<u>Partie</u> : Numérique / <u>*Chap.1*</u> *: Equations*

Une équation est un outil mathématique permettant de **modéliser** une problématique et d'y apporter une (ou plusieurs) réponse(s) adéquates. Il ne faut bien sûr pas oublier **de tester les solutions trouvées** pour être certain qu'elles répondent favorablement à la problématique posée.

<u>Exemple</u> : on souhaite calculer la longueur de l'hypoténuse BC du triangle ABC rectangle en A tel que AB = 3 cm et AC = 4 cm.
Dans le triangle ABC rectangle en A, on a, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
<=> $BC^2 = 3^2 + 4^2$
<=> $BC^2 = 25$.
<=> BC = 5 <u>OU</u> BC = -5 (en effet, (-5)x(-5) = 25).
Il est bien évident que BC ne peut valoir -5 puisqu'il s'agit d'une distance (toujours positive). On garde alors seulement BC = 5 comme solution.

On peut par exemple, au quotidien, comparer efficacement différents abonnements (cinéma, transports , téléphonie etc.) en fonction de l'utilisation que l'on souhaite en faire (peu fréquente, fréquente etc.).

<u>Exercice 1</u> : une société de vente en ligne de parfums propose deux formules à ses clients :
<u>*Formule A*</u> : une majoration de 2% de la facture pour frais d'envoi (conseillé pour des petits achats).
<u>*Formule B*</u> : 5 euros en plus de la facture pour frais d'envoi (conseillé pour des achats plus importants).

A partir de quel montant de la commande vaut-il mieux choisir la formule ?

<u>I/ Equations du premier degré à une inconnue</u>

<u>1/ Rappels</u>

<u>**Définitions**</u> :

- une équation du premier degré à une inconnue est une égalité dans laquelle il n'y a qu'un type de variable de degré un.
- **Résoudre** une équation, c'est trouver la (ou les) solution(s) vérifiant l'égalité.
- Deux équations sont identiques si elles admettent les mêmes solutions.

<u>Exemples</u> :

- $3x + 8 = 6(x – 7)$ est une équation du premier degré à une iconnue
- $4x – 8 = y + 7$ n'est pas une équation à une inconnue (à cause du « y »)
- $x^2 + 7 = 15x + 2$ n'est pas une équation du premier degré (à cause du « x »)
- $4x(1 + x) = 2x – 8$ n'est pas une équation du premier degré (à cause du membre de gauche si on le développe).

<u>Méthode de résolution</u> : en considérant une équation d'inconnue y, il suffit de se ramener à une égalité du type **a x y = b** où a et b sont deux nombres quelconques (a **non nul**) en développant certains facteurs si besoin et en appliquant les propriétés de la balance.

On a ensuite :

a x y = b
(*) <=> $\frac{a \times y}{a} = \frac{b}{a}$.
(*) <=> y = $\frac{b}{a}$

$\frac{b}{a}$ est la solution de l'équation a x y = b.

<u>Remarque</u> : l'utilisation de l'équivalence (*) garantit **l'unicité** de la solution dans le cas général (a non nul).

<u>Très important</u> : on ne peut multiplier ou diviser une égalité que par un nombre non nul, pas par une inconnue !

<u>Démonstration</u> (par un contre-exemple)
On considère l'équation suivante $y^2 + y + 1 = 0$ (1)
<=> $y^2 + y = -1$ (1bis)

On multiplie (1) par y, on obtient : $y^3 + y^2 + y = 0$ (2)
Or $y^2 + y = -1$ d'après (1bis), (2) devient alors $y^3 – 1 = 0$ <=> $y^3 = 1$ (2)

En testant la valeur 1 dans (2), on constate bien que $1^3 = 1$ donc 1 est une solution de (2).
Sauf que dans (1) , on a $1^2 + 1 + 1 = 3$ et non 0. Il y a contradiction puisque deux équations sont identiques si elles admettent les mêmes solutions. (1) et (2) ne sont donc pas les mêmes équations.

