Inferencia Estadistica - Basica

LuisMBaezCo

I. Inferencia Clasica *(Parametrica)*

- Modelos probabilisticos Parametricos
- Teorema de Limite central
- Supuestos de Normalidad

II. Inferencia No Parametrica

- Modelos probabilisticos No-Parametricos
- Metodos Numericos
- Teorema de Limite central

III. Inferencia Bayesiana

- Teorema de Bayes
- Tecnicas de simulación Estadistica *(MCMC)*
- Teorema de Limite central

IV. Muestra: (μ)

$\varnothing \subseteq \mu \subseteq U$

$\varnothing$ $: \rightarrow$ Vacio,

U $: \rightarrow$ Población.

$Muestra : x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$

n : Tamaño de la muestra

V. Caracteristicas de la Muestra

- Los elementos de la población deben ser conocidos, identificables y ubicables ***(Censo)***
- Se deben caracterizar la muestra.
- Todos los elementos de la población deben tener una probabilidad de ser escogidos.
- Mecanismo de la selección: ***(Sorteo)***

VI. Inferencia Clasica

$Muestra : x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$

$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$ $\rightarrow$ Variables Aleatorias.

- ***Estimador*** $\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}\,(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n)$

Se define como una función sobre la muestra probabilistica.

EJ: $\sum \frac{x_i}{n}$: Mediana $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$: $\sum \frac{|x_i - \overline{x}|}{n}$;

$e^{-\sum |x_i|}$

$\widetilde{\theta}$ = Variable Aleatoria y tiene una función de densidad de probabilidad $f(\theta)$.

Estimación:

Es la realización de la muestra atraves del estimador visto como formula matematica $\theta = \theta\,(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$ con $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ $\rightarrow$ Muestras

Variabilidad:

Buen Estimador

1) **Insesgamiento :** $E\left[\widetilde{\theta}\right] = \theta$ Si y solo si $\widetilde{\theta}$ es insesgada $\widetilde{\theta}$ estimador con sesgo si y solo si $E[\widetilde{\theta}]$ y se aqui $b(\widetilde{\theta}) = \left|E\left[\widetilde{\theta}\right] - \theta\right|$

   b: Sesgo

2) **Minima Varianza:** Si $\widetilde{\theta}$ es estimador de minima varianza si y solo si $\widetilde{\theta}^*$ es otro estimador para θ entonces.

   $Var\,[\theta] \leq Var\left[\widetilde{\theta}^*\right]$

3) **Consistencia:** $\widetilde{\theta}$ es consistente si y solo si $\lim_{h\rightarrow\infty} E\left[\left|\widetilde{\theta}_n - \theta\right|\right] = 0$

4) **Suficiencia** $\widetilde{\theta}$ es suficiente si y solo si la muestra tiene "la carga informativa" para alcanzar una buena estimación.

5) **Eficiencia** $\widetilde{\theta}$ Es eficiente si y solo si pra otra $\widetilde{\theta}^*$ que estima $\widetilde{\theta}$:

   $\lim_{h\rightarrow\infty} \frac{Var\left[\widetilde{\theta}_n\right]}{Var\left[\widetilde{\theta}^*_n\right]} = 0$

- *¿Como obtener buenos estimadores?*

Las dos tecnicas mas usadas son las siguientes:

1) Estimadores por momentos

2) Estimadores por maxima verosimilitud

- **Estimadores por Momento:**

Momento de una Variable Aleatoria:

El r-esimo momento de X v.a. se define como $E\,[x^r]$ Donde r es entero positivo.

