Entraînement : notion de fonctions & équations / inéquations

Exercice 1 — Lecture graphique d'une fonction polynomiale (8 points)

On considère la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-4{,}5\,;\,5{,}5]$.

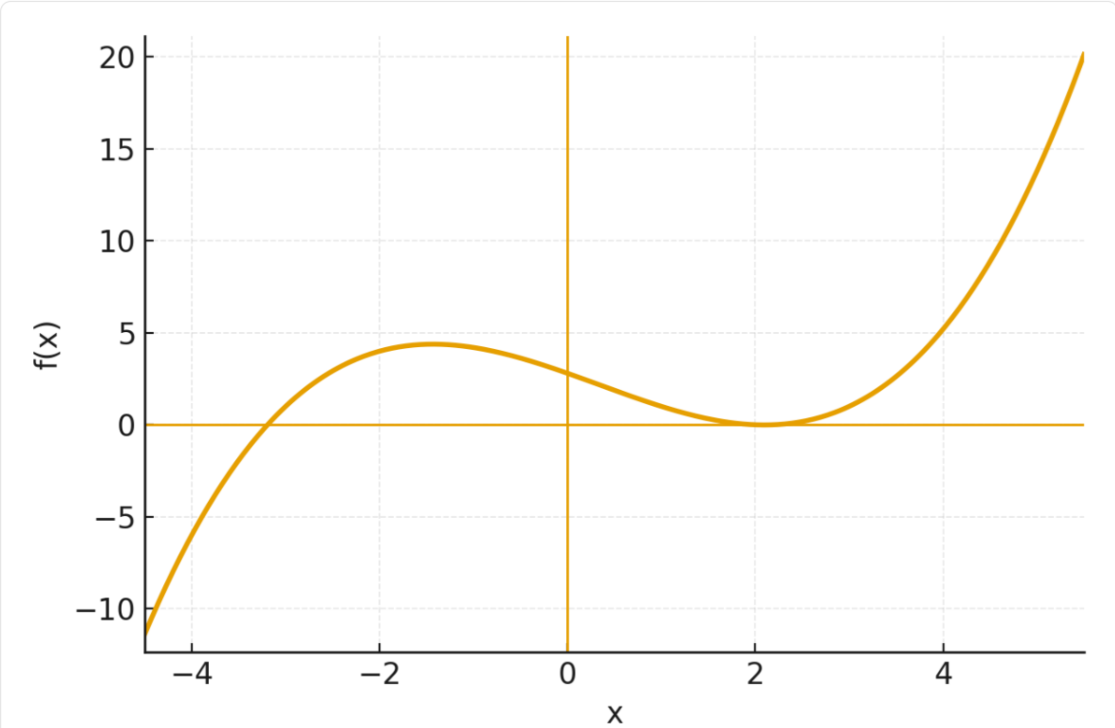

FIGURE 1 – Courbe représentative de f (axes et graduations non requis pour la lecture).

1) Lire graphiquement : $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$.
2) **Résoudre** graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
3) Déterminer sur quels intervalles f est **positive** et **négative**.
4) **Dresser le tableau de variation** de f sur son ensemble de définition.
5) Estimer le **maximum** et le **minimum** de f sur l'intervalle donné.
6) Donner un **encadrement** de $f(x)$ pour $x \in [-4\,;\,4]$.

Exercice 2 — Vrai / Faux (2 points)

Affirmation 1
Soient g et h deux fonctions **impaires**, définies sur un intervalle I centré en 0. Alors la fonction $f = g \times h$, définie sur I, est une fonction **paire**. **Justifier** la réponse.

☐ Vrai ☐ Faux

Affirmation 2
Soient g et h deux fonctions **paires**, définies sur un intervalle I centré en 0. Alors la fonction $f = \dfrac{g}{h}$, définie sur I, est une fonction **paire**. **Justifier** la réponse.

☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 3 — Résolution d'équations (6 points)

1) Résoudre l'équation du premier degré suivante :

$$2(3x-4)-(x+5)=7$$

2) Résoudre l'équation du second degré suivante :

$$x(x-2)-3(x-2)^2=0$$

3) Résoudre l'équation du second degré suivante :

$$8x^2-18=0$$

Exercice 4 — Résolution d'inéquations (4 points)

1) Résoudre l'équation du premier degré suivante :

$$-8(3x-4)\geq 10x+3(4-10x)$$

2) Résoudre la double inéquation suivante :

$$-1\leq \frac{2x-3}{5}+3<2$$

I Corrigés succincts

Exercice 1

- Lectures (au demi-carré près) : $f(-3) \approx 1{,}0$, $f(0) \approx 2{,}8$, $f(1) \approx 1{,}0$, $f(3) \approx 1{,}0$.
- $f(x) = 0$: solutions graphiques $x \approx -3{,}2,\ 2{,}0,\ 2{,}2$.
- Variations : croissance puis décroissance puis croissance (points charnières visibles vers $x \approx -1{,}5$ et $x \approx 2{,}1$).
- Encadrement sur $[-4\,;\,4]$: $-6{,}0 \leq f(x) \leq 5{,}2$.

Tableau de variations (lecture graphique) :

x	$-4{,}5$		$-2{,}1$		$1{,}7$		$5{,}5$
f	$-8{,}0$	$\nearrow$	$4{,}2$	$\searrow$	$-1{,}4$	$\nearrow$	$7{,}0$

Exercice 2 — Vrai / Faux

Affirmation 1 : **Vrai**.
Si g et h sont des fonctions impaires, alors pour chaque nombre x de I, on a :

$$g(-x) = -g(x) \quad \text{et} \quad h(-x) = -h(x).$$

Ainsi :

$$f(-x) = g(-x) \times h(-x) = (-g(x)) \times (-h(x)) = g(x) \times h(x),$$

donc f est une fonction **paire**.

Affirmation 2 : **Vrai**.
Si g et h sont des fonctions paires, alors pour chaque nombre x de I, on a :

$$g(-x) = g(x) \quad \text{et} \quad h(-x) = h(x).$$

On en déduit :

$$f(-x) = \frac{g(-x)}{h(-x)} = \frac{g(x)}{h(x)} = f(x),$$

donc f est également une fonction **paire**.

Exercice 3

1) $2(3x-4) - (x+5) = 7$
$6x - 8 - x - 5 = 7 \iff 5x - 13 = 7 \iff 5x = 20 \iff \boxed{S = \{4\}}$.

2) $x(x-2) - 3(x-2)^2 = 0$
Mise en facteur commun $(x-2)$: $(x-2)\,[\,x - 3(x-2)\,] = (x-2)\,(-2x+6) = -2(x-2)(x-3) = 0$.
$\boxed{S = \{2; 3\}}$.

3) $8x^2 - 18 = 0$
$8x^2 - 18 = 2\big((2x)^2 - 3^2\big) = 2(2x-3)(2x+3) = 0$.
$\boxed{S = \{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\}}$.

Exercice 4

1) $-8(3x-4) \geq 10x + 3(4-10x)$

$$-24x + 32 \geq 10x + 12 - 30x$$

$$-24x + 32 \geq -20x + 12$$

$$-4x + 32 \geq 12 \quad \Leftrightarrow \quad -4x \geq -20$$

$$x \leq 5$$

$\boxed{S =]-\infty\ ; 5]}$

2) $-1 \leq \dfrac{2x-3}{5} + 3 < 2$

$$-1 - 3 \leq \frac{2x-3}{5} < 2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leq \frac{2x-3}{5} < -1$$

$$-20 \leq 2x - 3 < -5 \quad \Leftrightarrow \quad -17 \leq 2x < -2$$

$$-\frac{17}{2} \leq x < -1$$

$\boxed{S = [-\frac{17}{2}; -1[}$