📘 Vecteurs — Partie 1

I. Notion de vecteur

I.1 Parallélogramme

I.1.1 Définition

Définition

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont **parallèles**.

I.1.2 Propriétés

Propriété

Propriété 1 (caractérisation 1).

Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, ses diagonales ont **le même milieu**.

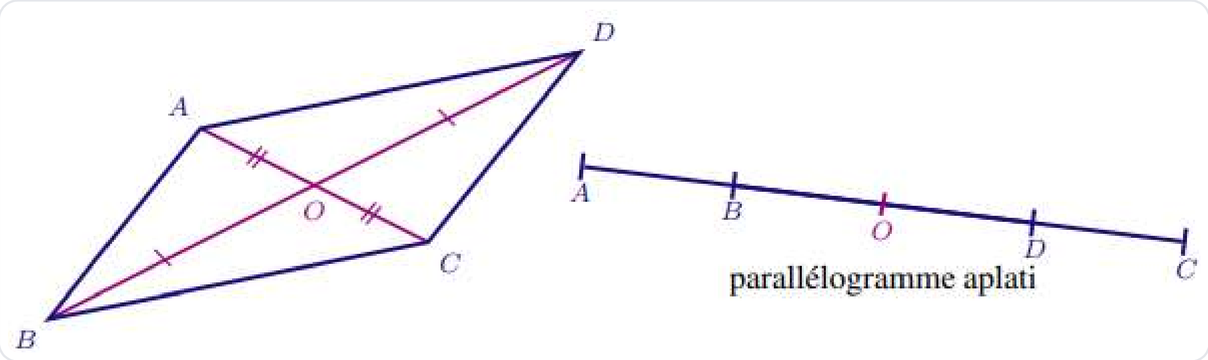


Schéma de la propriété 1 (diagonales même milieu).

Propriété

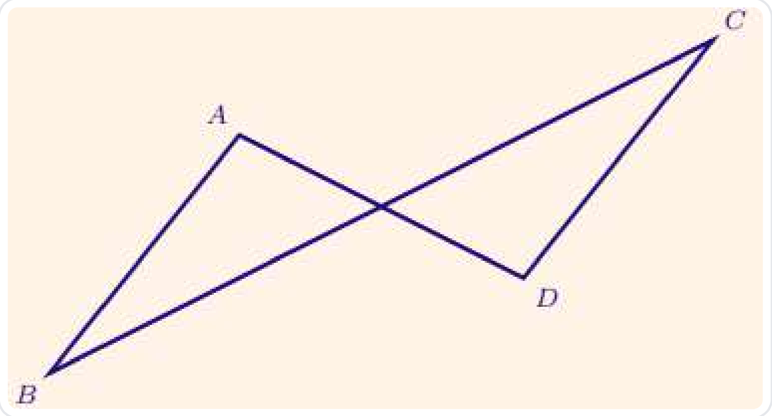
Propriété 2 (caractérisation 2).

Un quadrilatère non croisé est un parallélogramme si, et seulement si, les côtés opposés ont **la même longueur**.

Remarque

Dire que, dans un quadrilatère, il y a deux côtés opposés parallèles et de même longueur **ne suffit pas** pour conclure que ce quadrilatère est un parallélogramme.

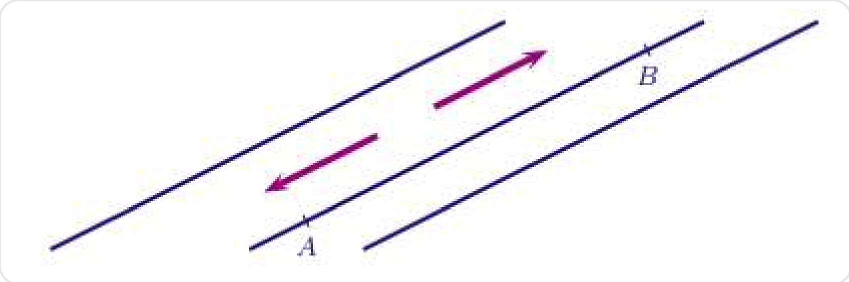
Exemple : dans un quadrilatère croisé $ABCD$, on peut avoir $(AB) \parallel (CD)$ et $AB = CD$ sans que $ABCD$ soit un parallélogramme.



