Entraînement – Fonctions et Proportionnalité

Étude graphique et taux d'évolution — Sujet B

Énoncé

Exercice 1 — Étude d'une fonction quadratique (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1.$$

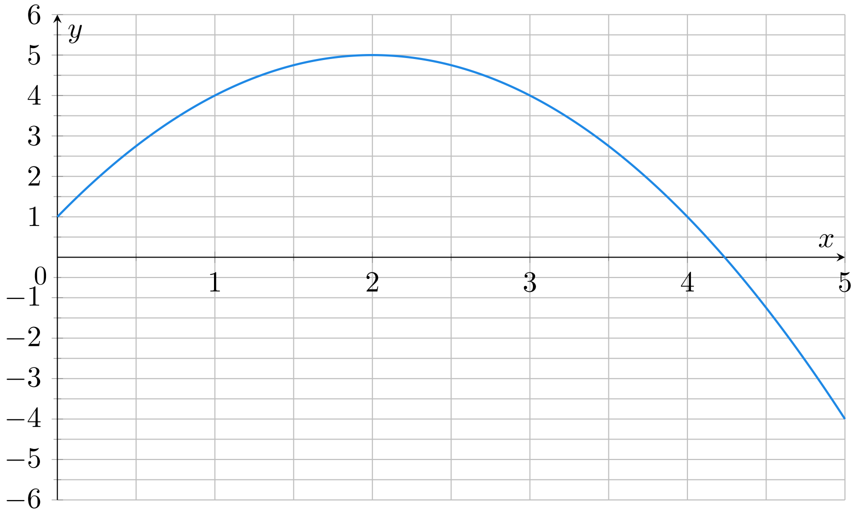

Figure 1 – Courbe représentative de $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ sur $[0\,;5]$.

On se place sur l'intervalle $[0\,;5]$.

1) Compléter le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

2) Montrer que l'on peut écrire :
$$f(x) = -(x-2)^2 + 5.$$

3) En déduire les coordonnées du maximum de la fonction f.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation :
$$f(x) \leq 4.$$

5) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;5]$.

Exercice 2 — Taux d'évolution et évolutions successives (9 points)

1) Un tarif diminue successivement de 8 %, puis augmente de 6 %. Justifier que le taux d'évolution global est d'environ $-2{,}5\,\%$.
2) Un produit voit son prix augmenter de $x\%$. Puis il bénéficie d'une remise de $y\%$. Exprimer y en fonction de x pour que le prix final soit égal au prix initial.
3) Une population augmente de 12 %, puis encore de $t\%$. Au total, l'augmentation est de 30 %. Calculer t (au dixième près).
4) Un tarif subit deux baisses consécutives identiques de $k\%$. Après ces deux baisses, la diminution totale est de 19 %. Déterminer k (au dixième près).
5) Une quantité passe de 42 000 à 35 112. Calculer le **taux de baisse global** (au dixième près).
6) On souhaite obtenir la même baisse (résultat de la question précédente) en **2 ans**, au taux annuel constant. Quel pourcentage annuel faut-il appliquer (au dixième près) ?

Exercice 3 — Évolution d'un effectif dans un centre sportif (3 points)

En 2015, un centre sportif compte 800 adhérents. Chaque année : gain de 15 % puis départ de 90 personnes.

1) Calculer le nombre d'adhérents en 2016.
2) Calculer le nombre d'adhérents en 2017.

Corrigé

Corrigé Exercice 1

1) Calculs :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(1) &= 4, \\ f(2) &= 5, \\ f(3) &= 4, \\ f(4) &= 1, \\ f(5) &= -4. \end{aligned}$$

Tableau complété :

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	4	5	4	1	-4

2) Complétion du carré :

$$-x^2 + 4x + 1 = -(x^2 - 4x + 4) + 5 = -(x-2)^2 + 5.$$

On utilise l'écriture réduite :

$$f(x) = -(x-2)^2 + 5.$$

Comme un carré est toujours positif, on a :

$$(x-2)^2 \geq 0 \quad \text{pour tout } x.$$

Donc :

$$-(x-2)^2 \leq 0.$$

La quantité $-(x-2)^2$ est maximale lorsque le carré vaut 0, c'est-à-dire lorsque

$$x - 2 = 0 \iff x = 2.$$

On calcule alors :

$$f(2) = -(2-2)^2 + 5 = 5.$$

Ainsi, la fonction admet un **maximum** égal à 5, atteint en $x = 2$.
Les coordonnées du point de maximum sont donc :

$$\boxed{(2\,;5)}.$$

3) L'inéquation $f(x) \leq 4$ se lit graphiquement.
On repère les points où la courbe de f coupe la droite d'équation $y = 4$. D'après le graphique, ces intersections ont lieu en $x = 1$ et en $x = 3$.
La courbe est en dessous de la droite $y = 4$ pour $x \in [0\,;1]$ et pour $x \in [3\,;5]$.
Ainsi :

$$\boxed{f(x) \leq 4 \iff x \in [0\,;1] \cup [3\,;5]}.$$

(lecture graphique)

4) Tableau de variations :

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & 2 & & 5 \\ \hline f & & \nearrow & 5 & \searrow & \end{array}$$

Corrigé Exercice 2

1) Facteur global :

$$0{,}92 \times 1{,}06 = 0{,}9752.$$

Soit une baisse d'environ 2,5 %.

2) Équation :

$$(1 + \tfrac{x}{100})(1 - \tfrac{y}{100}) = 1$$

d'où :

$$y = \frac{100x}{x + 100}.$$

3) Facteur global :

$$1{,}12(1 + \tfrac{t}{100}) = 1{,}30.$$

$$1 + \tfrac{t}{100} = \frac{1{,}30}{1{,}12} \approx 1{,}1607.$$

$$t \approx 16{,}1\%.$$

4) $(1 - \frac{k}{100})^2 = 0{,}81.$

$$1 - \tfrac{k}{100} = 0{,}9 \Rightarrow k = 10{,}0\%.$$

5)

$$\frac{35112}{42000} = 0{,}8360.$$

Baisse :

$$1 - 0{,}8360 = 0{,}164 \Rightarrow 16{,}4\%.$$

6) On cherche r tel que :

$$(1 - r)^2 = 0{,}8360.$$

$$1 - r = \sqrt{0{,}8360} \approx 0{,}9144.$$

$$r \approx 0{,}0856 \Rightarrow 8{,}6\%.$$

Corrigé Exercice 3

$$E_{2016} = 1{,}15 \times 800 - 90 = 820.$$

$$E_{2017} = 1{,}15 \times 820 - 90 = 853.$$