Лекция 3. Случайные величины

Случайная величина, функция распределения, её свойства. Дискретная случайная величина, ряд распределения, функция распределения. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, их свойства.

3.1. Дискретные случайные величины

Кроме случайных событий и вероятностей их появления, в теории вероятностей нас обычно интересуют некоторые величины, связанные со случайными событиями и называемые случайными величинами. Так, в азартных играх, кроме вероятностей выигрыша, обычно интересуются размером выигрыша.

Определение 3.1. *Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает то или иное значение в зависимости от исхода испытания.*

Случайные величины будем изображать греческими буквами: ξ (кси), ζ (дзета), η (эта), θ (тета) и т.д., а их возможные значения строчными латинскими буквами: x, y, z и т.д.

Определение 3.2. *Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные значения из конечного или бесконечного счётного множества.*

Т.е. все эти значения можно «пересчитать» — поставить им в соответствие натуральные числа.

Говорят, что все возможные значения случайной величины составляют ее спектр.

Определение 3.3. *Непрерывной называют случайную величину которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.*

Примеры случайных величин:

дискретных:

– число попаданий или промахов в серии выстрелов;

  – число выпадений герба или решки при подбрасывании монеты;
  – число появлений события при n испытаниях
  – и т.п.;
- непрерывных:
  – отклонение размера детали от номинального;
  – ресурс (время безотказной работы) системы;
  – физические параметры системы (температура, давление, влажность);
  – длина тормозного пути автомобиля;
  – дальность полета снаряда;
  – продолжительность жизни человека
  – и т.п.

Определение 3.4. *Законом распределения дискретной случайной величины называется соотношение между возможными значениями этой величины и соответствующими им вероятностями.*

Дискретная случайная величина полностью определяется своим законом распределения — таблицей, в которой перечислены все значения, принимаемые случайной величиной и соответствующие им вероятности (см. табл. 3.1.)

Таблица 3.1

Закон распределения				
ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

В таблице 3.1 для случайной величины ξ, принимающей n значений $x_1, \dots, x_n$, перечислены вероятности $p_i = P\{\xi = x_i\}$.

Такая таблица называется рядом распределения, а ее графическое изображение — многоугольником распределения.

Поскольку в данном испытании случайная величина ξ обязательно принимает одно из своих n значений, события $\xi = x_1, \xi = x_2, \dots, \xi = x_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий. Применяя теорему сложения вероятностей (2.1), получаем, что сумма их вероятностей равна вероятности достоверного события, т.е. 1:

$$p_1 + \dots + p_n = 1.$$

Определение 3.5. *Случайные величины ξ и η называются независимыми, если являются независимыми события $\xi = x_i$ и $\eta = y_j$ при любых сочетаниях значений $i = 1, 2, \cdots, k, \quad j = 1, 2, \cdots, n$.*

Определение 3.6. *Произведением случайной величины ξ на постоянное число α называется случайная величина $\alpha\xi$, принимающая возможные значения αx_i с теми же вероятностями, с какими ξ принимает значения x_i.*

Определение 3.7. *Случайная величина ξ^k (k – натуральное число) определяется как случайная величина с возможными значениями x_i^k и вероятностями вероятностям случайной величины ξ.*
$P(x_i^k) = P(x_i), i = \overline{1, n}$.

Определение 3.8. *Суммой (разностью) случайных величин ξ и η будет случайная величина $\zeta = \xi \pm \eta$, которая принимает все возможные значения $x_i \pm y_j$ с вероятностями*
$p_{ij} = P\{(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j)\} = p_i \cdot p'_j, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}$.

Определение 3.9. *Произведением независимых случайных величин ξ и η будет случайная величина $\zeta = \xi \cdot \eta$ возможные значения которой равны произведениям возможных значений случайных величин ξ и η — $x_i \cdot y_j$, а соответствующие вероятности перемножаются.*

Ряд распределения случайной величины $\zeta = \xi \cdot \eta$ будет иметь вид

$\zeta = \xi\eta$	x_1y_1	$\cdots$	x_1y_n	$\cdots$	x_ky_1	$\cdots$	x_ky_n
P	$p_1p'_1$	$\cdots$	$p_1p'_n$	$\cdots$	$p_kp'_1$	$\cdots$	$p_kp'_n$

Пример 3.1. *При бросании монеты игрок получает 1\$ при выпадении орла и платит 1\$ при выпадении решки. Случайная величина ξ, равная выигрышу в одной игре, задаётся законом распределения:*

ξ	1	−1
p	0,5	0,5

Пример 3.2. *Случайная величина ξ задана законом распределения:*

ξ	1	2	5	10
p	0,1		0,3	0,2

Найти отсутствующую вероятность.

►Из условия $0{,}1 + p_2 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$ определяем: $p_2 = 0{,}4$.◄

Ответ: $p_2 = 0{,}4$.

Иногда удобно изобразить закон распределения графически: по оси абсцисс отложить значение x_i, а по оси ординат — соответствующие вероятности p_i. Полученные точки соединяют отрезками прямых. Получившийся график называется *многоугольником вероятностей.* На рис. 11 изображён многоугольник вероятностей для дискретной случайной величины из примера 3.2.

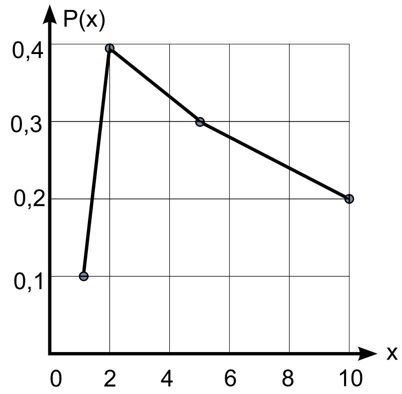

Рис. 11. *Пример 3.2*

Пример 3.3. *Даны две случайные величины ξ и η с задана законами распределения:*

ξ	*0*	*1*
p	0,4	0,6

η	*1*	*2*
p	0,2	0,8

Определить случайные величины $\alpha = \xi + \eta$ и $\beta = \xi \cdot \eta$.

