El teorema espectral en EDP lineales

Lucía Mielgo

15 de mayo de 2023

Índice

1. Introducción

Este trabajo constituye una breve introducción al Teorema espectral aplicado a las ecuaciones en derivadas parciales lineares.

Las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) se pueden considerar modelos de evolución en la ciencia y la tecnología. Las EDP describen cómo cambia una determinada cantidad o variable a lo largo del tiempo. Esta cantidad o variable puede representar una amplia variedad de objetos y fenómenos, utilizandose para representar la propagacón de ondas, la transferencia de calor, modelar el flujo de fluidos y muchas otras aplicaciones, En pocas palabras, las EDP capturan la idea fundamental de cómo los sistemas se transforman y se desarrollan a lo largo del tiempo.

El teorema espectral en su forma general para operadores autoadjuntos fue establecido por David Hilbert en la primera década del siglo XX. Hilbert demostró que todo operador autoadjunto en un espacio de Hilbert tiene una base ortogonal de autovectores asociados a autovalores reales. Este teorema, es un resultado esencial en el álgebra lineal y el análisis funcional. Establece que ciertos operadores lineales autoadjuntos en espacios de Hilbert tienen una base ortogonal de autovectores asociados con autovalores correspondientes. En el contexto de las EDP, el teorema espectral proporciona información importante sobre las soluciones y propiedades de estas ecuaciones.

El objetivo principal de este trabajo de profundización es explorar y analizar la aplicación del teorema espectral en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales lineales. Investigando cómo el teorema espectral puede utilizarse para comprender mejor las propiedades de las soluciones de EDP, así como para abordar problemas de autovalores asociados a operadores lineales involucrados en las ecuaciones.

2. Fundamentos teóricos

2.1. Breve introducción a las EDP

Primero, como concepto necesario a entender el teorema espectral, es necesario estar familiarizado con las ecuaciones en derivadas parciales mas importantes y que nos van a interesar a nosotros en relación al teorema espectral. Una Ecuacion en Derivadas Parciales es una relacion de la forma:

$$F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ldots\right) = 0 \tag{1}$$

En esta ecuación, se representa una EDP de primer orden y en una dimensión, que es una de las formas más simples de una EDP. La ecuación representa una relación entre una función desconocida $u(x, t)$ y sus derivadas parciales con respecto a las variables x y t

- El término $\frac{\partial u}{\partial t}$ representa la derivada parcial de la función u con respecto a la variable temporal t. Indica la tasa de cambio de u con respecto al tiempo.

- El término $c\frac{\partial u}{\partial x}$ representa la derivada parcial de la función u con respecto a la variable espacial x, multiplicada por una constante c. Este término describe la tasa de cambio de u con respecto a la posición en la dirección x y se puede interpretar como el transporte o propagación de la función u en esa dirección a una velocidad c.

- La ecuación establece que la suma de estas dos tasas de cambio es igual a cero, lo que indica que la función u no cambia en el tiempo. Es decir, la variación temporal de u y el transporte espacial de u están balanceados, lo que implica que u se conserva a lo largo del tiempo.

La ecuación establece que la suma de estas dos tasas de cambio es igual a cero, lo que indica que la función u no cambia en el tiempo. Es decir, la variación temporal de u y el transporte espacial de u están balanceados, lo que implica que u se conserva a lo largo del tiempo.

Nosotros vamos a trabajar con varias EDP lineales, por lo tanto, nos interesa conocer que es una ecuacion lineal.

Una ecuación diferencial parcial lineal es aquella que es lineal en la función desconocida y en todas sus derivadas, con coeficientes que dependen solo de las variables independientes de la función. Estas ecuaciones son lineales en el sentido de que las derivadas parciales y las variables dependientes aparecen de manera lineal, sin multiplicaciones o exponenciaciones no lineales.

Más adelante, veremos las EDP lineales que describen la mayoria de los problemas físicos y de ingeniería, la ecuación del calor y la ecuación de ondas.

2.2. Conceptos básicos del teorema espectral y su aplicación en problemas de autovalores

El teorema espectral proporciona una forma de descomponer estos operadores en términos de sus autovectores y autovalores asociados.

