De esta manera obtendremos una mejor comparación en los diferentes tipos de experimentos que hagamos. Estos valores serán 10 para el radio interno y 110 para el radio externo, así podremos dividir mas fácilmente los radios equidistantes para graficarlos. Luego, para la discretización de los puntos, iremos cambiando la granularidad pero manteniendo una misma distribución en los valores de la temperatura de los puntos de la pared externa para cada uno de nuestros experimentos y para los valores de las temperaturas de la pared interna usaremos siempre 1500.

3.1. Comparación entre distribuciones

Para este primer experimento queremos ver que tan diferentes se verán los gráficos de la isoterma usando distintas distribuciones para definir las temperaturas de la pared externa. Para esto no será necesario contar con varias instancias, ni tampoco calcular las temperaturas con un algoritmo en especial ya que no nos interesa en este momento saber la velocidad de rendimiento, con lo cual haremos 3 instancias para cada distribución calculadas con LUO, el cual es la versión optimizada del algoritmo de LU que aprovecha la matriz banda para hacer el calculo aun mas rápido (explicado en la subsección 2.4), ya que de esta manera podremos obtener resultados con mas detalle a una gran velocidad y podremos mostrar qué tanto varían las instancias. En cuanto a la cantidad de radios y ángulos, nos conviene tener la misma cantidad para las diferentes distribuciones y ser un valor lo suficientemente grande para tener un buen detalle en el gráfico y no perder mucho tiempo de procesamiento, es por esto que optamos por elegir 100 radios y 100 ángulos, y para obtener una mejor aproximación a la isoterma 500, calcularemos la aproximación de manera lineal. Usaremos dos distribuciones: normal y uniforme.

Para la distribución normal, usaremos una media de 50°C y una varianza de 400. De esta manera obtendremos una gran variedad de distintas temperaturas para la pared externa y, como la media es 50, debería haber varios valores parecidos a 50 pero estos podrán variar en un gran rango, con lo cual esperaríamos que nuestra isoterma no sea bastante circular. Al tener una gran varianza, nuestro gráfico será mas propenso a presentar picos en la isoterma, debido a saltos que superan por mucho la media.

Para la distribución uniforme, usaremos una mínima de 0 y máxima de 500. De esta manera acotaremos los resultados para obtener solo valores positivos dentro del horno, y a su vez tendremos la posibilidad de alcanzar la temperatura 500 en la pared externa del horno pero no podrá superar este valor, por lo que también siempre se podrá ver la isoterma 500 dentro del gráfico. Al ser uniforme y tener un rango bastante extenso de opciones para las temperaturas, especulamos que nuestro gráfico será mas propenso a perder la circularidad mas fácil que nuestra isoterma de distribución normal.

Nuestro objetivo con este experimento es poder ver cual de las distribuciones muestra una deformación mucho mas grande en cuanto al gráfico de nuestra isoterma 500. Ambas distribuciones fueron pensadas para obtener una gran variedad de valores en las temperaturas de la pared externa, por lo que se espera que no sean muy circulares ninguna de las dos distribuciones utilizadas.

3.2. Comparación entre algoritmos

Para este segundo experimento nos fijaremos en el rendimiento y velocidad de ejecución de nuestros algoritmos para el calculo de las temperaturas internas del horno implementados en C++. Estos son Eliminación Gaussiana y Factorización LU. Sabemos que en la teoría, LU es mas eficiente en cuanto a la complejidad ya que se guarda dos matrices triangulares que luego usa para resolver todos los sistemas. Para probar esto, usaremos las mismas distribuciones con los mismos parámetros en cada uno. Lo único que iremos variando serán las instancias, para lograr ver un gráfico del tiempo que tardan en calcularse las temperaturas con cada algoritmo a medida que vamos aumentando la cantidad de instancias a calcular. Para EG nos debería dar una linea constante, ya que no debería mejorar el tiempo de ejecución sin importar la cantidad de instancias que nosotros calculemos, mientras que con LU, debería ir bajando por lo menos luego de la primer instancia (que es cuando calcula las matrices LU) y después debería ir manteniendo la misma velocidad de ejecución por instancia una vez obtenida las matrices LU.

Además del calculo con estos dos algoritmos, probaremos de calcular lo mismo con nuestros algoritmos optimizados, que aprovechan la estructura de nuestra matriz banda para mejorar la complejidad del peor caso, esto se explica con mas detalle en la subsección 2.4. Lo que lograremos con esto es probar qué tanto mejora la velocidad de ejecución comparado con los algoritmos normales a medida que aumenta el número de instancias. Especulamos que a pesar de EGO (Eliminación Gaussiana Optimizada) ser mas rápido que EG, seguirá siendo mas lento que LU ya que la complejidad de LU debería mantenerse casi constante mientras que la de EGO incrementará mas fácil a medida que aumentemos instancias.