►Определяем закон распределения случайной величины α. Суммируем значения этих величин, получаем три значения: $\alpha = \{1, 2, 3\}$. Вероятность события $\alpha = 1$ равна вероятности события

$(\xi = 0) \bigcap (\eta = 1) \Rightarrow P(\alpha = 1) = P(\xi = 0) \cdot P(\eta = 1) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08.$

$\bigcap (\eta = 2) \bigcup (\xi = 1) \bigcap (\eta = 1) \Rightarrow$

$P(\alpha = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}44.$

Вероятность события $\alpha = 3$ равна вероятности события
$(\xi = 1)\bigcap(\eta = 2) \Rightarrow P(\alpha = 3) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.

Определяем закон распределения случайной величины β. Умножаем значения этих величин, получаем три значения: $\beta = \{0, 1, 2\}$.
Вероятность события $\beta = 0$ равна вероятности события
$(\xi = 0)\bigcap(\eta = 1)\bigcup \xi = 0)\bigcap(\eta = 2) \Rightarrow$
$P(\beta = 0) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$.
Вероятность события $\beta = 1$ равна вероятности события
$(\xi = 1)\bigcap(\eta = 1) \Rightarrow P(\beta = 1) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$.
Вероятность события $\alpha = 2$ равна вероятности события
$(\xi = 1)\bigcap(\eta = 2) \Rightarrow P(\beta = 3) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.

Получили законы распределения случайных величин $\alpha = \xi + \eta$ и $\beta = \xi \cdot \eta$

α	1	2	3
p	0,08	0,44	0,48

β	0	1	2
p	0,4	0,12	0,48

Отметим, что сумма вероятностей обеих величин равна 1.◀

Кроме одномерных случайных величин, изучают также двумерные, трёхмерные и многомерные случайные величины.

Рассмотрим точку на плоскости со случайными координатами $(\xi; \zeta)$. Вначале рассмотрим случай, когда обе составляющие — дискретные случайные величины, т.е. множество их значений конечно или счётно.

Определение 3.10. *Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называется перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел $(x_i; y_j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, и их вероятностей $p_{ij} = P\{\xi = x_i; \zeta = y_i\}$.*

Закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом, в которой указывают все значения x_i, y_i, которые могут принимать ξ и ζ и их вероятности p_{ij}.

$\xi \backslash \zeta$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}

Так как события $\{\xi = x_i, \zeta = y_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ попарно несовместны и в сумме дают достоверное событие, сумма всех вероятностей равна 1.

Зная двумерный закон распределения, можно найти закон распределения каждой составляющей (но не наоборот). Например, для ξ имеем:

$$\begin{gathered} P\{\xi = x_i\} = P\{\xi = x_i, \zeta = y_1\} + P\{\xi = x_i, \zeta = y_2\} + \ldots \\ \ldots + P\{\xi = x_i, \zeta = y_m\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{i\cdot}\ . \end{gathered} \tag{3.1}$$

Аналогично для ζ получим

$$P\{\zeta = y_i\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{\cdot j}\ . \tag{3.2}$$

Итак, сложив вероятности по строкам и записав их в последний столбец, мы получим распределение составляющей ξ. Сложив вероятности по столбцам и записав их в последнюю строчку, мы получим распределение составляющей ζ.

3.2. Числовые характеристики случайной величины.

3.2.1. *Математическое ожидание.* Закон распределения полностью определяет дискретную случайную величину. Однако иногда удобнее характеризовать её с помощью нескольких числовых характеристик, каждая из которых определяет одно из свойств этой случайной величины. Одной из таких числовых характеристик является математическое ожидание.

Определение 3.11. *Математическим ожиданием $M(\xi)$ дискретной случайной величины ξ называется сумма произведений всех её значений на соответствующие вероятности:*

$$M(\xi) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ \ldots + x_np_n. \tag{3.3}$$

Замечание 3.1. *Математическое ожидание случайной величины не является случайной величиной, это вполне определённое число.*

Замечание 3.2. *Если $y = g(x)$ – непрерывная функция, то для дискретной случайной величины ξ, $\zeta = g(\xi)$ также будет случайной величиной и её математическое ожидание вычисляется по формуле:*

$$M(g(\xi)) = g(x_1) \cdot p_1 + \cdots + g(x_n) \cdot p_n.$$

Пример 3.4. *Для случайной величины из примера 3.2 найти математическое ожидание.*

ξ	*1*	*2*	*5*	*10*
p	*0,1*	0,4	*0,3*	*0,2*

►$M(\xi) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}2 = 4{,}4.$◄
Ответ: $M(\xi) = 4{,}4.$

Для определения вероятностного смысла математического ожидания рассмотрим следующий пример.

Пример 3.5. *Из 10 оценок данного студента 7 троек, 2 четвёрки и 1 пятерка. Какова средняя оценка данного студента?*

►Простые вычисления дают результат:

$$\frac{7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{10} = 3{,}4.$$

Записав эти вычисления в виде

$$3{,}4 = 3 \cdot \frac{7}{10} + 4 \cdot \frac{2}{10} + 5 \cdot \frac{1}{10},$$

получим, что средняя оценка равна сумме произведений оценок на их относительную частоту. Как отмечалось, при увеличении числа испытаний относительная частота стабилизируется вокруг вероятности. Из сказанного можно сделать вывод, что сумма произведений значений случайной величины на их соответствующие вероятности равна среднему значению этой величины. В этом заключается *вероятностный смысл математического ожидания: математическое ожидание равно среднему значению случайной величины.*◄

Замечание 3.3. *Происхождение термина «математическое ожидание» объясняется тем, что на раннем этапе теория вероятностей в основном занималась азартными играми и игрока интересовал средний ожидаемый выигрыш.*