A continuación, se presentan los conceptos básicos del teorema espectral y su aplicación en problemas de autovalores en el contexto de las EDP:

En el espacio Hilbert, el cual es un espacio vectorial en el que se pueden definir operaciones de suma y multiplicación por escalares. Pero lo que lo distingue del resto de espacio vectoriales es que existe un producto interno, que toma dos elementos del espacio y da lugar a una norma. Tal que:

$$|ab| = \sqrt{\langle ab, ab\rangle} = \sqrt{\langle a, a\rangle\langle b, b\rangle} \tag{2}$$

Donde a y b son elementos de un espacio de Hilbert, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa el producto interno y $|\cdot|$ es la norma.

El teorema espectral es una herramienta fundamental en el estudio de las EDP. Establece que las soluciones de estas ecuaciones pueden expresarse como combinaciones lineales de los autovectores asociados a un operador autoadjunto. Estos autovectores, que forman una base ortogonal en el espacio de Hilbert, representan modos o frecuencias características de la ecuación. Esta descomposición espectral nos permite comprender mejor el comportamiento de las soluciones y facilita la resolución de problemas en los que buscamos encontrar una solución específica. En resumen, el teorema espectral nos permite descomponer operadores autoadjuntos en términos de sus autovectores y autovalores, lo que resulta útil para abordar problemas de autovalores en el contexto de las EDP y obtener soluciones especiales que capturan las propiedades fundamentales del sistema. Su aplicación amplía nuestra comprensión de las EDP y simplifica el análisis y la resolución de problemas en diversos campos científicos y matemáticos.

3. El teorema espectral en EDP lineales

3.1. Análisis de las EDP lineales y su formulación matemática

Ya hemos visto anteriormente una breve introducción a las EDP, y una breve explicación de las que más nos interesan, la del calor y la de ondas, que ambas son lineales. Asi que ahora vamos a ver como se aplica el teorema espectral a estas ecuaciones.

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden en derivadas parciales pueden expresarse de forma general como:

Las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas, como la ecuación del calor y la ecuación de ondas, respectivamente, son los modelos más clásicos y representativos en el contexto de las ecuaciones en derivadas parciales de evolución. Estas ecuaciones tienen características matemáticas muy diferentes.

La ecuación del calor describe fenómenos altamente irreversibles en el tiempo, donde la información se propaga a una velocidad infinita. Se puede representar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3}$$

Donde $u(x,t)$ es la temperatura en un punto x en el tiempo t, y α es el coeficiente de difusión térmica.

Por otro lado, la ecuación de ondas es el prototipo de un modelo de propagación con velocidad finita y completamente reversible en el tiempo.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

Donde $u(x,t)$ es la función de onda que representa la perturbación en un punto x en el tiempo t, y c es la velocidad de propagación de la onda.

En resumen, la ecuación del calor captura procesos de difusión y disipación, mientras que la ecuación de ondas representa la propagación de perturbaciones a través de un medio. En el contexto de las EDP, el teorema espectral proporciona información importante sobre las soluciones y propiedades de estas ecuaciones.

Estas propiedades indican que la EDP exhibe una relación lineal entre la función desconocida $u(x,t)$ y sus derivadas parciales. En otras palabras, las derivadas parciales y la función desconocida aparecen de manera lineal en la ecuación, sin términos no lineales como multiplicaciones o exponenciaciones. El análisis de las EDP lineales implica estudiar las propiedades y características de las soluciones de estas ecuaciones, como su existencia, unicidad, regularidad y comportamiento asintótico. También implica el estudio de métodos y técnicas para resolver estas ecuaciones y encontrar soluciones específicas.

El análisis de las EDP lineales es fundamental en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería, como la física, la química, la biología, la economía y la ingeniería de materiales. Permite comprender y modelar fenómenos naturales y procesos físicos, y proporciona herramientas para predecir y controlar el comportamiento de sistemas complejos.

3.2. Descripción del teorema espectral en el contexto de EDP lineales

En el teorema espectral, se busca descomponer un operador autoadjunto en términos de sus autovectores y autovalores asociados. Un autovector es un vector no nulo que, al aplicar el operador, solo se escala por un factor constante, representado por el autovalor correspondiente. Sea A un operador lineal y autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Un autovector v de A es un vector no nulo tal que:

$$Av = \lambda v \tag{5}$$

Donde λ es el autovalor correspondiente al autovector v. El autovalor λ es un número escalar que representa la escala por la cual el autovector es transformado al aplicar el operador A.

Entonces, para un operador autoadjunto, los autovectores son los vectores que se mantienen en la misma dirección o una paralela al aplicar el operador, y los autovalores son los factores de escala asociados a esos autovectores.