Contre-exemple : un quadrilatère croisé n'est pas un parallélogramme.

I.2 Sens et direction

- Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont la **même direction**.
- Une direction étant indiquée par une droite (AB), il y a deux **sens** possibles : soit de A vers B, soit de B vers A.



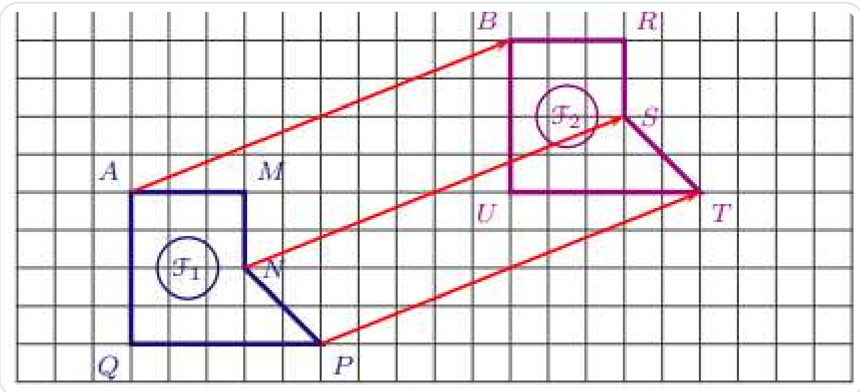
Deux sens possibles dans une même direction.

I.3 Translation

Le glissement qui permet d'obtenir une figure $\mathcal{F}_2$ à partir d'une figure $\mathcal{F}_1$ est décrit par :

- la **direction** du glissement, donnée par la droite (AB) ;
- le **sens** du glissement, de A vers B ;
- la **distance** du glissement, égale à la longueur AB.

On dit que $\mathcal{F}_2$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Translation : direction, sens et distance.

Remarque

Les vecteurs $\overrightarrow{NS}$ et $\overrightarrow{PT}$ sont aussi des vecteurs de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$: on dit qu'ils sont **égaux**.

On note alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NS} = \overrightarrow{PT}.$$

I.3.1 Définition

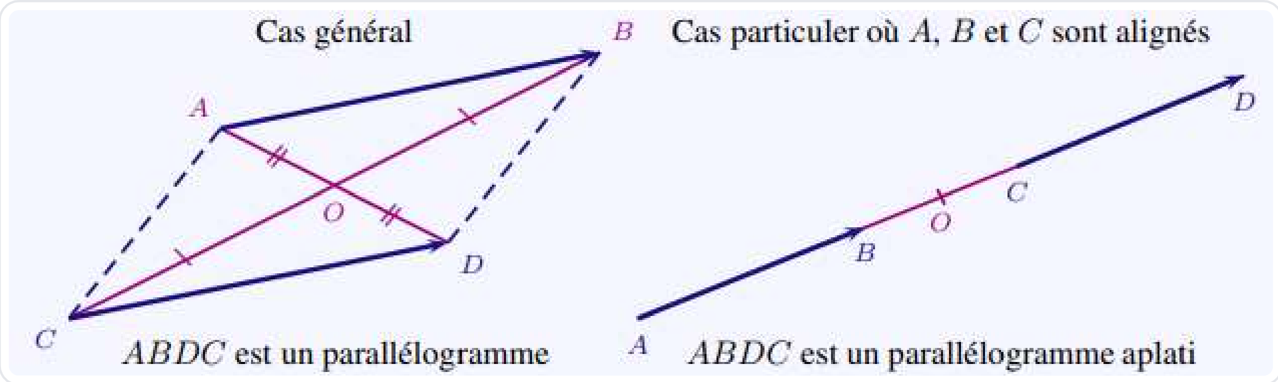
Théorème

Théorème 1.

Soient A et B deux points du plan.

La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan, l'unique point D tel que les segments $[AD]$ et $[BC]$ aient **le même milieu**.

Cette translation est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



II. Vecteurs

II.1 Définitions

Définition

Un couple (A, B) de points du plan détermine un vecteur.

