Entraînement – Fonctions et Proportionnalité

Étude graphique et taux d'évolution — Sujet 2

Énoncé

Exercice 1 — Étude d'une fonction quadratique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 2.$$

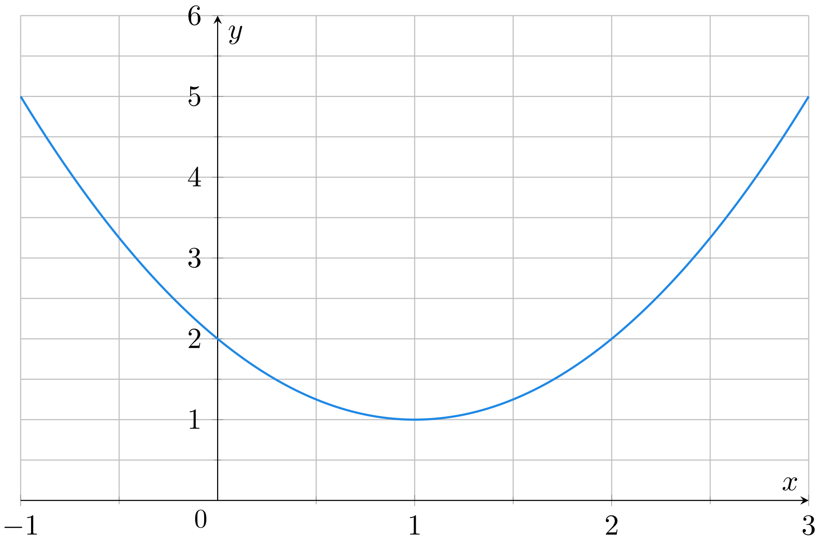

Figure 1 – Courbe représentative de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ sur $[-1\,;3]$.

On se place sur l'intervalle $[-1\,;3]$.

1) Compléter le tableau de valeurs :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

2) Montrer que l'on peut écrire :

$$f(x) = (x-1)^2 + 1.$$

3) En déduire les coordonnées du minimum de la fonction f.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$f(x) \geq 2.$$

5) Dresser le tableau de variation de f sur $[-1\,;3]$.

Exercice 2 — Taux d'évolution et évolutions successives

1) Le montant d'un abonnement augmente successivement de 3 %, puis de 12 %, puis de 10 %. Justifier que le taux d'évolution global est d'environ 26,9 %.

2) Un produit voit son prix augmenter de x %. Puis il bénéficie d'une remise de y %. Exprimer y en fonction de x pour que le prix final soit égal au prix initial.

3) Une population diminue de 12 %, puis encore de t %. Au total, la diminution observée est de 25 %. Calculer t (arrondir au centième de pourcentage).

4) Un tarif subit deux baisses consécutives identiques de z %. Après ces deux baisses, sa diminution totale est de 19 %. Déterminer z.

5) Le nombre de places dans un service passe de 15 000 à 21 450. Calculer le taux de croissance global (en %).

6) On souhaite obtenir la même évolution en 2 ans, au taux annuel constant. Quel pourcentage annuel faut-il appliquer (arrondi au dixième de pourcentage) ?

Exercice 3 — Évolution d'un effectif dans un lycée

En 2014, un lycée ouvre avec 500 élèves. Chaque année, il y a d'abord un gain de 20 % des élèves, mais une perte de 75 élèves.

1) Calculer le nombre d'élèves inscrits en 2015.

2) Calculer le nombre d'élèves inscrits en 2016.

Corrigé

Corrigé Exercice 1

1) Calculs :

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - 2\times(-1) + 2 = 1+2+2 = 5,\\ f(0) &= 0^2 - 2\times 0 + 2 = 2,\\ f(1) &= 1^2 - 2\times 1 + 2 = 1-2+2 = 1,\\ f(2) &= 4-4+2 = 2,\\ f(3) &= 9-6+2 = 5. \end{aligned}$$

Tableau complété :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	2	1	2	5

2) On complète le carré :

$$x^2 - 2x + 2 = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x-1)^2 + 1.$$

3) $(x-1)^2 \geq 0$ pour tout x, donc

$$f(x) = (x-1)^2 + 1 \geq 1.$$

Le minimum est 1 atteint pour $x = 1$. Coordonnées du minimum : $(1;1)$.