Перечислим свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание константы равно константе:

$$M(C) = C.$$

Доказательство. Так как константа задаётся следующим законом распределения:

ξ	C
p	1

,

её математическое ожидание очевидно равно

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания:

$$M(C \cdot \xi) = C \cdot M(\xi).$$

Доказательство. Если случайная величина ξ задана законом распределения — таблицей 3.1, то случайная величина $C\xi$, очевидно, задаётся следующей таблицей:

$C\xi$	Cx_1	Cx_2	$\ldots$	Cx_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

и её математическое ожидание равно:

$$M(C\xi) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ldots + Cx_np_n = C(x_1p_1 + \ldots + x_np_n) = CM(\xi). \tag{3.4}$$

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M(\xi + \zeta) = M(\xi) + M(\zeta). \tag{3.5}$$

Замечание 3.4. *Как следует из свойств 1 и 3,* $M(\xi + C) = M(\xi) + C$.

Замечание 3.5. *Свойства 2 и 3 позволяют для любого конечного числа случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и чисел $C_1, \ldots, C_n$ написать:*

$$M(C_1\xi_1 + \ldots + C_n\xi_n) = C_1M(\xi_1) + \ldots + C_nM(\xi_n).$$

В частности: $M(\xi - \zeta) = M(\xi) - M(\zeta)$.

Для того, чтобы иметь возможность сформулировать следующее свойство, дадим определение независимых дискретных случайных величин.

Определение 3.12. *Две дискретные случайные величины ξ и ζ называются независимыми, если вероятности p_{ij} в законе распределения двумерной дискретной случайной величины $(\xi;\zeta)$ равны произведению соответствующих вероятностей одномерных распределений составляющих:*

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}.$$

Как будет показано ниже это означает, что для независимых случайных величин закон распределения каждой из них не зависит от значений, принимаемых другой.

Если, например, две независимые случайные величины ξ и ζ имеют законы распределения, определяемые таблицами 3.2 и 3.3, то их произведение будет иметь распределение, задаваемое таблицей 3.4.

Таблица 3.2

ξ	x_1	x_2
p	p_1	p_2

Таблица 3.3

ζ	y_1	y_2
p	g_1	g_2

Таблица 3.4

$\xi \cdot \zeta$	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
p	p_1g_1	p_1g_2	p_2g_1	p_2g_2

Действительно, в соответствии с определением 3.12, например, для первой вероятности из таблицы 3.4 имеем:

$$P\{\xi \cdot \zeta = x_1y_1\} = P\{\xi = x_1,\ \zeta = y_1\} = P\{\xi = x_1\} \cdot P\{\zeta = y_1\} = p_1g_1.$$

Теперь мы можем сформулировать последнее свойство математического ожидания:

4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(\xi \cdot \zeta) = M(\xi) \cdot M(\zeta).$$

   Доказательство для случайных величин, задаваемых таблицами 3.2, 3.3, 3.4, студентам рекомендуется провести самостоятельно.

Аналогично тому, как это было сделано для двумерных дискретных случайных величин, закон распределения n-мерной дискретной случайной величины задают в виде таблицы с n входами, в которой указывают значения вероятностей $p_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ того, что n-мерный случайный вектор $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ принял значение $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n})$, где каждая компонента может принимать значение из конечного или счётного множества.

Зная n-мерное распределение $p_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ можно получить распределение каждой составляющей $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_n}$ (обратное, вообще говоря, неверно).

Определение 3.13. *Независимыми называются n дискретных случайных величин, если вероятности $p_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ равны произведению соответствующих вероятностей одномерных распределений составляющих:*

$$p_{i_1,i_2,\cdots,i_n} = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}.$$

Из свойства 4 можно легко вывести следующее следствие:

Следствие 3.1. *Для n независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий.*

$$M(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n) = M(\xi_1) \cdot \ldots \cdot M(\xi_n).$$

3.2.2. *Дисперсия.* Поскольку рассматриваемые величины случайные, кроме среднего значения, полезно было бы знать характеристику степени их разброса вокруг среднего значения. В качестве такой характеристики нельзя рассматривать отклонение случайной величины от математического ожидания $\xi - M(\xi)$, т.к. оно случайно. В среднем это отклонение равно нулю:

$$M(\xi - M(\xi)) = M(\xi) - M(M(\xi)) = M(\xi) - M(\xi) = 0.$$

Поэтому в качестве характеристики разброса случайной величины вокруг её среднего значения рассматривают математическое ожидание квадрата отклонения.

Определение 3.14. *Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата её отклонения от математического ожидания:*

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2. \tag{3.6}$$

В соответствии с замечанием 3.2, для дискретной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле:

$$D(\xi) = \sum_i (x_i - M(\xi))^2 \cdot p_i. \tag{3.7}$$

Из определения ясно, что дисперсия случайной величины сама является неслучайной величиной.

Пример 3.6. *Для случайной величины из примера 3.4 найти дисперсию.*

►В примере 3.4 было найдено её математическое ожидание: $M(\xi) = 4{,}4$. По формуле (3.7) определяем:

$D(\xi) = (1-4,4)^2 \cdot 0{,}1 + (2-4,4)^2 \cdot 0{,}4 + (5-4,4)^2 \cdot 0{,}3 + (10-4,4)^2 \cdot 0{,}2 \approx \approx 9{,}84.$

Иногда для вычисления дисперсии удобнее пользоваться другой формулой, которую выведем, пользуясь свойствами математического ожидания:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2. \tag{3.8}$$

Действительно:

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = M\big(\xi^2 - 2\xi M(\xi) + (M(\xi))^2\big) =$$
$$= M(\xi^2) - 2M(\xi)M(\xi) + (M(\xi))^2 = M(\xi^2) - (M(\xi))^2.$$

Для дискретной случайной величины вычисление дисперсии по формуле (3.8) сводится к вычислению суммы:

$$D(\xi) = \sum_i x_i^2 p_i - (M(\xi))^2. \tag{3.9}$$

Самостоятельно убедитесь, что вычисление по формуле (3.9) в примере 3.6 даёт тот же результат.