Para los parámetros utilizaremos una normal de 200 de media y 250 de varianza, 50 ángulos y 50 radios. Con respecto a las instancias, haremos un total de 5 experimentos con una cantidad de instancias de $2 * i^2$ siendo i la i -ésima ejecución a correr. Lo implementaremos de esta manera para tener una mejor variedad de cantidades de instancias sin tener que ejecutar cada algoritmo varias veces y obtener una buena medida con solo estas 5 ejecuciones por algoritmo.

Nuestro objetivo con este experimento es mostrar la diferencia de velocidad de ejecución y rendimiento de los diferentes algoritmos implementados para obtener una mejor idea de qué tanto mejora la performance tener un algoritmo optimizado contra uno sin modificar y que tan eficientes resultan ser en la práctica mas allá de lo visto en la teoría.

3.3. Comparación entre criterios de peligro

Para este experimento nos interesa conocer el mejor criterio a la hora de informar peligrosidad en cuanto al acercamiento de la isoterma 500 de la pared externa de horno. Para esto tenemos dos distintos criterios: criterio del máximo valor y criterio de la mediana alta. Estos ya se encuentran comentados en la subsección 2.6 Criterio de Peligro, en el cual explicamos mejor cómo funcionan.

Para los parámetros habíamos pensado primero una normal con una esperanza de 100 grados y una varianza de 120, para que los valores sean medianamente controlados pero que puedan tener probabilidades de presentar picos en menor medida, en caso de que lo haga, se obtendrá peligro en el primer criterio mientras que en el segundo dependerá de qué tantos picos haya (si supera el percentil 25 estará en peligro), pero el problema de estos parámetros es que nos da bastante circular y no existe

peligro nunca, por lo tanto optamos por cambiar la varianza a 500 para ver qué tanto peligro corre para cada criterio. Para un segundo experimento podría ser con esperanza 350 y varianza 100 para tener un promedio de valores que estén bastante cerca de los 500°C pero manteniendo una varianza moderada, de tal forma que haya mas probabilidades de que presente varios picos que superen el percentil 25 y por lo tanto sera más propenso a correr peligro en ambos experimentos pero sobretudo en el primer criterio.

Para ambos casos contaremos con 10 instancias para tener un porcentaje de cuantas veces nuestro criterio detecta peligro y cuando no. Además, usaremos 50 ángulos y 50 radios y lo calcularemos con LUO para obtener un calculo rápido y sencillo de las temperaturas. Por ultimo, la aproximación de la isoterma será lineal ya que nos interesa tener una mejor aproximación a la isoterma 500 real para poder hacer mejores medidas con nuestros criterios. Estos criterios están implementados con lo dicho en la subsección 2.6, con lo que será muy difícil que sea peligroso con parámetros dentro de todo controlados.

Nuestro objetivo con este experimento es probar qué tan eficientes son los criterios para avisar que el horno se encuentra en un estado de peligro y de esta forma lograr obtener una mejor noción de cuál es la mejor forma de prevenir accidentes.

3.4. Comparación entre aproximaciones de la isoterma

Para el experimento final, queremos ver la diferencia entre los criterios seleccionados para aproximar la isoterma (truncamiento y aproximación lineal). Para esto correremos 3 instancias de una misma distribución (haremos el experimento usando LUO ya que para este caso no nos importa el tiempo de computo) con los mismos parámetros y repetimos el experimento con una discretización mejor, para de esta forma conseguir mas detalle sobre la isoterma, compararemos ambos criterios bajo las mismas condiciones (mismas distribuciones con mismos parámetros).

Usaremos una distribución normal con 100 de esperanza y 300 de varianza para las temperaturas externas, con lo cual esperamos algunos picos, también esperamos que a medida que vamos mejorando nuestra discretización la forma de la isoterma (para ambas aproximaciones) se vaya haciendo cada vez mas circular. Esperamos que pase esto ya que si tenemos mas ángulos, el promedio de las temperaturas se acerca cada vez mas a la esperanza, con lo cual seria cada vez mas parecido a la isoterma formada por el mismo experimento pero poniendo para todas las temperaturas externas el valor de la esperanza de la distribución.

Las discretizaciones serán las siguientes: 30 radios y 30 ángulos la primera, 60 radios y 60 ángulos y finalmente 100 radios y 100 ángulos la tercera, para cada discretización haremos 3 instancias.

