Probabilidad y Estadistica Fundamental - II

@unal.edu.co

I. Variables Aleatorias *(Discretas)*

- **Función de Probabilidad**

  $R \to [0,\ 1]$

  $x_0 \to p\,(x_0) \ = \ p\,[x = x_0]$

  $\Sigma\, p\,(x) \ = \ 1$

II. Probabilidad Acumulada *(Discretas)*

$$F\,(x_0) \ = \ P\,[x \leq x_0] \ = \sum_{x \leq x_0} \ P\,(x) \tag{1}$$

- **Distribución de Probabilidad**

  $F: \ R \to [0,\ 1]$

  $x \ \to \ F\,(x) \ = \ P\,[x \leq x_0]$

  $P\,[a \ \leq \ x \ \leq \ b] \ = \ \sum_{\,a \leq\, x \leq\, b} \ p\,(x)$

  En general SI $I \ \subseteq R$

  $P\,[I] \ = \ \sum_{x\,\in\,I} \ P\,(x)$

III. Valor Esperado o Esperanza Matematica *(Discretas)*

$$E\,[x] \ = \ \sum \ x \cdot \ p\,(x) \tag{2}$$

IV. Varianza Probabilistica *(Discretas)*

$$Var\,[x] \ = \ \sum \ (x_i - E\,[x])^2 \cdot p\,(x_i) \quad \textit{or} \tag{3}$$

$$E\left[x^2\right] - (E\,[x])^2 \tag{4}$$

V. Desviasión Estandar Probabilistica *(Discretas)*

$$D\,[x] = \sqrt{Var\,[x]} \tag{5}$$

VI. Variables Aleatorias *(Continuas) - Intervalo*

- **Función de Densidad de Probabilidad**

  Nota: *No mide probabilidades*

  $f: \ R \ \to [0,\ +\infty)$

  $x \ \to f\,(x) \ \geq 0$

  $\int_{-\infty}^{\infty} \ f\,(x)\,dx \ = \ 1 \quad \textit{or} \quad \int_R f\,(x)\,dx \ = \ 1$

VII. Probabilidad Acumulada *(Continuas)*

$$F\,(x_0) \ = \ P\,[x \ \leq x_0] \ = \ \int_{-\infty}^{x_0} \ f\,(x)\,dx \tag{6}$$

- **Destribución de Probabilidad**

  ver $F\,(x_0)$ como función

  $p\,[a \ \leq x \ \leq \ b] \ = \ p\,[x \ \leq \ b] \ - \ p\,[x \ \leq a]$

  $= \ F\,(b) \ - \ F\,(a)$

  $\int_a^b f\,(x)\,dx$

  En general SI $I \ \subseteq R, \ \ p\,[I] \ = \ \int_I f\,(x)\,dx$

VIII. Valor Esperado o Esperanza Matematica *(Continuas)*

$$E\,[x] \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \ x \cdot f\,(x)\,dx \tag{7}$$

Caso General:

$$E\,[g\,[x]] \ = \int_{-\infty}^{\infty} \ g\,(x) \cdot f\,(x)\,dx \tag{8}$$

IX. Varianza Probabilistica *(Continuas)*

$$Var\,[x] \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \ (x - E\,[x])^2 \cdot f\,(x)\,dx \tag{9}$$

$$= \ E\left[x^2\right] - (E\,[x])^2 \tag{10}$$

X. Desviasión Estandar Probabilistica *(Discretas)*

$$D\left[x\right] = \sqrt{Var\left[x\right]} \tag{11}$$

XI. Modelos Probabilisticos Especiales
(Variables Aleatorias Especiales)

- **Discretos**:

1) Distribución Empirica
2) Uniforme Discreta
3) Bernoulli
4) Binomial
5) Poisson
6) Hipergeometrico
7) Binomial Negativo

- **Continuo**:

1) Uniforme Continuo
2) Exponencial Negativo
3) Normal
4) Distribuciones de Muestreo

XII. Distribución Empirica *(Discreto)*

NOTA: *X Variable aleatoria empirica si y solo si su función de probabilidad es la matematización de una tabla de frecuencia.*

- El Valor Esperado es el $Promedio\ Aritmetico$
- La varianza probabilistica es la $Varianza\ Aritmetica$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{Para } \ x\ < x_1 \\ i/n & \text{Para } \ x_i\ \leq x\ < x_{(i+1)} \\ 1 & \text{Para } \ x \geq x_n \end{cases} \tag{12}$$

Para $x_1,\ \ x_2,\ \ x_3,\ \ ...\ \ ,\ x_n$

XIII. Distribución Uniforme Discreta *(Discreto)*

x es uniforme discreta si y solo si su funcion de probabilidad

NOTA: *Todas tiene la misma probabilidad de salir*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{Si } x\ =\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...\ ,\ x_n \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \tag{13}$$

$$E\left[x\right]\ =\ \overline{x}\ =\ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \tag{14}$$

$$Var\left[x\right]\ =\ \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\ -\ \overline{x}\right)^2}{n} \tag{15}$$

XIV. Distribución de Bernoulli *(Discreto)*

$x\ \sim\ \beta er\left(r\right)\quad r\ =\ Proporsi\acute{o}n$
$0\ <\ r\ <\ 1$

NOTA: *Esta distribución solo puede tomar 2 valores **‘1’** para la probabilidad de **éxito** y **‘0’** para la probabilidad de **fracaso**.*

$$\text{p(x)} = \begin{cases} r & Si\,x\ =\ 1 \\ 1-r & Si\,x\ =\ 0\ \ o\ r^x\left(1-r\right)^{1-x} \\ 0 & En\,otro\,caso \end{cases}$$
(16)

XV. Distribución Binomial *(Discreto)*

NOTA: *Esta distribución cuenta el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernoulli independientes entre sí.*

$x\ \sim\ \beta in\left(n,\ r\right)$
$n\ =\ Numero\,de\,Ensayos\left(Enteros\ Positivos\right)$
$r\ =\ Proporsi\acute{o}n$
$0\ <\ r\ <\ 1$

$$\text{p(x)}\ =\ \begin{cases} \binom{n}{x}\cdot r^x\left(1-r\right)^{n-x} & x\ =\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\ ,\ n \\ 0 & En\,otro\,caso \end{cases}$$
(17)

$$E\left[x\right]\ =\ n\cdot r \qquad Var\left[x\right]\ =\ n\cdot r\cdot\left(1-r\right) \tag{18}$$

Cuanto son los exitos en los n ensayos

x : Numero de exitos de la dicotomia o valor booleano de interés

XVI. Distribución de Poisson *(Discreto)*

NOTA: *Esta distribución se utiliza cuando queremos modelar el número de veces que ocurre un evento del interés en un intervalo de tiempo o espacio determinados.*

$x\quad P_{ois}\left(\lambda\right)\qquad \lambda:\ "Velocidad\,de\,conteo.",\ \ \lambda\ >\ 0$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!} & x = 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ ... \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \tag{19}$$

$E\left[x\right] = \lambda,\quad Var\left[x\right] = \lambda$

λ : Numero de veses que se espera que ocurra un fenomeno durante un intervalo dado - Media.

XVII. Distribución Uniforme Continua *(Continua)*

$x \to u\,(a,\ b) \quad a:\ Minimo, \quad b:\ Maximo$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \tag{20}$$

$p\,(x_0 \le x \le x_1)\ =\ \int_{x_0}^{x_1}\ f\,(x)\,dx$

$E\,[x]\ =\ \frac{a\,+\,b}{2}$

$Var\,[x]\ =\ \frac{(b-a)^2}{12}$

NOTA: *Esta distribución se utiliza en el caso que tenga un fenómeno continuo y se conozca un valor **mínimo** y un valor **máximo**.*

XVIII. Distribución Modelo Exponencial o Exponencial Negativo *(Continua)*

NOTA: *Podemos considerarla como un modelo adecuado para la distribución de probabilidad del tiempo de espera entre dos hechos que sigan un proceso de Poisson.*

$x\ \to Exp\,(\lambda) \quad \lambda:\ 'Parámetro\,escalar', \quad \lambda\ >\ 0$

Función de Densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & x\ >\ 0 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \tag{21}$$

Función de Distribución:

$$F(x) = P[X \le x] = \begin{cases} 0 & \text{Para } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x} & \text{Para } x \ge 0 \end{cases} \tag{22}$$

$E\,[x]\ =\ \frac{1}{\lambda}, \qquad Var\,[x]\ =\ \frac{1}{\lambda^2}$

PROBABILIDAD:
Si $c_1\ \le x\ \le c_2$ Es un intervalo positivo entonces:

$P\,[c_1\ \le\ x\ \le\ c_2]\ =\ e^{-\lambda \cdot c_1}\ -\ e^{-\lambda \cdot c_2}$

XIX. Modelo Normal Gaussiano *(Continua)*

$x\ \to N\left(\mu,\ \sigma^2\right) \quad o\,N\,(\mu,\ \sigma)$
$\mu:\ Media$
$\sigma^2:\ Varianza$
$\sigma:\ Desviación\ Estandar$

$$f\,(x)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \tag{23}$$

$\mu\ \in R, \quad \sigma^2\ >\ 0, \quad \sigma > 0$
$E\,[x]\ =\ \mu, \qquad Var\,[x] = \sigma^2$

- **Teorema de Limite Central**
  Sean $x_1,\ \ x_2,\ \ x_3,\ ...\ \ ,\ x_n$ Variables aleatorias independientes, suficientemente grandes con:

  $E\,[x_i] = \mu \quad Var\,[x_i] = \sigma^2$

  Entonces:

  $\overline{x}\ =\ \frac{1}{n} \cdot \sum x_i \quad \to\ N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$

- **Teorema de Estandarización**

  $Si\,x\ \to\ N\left(\mu,\ \sigma^2\right) \quad y\ \ z\ =\ \frac{x\,-\,\mu}{\sigma}$

  Entonces:

  $(i):\ z\ \to\ N\,(0,\ 1)\ = Norma\,Estandar$

  $(ii):\ P\,[x \le x_0]\ =\ P\left[z\ \le \frac{x_0\,-\,\mu}{\sigma}\right]$

  $(iii): \quad p\,(x_0\ \le z \le x_1) = p\,(z \le x_1) - p\,(z \le x_0)$

- **Propiedades**

1) $E\,[c_1 \cdot x\ +\ c_2 \cdot y]\ =\ c_1 \cdot E\,[x] + c_2 \cdot E\,[y]$

2) $E\,[c] = c$ Donde c es constante

3) $E\,[I_A\,(x)]\ =\ P\,(A)$

$$I_A\,(x) = \begin{cases} 1 & Si\,x\ \in\ A \\ 0 & Six\ \notin\ A \end{cases} \tag{24}$$

4) $Var\,[x]\ =\ E\,[x]\ -\ [E\,[x]]^2$

5) $Var\,[c_1 \cdot x \;+\; c_2] \;=\; c_1^2 \cdot Var\,[x]$

$Var\,[x + c\,] \;=\; Var\,[x]$ Si c es una constante

6) $Var\,[c_1 \cdot x_1 \;+\; c_2 \cdot y_2] = c_1^2 \cdot Var\,[x] \;+\; c_2^2 \cdot Var\,[y]$

Siempre y cuando x e y sean independientes.