ПРАКТИКА №10

10.1. Сравнение сигналов с амплитудной и угловой модуляциями

Основными параметрами при сравнении типов модуляции выступают ширина спектра и помехоустойчивость сигналов.

При тональной угловой модуляции полоса частота радиосигнала в m + 1 раз больше, чем при тональной АМ. При $m \gg 1$ - широкополосная ЧМ – разница в ширине спектра весьма значительна.

Однако угловая модуляция имеет преимущество пред АМ в отношении помехоустойчивости.

На вход поступает сигнал $u_c(t)$ и помеха $u_п(t)$, $U_0 \gg U_п$.

$$u_с(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad u_п(t) = U_п \cos(\omega_п t + \varphi_п)$$

На рис. 1. Приведена векторная диаграмма этих колебаний. Вместо вектора сигнала с угловой скорость ω_0 вращается ост проекции. Тогда вектор U_0 неподвижен, а вектор $U_п$ вращается с угловой скоростью $\omega_п - \omega_0$. Результирующий вектор соответствует суммарному колебания. Длина суммарного вектора изменяется от $U_{\max}$ до $U_{\min}$:

$$U_{\max} = U_0 + U_п \quad U_{\min} = U_0 - U_п$$

То есть помеха добавляет сигналу паразитную амплитудную модуляцию с индексом с КМ:

$$M_п = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}} = \frac{U_п}{U_0}$$

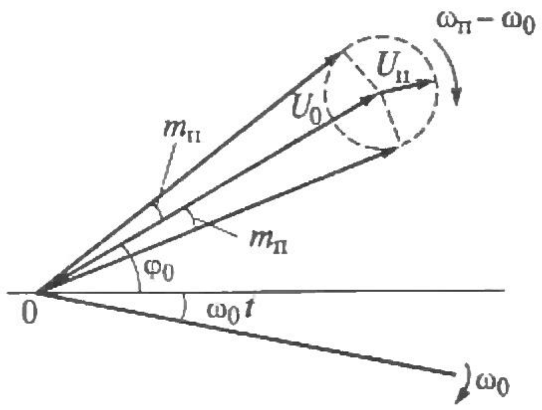

Рис. 1 – Векторная диаграмма сигнала и помехи.

На рис. 1. также видно, что при наличии помехи у сигнала изменяется фаза, т.е. угол суммарного вектора по отношению к чистому сигналу в пределах:

$$\varphi_{max} = \varphi_0 + m_п \qquad \varphi_{min} = \varphi_0 - m_п$$

В результате возникает паразитная угловая модуляция с индексом модуляции $m_п$, значение которого можно найти из соотношения:

$$\sin(m_п) = \frac{U_п}{U_0}.$$

Так как $U_0 \gg U_п$, то $\sin(m_п) \approx m_п$ и $m_п \approx U_п / U_0$.

При использовании амплитудной модуляции с коэффициентом M отношение сигнал / шум на выходе приёмника равно $M / M_п$, а при использовании угловой модуляции с индексом m это отношение равно $m / m_п$. Коэффициент модуляции $M \le 1$. Индекс модуляции m может принимать любые значения. Из этого следует, что при $m \gg 1$ угловая модуляция обеспечивает более высокую помехоустойчивость.

Радиосигналы с угловой модуляцией также позволяют эффективнее использовать мощность передатчика.

10.2. Радиосигналы с внутриимпульсной модуляцией.

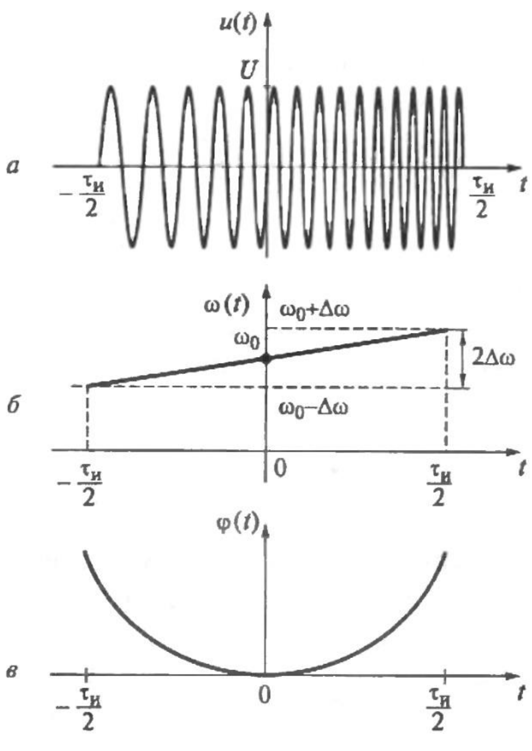

Рис. 2 – ЛЧМ-сигнал

Радиосигналы с внутриимпульсной модуляцией – особый класс модулированных радиосигналов, широко применяющихся в радиолокации. Они представляют собой радиоимпульсы, частота (а соответственно, и фаза) высокочастотного заполнения которых изменяется по некоторому закону.

Одним из основных радиолокационных сигналов является прямоугольный импульс с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) – ЛЧМ сигнал (рис. 2а).

Частота заполнения радиоимпульса изменяется по линейному закону (рис. 2б):

$$\omega(t)=\omega_0+at, \quad |t|\le\frac{\tau_u}{2}$$

где $a=2\Delta\omega/\tau_u$, $\Delta\omega$ – девиация частоты, τ_u – длительность импульса. За время, равное длительности импульса, частота изменяется от $\omega_0-\Delta\omega$ до $\omega_0+\Delta\omega$. В соответствии с

$$\Phi(t)=\int_0^t\omega(t)dt+\varphi_0, \quad \varphi(t)=\int\Delta\omega(t)dt,$$

получим

$$\varphi(t)=a\int tdt=a\frac{t^2}{2},$$

т.е. фаза изменяется по квадратичному закону (рис. 2в).

Если подставить это выражение в выражение для сигнала с угловой модуляцией, то получим:

$$u(t)=U_0\cos(\omega_0t+\frac{at^2}{2}), \quad |t|\le\frac{\tau_u}{2}.$$

Спектр ЛЧМ-сигнала

Используя выражения для спектральной функции получим:

$$S(\omega)=U_0\int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2}\cos(\omega_0+at^2/2)e^{-i\omega t}=$$

$$=\frac{U_0}{2}\int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2}e^{-i\left[(\omega-\omega_0)t-at^2/2\right]}dt+\frac{U_0}{2}\int_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2}e^{-i\left[(\omega+\omega_0)t+at^2/2\right]}dt$$

Согласно выражению, спектр ЛЧМ-сигнала состоит из двух составляющих. Первая составляющая соответствует спектру, сосредоточенному вблизи частоты ω_0, вторая – вблизи частоты $\omega=-\omega_0$. При условии $\omega_0\gg\Delta\omega$, то взаимным влиянием двух составляющих спектра можно пренебречь. Поэтому в формуле достаточно вычислить только первую составляющую, дающую спектральную функцию в области положительных частот.

$$S(\omega)=\frac{U_0}{2}e^{-i\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2a}}\int\limits_{-\tau_u/2}^{\tau_u/2}e^{i\frac{a}{2}\left(t-\frac{\omega-\omega_0}{a}\right)^2}dt.$$

Выполним замену, перейдём от t к x:

$$\sqrt{a}\left(t-\frac{\omega-\omega_0}{a}\right)=\sqrt{\pi}x,$$

и получим:

$$S(\omega)=\frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-i\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2a}}\int\limits_{x_1}^{x_2}e^{i\frac{\pi x^2}{2}}dt,$$

где пределы интегрирования определяются:

$$x_1=\frac{\frac{a\tau_u}{2}+(\omega-\omega_0)}{\sqrt{\pi a}},\quad x_2=\frac{\frac{a\tau_u}{2}-(\omega-\omega_0)}{\sqrt{\pi a}}.$$

