Notion de fonction

I. Approche historique

Le terme *fonction* est introduit par **Leibniz** (1673). **Bernoulli** propose une première notation, puis **Euler** popularise la notation **f(x)** (1734). La vision moderne — une association qui à tout x du domaine fait correspondre une unique image f(x) — est clarifiée au XIX^{e} siècle (travaux attribués classiquement à **Dirichlet**).

Complément historique : Cependant, l'idée de relation entre les quantités, prend naissance avec les mathématiques elles-mêmes et donc chez les mathématiciens babyloniens et grecs.

📘 II. Définitions de base

Définition (fonction). Soit $D \subset \mathbb{R}$. Une fonction **f** définie sur D associe à chaque $x \in D$ un **unique** nombre f(x) appelé *image* de x. D'une manière générale, une fonction transforme un ensemble de nombres en un autre.

- **Domaine (noté D_f pour une fonction appelée f)** : ensemble des x autorisés (on y reviendra plus tard).
- **Image** : f(x).
- **Antécédent** de y : tout x tel que f(x)=y.

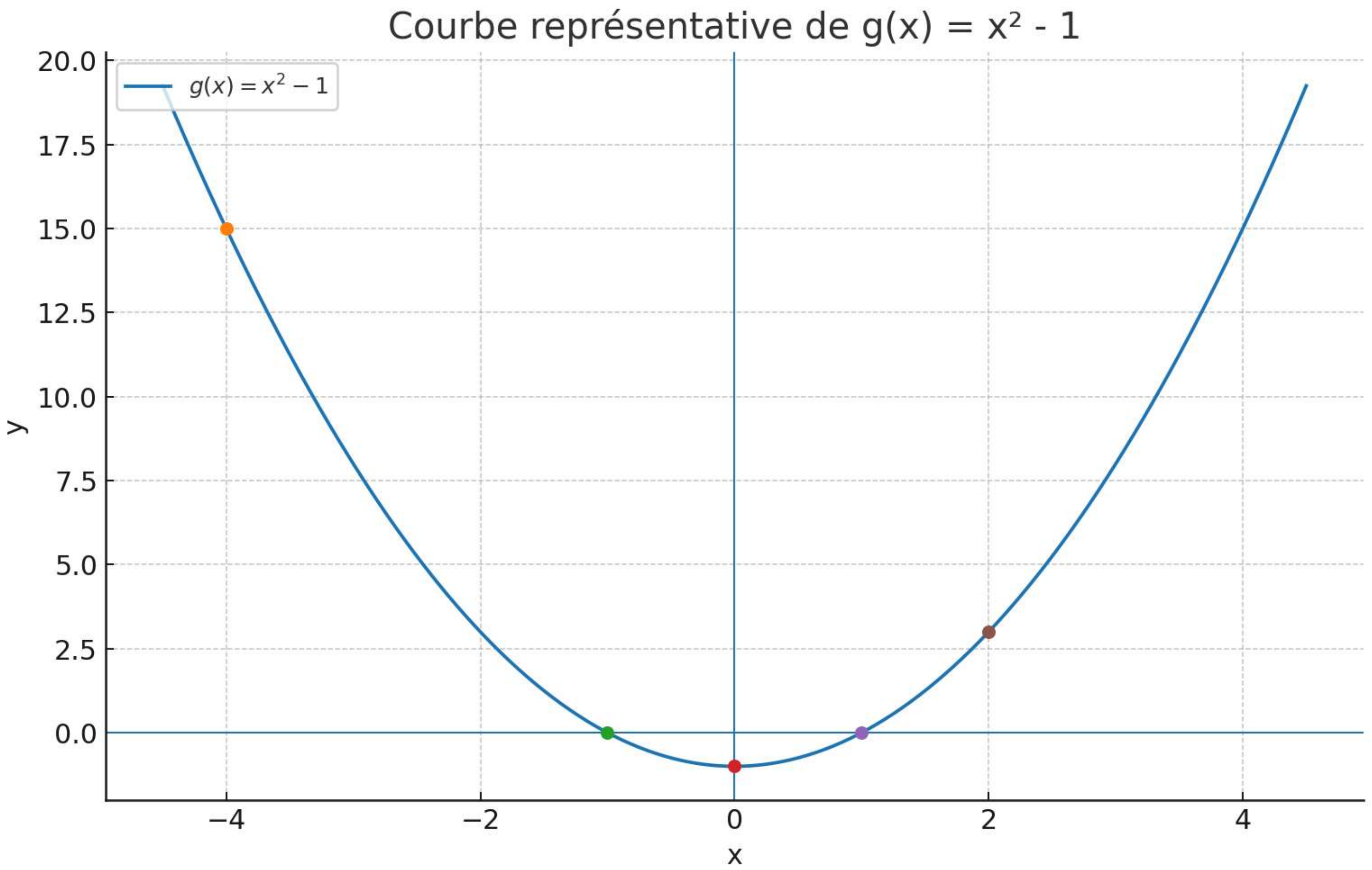
Écriture :

