



# Pourcentages

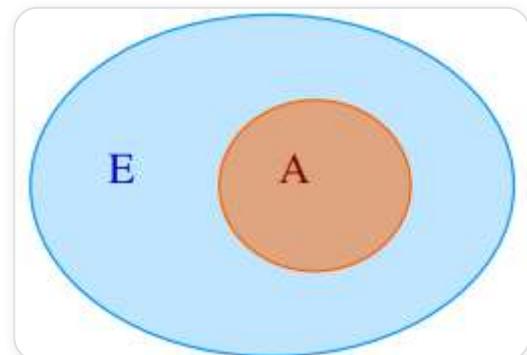
## I. Pourcentages et proportions

### Définition 1 — Proportion d'une partie par rapport à un tout

Soit  $A$  une partie d'un ensemble  $E$ . On note  $\text{Card}E$  et  $\text{Card}A$  leurs nombres d'éléments.

La **proportion** des éléments de  $A$  par rapport à ceux de  $E$  est :

$$p = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}E} \in [0; 1].$$



Ensemble  $E$  et partie  $A$

- Une même proportion peut s'écrire :  $p \approx 0,2001$ , ou  $p \approx 20,01\%$ , ou encore  $\frac{20,01}{100}$ .
- Les deux termes du quotient doivent être dans la *même unité*.

### I.1 — Appliquer un pourcentage

#### Définition 2 — $t\%$ d'une quantité

Prendre  $t\%$  d'un nombre, c'est le multiplier par  $\frac{t}{100}$ .

#### Exemple

Remise de 15 % sur 80 € :

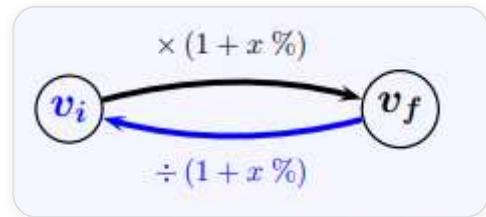
$$80 \times 15\% = 80 \times \frac{15}{100} = 12 \quad \Rightarrow \quad \text{prix remisé} = 80 - 12 = 68$$

Le prix après remise est de 68 euros.

## II. Taux d'évolutions

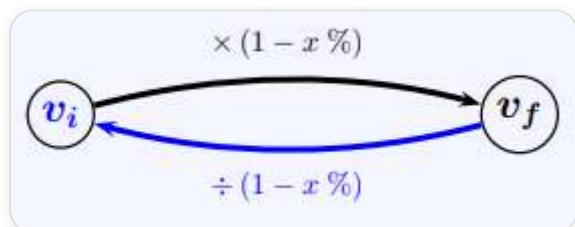
### Propriété 1 — Augmenter ou diminuer de $x\%$

**Augmenter  $V$  de  $x\%$**  : coefficient  $k = 1 + x\%$  et  
 $v_f = v_i(1 + x\%)$ .



Augmenter de  $x\%$

**Diminuer  $V$  de  $x\%$**  : coefficient  $k = 1 - x\%$  et  
 $v_f = v_i(1 - x\%)$ .



Diminuer de  $x\%$

### Preuve (détailée)

1. Augmenter une quantité  $V$  de  $x\%$ , c'est lui ajouter  $x\%$  de  $V$ . Elle passe donc d'une valeur  $v_i$  à une valeur  $v_f = v_i + v_i \times x\%$ . Par factorisation :

$$v_f = v_i + v_i \times x\% = v_i(1 + x\%) = v_i \left(1 + \frac{x}{100}\right) = v_i \times \frac{100 + x}{100}.$$

2. Diminuer une quantité  $V$  de  $x\%$ , c'est lui soustraire  $x\%$  de  $V$ . Elle passe donc d'une valeur  $v_i$  à une valeur  $v_f = v_i - v_i \times x\%$ . Par factorisation :

$$v_f = v_i - v_i \times x\% = v_i(1 - x\%) = v_i \left(1 - \frac{x}{100}\right) = v_i \times \frac{100 - x}{100}.$$

### Définition 3 — Taux / pourcentage d'évolution

Passage de  $v_i$  à  $v_f$  :

1. Le taux d'évolution (variation relative) est  $\frac{v_f - v_i}{v_i}$ .
2. On dit que  $t\%$  est le pourcentage d'évolution quand  $\frac{v_f - v_i}{v_i} = \frac{t}{100}$ .

