남동성 교수님 Linear Algebra.

선형대수 ⇒ 데이터 → 기계 학습 → 데이터
벡터 행렬 벡터

* matrices (행렬)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ m행 n열

⇒ 차원이 늘어나도 괄호에 여러 값으로 표현될 수 있다

* vector multiplication $n[\quad]$ * vector addition $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

* vector space 조건: linear combinations still stay in the space

* Linear Combinations → 선형의 결합..

- $cv + dw$

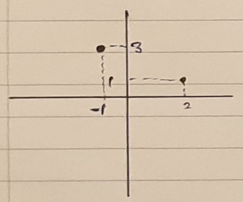
  c and d : scalar

  v and w : vector

* Vector space → R^n space consists of all vectors with n component.

* column space

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$



→ 2개의 벡터는 서로 independent 하며 linear combination으로 2차원의 모든 공간을 채울 수 있다.

→ whole space : R^2 (2차원 그 자체)

column space : R^2

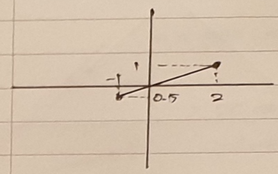
→ 차원이 더 커질 수 없다

vector space → $[1]$ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ---

↓ ↓ ↓

R^1 R^2 R^3

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$



⇒ 2개의 벡터는 서로 dependent

linear combination은 하나의 line 선형에만 값 O (1차원)

⇒ dimension of whole space : 1

〃 column space : 2

dimension of whole spaces : n rows

〃 column space : n independent colums

<PPT 예제들>

① 3차원 이상일 때 5개의 column이 linear combination으로 나머지 하나의 column을 생성할 수 있다면,

whole space dimension > column space dimension

② matrix를 transpose 해도 column space는 동일하다.

An mxn matrix has 2 whole spaces : R^m and R^n

$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ ⇒ column-wise whole space (column)

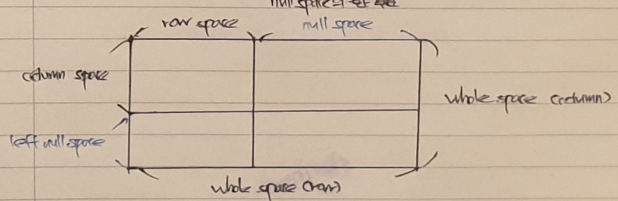
⇒ row-wise whole space (row)

null space

$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

⇓

null space의 한 부분



- row ⇒ null space

  column ⇒ left null space

linear transformation $\underset{\text{행렬}}{Ax} = \underset{\text{벡터}}{b}$

(∵대문자) (∵소문자)

Detransformation : Inverse Matrix

- dependant vector로는 cannot Invertible

Eigen Vector $Av = b$: A transforms v to b.

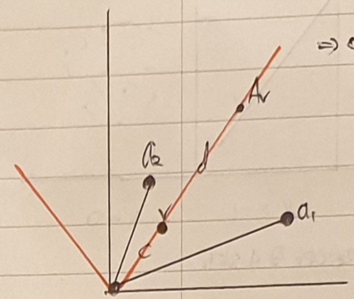
$$\underbrace{\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}}}_{2\times 3} \times \underset{3\times 1}{\overset{v}{\begin{bmatrix} \end{bmatrix}}} = \underset{2\times 1}{\overset{b}{\begin{bmatrix} \end{bmatrix}}}$$

whole space
(column) (row)

- row vector가 linear combination으로 spanning 해서 만들 수 있는 row space 는 고차원.
- Null space의 정의 $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - ① 수학적 정의 : 어떤 입력을 넣든 출력이 0이면 영향을 받지 X
    - 교사님 정의 – 유저가 신호를 얻는 것은 null space로 차단하는 것이다.
  - ② 기하학적 정의 : row or column space에 orthogonal한 space.
  - ③ 실용적 정의 : 다른 입력, 같은 출력 (다른 강아지 사진 → but 출력은 '강아지')

Eigen Vector

- Eigen vector의 정의 : 원점, 입력, 출력이 평행이 되는 순간은 Eigen vector 다 (cf. Vector는 방향이 있다)



⇒ 이 선상의 vector들 eigen vectors

$Av = \lambda v$

- v = eigenvectors
- λ = eigenvalues

- 2x2에서 eigen vector가 2개
  3x3에서 〃 3개

- Eigen Value의 정의 : 원점에서 v, 원점에서 Av 거리 간의 Ratio.
  - Eigen vector 마다 eigenvalue가 있다

- Eigen vector 사용 예시 : eigen vector는 matrix의 unique feature 이다.
  ex) 키/성, 수/과로 쪼개고 싶다. (서로 영향을 미치지 않을 때 고유 영역으로 쪼개고 싶을 때가 있다.)
  → 이 task를 done by eigenvector.
  → 통계의 PCA와 유사 (principal component analysis)

and 상관관계

Correlation (Eigen Vector)

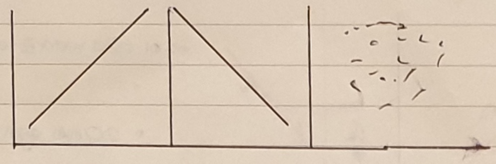
* 상관관계란?