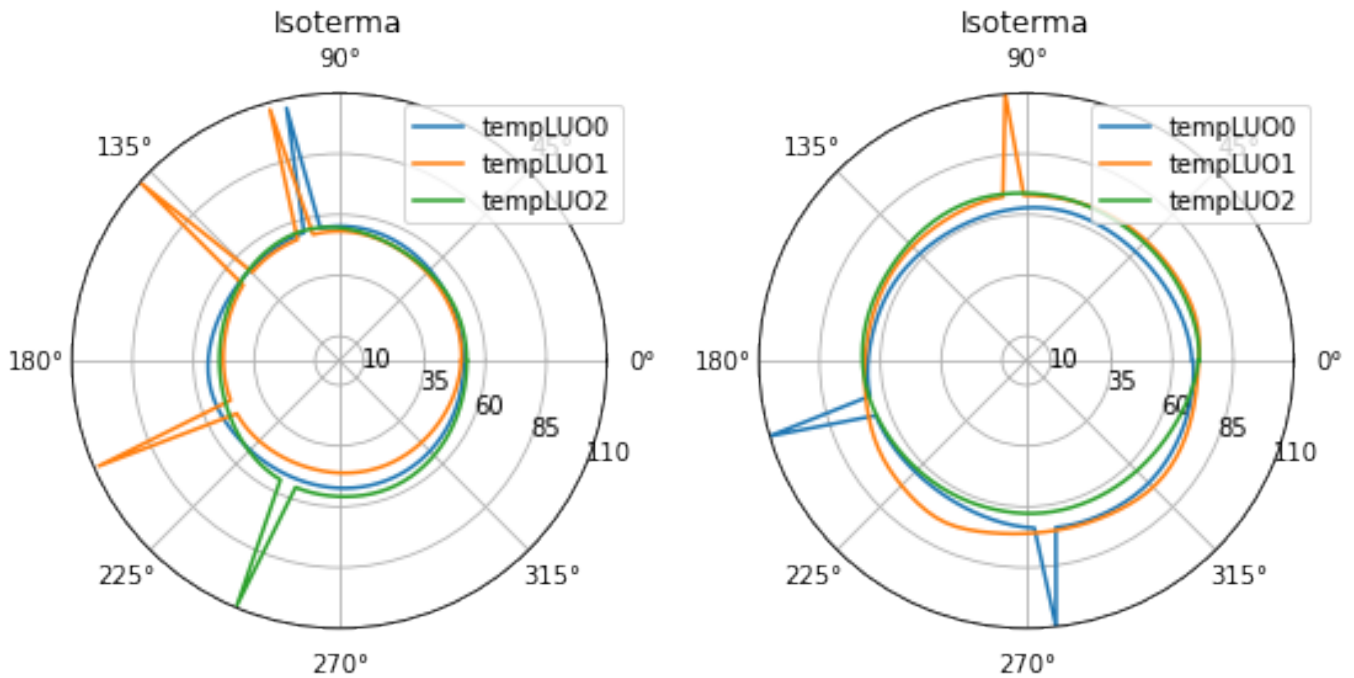
El objetivo de este experimento es ver cuan mejor es la aproximación lineal comparada a el truncamiento y bajo que condiciones. Queremos también decidir si la superioridad de la aproximación lineal justifica ser mas compleja de implementar en comparación a el truncamiento.

4. Resultados

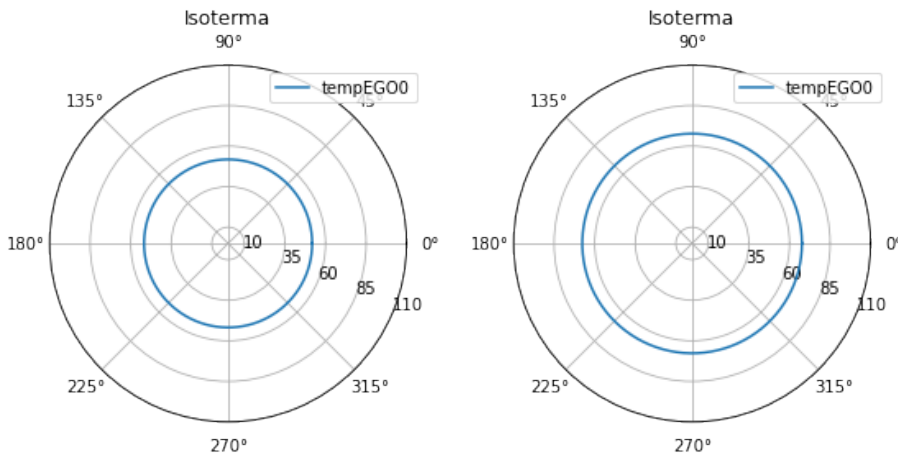
Para cada uno de nuestros resultados intentaremos mostrar un gráfico que mejor muestre los resultados de nuestros distintos experimentos, de manera que podamos realizar un análisis concreto de las comparaciones que queríamos hacer para cada experimentación. No nos pondremos en detalle con cada aspecto escrito en nuestro desarrollo, si no que nos enfocaremos en resaltar las características centrales de cada experimento y lograr un mayor contraste en nuestras comparaciones.