$E\left[x\right]$ $\rightarrow$ Valor Esperado
$E\left[x^2\right]$ $\rightarrow$ Varianza
$E\left[x^3\right]$ $\rightarrow$ Simetria
$E\left[x^4\right]$ $\rightarrow$ Forma
... ...
... ...
... ...
$x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots \ldots,\, x_n$ $\rightarrow$ Muestras Aleatorias

$$E\left[x^r\right] \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n} \tag{1}$$

- **Estimador por Maxima Verosimilitud**

Función de Verosimilitud :
$x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots \ldots,\, x_n$

Discreta

$x_i \sim P\left(x_i\, ;\, \theta\right)$
$L\left(\theta \,/\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots \ldots,\, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(x_i\, ;\, \theta\right)$

Continua

$x_i \sim f\left(x_i\, ;\, \theta\right)$
$L\left(\theta \,/\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots \ldots,\, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_i\, ;\, \theta\right)$

EMV[$\widetilde{\theta}$] = Es la función que maximiza la función de verosimilitud.

- **Variabilidad (Error Estándar)**

Si $\widetilde{\theta}$ es estimador de θ entonces $\sqrt{Var\left[\widetilde{\theta}\right]}$ es la variabilidad del estimador y la estimación de $\sqrt{Var\left[\widetilde{\theta}\right]}$ es conocido como *"ERROR ESTÁNDAR"* $\rightarrow$ y se nota como *Desviación estandar del* **st**($\widetilde{\theta}$)

- **Teorema**

Si $x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots \ldots,\, x_n$ es una muestra probabilistica y

$\widetilde{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Entonces **st**($\widetilde{\theta}$) = $\frac{\sqrt{Var[x]}}{\sqrt{n}}$

Estimación Puntual La estimación puntual es estimación y variabilidad.

- **Confianza y Error**

Intervalo de Confianza $I_0\, :\, (a \leq \theta \leq b)$ es de confianza y de nivel $1 - \infty$ si y solo si $P\left[I_0\right] = 1 - \alpha$ de tal que $1 - \alpha$ este cercano a 1 y la longitud de intervalo sea lo minimo posible.

α : Nivel de Significancia
$0 < \alpha < 1$
$100 \cdot (1 - \alpha)$ % Nivel de confianza en porcentaje
Nota: El nivel de confianza uno lo establece

- **Error**

Esta ligado con la longitud del intervalo de confianza

VII. Teorema del Limite Central

Sean $X_1,\; X_2,\; X_3,\; \ldots\; \ldots\;,\; X_n$ *Variables Aleatorias* suficientemente grandes $(n\; \rightarrow;\; \infty)$

Con $E\left[X_i\right] = \mu$ y $Var\left[X_i\right] = \sigma^2$ Entonces:

$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ Asintoticamente $N\left(\mu,\; \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N\left(0,\; 1\right)$

$T = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

1) Si $x_1,\; x_2,\; x_3,\; \ldots\; \ldots\;,\; x_n$ muestras Normales $x_i \sim N\left(\mu,\; \sigma^2\right)$

   Si σ *Es Conocida*, el mejor estimador para μ es:
   $\mu\left(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots \ldots,\, x_n\right) = \overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$
   $st\left(\widetilde{\mu}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2) Si σ es *desconocida* el mejor estimador para μ es :
   $\mu\;\left(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots \ldots,\, x_n\right) = \overline{x}$ y

   $\sigma^2 = S^2 = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n - 1}$
   Nota: Este estimador solo se usa en inferencia pra modelos normales, cuando la varianza es desconocida.

   S^2 : *Varianza Insesgada*

   $\sigma = S = \sqrt{\frac{\sum\;\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n - 1}}$ $\rightarrow$ Desviación Estandar Insesgada.

   ... ...

- $T = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim T_{n-1}$

  T_{n-1} : T-students con $n - 1$ grados de libertad.

- $\left[\frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right]^2 = \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim X_{n-1}^2$

  X_{n-1}^2 : Chi-cuadrado con n-1 grados de libertad.

.
.
. **Teorema**

Si $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\dots,\ x_n$ es una muestra normal $x :\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$

Entonces:

$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} \sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Percentil Probabilistico

x_α es el percentil de nivel α si y solo si $P\left[x \le x_\alpha\right] = \alpha$

Z_β : Percentil de nivel β de la Normal Estandar

$T_{\beta;n-1}$: Percentil de nivel β de la T-student con n - 1 grados de libertad

$X^2_{\beta;n-1}$: Percentil de nivel β de la chi-cuadrada con n - 1 grados de libertad

$f_{\beta;n-1;m-1}$: Percentil de nivel β x^2 con n - 1 Grado de libertad y m - 1 grado de libertad.

