Chapitre 3 : Exercices de synthèse

Remarque : Les exercices suivants sont tirés des annales du DNB.

Exercice 1 : Demandez le programme

Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre
- Multiplier ce nombre par 4
- Ajouter 8
- Multiplier le résultat par 2

1 Vérifier que si on choisit le nombre -1, ce programme donne 8 comme résultat final.

2 Le programme donne 30 comme résultat final, quel est le nombre choisi au départ ?

Dans la suite de l'exercice, on nomme x le nombre choisi au départ.

3 L'expression $A = 2(4x + 8)$ donne le résultat du programme de calcul précédent pour un nombre x donné. On pose $B = (4 + x)^2 - x^2$.

Prouver que les expressions A et B sont égales pour toutes les valeurs de x.

Exercice 2 : Programme de calcul

On considère le programme de calcul ci-dessous :

- Choisir un nombre.
- Ajouter 5.
- Multiplier le résultat obtenu par 2.
- Soustraire 9.

Affirmation : ce programme donne pour résultat la somme de 1 et du double du nombre choisi.

L'affirmation est-elle vraie ? **Justifier**.

<u>Exercice 3</u> : Développer et factoriser

On considère l'expression $E = (x-2)(2x+3) - 3(x-2)$.

1 Développer E.

2 Factoriser E et vérifier que $E = 2F$, où $F = x(x-2)$.

<u>Exercice 4</u> : Développer et factoriser

On donne l'expression $E = (3x+8)^2 - 64$.

a. Développer E.

b. Montrer que E peut s'écrire sous forme factorisée : $3x(3x+16)$.

<u>Exercice 5</u> : Programme de calcul

Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre entier positif.
- Ajouter 1.
- Calculer le carré du résultat obtenu.
- Enlever le carré du nombre de départ.

1 On applique ce programme de calcul au nombre 3.
Montrer qu'on obtient 7.

2 Voici deux affirmations :
Affirmation n° 1 : « Le chiffre des unités du résultat obtenu est 7. »
Affirmation n° 2 : « Chaque résultat peut s'obtenir en ajoutant le nombre entier de départ et le nombre entier qui le suit. »

a. Vérifier que ces deux affirmations sont vraies pour les nombres 8 et 13.

b. Pour chacune de ces deux affirmations, expliquer si elle est vraie ou fausse quel que soit le nombre choisi au départ.

Corrigé des exercices

***Rappel** : le caractère « * » est la multiplication.*

***Exercice 1** :*
1/ -1 -> « multiplier par 4 » -> -4 -> « ajouter 8 » -> 4 -> « multiplier le résultat par 2 » -> 8. On obtient bien le résultat attendu.
2/ On « remonte le programme » en inversant les opérations :
30 -> « diviser par 2 »-> 15 -> « soustraire 8 »-> 7 -> « diviser par 4 » -> 7/4. Il faut choisir 7/4 comme nombre de départ.
3/ On développe les deux expressions (c'est toujours plus simple que de factoriser !)

$A = 2(4x + 8)$	$B = (4 + x)^2 - x^2$
$A = 8x + 16$	$B = 4^2 + 2*4*x + x^2 - x^2$
	$B = 8x + 16$

Pour tout « x », on a bien A = B.
***Remarque** : il faut comparer dans le cas général et ne pas se contenter d'exemples.*

***Exercice 2** :*
Dans le cas général : x -> « ajouter 5 »-> x + 5 -> « multiplier par 2 » -> 2(x + 5) -> « soustraire 9 » -> 2(x + 5) – 9.
En développant : $2(x + 5) - 9 = 2x + 10 - 9 = 2x + 1$.
Il s'agit bien de la somme de 1 et du double du nombre de départ : l'affirmation est vraie.

***Exercice 3** :*
1/ On développe E :
$E = (x - 2)(2x + 3) - 3(x - 2)$
$E = x*2x + x*3 - 2*2x - 2*3 - 3*x - 3*(-2)$
$E = 2x^2 + 3x - 4x - 6 - 3x + 6$
$E = 2x^2 - 4x$

2/ Factorisons E :
« 2x » est le facteur commun, on a alors :
$E = 2x*x - 2x*2$ ***// Faire apparaître tout ce qui est commun est utile.***
$E = 2x*[x - 2]$
$E = 2x(x - 2)$

Comme $F = x(x - 2)$ on a bien $E = 2F$.

Exercice 4 **:**

1/a) Développons E :

E = $(3x + 8)^2 - 64$

E = $(3x)^2 + 2*3x*8 + 64 – 64$

E = $9x^2 + 48x$.

b) Factorisons E.

En partant de l'expression développée, on a :

E = $9x^2 + 48x$

« 3x » est le facteur commun.

E = $3x*3x + 3x*16$ // Faire apparaître tout ce qui est commun est utile.

E = $3x*[3x + 16]$

E = $3x(3x + 16)$

Remarques importantes ***: deux autres méthodes sont possibles.***

Méthode 1 ***: Partir de l'expression de départ de E et appliquer l'identité remarquable $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$. On trouve :***

E = $(3x + 8)^2 - 64$

E = $(3x + 8)^2 - 8^2$ // $a = (3x + 8)$ et $b = 8$

E = $[(3x + 8) + 8][(3x + 8) – 8]$

E = $(3x + 16)(3x)$

E = $3x(3x + 16)$

Méthode 2 ***: l'énoncé ne demande pas expressément de factoriser E ! On pouvait donc simplement développer $3x(3x + 16)$ et constater l'égalité grâce au 1/a).***

En développant :

$3x(3x + 16) = 3x*3x + 3x*16$

$3x(3x + 16) = 9x^2 + 48x$

On retrouve bien le résultat de la question précédente.

Exercice 5 **:**

1/ 3 -> « ajouter 1 » -> 4 -> « élever au carré » -> $4^2 = 16$ -> « enlever le carré du nombre de départ » -> $16 – 3^2 = 7$. On obtient bien le résultat attendu.

2/ a) En partant de 8 : 8 -> « ajouter 1 » -> 9 -> « élever au carré » -> $9^2 = 81$ -> « enlever le carré du nombre de départ » -> $81 – 8^2 = 17$.

17 se termine bien par un 7 et 8 + 9 = 17 : les deux affirmations sont vraies.

En partant de 13 : 13 -> « ajouter 1 » -> 14 -> « élever au carré » -> $14^2 = 196$ -> « enlever le carré du nombre de départ » -> $196 – 13^2 = 27$.

27 se termine bien par un 7 et 13 + 14 = 27 : les deux affirmations sont vraies.

2/ b) On choisi 0 comme nombre de départ : 0 -> « ajouter 1 » -> 1 -> « élever au carré » -> $1^2 = 1$ -> « enlever le carré du nombre de départ » -> $1 - 0^2 = 1$.
L'affirmation 1 est fausse.

***Remarque** : UN contre-exemple suffit pour qu'une affirmation soit fausse.*

Dans le cas général, on part de x :
x -> « ajouter 1 » -> x + 1 -> « élever au carré » -> $(x + 1)^2$ -> « enlever le carré du nombre de départ » -> $(x + 1)^2 - x^2$.
En développant $(x + 1)^2 - x^2$:
$(x + 1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2$
$(x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$

Si « x » est le nombre entier de départ, alors le suivant est « x + 1 ». En additionnant x et x + 1, on obtient 2x + 1.
L'affirmation 2 est bien vraie.