Évaluation de rattrapage

Fonctions et proportionnalité — Sujet 1

Énoncé

Exercice 1 — Étude d'une fonction quadratique (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6.$$

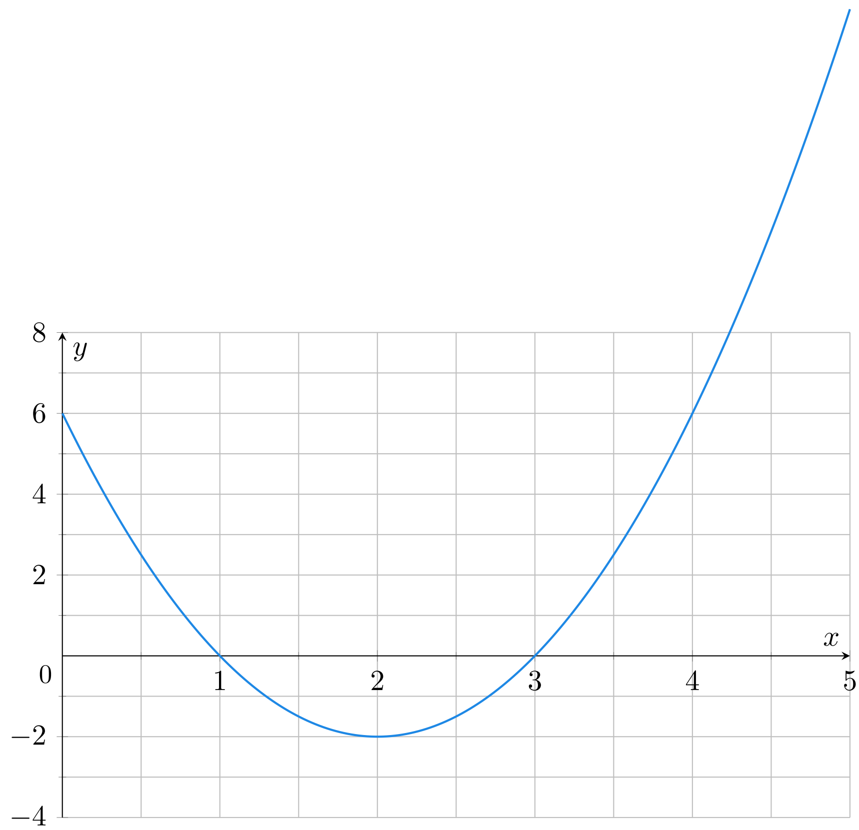

Figure 1 – Courbe représentative de $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ sur $[0\,;5]$.

Dans cet exercice, on se place sur l'intervalle $[0\,;5]$.

1) Recopier et compléter le tableau de valeurs (calculs ou lecture graphique) :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

2) Montrer que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = 2(x-2)^2 - 2.$$

3) En déduire les coordonnées du minimum de la fonction f.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$f(x) > 0.$$

5) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;5]$.

Exercice 2 — Taux d'évolution (9 points)

On arrondira les résultats **au dixième près** dans cet exercice.

1) Une quantité augmente de 12 %, puis baisse de 20 %. Calculer le taux d'évolution global.
2) Démontrer qu'un article dont le prix augmente de $x\%$ puis diminue de $x\%$ **ne retrouve jamais son prix initial**, avec $x \neq 0$. *(On pourra utiliser une identité remarquable.)*
3) Une population diminue de 18 %, puis encore de $t\%$. Au total, la diminution est de 30 %. Calculer $t\,\%$.
4) Un tarif subit deux augmentations consécutives identiques de $k\%$. Après ces deux augmentations, la hausse totale est de 21 %. Déterminer $k\,\%$.
5) Une quantité passe de 18 000 à 24 300. Calculer le taux d'évolution global.
6) On souhaite obtenir la même évolution que celle de la question précédente mais en **deux ans**, au taux annuel constant. Quel pourcentage annuel faut-il appliquer ?

Exercice 3 — Évolution d'un effectif (3 points)

En 2019, un club sportif compte 950 adhérents. Chaque année : augmentation de 8 % puis départ de 60 adhérents.

