Entraînement
Vecteurs et équations de droites

Énoncé

Exercice 1 — Parallélogramme et vecteurs

Dans un repère du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère :

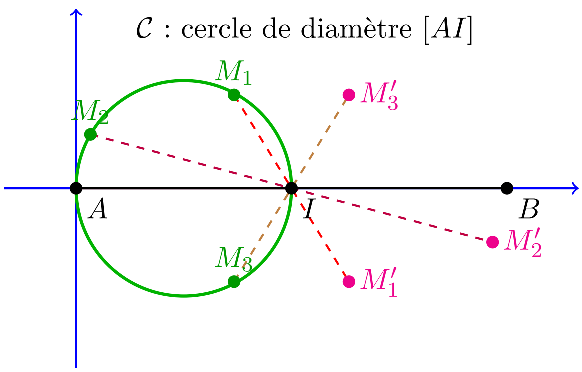
$$A(-1;-2), \quad B(5;-1), \quad C(6;3), \quad D(0;2).$$

1) Faire une figure représentant les points A, B, C et D.
2) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
3) Construire le point E tel que $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{CB}$.
4) Déterminer les coordonnées du point E.
5) Démontrer que $\vec{BE} = -\vec{BC}$.
6) Que peut-on en déduire concernant le point B ?

Exercice 2 — Lieu géométrique et vecteurs

On considère la configuration suivante :

— A et B sont deux points fixes du plan ;
— I est le milieu du segment $[AB]$;
— $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[AI]$;
— M est un point mobile du cercle $\mathcal{C}$;
— M' est défini par $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MM'}$.

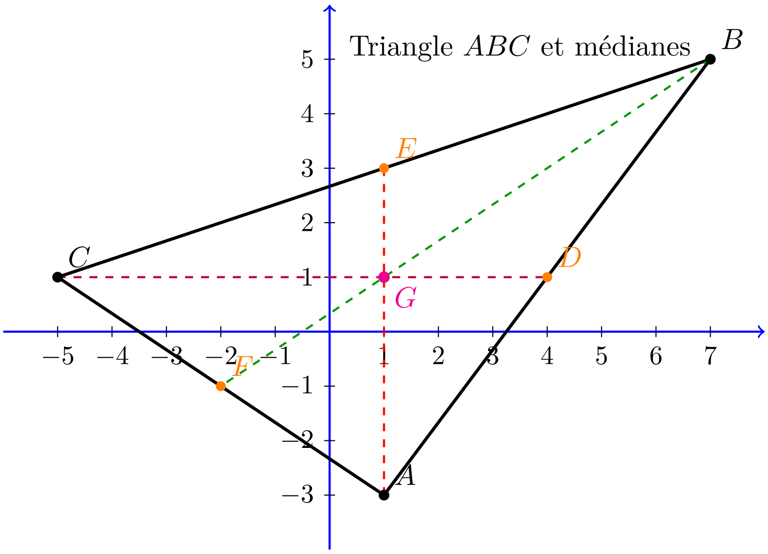


1) Démontrer que $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.
2) En déduire la position du point I par rapport au segment $[MM']$.
3) En déduire le lieu géométrique du point M'.
4) Démontrer que le quadrilatère $MAM'B$ est un parallélogramme.

Exercice 3 — Médianes et équations de droites

Dans un repère du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère :

$$A(1;-3), \quad B(7;5), \quad C(-5;1).$$



1) Déterminer les coordonnées des milieux D, E et F de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
2) Déterminer les équations des médianes (AE), (BF) et (CD).
3) On rappelle que des droites sont concourantes lorsqu'elles passent par un même point. Démontrer que les trois médianes sont concourantes en un point G dont on précisera les coordonnées.
4) Déterminer l'équation de (EF) et montrer qu'elle est parallèle à (AB).

Corrigé

Corrigé Exercice 1

2) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme
On calcule :

$$\vec{AB}\,(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A) \Rightarrow \vec{AB}\,(5-(-1)\ ;\ -1-(-2)) \Rightarrow \vec{AB}\,(6\ ;\ 1).$$

$$\vec{DC}\,(x_C - x_D\ ;\ y_C - y_D) \Rightarrow \vec{DC}\,(6-0\ ;\ 3-2) \Rightarrow \vec{DC}\,(6\ ;\ 1).$$

Donc $\vec{AB} = \vec{DC}$, ainsi deux côtés opposés sont représentés par des vecteurs égaux. On conclut : $\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$

4) Coordonnées de E
On calcule d'abord :

$$\vec{CB}\,(x_B - x_C\ ;\ y_B - y_C) \Rightarrow \vec{CB}\,(5-6\ ;\ -1-3) \Rightarrow \vec{CB}\,(-1\ ;\ -4).$$

Puis :

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{CB} \Rightarrow \vec{AE}\,(6\ ;\ 1) + (-1\ ;\ -4) \Rightarrow \vec{AE}\,(5\ ;\ -3).$$

Or :

$$\vec{AE}\,(x_E - x_A\ ;\ y_E - y_A) = \vec{AE}\,(x_E + 1\ ;\ y_E + 2).$$

Donc :

$$(x_E + 1\ ;\ y_E + 2) = (5\ ;\ -3) \Rightarrow x_E = 4,\ y_E = -5.$$

Ainsi : $\boxed{E(4; -5)}$.

