🔢 Fiche 1 – Les ensembles de nombres

I.1 Les entiers

I.1.1 Définitions

Définition 1 (Les entiers naturels)

Un nombre **entier naturel** est un nombre (positif) qui peut s'écrire sans virgule.
L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots \}$

Définition 2 (Les entiers relatifs)

Un **entier relatif** se présente comme un entier naturel muni d'un signe positif ou négatif qui indique sa position par rapport à zéro sur un axe orienté.

L'entier zéro lui-même est donc le seul nombre à la fois positif et négatif.
L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{ \ldots -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; +1 ; +2 ; +3 \ldots \}$

Remarque : On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

📌 **Remarque historique**

- **Origine du symbole** $\mathbb{N}$, pour les entiers naturels (*de naturale* en italien)
  Le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858–1932) définit l'ensemble des entiers naturels non nuls par des axiomes qui portent aujourd'hui son nom et le note $\mathbb{N}$.
- **Expression nombre naturel** : Cette expression apparaît vers 1675.
- $\mathbb{Z}$ **: Origine du symbole** $\mathbb{Z}$
  Cette notation viendrait du groupe BOURBAKI (Algèbre, 1969), $\mathbb{Z}$ venant de *Zahl* (nombre en allemand).

I.2 Les décimaux

I.2.1 Définitions

Définition 3 (Les décimaux)

Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction décimale, c'est-à-dire une fraction dont le dénominateur est de la forme 10^n avec n entier naturel.
L'ensemble des entiers décimaux est noté $\mathbb{D}$.

$\mathbb{D} = \{ a / 10^n ; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$

💡 **Exemple**

$2{,}5 = 25 / 10^1 \in \mathbb{D}$; $1 / 3 \notin \mathbb{D}$

I.2.2 Histoire

La notation $\mathbb{D}$ est française et vient du groupe BOURBAKI (1970).

I.2.3 Une preuve que $1 / 3 \notin \mathbb{D}$

🔷 **Preuve**

On effectue une démonstration par l'absurde.

🟠 **Remarque**

Le raisonnement par l'absurde (ou apagogie) montre qu'une affirmation est vraie en prouvant que son contraire est faux.

Supposons que $1 / 3 \in \mathbb{D}$.
Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$1 / 3 = a / 10^n \Leftrightarrow 3a = 10^n$

Mais la somme des chiffres de 10^n est toujours 1 ⇒ pas multiple de 3 ⇒ contradiction.

⇨ $1 / 3 \notin \mathbb{D}$

🟠 **Remarque alternative**

$10^n = (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$

Le facteur premier 3 n'apparaît pas : donc 10^n n'est pas multiple de 3.

I.3 Les rationnels

I.3.1 Définitions

Définition 4 (Les rationnels)

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction, c'est-à-dire comme le quotient de deux entiers relatifs. L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q} = \{ a / b \,;\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$

Si a et b sont des **nombres premiers** entre eux, la fraction est dite **irréductible** et est **unique**.

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ est l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

💡 **Exemple**

$2{,}5 = 25 / 10 \in \mathbb{Q}$; $1 / 3 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$

📌 **Remarque historique**

- $\mathbb{Q}$ **: Origine du symbole** : PEANO aurait utilisé la lettre $\mathbb{Q}$ (pour "quotient"), notation reprise par le groupe BOURBAKI.
- **Mot rationnel** : utilisé dès 1550. L'opposition rationnel / irrationnel viendrait d'une traduction du persan (KHWĀRIZMI) (Bagdad, 850).

I.4 Les réels

I.4.1 Définitions

Définition 5 (Les réels)

Un **réel** est un nombre qui peut être représenté par une *partie entière* et une *liste finie ou infinie de décimales*.
Cela inclut les rationnels et les irrationnels. L'ensemble est noté $\mathbb{R}$.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

I.4.2 Histoire

La lettre $\mathbb{R}$ pour désigner l'ensemble des réels aurait été utilisée par DEDEKIND Julius Wilhelm (1831–1916), ainsi que le $\mathbb{R}$ gothique pour les textes plus formels.

I.4.3 Les irrationnels

Définition 6 (Les irrationnels)

Un **nombre irrationnel** est un nombre réel qui n'est pas rationnel.