Supuestos de Normalidad ***(Bajo Normalidad)***

1) La muestra sea Normal
2) Si la muestra no es Normal pero por Teorema de Limite Central se lleva a la Normalidad
3) Si la muestra no es Normal y no funciona el teorema de limite central, entonces se asume como normal.

Prueba de Hipótesis
Paso a paso de prueba de Hipotesis

1) *Plantear Hipotesis*

   H0 : Hipotesis Nula → lo que voy a poner a prueba

   θ_0 = Cuantifica la hipotesis.

   HA : Hipotesis Alternativa → en caso de haber rechazado la hipotesis Nula y es la Negación de ***H0***.

   HA = -H0

2) Establece un Nivel de Confianza $100 \cdot (1 - \alpha) \cdot \%$

   Error: $\alpha \rightarrow$ Error tipo 1

3) Tener una Muestra.

   $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\dots,\ x_n$

4) Estadistico de Prueba.

   $T\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\dots,\ x_n\ ;\ \theta_0\right)$

5) Punto Critico

   $t_0 = t\left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\dots,\ x_n\ ;\ \theta_0\right)$

6) Criterio de Decisión

   H0 : Se rechaza si y solo si $P\left[T \ge t_0\right] < \alpha$
   - Equivalente

   I) Uso de Percentil
   II) HO se rechaza si ysolo si

   θ_0 No esta en el intervalo de confianza asociado

   III) P-valor es una estimación $P\left[T \ge t_0\right]$ ***H0*** se rechaza si y solo si $(p - valor < \alpha)$

7) Respuesta

VIII. Intervalos de Confianza

¿Que uno busc de la Inferencia Estadistica?

1) **Estimación:** Estimación es para μ : $\overline{x}$
2) **Variabilidad:** (Error Estandar) $\frac{S}{\sqrt{n}}$
3) **Confianza:** $100 \cdot (1 - \alpha)\,\%$
4) **Error:** $T_{\frac{\alpha}{2};\,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

- ***Intervalo de Confianza para*** $x \sim N\left(\mu,\ \sigma\right)$ ***Poblacional con*** μ ***y*** σ ***Conocidas, para*** $IC_{95\%}$

$p\left[x \le x_0\right] = 0.95 \qquad \alpha = 1 - 0.95 = 0.05$

$0.95 + \frac{\alpha}{2} = 0.95 + \frac{0.05}{2} = 0.975$

$p\left[z \le \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right] = 0.975$

$\frac{x_0 - \mu}{\sigma} = 1.96$
$x_1 = -1.96 \cdot \sigma + \mu$
$x_2 = 1.96 \cdot \sigma + \mu$

$IC_{95\%} = \left(x_1\ ;\ \ x_2\right)$

- ***Intervalo de Confianza para*** μ ***con Varianza Desconocida***

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\dots,\ x_n$ Muestras.

$$IC_{\%} = \left(\overline{x} - T_{\frac{\alpha}{2};\,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + T_{\frac{\alpha}{2};\,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \quad (2)$$

$(\overline{x}\ -\ \epsilon,\ \overline{x}\ +\ \epsilon\ )$ Donde $epsilon$: Error.

Confianza del $100 \cdot (1-\alpha)\,\%$

$T_{n-1}\ \sim\ \frac{\overline{x}\ -\ \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

$T\ =\ \frac{\overline{x}\ -\ \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\ ;\ T_0\ =\ \frac{\overline{x}\ -\ \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ T_0 = Punto Critico

$\mu = \ \overline{x}\ -\ \frac{T \cdot S}{\sqrt{n}}$

Prueba de Hipotesis

H0: μ = μ_0
HA: $\mu \neq \mu_0$

$T\ =\ \frac{\overline{x}-\ \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

$t_0\ =\ \frac{\overline{x}-\ \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ Punto Critico.