Приведем свойства дисперсии.

(1) $D(\xi) \geqslant 0$.
Действительно, все слагаемые в формуле (3.7) неотрицательны.

(2) $D(C) = 0$.
Действительно: $D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 = = M(0) = 0$

(3) $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi)$.
Доказательство.

$$D(C \cdot \xi) = M(C \cdot \xi - M(C \cdot \xi))^2 = M(C \cdot \xi - C \cdot M(\xi))^2 =$$
$$= M\big(C \cdot (\xi - M(\xi))\big)^2 = M\big(C^2 \cdot (\xi - M(\xi))^2\big) =$$
$$= C^2 \cdot M(\xi - M(\xi))^2 = C^2 \cdot D(\xi).$$

(4) Для независимых случайных величин ξ и ζ:
$D(\xi + \zeta) = D(\xi) + D(\zeta)$.
Доказательство этого свойства получится из определения 3.14

после несложных алгебраических преобразований. Проведите его самостоятельно.

Следствие 3.2. *Для независимых случайных величин* $D(\xi-\zeta)=D(\xi)+D(\zeta)$.

Действительно:

$$D(\xi-\zeta)=D\big(\xi+(-1)\cdot\xi\big)=D(\xi)+(-1)^2\cdot D(\xi)=D(\xi)+D(\zeta).$$

Свойство 4 распространяется на сумму любого числа независимых случайных величин.

Вероятностный смысл дисперсии заключается в том, что она характеризует степень рассеяния случайной величины около её среднего значения (математического ожидания).

Однако, если среднее значение $M(\xi)$ имеет ту же размерность, что и сама случайная величина, то $D(\xi)$ имеет другую размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Это не всегда удобно, поэтому ввели другую характеристику рассеяния, имеющую ту же размерность, что и сама случайная величина.

Определение 3.15. *Средним квадратическим отклонением случайной величины* ξ *называют квадратный корень из её дисперсии:*

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}. \tag{3.10}$$

Заметим, что дисперсия выражается через $\sigma(\xi)$ по формуле: $D(\xi)=\sigma^2(\xi)$.

В примере 3.6 была найдена $D(\xi)=9,84$. Найдём среднее квадратическое отклонение этой случайной величины: $\sigma(\xi)=\sqrt{9{,}84}\approx 3{,}14$.

Свойства среднего квадратического отклонения:

(1) $\sigma(\xi)\geqslant 0$;
(2) $\sigma(C)=0$;
(3) $\sigma(C\xi)=|C|\cdot\sigma(\xi)$;
(4) Для независимых случайных величин ξ и ζ:
$\sigma(\xi+\zeta)=\sqrt{\sigma^2(\xi)+\sigma^2(\zeta)}$.

Так же как и дисперсия, $\sigma(\xi)$ характеризует степень рассеяния случайной величины около её среднего значения (математического ожидания).

Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями более общих понятий — моментов $k-$го порядка случайной величины с которыми мы познакомимся ниже.

3.2.3. *Функция распределения.* Дискретная случайная величина полностью определяется своим законом распределения — таблицей 3.1. Однако наряду с дискретными случайными величинами, принимающими отдельные значения, существуют другие, принимающие все значения из некоторого промежутка. Их невозможно задать перечислением всех принимаемых ими значений, поэтому был предложен универсальный способ задания случайной величины, пригодный во всех случаях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.16. *Функцией распределения $F(x)$ случайной величины ξ называется вероятность того, что ξ приняла значение меньшее x:*

$$F(x) = P\{\xi < x\}. \tag{3.11}$$

ПРИМЕР 3.7. *Найти $F(x)$ и построить её график для случайной величины из примера 3.2.*

ξ	*1*	*2*	*5*	*10*
p	*0,1*	*0,4*	*0,3*	*0,2*

►Проще всего решить эту задачу, находя значение $F(x)$ в отдельных точках по формуле (3.11):

$$F(0) = P\{\xi < 0\} = 0; \quad F(0{,}5) = P\{\xi < 0{,}5\} = 0;$$

$$F(1) = P\{\xi < 1\} = 0; \quad F(2) = P\{\xi < 2\} = 0{,}1;$$

$$F(1,1) = P\{\xi < 1,1\} = 0{,}1; \quad F(1,9) = P\{\xi < 1,9\} = 0{,}1;$$

$$F(2,1) = P\{\xi < 2,1\} = P\{\xi = 1 \text{ или } \xi = 2\} = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5;$$

$$F(4) = P\{\xi < 4\} = P\{\xi = 1 \text{ или } \xi = 2\} = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5;$$

$$F(5) = P\{\xi < 5\} = P\{\xi = 1 \text{ или } \xi = 2\} = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5;$$

$$F(6) = P\{\xi < 6\} = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}8;$$

$$F(9) = P\{\xi < 9\} = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}8;$$

$$F(10) = P\{\xi < 10\} = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}8; \text{ и т.д.}$$

Понятно, что F(x) имеет вид неубывающей ступенчатой функции, непрерывной слева:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 1; \\ 0{,}1 & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2; \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 5; \\ 0{,}8 & \text{при} \quad 5 < x \leqslant 10; \\ 1 & \text{при} \quad 10 < x. \end{cases}$$

Её график изображен на рис. 12.◄

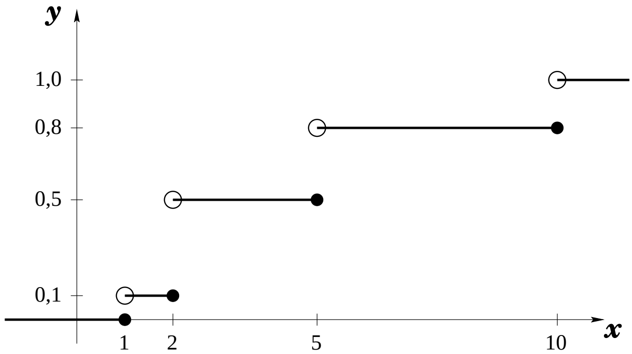

Рис. 12. *Функция распределения дискретной случайной величины примера 3.7*

Рассмотрим свойства функции распределения.