Taux  $> 0$  : augmentation ; taux  $< 0$  : diminution.

## III. Bilan (formules utiles)

Formule	Expression
Coefficient multiplicateur	$k = 1 + t\%$
Aller	$v_f = k v_i$
Retour	$v_i = \frac{v_f}{k}$
Taux d'évolution	$t\% = k - 1$ ou $t\% = \frac{v_f - v_i}{v_i}$

## IV. Évolutions successives

### Propriété 2 — Composition

Deux évolutions successives  $t_1\%$  puis  $t_2\%$  donnent le coefficient :

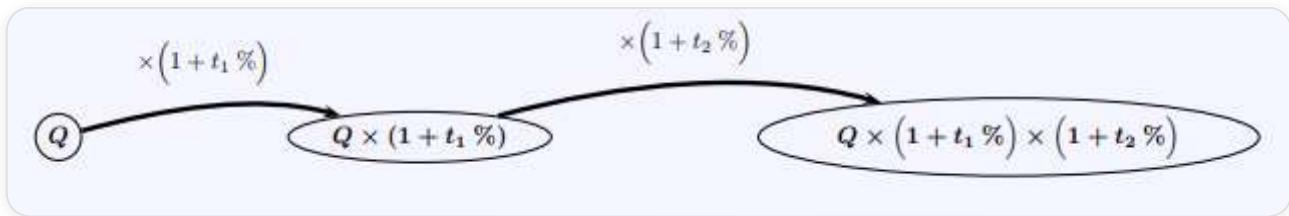


Schéma d'évolution successive

$$k = (1 + t_1\%)(1 + t_2\%).$$

### Exemple 1

Augmentations de  $10\%$  puis  $20\%$  :

$$k = 1,10 \times 1,20 = 1,32 \Rightarrow t\% = 32\%.$$

### Exemple 2

Augmenter de  $6\%$  par an pendant 5 ans :

$$k = (1 + 0,06)^5 \approx 1,3382 \Rightarrow t\% \approx 33,82\% \approx 34\%.$$

## V. Évolutions réciproques

### Propriété 3 — Retour à l'état initial

Aller de  $Q_1$  à  $Q_2$  avec  $t_1\%$ , puis revenir à  $Q_1$  avec  $t_2\%$  :

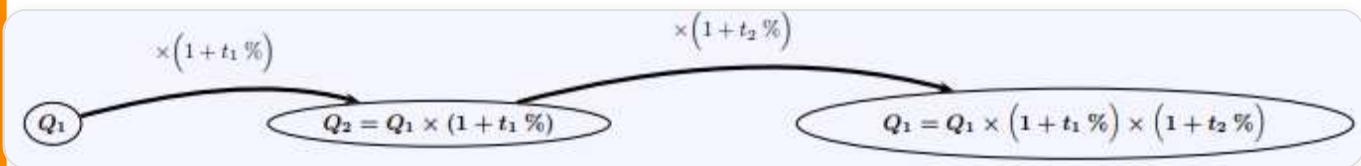


Schéma d'évolution réciproque

$$(1 + t_1\%)(1 + t_2\%) = 1, \quad \text{donc } k_2 = \frac{1}{k_1}.$$

$$t_2\% = \frac{1}{1 + t_1\%} - 1.$$

### Exemple

Après  $+15\%$ , la remise à appliquer pour revenir au prix d'origine vaut :

$$t_2\% = \frac{1}{1,15} - 1 \approx -0,13043478 \Rightarrow \text{remise d'environ } 13,04\%.$$