📘 Vecteurs — Exercices (énoncés)

📝 Exercice 1 — Construction et démonstration (6 points)

On considère un triangle ABC.

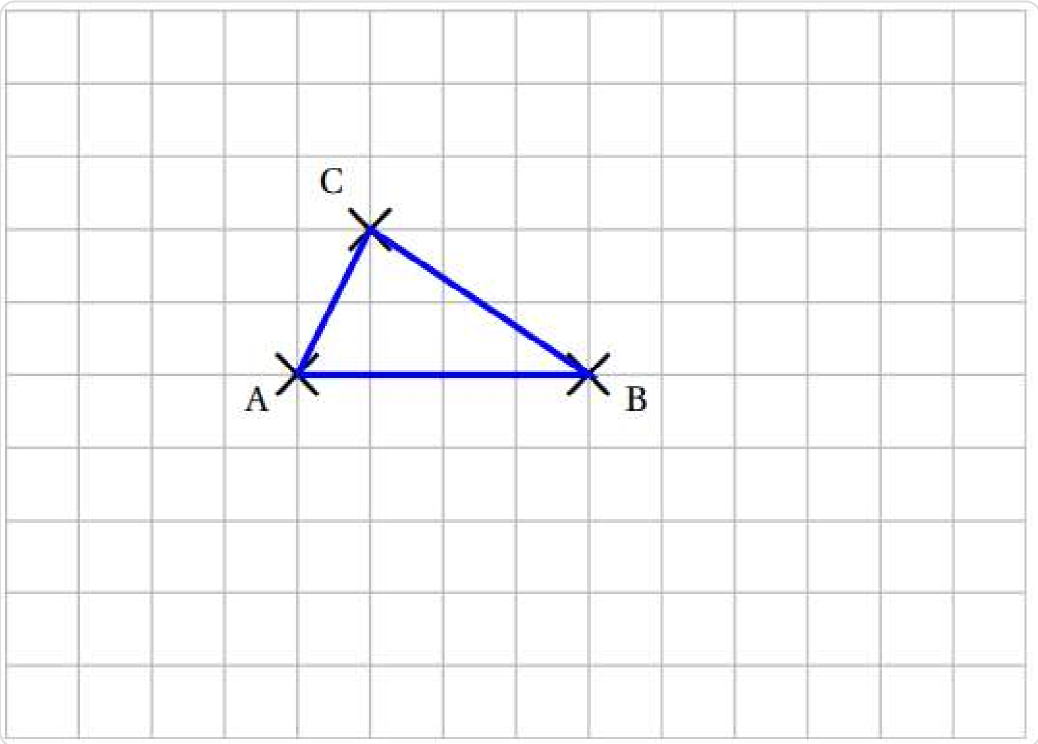

Figure pour l'exercice 1.

1. Construire les points I, J, K et L définis par :
   a. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
   b. $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
   c. $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
   d. $\overrightarrow{BL} = -2\overrightarrow{AC}$
2. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}.$$

3. Démontrer ensuite que

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}.$$

4. En déduire que le quadrilatère $CIKJ$ est un parallélogramme.

Exercice 2 — À la recherche du point G

Soit ABC un triangle quelconque. On note A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$. Soit M un point du plan tel que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

1. Montrer que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AA'}.$$

2. Montrer également que :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{BB'} \quad ; \quad \overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{CC'}.$$

3. En déduire que les trois médianes du triangle sont concourantes en M.

Exercice 3 — À la recherche du point G, une autre preuve

On considère un triangle quelconque ABC. On note A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

