

Fundamentos matemáticos del aprendizaje profundo

1° cuatrimestre 2025

Práctica 3: FUNCIONES DE COSTO

Ejercicio 1. Dadas dos funciones de densidad p y q se define la entropía cruzada como

$$S(p, q) = - \int_{\mathbb{R}} p(x) \ln q(x) dx.$$

Sean p, p_i, q, q_i funciones de densidad en \mathbb{R} y $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostrar que la entropía cruzada verifica las siguientes propiedades:

- (a) $S(p_1 + p_2, q) = S(p_1, q) + S(p_2, q)$
- (b) $S(\alpha p, q) = \alpha S(p, q) = S(p, q^\alpha)$
- (c) $S(p, q_1 q_2) = S(p, q_1) + S(p, q_2)$.

Ejercicio 2. Verificar que la entropía cruzada verifica

$$S(p, q) \geq 1 - \int_{\mathbb{R}} p(x) q(x) dx.$$

Ejercicio 3. Sea X una variable aleatoria discreta. Mostrar que $H(X) \geq 0$, donde $H(X)$ es la entropía de Shannon definida como

$$H(p) = S(p, p)$$

Ejercicio 4. Asumamos que la variable objetivo Z es \mathcal{E} -medible. ¿Cuál es la función de error cuadrático medio en este caso?

Ejercicio 5. Supongamos que la red tiene una función de entrada-salida $f_{w,b}$ lineal en w y en b . Probar que la función de costo

$$C(w, b) = \sum_{i=1}^n (f_{w,b}(x_i) - z_i)^2,$$

alcanza su mínimo para un par de parámetros (w^*, b^*) que pueden ser calculado explícitamente.