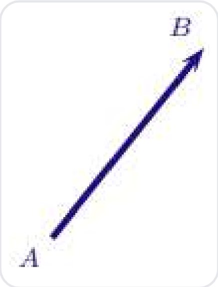
A est l'origine du vecteur et B est son extrémité. On le note $\overrightarrow{AB}$.

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par **3 éléments** :

1. **Sa norme**, la distance AB, que l'on note :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

2. **Sa direction**, c'est l'inclinaison de la droite (AB).
3. **Son sens**, de A vers B.



Le vecteur $\overrightarrow{AB}$: norme, direction, sens.

Remarque

Dans un repère orthonormé, on rappelle que :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Définition

On appelle **vecteur nul** le vecteur associé, par exemple, à la translation qui transforme A en A :

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

II.2 Égalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs sont égaux s'ils sont associés à la **même translation**.

II.2.1 Définition

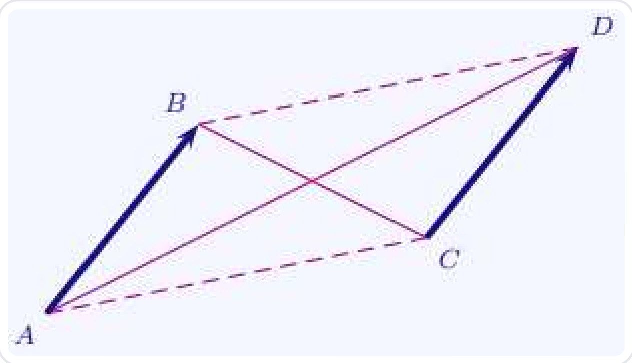
Théorème

Théorème 2.

A, B, C, D sont quatre points du plan. Les définitions suivantes sont équivalentes :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.

Attention à l'ordre : c'est $ABDC$.



Égalité de vecteurs et parallélogramme $ABDC$.

Exercice 1 — Exemple : les trois parallélogrammes

$ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes. Montrons que $DCEF$ est un parallélogramme.

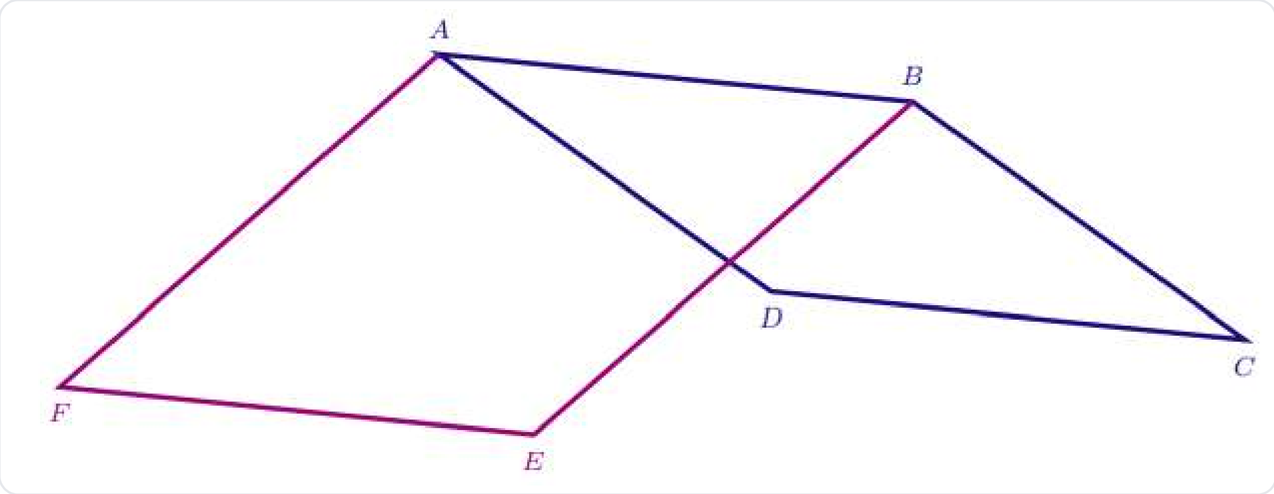


Figure de l'exercice 1.

Preuve :

- $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- $ABEF$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$.
- Par conséquent, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ donc le quadrilatère $DCEF$ est un parallélogramme.

