Evaluation – Fonctions, équations et inéquations
Sujet 2

Exercice 1 (8 points) — Lecture graphique d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 4x - 1,$$

et sa courbe représentative sur l'intervalle $[0\,;5]$ ci-dessous.

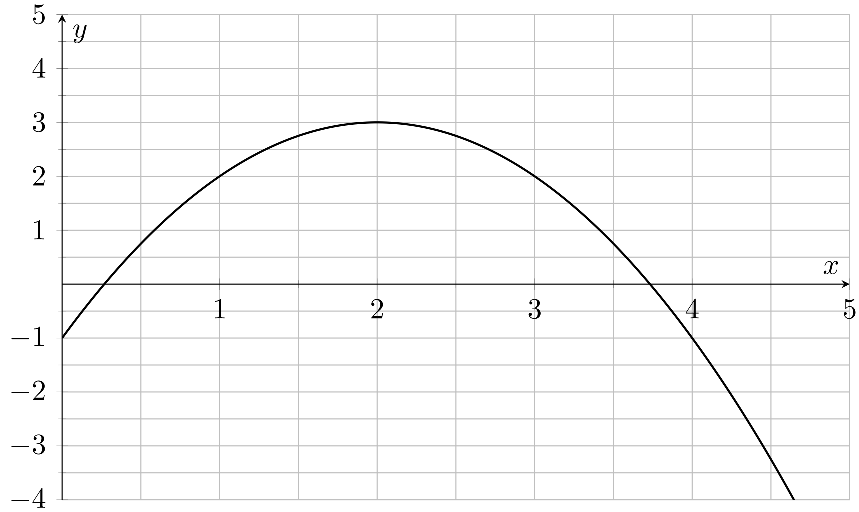

FIGURE 1 – Courbe représentative de $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ sur $[0;5]$.

1) Calculer : $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$ (on pourra vérifier graphiquement).
2) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
3) Déterminer les intervalles sur lesquels f est positive puis négative.
4) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;5]$.
5) Déterminer les coordonnées du maximum de f sur l'intervalle $[0\,;5]$.
6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 2$ pour tout $x \in [0\,;5]$.

Exercice 2 (2 points) — Vrai / Faux

On note I un intervalle centré en 0, et g et h deux fonctions définies sur I.
Pour chaque affirmation, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse** et **justifier**.

Affirmation 1
Si g est paire et h est paire, alors la fonction $f = g(x+1)$ est encore paire.

Affirmation 2
Si g et h sont deux fonctions impaires, alors la fonction $f = g - h$ est une fonction impaire.

Exercice 3 (6 points) — Résolution d'équations

1) Résoudre l'équation :

$$4(3x-2)-5(x+1)=7.$$

2) Résoudre l'équation :

$$x(x-4)-3(x-4)^2=0.$$

3) Résoudre l'équation :

$$7x^2-28=0.$$

Exercice 4 (4 points) — Résolution d'inéquations

1) Résoudre l'inéquation :

$$-6(2x-3)\leq 5x+16.$$

2) Résoudre la double inéquation :

$$-2\leq \frac{4x+1}{3}<3.$$

Corrigé succinct

Exercice 1

On utilise la courbe fournie pour toutes les lectures graphiques, sauf la question 1.

1) **Calculs algébriques**

$$\begin{aligned} f(0) &= -0^2 + 4 \cdot 0 - 1 = -1, \\ f(1) &= -1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = -1 + 4 - 1 = 2, \\ f(2) &= -4 + 8 - 1 = 3, \\ f(3) &= -9 + 12 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Valeurs vérifiables graphiquement.

2) **Résolution graphique de** $f(x) = 0$
On observe où la courbe coupe l'axe des abscisses.
On lit :

$$f(x) = 0 \iff x \approx 0,3 \quad \text{et} \quad x \approx 3,7.$$

3) **Signe de** f
La courbe est :
— **au-dessus** de l'axe x (donc $f(x) > 0$) pour $x \in]0,3\,;\,3,7[$,
— **en dessous** (donc $f(x) < 0$) pour $x < 0,3$ ou $x > 3,7$.

4) **Variations**
Le sommet est au niveau de $x = \dfrac{4}{2} = 2$, et graphiquement $f(2) = 3$.
Tableau de variations :

x	0		2		5
f		$\nearrow$	3	$\searrow$	

5) **Maximum sur** $[0; 5]$
Le sommet appartient à l'intervalle.
Maximum :

$$f_{\max} = 3 \quad \text{atteint en } x = 2.$$

Coordonnées : $(2\,;3)$.

6) **Résolution graphique de** $f(x) \geq 2$
On trace mentalement la droite horizontale $y = 2$ et on observe les intersections.
On lit :

$$f(x) \geq 2 \iff x \in [1\,;\,3].$$

Exercice 2 — Vrai/Faux

Affirmation 1 : *Faux.*

Contre-exemple : Prenons $g(x) = x^2$, qui est paire.
Alors

$$f(x) = g(x+1) = (x+1)^2.$$

On calcule :

$$f(-x) = (-x+1)^2 \neq (x+1)^2 = f(x).$$

Donc f n'est pas paire.

$$\boxed{\text{L'affirmation est donc fausse.}}$$

Affirmation 2

« Si g et h sont impaires, alors $f = g - h$ est impaire. »

Réponse : Vrai.
Car pour tout réel x :

$$g(-x) = -g(x), \qquad h(-x) = -h(x).$$

Donc :

$$f(-x) = g(-x) - h(-x) = -g(x) - (-h(x)) = -g(x) + h(x) = -(g(x) - h(x)) = -f(x).$$

$$\boxed{g - h \text{ est bien impaire, l'affirmation est bien vraie.}}$$

Exercice 3 — Équations

1)

$$4(3x-2) - 5(x+1) = 7$$

$$12x - 8 - 5x - 5 = 7$$

$$7x - 13 = 7 \iff 7x = 20 \iff x = \frac{20}{7}.$$

Solution : $S_1 = \left\{\frac{20}{7}\right\}$.

2)

$$x(x-4) - 3(x-4)^2 = 0$$

Mise en facteur :

$$(x-4)\big(x - 3(x-4)\big) = 0$$

$$(x-4)(x-3x+12) = (x-4)(12-2x) = 0.$$

Il s'agit d'une EPN, on a donc :

$$x = 4 \quad \text{ou} \quad 12 - 2x = 0 \iff x = 6.$$

Solution : $S_2 = \{4\,;6\}$.

3)

$$7x^2 - 28 = 0 \iff 7x^2 = 28 \iff x^2 = 4.$$

$$x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

Solution : $S_2 = \{-2\,;2\}$.

Exercice 4 — Inéquations

1)

$$-6(2x-3) \leq 5x+16$$
$$-12x+18 \leq 5x+16$$
$$-12x-5x \leq 16-18$$
$$-17x \leq -2.$$

On divise par -17 : on **inverse** le sens.

$$x \geq \frac{2}{17}.$$

Solution : $S_4 = \left[\frac{2}{17}\,;+\infty\right[$.

2)

$$-2 \leq \frac{4x+1}{3} < 3$$

On multiplie par 3 :

$$-6 \leq 4x+1 < 9$$

On retire 1 :

$$-7 \leq 4x < 8$$

On divise par 4 :

$$-\frac{7}{4} \leq x < 2.$$

Solution : $S_5 = \left[-\frac{7}{4}\,;2\right[$.