



Math93.com

# Devoir Surveillé n°C1-A

## Tle Spécialité

Primitives et équations différentielles

Durée 2 heures - Coeff. 10

Noté sur 20.5 points

*L'usage de la calculatrice est autorisé.*

*Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.*

### Exercice 1. Primitives

1.5 point

Donner sans aucune justification une primitives des fonctions suivantes :

A compléter sur cette feuille

Fonction définie sur $I$ par :	$I$	UNE primitive définie sur $I$ par :
$f(x) = 1 + x + x^2$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \dots\dots\dots$
$g(x) = e^{2x+1}$	$\mathbb{R}$	$G(x) = \dots\dots\dots$
$h(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$	$\mathbb{R}$	$H(x) = \dots\dots\dots$
$i(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$	$\mathbb{R}$	$I(x) = \dots\dots\dots$

### Exercice 2.

1 point

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Déterminer la primitive de la fonction  $g$  qui prend la valeur 0 en 1.

### Exercice 3.

1 point

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E) : y' = 10y$ .
2. Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  telle que  $f(2) = 3$ .

### Exercice 4.

2 points

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E) : y' + 2y = 3$ .
2. Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  telle que  $f'(0) = 2$ .

### Exercice 5.

2 points

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E_1) : z' - 4z = 1$ .
2. Soit l'équation différentielle  $(E_2) : y'' - 4y' = 1$ .  
En posant  $z = y'$ , déduire de la question 1°) l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(E_2)$ .

**Exercice 6. Nombre de noyaux radioactifs****3 points**

Soit  $N(t)$  le nombre de noyaux radioactifs d'un corps à l'instant  $t$ , où  $t$  est exprimé en jours.

On admet que la fonction  $N$  est solution de l'équation différentielle  $y' = ay$ , où  $a$  est une constante réelle.

1. Déterminer  $N(t)$  en fonction de  $a$ , sachant que  $N(0) = 10^9$ .
2. Au bout de 18 jours, le nombre de noyaux radioactifs a diminué de moitié.  
Calculer la valeur exacte de  $a$ .
3. Au bout de combien de jours le nombre de noyaux radioactifs deviendra-t-il inférieur à 100 ?

**Exercice 7.****3 points**

Soit pour  $x$  réel l'équation différentielle  $(E)$  :

$$y' - 2y = x e^x$$

1. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = (ax + b)e^x$  soit une solution de  $(E)$ .
2. En déduire toutes les solutions de  $(E)$ .
3. Déterminer la solution de  $(E)$  qui s'annule en 0.

**Exercice 8. Problème****7 points**

On cherche si il existe une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (1) : \forall x \in \mathbb{R}, \left(f'(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 = 1 \\ (2) : f'(0) = 1 \\ (3) : f' \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

1.
  1. a. Démontrer que, pour tout réel  $x$  on a :  $f'(x) \neq 0$ .
  1. b. Calculer  $f(0)$ .
2. En dérivant chaque membre de l'égalité (1), démontrer que :

$$(4) : \text{pour tout nombre réel } x, \text{ on a : } f''(x) = f(x).$$

3. On pose  $\begin{cases} u = f' + f \\ v = f' - f \end{cases}$ .
  3. a. Calculer  $u(0)$  et  $v(0)$ .
  3. b. Démontrer que  $u' = u$  et que  $v' = -v$ .
  3. c. En déduire les expressions de  $u$  et  $v$  en résolvant les équations différentielle précédentes.
  3. d. Déduire des questions précédentes que pour tout réel  $x$  on a :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

4. Étudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
5. Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.

↩ **Fin du devoir** ↪