4.1. Resultado de Distribuciones

Veamos los siguientes gráficos de la isoterma 500:



El primero muestra una distribución normal mientras que el segundo muestra una distribución uniforme. Podemos ver que los valores de la isoterma en la normal se centran mas en el 50, mientras que en el uniforme se concentran en 70. Si corremos el mismo experimento pero de una sola instancia con valores fijos para la temperatura externa iguales a la esperanza de la distribución (50 para la normal, 250 para la uniforme) conseguimos una isoterma circular que se parece mucho a los gráficos de nuestros experimentos:



Con respecto a la isoterma de las primeras dos figuras, tanto la distribución normal como la uniforme presentan varios picos. Se puede notar que la normal se vuelve mas propensa a tener saltos espontáneos de temperatura, mientras que la uniforme tiende a variar mas entre valores por lo que presenta mas deformidad pero no muestra tantos saltos esporádicos de temperatura, en particular podemos ver que la isoterma tempLUO2 no presenta ningún pico de temperatura 500 en la pared externa. Esto demuestra que la distribución normal es mucho mas efectiva para perder la estabilidad (al menos si la varianza es alta), mientras que la uniforme es mejor para obtener una isoterma con gran variedad de valores mas dispersos.

4.2. Resultado de Algoritmos

A continuación presentamos un gráfico demostrativo en el que podremos ver como varia la velocidad dependiendo de la cantidad de instancias:

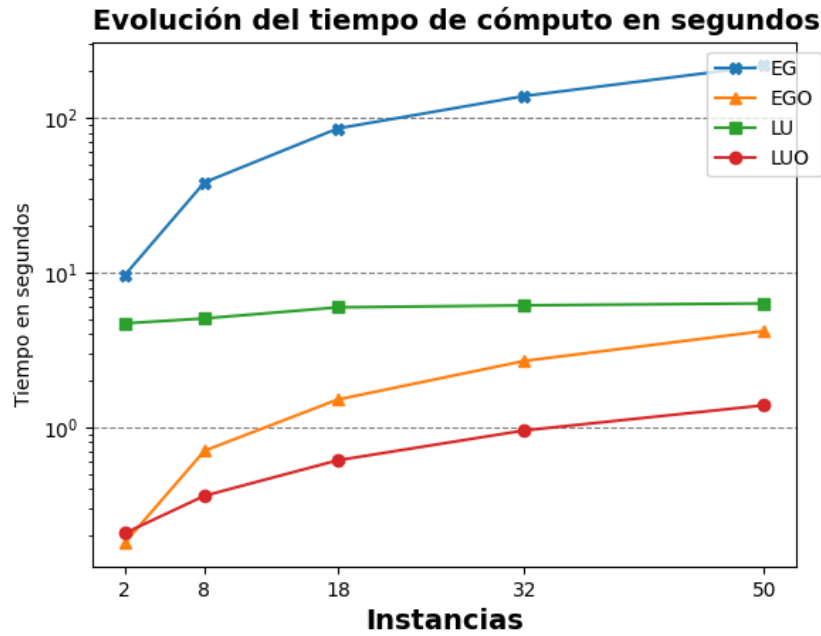


Figura 1: Representación del tiempo de ejecución de cada algoritmo en una escala logarítmica