하나가 올라갈 때, 다른 것이 올라감

$-1 \le r \le 1$ → 0 : 상관관계 없음

-1 : 음의 상관관계

1 : 양의 상관관계

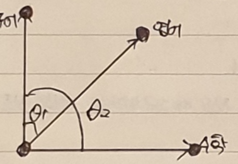


r=1 r=-1 r=0

완벽한 ±1 은 신화이라 할 수 있다.

* Correlation and linear algebra

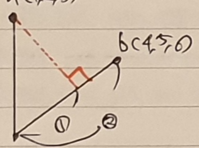
국어 [···]
영어 [···]
) 점 하나는 학생의 점수 의미
차원이 달라져도 원점, 국어 점, 영어 점과 선을



$\cos\theta = r$ $\cos 90° = 0$ 상관관계 O

$\cos 0° = 1$ 상관관계 X. 서로 orthogonal

Dot (Inner) Product



1

1	2	3
x	x	x
4	5	6

4 + 10 + 18 = 32.

2 ① x ② = 32 (a,b) = 32

3 $|a| \times |b| \times \cos\theta = 32$ ($\because |a| \times \cos\theta = ②$)

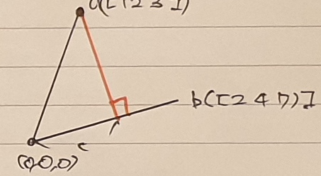
→ $\cos\theta$ 의 값을 구할 수 있고 θ 도 구할 수 있다.

Ex> [1 2 3]
[2 4 7]
) 차원이 늘어나도 해도 2개의 벡터 원점으로 삼각형을 만들 수 있다

$\underbrace{a}_{1\times3} \times \underbrace{b^T}_{3\times1} = \underbrace{[31]}_{1\times1}$ → ☆ Inner product

a·b 라고 표현 (dot product) → scalar 값이 나온다.

$a^T \times b = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 14 \\ 6 & 12 & 21 \end{bmatrix}$ → Outer product



Inner product (dot) $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$
$= |c| \cdot |b|$

$\cos\theta = \frac{\Sigma ab}{|a| \cdot |b|}$ ← dot product

상관계수
correlation r과 유사
⇒ Cosine Similarity

i) $\theta = 90° \rightarrow \cos\theta = 0 \leftrightarrow r = 0$

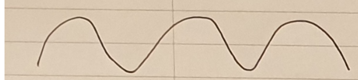
ii) $\theta = 0° \rightarrow \cos\theta = 1 \leftrightarrow r = 1$

iii) $\theta = 180° \rightarrow \cos\theta = -1 \leftrightarrow r = -1$

여러 vector를 가지고 cosine similarity를 구할 수 있고 theta 값도 구할 수 있다!

cosine Similarity and sound wave

inner product로 wave의 특성 파악 가능



: 1000정도 : most dark part of spectrogram

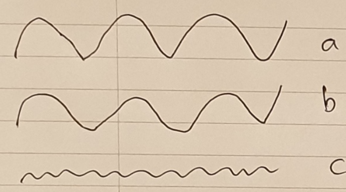
300Hz

200Hz : 10정도

100Hz : 100정도

⊙ 예제

1.



a∘b
∨
a∘c

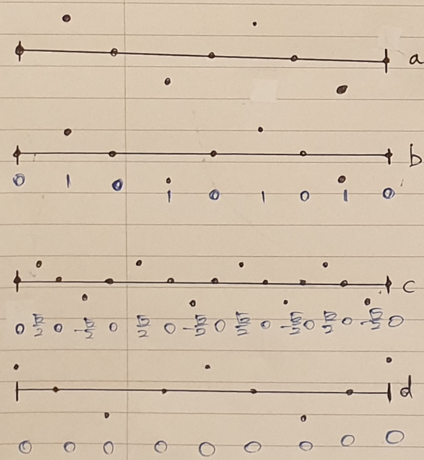
* a∘c가 작은 이유

: 올라갈 때 내려가면 (-) $-1\times 1 = -1$

내려갈 때 올라가면 (+) $1\times 1 = 1$

* dot product로 similarity를 예상할 수 있다.

2.



$a \cdot b = 4$

$a \cdot c = 0$

$a \cdot d = 0$ ⇒ Orthogonal

⇒ cosine similarity = 0

$r = 0$