Criterio de Decisión

-Intervalo de Confianza:

H0 se **Rechaza** si y solo si μ_0 no esta en el intervalo de confianza.

-Percentil:

H0 se **rechaza** si y solo si
$|t_0|\ \geq T_{\frac{\alpha}{2}\,;\,n-1}$

- ***Intervalo de Confianza para la Varianza***

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots \dots\ ,\ x_n$ Muestra Normal.

$$IC_{\%}\ =\ \left(\frac{(n-1) \cdot S^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2}\ ;\, n-1}}\ ;\ \frac{(n-1) \cdot\ S^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}\ ;\, n-1}} \right) \tag{3}$$

- ***Intervalo de Confianza para la Proporción (r)***

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots \dots\ ,\ x_n$ Bernoulli.
y bajo supuestos de normalidad.

$$\hat{r}\ =\ \frac{Numero\,de\,Casos\,Favorables}{Numero\,de\,Casos\,Posibles} \tag{4}$$

$$IC_{\%} = \left(\hat{r}\ -\ Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{r} \cdot (1-\hat{r})}{n}}\ ;\ \hat{r}\ +\ Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot\ \sqrt{\frac{\hat{r} \cdot\ (1-\hat{r})}{n}} \right) \tag{5}$$

Confianza del $100 \cdot (1-\alpha)\,\%$

Prueba de Hipotesis

H0: r = r_0
HA: $r \neq r_0$

$z\ =\ \frac{r\ -\ r_0}{\sqrt{\frac{r \cdot (1-r)}{n}}}$

$z_0\ =\ \frac{\hat{r}\ -\ r_0}{\sqrt{\frac{\hat{r} \cdot (1-\hat{r})}{n}}}$

Criterio de Decisión

H0 se **Rechaza** si y solo si
$|z_0|\ \geq\ Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

- ***Intervalo de Confianza para μ con Varianza Conocida***

$$IC_{\%}\ =\ \left(\overline{x}\ -\ Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x}\ +\ Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \tag{6}$$

$z\ =\ \frac{\overline{x}\ -\ \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\ \ \sim\ N\,(0,\ \ 1)$

Prueba de Hipotesis

H0: μ = μ_0
HA: $\mu \neq \mu_0$

$z_0\ =\ \frac{\overline{x}\ -\ \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Criterio de Decisión

H0: se rechaza si y solo si

$|z_0|\ \geq\ Z_{1-\ \frac{\alpha}{2}}$

IX. Intervalo de Confianza para Comparar Medias

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots \dots\ ,\ x_n$ Bajo Normalidad.

$\overline{x}\ \sim\ N\left(\mu_x,\ \ \frac{\sigma_x^2}{n}\right)$

$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \dots \dots\ ,\ y_n$ Bajo Normalidad.

$\overline{y}\ \sim\ N\left(\mu_y,\ \ \frac{\sigma_y^2}{n}\right)$

$\mu_x\ =\ \mu_y\ \ \equiv\ \mu_x\ -\ \mu_y\ =\ 0$
$\mu_x\ >\ \mu_y\ \ \equiv\ \mu_x\ -\ \mu_y\ >\ 0$
$\mu_x\ <\ \mu_y\ \ \equiv\ \mu_x\ -\ \mu_y\ <\ 0$

- ***Intervalo de Confianza para Comparar Medias con Varianza Conocida***

σ_x^2 y σ_y^2 Son Conocidas.

$$IC_{\%} \ = \ \left((\overline{x} - \overline{y}) \ - \ Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma\ _y^2}{m}} \right) \tag{7}$$

$$\left(;\ (\overline{x} - \overline{y}) \ + \ Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \ \sqrt{\frac{\sigma\ _x^2}{n} + \frac{\sigma\ _y^2}{m}} \right) \tag{8}$$

Nota: El resultado es el rango de diferencias de las medias.