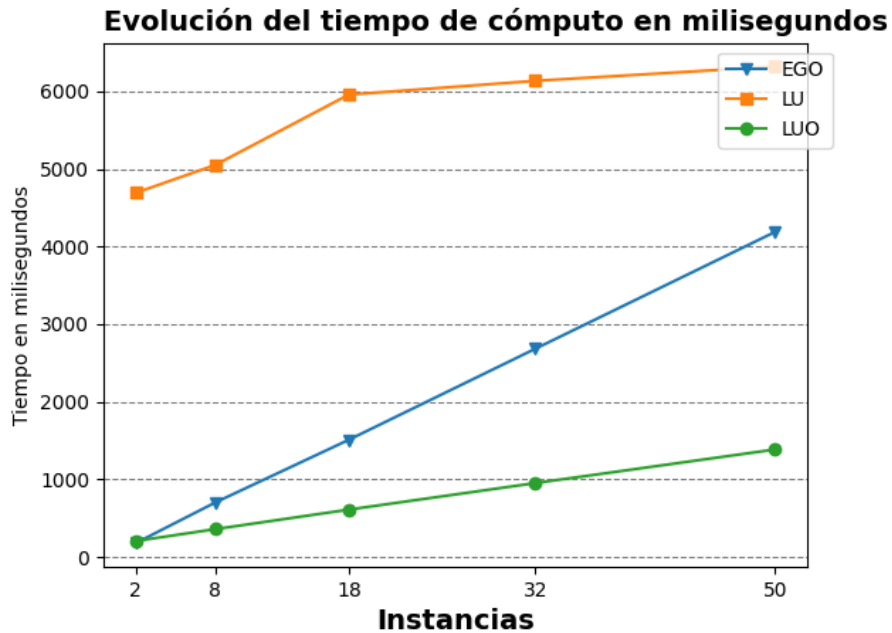


Figura 2: Representación del tiempo de ejecución de los algoritmos sin EG en una escala lineal

En la Figura 1 podemos ver los diferentes tiempos de computo para cada uno de los algoritmos implementados. Para este primer gráfico tuvimos que re-escalar el eje y para poder obtener una mejor

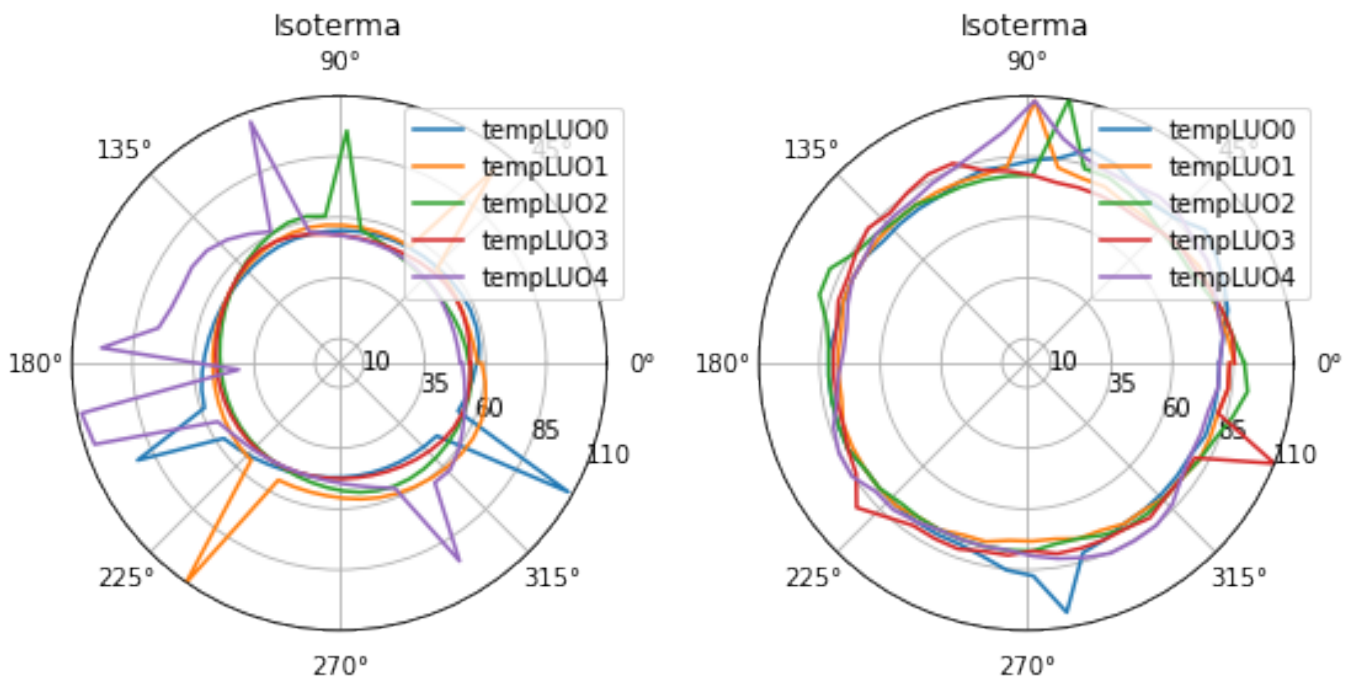
visualización de los 4 algoritmos juntos, ya que EG es bastante grande comparado con los otros tres algoritmos. En este gráfico se puede ver claramente la diferencia entre los distintos algoritmos a medida que vamos aumentando las instancias. Mientras que en 2 instancias tenemos menos de un segundo para los algoritmos optimizados, los algoritmos normales ya están cerca de los 10 segundos de ejecución. Esto va empeorando sobre todo para EG que alcanza mas de 100 segundos en las 32 instancias y su numero sigue incrementando. Por otro lado LU mantiene dentro de todo su tiempo.

