<u>Partie</u> : Informatique / <u>*Chap.1*</u> *: Algèbre booléenne*

<u>I/ Introduction</u>

L'activité mathématique se développe suivant trois directions principales :

- la **construction** d'objets mathématiques, qui peuvent être des nombres, des figures géométriques, des fonctions qui sont souvent caractérisés à l'aide de **définitions.** Ces objets sont d'ailleurs utilisés en sciences expérimentales et économie.
  <u>Exemples de définitions</u> :
  - un ***parallélogramme*** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.
  - une ***fonction f est une fonction linéaire*** si elle définie par la relation f(y) = a x y où a est un nombre réel.

- la **recherche de propriétés** que peuvent posséder ces objets, ce qui amène à énoncer des ***conjectures*** c'est à dire des propriétés que l'on pense vraies car on a pu les vérifier par expérimentation sur plusieurs cas particuliers, par observation de dessins ou encore par l'utilisation de l'informatique. Certaines de ces propriétés semblent évidentes (depuis l'Antiquité) et ne sont alors pas démontrées et portent le nom ***d'axiomes***.
  Le site « Chronomath » fournit une présentation sur la démarche d'Euclide, grand mathématicien grec qui a proposé un nombre important d'axiomes notamment dans un domaine qui portera son nom , la géométrie euclidienne.
  <u>Exemples d'axiomes</u> :
  - il n'existe qu'une droite parallèle à une autre passant par un point.
  - chaque nombre entier admet un suivant.

- la **démonstration** de certaines propriétés énoncées précédemment ; une fois démontrées, elles prennent le nom de ***théorèmes , propositions , corollaires (*)*** etc. Elle s'appuie sur un ***raisonnement logique*** , sur des ***définitions*** ainsi que sur des ***axiomes***.

<u>Lexique</u> (*) :

- **<u>proposition</u>** : pour la plupart différents résultats démontrés.
  <u>Exemple</u> : « le produit de deux nombres de même signe est positif ».
- **<u>théorème</u> :** pour les résultats démontrés les plus fondamentaux.
  <u>Exemple</u> : théorème de Thalès, de Pythagore.
- **<u>corollaire</u> :** pour les conséquences ou cas particuliers des résultats précédents.
  <u>Exemple</u> : propriétés d'agrandissement / réduction de figures dans une configuration de Thalès.
- **<u>assertion</u>** : phrase mathématique sans variable à laquelle on peut donner un sens. Elle peut être VRAIE ou FAUSSE mais pas les deux en même temps.
  <u>Exemples</u> :
  « 2 est un nombre pair » : assertion vraie.
  « un triangle isocèle est un triangle équilatéral » : assertion fausse.

II/ Tables de vérité

1/ Connecteurs élémentaires « NON », « OU », « ET »

En mathématiques, il est utile de relier certaines relations par « et », « ou » et aussi « si ... alors » etc. . Dans le langage courant, ces mots de liaisons, que l'on appelle **connecteurs logiques** en informatique, n'ont pas une signification unique :

- Le « ou » peut être utilisé avec des sens différents, comme par exemple :
  - *ou* dit « exclusif » Exemple : un cadeau OU de l'argent de poche.
  - *ou* dit « mathématique » Exemple : s'il fait froid OU qu'il vente, je reste chez moi.
  - *ou* dit « conditionnel » Exemple : arrête de bavarder en maths OU tu seras collé(e).

- Le « et » peut aussi avoir un sens chronologique (en plus du sens habituel) :
  Exemple : je prends mon livre de maths ET je fais des exercices.

Une telle variété d'utilisation des connecteurs dans le langage courant n'est pas adaptée aux mathématiques, il faut les définir rigoureusement !

Définitions :
Le « OU » mathématique correspond au fait qu'il suffit qu'une seule assertion soit vraie pour être validé, il se peut par ailleurs que les deux assertions soient vraies. Dans l'exemple, il se peut qu'il fasse froid ET qu'il vente, l'assertion est alors aussi validée.
Le « ET » mathématique correspond au fait que les deux assertions doivent être vraies pour être validé.
Le « NON » mathématique est la négation de l'assertion.

Une approche : Une table de vérité est un tableau mathématique utilisé pour représenter des expressions logiques (liées par des connecteurs) et pour ainsi calculer leur valeur de sortie en fonction de celles des entrées. Les valeurs peuvent être VRAI (V) ou FAUX (F).
On représente alors TOUS les cas possibles.

On considère désormais les **assertions** notées A , B et C. Elles peuvent donc être **vraies** comme **fausses**, il faut donc prendre en considération tous les cas possibles.

Exercice 1 : Compléter les tables de vérité suivantes.

NON A

A	NON A
V	
F	

A OU B

A	B	A OU B
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

A ET B

A	B	A ET B
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Exercice 2 : Si l'on doit tester l'assertion A OU B OU C, **combien** de lignes le tableau de vérité aura-t-il ?

2/ Relations de De Morgan

Exercice 3 : a) **Compléter** les deux de tables de vérité suivantes.

A	B	NON A	NON B	(NON A) OU (NON B)
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

A	B	A ET B	NON (A ET B)
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

b) Que peut-on dire des assertions (NON A) OU (NON B) et NON (A ET B) ?

Exercice 4 : a) **Compléter** les deux de tables de vérité suivantes.

A	B	NON A	NON B	(NON A) ET (NON B)
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

A	B	A OU B	NON (A OU B)
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

b) Que peut-on dire des assertions (NON A) ET (NON B) et NON (A OU B) ?