<u>2/ Cas particuliers</u>

On considère l'équation a x y = b avec a et b deux nombres quelconques. Le cas général avec a non nul a été étudié précédemment, il y a alors 2 cas particuliers :

<u>On suppose a = 0 et b non nul</u>

On a alors :
a x y = b
<=> 0 x y = b
<=> 0 = b

Or b est différent de 0, l'égalité n'est jamais vérifiée.
Il n'y a donc pas de solution.

<u>On suppose a = 0 et b = 0</u>

On a alors :
a x y = b
<=> 0 x y = 0
<=> 0 = 0

Or b vaut 0, l'égalité est toujours vérifiée.
Il y a donc une infinité de solutions.

<u>Remarques</u> :
- si a vaut zéro, alors on dit que l'équation <u>ne dépend pas</u> de l'inconnue y.
- en pratique, les cas particuliers sont très peu fréquents. En effet, ils correspondent à des problématiques sans solution (!) ou avec une infinité de solutions (il n'y a donc pas lieu de la poser puisque toute valeur fonctionne !).

Exercice 2 :
Résoudre les équations suivantes d'inconnue y.

a) 3y + 6 = -5
b) 4y + 7 = 2y + 7
c) 4y + 7 = 9y – 8
d) 3(y – 8) = 4y + 10
e) $\frac{4}{7}y + 4 = 5(\frac{y}{7} - 1)$
f) $\frac{2}{3}\left(\frac{-2}{4}y - 2\right) + 1 = -3(\frac{y}{5} + \frac{7}{2})$

Faire l'activité 3

3/ Aller plus loin avec les équations du premier degré

On considère ici des équations du premier degré à une inconnue y.

La difficulté de la résolution des équations du premier degré est de se ramener à la forme a x y = b (avec a et b des nombres quelconques et a non nul).
On est souvent amené à développer certaines expressions, à utiliser des fractions.

Proposition : on considère a(y) et c(y) deux expressions littérales (avec y ici) et b et d deux nombres non nuls. On alors la relation suivante $\frac{a(y)}{b} = \frac{c(y)}{d}$ <=> a(y) x d = b(y) x c

Démonstration
On a $\frac{a(y)}{b} = \frac{c(y)}{d}$
<=> $\frac{a(y)\times bd}{b} = \frac{c(y)\times bd}{d}$ (on multiplie l'égalité par bd grâce à la propriété de la balance puisque b et d sont non nuls.)
<=> a(y) x d = b(y) x c (en simplifiant les fractions obtenues par respectivement b et d.)

Remarque : Cette proposition est connue sous le nom de « l'égalité des produits en croix »

Au lieu de se ramener à une équation a x y = b, on peut alors se ramener à une équation $\frac{a(y)}{b} = \frac{c(y)}{d}$ dans un cadre plus général.

Exemple : **Résoudre** l'équation d'inconnue y suivante

$$\frac{3y}{4} + 1 = \frac{4y}{3} + \frac{1}{2}$$

Ramenons-nous à une égalité du type $\frac{a(y)}{b} = \frac{c(y)}{d}$
<=> $\frac{3y}{4} + \frac{4}{4} = \frac{4y\times 2}{3\times 2} + \frac{1\times 3}{2\times 3}$
<=> $\frac{3y+4}{4} = \frac{8y+3}{6}$
<=> 6(3y + 4) = 4(8y + 3)
<=> 18y + 24 = 32y + 12
<=> 18y – 32y = 12 – 24
<=> -14y = -12
<=> y = $\frac{-12}{-14}$
<=> y = $\frac{6}{7}$
$\frac{6}{7}$ est la solution de l'équation.