Con solo el primer gráfico no se puede apreciar qué tan constantes son los valores de LU y LUO, y parecería ser que EGO incrementa casi en igual medida que LUO, pero esto se puede visualizar mejor en la Figura 2, la cual mide el tiempo en milisegundos y su eje y presenta una escala lineal, en la cual se puede ver que esto no es así y que en realidad EGO sí incrementa linealmente en mayor medida que LUO.

En este segundo gráfico se puede apreciar mucho mejor el contraste de los algoritmos optimizados con LU. Si bien en la teoría vimos que LU mantiene su complejidad y por lo tanto asumiría ser mas rápido que EGO, EGO consigue superar a LU saltando varios pasos de ejecución por cada instancia aprovechando la matriz banda. A pesar de ello vemos que efectivamente EGO aumenta de manera lineal mientras que tanto LU como LUO tienden a aplanarse bastante y mantener su tiempo de computo. Podemos asumir entonces que a pesar de ser más rápido en estas primeras 50 instancias, EGO termina siendo mas lento que LU luego de superar una cierta cantidad de instancias ya que LU no incrementa tanto su valor en comparación.

4.3. Resultado de Criterios de peligro

Para el siguiente resultado mostraremos la isoterma 500:



El gráfico de la izquierda representa la normal de esperanza 100 y varianza 500, mientras que el de la derecha representa el de la normal de esperanza 350 y varianza 100. En el primer gráfico vemos como hay varios picos (debido a la gran varianza) pero la mayoría de los radios se centran al rededor del 50, con lo cual el percentil 25 de las distancias entre la isoterma y la pared externa no va a superar el 80 % de la distancia entre el radio interno y el externo.

Para el segundo gráfico, vemos como este tiene menos picos (y menos pronunciados) debido a su varianza baja, pero la mayoría de los radios se sitúan muy cerca del radio 80 (ya que la esperanza de

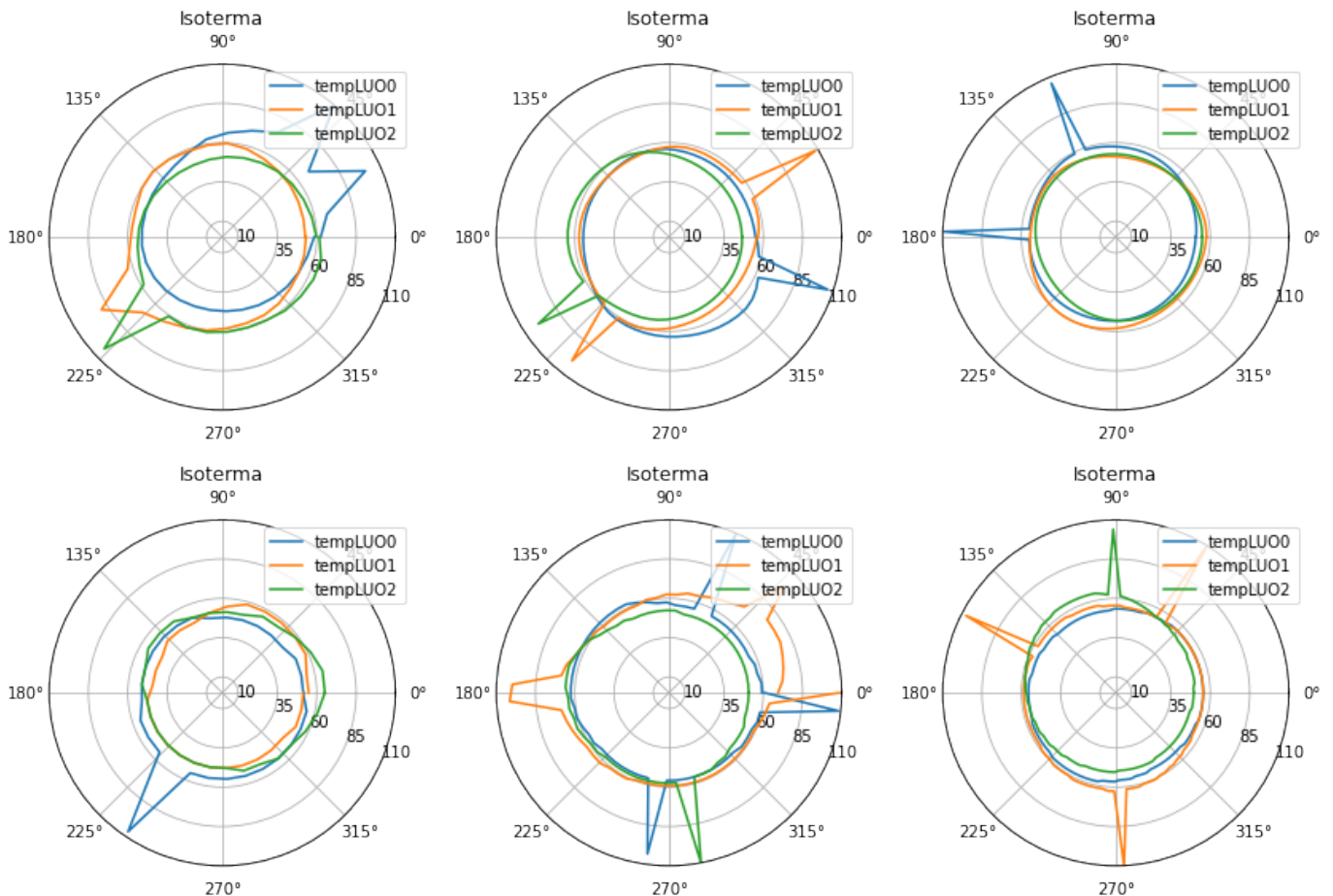
la temperatura externa es muy alta) con lo cual el percentil 25 de las distancias entre la isoterma y la pared externa esta muy cerca del 80 % (ya que nuestra distancia entre radio interno y externo es 100) con lo cual tendremos mas probabilidades de que el criterio de percentil 25 decida que estamos en situación de peligro.

