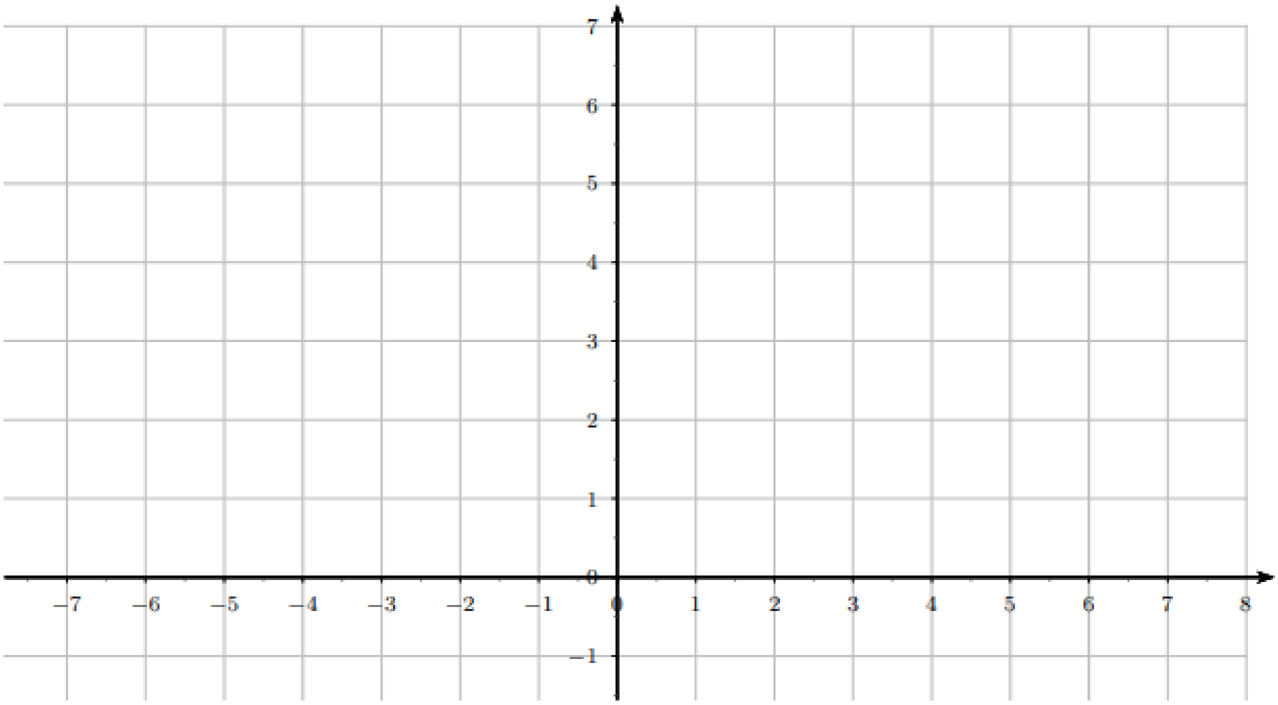
Chap 7 : Synthèse

Exercice 1 : Un peu de construction



1. Placer dans le repère ci-dessus les points $A(-1\ ;\ 5)$, $B(2\ ;\ -1)$ et $I(0,5\ ;\ 2.1)$. Tracer la droite (AB)

2. Cette droite (AB) représente graphiquement une fonction affine f. Déterminer l'expression de f.

3. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x}{3} + 2$.

3. a. Montrer que g est affine.

3. b. Calculer l'image de 0 par g et l'image de 3 par g.

3. c. Déterminer un antécédent de 0 par g.

3. d. Construire sur le même graphique la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.

4. Bouletos affirme que d'après son graphique, le point d'intersection des deux droites $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est I.
Qu'en pensez-vous ?

