Entraînement – Fonctions et Proportionnalité

Étude graphique et taux d'évolution — Sujet C

Énoncé

Exercice 1 — Étude d'une fonction quadratique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -4x^2 - 4x + 8.$$

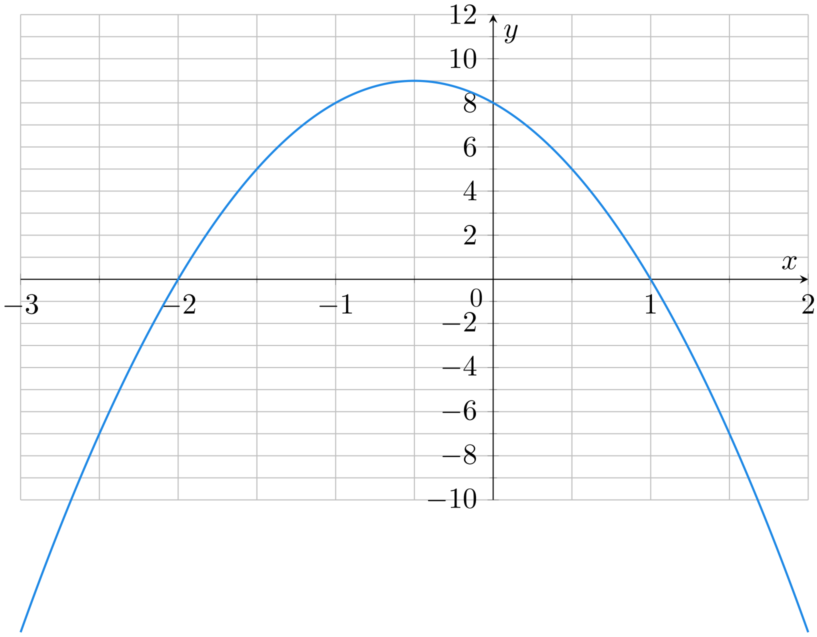

Figure 1 – Courbe représentative de $f(x) = -4x^2 - 4x + 8$ sur $[-3\,;2]$.

Dans cet exercice, on se place sur l'intervalle $[-3\,;2]$.

1) Recopier et compléter le tableau de valeurs (calculs ou lecture graphique) :

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

2) Montrer que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 9.$$

3) En déduire les coordonnées du maximum de la fonction f.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$f(x) \leq 5.$$

5) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 2 — Taux d'évolution et évolutions successives

On arrondira les résultats **au dixième près** dans cet exercice.

1) Une quantité augmente de 7 %, puis baisse de 12 % et augmente à nouveau de 10 %. Calculer le taux d'évolution global.
2) Un produit voit son prix augmenter de x%. Puis il bénéficie d'une remise de y%. Exprimer y en fonction de x pour que le prix final soit égal au prix initial.
3) Une population augmente de 15 %, puis encore de t%. Au total, elle augmente de 34 %. Calculer t %.
4) Un tarif subit deux baisses consécutives identiques de k%. Après ces deux baisses, la diminution totale est de 25 %. Déterminer k %.
5) Une quantité passe de 24 400 à 32 500. Calculer le taux d'évolution global.
6) On souhaite obtenir la même hausse que celle de la question précédente mais en 2 ans, au taux annuel constant. Quel pourcentage annuel faut-il appliquer ?

Exercice 3 — Évolution d'un effectif dans un lycée

En 2020, un lycée compte 1 100 élèves. Chaque année : gain de 10 % mais départ de 150 lycéens.

1) Calculer l'effectif en 2021.
2) Calculer l'effectif en 2022.

Corrigé

Corrigé Exercice 1

1) Calculs :

$$\begin{aligned} f(-3) &= -36+12+8=-16,\\ f(-2) &= -16+8+8=0,\\ f(-1) &= -4+4+8=8,\\ f(0) &= 8,\\ f(1) &= -4-4+8=0,\\ f(2) &= -16-8+8=-16. \end{aligned}$$

   Tableau :

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-16	0	8	8	0	-16

2) On part de la forme souhaitée :

$$f(x) = -4\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+9.$$

   On développe le carré :

$$\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 = x^2+x+\tfrac{1}{4}.$$

   On remplace dans l'expression :

$$f(x) = -4(x^2+x+\tfrac{1}{4})+9.$$

$$f(x) = -4x^2-4x-1+9.$$

$$f(x) = -4x^2-4x+8.$$

   On retrouve bien l'expression initiale de la fonction.

3) Un carré est toujours positif, donc : $f(x) \leq 9$ (Attention au signe devant ce carré). Le maximum est atteint lorsque $(x+\frac{1}{2})^2=0$, c'est-à-dire pour

$$x=-\tfrac{1}{2},$$

   et

$$f(-\tfrac{1}{2})=9.$$

   Maximum : $\boxed{(-\frac{1}{2}\,;9)}$.

4) **Résolution graphique** de $f(x) \le 5$.
Sur le graphique, la courbe coupe la droite $y = 5$ en :

$$x = -\tfrac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad x = \tfrac{1}{2}.$$

La courbe est :
- au-dessus de $y = 5$ entre $x = -\frac{3}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$;
- en dessous de $y = 5$ pour $x \le -\frac{3}{2}$ et $x \ge \frac{1}{2}$.

Donc, sur $[-3\,;2]$:

$$\boxed{f(x) \le 5 \iff x \in [-3\,;-\tfrac{3}{2}] \cup [\tfrac{1}{2}\,;2]}.$$

5) Tableau de variations :

$$\begin{array}{c|ccc} x & -3 & -\frac{1}{2} & 2 \\ \hline f & \nearrow & 9 & \searrow \end{array}$$

Corrigé Exercice 2

1) Facteur global :

$$F = 1{,}07 \times 0{,}88 \times 1{,}10 = 1{,}03576 \approx 1{,}036.$$

Taux :

$$\boxed{3{,}6\% \text{ de hausse}}.$$

2) Condition (détaillé dans les corrigés précédents) :

$$(1 + \tfrac{x}{100})(1 - \tfrac{y}{100}) = 1 \iff \boxed{y = \frac{100x}{100 + x}}.$$

3)

$$1{,}15(1 + \tfrac{t}{100}) = 1{,}34$$

$$1 + \tfrac{t}{100} \approx 1{,}165 \Rightarrow \boxed{t \approx 16{,}5\%}.$$

4) Deux baisses :

$$(1 - \tfrac{k}{100})^2 = 0{,}75 \Rightarrow 1 - \tfrac{k}{100} \approx 0{,}866 \Rightarrow \boxed{k \approx 13{,}4\%}.$$

5)

$$F = \frac{32\,500}{24\,400} \approx 1{,}332 \Rightarrow \boxed{33{,}2\% \text{ de hausse}}.$$

6) Taux annuel :

$$(1 + r)^2 = 1{,}332 \Rightarrow 1 + r \approx 1{,}154 \Rightarrow \boxed{r \approx 15{,}4\%}.$$

Corrigé Exercice 3

On note E_n l'effectif l'année n :

$$E_{n+1} = 1{,}10\,E_n - 150.$$

1)
$$E_{2021} = 1{,}10 \times 1100 - 150 = 1060.$$

2)
$$E_{2022} = 1{,}10 \times 1060 - 150 = 1016.$$