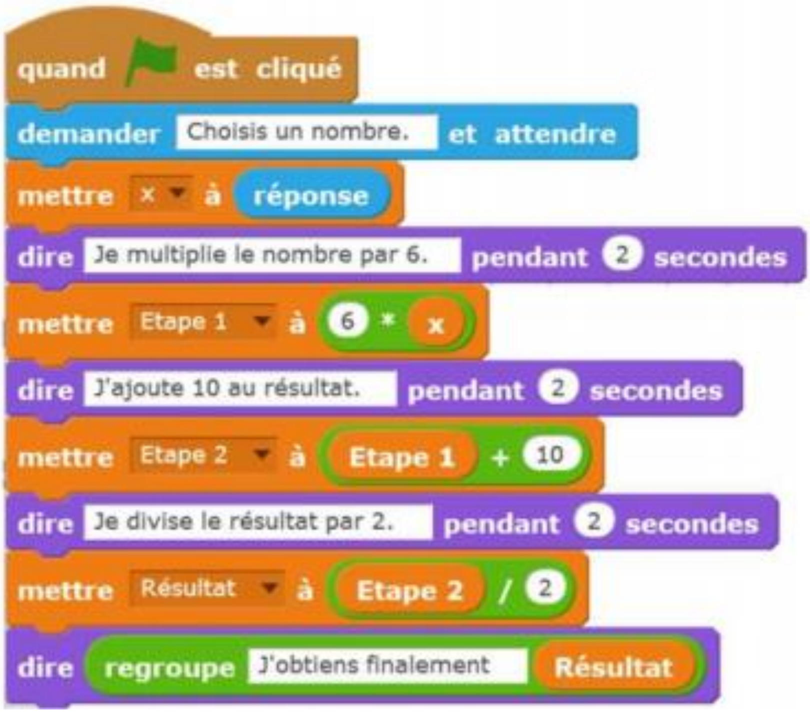
Chapitre 6 : Synthèse

Exercice 1 : Programme de calcul

On considère le programme de calcul ci-contre dans lequel x, Étape 1, Étape 2 et Résultat sont quatre variables.



1.

1. a. Julie a fait fonctionner ce programme en choisissant le nombre 5. Vérifier que ce qui est dit à la fin est : « J'obtiens finalement 20 ».

1. b. Que dit le programme si Julie le fait fonctionner en choisissant au départ le nombre 7 ?

2. Julie fait fonctionner le programme, et ce qui est dit à la fin est : « J'obtiens finalement 8 ». Quel nombre Julie a-t-elle choisi au départ ?

3. Si l'on appelle x le nombre choisi au départ, écrire en fonction de x l' expression obtenue à la fin du programme, puis réduire cette expression autant que possible.

4. Maxime utilise le programme de calcul ci-dessous :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 2
- Multiplier le résultat par 5

Peut-on choisir un nombre pour lequel le résultat obtenu par Maxime est le même que celui obtenu par Julie ?

Exercice 2 **:**

Dire en justifiant, si cette affirmation est vraie ou fausse.

Affirmation 1

La solution de l'équation $4x-5=x+1$ est une solution de l'équation $x^2-2x=0$.

Exercice 3 **:**

On considère l'expression :

$$C(x)=(x+1)(2-x)-2(x+1)(2x+3)$$

1. Montrer à l'aide d'un développement que $C(x)=-5x^2-9x-4$.

2. Montrer à l'aide d'une factorisation que $C(x)=(x+1)(-5x-4)$.

3. Calculer $C(x)$ en remplaçant x par (-1).

4. Résoudre l'équation $C(x)=0$.

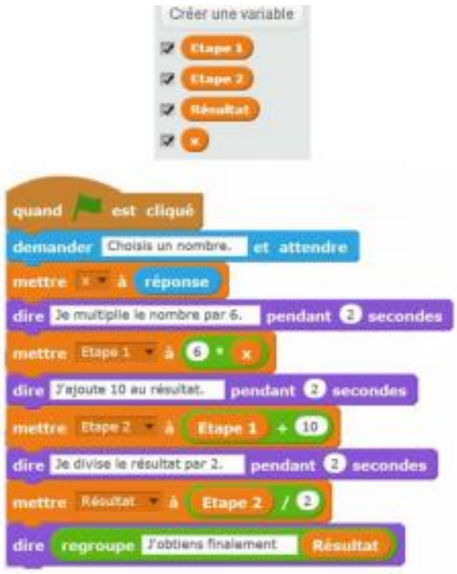
***Exercice 1* :**

1.

