Fonctions de référence

Seconde — Exercices et corrigés

Exercice 1 — Comparer (sans calculatrice)

Comparer les deux nombres de chaque question **sans calculatrice**, en utilisant uniquement la **monotonie des fonctions de référence**.

1) Comparer $(-0{,}7)^2$ et $(-0{,}69)^2$.
2) Comparer $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{6}$.
3) Comparer $\sqrt{5}$ et $\sqrt{\dfrac{11}{2}}$.
4) Comparer $(-1{,}2)^3$ et $(-1{,}1)^3$.
5) Comparer $\dfrac{1}{-3}$ et $\dfrac{1}{-4}$.
6) Comparer $(0{,}9)^2$ et 1^2.
7) Comparer $\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ et $\sqrt{3{,}6}$.
8) Comparer $(-2)^3$ et $(-1{,}9)^3$.
9) Comparer $\dfrac{1}{0{,}5}$ et $\dfrac{1}{0{,}4}$.
10) Comparer $(-0{,}01)^2$ et $(0{,}01)^2$.

Exemple 1 — Étude de fonction

Énoncé

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-2)(3-5x) + 4(-2+x)^2.$$

1) Montrer que pour tout réel x :

$$f(x) = -\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}.$$

2) Étudier les variations de f sur $]-\infty\,;\,-1{,}5]$.

3) Étudier les variations de f sur $[-1{,}5\,;\,+\infty[$.

4) Dresser le tableau de variations de f.

Corrigé de l'exemple 1

1) Mise sous forme canonique

$$(x-2)(3-5x) = -5x^2 + 13x - 6 \qquad \text{et} \qquad 4(-2+x)^2 = 4x^2 - 16x + 16.$$

Donc :

$$f(x) = -x^2 - 3x + 10.$$

Or :

$$x^2 + 3x = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

d'où :

$$f(x) = -\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}.$$

2) Variations sur $]-\infty\,;\,-1{,}5]$

Soient a et b tels que $a \leq b \leq -1{,}5$.

$$a + 1{,}5 \leq b + 1{,}5 \leq 0 \quad \text{(on a ajouté 1,5 à chaque membre).}$$

La fonction carré est **décroissante** sur $]-\infty; 0]$, donc l'ordre change :

$$(a+1{,}5)^2 \geq (b+1{,}5)^2.$$

On multiplie par $-1 < 0$ (l'ordre change) :

$$-(a+1{,}5)^2 \leq -(b+1{,}5)^2.$$

On ajoute $\frac{49}{4}$:

$$-(a+1{,}5)^2 + \frac{49}{4} \leq -(b+1{,}5)^2 + \frac{49}{4}.$$

Donc :

$$\boxed{a \leq b \leq -1{,}5 \Rightarrow f(a) \leq f(b)}$$

Ainsi f est **croissante** sur $]-\infty\,;\,-1{,}5]$.

3) Variations sur $[-1{,}5\,;\,+\infty[$
Soient a et b tels que $-1{,}5 \leq a \leq b$.

$$0 \leq a + 1{,}5 \leq b + 1{,}5.$$

La fonction carré est **croissante** sur $[0;+\infty[$:

$$(a+1{,}5)^2 \leq (b+1{,}5)^2.$$

On multiplie par $-1 < 0$ (l'ordre change) :

$$-(a+1{,}5)^2 \geq -(b+1{,}5)^2.$$

On ajoute $\dfrac{49}{4}$:

$$f(a) \geq f(b).$$

Donc :

$$\boxed{-1{,}5 \leq a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)}$$

Ainsi f est **décroissante** sur $[-1{,}5\,;\,+\infty[$.

Tableau de variations (avec f)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
f			$\frac{49}{4}$		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Exercice 2 — Variations et tableaux (forme canonique)

1) Soit $g(x) = 5(x-2)^2 + 3$.
    1) Étudier les variations de g sur $]-\infty; 2]$ puis sur $[2; +\infty[$.
    2) Dresser le tableau de variations de g.
2) Soit $h(x) = -3(x+5)^2 - 1$.
    1) Étudier les variations de h sur $]-\infty; -5]$ puis sur $[-5; +\infty[$.
    2) Dresser le tableau de variations de h.
3) Soit $j(x) = -2x^2 + 4x - 9$.
    1) Montrer que $j(x) = -2(x-1)^2 - 7$.
    2) Étudier les variations de j sur $]-\infty; 1]$ puis sur $[1; +\infty[$.
    3) Dresser le tableau de variations de j.
    4) Déterminer l'extremum de j et l'abscisse où il est atteint.

Exercice 3 — Étudier des fonctions

Consigne : pour chaque fonction, préciser le domaine, les variations, l'extremum s'il existe, puis dresser un tableau de variations.