II.3 Représentation d'un vecteur

Devant des égalités du type

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \cdots$$

on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{FE}, \ldots$ sont des **représentants** d'un même vecteur $\vec{u}$.

On note alors :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \cdots$$

Le vecteur $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \cdots$ est appelé **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.

Théorème

Théorème 3.

Soit O un point du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique tel que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM}.$$

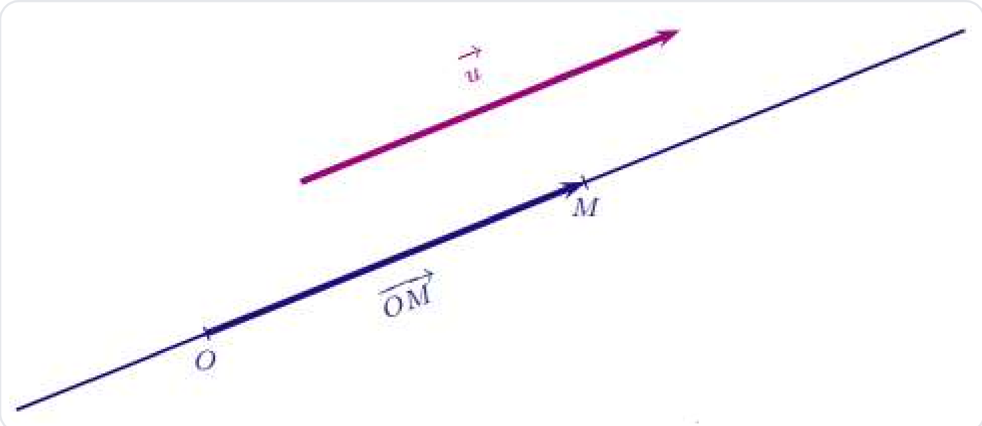


Schéma : représentation d'un vecteur $\vec{u}$ par $\overrightarrow{OM}$.

Si $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul, alors O et M sont distincts.

Le vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par :

- sa **direction** : celle de la droite (OM) ;
- son **sens** : de O vers M ;
- sa **norme** notée $\|\vec{u}\|$: la distance OM.

III. Addition vectorielle

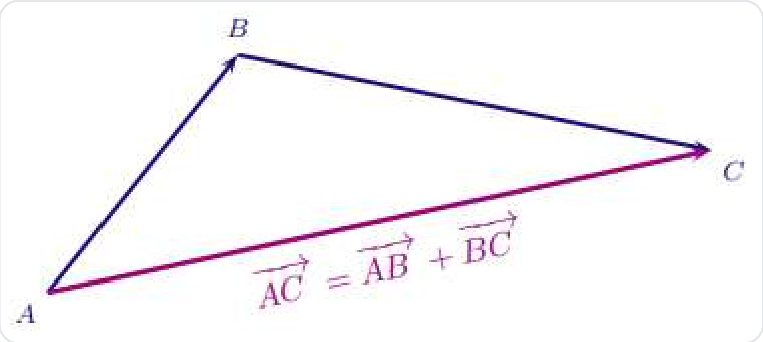
III.1 Somme de deux vecteurs

Soient trois points A, B, C.

Si on applique la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de celle de vecteur $\overrightarrow{BC}$, on obtient la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est donc la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$



Somme de deux vecteurs : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

III.1.1 Relation de Chasles

Théorème

Théorème 4 (relation de Chasles).

Quels que soient les points A, B, C, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

