Fonctions de référence

Seconde — Variations, tableaux et courbes

1. Fonction carré

Définition

La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2.$$

Remarque (forme de la courbe)

La courbe représentative de la fonction carré est une **parabole** (ouverte vers le haut).

Démonstration des variations

Preuve
Les deux premières assertions sont admises : f est définie sur $\mathbb{R}$ et f est paire. On étudie donc les variations de f.

1) Sur l'intervalle $[0; +\infty[$
Soient a et b deux réels de $[0; +\infty[$ tels que $0 \leq a \leq b$.

$$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

Or :

- $b - a \geq 0$ car $b \geq a$;
- $b + a \geq 0$ car $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

Donc $f(b) - f(a) \geq 0$ et :

$$0 \leq a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b).$$

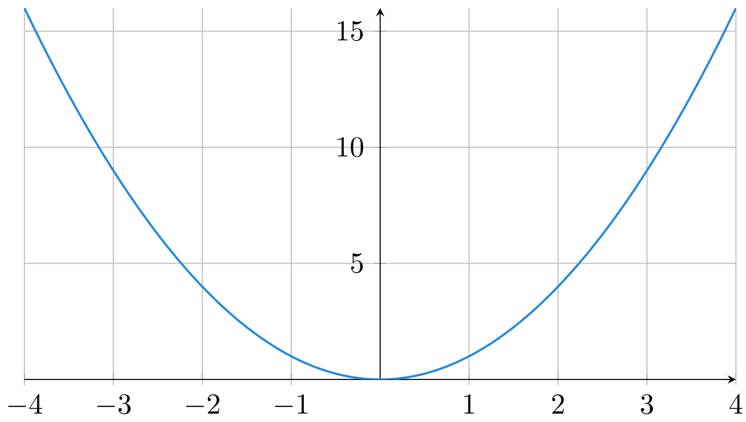
La fonction carré est donc **croissante sur** $[0; +\infty[$.

2) Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$
La fonction carré est paire : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Comme elle est croissante sur $[0; +\infty[$, elle est **décroissante sur** $]-\infty; 0]$.

Tableau de variations (avec f)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe



2. Fonction inverse

Définition

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Elle n'est **pas définie en** 0.

Remarque (forme de la courbe)

La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole** (à deux branches), avec les asymptotes $x = 0$ et $y = 0$.

Démonstration des variations

Preuve
1) Variations sur $\mathbb{R}_+^*$
Soient a et b deux réels positifs non nuls tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

Or $a - b < 0$ et $ab > 0$, donc $f(b) - f(a) < 0$ et :

$$a < b \Longrightarrow f(a) > f(b).$$

La fonction inverse est donc **strictement décroissante sur** $\mathbb{R}_+^*$.

2) Variations sur $\mathbb{R}_-^*$
Soient a et b deux réels négatifs non nuls tels que $a < b$. On a encore :

$$f(b) - f(a) = \frac{a-b}{ab}.$$

Or $a - b < 0$ et $ab > 0$ (produit de deux négatifs), donc $f(b) - f(a) < 0$ et :

$$a < b \Longrightarrow f(a) > f(b).$$

La fonction inverse est **strictement décroissante sur** $\mathbb{R}_-^*$.

3) Parité
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

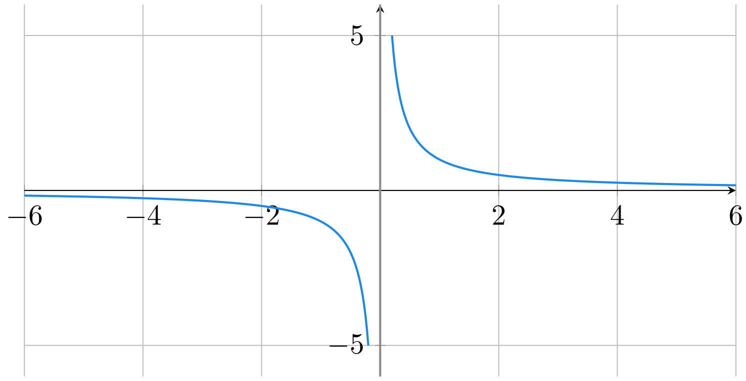
$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x),$$

donc f est **impaire**.

Tableau de variations (avec f)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Courbe (deux branches, $x \neq 0$)



3. Fonction cube

Définition

La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3.$$

Démonstration des variations

Preuve
Pour tous réels a et b :

$$b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2).$$

Soient $a < b$. Alors :

$$f(b) - f(a) = b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2).$$

Or :

— $b - a > 0$;

— $a^2 + ab + b^2 > 0$.

Donc $f(b) - f(a) > 0$ et :

$$a < b \Longrightarrow f(a) < f(b).$$

La fonction cube est donc **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

De plus :

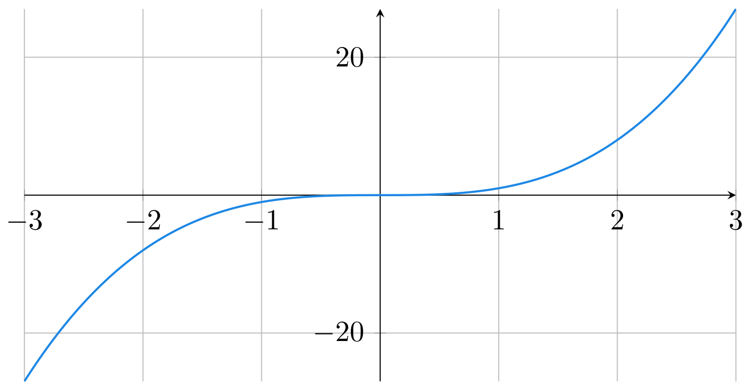
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x),$$

donc f est **impaire**.

Tableau de variations (avec f)

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

Courbe



4. Fonction racine carrée

Définition

La fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Démonstration des variations

Preuve
Soient a et b deux réels positifs tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a}.$$

On multiplie numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée $(\sqrt{b} + \sqrt{a})$:

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

Or $b - a > 0$ et $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$, donc $f(b) - f(a) > 0$ et :

$$a < b \Longrightarrow f(a) < f(b).$$

La fonction racine carrée est donc **strictement croissante sur** $[0;+\infty[$.

Tableau de variations (avec f)

x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe