Fundamentos matemáticos del aprendizaje profundo

1° cuatrimestre 2025

Práctica 7: Teoremas de aproximación

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{F} = \{\tanh(ax+b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$. Mostrar que la familia $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{F} = \{ax+b \colon |a|+|b| < 1,\ x \in [0,1]\}$. Mostrar que la familia es equicontinua y uniformemente acotada.

Ejercicio 3. Sea $M > 0$ y consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in C^1([a,b]) \colon \int_a^b |f'(x)|^2 \, dx \leq M \right\}.$$

Mostrar que $\mathcal{F}$ es equicontinua.

Ejercicio 4. Notemos por $\mathcal{D} \subset (a,b)$ un conjunto denso. Sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones tales que

(a) Es equicontinua sobre el intervalo (a,b).
(b) Para todo $x \in \mathcal{D}$, la familia es uniformemente acotada en x, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Mostrar que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en todos los puntos.

Ejercicio 5. Sean $\mathcal{F}$ una familia equicontinua, $k \geq 1$ un entero fijo y $\{w_1, \ldots, w_k\}$ un conjunto de pesos tales que $|w_j| < 1$ para $j = 1, \ldots, k$. Mostrar que el conjunto sigue siendo equicontinuo si se extiende para incluir a las combinaciones lineales de la forma $\sum_{j=1}^{k} w_j f_j$ con $f_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, \ldots, k$.

Ejercicio 6. Una red neuronal usando neuronas sigmoides es diseñada para aprender una función continua $f \in C([a,b])$ por el método de descenso de gradiente. La salida de la red obtenida luego de la $n-$ésima actualización de los parámetros es denotada por $G_n(x) = G(x; w(n), b(n))$. Asumamos que en cada paso la aproximación mejora, es decir $|f(x) - G_{n+1}(x)| < |f(x) - G_n(x)|$ para todo $x \in [a,b]$ y todo $n \geq 1$. Probar que G_n converge uniformemente a f en $[a,b]$ (es decir, la red aprende cualquier función continua en $[a,b]$).

Ejercicio 7. Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica con período $T > 0$, i.e. $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe una función

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T} \right),$$

tal que $|F(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8 (El conjunto de transformaciones integrales de funciones L^2)**.** Sea $M > 0$ y sea $K \colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se define la clase

$$\mathcal{F}_M = \left\{ g(x) = \int_c^d K(x,y) h(y) \, dy \colon h \in C([c,d]),\ \int_c^d |h(y)|^2 \, dy \leq M \right\}.$$

Mostrar que $\mathcal{F}_M$ es equicontinuo y uniformemente acotado.

Ejercicio 9. Se define la clase

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{m_i x} \colon \alpha_i \in \mathbb{R},\ m_i \in \mathbb{N}_0,\ n = 1{,}2.\ldots \right\}.$$

Mostrar que $\mathcal{A} \subset C([a,b])$ es un álgebra de funciones. Probar que dada $f \in C([a,b])$ y $\varepsilon > 0$, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ y $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{m_i x} \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$

Formular una interpretación en términos de aprendizaje automático de este resultado.