- Le nombre √2 est un irrationnel, on note : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- Le nombre π est un irrationnel, on note : $\pi \notin \mathbb{Q}$

📌 **Remarque historique**

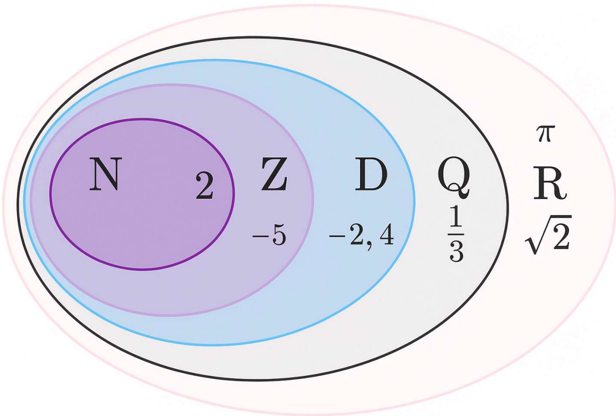
La découverte de l'irrationalité de √2 est parfois attribuée à Hippase de Métaponte, un pythagoricien du Ve siècle av. J.-C.
Elle aurait été gardée secrète car elle contredisait les idées des mathématiciens grecs de l'époque.

La première démonstration daterait d'environ −410. Euclide en donne une classification dans les *Éléments*, Livre X.

I.5 Diagrammes de Venn

I.5.1 Les ensembles de nombres

Diagramme représentant les ensembles inclus les uns dans les autres :



I.5.2 Histoire

Leonhard Euler (1707–1783) invente les premiers diagrammes en cercle. John Venn (1834–1923) les perfectionnera.

I.6 Compléments

- **Privé de zéro**

L'ensemble $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ est noté $\mathbb{Z}^*$.
Même principe pour $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ noté $\mathbb{R}^*$.

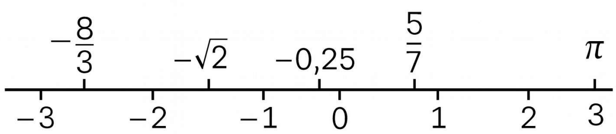
- **Positifs ou négatifs**

$\mathbb{R}_+$: réels positifs ou nuls ; $\mathbb{R}_-$: réels négatifs ou nuls.

I.7 Représentation sur la droite numérique

Propriété 1

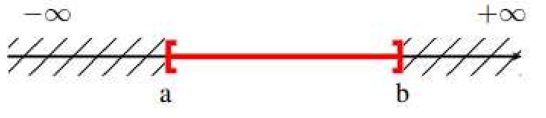
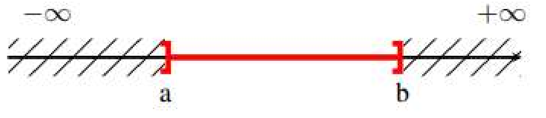
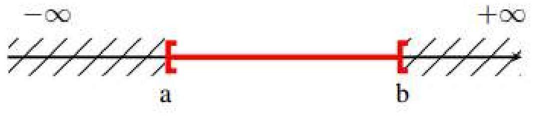
Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique.

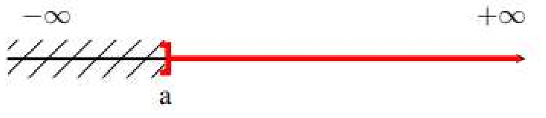


II. Les intervalles

II.1 Notations des intervalles

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres réels compris entre deux réels *a* et *b* où *a* est inférieur ou égal à *b*.
Selon que l'on prenne (ou non) le nombre *a*, on dira que l'intervalle est fermé (ouvert) du côté de *a*.
Un intervalle peut se représenter à l'aide d'un segment, d'une droite ou d'une demi-droite sur un axe.

L'intervalle	Inéquation associée	Représentation	Ouvert ou fermé ?
$[a\ ;\ b]$	$a \leqslant x \leqslant b$		dit **fermé borné** ou **segment**
$]a\ ;\ b]$	$a < x \leqslant b$		dit **semi-ouvert** ou **semi-fermé**
$[a\ ;\ b[$	$a \leqslant x < b$		dit **semi-ouvert** ou **semi-fermé**
$]a\ ;\ b[$	$a < x < b$		dit **ouvert**

L'intervalle	Inéquation associée	Représentation	Ouvert ou fermé ?
$[a\ ;\ +\infty[$	$a \leqslant x$		**intervalle fermé**
$]a\ ;\ +\infty[$	$a < x$		**intervalle ouvert**
$]-\infty\ ;\ b[$	$x < b$		**intervalle ouvert**
$]-\infty\ ;\ b]$	$x \leqslant b$		**intervalle fermé**

Se sont ajoutés les intervalles particuliers :

- L'ensemble vide ∅ (à la fois ouvert et fermé), qui correspond au cas où *a* = *b* dans]a ; b[;
- {a} = [a ; a] (fermé et non ouvert), qui correspond au cas où *a* = *b* dans [a ; b] ;
- $\mathbb{R}$ =]−∞ ; +∞[(à la fois ouvert et fermé).

📜 **Remarque historique**
Le symbole ∞ pour représenter l'infini a été introduit par le mathématicien anglais John Wallis en 1655.