Интеграл можно преобразовать через интегралы Френеля:

$$c(x)=\int\limits_0^x\cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)dy,\quad s(x)=\int\limits_0^x\sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)dy.$$

Тогда спектральная функция ЛЧМ-сигнала:

$$S(\omega)=\frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-i\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2a}}\left\{c(x_1)+c(x_2)+i\left[s(x_1)+s(x_2)\right]\right\}.$$

Модуль спектральной функции – амплитудный спектр:

$$\left|S(\omega)\right|=\frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sqrt{\left[c(x_1)+c(x_2)\right]^2+\left[s(x_1)+s(x_2)\right]^2},$$

а аргумент – фазовый спектр:

$$\varphi(\omega)=-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2a}+\mathrm{arctg}\frac{s(x_1)+s(x_2)}{c(x_1)+c(x_2)}.$$

Форма амплитудного и фазового спектров ЛЧМ-сигнала определяется от параметра базы

$$B=2\Delta f\tau_u,$$

равного произведению полной девиации частоты на длительность импульса.

При больших значения базы (порядка 100) форма амплитудного спектра приближается к прямоугольной и ширина спектра близка к величине:

$$\Delta\omega_{\text{c}} = 2\Delta\omega \text{ или } \Delta f_{\text{c}} = 2\Delta f .$$

При этом фазовый спектр имеет вид квадратичной параболы. Второе слагаемое может быть опущено, поскольку оно стремится к постоянной величине $\pi/4$.

Практический интерес представляют ЛЧМ-сигналы с базой $B \gg 1$, относящиеся к сложным сигналам.

При $B \gg 1$ и $\omega = \omega_0$ - $c(x_1) \approx c(x_2) \approx 0,5$; $s(x_1) \approx s(x_2) \approx 0,5$, спектр сигнала показан на рис. 3.

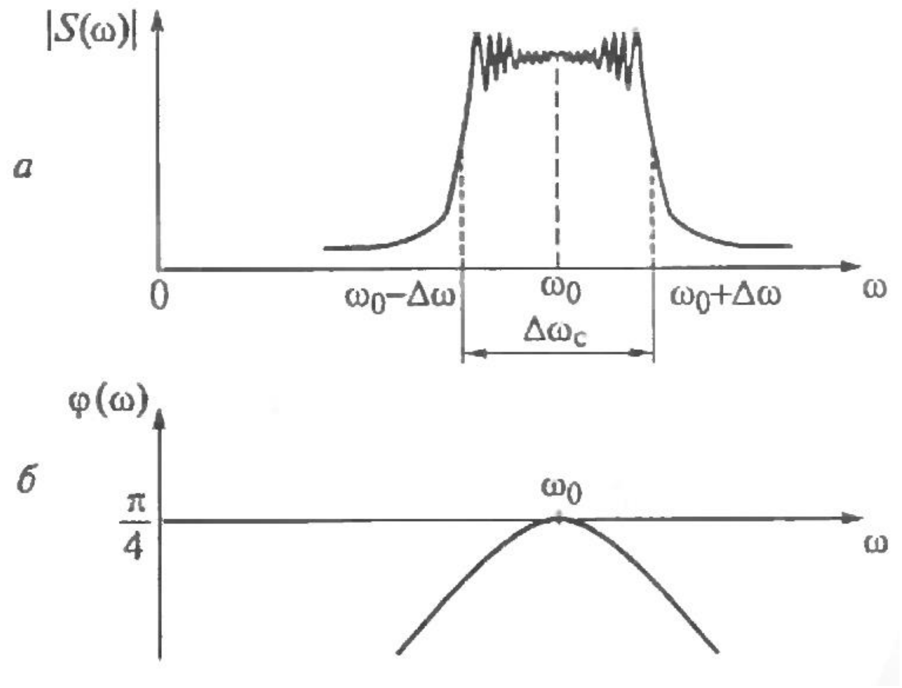

Рис. 3 – Амплитудный спект (а) и фазовый (б) спектры ЛЧМ-сигнала с базой B > 100

$$|S(\omega_0)| = U_0\sqrt{\frac{\pi}{2a}}.$$

Это выражение, определяющее значение амплитудного спектра на центральной частоте, можно использовать для описания прямоугольной формы спектра. Таким образом, амплитудный спектр ЛЧМ-сигнала с большой базой:

$$|S(\omega)| = U_0\sqrt{\frac{\pi}{2a}}; \quad \omega_0 - \Delta\omega \le \omega \le \omega_0 + \Delta\omega.$$

А ширина спектра определяется как $\Delta\omega_{\text{c}} = 2\Delta\omega$.

Корреляционная функция ЛЧМ-сигнала.

Для определения КФ ЛЧМ-сигнала можно воспользоваться взаимосвязью с энергетическим спектром. Ограничимся рассмотрением ЛЧМ-сигнала с большой базой, как наиболее распростанённым на практике. Учитывая спектральную функцию энергетический спектр имеет вид:

$$W(\omega) = \left|S(\omega)\right|^2 = \frac{U_0^2 \pi}{2a}, \quad \omega_0 - \Delta\omega \le \omega \le \omega_0 + \Delta\omega.$$

Используя выражение

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

корреляционная функция для ЛЧМ-сигнала (рис. 4):

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} W(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega =$$

$$= \frac{U_0^2}{2a} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{U_0^2}{2a\tau} \sin(\Delta\omega\tau) \cos(\omega_0 \tau).$$

Подставив параметр $a = 2\Delta\omega / \tau_u$ и учитывае выражение для базы получим:

$$R(\tau) = \frac{U_0^2 \tau_u}{2} \frac{\sin(\Delta\omega\tau)}{\Delta\omega\tau} \cos(\omega_0\tau) = E \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi B \tau}{\tau_u} \right) \cos(\omega_0 \tau),$$

где $R(\tau)$ при $\tau = 0$ – энергия сигнала: $R(0) = U_0^2 \tau_u / 2 = E$.