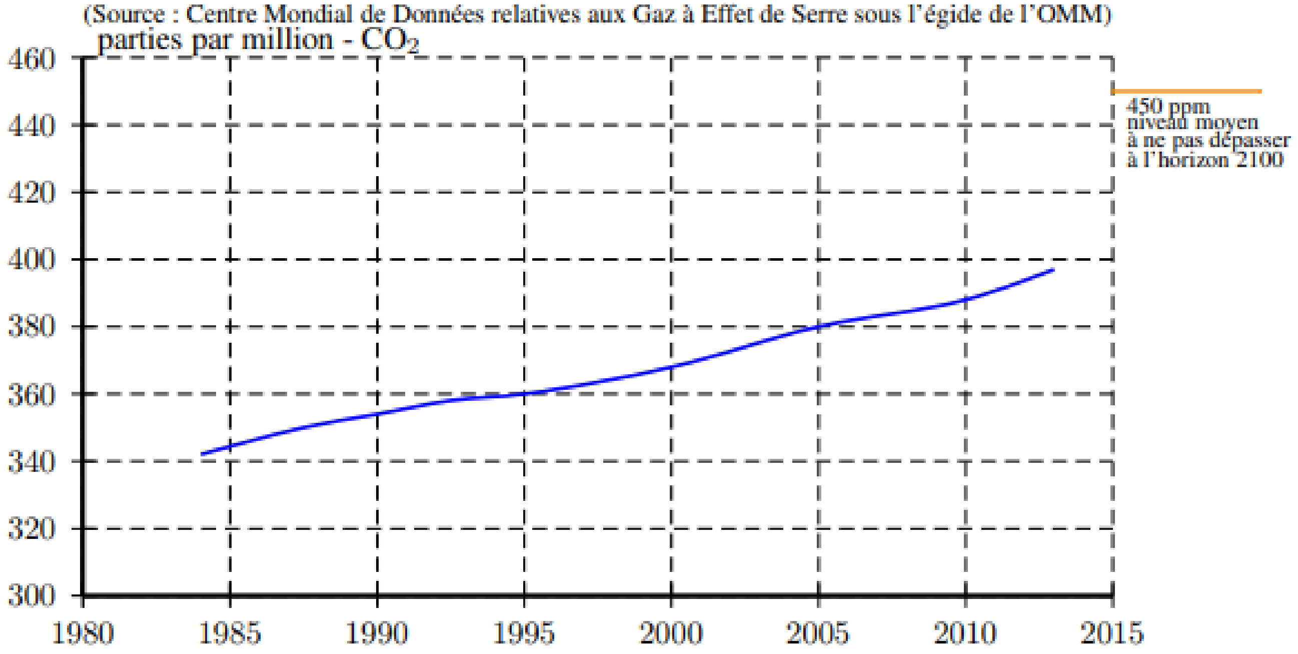
Aide : pour la question 2/, on utilisera la courbe tracée. On repèrera graphiquement l'ordonnée à l'origine et l'on déterminera également graphiquement le coefficient directeur (voir cours).

Exercice 2 : Effet de serre et activité humaine

Les activités humaines produisent du dioxyde de carbone (CO_2) qui contribue au réchauffement climatique. Le graphique suivant représente l'évolution de la concentration atmosphérique moyenne en CO_2 (en ppm) en fonction du temps (en année).

Concentration de CO_2 atmosphérique

(Source : Centre Mondial de Données relatives aux Gaz à Effet de Serre sous l'égide de l'OMM)



1 ppm de CO_2 = 1 partie par million de CO_2 = 1 milligramme de CO_2 par kilogramme d'air.

1. Déterminer graphiquement la concentration de CO_2 en ppm en 1995 puis en 2005.

2. Déterminer graphiquement à partir de quelle année la concentration de CO_2 est supérieur à 370 ppm.

3. On veut modéliser l'évolution de la concentration de CO_2 en fonction du temps à l'aide d'une fonction g où $g(x)$ est la concentration de CO_2 en ppm en fonction de l'année x.

3. a. Expliquer pourquoi une fonction affine semble appropriée pour modéliser la concentration en CO_2 en fonction du temps entre 1995 et 2005.

3. b. Arnold et Billy proposent chacun une expression pour la fonction g :

Arnold propose l'expression $g(x) = 2x - 3\,630$;

Billy propose l'expression $g(x) = 2x - 2\,000$.

Quelle expression modélise le mieux l'évolution de la concentration de CO_2 ? Justifier.

3. c. En utilisant la fonction que vous avez choisie à la question précédente, indiquer l'année pour laquelle la valeur de 450 ppm est atteinte.

Exercice 3 : Tableur, fonction et équations

On appelle f la fonction définie par :

$$f(x) = (x-1)(2x-5)$$

1. Développer et réduire $f(x)$.
2. On a utilisé un tableur pour calculer les images de différentes valeurs par cette fonction f :

2. a.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	$f(x)$	5	0	-1	2	9	20	35	54	77
3										

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que les réponses doivent être justifiées.

