Entraînement

Vecteurs et équations de droites — Seconde

Énoncé

Exercice 1 — Construction et démonstration (vecteurs)

On considère un triangle ABC.

1) Construire les points I, J, K et L définis par :
   1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;
   2) $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;
   3) $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$;
   4) $\overrightarrow{BL} = -2\overrightarrow{AC}$.
2) En utilisant la relation de Chasles, démontrer que
$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}.$$
3) Démontrer ensuite que
$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}.$$
4) En déduire que le quadrilatère $CIKJ$ est un parallélogramme.
5) Démontrer que les points I, B, J et L sont alignés.

Exercice 2 — Relation de Chasles (vecteurs)

À l'aide de la relation de Chasles, démontrer les égalités suivantes :

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$;
2) $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$;
3) $\overrightarrow{FG} - (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}) - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GB}) = \overrightarrow{BF}$;
4) $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$.

Exercice 3 — Équations de droites (équations réduites)

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points :

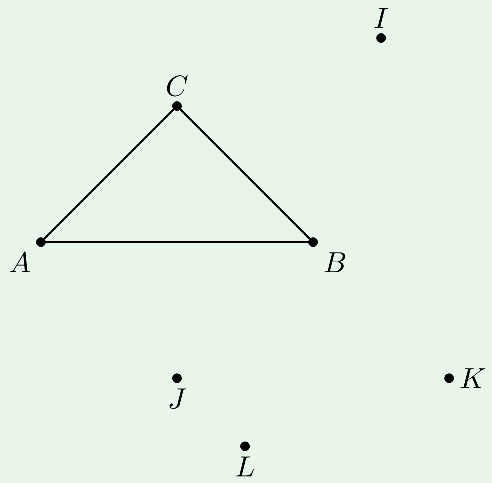
$$A(-2;1), \quad B(4;3), \quad C(1;-2).$$

1) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
2) En déduire **l'équation réduite** de la droite (AB).
3) Déterminer **l'équation réduite** de la droite (d) passant par le point C et parallèle à la droite (AB).
4) Déterminer **l'équation réduite** de la droite (AC).
5) Déterminer **l'équation réduite** de la droite (d') parallèle à la droite (AC) et passant par le point B.
6) Montrer que le point $I(7;0)$ est le point d'intersection des droites (d) et (d').

Corrigé

Corrigé Exercice 1

Figure de la construction



1) Les points sont construits par somme et différence de vecteurs, en utilisant la méthode du parallélogramme.
2) Par la relation de Chasles :
$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK}.$$
Or
$$\overrightarrow{JA} = -\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$
Donc
$$\overrightarrow{JK} = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.$$
3)
$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.$$
4) On a montré que $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{JK}$: le quadrilatère $CIKJ$ est donc un parallélogramme.
5)
$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BL} = -2\overrightarrow{AC}.$$
Ces vecteurs sont colinéaires à $\overrightarrow{AC}$, donc les points I, B, J, L sont alignés.

Corrigé Exercice 2

1)
$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}.$$

2)
$$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OA}.$$

3) Détaillons :
$$\overrightarrow{FG}-(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB})-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GB})=\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GB}.$$
Or $\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AG}$ puis $\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BG}$, donc
$$\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BG}.$$
Ainsi l'expression devient
$$\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{GB}=(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GB})-\overrightarrow{FB}=\vec{0}-\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{BF}.$$

4) On développe :
$$-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-2\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}$$
(car $-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}$). Or $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ donc $2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC}$:
$$=(2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CB}.$$
Comme $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$:
$$-\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}.$$

Corrigé Exercice 3

On travaille avec des équations réduites $y = mx + p$.

1) **Coefficient directeur de (AB)**

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

2) **Équation réduite de (AB)**

On sait que (AB) a pour coefficient directeur $\frac{1}{3}$, donc

$$y = \frac{1}{3}x + p.$$

Le point $A(-2;1)$ appartient à (AB), donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$1 = \frac{1}{3} \times (-2) + p.$$

$$1 = -\frac{2}{3} + p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{5}{3}.$$

Ainsi :

$$\boxed{(AB) : \ y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}.$$

3) **Équation réduite de (d), parallèle à (AB) et passant par C**

Droites parallèles $\Rightarrow$ même coefficient directeur, donc

$$(d) : \ y = \frac{1}{3}x + p.$$

Le point $C(1;-2)$ appartient à (d) :

$$-2 = \frac{1}{3} \times 1 + p.$$

$$-2 = \frac{1}{3} + p \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{7}{3}.$$

Donc :

$$\boxed{(d) : \ y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}}.$$

4) **Équation réduite de (AC)**

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-2-1}{1-(-2)} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Donc :

$$(AC) : \ y = -x + p.$$

Le point $A(-2;1)$ appartient à (AC) :

$$1 = -(-2) + p \Rightarrow 1 = 2 + p \Rightarrow p = -1.$$

Ainsi :

$$\boxed{(AC) : \ y = -x - 1}.$$

5) **Équation réduite de (d'), parallèle à (AC) et passant par B**

Même coefficient directeur que (AC), donc -1 :

$$(d') : \ y = -x + p.$$

Le point $B(4;3)$ appartient à (d') :

$$3 = -4 + p \Rightarrow p = 7.$$

Donc :

$$\boxed{(d') : \ y = -x + 7}.$$

6) **Vérifier que $I(7;0)$ est l'intersection de (d) et (d')**

On vérifie que $I(7;0)$ appartient à (d) et à (d').

Sur (d) :

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}.$$

Pour $x = 7$:

$$\frac{1}{3} \times 7 - \frac{7}{3} = \frac{7}{3} - \frac{7}{3} = 0.$$

Donc $I \in (d)$.

Sur (d') :

$$y = -x + 7.$$

Pour $x = 7$:

$$-7 + 7 = 0.$$

Donc $I \in (d')$.

Ainsi, $I(7;0)$ appartient aux deux droites : c'est bien leur point d'intersection.

Figure du corrigé : points et droites (AB), (d), (AC), (d') et point I.