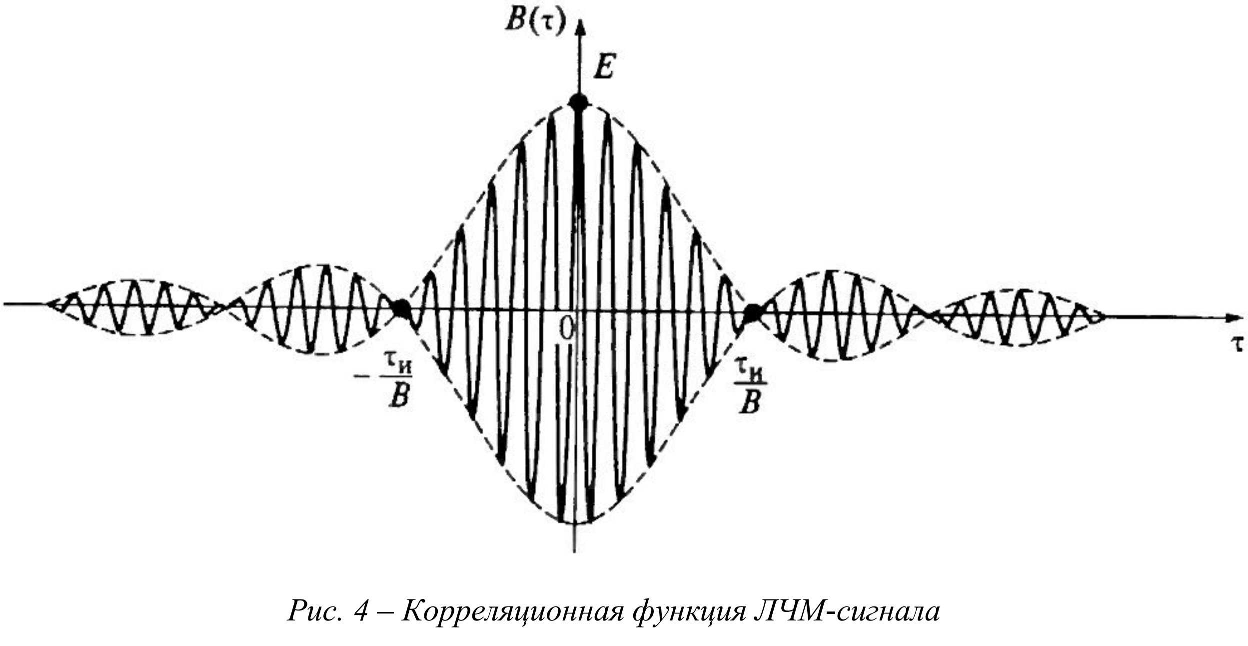

Рис. 4 – Корреляционная функция ЛЧМ-сигнала

Корреляционная функция ЛЧМ-сигнала имеет лепестковую структуру, совпадающую по форме с огибающей спектра прямоугольного импульса. Характерным параметром КФ является ширина главного лепестка, равная $2\tau_и / B$. Очевидно, что чем больше база сигнала, тем уже главный лепесток КФ по сравнению с длительностью сигнала.

Это свойство ЛЧМ-сигнала используется при корреляционной обработке радиолокационных сигналов. То есть, в результате КО длительность сигнала уменьшается в B раз, что позволяет повысить точность измерений и разрешать близко расположенные объекты.

10.3. Радиосигналы в общем виде.

На практике встречаются радиосигналы, образующие в результате модуляции амплитуды и фазы (частоты) несущего колебания по сложному и случайному закону.

Радиосигнал в общем виде:

$$u(t) = U(t)\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0\right),$$

$U(t)$ - амплитудная модуляция, $\varphi(t)$ - угловая модуляция. Эти функции меняются медленно по сравнению с функцией $\cos\left(\omega_0 t\right)$, т.е. сигнал является узкополосным.

Для анализа таких сигналов пользуются комплексной огибающей.

Через КО выражение для модулированного сигнала:

$$u(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(t)e^{i\omega_0 t}\right],$$

где

$$\dot{U}(t) = U(t)e^{i\varphi(t)+\varphi_0}.$$

Функция $\dot{U}(t)$, называется комплексной огибающей радиосигнала, и содержит информацию о радиосигнале – изменение амплитуды и фазы во времени (в случае немодулированного сигнала амплитуда постоянная, а в степени экспоненты остаётся только значение начальной фазы). Это позволяет исключить несущую частоту ω_0, которая известна, при анализе радиосигналов, что упрощает расчёты.

Радиосигнал и его комплексная огибающая.

Спектральная функция комплексной огибающей:

$$S_U(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Необходимо установить связь между спектральной функцией КО $S_U(\omega)$ и спектральной функцией радиосигнала $S(\omega)$. Применим преобразование Фурье к выражению для КО:

$$S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\dot{U}(t) e^{i\omega_0 t}\right] e^{-i\omega t} dt.$$

Обозначим $z = \dot{U}(t) e^{i\omega_0 t}$, тогда справедливо неравенство:

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + z^*}{2}.$$

Тогда спектральную функцию запишем в виде

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{U}(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot{U}^*(t) e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt.$$

Таким образом, первое слагаемое в выражении – $\frac{1}{2} S_U(\omega - \omega_0)$, второе – $\frac{1}{2} S_U^*(-\omega - \omega_0)$. Тогда следует:

$$S(\omega) = \frac{1}{2} S_U(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} S_U^*(-\omega - \omega_0).$$

Это выражение устанавливает связь между спектральными функциями радиосигнала и его комплексной огибающей. Из него следует, что СФ радиосигнала состоит из двух составляющих, и чтобы её найти, достаточно найти СФ его комплексной огибающей и перенести её с частоты $\omega = 0$ на частоту $\omega = \omega_0$ (первое слагаемое) и $\omega = -\omega_0$ (второе слагаемое), причём при $\omega < 0$ выполняется также операция комплексного сопряжения.

