토끼와 사냥꾼

권민재

2021년 1월 28일

§1 Classics

토끼와 사냥꾼 문제는 아마 다음 문제를 통해 모두가 한 번쯤은 들어본 문제일 것이다.

Problem 1 (IMO 2017/3)

한 사냥꾼과 보이지 않는 토끼 한 마리가 평면 상에서 다음과 같은 게임을 한다. 토끼의 출발점 A_0와 사냥꾼의 출발점 B_0는 일치한다. 게임의 $n-1$번째 라운드를 마친 후 토끼가 위치한 점을 A_{n-1}, 사냥꾼이 위치한 점을 B_{n-1}이라 하자. n번째 라운드에서 다음과 같은 세 가지가 순차적으로 발생한다.

- 토끼가 보이지 않게 점 A_n으로 움직이고, A_{n-1}과 A_n의 거리는 정확히 1이다.
- 사냥꾼의 추적기가 점 P_n의 위치를 알려준다. 이 추적기가 알려주는 점 P_n과 A_n의 거리는 1 이하임이 보장될 뿐이다.
- 사냥꾼은 눈에 띄게 점 B_n으로 움직이고, B_{n-1}과 B_n의 거리는 정확히 1이다.

토끼가 어떻게 움직이든, 추적기가 어떤 점을 알려주든 상관없이 항상 사냥꾼이 10^9 라운드 후에 그와 토끼의 거리가 100 이하가 되도록 할 수가 있겠는가?

위 게임처럼, 일반적으로 어떤 한 그룹이 다른 한 그룹을 쫓아가는 상황을 생각해보자. 일반적으로 이러한 게임을 *pursuit-evasion game*이라 부르고, 대표적인 예시로는 *경찰과 도둑 게임*이 있다. 경찰과 도둑 게임에서는 경찰과 도둑의 이동을 제한하기 위해 그래프 상에서 게임이 진행된다. 자세한 정의로는 다음을 보자.

Definition 1 (Cops and Robbers game)

유한 단순연결그래프 G가 주어져 있다. G에서 경찰 k명과 도둑 한 명이 게임을 한다.

- (초기 세팅) 먼저 경찰 팀에서는 각각의 경찰을 G의 꼭짓점에 배치한다. 그러면, 도둑은 그 위치를 보고 G의 어떤 꼭짓점을 골라 그곳에 위치한다. 경찰과 도둑은 항상 서로의 위치를 볼 수 있다.
- (진행) 이제 경찰부터 시작하여 경찰과 도둑이 한 번씩 번갈아 차례를 가진다. 경찰의 차례에는 각각의 경찰마다 다음의 두 시행 중 하나를 할 수 있다: 경찰을 인접한 꼭짓점으로 이동시키거나, 제자리에 그대로 둔다. 도둑의 차례에는 마찬가지로 도둑이 인접한 점으로 이동하거나 제자리에 가만히 있을 수 있다. 경찰과 도둑이 한 번씩 차례를 갖는 것을 한 번의 **턴**이라고 정의한다.
- (종료) 어떠한 시점에 어떤 경찰이 도둑과 같은 꼭짓점에 위치하게 되면 경찰이 승리한다. 반대로 도둑이 무한히 많은 시간 동안 도망다닐 수 있다면 도둑이 승리한다.

당연히 경찰의 수가 많을수록 경찰 팀에 유리하다. 극단적으로 경찰이 $|V(G)|$명 있으면 반드시 승리할 수 있으므로, 경찰에게 필승 전략이 있는 최소의 k가 (유한한 값으로) 존재하게 된다. 이 값을 G의 *cop number* 라 부르고 $c(G)$라고 쓴다.

Example

$c(\text{path}) = 1, c(\text{cycle}) = 2, c(\text{tree}) = 1$이다.

$c(G)$는 그래프의 채색수나 최대 독립집합의 크기, 최대 차수 등과 같이 그래프의 특성을 반영하는 지표이다. 간단한 예시로 $c(G) = 1$인 그래프는 어떤 성질을 가질지 생각해 보자.

사실 $c(G) = 1$인 그래프는 어느 정도 "분류"되어 있다. 즉, $c(G) = 1$인 것과 동치인 성질이 존재한다. 이를 위해 다음을 정의하자.

Definition 2 (Dismantlability)

그래프 G가 주어져 있다. G의 정점 x에 대해 $N[x]$를 x와 인접한 정점들, 그리고 x를 포함하는 집합으로 정의하자.

두 정점 $v \neq w$가 $N[v] \subset N[w]$를 만족하면 점 v를 (인접한 선분들과 같이) 제거한다.

G에서 위 시행을 반복하여 한 점만이 남을 때까지 진행할 수 있다면 G를 *dismantlable*하다고 부르자.

이때 다음이 성립한다.

Theorem (Characterization of cop-win graphs)

$c(G) = 1$일 필요충분조건이 G가 dismantlable한 것이다.

(증명)

이제 자연스레 궁금해지는 것은 $c(G)$가 충분히 큰 값까지 모두 가질 수 있냐는 것이다. 그렇다. 증명해보자.

