

Exercice X – Étude graphique d’une fonction

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = -2x^2 + 3x + 4,$$

et sa courbe représentative sur l’intervalle $[-2; 3]$ ci-dessous.

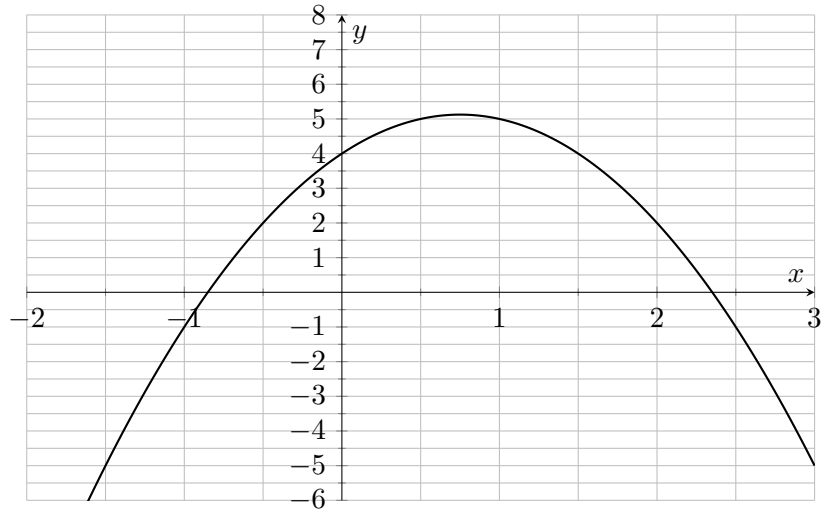


FIGURE 1 – Courbe représentative de $g(x) = -2x^2 + 3x + 4$ sur $[-2; 3]$.

- 1) Calculer $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$ et $g(2)$ (on pourra vérifier graphiquement).
- 2) Résoudre graphiquement l’équation $g(x) = -5$.
- 3) Indiquer les intervalles où g est positive et négative.
- 4) Lire graphiquement les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 5) Déterminer les coordonnées du sommet de la courbe.
- 6) Résoudre graphiquement l’inéquation $g(x) \leq 2$ sur l’intervalle $[-2; 3]$.

Corrigé de l'exercice X

On étudie la fonction $g(x) = -2x^2 + 3x + 4$ à l'aide de son graphique sur $[-2; 3]$.

1) Calculs directs

$$g(-1) = -2(-1)^2 + 3(-1) + 4 = -2 - 3 + 4 = -1,$$

$$g(0) = -2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 4 = 4,$$

$$g(1) = -2 + 3 + 4 = 5,$$

$$g(2) = -8 + 6 + 4 = 2.$$

2) Résolution graphique de $g(x) = -5$

$$g(x) = -5 \iff x \approx -1,5 \quad \text{et} \quad x \approx 3.$$

3) Signe de g

$$\begin{cases} g(x) > 0 & \text{pour } x \in]-0,8; 2,3], \\ g(x) < 0 & \text{pour } x < -0,8 \text{ ou } x > 2,3. \end{cases}$$

4) Variations de g

La fonction est :

croissante sur $[-2; 0,75]$ et décroissante ensuite.

Tableau de variations :

| | | | |
|--------|------|-------------------------|-----|
| x | -2 | $0,75$ | 3 |
| $g(x)$ | | $\nearrow 5,1 \searrow$ | |

5) Sommet de la courbe

Graphiquement :

$$g(0,75) \approx 5,1.$$

Donc le sommet S a pour coordonnées :

$$S(0,75; 5,1).$$

6) Résolution de $g(x) \leq 2$

On lit les intersections avec $y = 2$:

$$g(x) = 2 \iff x \approx -0,5 \quad \text{et} \quad x = 2.$$

La courbe est en dessous de $y = 2$ avant le premier point et après le second :

$$g(x) \leq 2 \iff x \in [-2; -0,5] \cup [2; 3].$$