Допустим, что спектр $S(\omega)$ ограничен максимальной частотой ω_m. При условии узкополосности ($\omega_m \ll \omega_0$) взаимным влиянием слагаемых в формуле можно пренебречь и разделить:

$$S(\omega) = \frac{1}{2} S_U(\omega - \omega_0) \text{ при } \omega > 0;$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2} S_U^*(-\omega - \omega_0) \text{ при } \omega < 0.$$

В этом случае ширина спектра - $\Delta\omega_c = 2\omega_m$.

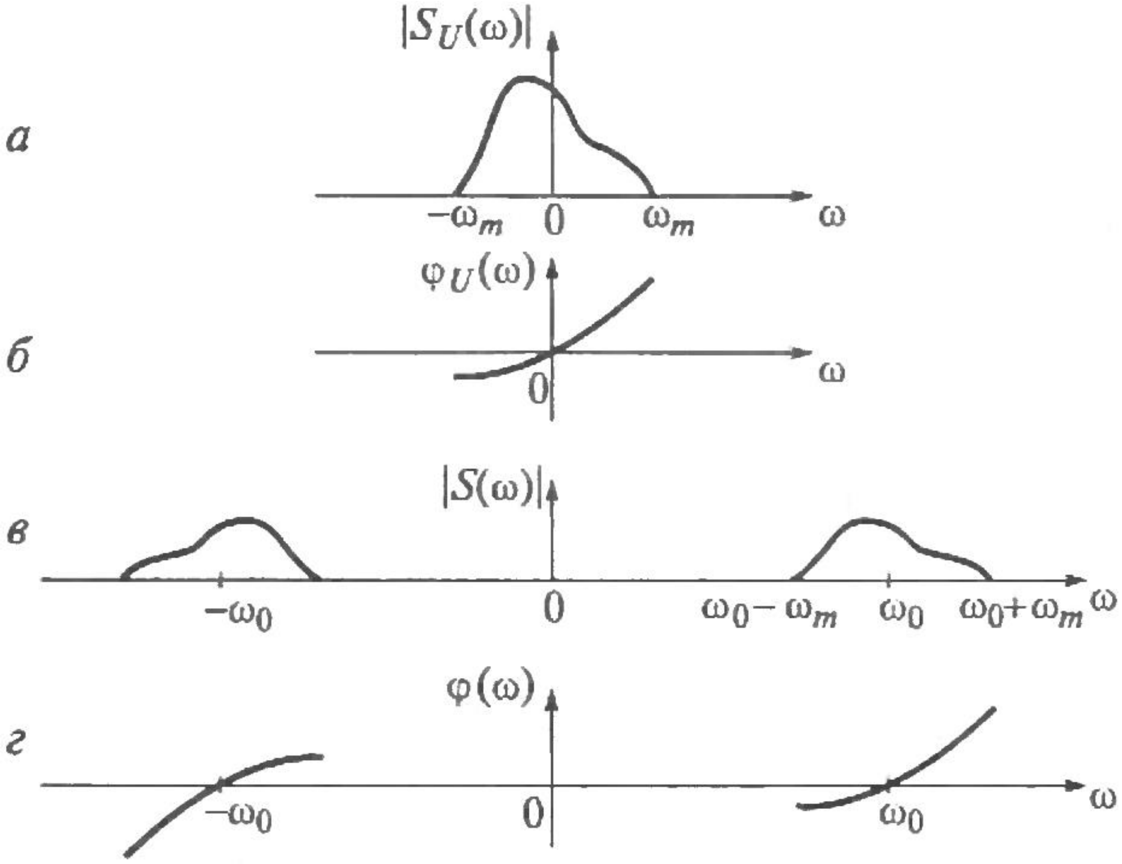

Рис. 4 – Амплитудные и фазовые спектры комплексной огибающей (а, б) и радиосигнала (в, г)

Амплитудный спектр – чётная функция частоты, фазовый спектр – нечётная функция. Однако спектры комплексной огибающей не обязательно симметричны относить оси $\omega = 0$.