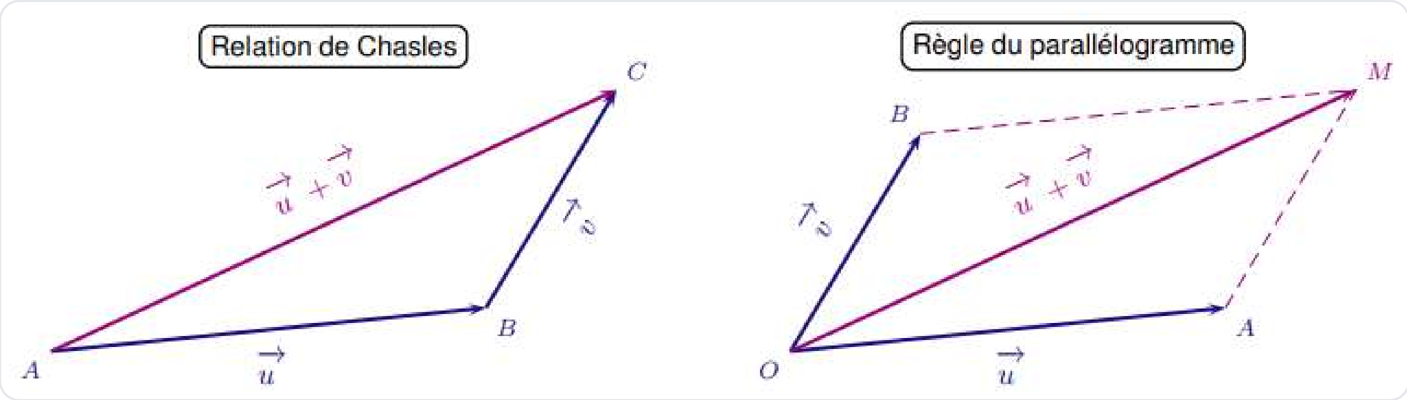
III.1.2 Règle du parallélogramme

Théorème

Théorème 5.

La somme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $OAMB$ est un parallélogramme.

III.1.3 Construction de la somme de deux vecteurs



Construction par Chasles.

III.1.4 Propriétés algébriques

Théorème

Théorème 6.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}, \qquad \vec{u}+\vec{0}=\vec{u}, \qquad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}).$$

III.2 Différence de deux vecteurs

III.2.1 Opposé d'un vecteur

Théorème

Théorème 7.

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $-\vec{u}$ tel que :

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$$

Le vecteur opposé a la même norme, la même direction mais un sens opposé.

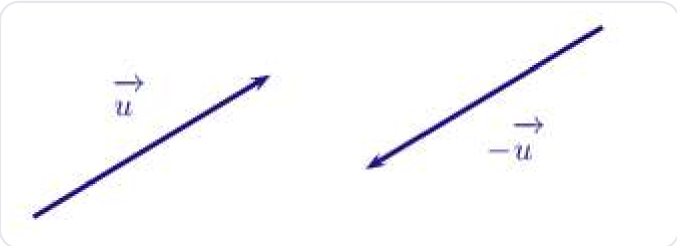


Schéma : $\vec{u}$ et son opposé $-\vec{u}$.

Théorème

Théorème 8.

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$:

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

Preuve. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

III.2.2 Définition

Théorème

Théorème 9.

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la différence $\vec{u} - \vec{v}$ est le vecteur :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

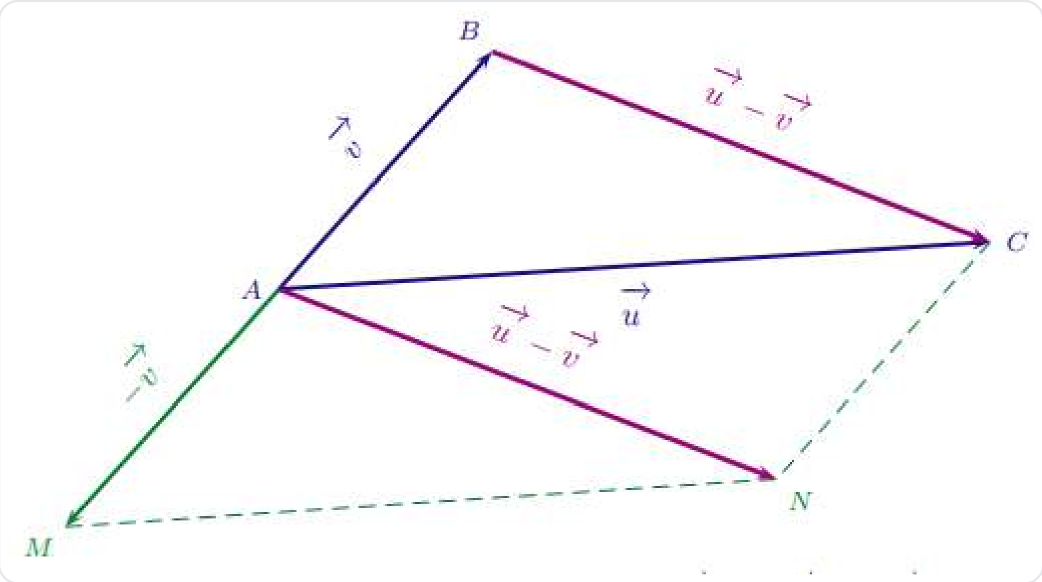


Schéma : construction de $\vec{u}-\vec{v}$.