1) $f_1(x) = -3(-x+3)^2 - 2$.
2) $f_2(x) = 7(x-3)^2 + 9$.
3) Soit $g(x) = \dfrac{5}{x-2} + 2$.
    1) Déterminer D_g.
    2) Étudier les variations de g sur $]-\infty; 2[$ puis sur $]2; +\infty[$.
    3) Dresser le tableau de variations de g.
4) Soit $h(x) = -2 - \dfrac{1}{5-x}$.
    1) Déterminer D_h.
    2) Étudier les variations de h sur $]-\infty; 5[$ puis sur $]5; +\infty[$.
    3) Dresser le tableau de variations de h.

Corrigé

Corrigé Exercice 1

1) $-0{,}7 < -0{,}69 \leq 0$ et la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$:

$$(-0{,}7)^2 > (-0{,}69)^2.$$

2) $4 < 6$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{6}.$$

3) $5 < \dfrac{11}{2}$ et la racine carrée est croissante :

$$\sqrt{5} < \sqrt{\frac{11}{2}}.$$

4) $-1{,}2 < -1{,}1$ et la fonction cube est croissante :

$$(-1{,}2)^3 < (-1{,}1)^3.$$

5) $-4 < -3 < 0$ et la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$:

$$\frac{1}{-3} < \frac{1}{-4}.$$

6) $0{,}9 < 1$ et la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$:

$$(0{,}9)^2 < 1^2.$$

7) $\dfrac{7}{2} < 3{,}6$ et la racine carrée est croissante :

$$\sqrt{\frac{7}{2}} < \sqrt{3{,}6}.$$

8) $-2 < -1{,}9$ et la fonction cube est croissante :

$$(-2)^3 < (-1{,}9)^3.$$

9) $0{,}4 < 0{,}5$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$:

$$\frac{1}{0{,}5} < \frac{1}{0{,}4}.$$

10) La fonction carré est paire :

$$(-0{,}01)^2 = (0{,}01)^2.$$

Corrigé Exercice 2

1) $g(x) = 5(x-2)^2 + 3$
Sur $]-\infty; 2]$ **:** Soient $a \leq b \leq 2$.

$$a - 2 \leq b - 2 \leq 0.$$

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$:

$$(a-2)^2 \geq (b-2)^2.$$

On multiplie par $5 > 0$ puis on ajoute 3 :

$$g(a) \geq g(b).$$

Donc g est décroissante sur $]-\infty; 2]$.

Sur $[2; +\infty[$ **:** Soient $2 \leq a \leq b$.

$$0 \leq a - 2 \leq b - 2.$$

La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$:

$$(a-2)^2 \leq (b-2)^2.$$

Donc :

$$g(a) \leq g(b).$$

Ainsi g est croissante sur $[2; +\infty[$.

Extremum : $g(2) = 3$ et $g(x) \geq 3$: minimum 3 atteint en $x = 2$.

Tableau de variations de g

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

2) $h(x) = -3(x+5)^2 - 1$
Sur $]-\infty; -5]$ **:** Soient $a \leq b \leq -5$.

$$a + 5 \leq b + 5 \leq 0.$$

Carré décroissant sur $]-\infty; 0]$:

$$(a+5)^2 \geq (b+5)^2.$$

On multiplie par $-3 < 0$ (l'ordre change), puis on ajoute -1 :

$$h(a) \leq h(b).$$

Donc h est croissante sur $]-\infty; -5]$.

Sur $[-5; +\infty[$ **:** Soient $-5 \leq a \leq b$.

$$0 \leq a + 5 \leq b + 5.$$

Carré croissant sur $[0; +\infty[$:

$$(a+5)^2 \leq (b+5)^2.$$

On multiplie par $-3 < 0$ (l'ordre change), puis on ajoute -1 :

$$h(a) \geq h(b).$$

Donc h est décroissante sur $[-5; +\infty[$.

Extremum : $h(-5) = -1$ et $h(x) \leq -1$: maximum -1 atteint en $x = -5$.

Tableau de variations de h

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
h	$-\infty$ $\nearrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$

3) $j(x) = -2x^2 + 4x - 9$
a) Forme canonique :

$$j(x) = -2(x^2 - 2x) - 9 = -2\big((x-1)^2 - 1\big) - 9 = -2(x-1)^2 - 7.$$

b) Variations : Sur $]-\infty; 1]$: si $a \leq b \leq 1$, alors $a - 1 \leq b - 1 \leq 0$, donc carré décroissant sur $]-\infty; 0]$:

$$(a-1)^2 \geq (b-1)^2.$$

On multiplie par $-2 < 0$ (ordre change), puis on ajoute -7 :

$$j(a) \leq j(b),$$

donc j est croissante sur $]-\infty; 1]$.

Sur $[1; +\infty[$: si $1 \leq a \leq b$, alors $0 \leq a - 1 \leq b - 1$, carré croissant :

$$(a-1)^2 \leq (b-1)^2.$$

On multiplie par $-2 < 0$ puis on ajoute -7 :

$$j(a) \geq j(b),$$

donc j est décroissante sur $[1; +\infty[$.

