Лекция 13

8 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

8.1 Лемма Лоренца

В электродинамике широко применяется ряд соотношений, имеющих универсальный характер. К их числу, например, относится теорема Умова – Пойнтинга, применяемая в большинстве электродинамических задач. Вывод этих соотношений, или их доказательство имеет математическое название – теорема. Доказательство теорем основано на использовании систем уравнений Максвелла. Рассмотрим вывод выражения, называющегося Леммой Лоренца.

В пространстве, в котором существуют электромагнитные поля, выделим объем V. Пусть в односвязном объеме V, ограниченном гладкой поверхностью S заданы две системы сторонних источников в виде распределенных в объеме комплексных амплитуд объемных плотностей электрических и магнитных токов $\dot{\vec{J}}_{0э1}, \dot{\vec{J}}_{0м1}$ и $\dot{\vec{J}}_{0э2}, \dot{\vec{J}}_{0м2}$. Источники не зависимы, и каждый из них создает соответствующее электромагнитное поле $\dot{\vec{E}}_{01}, \dot{\vec{H}}_{01}$ и $\dot{\vec{E}}_{02}, \dot{\vec{H}}_{02}$. Сторонние токи и создаваемые ими поля связаны первыми двумя уравнениями Максвелла:

- для первой системы токов

$$\left.\begin{aligned} rot\dot{\vec{H}}_{01} &= \dot{\vec{J}}_{0э1} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\vec{E}}_{01}, \\ rot\dot{\vec{E}}_{01} &= -\dot{\vec{J}}_{0м1} - j\omega\mu_0\mu\dot{\vec{H}}_{01}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.1), (8.2)$$

- для второй системы токов

$$\left.\begin{aligned} rot\dot{\vec{H}}_{02} &= \dot{\vec{J}}_{0э2} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\vec{E}}_{02}, \\ rot\dot{\vec{E}}_{02} &= -\dot{\vec{J}}_{0м2} - j\omega\mu_0\mu\dot{\vec{H}}_{02}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.3),(8.4)$$

Преобразуем уравнения (8.1) – (8.4) так, чтобы получить общее выражение. Для этого умножим скалярно уравнение (8.1) на $\dot{\vec{E}}_{02}$, (8.2) на $\dot{\vec{H}}_{02}$, (8.3) на $\dot{\vec{E}}_{01}$, (8.4) на $\dot{\vec{H}}_{01}$ и вычтем почленно из первого произведения четвертое, а из третьего – второе, получим:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_{02}rot\dot{\vec{H}}_{01} - \dot{\vec{H}}_{01}rot\dot{\vec{E}}_{02} &= \dot{\vec{E}}_{02}\dot{\vec{J}}_{0э1} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\vec{E}}_{02}\dot{\vec{E}}_{01} + \\ &+ \dot{\vec{H}}_{01}\dot{\vec{J}}_{0м2} + j\omega\mu_0\mu\dot{\vec{H}}_{01}\dot{\vec{H}}_{02}, \end{aligned} \qquad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_{01}rot\dot{\vec{H}}_{02} - \dot{\vec{H}}_{02}rot\dot{\vec{E}}_{01} &= \dot{\vec{E}}_{01}\dot{\vec{J}}_{0э2} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\vec{E}}_{01}\dot{\vec{E}}_{02} + \\ &+ \dot{\vec{H}}_{02}\dot{\vec{J}}_{0м1} + j\omega\mu_0\mu\dot{\vec{H}}_{02}\dot{\vec{H}}_{01}, \end{aligned} \qquad (8.6)$$