Quels que soient les points A, B, C :

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$$

III.3 Milieu d'un segment et égalité vectorielle

Propriété

Propriété 3.

Pour tous points distincts A, B du plan :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ est le milieu de } [AB].$$

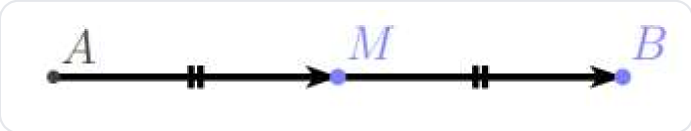


Schéma : M milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Preuve (schéma logique).

- M est le milieu de $[AB]$
- $\Longleftrightarrow M \in [AB]$ et $AM = MB$
- $\Longleftrightarrow A, M, B$ alignés dans cet ordre et $AM = MB$
- $\Longleftrightarrow$ les droites (AM) et (MB) sont parallèles, même sens de A vers M et de M vers B, et $MA = MB$
- $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

IV. Coordonnées

IV.1 Coordonnées d'un vecteur

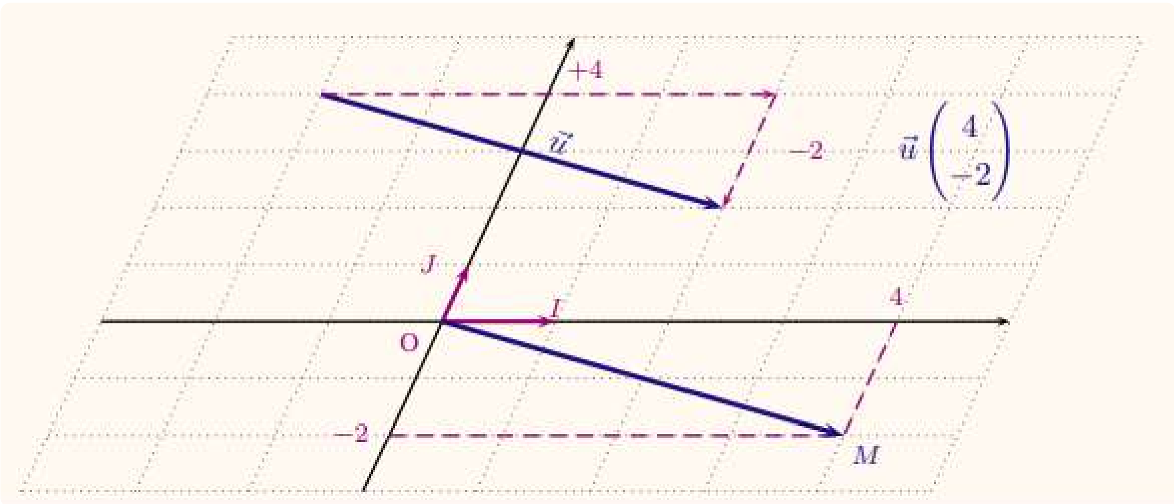
Définition

Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$. Soit $\vec{u}$ un vecteur.

On appelle **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ les coordonnées du point $M(x; y)$ dans le repère $(O; I; J)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u}.$$

On note indifféremment $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u}\binom{x}{y}$.



Exemple : lecture des coordonnées d'un vecteur dans un repère.

Remarque

Les coordonnées d'un vecteur dépendent du choix du repère.

IV.1.1 Propriétés des coordonnées

Définition

Soit $(O;I;J)$ un repère du plan. On considère deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$.

- **Vecteur nul :**

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- **Égalité de deux vecteurs :**

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

- **Somme de deux vecteurs :**

$$\vec{u} + \vec{v} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}.$$

IV.2 Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Théorème

Théorème 10.