$D \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x)$

📊 III. Représenter une fonction

1) Graphiquement



Exemple : $g(x)=x^2-1$. Chaque point M(x; g(x)) appartient à la courbe représentative.

2) Algébriquement (par une formule)

Exemple : $g(x)=x^2-1$. Pour $x=2$, $g(2)=3$; pour $x=-4$, $g(-4)=15$.

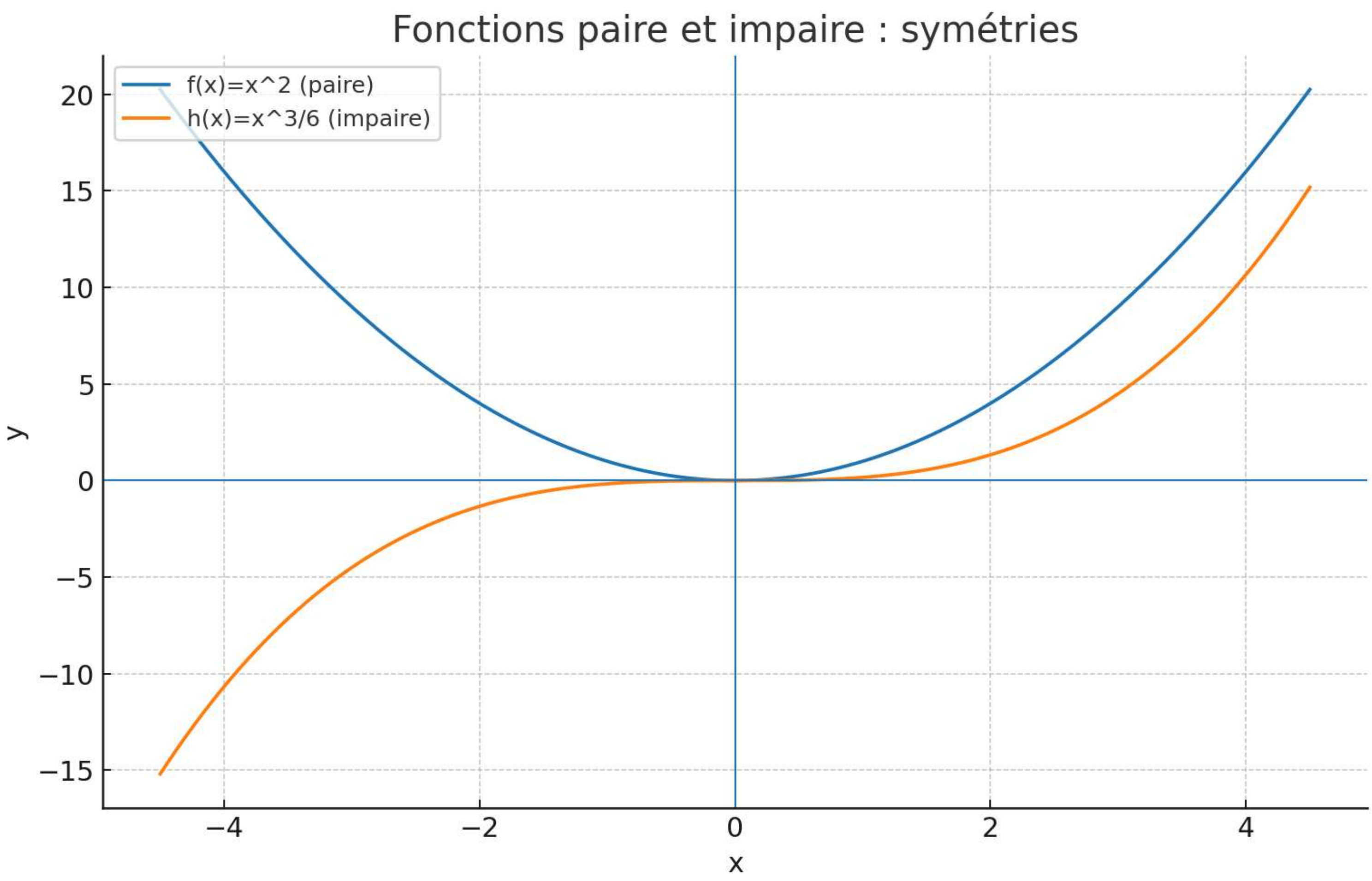
3) Par un tableau de valeurs

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
$g(x)=x^2-1$	3	0	-1	0	3

➗ IV. Parité

Fonction paire : f(−x)=f(x) et le domaine est centré en 0 (**symétrie par rapport à l'axe des ordonnées**). Exemple : $x \mapsto x^2$.

Fonction impaire : h(−x)=−h(x) et le domaine est centré en 0 (**symétrie centrale par rapport à l'origine**). Exemple : $x \mapsto x^3$.