Для устранения общих членов, вычтем (8.6) из (8.5):

$$
\begin{gathered}
(\dot{\vec{E}}_{02} rot \dot{\vec{H}}_{01} - \dot{\vec{H}}_{01} rot \dot{\vec{E}}_{02}) - (\dot{\vec{E}}_{01} rot \dot{\vec{H}}_{02} - \dot{\vec{H}}_{02} rot \dot{\vec{E}}_{01}) = \\
= \dot{\vec{E}}_{02} \dot{\vec{J}}_{0э1} + \dot{\vec{H}}_{01} \dot{\vec{J}}_{0м2} - \dot{\vec{E}}_{01} \dot{\vec{J}}_{0э2} - \dot{\vec{H}}_{02} \dot{\vec{J}}_{0м1}.
\end{gathered}
$$

Преобразуем левую часть, используя тождество из математической теории поля:

$$
div(\vec{A} \times B) = \vec{B} rot \vec{A} - \vec{A} rot \vec{B}, \tag{8.7}
$$

получим, учитывая, что $div(\vec{A} \times \vec{B}) = -div(\vec{B} \times \vec{A})$,

$$
\begin{gathered}
div(\dot{\vec{E}}_{02} \times \dot{\vec{H}}_{01}) - div(\dot{\vec{E}}_{01} \times \dot{\vec{H}}_{02}) = \dot{\vec{E}}_{02} \dot{\vec{J}}_{0э1} + \\
+ \dot{\vec{H}}_{01} \dot{\vec{J}}_{0м2} - \dot{\vec{E}}_{01} \dot{\vec{J}}_{0э2} - \dot{\vec{H}}_{02} \dot{\vec{J}}_{0м1}.
\end{gathered} \tag{8.8}
$$

Проинтегрируем все выражение по объему V и преобразуем, используя теорему Остроградского – Гаусса из математической теории поля

$$
\int_V div \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} dS.
$$

Получим

$$
\begin{gathered}
\oint_S (\dot{\vec{E}}_{02} \dot{\vec{H}}_{01} - \dot{\vec{E}}_{01} \dot{\vec{H}}_{02}) d\vec{S} = \\
= \int_V (\dot{\vec{E}}_{02} \dot{\vec{J}}_{0э1} + \dot{\vec{H}}_{01} \dot{\vec{J}}_{0м2} - \dot{\vec{E}}_{01} \dot{\vec{J}}_{0э2} - \dot{\vec{H}}_{02} \dot{\vec{J}}_{0м1}) dV.
\end{gathered} \tag{8.9}
$$

Это выражение, связывающее воедино независимые сторонние источники и возбуждаемые ими электромагнитные поля, называется Леммой Лоренца в интегральной форме для ограниченного объема. Для бесконечного объема из-за граничных условий на бесконечности левая часть (8.9) обращается в нуль, значит, равна нулю и правая часть.

$$
\int_V (\dot{\vec{E}}_{02} \dot{\vec{J}}_{0э1} + \dot{\vec{H}}_{010м2} - \dot{\vec{E}}_{01} \dot{\vec{J}}_{0э2} - \dot{\vec{H}}_{02} \dot{\vec{J}}_{0м1}) dV = 0. \tag{8.10}
$$

Заметим, что подынтегральные выражения отличны от нуля только в тех частях бесконечного объема, где заданы токи. Поэтому, если обозначить через V_1 и V_2 объемы, в которых протекают первые и вторые токи, соответственно, получим из (8.10):

$$
\int_{V_1} (\dot{\vec{E}}_{02} \dot{\vec{J}}_{0э1} - \dot{\vec{H}}_{02} \dot{\vec{J}}_{0м1}) dV = \int_{V_2} (\dot{\vec{E}}_{01} \dot{\vec{J}}_{0э2} - \dot{\vec{H}}_{01} \dot{\vec{J}}_{0м2}) dV. \tag{8.11}
$$

Полученные выражения являются вспомогательными для доказательства других теорем, но могут также применяться самостоятельно.