- Affirmation 1 : $f(2) = 3$.
- Affirmation 2 : L'image de 11 par la fonction f est 170.
- Affirmation 3 : La fonction f est affine.

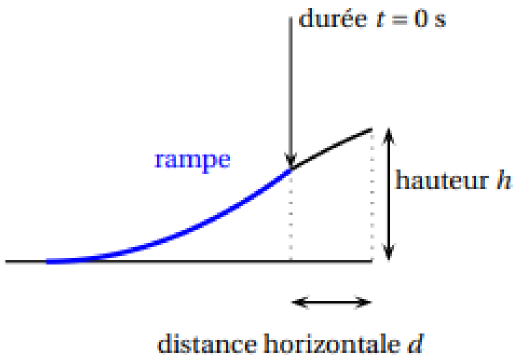
3. Une formule a été saisie dans la cellule B2 puis recopiée ensuite vers la droite. Quelle formule a-t-on saisie dans cette cellule B2 ?
4. Quels sont les nombres x pour lesquels $(x-1)(2x-5) = 0$?
5. Quels sont les antécédents de 5 par la fonction f ?

Exercice 4 : Saut en moto

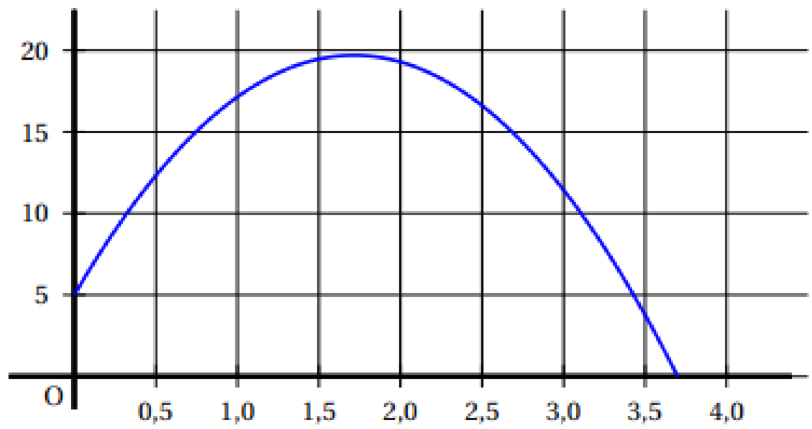
Lors d'une course en moto-cross, après avoir franchi une rampe, Gaëtan a effectué un saut record en moto.

Le saut commence dès que Gaëtan quitte la rampe.
On note t la durée (en secondes) de ce saut.
La hauteur (en mètres) est déterminée en fonction de la durée t par la fonction h suivante :

$$h : t \longmapsto (-5t-1,35)(t-3,7)$$



Voici la courbe représentative de cette fonction h.



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier en utilisant soit le graphique soit des calculs.

1. D'après la courbe, la hauteur est proportionnelle au temps.
2. En développant et en réduisant l'expression de h on obtient :

$$h(t) = -5t^2 - 19,85t - 4,995$$

3. Lorsqu'il quitte la rampe, Gaëtan est à 3,8 m de hauteur.
4. Le saut de Gaëtan dure moins de 4 secondes.
5. Le nombre 3,5 est un antécédent du nombre 3,77 par la fonction h.
6. Gaetan a obtenu la hauteur maximale avant 1,5 seconde.

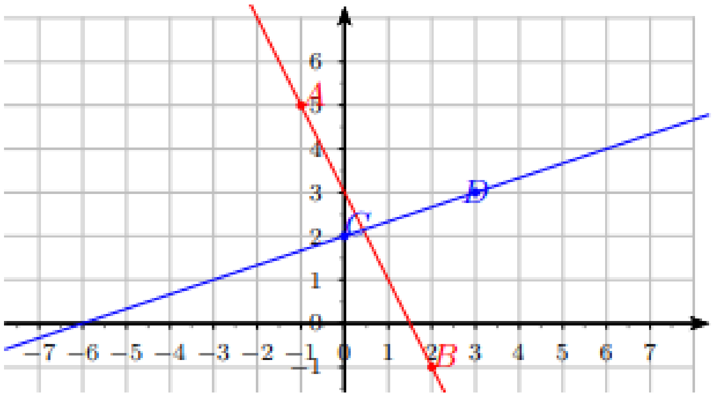
<u>Exercice 5</u> : C'est les soldes

Lors des soldes, Rami, qui accompagne sa mère et s'ennuie un peu, compare trois étiquettes pour passer le temps :

1. Quel est le plus fort pourcentage de remise ?
2. Est-ce que la plus forte remise en euros est la plus forte en pourcentage ?