Soit $(O; I; J)$ un repère du plan et deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(O; I; J)$ sont :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Mémo : « 2ème point − 1er point ».

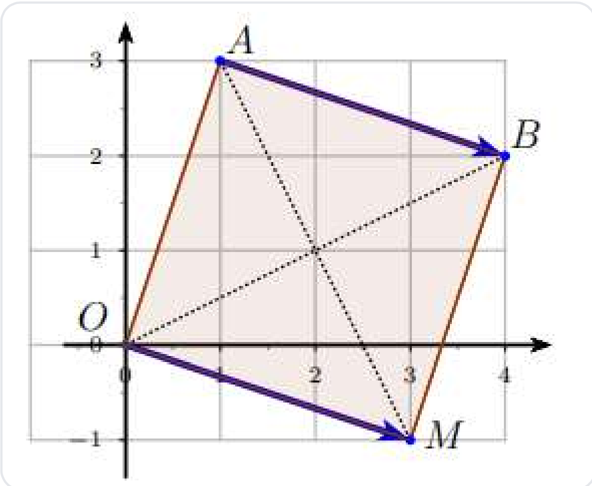


Schéma : lecture de $\overrightarrow{AB}$ via un parallélogramme.

Preuve (idée). Si $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x}{y}$, alors $M(x; y)$ est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le quadrilatère $OABM$ est donc un parallélogramme, d'où :

$$\mathrm{mil}[AM] = \mathrm{mil}[OB] \Longrightarrow \begin{cases} x = x_B - x_A \\ y = y_B - y_A \end{cases}$$

$$mil[AM] = mil[OB] \iff \begin{cases} \dfrac{x_A + x}{2} = \dfrac{0 + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y}{2} = \dfrac{0 + y_B}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_B - x_A \\ y = y_B - y_A \end{cases}$$

Démonstration détaillée (milieux dans le parallélogramme).

Exercice 2.

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Dans le repère $(A; B; D)$, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

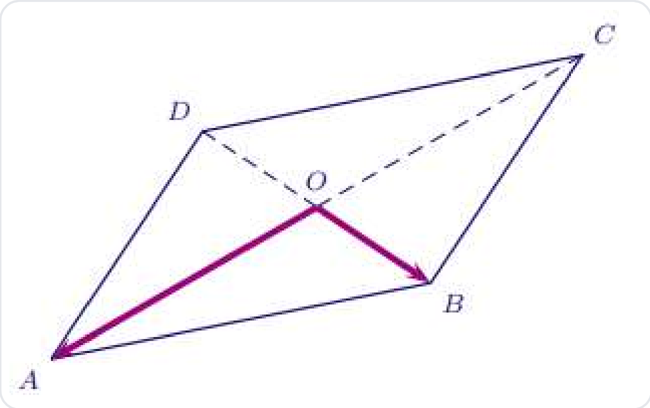


Figure et corrigé de l'exercice 3.

Corrigé (idée). Dans le repère $(A; B; D)$, on a $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $D(0; 1)$ et donc $C(1; 1)$. Ainsi :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Dans le repère $(O; A; B)$, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

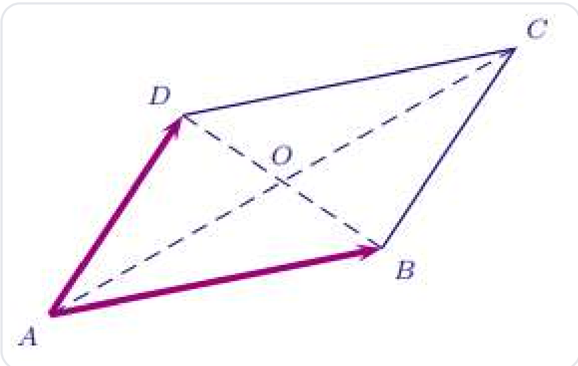


Figure et corrigé de l'exercice 2.

Corrigé (idée). Dans le repère $(O; A; B)$, $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(0; 1)$. Comme O est le centre du parallélogramme, on obtient $C(-1; 0)$ et $D(0; -1)$. Ainsi :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}.$$