Fiche 2 — Problèmes

🔷 Problème 1. Une fonction définie à partir d'une autre

On considère une fonction impaire f définie sur $\mathbb{R}$.
On sait que l'image par f de 1 est $\sqrt{2}$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x^3 + x) \times f(x)$

1. Étudier la parité de g.
2. Calculer l'image par g de (-1).
3. Sachant que l'image par g de 2 est **3**, en déduire $f(-2)$.

📝 Problème 2. Somme de fonctions paires et impaires

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on ne connaît pas la parité.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (f(x) + f(-x)) / 2$

   Étudier la parité de la fonction g.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (f(x) - f(-x)) / 2$

   Étudier la parité de la fonction h.
3. En déduire que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

📝 Exercice 3. Vrai ou Faux

Affirmation 1

Soit g et h deux fonctions impaires, définies sur un intervalle I, centré en 0.
Alors la fonction $f = g \times h$ définie sur I est une fonction paire.

Corrigés

Corrigé du problème 1

1. **Parité de g.**
   Pour tout réel x, comme f est impaire, $f(-x) = -f(x)$. Alors $g(-x) = (2(-x)^3 + (-x))\, f(-x) = (-2x^3 - x)(-f(x)) = (2x^3 + x)\, f(x) = g(x)$. Donc g est **paire**.
2. **g(−1).**
   $g(-1) = (2(-1)^3 + (-1))\, f(-1) = (-3)\, f(-1) = (-3)(-f(1)) = 3\sqrt{2}$.
3. **Détermination de f(−2).**
   $g(2) = (2 \cdot 2^3 + 2)\, f(2) = 18\, f(2)$. Or on donne $g(2) = 3$, donc $f(2) = 3/18 = 1/6$.
   Comme f est impaire, $f(-2) = -f(2) =$ **$-1/6$**.

Corrigé du problème 2

1. **Parité de g.** Pour tout x, $g(-x) = (f(-x) + f(x))/2 = g(x)$ donc g est **paire.**
2. **Parité de h.** Pour tout x, $h(-x) = (f(-x) - f(x))/2 = -(f(x) - f(-x))/2 = -h(x)$ donc h est **impaire.**
3. **Décomposition.** Pour tout x, $g(x) + h(x) = (f(x)+f(-x))/2 + (f(x)-f(-x))/2 = f(x)$. Ainsi toute fonction f s'écrit comme somme d'une paire et d'une impaire.

Corrigé de l'exercice 3

Si g et h sont impaires, alors pour tout x : $g(-x) = -g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$. D'où $f(-x) = g(-x)\, h(-x) = (-g(x))(-h(x)) = g(x)h(x) = f(x)$.

La fonction $f = g \times h$ est donc **paire.** L'affirmation est vraie.