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
(2) $P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$;
(3) $F(x)$ не убывает;
(4) $F(x)$ непрерывна слева;
(5) Для дискретной случайной величины, задаваемой таблицей 3.1, функция распределения ступенчатая с разрывами в точках x_i и высотой ступенек равной сумме всех вероятностей значений, не превосходящих данных (см. рис. 12).

Свойство 1 непосредственно вытекает из определения 3.16.

Для доказательства свойства 2 запишем $F(x_2) = P\{\xi < x_2\}$ в виде суммы вероятностей несовместных событий:

$$F(x_2) = P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1 \text{ или } x_1 \leqslant \xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\}+$$
$$+P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_1) + P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} \Longleftrightarrow F(x_2) = F(x_1)+$$
$$+P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} \Longleftrightarrow P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Свойство 3 немедленно вытекает из только что доказанного, т.к. для $x_2 > x_1$ получаем:

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} \geqslant 0 \implies F(x_2) \geqslant F(x_1).$$

Свойство 4 примем без доказательства. Напомним, что функция $F(x)$ называется непрерывной слева в точке x, если $\lim\limits_{x\to a-} F(x) = F(a)$.

Как видно из рис. 12, это свойство выполняется для функции распределения дискретной случайной величины. Для остальных рассмотренных в данной книге случайных величин оно также будет выполнено, т.к. $F(x)$ будет непрерывна.

3.3. Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение 3.17. *Функция $F(x)$ обладает кусочно непрерывной производной, если её производная $F'(x)$ непрерывна везде, кроме конечного (или бесконечного счётного) множества точек, в которых $F'(x)$ может иметь разрывы 1-го рода.*

В частности, если производная $F'(x)$ непрерывна, то она кусочно непрерывна, т.к. множество точек разрыва пусто.

Определение 3.18. *Случайная величина ξ называется непрерывной, если её функция $F(x)$ непрерывна и обладает кусочно непрерывной производной $F'(x)$.*

Свойства функции распределения непрерывной случайной величины :

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1,\ F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$;
(2) $P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$;
(3) $F(x)$ не убывает;
(4) $F(x)$ непрерывна;
(5) $P\{\xi = a\} = 0$ для любого числа a.

Доказательства первых 3 свойств дословно повторяют приведённые в пункте 3.1. Свойство 4 следует из определения 3.17. Докажем свойство 5: $P\{a \leqslant \xi < a+\Delta x\} = F(a+\Delta x) - F(a)$ при $\Delta x > 0$ в соответствии со свойством 2. Отсюда, пользуясь свойством 4, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0+} P\{a \leqslant \xi < a+\Delta x\} = \lim_{\Delta x \to 0+} \big(F(a+\Delta x) - F(a)\big) = F(a) - F(a) = 0.$$

Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} P\{a \leqslant \xi < a + \Delta x\} = P\{a \leqslant \xi \leqslant a\} = P\{\xi = a\}$, откуда получаем свойство 5: непрерывная случайная величина принимает каждое свое значение с нулевой вероятностью.

График функции распределения рассматриваемых в данной книге непрерывных случайных величин может иметь один из видов, представленных на рис. 13.

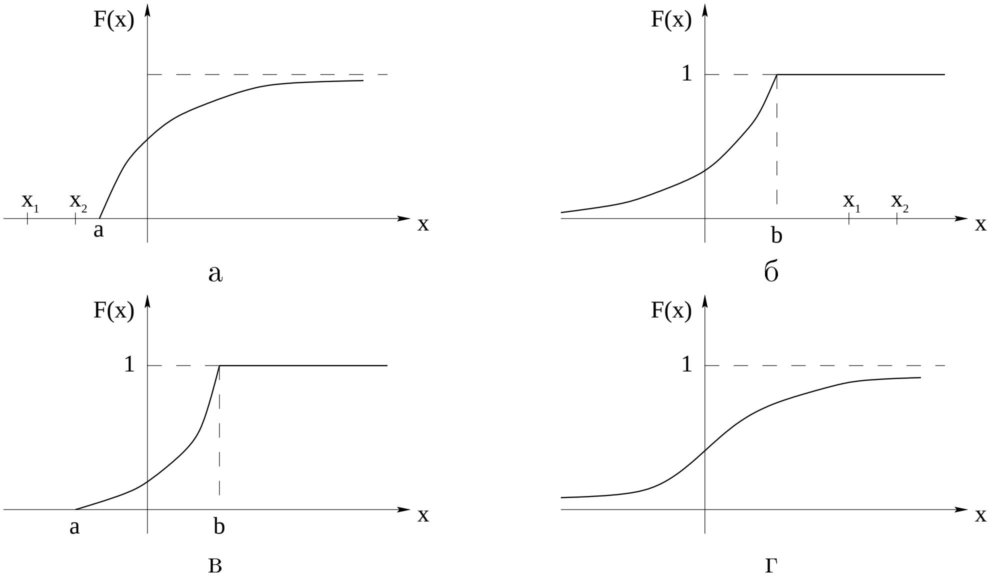

Рис. 13. *Функция распределения непрерывной случайной величины*

Заметим, что для представленной на рис. 13,а функции распределения случайная величина с нулевой вероятностью принимает значения из промежутков, лежащих левее точки a: $P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = 0 - 0 = 0$. Для функции распределения (рис. 13,б) случайная величина с нулевой вероятностью принимает значения из промежутков, лежащих правее точки b:
$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = 1 - 1 = 0$.