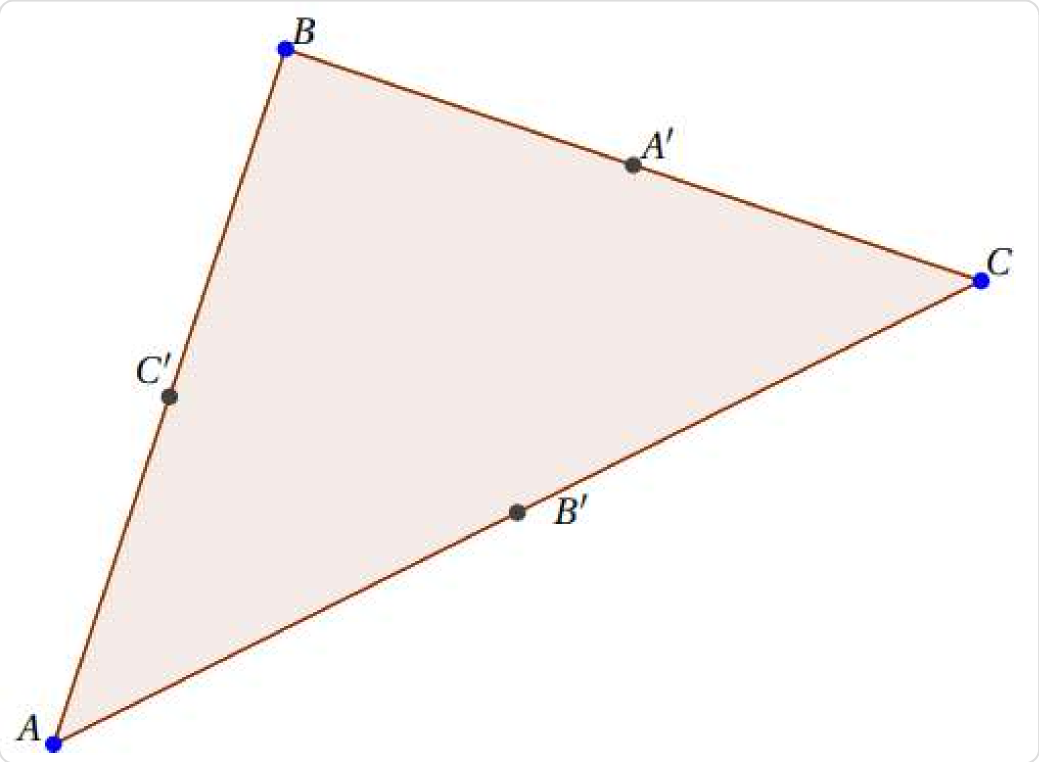

Figure pour l'exercice 3.

1. On se place dans le repère $(A; C; B)$. Déterminer dans ce repère les coordonnées des points A, B, C, A', B' et C'.
2. Placer le point G tel que :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}.$$

3. Montrer que, dans le repère $(A; C; B)$, le point G est de coordonnées

$$G\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right).$$

4. Démontrer que l'on a aussi :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \quad ; \quad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}.$$

5. En déduire que les trois médianes du triangle sont concourantes en G.

Exercice 4 — Points alignés dans un repère

Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(2, -2)$, $B(6, 1)$, $C(1, 4)$ et $D(-3, 1)$.

1. Placer les points A, B, C et D dans le repère.
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Placer les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{BM} = -2\,\overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AD}.$$

4. Calculer les coordonnées des points M et N.
5. Démontrer que les points M, C et N sont alignés.

Bonus — Centre de gravité

Soit ABC un triangle quelconque et G le centre de gravité du triangle.

On rappelle que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AA'} \quad \text{avec } A' \text{ milieu de } [BC].$$

Sans utiliser de repère, démontrer que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

✅ Corrigés : exercice 1

1. Construction de I, J, K, L

- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: I est le 4$^{\text{e}}$ sommet du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ à partir de A.
- $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$: on additionne $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ à l'origine A.
- $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$: on place d'abord D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, puis K tel que $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CA}$.
- $\overrightarrow{BL} = -2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CA}$: L est sur la parallèle à (CA) passant par B, dans le sens $\overrightarrow{CA}$, avec longueur doublée.

2. Par Chasles :

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK}.$$

Or

$$\overrightarrow{JA} = -\overrightarrow{AJ} = -(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$

et

$$\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

Donc

$$\overrightarrow{JK} = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.$$

3. On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC}.$$

Par Chasles dans le triangle A, C, I, $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CI}$. Ainsi

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}.$$

4. Comme $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB}$, on obtient

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{JK}.$$

Deux côtés opposés égaux comme vecteurs $\Rightarrow$ $CIKJ$ est un parallélogramme.

✅ Corrigé de l'exercice 2

On part de :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}.$$

1. A' milieu de $[BC] \Rightarrow \overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{0}.$

Par Chasles :

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B}, \qquad \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'C}.$$

En remplaçant :

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA'}+(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C})=\overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{0}.$$

Or $\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA'}$. Donc

$$\overrightarrow{MA}+2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA'})=\overrightarrow{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{0}.$$

Ainsi

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}.$$

2. En refaisant exactement le même raisonnement avec B' milieu de $[AC]$ puis C' milieu de $[AB]$, on obtient :

$$\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}.$$

3. Chaque égalité montre que M appartient à la médiane correspondante. Donc les trois médianes sont concourantes en M (centre de gravité).

✅ Corrigé de l'exercice 3

1. Dans le repère $(A;C;B)$:

$$A(0,0), \quad C(1,0), \quad B(0,1).$$

Milieux :

$$A'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad B'\left(\frac{1}{2},0\right), \quad C'\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

2. G est tel que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.

3.

$$\overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

4.

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}.$$

De même on vérifie $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.

5. G est sur les trois médianes $\Rightarrow$ elles sont concourantes en G.

Corrigé de l'exercice 4

2.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: $ABCD$ est un parallélogramme.

3–4. $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{BA}$ avec $\overrightarrow{BA} = (-4, -3)$, donc $\overrightarrow{BM} = (8, 6)$ et $M(14, 7)$.

$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ avec $\overrightarrow{AD} = (-5, 3)$, donc $\overrightarrow{AN} = (-\frac{15}{2}, \frac{9}{2})$ et $N(-\frac{11}{2}, \frac{5}{2})$.

5.

$$\overrightarrow{MC} = (-13, -3), \qquad \overrightarrow{CN} = \left(-\frac{13}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

On a $\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CN}$: les vecteurs sont colinéaires, donc M, C, N alignés.

Corrigé du bonus

Le centre de gravité G vérifie, par définition vectorielle des médianes :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}, \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}, \quad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}.$$

En sommant les trois relations (et en utilisant que A', B', C' sont des milieux), on obtient :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$