Entraînement – Fonctions et Proportionnalité
Étude graphique et taux d'évolution — Sujet 2

Énoncé

Exercice 1 — Étude d'une fonction quadratique (8 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^2 - 6x + 10.$$

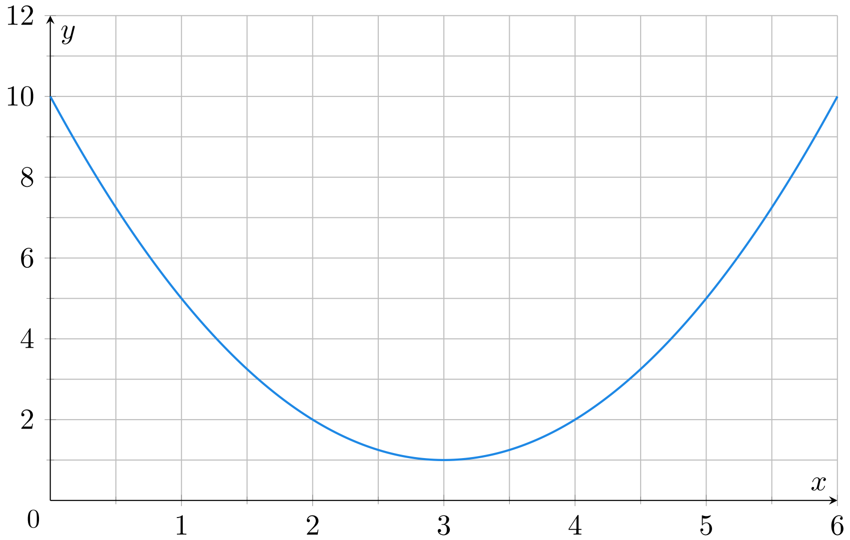

Figure 1 – Courbe représentative de $g(x) = x^2 - 6x + 10$ sur $[0\,;6]$.

On se place sur l'intervalle $[0\,;6]$.

1) Compléter le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

2) Montrer que l'on peut écrire :
$$g(x) = (x-3)^2 + 1.$$

3) En déduire les coordonnées du minimum de la fonction g.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$g(x) \leq 5.$$

5) Dresser le tableau de variation de g sur $[0\,;6]$.

Exercice 2 — Taux d'évolution et évolutions successives (9 points)

1) Un prix augmente de $4\,\%$, puis de $9\,\%$. Justifier que le taux d'évolution global est d'environ $13{,}5\,\%$.

2) Un produit voit son prix baisser de $x\%$, puis augmenter de $y\%$. Exprimer le taux global final en fonction de x et y.

3) Une population diminue de $18\,\%$, puis encore de $t\%$. Au total, la baisse est de $30\,\%$. Calculer t (au dixième près).

4) Un tarif subit deux hausses consécutives identiques de $k\%$. Après ces deux hausses, l'augmentation totale est de $25\,\%$. Déterminer k (au dixième près).

5) Une quantité passe de $63\,000$ à $54\,432$. Calculer le **taux de baisse global** (au dixième près).

6) On souhaite obtenir cette même baisse en **2 ans**, au taux annuel constant. Quel pourcentage annuel faut-il appliquer (au dixième près) ?

Exercice 3 — Évolution d'un effectif dans un club sportif (3 points)

En 2018, un club compte $1\,200$ licenciés. Chaque année : gain de $10\,\%$, puis départ de 140 adhérents.

1) Calculer le nombre d'adhérents en 2019.

2) Calculer le nombre d'adhérents en 2020.

Corrigé

Corrigé Exercice 1

1) Calculs :

$$\begin{aligned} g(0) &= 10, \\ g(1) &= 5, \\ g(2) &= 2, \\ g(3) &= 1, \\ g(4) &= 2, \\ g(5) &= 5. \end{aligned}$$

2) Complétion du carré :

$$x^2 - 6 * x + 10 = x^2 - 6 * x + 9 + 1 = (x-3)^2 + 1.$$

On utilise l'expression réduite :

$$f(x) = (x-3)^2 + 1.$$

Comme un carré est toujours positif, on a :

$$(x-3)^2 \geq 0 \quad \text{pour tout réel } x.$$

Ainsi :

$$f(x) = (x-3)^2 + 1 \geq 1.$$

La valeur minimale est atteinte lorsque le carré vaut 0, c'est-à-dire lorsque

$$x - 3 = 0 \iff x = 3.$$

On calcule alors :

$$f(3) = (3-3)^2 + 1 = 1.$$

Donc la fonction admet un **minimum égal à** 1, atteint pour $x = 3$.
Les coordonnées du minimum sont :

$$\boxed{(3\,;1)}.$$

3) Résolution graphique :

$$g(x) \leq 5 \iff x \in [1\,;5].$$

4) Tableau de variation :

x	0		3		6
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Corrigé Exercice 2

1) Facteur global :

$$1{,}04 \times 1{,}09 = 1{,}1336.$$

Soit environ 13,4%.

2) Taux global :

$$(1 - \tfrac{x}{100})(1 + \tfrac{y}{100}) - 1.$$

3)
$$0{,}82(1-\tfrac{t}{100}) = 0{,}70 \Rightarrow t \approx 14{,}6\%.$$

4)
$$(1+\tfrac{k}{100})^2 = 1{,}25 \Rightarrow 1+\tfrac{k}{100} = \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}118 \Rightarrow k \approx 11{,}8\%.$$

5)
$$\frac{54432}{63000} = 0{,}864.$$

Baisse :
$$1-0{,}864 = 0{,}136 \Rightarrow 13{,}6\%.$$

6) On cherche r tel que :
$$(1-r)^2 = 0{,}864.$$
$$1-r = \sqrt{0{,}864} \approx 0{,}9297.$$
$$r \approx 0{,}0703 \Rightarrow 7{,}0\%.$$

Corrigé Exercice 3

$$E_{2019} = 1{,}10 \times 1200 - 140 = 1180.$$
$$E_{2020} = 1{,}10 \times 1180 - 140 = 1158.$$