🧮 Fiche 3 — Notions d'équations

🏛️ Petite histoire des équations

Des équations du premier et du second degré (où les coefficients sont des nombres donnés) sont déjà résolues avec une méthode générale par les Babyloniens vers 1700 av. J.C, probablement avant, sans pour autant connaître le chiffre 0 ! Pour les équations du 3ème degré, il faut attendre 1515 avec l'italien Scipio del Ferro (1465-1526) dont les papiers sont cependant perdus. Puis ses compatriotes Nicolo Tartaglia et Gérolamo Cardano (1501-1576) poursuivent ses travaux. Pour celles du 4ème degré, c'est Ludovico Ferrari (Bologne 1522-1565, en 1540), un élève de Cardan, a qui on doit une méthode habile de résolution. A noter que l'on a longtemps utilisé que les nombres positifs, les nombres négatifs étant considérés comme "moins que rien" (et non simplement représentables).

🧠 Définition d'une équation

Une équation est une égalité contenant une ou plusieurs variables (appelées inconnues). Résoudre une équation consiste à déterminer toutes les valeurs de la variable qui rendent l'égalité vraie.

✏️ **Exemple** : Soit l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$

- La variable ou inconnue est notée par la lettre x.
- On dit que c'est une équation du second degré car il y a du x^2.
- **Résoudre** cette équation, c'est chercher les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie.

🔍 Par exemple, on cherche si $x = -1$ est une solution :

$$x^2 - 3x + 2 = (-1)^2 + 3 + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$$

Donc $x = -1$ n'est pas une solution.

Vérifions pour $x = 1$:

$$x^2 - 3x + 2 = 1^2 - 3 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Et pour $x = 2$:

$$x^2 - 3x + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$$

Conclusion : $x = 1$ et $x = 2$ sont deux solutions (mais pas forcément les seules à ce stade).

ℹ️ Pour résoudre véritablement l'équation, on peut aussi factoriser :

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$

D'après la règle du produit nul :

$x = 1$ ou $x = 2$ (ici, on a bien déterminé **les solutions** de l'équation).

🧮 III. Équations du premier degré

Une équation du premier degré est de la forme $ax + b = cx + d$.

✏️ **Exemple 1** : Résoudre $2x + 5 = 1 - 4x$

$2x + 5 = 1 - 4x \Leftrightarrow 6x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

✏️ **Exemple 2** : Résoudre $\frac{x+1}{2} = 5$

$x + 1 = 10 \Leftrightarrow x = 9$

🧩 Équation produit nul

Un produit est nul si au moins un facteur est nul :

$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad ou \quad B = 0$

✏️ **Exemple** : Résoudre $(5x-3)(1-4x) = 0$

$(5x-3)(1-4x) = 0$

Un produit est nul si au moins un facteur est nul.

$5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \quad ou \quad 1 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} \quad et \quad \frac{3}{5}$ sont les solutions de l'équation.

📐 Résoudre une équation du type $x^2 = a$

Soit a un nombre réel :

1. Si a < 0, l'équation $x^2 = a$ n'admet **pas de solutions** parmi l'ensemble des nombres réels (puisqu'un nombre réel élevé au carré est toujours positif).
2. Si a = 0, l'équation $x^2 = 0$ admet **une seule solution** qui est $x = 0$.
3. Si a > 0, l'équation $x^2 = a$ admet **deux solutions** qui sont $x = -\sqrt{a} \quad et \quad x = \sqrt{a}$.

✏️ **Exemple** : Résoudre $x^2 - 5 = 0$

On isole le carré :
$x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

💡 **Autre méthode** par factorisation :

$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \quad ou \quad x = \sqrt{5}$

$-\sqrt{5} \quad et \quad \sqrt{5}$ sont les solutions de l'équation.