Fundamentos matemáticos del aprendizaje profundo

1° cuatrimestre 2025

Práctica 8: Aprendizaje con entradas unidimensionales

Ejercicio 1 (Derivada generalizada)**.** Decimos que $f^{(n)} = g$ en sentido generalizado (o sentido débil), si para toda función suave de soporte compacto $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ se tiene

$$(-1)^n \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi^{(n)}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x)\, dx.$$

Probar las siguientes relaciones en sentido generalizado:

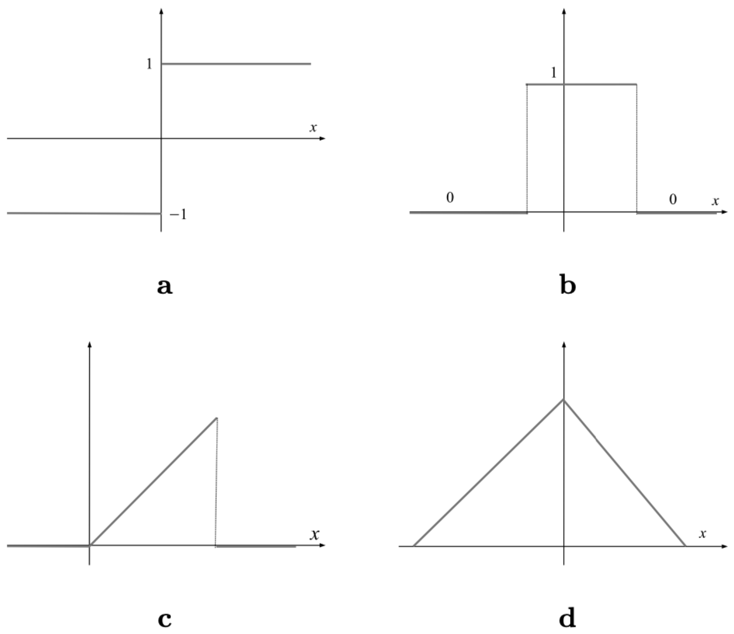
(a) $H'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$;
(b) $ReLU'(x) = H(x)$;
(c) $ReLU''(x) = \delta(x)$;
(d) $(xReLU(x))' = 2ReLU(x)$;
(e) $(xReLU(x))'' = 2H(x)$.

Ejercicio 2 (Continuidad uniforme)**.** Sea $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que es *uniformemente continua.*

Ejercicio 3. Sea f una de las funciones de la Figura. ¿Cuál de ellas tiene la propiedad de que la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(w_i x - b_i) \colon N \geq 1,\ \alpha_i, w_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

es densa en $C([0,1])$?



a. Función de salto bipolar. **b**. Función cajón. **c**. Función diente de sable. **d**. Función diente de tiburón.

Ejercicio 4. Sea $\varphi_\alpha(x) = \alpha \ln(1 + e^{x/\alpha})$. Probar que $\varphi_\alpha(x) \downarrow ReLU(x)$ cuando $\alpha \downarrow 0$.