📘 Équations de droites

I. Droites et vecteurs directeurs

I.1 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 1 – Vecteur directeur d'une droite

On dit qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite d s'il existe deux points distincts A et B de d tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}.$$

On dit alors que la **direction** de la droite d est celle du vecteur $\vec{u}$.

Définition 2 – Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** lorsqu'il existe un réel k tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}.$$

Ils ont alors la **même direction**, mais leur **sens** peut différer : le sens est le même si $k > 0$ et contraire si $k < 0$.

Exemple – Vecteurs colinéaires

Soient les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{v} = -3\,\vec{u}.$$

Il existe donc un réel $k = -3$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. D'après la définition 2, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

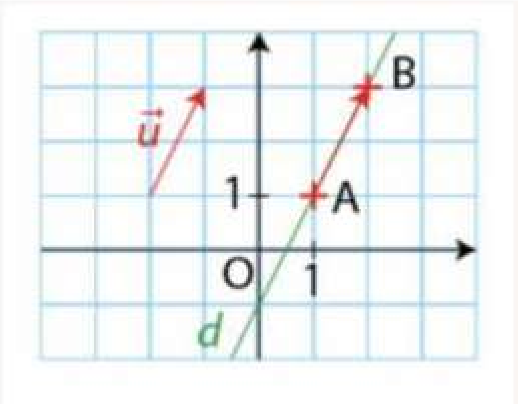
Ils ont la même direction, mais un sens contraire car $k < 0$.

Exemple – Vecteur directeur d'une droite

Dans le repère orthonormé ci-contre, le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d.

En effet, les points $A(1;1)$ et $B(2;3)$ appartiennent à d et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{u}.$$

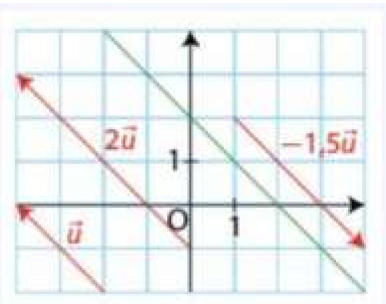


Le vecteur $\vec{u}$ dirige la droite d passant par A et B.

Propriété 1 – Infinité de vecteurs directeurs

Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs. Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d, alors tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d.

Ainsi, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, pour tout réel k le vecteur $k\vec{u} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$ dirige également la droite d.



Les vecteurs $\vec{u}$, $2\vec{u}$ et $-1{,}5\vec{u}$ sont colinéaires et dirigent des droites parallèles.

I.2 Droite définie par un point et un vecteur directeur

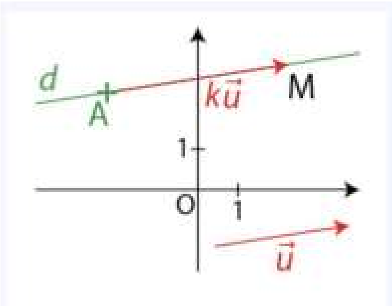
Propriété 2 – Droite passant par un point A

Soit un point A du plan et un vecteur non nul $\vec{u}$. L'ensemble des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{AM} = k\vec{u}, \quad k \in \mathbb{R},$$

est la **droite d passant par A et dirigée par $\vec{u}$**. On peut noter :

$$(d) = \{M \mid \overrightarrow{AM} = k\vec{u}\}.$$



Tous les points M vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ appartiennent à la droite d.

I.3 Droites parallèles et droites sécantes

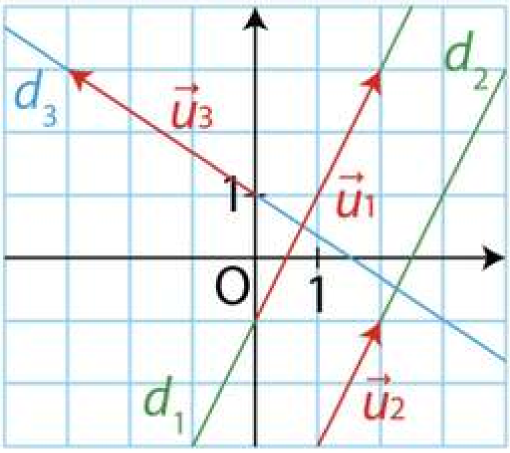
Propriété 3 – Parallélisme et sécantes

Soient deux droites d_1 et d_2 dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

- Les droites d_1 et d_2 sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires.
- Les droites d_1 et d_2 sont **sécantes** si et seulement si les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 1 – Positions relatives de droites

Étudier les positions relatives des droites d_1, d_2 et d_3 données ci-contre.