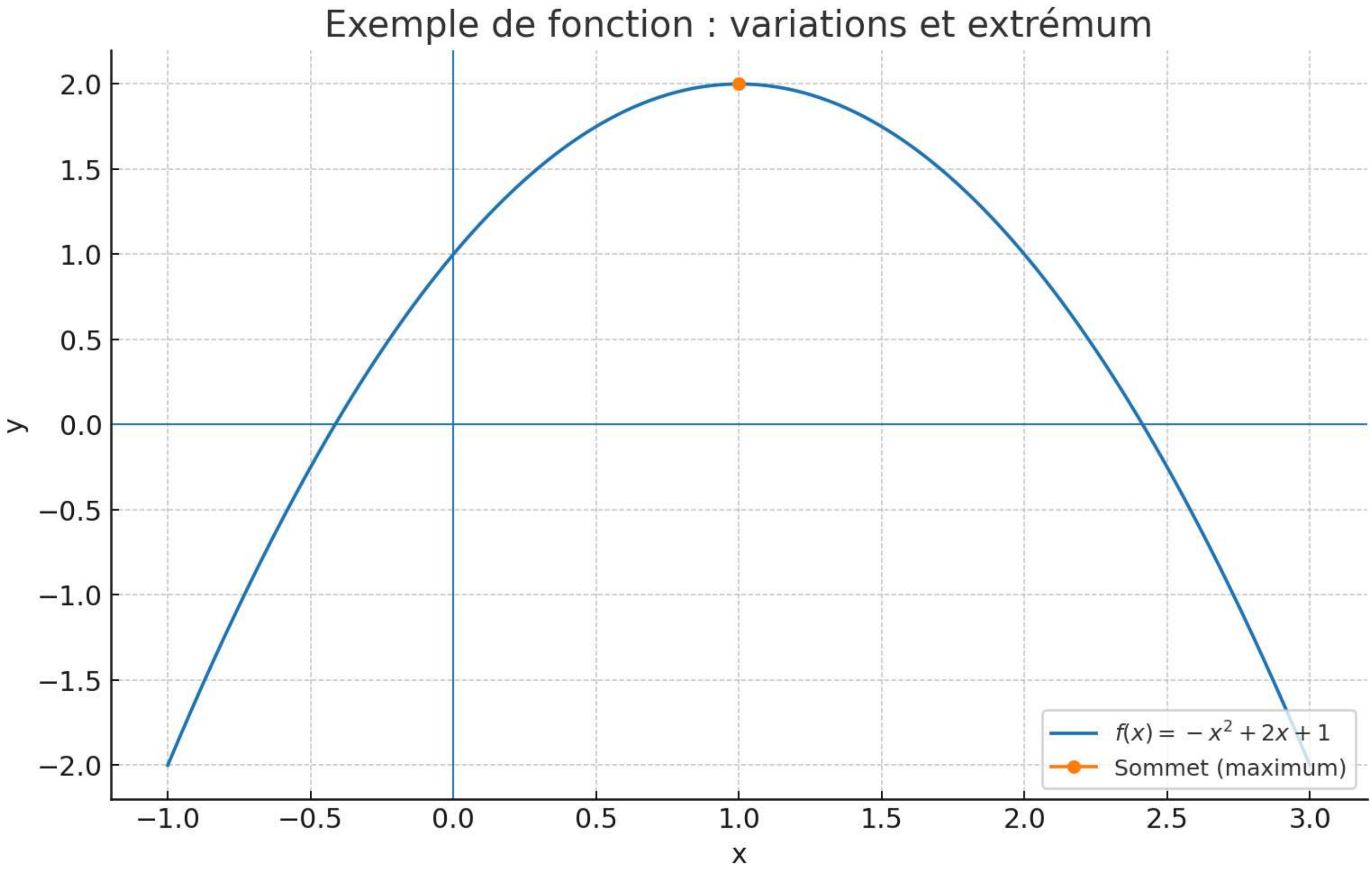


En bleu, la courbe représentant la fonction *f* est **paire** ; en rouge, celle représentant la fonction *h* est **impaire**.

V. Variations de fonctions

On dit que f est **croissante** sur I si pour tous x<y dans I, f(x) ≤ f(y). Elle est **décroissante** si f(x) ≥ f(y).

Un **extremum** local est une valeur maximale ou minimale atteinte en un point du domaine.



Exemple : $f(x)=-x^2+2x+1$. Croissante sur $]-\infty,1]$, décroissante sur $[1,+\infty[$, maximum au sommet x=1 (valeur 2).