Например, в пространстве заданные сторонние токи $\dot{\vec{J}}_{0э2}$ и $\dot{\vec{J}}_{0м2}$, необходимо найти поле, создаваемое ими в произвольной точке *P*. Для решения задачи введем координаты, например декартовы, в которых зададим местоположение объема V_2 и точки *P*. В точке *P* поместим вспомогательный элементарный электрический излучатель с $\left|\dot{\vec{J}}_{0э1}\right| = 1$, ориентируя его последовательно по осям *X, Y, Z*. Поскольку объем элементарного излучателя является диференциально-малым, в левой части (8.11) получим составляющие искомого поля $\dot{\vec{E}}_{02}$ в точке P, а интеграл в правой части будет задан в явном виде, т.к. поле элементарного излучателя известно. Интеграл можно вычислить, используя численные методы. В результате такой подход даст численный метод решения задачи излучения стороннего тока в свободном пространстве.

8.2 Теорема эквивалентности

Рассмотрим лемму Лоренца для ограниченного объема, в виде выражения (8.9)

$$\oiint_S (\vec{E}_{02x}\vec{H}_{01} - \vec{E}_{01x}\vec{H}_{02})d\vec{s} =$$

$$\int_V (\dot{\vec{E}}_{02}\dot{\vec{I}}_{0Ý1} + \dot{\vec{H}}_{01}\dot{\vec{I}}_{0M2} - \dot{\vec{E}}_{01}\dot{\vec{I}}_{0Ý2} - \dot{\vec{H}}_{02}\dot{\vec{I}}_{0M2})dV.$$

Заметим, что в левой части под интегралом стоят выражения для составляющих полей создаваемых токами на замкнутой поверхности S, а в правой части стоят выражения непосредственно определяющие токи. Кроме того, легко видеть, что вклад в интеграл в левой части создается только составляющими полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ тангенциальными к поверхности S. Нормальные составляющие полей дают нулевой вход вклад в поток через поверхность S. Тангенциальные составляющие полей создаваемых токами на замкнутой поверхности математически эквиваленты самим токам, так как они входят в общее выражение.

Докажем это, используя другую цепочку рассуждений. Пусть в бесконечном пространстве имеется объем V_{cm} , содержащий сторонние источники. Необходимо найти поле, создаваемое источником в произвольной точке P, расположенной вне объема V, как показано на рис.8.1.

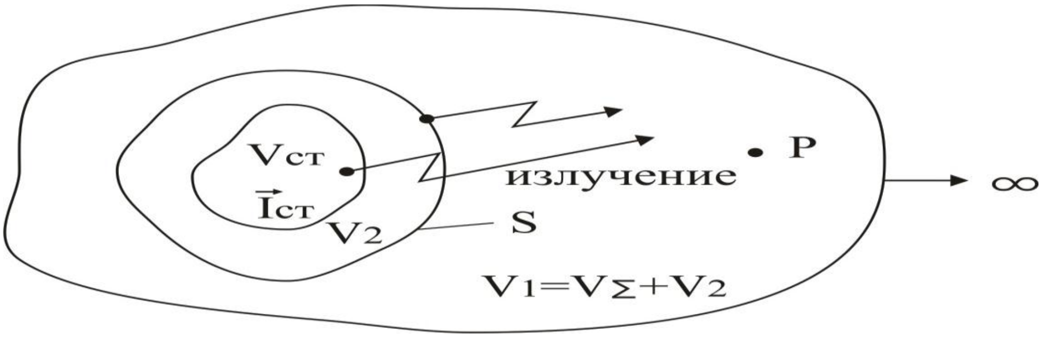

Рис.8.1. Иллюстрация теоремы эквивалентности.

Для нахождения поля в точке P можно использовать два способа.

Способ 1. Определяем в явном виде функции, задающие сторонние источники, используя (6.15) вычисляем векторный потенциал, создаваемый источником в точке P, путем вычисления объемного интеграла. Применяя соотношения (3.13) и (3.16) перейдем от векторного потенциала к векторам поля, создаваемым в точке *P*, за счет излучения источников.

