Chapitre 4 : Arithmétique

Plan du chapitre

I. **Division euclidienne**
   1. **Définition**
   2. **Multiples et diviseurs**
   3. **Critères de divisibilité**

II. **Nombres premiers**
   1. **Définition**
   2. **Décomposition en facteurs premiers**
   3. **Fraction irréductible**

I/ Division euclidienne

1/ Définition

Soient a et b deux nombres **entiers positifs** avec **b non nul.**

Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est trouver **le couple unique** d'entiers positifs q et r vérifiant $\mathbf{a = b \times q + r}$ avec $\mathbf{r < b}$.

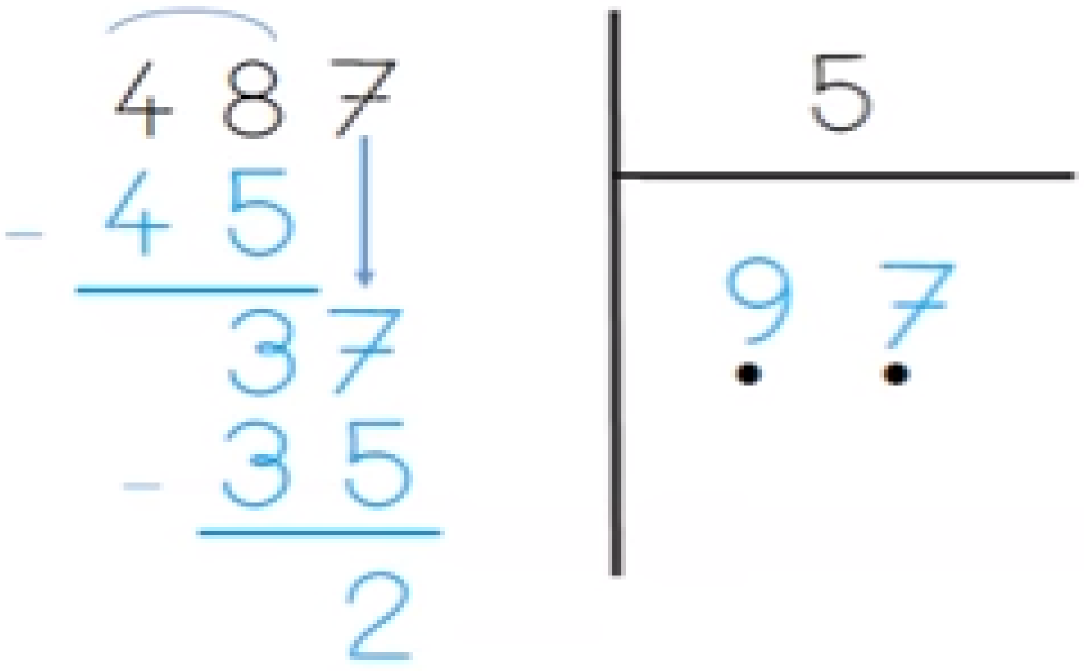
Rappels *:*

a : dividende b : diviseur q : quotient r = reste

<u>Exemple</u> :

Prenons a = 487 et b = 5

On pose la division euclidienne pour trouver q et r.



Donc **487 = 5 x 97 + 2** avec **2 < 5**

2/ Multiples et diviseurs

Définitions : soient a et b deux nombres entiers positifs avec b non nul.

Si r = 0, alors l'égalité précédente devient a = b x q.

On peut alors dire que :

- a est un **multiple** de b.
- b est un **diviseur** de a.
- b **divise** a.

<u>Exemple</u> :

On choisit a = 160 et b = 8.

On a 160 = 8 x 20 + 0

Ainsi, 160 est un multiple de 8 et 8 est un diviseur de 160

3/ Critères de divisibilité

Propriétés

- Un nombre entier est **divisible** par **2** **si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8. Dans ce cas, le nombre est pair.**
- Un nombre entier est **divisible** par **3** **si la somme de ses chiffres un multiple de 3.**
- Un nombre entier est **divisible** par **4** **si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4.**
- Un nombre entier est **divisible** par **5** **si son chiffre des unités est 0 ou 5.**
- Un nombre entier est **divisible** par **9** **si la somme de ses chiffres un multiple de 9.**

Exemple :

315 n’est pas divisible par 2 car il ne se termine pas par 0,2,4,6 ou 8 (nombre impair).

315 n’est pas divisible par 4 car le nombre formé par ses deux derniers chiffres (15) n’est pas divisible par 4.

315 est divisible par 3 car 3 + 1 + 5 = 9 et 9 est divisible par 3.

315 est divisible par 5 car il se termine par 5.

315 est divisible par 9 car 3 + 1 + 5 = 9 et 9 est divisible par 9.

II/ Nombres premiers

1/ Définition

Un nombre est **premier** s'il possède **exactement deux diviseurs distincts** : **1** et **lui-même**.

Exemples :

- 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 sont les nombres premiers inférieurs à 20.
- 45 est divisible par 1 et 45 mais aussi par 5 : ce n'est pas un nombre premier.

***Remarque* : 1 n'est pas un nombre premier car il n'admet pas deux diviseurs distincts.**

2/ Décomposition en facteurs premiers

Propriété : Tout nombre entier n supérieur à 1 peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers. Cette écriture est **unique**, à l'ordre près des facteurs.

Exemple :

$504 = 8 \times 63 = 2 \times 2 \times 2 \times 9 \times 7 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

3/ Fraction irréductible

Définition : une **fraction** est **irréductible** si on ne peut plus la simplifier.

***Remarque* : pour simplifier une fraction, on décompose son numérateur et dénominateur en produits de facteurs premiers et on simplifie.**

Exemple :

Simplifier au maximum la fraction suivante : $\frac{65}{250}$.

65 = 5 x 13

250 = 2 x 5 x 5 x 5

$$\frac{65}{250} = \frac{\cancel{5} \text{ x } 13}{2 \text{ x } \cancel{5} \text{ x } 5 \text{ x } 5} = \frac{13}{50}$$

$\frac{13}{50}$ est bien une fraction irréductible.