Tableau de variations

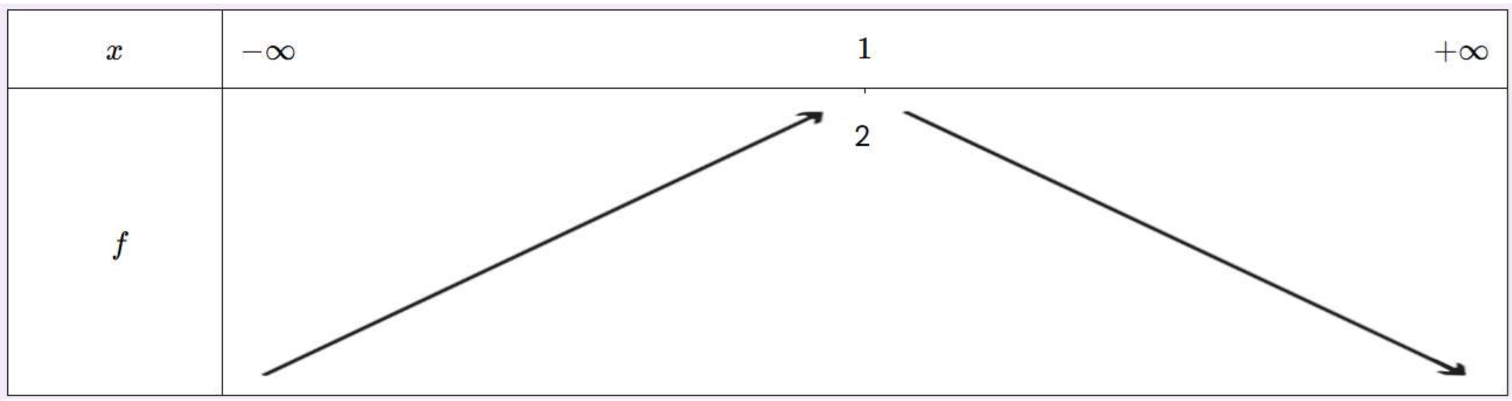