Représentation des droites d_1, d_2, d_3 et de leurs vecteurs directeurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$.

Corrigé de l'exercice 1

Par lecture graphique, les vecteurs directeurs des droites (d_1), (d_2) et (d_3) sont respectivement :

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires (par exemple $\vec{u_1} = 2\vec{u_2}$). Donc les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
- Le vecteur $\vec{u_1}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{u_3}$ car $\dfrac{-3}{1} \neq \dfrac{2}{2}$. Les droites (d_1) et (d_3) sont donc sécantes.
- Puisque (d_1) et (d_2) sont parallèles et que (d_1) et (d_3) sont sécantes, les droites (d_2) et (d_3) sont elles aussi sécantes.

II. Équation réduite d'une droite

On suppose que le plan est muni d'un repère.

II.1 Droites non parallèles à l'axe des ordonnées

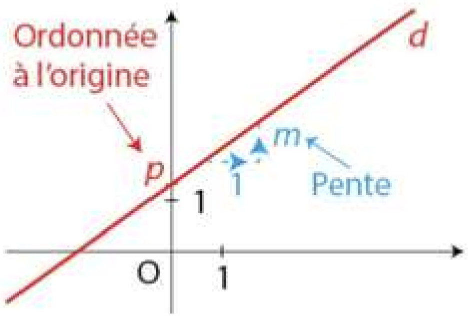
Propriété 4 – Équation réduite d'une droite : $y = mx + p$

1. Toute droite (d), sauf celles qui sont parallèles à l'axe des ordonnées, est la courbe représentative d'une fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$.

2. Donc toute droite (d), sauf celles qui sont parallèles à l'axe des ordonnées, est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant $y = mx + p$, où m est le **coefficient directeur** (ou *pente*) de la fonction affine et p son **ordonnée à l'origine**. On peut écrire :

$$(d) = \{\, M(x;y) \mid y = mx + p \,\}.$$

3. Pour toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées, l'égalité $y = mx + p$ s'appelle l'**équation réduite** de la droite.



Sur la droite d, p est l'ordonnée à l'origine et m est le coefficient directeur (pente).

Remarque

- Soit la droite (d) d'équation réduite $y = mx + p$.
- Le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d).
- Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts de (d), alors le coefficient directeur se calcule par :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

(rapport « écart des y / écart des x »).

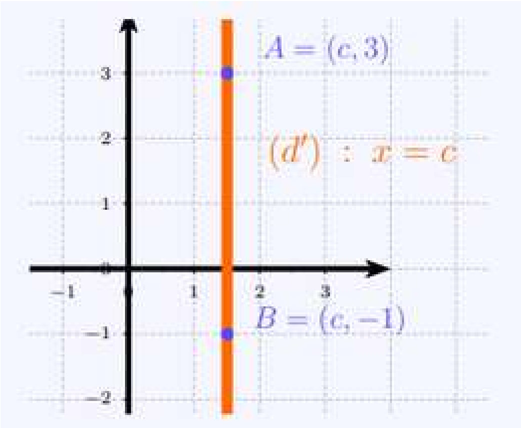
◆ II.2 Droites parallèles à l'axe des ordonnées

Propriété 5 – Équation réduite d'une droite verticale

- Toute droite (d') parallèle à l'axe des ordonnées est l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant l'égalité $x = c$, où c est l'abscisse commune à tous les points de la droite :

$$(d') = \{\, M(x;y) \mid x = c \,\}.$$

- Pour toute droite parallèle à l'axe des ordonnées, l'égalité $x = c$ s'appelle encore l'**équation réduite** de la droite.
- Une telle droite n'a ni pente (ou bien une pente « infinie »), ni ordonnée à l'origine.



Droite verticale (d') d'équation réduite $x = c$, passant notamment par $A(c;3)$ et $B(c;-1)$.

📘 III. Équations cartésiennes d'une droite

Propriété 6 – De vecteur directeur à équation cartésienne

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Toute droite dirigée par le vecteur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant une égalité de la forme

$$ax + by + c = 0,$$

où c est un réel quelconque.

Propriété 7 – De l'équation cartésienne au vecteur directeur

On se donne trois réels a, b et c avec a et b non simultanément nuls. L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

$$ax + by + c = 0$$

est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Vocabulaire

Lorsque a, b et c sont trois réels avec a et b non simultanément nuls, l'égalité $ax + by + c = 0$ s'appelle une **équation cartésienne** de droite.

Remarque : comme une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, elle admet aussi une infinité d'équations cartésiennes.