Chap 7 : Synthèse_Corrigé

***Exercice 1* :**
Tracé des courbes



2/ La droite rouge est la courbe représentative de la fonction affine f.
On a donc f(x) = ax + b.

- L'ordonnée à l'origine vaut 3 (lecture graphique) donc b = 3.
- Pour aller du point A au point B : on « avance » de 3 cases vers la droite (donc + 3) et on descend de 6 cases (donc -6). Le coefficient directeur vaut donc -6/3 soit -2.

On obtient alors f(x) = -2x + 3.

3/ a) La fonction g est bien de la forme g(x) = ax + b avec a = 1/3 et b = 2, elle est donc affine.
b) On sait que g(x) = x/3 + 2.
g(0) = 0/3 + 2 soit g(0) = 2 et g(3) = 3/3 + 2 soit g(3) = 3.
c) On doit résoudre l'équation g(x) = 0 soit :
x/3 + 2 = 0
⇔ x/3 = -2
⇔ x = -6

4/ Il suffit de calculer l'image de 0,5 par la fonction g et de vérifier si l'on trouve bien 2,1.

On a :

$$g(0,5) = \frac{0,5}{3} + 2 = \frac{1}{6} + 2 = \frac{13}{6} \neq 2,1$$

Donc le point I n'appartient pas à $\mathscr{C}_g$, l'affirmation est fausse.

Exercice 2 :
1/ Par lecture graphique, en 1995 : 360 ppm et en 2005 : 380 ppm.
2/ C'est à partir de 2002 (environ) que la concentration de CO2 est supérieur à 370 ppm.
3/ a) Les points de la courbe sont à peu près alignés : le modèle affine semble donc pertinent.
b) Pour l'année 1995, l'expression de Arnold donne 2 × 1 995 − 3 630 = 360, et celle de Billy 2 × 1995 − 2 000 = 1 990 : ce dernier résultat est complètement erroné. Il vaut mieux prendre l'expression d'Arnold.
c) On utilisant la fonction d'Arnold on a : g(x) = 2x − 3 630 = 450 ⇐⇒ 2x = 4080 ⇐⇒ x = 2040 La valeur de 450 ppm sera atteinte en 2040.

Exercice 3 :
1/

$$f(x) = (x-1)(2x-5)$$
$$f(x) = 2x^2 - 5x - 2x + 5$$
$$f(x) = \underline{2x^2 - 7x + 5}$$

2.

- **Affirmation 1 : $f(2) = 3$.**
  D'après le tableau, l'imager de 2 par f est (-1) donc l'affirmation 1 est fausse.
- **Affirmation 2 : L'image de 11 par la fonction f est 170.**

$$f(11) = (11-1)(2\times 11-5) = 10\times 17 = \underline{170}$$

  L'imager de 11 par f est (170) donc l'affirmation 2 est vraie.
- **Affirmation 3 : La fonction f est affine.**
  - On a montré que $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$ qui n'est pas de la forme $(mx+p)$ donc f n'est pas affine.
  - On pouvait aussi vérifier que la propriété de proportionnalité des accroissements n'était pas vérifiée. On a facilement :

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = -3 \text{ et } \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = -1 \neq -3$$

  - La fonction f n'est pas une fonction affine. L'affirmation 3 est fausse.

3. Une formule a été saisie dans la cellule B2 puis recopiée ensuite vers la droite. Quelle formule a-t-on saisie dans cette cellule B2 ?

=(B1 - 1)*(2*B1 - 5) ou =2*B1*B1-7*B1+5

4. Quels sont les deux nombres x pour lesquels $(x-1)(2x-5) = 0$?
L'équation $(x-1)(2x-5) = 0$ est une équation produit nul. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul soit :

$$\begin{aligned}(x-1)(2x-5) = 0 &\iff (x-1=0) \quad \text{ou} \quad (2x-5=0)\\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Les deux nombres qui annulent $f(x)$ sont 1 et $\frac{5}{2}$.