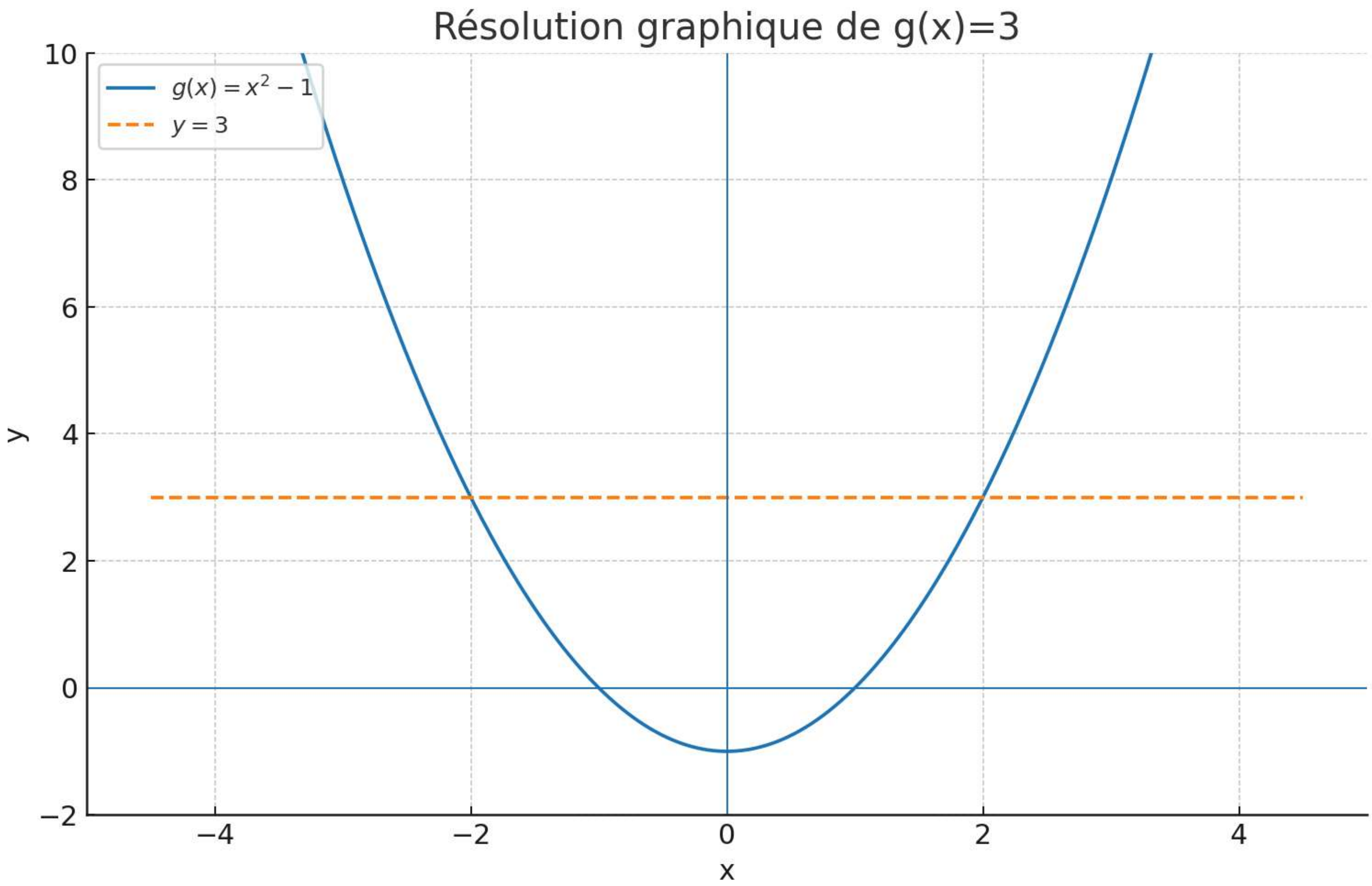


Tableau de variations (sommet en x=1, valeur 2).