1) Calculer le nombre d'adhérents en 2020.
2) Calculer le nombre d'adhérents en 2021.

Corrigé

Corrigé Exercice 1

1) Calculs :

$$\begin{aligned}
&f(0) = 6,\\
&f(1) = 2 - 8 + 6 = 0,\\
&f(2) = 8 - 16 + 6 = -2,\\
&f(3) = 18 - 24 + 6 = 0,\\
&f(4) = 32 - 32 + 6 = 6.
\end{aligned}$$

Tableau :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	6	0	-2	0	6

2) Complétion du carré :

$$2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x) + 6 = 2((x-2)^2 - 4) + 6 = 2(x-2)^2 - 8 + 6 = 2(x-2)^2 - 2.$$

3) Comme un carré est toujours positif :

$$(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq -2.$$

Le minimum est donc -2, atteint pour $x = 2$. Coordonnées : $\boxed{(2\,;-2)}$.

4) **Résolution graphique** de $f(x) > 0$.
Sur le graphique, la courbe coupe l'axe des abscisses (où $y = 0$) en :

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = 3.$$

La courbe est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x < 1$ et pour $x > 3$. Donc, sur $[0\,;5]$:

$$\boxed{f(x) > 0 \iff x \in [0\,;1[\cup]3\,;5]}.$$

(lecture graphique)

5) Tableau de variations :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & 2 & & 5 \\
\hline
f & 6 & \searrow & (-2) & \nearrow & 16
\end{array}$$

(Sur la figure, on lit bien que f décroît jusqu'en $x = 2$, puis croît.)

Corrigé Exercice 2

1) Facteur global :

$$1{,}12 \times 0{,}80 = 0{,}896.$$

Taux global :

$$(0{,}896 - 1) \times 100 = -10{,}4\%.$$

Donc une $\boxed{\text{baisse de } 10{,}4\%}$.

2) Prix initial P. Après $+x\%$:

$$P_1 = P\left(1 + \frac{x}{100}\right).$$

Puis après $-x\%$:

$$P_2 = P_1\left(1 - \frac{x}{100}\right) = P\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right).$$

Identité remarquable : $(1+a)(1-a) = 1 - a^2$ avec $a = \frac{x}{100}$.

$$P_2 = P\left(1 - \left(\frac{x}{100}\right)^2\right).$$

Or si $x \neq 0$, alors $\left(\frac{x}{100}\right)^2 > 0$, donc

$$1 - \left(\frac{x}{100}\right)^2 < 1 \Rightarrow P_2 < P.$$

Ainsi, l'article **ne retrouve jamais** son prix initial si $x \neq 0$.

3) Diminution de 18% puis de $t\%$ pour une baisse totale de 30% :

$$0{,}82\left(1 - \frac{t}{100}\right) = 0{,}70.$$

$$1 - \frac{t}{100} = \frac{0{,}70}{0{,}82} \approx 0{,}8537.$$

$$\frac{t}{100} \approx 1 - 0{,}8537 = 0{,}1463 \Rightarrow t \approx 14{,}6\%.$$

4) Deux hausses identiques de $k\%$ donnent :

$$\left(1 + \frac{k}{100}\right)^2 = 1{,}21.$$

$$1 + \frac{k}{100} = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1 \Rightarrow \frac{k}{100} = 0{,}1 \Rightarrow k = 10{,}0\%.$$

5)

$$\frac{24\,300}{18\,000} = 1{,}35 \Rightarrow \text{hausse de } (1{,}35 - 1) \times 100 = 35{,}0\%.$$

6) On cherche r tel que :

$$(1+r)^2 = 1{,}35.$$

$$1 + r = \sqrt{1{,}35} \approx 1{,}1619 \Rightarrow r \approx 0{,}1619 \Rightarrow \boxed{16{,}2\%}.$$

Corrigé Exercice 3

On note E_n l'effectif l'année n.
Chaque année :

$$E_{n+1} = 1{,}08E_n - 60.$$

1) 2020 :

$$E_{2020} = 1{,}08 \times 950 - 60 = 1026 - 60 = 966.$$

2) 2021 :

$$E_{2021} = 1{,}08 \times 966 - 60 = 1043{,}28 - 60 = 983{,}28 \approx 983.$$