10.4. Корреляционная функция радиосигнала.

Для радиосигналов, помимо спектральной функции, важно знать их корреляционную функцию для осуществления корреляционного анализа. До этого рассматривались КФ для видеоимпульсов. Необходимо установить связь между КФ видео- и радиоимпульса. КФ сигнала:

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)u(t-\tau)dt.$$

Подставим в это выражение формулы для комплексной огибающей сигнала:

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\dot{U}(t)e^{i\omega_0 t}\right]\mathrm{Re}\left[\dot{U}(t-\tau)e^{i\omega_0(t-\tau)}\right]dt.$$

Для произвольных комплексных величин имеет место следующее неравенство:

$$\mathrm{Re}[z_1]\mathrm{Re}[z_2]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[z_1z_2]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[z_1^*z_2\right],$$

тогда выражение для КФ будет иметь вид:

$$R(\tau)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[e^{i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}(t)\dot{U}(t-\tau)e^{i2\omega_0 t}dt\right]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[e^{i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}^*(t)\dot{U}(t-\tau)dt\right].$$

Функция $U(t)$ – низкочастотная, т.е. меняется медленно по сравнению с несущим колебание. С учётом этого первый интеграл выражения равен нулю как интеграл от быстро осциллирующей функции. Тогда запишем:

$$R(\tau)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[e^{i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}^*(t)\dot{U}(t-\tau)dt\right].$$

Здесь интеграл и есть КФ комплексной огибающей:

$$\dot{R}_U(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{U}^*(t)\dot{U}(t-\tau)dt.$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[e^{i\omega_0 t}\dot{R}_U(\tau)\right].$$

Это выражение определяет связь между корреляционной функций радиосигнала и его комплексной огибающей.

10.5. Корреляционная функция АМ-сигнала.

В соответствии с выражением выше, КФ амплитудно-модулированного сигнала имеет вид:

$$R(\tau)=\frac{1}{2}R_U(\tau)\cos(\omega_0\tau),$$

где $R_U(\tau)$ – корреляционная функция огибающей АМ-сигнала $U(t)$; множитель $\frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)$ – корреляционная функция гармонического высокочастотного заполнения. То есть, КФ АМ-сигнала – произведение КФ огибающей и КФ гармонического заполнения.

10.6. Корреляционная функция прямоугольного радиоимпульса.

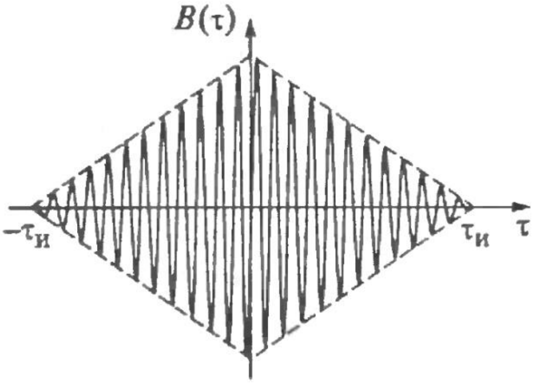

Рис. 5 – Корреляционная функция прямоугольного импульса

Прямоугольный радиоимпульс имеет огибающую в виде прямоугольного видеоимульса и КФ огибающей в виде треугольного импульса. Тогда его корреляционная функция:

$$R(\tau)=\frac{U^2}{2}(\tau_u-|\tau|)\cos(\omega_0\tau),\ |\tau|\le\tau_u.$$

Т.е. огибающая КФ совпадает с КФ огибающей радиоимпульса, а сама КФ имеет высоко частотное заполнение – КФ высокочастотного заполнения радиоимпульса.