5) Montrer que $\vec{BE} = -\vec{BC}$

$$\vec{BE}\,(x_E - x_B\ ;\ y_E - y_B) \Rightarrow \vec{BE}\,(4-5\ ;\ -5-(-1)) \Rightarrow \vec{BE}\,(-1\ ;\ -4).$$

$$\vec{BC}\,(x_C - x_B\ ;\ y_C - y_B) \Rightarrow \vec{BC}\,(6-5\ ;\ 3-(-1)) \Rightarrow \vec{BC}\,(1\ ;\ 4).$$

Donc $\vec{BE} = -\vec{BC}$.

6) Conclusion
$\vec{BE} = -\vec{BC}$ signifie que E, B, C sont alignés et que $BE = BC$. Donc $\boxed{B \text{ est le milieu du segment } [EC].}$

Corrigé Exercice 2

1) Montrer que $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$
Par Chasles :

$$\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA} \qquad \text{et} \qquad \vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB}.$$

En additionnant :

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI} + (\vec{IA} + \vec{IB}).$$

Or I est le milieu de $[AB]$, donc $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$. Ainsi :

$$\boxed{\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}.}$$

2) Position de I par rapport à $[MM']$
On sait $\vec{MM'} = \vec{MA} + \vec{MB}$, donc :

$$\vec{MM'} = 2\vec{MI}.$$

Cela signifie que M, I, M' sont alignés et que $MI = \frac{1}{2}MM'$. Donc :

$$\boxed{I \text{ est le milieu de } [MM'].}$$

3) Lieu géométrique de M'
Comme I est le milieu de $[MM']$, le point M' est l'image de M par la symétrie centrale de centre I. L'image d'un cercle par une symétrie centrale est un cercle de même rayon.
De plus, comme I est le milieu de $[AB]$, l'image de A par cette symétrie est B. Donc l'image du cercle de diamètre $[AI]$ est le cercle de diamètre $[BI]$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{Le lieu de } M' \text{ est le cercle de diamètre } [IB].}$$

4) Montrer que $MAM'B$ est un parallélogramme
Les diagonales du quadrilatère $MAM'B$ sont $[AB]$ et $[MM']$.

- I est le milieu de $[AB]$ (donnée) ;
- I est le milieu de $[MM']$ (question 2).

Les diagonales ont donc le même milieu, ce qui caractérise un parallélogramme. Ainsi :

$$\boxed{MAM'B \text{ est un parallélogramme.}}$$

Corrigé Exercice 3

1) Calcul des milieux

$$D\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = D\left(\frac{1+7}{2} ; \frac{-3+5}{2}\right) = D(4; 1).$$

$$E\left(\frac{x_B + x_C}{2} ; \frac{y_B + y_C}{2}\right) = E\left(\frac{7+(-5)}{2} ; \frac{5+1}{2}\right) = E(1; 3).$$

$$F\left(\frac{x_C + x_A}{2} ; \frac{y_C + y_A}{2}\right) = F\left(\frac{-5+1}{2} ; \frac{1+(-3)}{2}\right) = F(-2; -1).$$

2) Équations des médianes
Droite (AE) : A(1 ;-3) et E(1 ;3) ont la même abscisse. Donc $\boxed{(AE) : x = 1}$.
Droite (BF) :

$$m = \frac{y_F - y_B}{x_F - x_B} = \frac{-1-5}{-2-7} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}.$$

Donc (BF) est de la forme $y = \frac{2}{3}x + p$. Avec $B(7; 5)$:

$$5 = \frac{2}{3} \cdot 7 + p = \frac{14}{3} + p \Rightarrow p = \frac{1}{3}.$$

Donc $\boxed{(BF) : y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}$.
Droite (CD) : C(-5 ;1) et D(4 ;1) ont la même ordonnée. Donc $\boxed{(CD) : y = 1}$.

3) Concurrence et coordonnées de G
Le point G intersection de (AE) et (CD) vérifie :

$$x = 1 \quad \text{et} \quad y = 1 \Rightarrow G(1; 1).$$

On vérifie que G appartient à (BF) :

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} = 1.$$

Donc $G \in (BF)$. Les trois médianes passent donc par le même point G.
Ainsi :

$$\boxed{\text{Les trois médianes sont concourantes en } G(1;1).}$$

4) Droite (EF) et parallélisme avec (AB)
Pente de (EF) :

$$m_{EF} = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{-1-3}{-2-1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

Donc (EF) est de la forme $y = \frac{4}{3}x + p$. Avec $E(1;3)$:

$$3 = \frac{4}{3} \cdot 1 + p \Rightarrow p = \frac{5}{3}.$$

Donc $\boxed{(EF) : y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}}$.
Pente de (AB) :

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-(-3)}{7-1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Donc (AB) est de la forme $y = \frac{4}{3}x + p$. Avec $A(1;-3)$:

$$-3 = \frac{4}{3} \cdot 1 + p \Rightarrow p = -\frac{13}{3}.$$

Donc $\boxed{(AB) : y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3}}$.
Comme $m_{EF} = m_{AB}$, on conclut :

$$\boxed{(EF)//(AB).}$$