1. a. Julie a fait fonctionner ce programme en choisissant le nombre 5. Vérifier que ce qui est dit à la fin est : « J'obtiens finalement 20 ».

Pour $\underline{x=5}$:

- étape 1 : $6 \times 5 = 30$
- étape 2 : $30 + 10 = 40$
- résultat : $40 \div 2 = 20$
- dire « J'obtiens finalement 20 ».



1. b. Que dit le programme en choisissant au départ 7 ?

Pour $\underline{x=7}$:

- étape 1 : $6 \times 7 = 42$
- étape 2 : $42 + 10 = 52$
- résultat $= 52 \div 2 = 26$
- dire « J'obtiens finalement 26 ».

2. Julie fait fonctionner le programme, et ce qui est dit est : « J'obtiens finalement 8 ». Quel nombre a-t-elle choisi ?

Pour retrouver le nombre du départ on peut « remonter » l'algorithme, d'où

- dire « J'obtiens finalement 8 ».
- résultat $= 8 \Longrightarrow 8 \times 2 = 16$
- étape 2 : $16 - 10 = 6$
- étape 1 : $6 \div 6 = 1$
- le nombre de départ est 1.

3. Si l'on appelle x le nombre choisi au départ, écrire en fonction de x l' expression obtenue à la fin du programme, puis réduire cette expression autant que possible.

Pour x au départ :

- étape 1 : $6 \times x = 6x$
- étape 2 : $6x + 10$
- résultat : $(6x+10) : 2 = \underline{3x+5}$

4. Maxime utilise le programme de calcul ci-dessous :

• Choisir un nombre.
• Lui ajouter 2
• Multiplier le résultat par 5

Peut-on choisir un nombre pour lequel le résultat obtenu par Maxime est le même que celui obtenu par Julie ?

- Le programme de Maxime donne, en choisissant x comme nombre de départ :
  Pour x au départ :
  - étape 1 : $x+2$
  - étape 2 : $5 \times (x+2) = \underline{5x+10}$
- On cherche donc x pour que les deux programmes donnent le même résultat. Cela revient à résoudre l'équation :

$$5x + 10 = 3x + 5 \Longleftrightarrow 2x = -5$$
$$\Longleftrightarrow x = -\frac{5}{2} = \underline{-2{,}5}$$

<u>Exercice 2</u> :
On résout $4x - 1 = x + 5 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$.
On teste $x = 2$ comme solution éventuelle dans l'équation (E) : $x^2 - 2x = 0$.
On a alors : $2^2 - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$. 2 est bien une solution de l'équation (E).

Remarque : on peut aussi résoudre l'équation $x^2 - 2x = 0$
On a alors, en factorisant, $x^2 - 2x = x(x - 2) = 0$.
On applique la règle des produits nuls :
On a $x = 0$ OU $x - 2 = 0$ soit $x = 2$.
0 et 2 sont les solutions de l'équation.

L'affirmation est donc vraie.

<u>Exercice 3</u> :

On considère l'expression :

$$C(x) = (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3)$$

1 A l'aide d'un développement :

$$\begin{aligned} C(x) &= (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3) \\ &= 2x - x^2 + 2 - x - 2(2x^2 + 3x + 2x + 3) \\ &= -x^2 + x + 2 - 4x^2 - 6x - 4x - 6 \\ C(x) &= \underline{-5x^2 - 9x - 4} \end{aligned}$$

2. A l'aide d'une factorisation :

$$\begin{aligned} C(x) &= (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3) \\ &= (x+1)\left[(2-x) - 2(2x+3)\right] \\ &= (x+1)\left[2 - x - 4x - 6\right] \\ C(x) &= \underline{(x+1)(-5x-4)} \end{aligned}$$

3. On a facilement en utilisant la forme factorisée par exemple $\underline{C(-1) = 0}$ car :

$$C(x) = (x+1)(-5x-4)$$

Donc pour $x = -1$ on obtient :

$$C(-1) = \underbrace{(-1+1)}_{0}\left(-5 \times (-1) - 4\right) = 0$$

4. **Résoudre l'équation $C(x) = 0$.**

On utilise la forme factorisée pour obtenir une équation produit nul.

Théorème 1

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

$$\begin{aligned} C(x) = 0 &\Longleftrightarrow (x+1)(-5x-4) \\ &\Longleftrightarrow (x+1=0) \text{ ou } (-5x-4=0) \\ &\Longleftrightarrow (x=-1) \text{ ou } \left(x = -\frac{4}{5}\right) \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc -1 et $-\frac{4}{5}$.