Para el primer experimento el criterio de menor distancia decidió peligro en todas las instancias salvo tempLUO3 (es el unico que no presenta picos) mientras que percentil 25 decidió que en ninguna instancia había peligro. Para el segundo experimento el criterio de menor distancia decidió peligro en todas las instancias, mientras que el de percentil 25 decidió peligro solamente en tempLUO3 y tempLUO4. Cabe aclarar que para este segundo experimento no pudimos realizar la aproximación lineal y tuvimos que realizarlo con truncamiento debido a que la esperanza se acercaba mucho al 500, esto se encuentra mejor explicado en la sección de comentarios.

Como conclusión de este experimento, el criterio de menor distancia es muy estricto (lo cual podría ser algo bueno), en especial para los casos donde nuestra esperanza y/o varianza es alta, mientras que el de percentil 25 puede ser demasiado tolerante, dependiendo de lo que busquemos para nuestra aplicación cual nos conveniente (además punto mas cercano es mas fácil de implementar). Una opción seria implementar ambos y usar el de menor distancia para decidir si la estructura se encuentra en peligro y usar el de percentil 25 para decidir si la estructura tiene un alto nivel de peligro. Sin importar que criterio usemos, seguimos limitados por la discretización que utilicemos, ya que si no tenemos un sensor en una ubicación donde se forma un pico muy alto de temperatura pero muy concentrado, no nos va a ser posible encontrarlo si nuestra discretización no nos brinda ese dato.

4.4. Resultados de aproximaciones de isoterma

Veamos los siguientes gráficos de la isoterma:



Los gráficos de la primer fila son los de isoterma Lineal, los de la segunda fila son isoterma calculada por truncamiento. En la primer columna tenemos los gráficos de discretización 30 radios y 30 ángulos, en la segunda columna 60 radios y 60 ángulos y en la ultima columna 100 radios y 100 ángulos.

Podemos ver que (como esperábamos) a medida que se mejora la discretización (nos movemos hacia la derecha en los gráficos), las isotermas se van haciendo cada vez mas circulares, también podemos ver que a medida que mejoramos la discretización, aparecen mas picos y estos son cada vez mas pronunciados, esto se debe a que mientras mas instancias tenemos, mas probabilidades tenemos de conseguir un outlier en el cual varia mucho la temperatura.

En cuanto a la comparación entre los distintos criterios podemos ver que la aproximación lineal tiende a hacer curvas mas circulares, mientras que truncamiento tiende a hacer lineas mas rectas. Se Puede ver también que esta diferencia entre truncamiento y lineal se hace cada vez mas difícil de percibir a medida que mejoramos mas nuestra discretización.