Extremum : $j(1) = -7$ et $j(x) \leq -7$: maximum -7 atteint en $x = 1$.

Tableau de variations de j

x	$-\infty$	1	$+\infty$
j	$-\infty$ $\nearrow$	-7	$\searrow$ $-\infty$

Corrigé Exercice 3

1) $f_1(x) = -3(-x+3)^2 - 2$
On étudie sur $]-\infty;3]$ puis sur $[3;+\infty[$.
Sur $]-\infty;3]$ **:** Soient $a \leq b \leq 3$.

$$a - 3 \leq b - 3 \leq 0.$$

On multiplie par $-1 < 0$ (ordre change) :

$$-a + 3 \geq -b + 3 \geq 0.$$

Carré croissant sur $[0;+\infty[$:

$$(-a+3)^2 \geq (-b+3)^2.$$

On multiplie par $-3 < 0$ (ordre change) puis on ajoute -2 :

$$f_1(a) \leq f_1(b).$$

Donc f_1 est croissante sur $]-\infty;3]$.

Sur $[3;+\infty[$ **:** Soient $3 \leq a \leq b$.

$$0 \leq a - 3 \leq b - 3.$$

On multiplie par $-1 < 0$:

$$0 \geq -a + 3 \geq -b + 3.$$

Carré décroissant sur $]-\infty;0]$:

$$(-a+3)^2 \leq (-b+3)^2.$$

On multiplie par $-3 < 0$ puis on ajoute -2 :

$$f_1(a) \geq f_1(b).$$

Donc f_1 est décroissante sur $[3;+\infty[$.

Enfin $f_1(3) = -2$: maximum -2 atteint pour $x = 3$.

Tableau de variations de f_1

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

2) $f_2(x) = 7(x-3)^2 + 9$
Sur $]-\infty;3]$ **:** Soient $a \leq b \leq 3$.

$$a - 3 \leq b - 3 \leq 0.$$

Carré décroissant sur $]-\infty;0]$:

$$(a-3)^2 \geq (b-3)^2.$$

On multiplie par $7 > 0$ puis on ajoute 9 :

$$f_2(a) \geq f_2(b).$$

Donc f_2 est décroissante sur $]-\infty;3]$.

Sur $[3;+\infty[$ **:** Soient $3 \leq a \leq b$.
$$0 \leq a-3 \leq b-3.$$
Carré croissant sur $[0;+\infty[$:
$$(a-3)^2 \leq (b-3)^2.$$
On multiplie par $7>0$ puis on ajoute 9 :
$$f_2(a) \leq f_2(b).$$
Donc f_2 est croissante sur $[3;+\infty[$.

Enfin $f_2(3)=9$: minimum 9 atteint pour $x=3$.

Tableau de variations de f_2

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f_2	$+\infty$ ↘	9	↗ $+\infty$

3) $g(x) = \dfrac{5}{x-2} + 2$
Domaine : $x \neq 2$, donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Sur $]-\infty;2[$ **:** Soient $a \leq b < 2$.
$$a-2 \leq b-2 < 0.$$
Inverse décroissante sur $]-\infty;0[$:
$$\frac{1}{a-2} \geq \frac{1}{b-2}.$$
On multiplie par $5>0$ puis on ajoute 2 :
$$g(a) \geq g(b).$$
Donc g est décroissante sur $]-\infty;2[$.

Sur $]2;+\infty[$ **:** Soient $2 < a \leq b$.
$$0 < a-2 \leq b-2.$$
Inverse décroissante sur $]0;+\infty[$:
$$\frac{1}{a-2} \geq \frac{1}{b-2}.$$
Donc :
$$g(a) \geq g(b).$$
Ainsi g est décroissante sur $]2;+\infty[$.

Tableau de variations de g

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g	2	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	2

4) $h(x) = -2 - \dfrac{1}{5-x}$

Domaine : $5 - x \neq 0$, donc $x \neq 5$ et $D_h = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

On réécrit :

$$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{-(x-5)} = -\frac{1}{x-5} \quad \Rightarrow \quad h(x) = -2 + \frac{1}{x-5}.$$

Sur $]-\infty;5[$ **:** Soient $a \leq b < 5$.

$$a - 5 \leq b - 5 < 0.$$

Inverse décroissante sur $]-\infty;0[$:

$$\frac{1}{a-5} \geq \frac{1}{b-5}.$$

On ajoute -2 :

$$h(a) \geq h(b).$$

Donc h est décroissante sur $]-\infty;5[$.

Sur $]5;+\infty[$ **:** Soient $5 < a \leq b$.

$$0 < a - 5 \leq b - 5.$$

Inverse décroissante sur $]0;+\infty[$:

$$\frac{1}{a-5} \geq \frac{1}{b-5}.$$

Donc :

$$h(a) \geq h(b).$$

Ainsi h est décroissante sur $]5;+\infty[$.

Tableau de variations de h

x	$-\infty$		5		$+\infty$
h	-2	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	-2