Si $(result_x \ < \ 0\,;\, result_y \ > 0)$ o viceversa: *Las Medias son Iguales* $\mu_x = \mu\ _y$

Si $(result_x \ > \ 0\,;\, result_y \ > 0)$ Entonces $\mu_x > \mu\ _y$

Si $(result_x \ < \ 0\,;\, result_y \ < 0)$ Entonces $\mu_x < \mu\ _y$

Prueba de Hipotesis

H0: $\mu_x \ - \ \mu_y \ = \delta_0$

HA: $\mu_x \ - \ \mu_y \ \neq \ \delta_0$

$z_0 \ = \ \frac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}}$

Criterio de Decisión

H0: se **Rechaza** si y solo si
$|z_0| \ \geq \ Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

- ***Intervalo de Confianza para Comparar Medias con Varianza Desconocida pero Iguales***

σ_x^2 y σ_y^2 Son Desconocidas.

Pero $\sigma_x^2 \ = \ \sigma_y^2$

$$IC_{\%} \ = \ \left((\overline{x} - \overline{y}) - T_{\frac{\alpha}{2};n+m-2} \cdot SP \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right) \tag{9}$$

$$\left(;\ (\overline{x} - \overline{y}) + T_{\frac{\alpha}{2};n+m-2} \cdot SP \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m})} \right) \tag{10}$$

$$SP \ = \ \sqrt{\frac{(n-1)\cdot S_x^2 + (m-1)\cdot S_y^2}{n+m-2}} \tag{11}$$

Si $(result_x \ < \ 0\,;\, result_y \ > 0)$ o viceversa: *Las Medias son Iguales* $\mu_x = \mu\ _y$

Si $(result_x \ > \ 0\,;\, result_y \ > 0)$ Entonces $\mu_x > \mu\ _y$

Si $(result_x \ < \ 0\,;\, result_y \ < 0)$ Entonces $\mu_x < \mu\ _y$

Prueba de Hipotesis
$\mathbf{H}_0$:$\mu_x \ - \ \mu_y \ = \ \delta_0$
$\mathbf{H}_A$:$\mu_x \ - \ \mu_y \ \neq \ \delta_0$

$t_0 \ = \ \frac{(\overline{x}\ -\ \overline{y})-\delta_0}{SP\cdot\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$

Criterio de Decisión

$|t_0| \ \geq T_{\frac{\alpha}{2};n+m-2}$

- ***Intervalo de confianza para Comparar Medias para Datos Emparejados***

$x: \quad x_1,\, x_2,\, x_3,\, \dots\dots,\, x_n$
$y: \quad y_1,\, y_2,\, y_3,\, \dots\dots,\, y_n$

Diferencia:
$d_1 \ = \ x_1 \ - \ y_1$
$d_2 \ = \ x_2 \ - \ y_2$
$\dots\dots\dots$
$d_n \ = \ x_n \ - \ y_n$

Nota: El intervalo de confianza gira en torno a d

$$IC_{\%} \ = \ \left(\overline{d} \ - \ T_{\frac{\alpha}{2};\, n-1} \cdot \frac{Sd}{\sqrt{n}};\ \overline{d} \ + T_{\frac{\alpha}{2};\, n-1} \cdot \ \frac{Sd}{\sqrt{n}} \right) \tag{12}$$

Sd **= Desviacion Estandar Muestral de las Diferencias**

μ_d : **Media de la Diferencia.**
$\mu_d \ = \ \mu_x \ - \mu_y$

Si 0 **esta dentro del intervalo se puede concluir que no mejoró.**

- ***Intervalo de Confianza para comparar Proporciones*** r_1 ***y*** r_2

$$IC_{\%} = x_0 \left((\hat{r_1} - \hat{r_2}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{r_1}\cdot(1-\hat{r_1})}{n} - \frac{\hat{r_2}\cdot\ (1-\hat{r_2})}{m}} \right) \tag{13}$$

$$y_0 \left((\hat{r_1} - \hat{r_2}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{r_1}\cdot(1-\hat{r_1})}{n} - \frac{\hat{r_2}\cdot\ (1-\hat{r_2})}{m}} \right) \tag{14}$$