Для функции распределения рис. 13,в ненулевая вероятность попасть в заданный промежуток будет только для промежутков, принадлежащих $(a; b)$.

Замечание 3.6. *Свойство 2 означает, что вероятность того, что случайная величина попала в заданный промежуток, равна приращению функции распределения на этом промежутке: чем больше выросла функция распределения, тем больше эта вероятность. Причём для непрерывных случайных величин не имеет значения, строгое или нестрогое равенство, т.к. в соответствии со свойством 5 это не изменяет вероятность попадания в промежуток.*

3.4. Плотность распределения

В соответствии с только что сделанным замечанием вероятность попадания случайной величины в заданный промежуток зависит от скорости роста функции распределения. Поэтому непрерывную случайную величину задают, используя производную от функции распределения.

Определение 3.19. *Плотностью распределения $f(x)$ (или дифференциальной функцией распределения) непрерывной случайной величины ξ называют первую производную от её функции распределения:*

$$f(x) = F'(x). \tag{3.12}$$

Замечание 3.7. *Поскольку функция распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатую форму, для её описания плотность распределения неприменима.*

Свойства плотности распределения:

(1) $f(x) \geqslant 0$;
(2) $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$;
(3) $f(x)$ кусочно непрерывная функция;
(4) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$;
(5) $P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$;
(6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Первые четыре свойства являются непосредственным следствием определения 3.18 и соответствующих свойств функции распределения (докажите их самостоятельно).

Свойство 5 является по сути известной формулой Ньютона – Лейбница, т.к. $F(x)$ — первообразная для $f(x)$:

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Отсюда немедленно вытекает свойство 6:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P\{-\infty < \xi < +\infty\} = 1.$$

Свойство 5 означает, что площадь криволинейной трапеции над промежутком $[x_1;\ x_2)$ под графиком $f(x)$ равна вероятности попадания в этот промежуток (см. рис. 14).

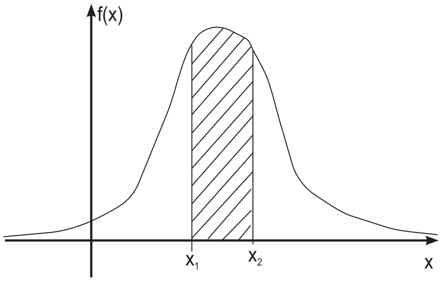

Рис. 14. *Вероятность попадания в интервал*

Если x_2 близко к x_1, промежуток мал и площадь криволинейной трапеции можно заменить площадью прямоугольника. Мы получим, что вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал $(x;\ x + \Delta x)$ приближённо равна $f(x) \cdot \Delta x$.

Вероятностный смысл плотности $f(x)$ заключается в следующем. *Плотность $f(x)$ непрерывной случайной величины ξ равна вероятности попадания в малый интервал $(x;\ x + \Delta x)$, отнесённой к длине этого интервала.*

Для функций распределения, представленных на рис. 13, плотности распределения будут иметь вид, показанный рис. 15.

Если ξ — непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$, и если $y = \varphi(x)$ — дифференцируемая строго монотонная функция (или строго возрастающая или строго убывающая), обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины η определяется равенством

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|. \tag{3.13}$$

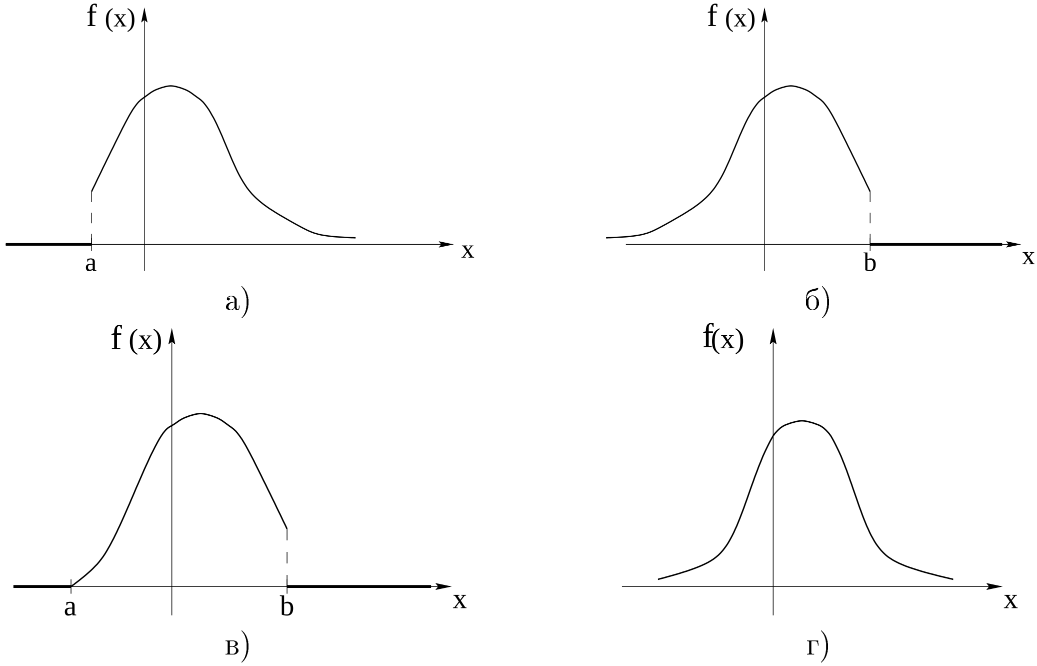

Рис. 15. *Плотность распределения*

Пример 3.8. *Плотность непрерывной случайной величины ξ задана формулами:*

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{при} \quad x \in [0;4], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0;4]. \end{cases}$$

Найти константу C и вычислить $P\{0 < \xi < 3\}$.