La descomposición espectral de un operador autoadjunto significa que podemos expresar el operador como una combinación de sus autovectores y autovalores correspondientes. Esto nos permite descomponer el operador en términos de las propiedades especiales de estos vectores y valores, lo que a su vez nos proporciona información importante sobre las características y el comportamiento del operador.. Esto se puede representar de la siguiente manera:

$$A = \sum_i \lambda_i \langle v_i, \cdot \rangle v_i \tag{6}$$

Donde λ_i son los autovalores, v_i son los autovectores y $\langle v_i, \cdot \rangle$ representa el producto interno entre el autovector v_i y un vector del espacio.

Esta descomposición espectral nos permite entender mejor las propiedades y el comportamiento del operador A y nos proporciona una forma conveniente de representar soluciones de ecuaciones en derivadas parciales lineales asociadas a este operador.

También establece que los operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert pueden ser diagonalizados, es decir, descompuestos en términos de sus autovectores y autovalores. Esta diagonalización permite estudiar y analizar las propiedades del operador de manera más simple y efectiva. Además, el teorema espectral muestra que estos autovectores forman una base ortogonal del espacio de Hilbert.

Aplicación en problemas de autovalores en EDP: En el contexto de las EDP, el teorema espectral es utilizado para resolver problemas de autovalores asociados a operadores lineales involucrados en las ecuaciones. Estos problemas se presentan al buscar soluciones especiales de las EDP que satisfacen una relación de proporcionalidad con respecto al operador. Los autovalores y los autovectores obtenidos a través del teorema espectral permiten describir las propiedades de estas soluciones y su comportamiento frente a las EDP.

La aplicación del teorema espectral en problemas de autovalores en EDP proporciona una herramienta poderosa para comprender y resolver estas ecuaciones, ya que permite descomponer los operadores involucrados en términos de sus autovectores y autovalores, lo que simplifica su análisis. Al obtener los autovectores y autovalores correspondientes, se pueden determinar las soluciones especiales de las EDP y estudiar su comportamiento, estabilidad y propiedades fundamentales.

La aplicación del teorema espectral en problemas de autovalores en EDP tiene diversas implicaciones. Por ejemplo, puede ayudar a clasificar las soluciones de las EDP según sus modos o frecuencias características, lo que permite comprender mejor los patrones de oscilación o propagación presentes en el sistema. Además, la diagonalización de los operadores autoadjuntos permite simplificar los cálculos y la resolución numérica de las EDP, ya que se puede trabajar con una base ortogonal de autovectores.

3.3. Ejemplos y aplicaciones del teorema espectral en EDP lineales

Ejemplo de resolución de la ecuación de onda utilizando el teorema espectral:

Consideremos la ecuación de onda unidimensional en un dominio acotado, dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde $u(x, t)$ es la función desconocida que representa la onda en el dominio, c es la velocidad de propagación de la onda y x y t son las variables espacial y temporal, respectivamente.

Para resolver esta ecuación utilizando el teorema espectral, primero debemos encontrar los autovectores y autovalores del operador diferencial $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Estos autovectores son funciones especiales que cumplen con ciertas propiedades y representan los modos normales de vibración de la onda.

Supongamos que encontramos los autovectores $\phi_n(x)$ y los autovalores λ_n asociados al operador diferencial. Luego, la solución de la ecuación de onda puede expresarse como una combinación lineal de estos autovectores:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

Donde A_n son coeficientes que determinan la amplitud de cada modo normal, ω_n es la frecuencia angular asociada al modo y ϕ_n es una fase específica.

La descomposición espectral nos permite entender cómo cada modo normal contribuye a la forma y evolución de la onda en el tiempo. Al determinar los coeficientes A_n y las frecuencias ω_n correspondientes, podemos obtener la solución completa de la ecuación de onda y analizar su comportamiento dinámico. En situaciones más complejas, pueden considerarse condiciones iniciales y de contorno específicas, lo que afectaría la elección de los autovectores y los coeficientes asociados.

4. Conclusiones

5. Referencias bibliográficas

Referencias

[1] Desconocido. *Partial differential equations and spectral theory, Université de Nice 2018-2019*. 2018-2019.

[2] Gómez, J. D. M. y Anguas, J. R. *Ecuaciones en Derivadas Parciales y análisis funcional*.

[3] Laugesen, R. S. *Spectral Theory of Partial Differential Equations*. University of Illinois at Urbana-Champaign.

[4] Zuazua, E. *Ecuaciones en Derivadas Parciales*.