Способ 2. Окружим объем $V_{ст}$ объемом V_2 с границей *S*. Зададим в явном виде тангенциальные составляющие поля сторонних источников на поверхности *S*. Применим метод вычисления поля в точке *P*, рассмотренный как пример в конце предыдущего подраздела. При этом вместо выражения (8.11) для леммы Лоренца используем выражение (8.9) для объема

$V_1 = V_{\sum} - V_2$. Так как в объеме V_1 сторонние источники, создающие поле отсутствуют, то в правой части после интегрирования останутся члены, определяющие поле, создаваемое сторонними токами в точке *P*, а в левой части (8.9) остается интеграл, зависящий от тангенциальных составляющих поля, создаваемых сторонними токами не замкнутый поверхности *S*, охватывающей сторонние токи.

В соответствии с теоремой единственности решения системы уравнений Максвелла решения, полученными разными способами, эквивалентны. Поэтому эквивалентны и способы задания сторонних источников.

Формулировка теоремы эквивалентности может быть дана следующим образом.

Для определения поля излучения, создаваемого сторонними источниками в бесконечном пространстве необходимо и достаточно знать или закон распределения сторонних токов в пространстве, или закон распределения тангенциальных составляющих поля, создаваемых сторонними источниками на замкнутой поверхности, охватывающей токи.

Теорема эквивалентности широко используется в теории антенн и в теории дифракции электростатических волн.

8.3 Теорема взаимности для элементарных излучателей

При введении понятия сторонних токов отмечалось, что они входят в уравнение Максвелла так же, как токи наведенные. Математически они не различимы. Поэтому Лемма Лоренца справедлива не только для сторонних, но и для наведенных токов. В теории антенн рассматриваются передающие и приемные антенны. По передающим антеннам протекают сторонние и частично наведенные токи, но приемным антеннам –только наведенные.

Рассмотрим два элементарных электрических излучателя. Будем считать, что один из них является передающим, а второй приемным. Пусть они находятся в бесконечном пространстве, тогда из леммы Лоренца в виде (8.11) следует

$$\int\limits_{\Delta V_1} (\dot{\vec{E}}_{02} \dot{\vec{J}}_{0э1}) dV = \int\limits_{\Delta V_2} (\dot{\vec{E}}_{01} \dot{\vec{J}}_{0э2}) dV \text{, или}$$

$$\dot{\vec{E}}_{02} \dot{\vec{J}}_{0э1} \Delta V_1 = \dot{\vec{E}}_{01} \dot{\vec{J}}_{0э2} \Delta V_2$$

Представим $\Delta V = \Delta l_1 \cdot \Delta S$, $I_0 = J_{0э} \Delta S$. Тогда из (8.12) следует

$$\varepsilon_{21} I_{01} = \varepsilon_{12} I_{02}, \qquad (8.13)$$

где $\varepsilon_{21} = \dot{\vec{E}}_{02} \Delta l_1 \cdot \vec{l}_{01}$ - ЭДС, создаваемое полем второго излучателя между торцами первого излучателя;

$\varepsilon_{12} = \dot{\vec{E}}_{01} \Delta l_2 \cdot \vec{l}_{02}$ - ЭДС, создаваемое полем первого излучателя между торцами второго излучателя;

$I_{01} = J_{оэ1} \Delta S_1$ - комплексная амплитуда тока на первом излучателе;

$I_{02} = J_{оэ2} \Delta S_2$ - комплексная амплитуда тока на втором излучателе;

Соотношение (8.13) выполняется независимо от того, является ли ток сторонним или наведенным. Отсюда следует два вывода:

- любой ток первого излучателя сторонний или наведенный, создает ЭДС на втором излучателе;

-условия создания ЭДС на втором излучателе не зависит от характера тока, а это возможно только в том случае, когда параметры и характеристики излучателя как антенны одинаковы в случаях использования излучателя в качестве передающей и приемной антенны.

Эти заключения выражают суть теоремы взаимности: свойства антенн одинаковы при работе на передачу и прием, если антенны не содержат невзаимных элементов.

Подобным образом доказывается теорема взаимности и для других типов излучателей.