Como conclusión de este experimento, si la discretización es suficientemente buena, la diferencia en la aproximación de la isoterma de forma lineal contra el truncamiento casi no se puede percibir, con lo cual para estos casos el truncamiento posiblemente sea la mejor opción al ser mas fácil de implementar. Si para nuestra aplicación no requerimos de tanta precisión en el calculo de la isoterma, posiblemente la mejor opción también sea el truncamiento. Si nos importa la precisión para el calculo de la isoterma, la mejor opción es la aproximación lineal

5. Conclusión

Dados los datos obtenidos a partir de los resultados de los distintos experimentos podemos concluir que lo visto en el desarrollo teórico no siempre se comporta de la misma manera en la practica. Esto lo pudimos notar sobre todo en los algoritmos que implementamos para el cálculo de las temperaturas, los cuales presumían ser mas rápidos los de LU y LUO según lo visto en la teoría, pero demostraron ser los algoritmos optimizados los mas rápidos en cuanto a la velocidad de computo, al menos para las primeras 50 instancias calculadas.

También notamos que dependiendo de las distribuciones, las isotermas podían mostrar picos y que a pesar de ser parámetros con bastante variación, estos seguían manteniendo dentro de todo bastante la forma de una circunferencia. Para el criterio de peligro demostramos que la manera más eficiente de encontrar una falla en el horno es siendo bien estrictos al mínimo salto de radio que se encontrara en nuestra isoterma el cual superara nuestro criterio, mientras que para el criterio de mediana alta este solo saltara si un 25 % de la isoterma se encuentra por fuera del 80 % de la distancia entre el radio externo y el radio interno.

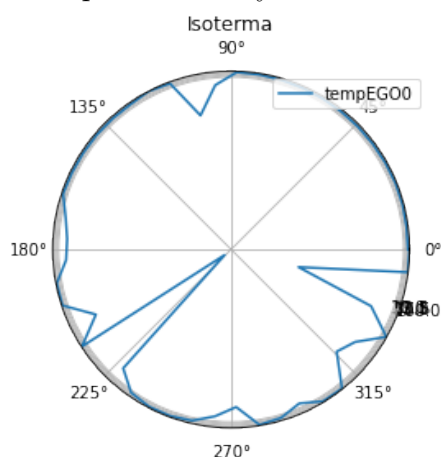
Por ultimo para la experimentación de las aproximaciones de isoterma vimos que a pesar de se obtuvieran distintos valores al calcular la aproximación, ya que el truncado obtiene siempre valores que existen en nuestra discretización, luego al graficar isotermas con estos valores, siguen siendo aproximados a los valores calculados por la aproximación lineal. Haciendo nuestra aproximación lineal, conseguiremos una mejor aproximación de la isoterma, pero ambos presentaran una gran similitud a medida que aumentamos la granularidad de los ángulos y radios.

6. Comentarios adicionales

Como comentarios extra, nos gustaría mencionar algunas cosas que no pudimos incluir en nuestro informe con detalle ya que no alcanzo el tiempo. Una de estas cosas es un tercer criterio para aproximar la isoterma, el cual consistía en encerrar el valor de la isoterma para un ángulo entre

dos radios y para mejorar nuestra aproximación, en vez de hacer una aproximación lineal armar una discretización mas fina del espacio entre esos 2 radios para aproximar de forma mas precisa la isoterma de ese ángulo (de esta forma se mantiene mejor la razón de decrecimiento de las temperaturas entre radios distintos). La hipótesis sobre este criterio es que seria mucho mas preciso que la aproximación lineal, pero a medida que se mejora la discretización la diferencia no justifica el costo computacional ni la dificultad de su implementación.

Otro factor a mencionar, el cual no tuvimos tiempo de investigar a fondo es algunos casos raros que rompen nuestra implementación de aproximación lineal de la isoterma (mientras que la versión de truncado funciona correctamente para esos casos), esto parece que suele pasar si tenemos varios valores de temperatura en la pared externa que superen el valor de la isoterma buscada. En principio parece que deben superarlo por bastante, veamos un ejemplo con números que salen de una normal con esperanza 400 y varianza 300:



Por ultimo, queremos mencionar un caso patológico, si el radio interno es igual a 0, la aproximación de la isoterma (ya sea de forma lineal o truncamiento) tiende a tener demasiados picos de temperatura si las temperaturas externas varían ligeramente. Veamos un ejemplo con temperaturas externas que provienen de una normal con esperanza 100 y varianza 200

