Evaluation – Fonctions, équations et inéquations

Sujet 1

I Énoncé

Exercice 1 (8 points) — Étude d'une fonction quadratique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

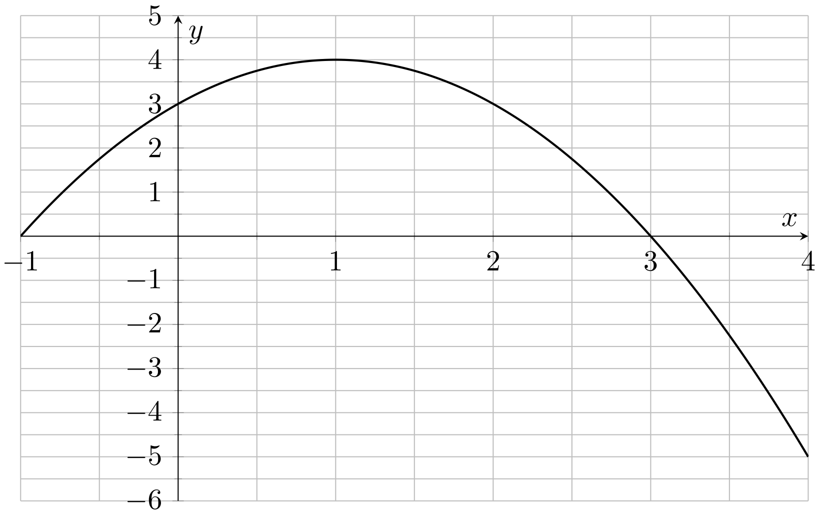

Figure 1 – Courbe représentative de $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ sur $[-1; 4]$.

1) Calculer : $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$ (On pourra vérifier graphiquement les résultats).
2) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
3) Déterminer les intervalles sur lesquels f est positive puis négative.
4) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-1\,;4]$.
5) Déterminer les coordonnées $(x, f(x))$ du maximum de f sur l'intervalle $[-1\,;4]$.
6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 3$ pour tout $x \in [-1\,;4]$.

Exercice 2 (2 points) — Vrai / Faux

On note I un intervalle centré en 0, et g, h des fonctions définies et ne s'annulant pas sur I.
Pour chaque affirmation, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse** et **justifier** la réponse.

Affirmation 1
Si g et h sont deux fonctions impaires, alors la fonction $f = (g + h)^2$ est une fonction paire.

Affirmation 2
Si g est paire et h est impaire, alors la fonction $f = \frac{g}{h}$ est une fonction impaire.

Exercice 3 (6 points) — Résolution d'équations

1) Résoudre l'équation du premier degré suivante :

$$3(2x+1) - 4(x-5) = 2.$$

2) Résoudre l'équation suivante :

$$x(x+3) - 2(x+3)^2 = 0.$$

3) Résoudre l'équation suivante :

$$5x^2 - 45 = 0.$$

Exercice 4 (4 points) — Résolution d'inéquations

1) Résoudre l'inéquation suivante :

$$-5(2x-7) \leq 3(4x+1).$$

2) Résoudre la double inéquation suivante :

$$1 \leq \frac{3x-2}{4} < 5.$$

II Corrigé succinct

Corrigé de l'exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3,$$

et sa courbe représentative tracée sur l'intervalle $[-1\,;4]$.

1) **Calcul de $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$**

   On calcule à partir de l'expression algébrique de f :

$$\begin{aligned} f(-1) &= -(-1)^2 + 2\cdot(-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0, \\ f(0) &= -(0)^2 + 2\cdot 0 + 3 = 3, \\ f(1) &= -(1)^2 + 2\cdot 1 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4, \\ f(3) &= -(3)^2 + 2\cdot 3 + 3 = -9 + 6 + 3 = 0. \end{aligned}$$

   On obtient donc :

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 3, \quad f(1) = 4, \quad f(3) = 0.$$

   Ces valeurs peuvent être vérifiées graphiquement en lisant les ordonnées des points de la courbe d'abscisses $-1, 0, 1, 3$.

2) **Résolution graphique de l'équation $f(x) = 0$**

   Résoudre $f(x) = 0$ revient à chercher les points où la courbe coupe l'axe des abscisses (axe (Ox)). D'après le graphique, la courbe coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et en $x = 3$.

$$f(x) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 3.$$

   Donc $S = \{-1\,;3\}$.

3) **Intervalles où f est positive ou négative**

   On regarde si la courbe est au-dessus ou en dessous de l'axe des abscisses.

   — Entre $x = -1$ et $x = 3$, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses : $f(x) > 0$ pour $x \in]-1\,;3[$.
   — Pour $x > 3$, la courbe est en dessous de l'axe des abscisses : $f(x) < 0$ pour $x \in]3\,;4[$.
   — En $x = -1$ et $x = 3$, la courbe coupe l'axe des abscisses : $f(-1) = 0$ et $f(3) = 0$.