Exercice 3 :
Résoudre les équations suivantes d'inconnue y.

a) $\frac{2y}{5} + 3 = \frac{7y}{3} + \frac{2}{5}$
b) $\frac{2y+4}{3} - 2 = \frac{4y+4}{5} + \frac{3}{10}$
c) $-\frac{-3y+1}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{3y-1}{4} + \frac{y}{7}$

II/ Equations du second degré à une inconnue

1/ Rappels sur les équations produit nul

On ne considèrera ici que les équations produit nul à deux facteurs.

Définition : une **équation produit nul** d'inconnue y est une équation de la forme (ay + b) x (cy + d) = 0 où a,b,c et d sont des nombres quelconques (avec a,c non nuls sinon il s'agit d'une équation de degré 1).

Remarque : il s'agit d'une équation du second degré car si on développe (ay + b) x (cy + d) on voit que le terme de plus haut degré est en y^2.

Proposition : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul.

Démonstration : soient A(y) et B(y) deux facteurs fonction de y.

On considère l'équation A(y) x B(y) = 0

Supposons A(y) non nul.	Supposons B(y) non nul.
On a alors B(y) = 0/A(y) soit B(y) = 0	On a alors A(y) = 0/B(y) soit A(y) = 0

On a bien démontré que si A(y) x B(y) = 0 alors A(y) = 0 ou B(y) = 0.

Supposons A(y) = 0. On a évidemment A(y) x B(y) = 0.
Supposons B(y) = 0. On a évidemment A(y) x B(y) = 0.
Remarque : on dit que zéro est un **élément absorbant** pour la multiplication.

On a bien démontré que A(y) = 0 ou B(y) = 0 alors A(y) x B(y) = 0.

La proposition est bien démontrée.

2/ Résolution d'équations du second degré se ramenant à une équation produit nul

Important : **pour résoudre une équation du second degré, il faut absolument se ramener à une égalité de la forme (ay + b)x(cy + d)= 0.**

- La dernière opération à effectuer dans le premier membre doit être un **produit** (d'où l'appelation équation produit).
- Le second membre doit être **nul** (d'où l'appelation équation produit nul).

La **factorisation** permet d'obtenir une équation produit nul.

<u>Rappel</u> : pour factoriser, on peut utiliser le facteur commun ou une identité remarquable (la troisième en particulier).

<u>Exemple 1</u> : factorisation par facteur commun.

Résoudre l'équation $9y^2 = y(1 + y)$
$9y^2 = y(1 + y)$ n'est pas une équation produit nul car le premier membre n'est pas un produit et le second membre n'est pas nul.

<=> $9y^2 - y(1 + y) = 0$ (Le second membre est désormais nul.)
<=> 9**y x** y – **y x** (1 + y) = 0 (On a « **yx** » en commun.)
<=> **y x** [9y – (1 + y)] = 0
<=> $y(9y - 1 - y) = 0$
<=> $y(8y - 1) = 0$ (Il s'agit bien d'une équation de la forme (ay + b) x (cy + d) = 0.)

On applique la règle des produits nuls.
On a $y = 0$ ou $8y - 1 = 0$
<=> $8y = 1$
<=> $y = 1/8$
0 et 1/8 sont les solutions de l'équation.

<u>Exemple 2</u> : factorisation par identité remarquable.
<u>Rappel</u> : $\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

Résoudre l'équation $4y^2 = (1 + y)^2$
$4y^2 = (1 + y)^2$ n'est pas une équation produit nul car le premier membre n'est pas un produit et le second membre n'est pas nul.

<=> $4y^2 - (1 + y)^2 = 0$ (On reconnaît $a^2 - b^2$ avec $a = (2y)$ et $b = (1 + y)$)
<=> $(2y)^2 - (1 + y)^2 = 0$
<=> $[2y + (1 + y)][2y - (1 + y)] = 0$
<=> $[3y + 1][2y - 1 - y] = 0$
<=> $(3y + 1)(y - 1) = 0$ (Il s'agit bien d'une équation de la forme (ay + b) x (cy + d) = 0.)