Exercice 4 :

1. D'après la courbe, la hauteur est proportionnelle au temps.
La courbe représentative de la fonction n'est pas une droite qui passe par l'origine du repère, donc la hauteur n'est pas proportionnelle au temps

2. En développant et en réduisant l'expression de h on obtient $h(t) = -5t^2 - 19,85t - 4,995$

- **Par le calcul.**
  Pour tout t réel de l'intervalle d'étude on a par développement :

$$\begin{aligned}h(t) = (-5t-1,35)(t-3,7) &= -5t^2 + 5t\times 3,7 - 1,3t + 1,35\times 3,7\\ &= -5t^2 + 18,5t - 1,35t + 4,995\\ &= \underline{-5t^2 + 17,15t + 4,955}\end{aligned}$$

  L'affirmation 1 est donc fausse.

- **Par une lecture graphique (et calcul).**
  Une lecture graphique permettait aussi de répondre à la question, il suffisait de lire l'image de 0 par h, on avait alors juste une valeur approchée du résultat mais cela était suffisant :

$$h(0) \approx 5 > 0$$

  Or l'image de 0 par la fonction proposée donne une valeur négative, ce qui n'est pas possible.
  En effet pour $x = 0$ on a :

$$\begin{aligned}-5t^2 - 19,85t - 4,995 &= 5\times 0^2 - 19,85\times 0 - 4,995\\ &= -4,999 < 0\end{aligned}$$

3. Lorsqu'il quitte la rampe, Gaëtan est à 3,8 m de hauteur.
La hauteur de Gaëtan lorsqu'il quitte la rampe est donnée par $h(0)$, l'image de 0 par la fonction h.

- **Par le calcul.**
  Or on a facilement à l'aide de l'expression initiale de h

$$h(0) = (-5 \times 0 - 1,35)(0 - 3,7)$$
$$h(0) = -1,35 \times (-3,7)$$
$$h(0) = 4,955 \neq 3,8$$

  L'affirmation 2 est donc fausse.

  Remarque : On pouvait bien sûr utiliser la forme développée, cela était plus rapide mais dépendant du résultat du calcul précédent, il y a toujours un risque !

- **Par une lecture graphique.**
  Une lecture graphique permettait aussi de répondre à la question, il suffisait de lire l'image de 0 par h, on avait alors juste une valeur approchée du résultat mais cela était suffisant :

$$h(0) \approx 5 \neq 3,8$$

4. **Le saut de Gaëtan dure moins de 4 secondes.**
La durée du saut correspond à l'instant où la hauteur $h(t)$ vaut 0. Cela correspond à l'instant où la moto touche le sol donc à l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. C'est aussi à une solution positive de l'équation $h(t) = 0$.

- **Par une lecture graphique.**
  Sur le graphique, on peut lire une valeur approchée de l'abscisse du point B, point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses qui est une solution de l'équation $h(t) = 0$ ou aussi un antécédent de 0 par h. On obtient

$$x_B \approx 3,7$$

  La courbe coupe l'axe des abscisses avant 4, la moto touche le sol avant 4 secondes, donc le saut dure moins de 4 secondes. L'affirmation 3 est donc vraie.

- **Par le calcul, méthode 1.**
  On va chercher à résoudre l'équation $h(t) = 0$, pour t réel positif.

Théorème 1

Un produit de facteurs est nul, si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

$$h(t) = 0 \iff (-5t - 1,35)(t - 3,7) = 0$$

C'est une équation produit nul, donc par théorème :

$$h(t) = 0 \iff \left(-5t - 1,35 = 0\right) \text{ ou } \left(t - 3,7 = 0\right)$$
$$h(t) = 0 \iff \left(t = \frac{1,35}{-5} = -0,27\right) \text{ ou } \left(t = 3,7\right)$$

Les solutions de l'équation sont donc : $\boxed{-0,27 \text{ et } 3,7}$.

La seule solution possible cependant est la solution positive car t est une durée exprimée en secondes. La durée du saut est donc de 3,7 s, elle est bien inférieure à 4 s, l'affirmation 3 est bien correcte.

Par le calcul, méthode 2.
On pouvait aussi calculer l'image de 4 par la fonction h qui n'est en fait définie que pour t réel positif tel que $h(t) \geq 0$. On a :

$$h(4) = (-5 \times 4 - 1,35)(4 - 3,7) = -6,405 < 0$$

Puisque $h(4) < 0$, la durée du saut est bien inférieur à 4 secondes.