4) **Résolution graphique de l'inéquation** :

$$f(x) \geq 2.$$

On lit sur le graphique que la courbe est :
— **au-dessus de la droite** $y = 2$ pour $x \leq 0$ et pour $x \geq 2$, — **en dessous** entre 0 et 2.
Ainsi :

$$\boxed{f(x) \geq 2 \iff x \in [-1\,;0] \cup [2\,;3]}$$

(sur l'intervalle étudié $[-1\,;3]$).

5) Comme le coefficient de x^2 est positif, f est décroissante jusqu'au minimum puis croissante. Sur $[-1;3]$:

$$f(-1) = 5, \quad f(1) = 1, \quad f(3) = 5.$$

Tableau de variation :

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -1 & & 1 & & 3 \\ \hline f & 5 & \searrow & 1 & \nearrow & 5 \end{array}$$

Corrigé Exercice 2

1) Chaque hausse de p % multiplie le prix par $1 + \dfrac{p}{100}$. Ici :

$$1{,}03 \times 1{,}12 \times 1{,}10 = 1{,}26896.$$

Soit une hausse globale d'environ 26,9 %.

2) Prix de départ : P. Après la hausse de x % :

$$P_1 = P\left(1 + \frac{x}{100}\right).$$

Après la remise de y % :

$$P_2 = P_1\left(1-\frac{y}{100}\right) = P\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{y}{100}\right).$$

On veut $P_2 = P$, donc :

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{y}{100}\right) = 1.$$

D'où :

$$1-\frac{y}{100} = \frac{1}{1+\dfrac{x}{100}} = \frac{100}{100+x},$$

donc

$$\frac{y}{100} = 1-\frac{100}{100+x} = \frac{x}{100+x} \iff y = \frac{100x}{100+x}.$$

3) Diminution de 12 %, puis de t % : facteur global :

$$0{,}88\left(1-\frac{t}{100}\right).$$

On veut une baisse totale de 25 %, donc facteur 0,75 :

$$0{,}88\left(1-\frac{t}{100}\right) = 0{,}75.$$

$$1-\frac{t}{100} = \frac{0{,}75}{0{,}88} \approx 0{,}8523.$$

$$\frac{t}{100} \approx 1-0{,}8523 = 0{,}1477 \iff t \approx 14{,}77\ \%.$$

4) Deux baisses identiques de z % donnent un facteur global

$$(1-\frac{z}{100})^2.$$

Diminution de 19 % au total $\Rightarrow$ facteur 0,81 :

$$\left(1-\frac{z}{100}\right)^2 = 0{,}81.$$

On prend la racine positive :

$$1-\frac{z}{100} = 0{,}9 \iff \frac{z}{100} = 0{,}1 \iff z = 10\ \%.$$

5) On souhaite obtenir la même évolution en 2 ans au taux annuel constant.
Le taux global est :

$$\frac{21\,450}{15\,000} = 1{,}43.$$

On cherche un taux annuel r (en écriture décimale) tel que :

$$(1+r)^2 = 1{,}43.$$

Donc :

$$1+r = \sqrt{1{,}43} \approx 1{,}1958,$$

d'où :

$$r \approx 0{,}1958.$$

Le taux annuel constant est donc d'environ :

$$\boxed{19{,}6\ \%}$$

(arrondi au dixième de pourcentage).

Corrigé Exercice 3

On note E_n le nombre d'élèves l'année n, avec $E_{2014} = 500$.
Chaque année : gain de 20 % puis retrait de 75 élèves, soit :

$$E_{n+1} = 1{,}2\,E_n - 75.$$

1) 2015 :
$$E_{2015} = 1{,}2 \times 500 - 75 = 600 - 75 = 525.$$

2) 2016 :
$$E_{2016} = 1{,}2 \times 525 - 75 = 630 - 75 = 555.$$