On applique la règle des produits nuls.
On a $3y + 1 = 0$ ou $y - 1 = 0$
<=> $3y = -1$ <=> $y = 1$
<=> $y = -1/3$
-1/3 et 1 sont les solutions de l'équation.

<u>Exercice 4</u> :
Résoudre les équations suivantes d'inconnues y.
a) $(1 - 5y)(3y - 1) = 0$
b) $8y(1 + 5y) - 5(1 + 5y)(2 - y) = 0$
c) $(4y - 3)^2 - 81 = 0$

3/ Résolution d'équations du second degré du type $ay^2 = b$

Définition : la **racine carrée** d'un nombre **positif** a est le nombre noté $\sqrt{a}$ tel que $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

Exemples :
$\sqrt{81} = 9$ car $9 \times 9 = 81$ $\sqrt{16} = 4$ car $4 \times 4 = 16$ $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$ $\sqrt{3/2} \times \sqrt{3/2} = 3/2$

Proposition : On considère a non nul.
Si b/a est positif, les solutions de l'équation $ay^2 = b$ sont $\sqrt{b/a}$ et $-\sqrt{b/a}$.
Si b/a est négatif, l'équation n'a pas de solution.

Démonstration :

Cas où b/a est positif

Soit l'équation $ay^2 = b$
On a $ay^2 = b$
$\Leftrightarrow y^2 = b/a$ (Car a est non nul)
$\Leftrightarrow y^2 - (\sqrt{b/a})^2 = 0$ (On reconnaît $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$)
$\Leftrightarrow (y + \sqrt{b/a})(y - \sqrt{b/a}) = 0$ (C'est une équation produit nul)

On applique la règle des produits nuls.
On a $y + \sqrt{b/a} = 0$ ou $y - \sqrt{b/a} = 0$
$\Leftrightarrow y = -\sqrt{b/a}$ $\Leftrightarrow y = \sqrt{b/a}$

$-\sqrt{b/a}$ et $\sqrt{b/a}$ sont bien les solutions de l'équation.

Cas où b/a est négatif

On a $ay^2 = b$
$\Leftrightarrow y^2 = b/a$.
Un carré étant toujours positif, l'équation n'a pas de solution.

Exemple :
Résoudre l'équation d'inconnue y suivante : $7y^2 = 2$.

$7y^2 = 2$
$\Leftrightarrow y^2 = 2/7$ (2/7 est bien positif)

$-\sqrt{2/7}$ et $\sqrt{2/7}$ sont les solutions de l'équation.

Exercice 5 :
Résoudre les équations suivantes :
a) $y^2 = 0$
b) $4y^2 = 16$
c) $2y^2 - 3 = 0$
d) $y^2 + 1 = 0$
e) (*) $(4y + 7)^2 - 3 = 0$

Faire l'activité 4

<u>4/ Aller plus loin dans la résolution d'équations du second degré à une inconnue</u>

On en restera sur des exemples sans aborder le cas général qui sera étudié en $1^{ère}$.

<u>Définition</u> : une équation du second degré d'inconnue y est une équation de la forme $ay^2 + by + c = 0$ où a,b et c sont des nombres (avec a non nul sinon on se ramène à une équation du premier degré).
En divisant par a (**non nul**) on se ramène à une équation du type $y^2 + dy + e = 0$ où d et e sont des nombres quelconques.

<u>Remarque</u> : ce type d'équation peut admettre aucune, une ou deux solutions.
On ne rentrera pas dans les détails mais on verra des cas particuliers.

<u>Prérequis</u> : les identités remarquables pour la factorisation
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

<u>Exemple 1</u>
Factoriser l'expression $4y^2 + 4y + 1$

$4y^2 + 4y + 1$
Il semble que cette expression corresponde à la première identité remarquable avec $a^2 = 4y^2$; $b^2 = 1$ et $2ab = 4y$.
$a^2 = 4y^2 \Rightarrow a = 2y$ (car $2y \times 2y = 4y^2$)
$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$ (car $1 \times 1 = 1$)

On vérifie le double produit :
$2ab = 2 \times 2y \times 1 = 4y$. C'est bien le résultat attendu.