5. Le nombre 3,5 est un antécédent du nombre 3,77 par la fonction h.

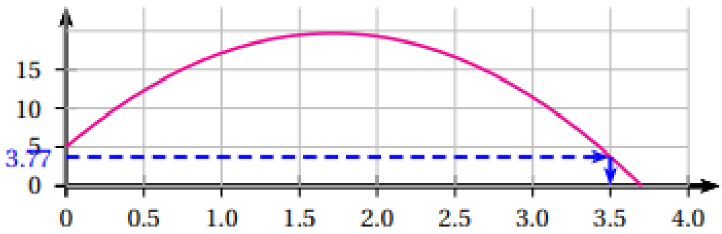
Affirmer que 3,5 est un antécédent du nombre 3,77 par la fonction h c'est dire que l'image de 3,5 par h est 3,77. On va donc déterminer cette image.

- **Par le calcul.**
  On calcul l'image de 3,5 par h pour vérifier si c'est bien 3,77.

$$h(3,5) = (-5 \times 3,5 - 1,35)(3,5 - 3,7)$$
$$h(3,5) = -18,83 \times (-0,2)$$
$$h(3,5) = \underline{3,77}$$

  L'image de 3,5 par h est bien $h(3,5) = 3,77$ donc 3,5 est un antécédent du nombre 3,77 par la fonction h. L'affirmation 4 est vraie.

- **Par une lecture graphique.**



  L'image de 3,5 par h est bien $h(3,5) = 3,77$ donc 3,5 est un antécédent du nombre 3,77 par la fonction h. L'affirmation 4 est vraie.

6. Gaetan a obtenu la hauteur maximale avant 1,5 seconde.

- **Par le calcul.**
  On peut par exemple calculer les images de 1,5 de 1,6 et 1,7 pour montrer que la hauteur maximale est obtenue après 1,5 seconde. La calculatrice donne :

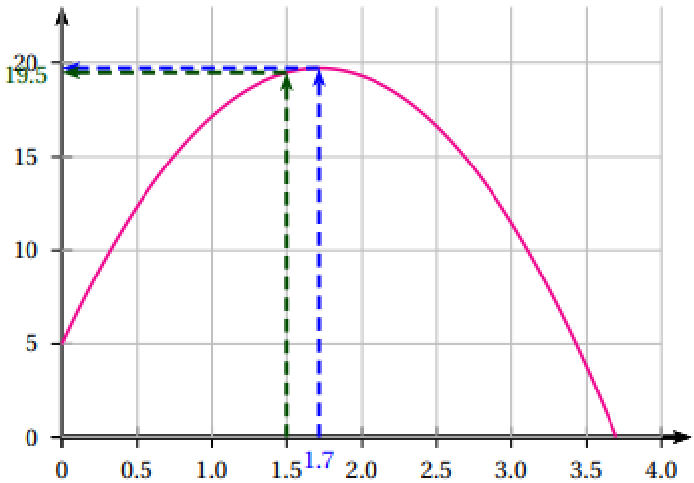
t	1,5	1,6	1,7
$h(t)$	$h(1,5) = 19,47$	$h(1,6) = 19,635$	$h(1,7) = 19,7$

  On a par exemple :

$$h(1,7) = 19,7 > h(1,5) = 19,47$$

  L'affirmation 5 est fausse.

- **Par une lecture graphique.**



  La hauteur maximale est visiblement obtenue après 1,5 seconde sur le graphique, à environ 1,7 seconde. L'image de 1,5 est clairement inférieure à l'image de 1,7
  L'affirmation 5 est fausse.

Exercice 5 :
1/ Si l'on regarde la remise du 3ème article, on passe de 25 euros à 12,5 euros soit la moitié : il s'agit d'une remise de 50%.
Ce n'est pas le cas pour le premier article (sinon le prix final serait de 60 euros maximum), ni du second où la remise est de 30%. C'est donc le 3ème article qui propose le plus grand pourcentage de réduction.

2/ Non car la remise du 3ème article est de 12,50 euros pour 50% de promotion. Or, le premier article bénéficie d'une remise de 15 euros (120 euros – 105 euros) pour un pourcentage de réduction bien inférieur à 50%.