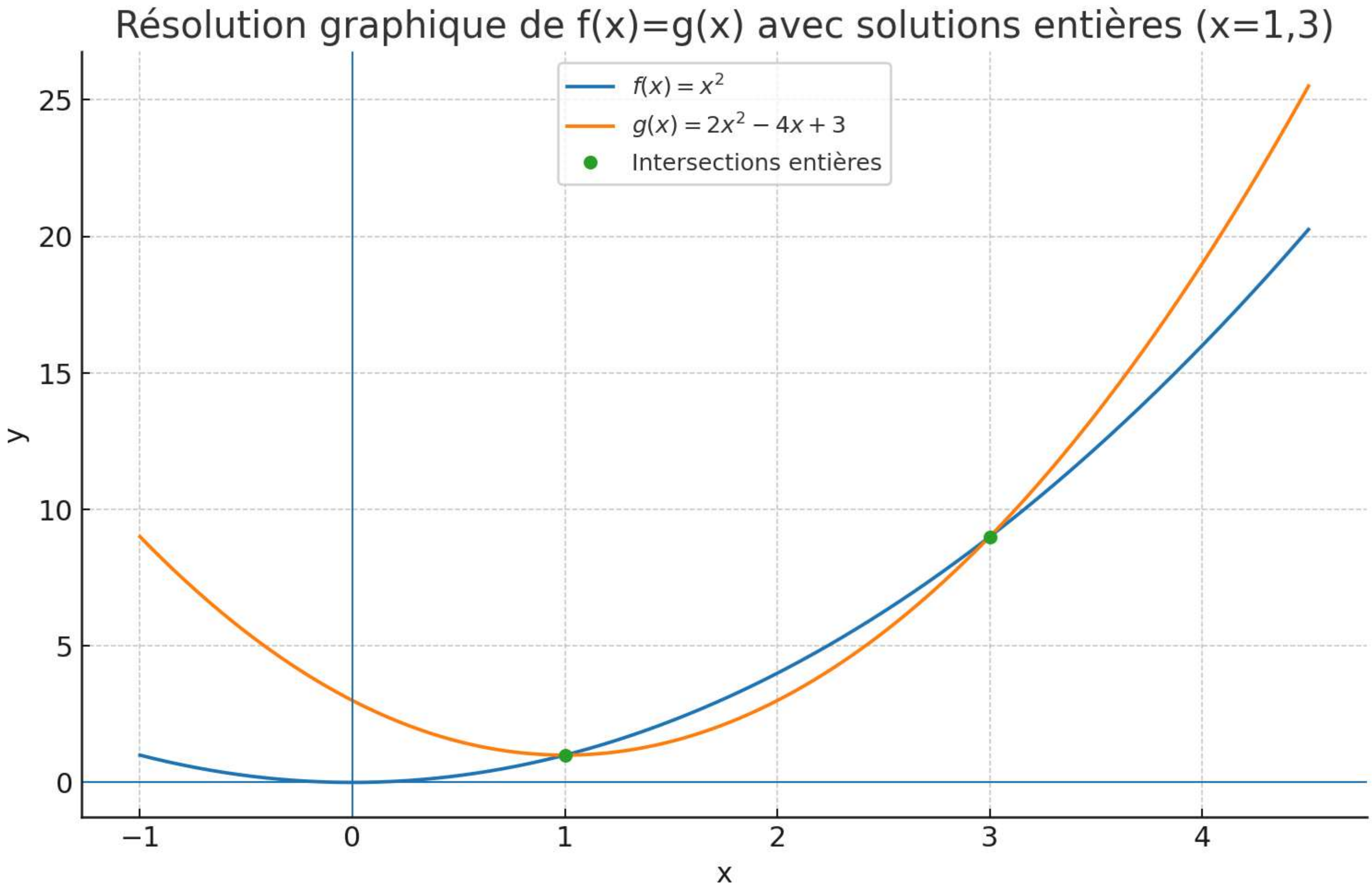
VI. Résolution graphique : équations et inéquations