On a alors l'égalité $4y^2 + 4y + 1 = (2y + 1)^2$.

<u>Exemple 2</u>
Factoriser l'expression $y^2 - 4y + 4$

$y^2 - 4y + 4$
Il semble que cette expression corresponde à la seconde identité remarquable avec $a^2 = y^2$; $b^2 = 4$ et $2ab = 4y$.
$a^2 = y^2 \Rightarrow a = y$ (car $y \times y = y^2$)
$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$ (car $2 \times 2 = 4$)

On vérifie le double produit :
$2ab = 2 \times y \times 2 = 4y$. C'est bien le résultat attendu.

On a alors l'égalité $y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2$.

<u>Exercice 5</u> :
Factoriser les expressions suivantes :
a) $9y^2 - 12y + 4$
b) $4y^2 + 25 + 20y$
c) (*) $16y^2 + 8\sqrt{2}y + 2$

<u>Remarque</u> : la factorisation par cette méthode ne fonctionne que si le double produit est vérifié !

Comment faire lorsque ce n'est pas le cas ?

Exemple
Factoriser l'expression $y^2 - 4y + 3$

$y^2 - 4y + 3$
Il semble que cette expression corresponde à la seconde identité remarquable avec $a^2 = y^2$; $b^2 = 3$ et $2ab = -4y$.
$a^2 = y^2 \Rightarrow a = y$ (car $y \times y = y^2$)
$b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$ (car $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$)

On vérifie le double produit :
$2ab = 2 \times y \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \times y$
Ce n'est pas le résultat attendu ... et pourtant cette expression est bien factorisable.

Méthode
Dans $y^2 - 4y + 3$, on repère $y^2 - 4y$ qui est le **début de la seconde identité remarquable** avec $a^2 = y^2$ et $2ab = -4y$
$a^2 = y^2 \Rightarrow a = y$
$2ab = -4y \Leftrightarrow b = -4y/(2a) \Leftrightarrow b = -4y/(2y) \Leftrightarrow b = -2$
On en déduit que $b^2 = 4$.

On peut écrire que $y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2 \Leftrightarrow y^2 - 4y = (y-2)^2 - 4$
On a donc $y^2 - 4y + 3 = (y-2)^2 - 4 + 3$
$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = (y-2)^2 - 1$ (On reconnaît la troisième identité remarquable avec $a^2 = (y-2)^2$ et $b^2 = 1^2$)

Il vient :
$(y-2)^2 - 1 = [(y-2) + 1][(y-2) - 1]$
$\Leftrightarrow (y-2)^2 - 1 = (y-1)(y-3)$

On obtient alors $\mathbf{y^2 - 4y + 3 = (y-1)(y-3)}$ qui est bien la forme factorisée demandée.

En résumé : pour résoudre une équation du type $y^2 + ay + b = 0$, il faut :
- reconnaître le début de la première (ou seconde) identité remarquable,
- reconnaître la troisième identité remarquable et factoriser pour obtenir une équation produit nul,
- appliquer la règle des produits nuls et trouver les solutions.

Exercice 6 : Peut-on ramener sous forme d'équation produit nul de la forme $(ay + b)(cy + d) = 0$ toute expression du second degré avec a,b,c et d des nombres quelconques ?
Le cas échéant, donner un contre-exemple.

Exercice 7 : **Résoudre** les équations du second degré suivantes :
a) $y^2 + y - 20 = 0$
b) $2y^2 - 14y + 24 = 0$
c) $y^2 + 2y + 2 = 0$

Remarque : en classe de première, vous apprendrez une méthode pour résoudre directement ce type d'équation.