🟦 Fiche — Racines carrées (Seconde)

📜 Introduction historique (culture mathématique)

Les pythagoriciens affirmaient : « Tout est nombre », au sens de **nombres rationnels**, c'est-à-dire des nombres qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux entiers.

L'étude de la diagonale d'un carré de côté 1 conduit à un nombre impossible à écrire sous forme fractionnaire : $\sqrt{2}$.

On dit que ce nombre est **irrationnel**.

Définition : Un nombre réel est dit **irrationnel** lorsqu'il ne peut pas s'écrire sous la forme p/q avec p entier et q entier non nul.

👉 Le fait que $\sqrt{2}$ soit irrationnel sera **démontré dans un cours ultérieur**.

1. Définition de la racine carrée

1.1 Définition

Soit a un nombre réel **positif**. La **racine carrée** de a est l'unique nombre réel **positif** dont le carré est égal à a.

$\sqrt{a}$ désigne ce nombre.

Cette racine carrée peut aussi s'écrire avec les puissances : $\sqrt{a} = a^{1/2}$.

1.2 Lien avec les puissances

Par les règles sur les puissances : $(a^{1/2})^2 = a^{(1/2×2)} = a$.

Donc $a^{1/2}$ est bien le nombre positif dont le carré vaut a.

Exemple : $\sqrt{36} = 36^{1/2} = 6$.

2. Opérations avec les racines carrées

Dans toute cette partie, on suppose $a > 0$ et $b > 0$.

2.1 Propriétés valides

- $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
- $((\sqrt{a})^2 = a)$
- $\sqrt{a^2} = a$

2.2 Égalités jamais vraies (cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$) ⚠️

Si $a > 0$ et $b > 0$, alors :

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$
- $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$ (avec $a > b$)

2.3 Démonstration : $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

On raisonne par l'absurde : on suppose $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$.

On élève au carré :

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ = $a + b + 2\sqrt{ab}$.

$(\sqrt{a+b})^2$ = $a + b$.

Donc $a + b + 2\sqrt{ab} = a + b$, d'où $\sqrt{ab} = 0$, impossible car $a > 0$ et $b > 0$.

2.4 Démonstration : $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$ (avec $a>b$)

On suppose $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$.

On élève au carré :

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$.
$(\sqrt{a-b})^2 = a-b$.

Donc $a+b-2\sqrt{ab}=a-b$, d'où $b=\sqrt{ab}$.

En élevant au carré : $b^2 = ab$, donc $b(a-b)=0$, impossible puisque $a>b>0$.

3. Calculs avec des racines carrées

3.1 Produits et quotients

$\sqrt{32}\times\sqrt{2}=\sqrt{64}=8$
$\sqrt{98}/\sqrt{2}=\sqrt{49}=7$

3.2 Extraction d'un carré parfait

On écrit le nombre sous la racine comme un produit contenant un carré parfait.

$\sqrt{72}=\sqrt{36\times2}=6\sqrt{2}$
$\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$

4. Simplifier des expressions avec des racines carrées

4.1 Regrouper les termes semblables

$4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

4.2 Racines « déguisées »

$\sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$
$= 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

5. Développements avec des racines carrées — Exemples

Les racines carrées sont traitées comme des inconnues.

$(\sqrt{3} + 4)^2 = 3 + 8\sqrt{3} + 16 = 19 + 8\sqrt{3}$
$(\sqrt{5} - 2)^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}$
$(\sqrt{2} - \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{7}) = 2 - 7 = -5$
$(3 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2}) = 3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$

6. Simplification d'un dénominateur avec une racine carrée

Dans certaines expressions, une racine carrée apparaît au dénominateur. On cherche alors à supprimer la racine du dénominateur.

6.1 Principe général

$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par la **quantité conjuguée** du dénominateur.

6.2 Exemple fondamental

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} \times \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}-2$$

6.3 Exemple avec un coefficient

$$\frac{3}{2-\sqrt{7}} = \frac{3}{2-\sqrt{7}} \times \frac{2+\sqrt{7}}{2+\sqrt{7}}$$

$$\frac{3}{2-\sqrt{7}} = \frac{3(2+\sqrt{7})}{(2-\sqrt{7})(2+\sqrt{7})}$$

$$\frac{3}{2-\sqrt{7}} = \frac{6+3\sqrt{7}}{4-7}$$

$$\frac{3}{2-\sqrt{7}} = \frac{6+3\sqrt{7}}{-3}$$

$$\frac{3}{2-\sqrt{7}} = -2-\sqrt{7}$$

Le principe est donc de systématiquement de **supprimer les racines carrées du dénominateur**.

6.4 Exemple avec une racine au numérateur

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

6.5 Méthode à retenir

1. Identifier la quantité conjuguée du dénominateur
2. Multiplier numérateur et dénominateur par cette quantité
3. Simplifier grâce à $a^2 - b$