> **Problem 2**
>
> 임의의 양의 정수 n에 대해, $c(G) \geq n$인 그래프 G가 존재함을 보여라.

먼저 다음을 보이자.

Lemma (연습문제 7번)**.** *G의 정점의 차수 중 가장 작은 것을 $\delta(G)$라고 하자. G가 길이가 3 또는 4인 cycle을 포함하지 않는다면 $c(G) \geq \delta(G)$가 성립한다.*

Lemma (Fano planes)**.** *다음 공리들을 이용해 projective plane을 정의하자:*

- *임의의 서로 다른 두 점에 대해, 그 두 점과 인접한 직선이 유일하게 존재한다.*
- *임의의 서로 다른 두 직선에 대해, 그 두 직선과 모두 인접한 점이 유일하게 존재한다.*
- *임의의 직선은 적어도 세 개의 점과 인접한다.*
- *임의의 세 점도 공통 직선 위에 있지 않은 네 개의 점이 존재한다.*

이때 p가 소수이면 $p^2 + p + 1$개의 점을 갖는 finite projective plane이 존재한다. (증명 생략)

§2 Problems

주의: 문제마다 세팅이 조금씩 다르니 게임 상황을 꼼꼼히 읽어볼 것
난이도: IMO 1, 4는 1 / IMO 2,5는 2 / IMO 3, 6는 3 / 그 이상은 4

Problem 1 (3)**.** (Lion and Man problem) 좌표평면의 제 1사분면과 그 경계를 $\mathcal{R}$이라 하자. $\mathcal{R}$ 위에서 민재가 사자와 게임을 한다. 초기 사자의 위치는 (x_0, y_0), 민재의 위치는 (x_1, y_1)로 주어져 있고, 민재와 사자는 항상 서로의 위치를 볼 수 있다. 게임의 n번째 라운드를 마친 후 민재의 위치를 A_n, 사자의 위치를 B_n이라 하자. 이때 $(n+1)$번째 라운드에서는 다음이 순차적으로 발생한다:

- 민재는 $\overline{A_nA_{n+1}} \leq 1$인 $\mathcal{R}$의 점 A_{n+1}을 하나 골라 그곳으로 움직인다.
- 사자는 $\overline{B_nB_{n+1}} \leq 1$인 $\mathcal{R}$의 점 B_{n+1}을 하나 골라 그곳으로 움직인다.

사자가 민재와 정확히 같은 점에 위치하게 되면 사자의 승리로 게임이 끝난다. 이때, 다음을 증명하여라:

1. 만일 $x_1 \geq x_0$ 또는 $y_1 \geq y_0$이라면 민재는 지지 않을 전략을 가진다.
2. $x_1 < x_0$이고 $y_1 < y_0$이면 사자에게 필승 전략이 있다.

Problem 2 (2)**.** 평면 위에 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않은 n개의 점의 집합 A가 주어져 있다. 어떤 두 점을 잇는 선분이 존재하면 그 두 점을 인접한다고 하자. 사냥꾼과 보이지 않는 토끼는 다음과 같은 규칙으로 게임을 한다: 처음 보이지 않는 토끼는 n개의 점 중 하나를 골라 숨어있는다. 각 시행마다 사냥꾼은 4개 이하의 점을 골라 추적기를 설치하는데, 추적기는 각 점에서 토끼의 위치까지 가는 경로 중 최소 길이를 알려준다. (그러한 경로가 존재하지 않으면 추적기는 ∞를 알려준다.) 토끼의 차례가 되면 토끼는 원래 위치와 이웃한 점을 하나 골라 이동하거나, 원래 위치에 그대로 있을 수 있다. 토끼의 위치를 사냥꾼이 정확하게 알 수 있을 때 사냥꾼이 이긴다. 토끼가 어떻게 하던지에 상관없이 사냥꾼이 이길 수 있는 전략이 존재한다면, A의 원소를 $P_1, P_2, \cdots P_n$으로 이름붙여 아래 성질을 만족하게 할 수 있음을 보여라:

$$\text{각 } i\text{에 대해, 점 } P_i\text{와 인접한 점들 중 } j < i\text{인 } P_j\text{의 개수는 } 80 \text{ 이하이다.}$$

Problem 3 (1.5)**.** (Baltic Way 2018/8, Link) N개의 정점을 갖는 그래프가 주어져 있다. 몇 명의 사냥꾼들이 보이지 않는 토끼와 게임을 한다. 토끼는 처음에 어떤 정점을 골라 그곳으로 이동한다. 이후 사냥꾼과 토끼가 번갈아 턴을 진행한다. 사냥꾼들의 턴에는 각각의 사냥꾼은 그래프의 어떤 정점을 고르고, 동시에 그 정점을 향해 총을 쏜다. 만일 토끼가 총에 맞으면 사냥꾼이 승리하게 된다. 그렇지 않은 경우, 토끼의 턴이 돌아오고, 토끼는 직전의 위치에 가만히 머무르거나 선분으로 인접한 점으로 이동할 수 있다.