Important : Les résultats des exercices 3 et 4 sont les relations de De Morgan.

3/ Implication et équivalence

Implication : Si on peut affirmer que l'assertion B est vraie lorsque A est vraie alors on dit que **A implique B** et on la note A => B.
On dit alors que **A** est une **condition suffisante** de **B** et que **B** est une **condition nécessaire** de **A**.
On peut le traduire par : « Si B est vrai lorsque A l'est, alors A implique B ».
B => A est alors appelée la **réciproque** de l'implication.

Exemple :
Assertion A : « ABC est un triangle équilatéral »
Assertion B : « ABC est un triangle isocèle »
On a bien A => B car si un triangle est équilatéral il est évidemment isocèle ... mais pas B => A !

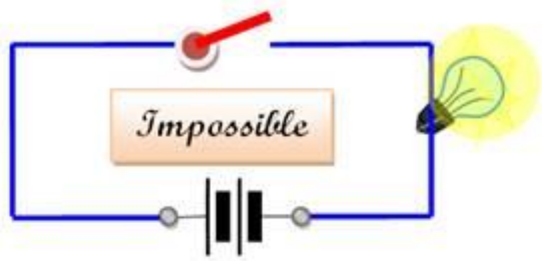
Table de vérité de l’implication

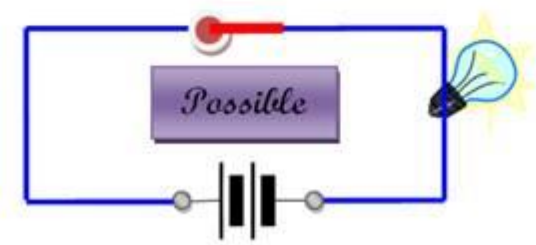
A	B	A => B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

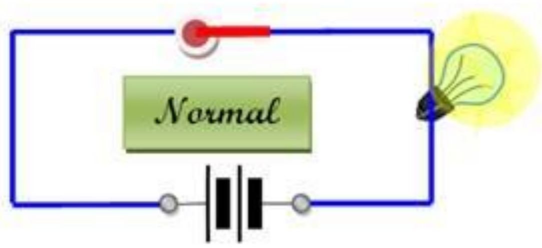
Commentaires
Si A est vraie, B l’est aussi.
Si A est vraie, B ne peut pas être fausse.
Bizarre (*)
Si A est fausse, B l’est aussi.

Illustration des quatre possibilités d’une implication

On considère les assertions suivantes :
Assertion A : « L’ampoule est allumée »
Assertion B : « L’interrupteur est fermé »







- Interrupteur ouvert et ampoule éteinte, c'est normal. (A fausse et B fausse donc A => B vraie)
- Interrupteur fermé et ampoule allumée, c'est normal. (A vraie et B vraie donc A =>B vraie)
- Interrupteur fermé et ampoule éteinte, ce n'est pas normal, mais possible (l'ampoule est grillée, la pile est déchargée ...).(A fausse et B vraie donc A => B vraie)
- Cependant, il est clairement impossible que l'ampoule s'allume sans courant. (A vraie et B fausse donc A => B fausse).

Tiré de* : *http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Logique/LoLoImpl.htm#illustre

Equivalence : Si on peut affirmer que l’assertion A est vraie lorsque B est vraie **et** que l’assertion B est vraie lorsque A est vraie alors on dit que **A équivaut à B** et on note A <=> B.

Remarque : Si on peut affirmer que l’assertion A est fausse lorsque B est fausse **et** que l’assertion B est fausse lorsque A est fausse alors **A équivaut à B** également.

<u>Exercice 5</u> : a) **Compléter** la table de vérité suivante.

A	B	A <=> B	A => B	B => A	(A => B) et (B => A)
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

b) Que peut-on dire des assertions A <=> B et (A => B) et (B => A) ?

<u>Très important</u> : les équivalences sont peu fréquentes au quotidien ! Cela arrive aussi en mathématiques, il faut donc être vigilant, ce qui fonctionne dans un sens ne fonctionne pas forcément dans l'autre !

<u>Exemple</u> : un Français est un européen mais un européen n'est pas forcément un Français.

<u>Exercice 6</u> : Citer une assertion mathématique qui est une implication mais pas une équivalence.

<u>Exercice 7</u> : **Compléter** la table de vérité suivante.

A	B	NON A	NON B	A => B	(NON B) => (NON A)
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Que peut-on dire des assertions A => B et (NON B) => (NON A) ?

<u>Très important</u> : ce résultat est primordial en mathématiques et porte le nom de contraposée. Ce raisonnement mathématique est très utilisé quand il conduit notamment à des démonstrations plus simples.

<u>Exercice 8</u> : a) **Rappeler** le théorème de Pythagore. On prendra un triangle ABC rectangle en A.

b) Quelle est la **contraposée** du théorème de Pythagore ?

c) A quelle occasion peut-on l'utiliser ?

<u>Exercice 9</u> : utiliser la **contraposée** pour démontrer une proposition.

<u>Proposition</u> : « si un nombre au carré est impair, alors le nombre est impair ».

a) Quelle est la **contraposée** de la proposition précédente ?

b) En posant que tout nombre entier n pair peut s'écrire sous la forme n = 2 x k avec k nombre entier, démontrer la contraposée. **En déduire** alors la proposition .

c) Démontrer de la même façon que « si un nombre au carré est pair, alors le nombre est pair ».