4) **Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$**

   En observant la courbe, on voit que f :

   — augmente jusqu'à un sommet situé au-dessus de $x = 1$;
   — puis diminue après ce sommet.

   Le point le plus haut de la courbe est atteint pour $x = 1$, et on lit graphiquement (ou on vérifie par le calcul de la question 1) :

$$f(1) = 4.$$

   Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ est donc :

x	-1		1		$+4$
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	

5) **Coordonnées du maximum de f sur $[-1\,;4]$**
Sur l'intervalle $[-1\,;4]$, le point le plus haut de la courbe est toujours le sommet. On lit sur le graphique que ce sommet est au niveau de $x = 1$ et que l'ordonnée vaut 4.
Le maximum de f sur $[-1\,;4]$ est donc :

$$f_{\max} = 4 \quad \text{atteint pour } x = 1,$$

et ses coordonnées sont $(1\,;4)$.

6) **Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \geq 3$ pour $x \in [-1\,;4]$**
On trace (ou on imagine) la droite horizontale d'équation $y = 3$ et on regarde où la courbe de f est au-dessus ou sur cette droite.
On observe sur le graphique que la courbe coupe la droite $y = 3$ en deux points :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = 2.$$

Sur l'intervalle entre ces deux valeurs, la courbe est au-dessus de la droite $y = 3$. On en déduit, par lecture graphique, que :

$$f(x) \geq 3 \quad \text{pour } x \in [0\,;2],$$

et que pour $x \in [-1\,;0[$ ou $x \in]2\,;4]$, on a $f(x) < 3$.

$$\boxed{\text{Sur } [-1\,;4],\quad f(x) \geq 3 \iff x \in [0\,;2].}$$

Corrigé de l'exercice 2

Affirmation 1 : *Vrai.*
Si g et h sont deux fonctions impaires, alors pour tout réel x de l'intervalle I :

$$g(-x) = -g(x) \qquad \text{et} \qquad h(-x) = -h(x).$$

On en déduit que :

$$(g+h)(-x) = g(-x) + h(-x) = -g(x) - h(x) = -(g(x) + h(x)).$$

Donc la fonction $g + h$ est impaire.
Pour $f(x) = (g(x) + h(x))^2$, on calcule :

$$f(-x) = \big((g+h)(-x)\big)^2 = \big(-(g(x) + h(x))\big)^2.$$

Or le carré d'un nombre et le carré de son opposé sont égaux :

$$\big(-(g(x) + h(x))\big)^2 = (g(x) + h(x))^2 = f(x).$$

Donc :

$$f(-x) = f(x).$$

$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f = (g+h)^2 \text{ est paire.}}$

Affirmation 2 : *Faux.*
Si g est paire et h est impaire, alors pour tout $x \in I$:

$$g(-x) = g(x), \qquad h(-x) = -h(x).$$

Pour $f = g \times h$:

$$f(-x) = g(-x)\,h(-x) = g(x)\,(-h(x)) = -g(x)h(x) = -f(x).$$

Ainsi, f est **impaire** et non paire. L'affirmation est donc fausse.

Corrigé de l'exercice 3

1)
$$3(2x+1)-4(x-5)=2.$$

Développons :

$$6x+3-4x+20=2 \iff 2x+23=2 \iff 2x=-21 \iff x=-\frac{21}{2}.$$

Solution : $S_1=\left\{-\frac{21}{2}\right\}$.

2)
$$x(x+3)-2(x+3)^2=0.$$

Factorisation par $(x+3)$:

$$(x+3)(x-2(x+3))=(x+3)(x-2x-6)=(x+3)(-x-6)=0.$$

Donc (il s'agit d'une EPN) :

$$x+3=0 \quad \text{ou} \quad -x-6=0 \iff x=-3 \quad \text{ou} \quad x=-6.$$

Solution : $S_2=\{-6\,;-3\}$.

3)
$$5x^2-45=0 \iff 5x^2=45 \iff x^2=9 \iff x=-3 \text{ ou } x=3.$$

Solution : $S_3=\{-3\,;3\}$.

Corrigé de l'exercice 4

1)
$$-5(2x-7)\leq 3(4x+1).$$

On développe :

$$-10x+35\leq 12x+3.$$

On regroupe les termes en x d'un côté :

$$-10x-12x\leq 3-35 \iff -22x\leq -32.$$

En divisant par -22 (nombre négatif), on inverse le sens de l'inégalité :

$$x\geq \frac{32}{22}=\frac{16}{11}.$$

Solution : $S_4=\left[\frac{16}{11}\,;+\infty\right[$.

2)
$$1\leq \frac{3x-2}{4}<5.$$

On multiplie par 4 (positif) :

$$4\leq 3x-2<20.$$

On ajoute 2 à chaque membre :

$$6\leq 3x<22.$$

On divise par 3 (positif) :

$$2\leq x<\frac{22}{3}.$$

Solution : $S_5=\left[2\,;\frac{22}{3}\right[$.