

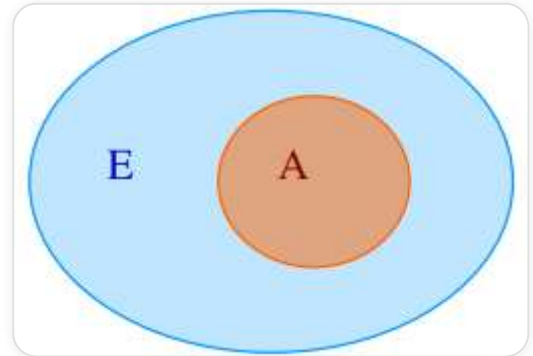
I. Pourcentages et proportions

Définition 1 — Proportion d'une partie par rapport à un tout

Soit A une partie d'un ensemble E . On note $\text{Card}E$ et $\text{Card}A$ leurs nombres d'éléments.

La **proportion** des éléments de A par rapport à ceux de E est :

$$p = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}E} \in [0; 1].$$



Ensemble E et partie A

- Une même proportion peut s'écrire : $p \approx 0,2001$, ou $p \approx 20,01\%$, ou encore $\frac{20,01}{100}$.
- Les deux termes du quotient doivent être dans la *même unité*.

I.1 — Appliquer un pourcentage

Définition 2 — $t\%$ d'une quantité

Prendre $t\%$ d'un nombre, c'est le multiplier par $\frac{t}{100}$.

Exemple

Remise de 15 % sur 80 € :

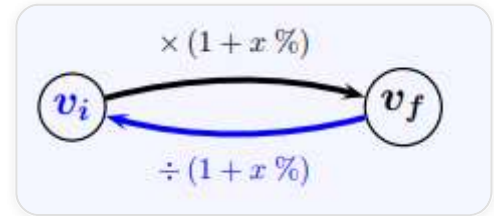
$$80 \times 15\% = 80 \times \frac{15}{100} = 12 \quad \Rightarrow \quad \text{prix remisé} = 80 - 12 = 68$$

Le prix après remise est de 68 euros.

II. Taux d'évolutions

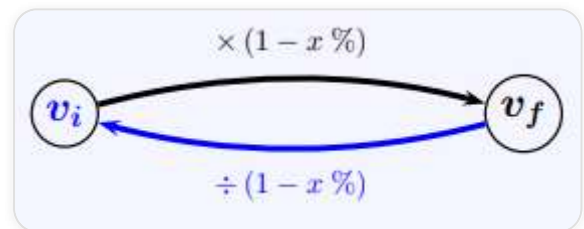
Propriété 1 — Augmenter ou diminuer de $x\%$

Augmenter V de $x\%$: coefficient $k = 1 + x\%$ et
 $v_f = v_i(1 + x\%)$.



Augmenter de $x\%$

Diminuer V de $x\%$: coefficient $k = 1 - x\%$ et
 $v_f = v_i(1 - x\%)$.



Diminuer de $x\%$

Preuve (détaillée)

1. Augmenter une quantité V de $x\%$, c'est lui ajouter $x\%$ de V . Elle passe donc d'une valeur v_i à une valeur $v_f = v_i + v_i \times x\%$. Par factorisation :

$$v_f = v_i + v_i \times x\% = v_i(1 + x\%) = v_i \left(1 + \frac{x}{100}\right) = v_i \times \frac{100 + x}{100}.$$

2. Diminuer une quantité V de $x\%$, c'est lui soustraire $x\%$ de V . Elle passe donc d'une valeur v_i à une valeur $v_f = v_i - v_i \times x\%$. Par factorisation :

$$v_f = v_i - v_i \times x\% = v_i(1 - x\%) = v_i \left(1 - \frac{x}{100}\right) = v_i \times \frac{100 - x}{100}.$$

Définition 3 — Taux / pourcentage d'évolution

Passage de v_i à v_f :

1. Le taux d'évolution (variation relative) est $\frac{v_f - v_i}{v_i}$.
2. On dit que $t\%$ est le pourcentage d'évolution quand $\frac{v_f - v_i}{v_i} = \frac{t}{100}$.

Taux > 0 : augmentation ; taux < 0 : diminution.

III. Bilan (formules utiles)

Formule	Expression
Coefficient multiplicateur	$k = 1 + t\%$
Aller	$v_f = k v_i$
Retour	$v_i = \frac{v_f}{k}$
Taux d'évolution	$t\% = k - 1$ ou $t\% = \frac{v_f - v_i}{v_i}$

IV. Évolutions successives

Propriété 2 — Composition

Deux évolutions successives $t_1\%$ puis $t_2\%$ donnent le coefficient :

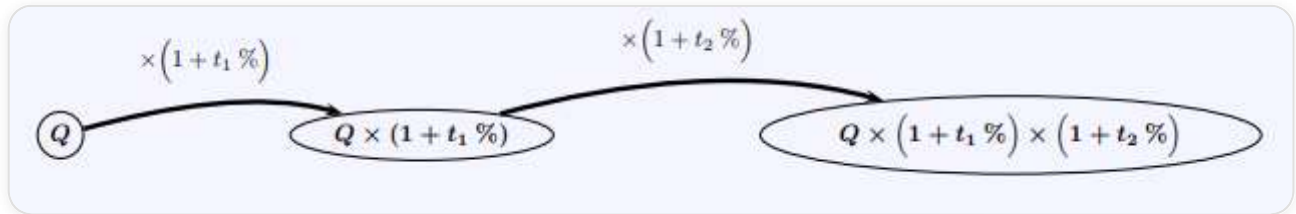


Schéma d'évolution successive

$$k = (1 + t_1 \%)(1 + t_2 \%).$$

Exemple 1

Augmentations de 10% puis 20% :

$$k = 1,10 \times 1,20 = 1,32 \Rightarrow t\% = 32\%.$$

Exemple 2

Augmenter de 6% par an pendant 5 ans :

$$k = (1 + 0,06)^5 \approx 1,3382 \Rightarrow t\% \approx 33,82\% \approx 34\%.$$

V. Évolutions réciproques

Propriété 3 — Retour à l'état initial

Aller de Q_1 à Q_2 avec $t_1\%$, puis revenir à Q_1 avec $t_2\%$:

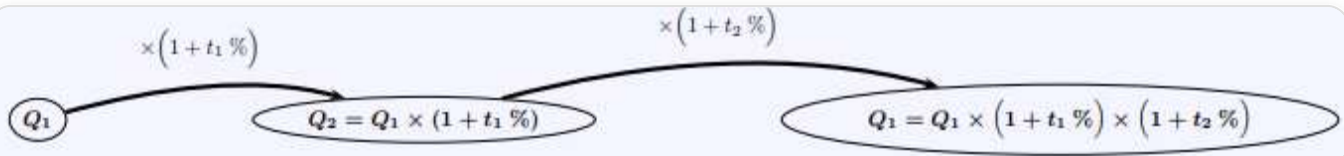


Schéma d'évolution réciproque

$$(1 + t_1 \%)(1 + t_2 \%) = 1, \quad \text{donc } k_2 = \frac{1}{k_1}.$$

$$t_2 \% = \frac{1}{1 + t_1 \%} - 1.$$

Exemple

Après $+15\%$, la remise à appliquer pour revenir au prix d'origine vaut :

$$t_2 \% = \frac{1}{1,15} - 1 \approx -0,13043478 \Rightarrow \text{remise d'environ } 13,04\%.$$