►На основании свойства 6 плотности распределения имеем:

$$\int_0^4 C dt = 1 \quad \Longrightarrow \quad C \cdot 4 = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{4}.$$

Таким образом $f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{при} \quad x \in [0;4]; \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0;4]. \end{cases}$

Далее на основании свойства 5 плотности имеем:

$$P\{0 < \xi < 3\} = \int_0^3 \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} t \Big|_0^3 = \frac{3}{4}.◄$$

Ответ: $C = \dfrac{1}{4}$; $\quad P\{0 < \xi < 3\} = \dfrac{3}{4}$.

3.5. Математическое ожидание и дисперсия непрерывных случайных величин

Распространим понятие математического ожидания и дисперсии на непрерывные случайные величины. Допустим, что непрерывная случайная величина ξ принимает все значения из некоторого $[a;\ b]$. Разобьём его на n маленьких отрезков длиной $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ и выберем в каждом из них произвольную точку C_i $(i = 1, 2,\ \ldots, n)$. Считая, что случайная величина ξ может принимать только значение C_i с вероятностями $p_i = f(C_i)\Delta x_i$ (вероятности попадания в i-й отрезок), найдем математическое ожидание этой дискретной случайной величины:

$$\sum_i C_i f(C_i)\Delta x_i.$$

Перейдя к пределу при стремлении к нулю длины наибольшего из частных отрезков, получим определённый интеграл $\int\limits_a^b xf(x)dx.$

Определение 3.20. *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $f(x)$ называется:*

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{3.14}$$

Замечание 3.8. *Если $\eta = \varphi(\xi)$ — непрерывная функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то*

$$M(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x)dx, \tag{3.15}$$

где $f(x)$ – плотность распределения ξ.

Определение дисперсии как математического ожидания квадрата отклонения полностью сохраняется для непрерывных случайных величин:

$$D(\xi) = M\big(\xi - M(\xi)\big)^2.$$

Вычисление дисперсии непрерывной случайной величины с учётом замечания 3.8 следует вести по следующей формуле:

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(\xi)\big)^2 f(x)dx. \qquad (3.16)$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, приведённые в предыдущей для ДСВ, сохраняются в этом случае.

Если $\eta = \varphi(\xi)$ — функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(\varphi(\xi) - M(\varphi(x))\big)^2 f(x)dx, \qquad (3.17)$$

или

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)f(x)\,dx - M^2(\varphi(\xi)). \qquad (3.18)$$

В свойстве 4 математического ожидания используется понятие независимых случайных величин, которое было введено для дискретных случайных величин.

Для того, чтобы распространить это понятие на произвольные случайные величины, определим двумерную случайную величину $(\xi;\zeta)$ как вектор, координаты которого являются одномерными случайными величинами и для которого определена функция распределения $F(x;y)$:

$$F(x;y) = P\{\xi < x; \zeta < y\}.$$

Здесь отметим только, что зная функцию распределения $F(x;y)$ двумерной случайной величины $(\xi;\zeta)$, можно получить функцию распределения каждой составляющей $F_\xi(x)$ и $F_\zeta(y)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 3.21. *Две случайные величины ξ и ζ называются независимыми, если функция распределения $F(x;y)$ двумерной случайной величины $(\xi;\zeta)$ равна произведению функций распределения составляющих:*

$$F(x;y) = F_\xi(x) \cdot F_\zeta(y).$$

Аналогичным образом вводится понятие независимости n случайных величин через их функцию распределения:

$$F(x_1; x_2; \ldots; x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n), \text{ где}$$
$$F(x_1; x_2; \ldots; x_n) = P(\xi_1 < x_1; \xi_2 < x_2; \ldots; \xi_n < x_n).$$

Доказательства свойств дисперсии для дискретной случайной величины не были привязаны к формуле (3.3) и остаются справедливыми для непрерывных случайных величин.

Так, например, вычисление дисперсии удобнее проводить по формуле (3.8), которая для непрерывных случайных величин принимает вид:

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \big(M(\xi)\big)^2. \tag{3.19}$$

Наряду с дисперсией, для характеристики разброса непрерывной случайной величины около её среднего значения используется среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{3.20}$$

Пример 3.9. *Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины из примера 3.8.* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \textit{при} \quad x \in [0; 4], \\ 0 & \textit{при} \quad x \notin [0; 4]. \end{cases}$

►По формуле (3.14), поскольку плотность $f(x)$ отлична от нуля только при $x \in [0;\ 4]$, $M(\xi) = \int\limits_0^4 \dfrac{1}{4}\, x dx = \dfrac{x^2}{8}\Big|_0^4 = 2.$

По формуле (3.19), поскольку плотность $f(x)$ отлична от нуля только при $x \in [0;\ 4]$, с учётом $M(X) = 2$, найденного в примере 3.7, получаем:

$$D(\xi) = \int\limits_0^4 x^2 \cdot \frac{1}{4} dx - (2)^2 = \frac{x^3}{12}\Big|_0^4 - 4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}.$$

По формуле (3.20) находим $\sigma(x)$: $\sigma(\xi) = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155.$◄

Ответ: $M(\xi) = 2,\ D(\xi) = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333,\ \sigma(\xi) \approx 1{,}155.$

3.6. Начальные и центральные моменты

Математическое ожидание и дисперсия являются более частными случаями следующих более общих понятий — моментов случайной величины.

Определение 3.22. *Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется:*

$$\mu_k = M\left[\bigl(\xi - M(\xi)\bigr)^k\right]. \tag{3.21}$$

Заметим, что центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а второго порядка есть дисперсия:

$$\mu_1 = M\bigl(\xi - M(\xi)\bigr) = M(\xi) - M\bigl(M(\xi)\bigr) = M(\xi) - M(\xi) = 0,$$

$$\mu_2 = M\left[\bigl(\xi - M(\xi)\bigr)^2\right] = \sigma^2.$$

Определение 3.23. *Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется*

$$\nu_k = M(\xi^k). \tag{3.22}$$

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию: $\nu_1 = M(\xi)$.