사냥꾼들이 3^N턴 이내에 토끼를 반드시 잡을 수 있음을 확신할 수 있는 전략을 갖고 있다고 하자. 이때 사냥꾼들이 2^N턴 이내에 토끼를 반드시 잡을 수 있음을 확신할 수 있는 전략이 존재함을 보여라.

Problem 4 (1.5)**.** (Link) 짝수 n이 주어져 있다. 여러 명의 경찰과 한 명의 도둑이 번갈아가며 게임을 한다. 각각의 경찰은 공집합을 처음에 가지고 있고, 도둑은 전체 집합인 $\{1, 2, \cdots, n\}$을 가지고 있다. 경찰의 턴에 각 경찰은 자신의 집합에 이전에 갖고 있지 않던 원소를 하나 추가한다. 이후 도둑은 경찰의 집합을 보고 자신의 집합에서 원소 하나를 제거한다. (서로가 서로의 집합을 항상 볼 수 있다.) 이러한 시행이 $n/2$번 반복된 후 경찰과 도둑의 집합의 크기가 모두 $n/2$가 되었을 때, 어떤 경찰이 도둑과 같은 집합을 갖고 있으면 경찰의 승리로 게임이 종료되고, 그렇지 않으면 도둑이 승리한다.

1. 경찰의 필승 전략이 존재하기 위해서는 적어도 $2^{n/2}$명의 경찰이 필요함을 보여라.
2. (풀지 말고 참고만 할 것, 겁나 어려움) 경찰이 필승 전략을 가질 최소의 경찰 수를 c_n이라 하자. 어떤 상수 K가 있어 모든 n에 대해 $c_n \leq K \times 2^{n/2} \log n$이 성립한다.

아래의 문제는 모두 경찰과 도둑 게임의 규칙을 따릅니다.

Problem 5 (1)**.** (수업 시간 강의 내용에서 바로 유도됨) 정점이 $n(\geq 5)$개인 그래프 G의 cop number이 1이라고 한다. $k=1$일 때, 경찰은 도둑을 $(n-3)$턴 내에 잡을 수 있는 전략을 가짐을 보여라.

Problem 6 (2.5)**.** (Link) 정점이 n개인 그래프 G는 임의로 두 정점을 어떻게 골라도 그 두 정점을 잇는 길이가 2 이하인 경로가 존재하는 성질을 가진다고 한다. $c(G) \leq \sqrt{2n}$임을 보여라.
(Note: 경로의 길이는 경로에 포함된 선분의 수로 정의된다.)

Problem 7 (1.5)**.** (수업시간) G의 정점의 차수 중 가장 작은 것을 $\delta(G)$라고 하자. G가 길이가 3 또는 4인 cycle을 포함하지 않는다면 $c(G) \geq \delta(G)$임을 보여라.

Problem 8 (2.5)**.** (Link, 8-9번) 그래프 G의 모든 점의 차수가 3 이하이고, 한 끝점을 공유하는 임의의 두 선분은 반드시 길이가 5 이하인 어떤 회로에 같이 포함된다고 하자. 이때 $c(G) \leq 3$임을 보여라.

Problem 9 (4)**.** G가 평면그래프이면 $c(G) \leq 3$임을 보여라. (힌트: 8번 문제의 결과를 사용할 것)

§3 Hints

1. (The Lion and Man Problem, by David Gale; J. Sgall, 2001) 어떤 멀리 있는 점 Q를 하나 잡아서, $Q \in \overleftrightarrow{A_nB_n}$이 유지되도록 사자가 상연이를 따라간다고 하자. Q를 어떻게 잡아야 사자가 이길 수 있을지 생각해보자.
2. (2018 겨울학교 2차 모의고사 8번) 문제의 역을 생각해보자. 조건을 만족하게 점을 이름붙일 수 없다면 G는 어떤 특징을 가져야 하는가? 반대로 생각하면 G가 그 성질을 가지면 무조건 토끼가 지지 않을 전략을 가져야 한다.
3. (2018 Baltic Way) 3^N은 2^N보다 큰 임의의 수로 대체해도 좋다. 2^N이라는 수는 어디서 나왔을까?
4. 도둑의 전략을 구성하기 어려워 보인다. 도전적인 전략을 생각해보자. (Greedy)
5. (N. Clarke, 2002) $|V(G)|$에 대한 귀납법을 쓰자. G가 cop-win graph이면 어떤 성질을 가질까? pitfall의 존재성에 대해 생각해보자.
6. (Z.A. Wanger, 2015) G의 부분그래프 H에 대해, 도둑은 H의 선분을 따라서만 움직일 수 있고 경찰은 G의 모든 선분을 따라 움직일 수 있는 게임을 생각하자. 이 게임에서 경찰의 승리가 보장되는 최소 경찰 수를 $c_G(H)$라고 하자. $|V(H)|$에 대한 귀납법으로 전략을 구성하는 것이 메인 아이디어이다.
7. (수업시간에 다룰 예정)
8. 도둑과 경찰의 거리의 총합이 최소가 되는 경우를 생각해보자.
9. 평면그래프라는 조건을 잘 이용해보자.