1) Équation f(x)=k



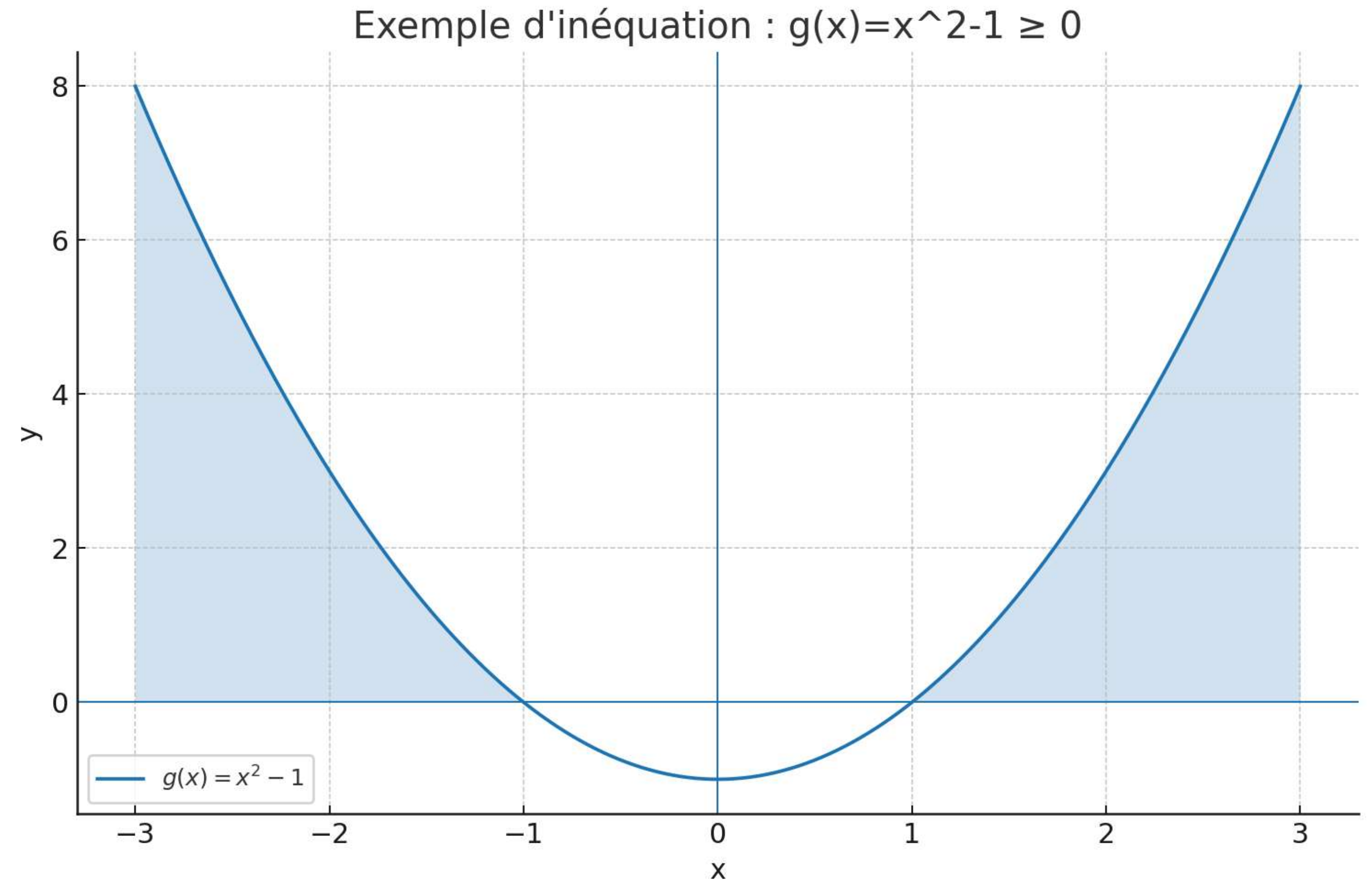
Exemple : $g(x)=x^2-1$ et $y=3 \Longrightarrow$ solutions $x=-2$ et $x=2$.

2) Équation f(x)=g(x) (solutions entières)



Ici, $f(x)=x^2$ et $g(x)=2x^2-4x+3$. Les intersections sont en $x=1$ et $x=3$ (solutions entières lisibles). Donc S = {1 ; 3}.

3) Inéquations (exemple)



Résoudre $g(x)=x^2-1 \geq 0$: on lit $g(x) \geq 0$ pour $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ donc $S =]-\infty,-1] \cup [1 ; +\infty[$.