Между начальными и центральными моментами существует связь:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

$$\text{т.к.} \quad D(\xi) = M(\xi^2) - \bigl(M(\xi)\bigr)^2,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

Действительно, пользуясь свойствами математического ожидания, получаем:

$$\mu_3 = M\left[\bigl(\xi - M(\xi)\bigr)^3\right] = M\Bigl(\xi^3 - 3\xi^2 M(\xi) + 3\xi\bigl(M(\xi)\bigr)^2 - \bigl(M(\xi)\bigr)^3\Bigr) =$$

$$= M(\xi^3 - 3\xi^2\nu_1 + 3\xi\nu_1^2 - \nu_1^3) = M(\xi^3) - 3\nu_1 M(\xi^2) + 3\nu_1^2 M(\xi) - \nu_1^3 =$$

$$= \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 3\nu_1\nu_1 - \nu_1^3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

Аналогично доказываются остальные соотношения:

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 \quad \text{и т.д.}$$

Аналогично тому, как коэффициенты ряда Тейлора дают все более точное приближение для функции, моменты случайной величины всё более точно определяют её распределение.

Определение 3.24. *Коэффициентом асимметрии распределения случайной величины ξ называется:*

$$A = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{M\left[\left(\xi - M(\xi)\right)^3\right]}{\sqrt{D(\xi)}^3}.$$

Асимметрия положительна, если «длинная часть» кривой плотности распределения расположена справа от математического ожидания и отрицательна, если — слева (см. рис. 16).

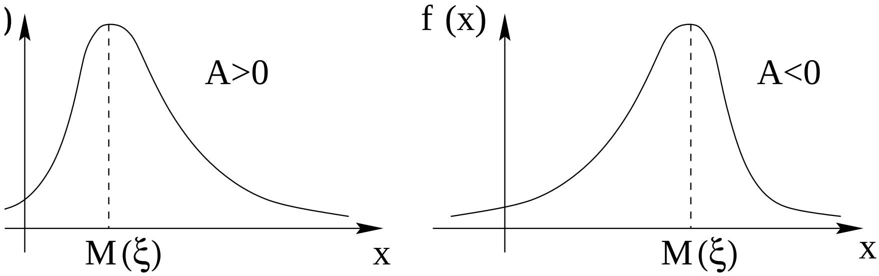

Рис. 16. *Асимметрия*

Определение 3.25. *Эксцессом распределения случайной величины ξ называется:*

$$E = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{M\left[\left(\xi - M(\xi)\right)^4\right]}{\left(D(\xi)\right)^2} - 3.$$

Для нормального распределения $E = 0$; если $E > 0$, то плотность распределения имеет более высокую и «острую» вершину по сравнению с кривой Гаусса; если $E < 0$, то более низкую и «плоскую» (см. рис. 17)

Вычисление числовых характеристик дискретных случайных величин (ДСВ) с целыми неотрицательными значениями удобнее производить с помощью производящих функций.

Пусть ДСВ ξ задана законом распределения

Таблица 3.5

ξ	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
p	p_0	p_1	p_2	$\ldots$	p_k	$\ldots$

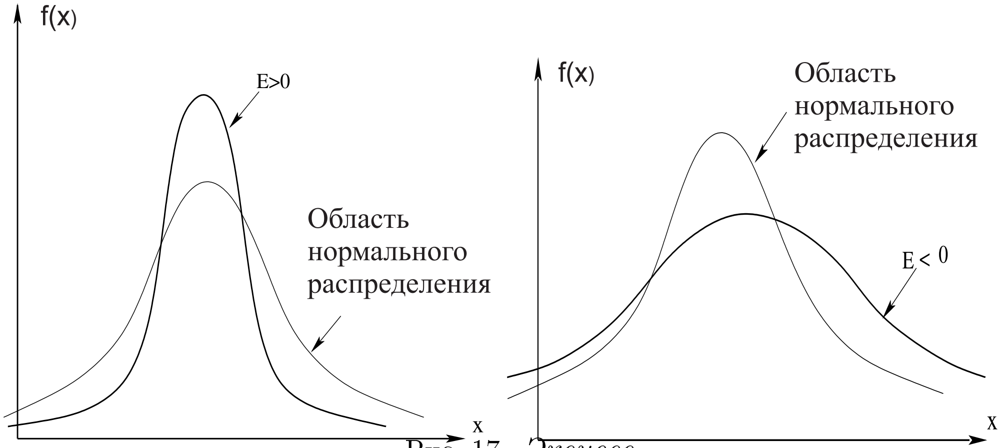

Рис. 17. *Эксцесс*

Определение 3.26. *Производящей функцией для ДСВ ξ называется функция вида*

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot z^k = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots, \tag{3.23}$$

где z — произвольный параметр, $0 < z \leqslant 1$.

Производящая функция (3.23) представляет степенной ряд коэффициентами которого являются вероятности ДВС ξ.

Дифференцирую (3.23) по z, получаем

$$\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k \cdot z^{k-1}. \tag{3.24}$$

Тогда значение $\varphi'(1)$ равно математическому ожиданию

$$\varphi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = M(\xi).$$

Найдём вторую производную

$$\varphi''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k \cdot z^{k-2}.$$

$$\varphi''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot p_k + \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \nu_2 - \nu_1,$$

где ν_2 и ν_1 — начальные моменты 2-го и 1-го порядков.

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \nu_2 - \nu_1^2 = (nu_2 - nu_1) + \nu_1 - \nu_1^2 =$
$= \varphi''(1) + \varphi'(1) - \left(\varphi'(1)\right)^2.$

$$D(\xi) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - \left(\varphi'(1)\right)^2. \tag{3.25}$$