Fundamentos matemáticos del aprendizaje profundo

1° cuatrimestre 2025

Práctica 1: Problemas introductorios

Ejercicio 1. Una fábrica tiene n proveedores que producen cantidades $x_1, \ldots, x_n$ por día. La fábrica está conectada con sus proveedores por un sistema de rutas, que pueden ser utilizadas con capacidades variables $c_1, \ldots, c_n$, de manera tal que la fábrica queda provista por una cantidad diaria $x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$.

(a) Dado que la producción de la fábrica empieza cuando el suministro alcanza una cantidad crítica diaria b, escribir la fórmula para los ingresos diarios de la fábrica y.
(b) Formular el problema como un problema de aprendizaje.

Ejercicio 2. Un número n de instituciones financieras, cada una teniendo una riqueza de x_i, deposita una cantidad de dinero en un fondo a una tasa ajustable para el depósito de w_i. Luego, el dinero en el fondo viene dado por $x = w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n$. El fondo está diseñado para funcionar de la siguiente forma: mientras el fondo tenga menos que una cierta reserva M, el manager del fondo no realiza inversiones. Sólo se invierte el dinero excedente a la reserva M. Sea $k = e^{rt}$, donde r y t denotan la tasa de retorno y el tiempo de inversión respectivamente.

(a) Hallar la fórmula para la inversión.
(b) Enunciar el problema de aprendizaje asociado.

Ejercicio 3. (a) Dada una función continua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ hallar la función lineal $L(x) = ax + b$ tal que $L(0) = f(0)$ y que minimize el error cuadrático $\frac{1}{2}\int_0^1 (L(x) - f(x))^2\, dx$.
(b) Dada una función continua $f\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ hallar la función lineal $L(x) = ax+by+c$ tal que $L(0,0) = f(0,0)$ y que minimize el error cuadrático

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 (L(x,y) - f(x,y))^2\, dxdy.$$

Ejercicio 4. Dado un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, asociamos la matriz simétrica

$$r_{ij} = \int_K x_i x_j\, dx.$$

La inversibilidad de la matriz $R = (r_{ij})$ en general depende de K y de la dimensión n.

(a) Probar que si $n = 2$ la matriz R es inversible para cualquier compacto $K \in \mathbb{R}^2$.
(b) Probar que si $K = [0,1]^n$, entonces R es inversible para todo $n \geq 1$.