

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МИРЭА – РОССИЙСКИЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.А. ЗАДЕРНОВСКИЙ, А.А. САФРОНОВ

**МЕХАНИКА.
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА**

Курс лекций по физике

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Москва 2018

УДК 53 + 531
ББК 22.34+22.38
315

Задерновский А.А., Сафрнов А.А. Механика. Молекулярная физика и термодинамика: Учебное пособие. /МИРЭА - Российский технологический университет (РТУ МИРЭА). – М., 2018. – 87 с./

Излагаются основные законы и методы классической механики, молекулярной физики и термодинамики. В пособие включены традиционные разделы: кинематика, динамика, статика, колебательное движение, основные понятия молекулярно-кинетической теории, уравнение состояния идеального газа, статистика идеального газа, вопросы термодинамики, включая понятие энтропии. Большое внимание уделено изложению основополагающих принципов, таких, как законы сохранения, закономерности движения абсолютно твердого тела, понятие внутренней энергии, закон равнораспределения энергии по степеням свободы, первое и второе начало термодинамики, циклические процессы и принцип действия тепловых машин.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей дневной, вечерней и заочной форм обучения.

Учебное пособие издается в авторской редакции.

Авторский коллектив: Задерновский Анатолий Андреевич, Сафронов Александр Аркадьевич

Рецензенты:

Астапенко Валерий Александрович, профессор, д.ф.-м.н, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет).

Кротов Юрий Александрович, к.ф.-м.н, доцент, ученый секретарь, Акционерное общество «Научно-исследовательский институт «Полус» имени М.Ф. Стельмаха»

*Издается в электронном виде по решению редакционно-издательского совета
РТУ МИРЭА.*

Минимальные системные требования:

Наличие операционной системы Windows, поддерживаемой производителем.

Наличие свободного места в оперативной памяти не менее 128 Мб.

Наличие свободного места в памяти хранения (на жестком диске) не менее 30 Мб.

Наличие интерфейса ввода информации.

Дополнительные программные средства: программа для чтения pdf-файлов (Adobe Reader).

Подписано к использованию по решению Редакционно-издательского совета

МИРЭА - Российского технологического университета от _____ 2018 г.

Тираж 10

© Задерновский А.А., Сафронов А.А., 2018

© МИРЭА - Российский технологический университет
(РТУ МИРЭА), 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
ЛЕКЦИЯ 1. КИНЕМАТИКА	5
1.1. Математическое введение	5
1.2. Пространственно-временные системы отсчета.....	8
1.3. Модель материальной точки и модель абсолютно твердого тела	9
1.4. Кинематика материальной точки	10
1.5. Ускорение при криволинейном движении	12
1.6. Кинематика движения по окружности.....	14
1.7. Связь линейных и угловых характеристик движения.....	16
ЛЕКЦИЯ 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	16
2.1. Законы Ньютона	16
2.2. Импульс. Закон сохранения импульса	18
2.3. Силы в природе	18
2.3.1. Сила тяготения. Первая и вторая космическая скорость.	19
2.3.2. Сила трения.....	21
2.3.3. Сила упругости.....	22
ЛЕКЦИЯ 3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.....	23
3.1. Работа и мощность.	23
3.2. Кинетическая энергия.....	25
3.3. Поле сил. Потенциальная энергия.....	26
3.4. Закон сохранения и превращения энергии	27
ЛЕКЦИЯ 4. ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА	28
4.1. Поступательное и вращательное движение тела	28
4.2. Момент силы.....	30
4.3. Момент инерции. Теорема Штейнера.....	31
4.4. Основное уравнение динамики вращательного движения тела.....	33
4.5. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса.....	34
4.6. Кинетическая энергия вращающегося тела.....	36
4.7. Работа внешних сил при вращении твердого тела	36
4.8. Колебательное движение твердого тела	37
ЛЕКЦИЯ 5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ	40
5.1. Термодинамические параметры. Равновесные состояния и процессы	41
5.2. Масса и размеры молекул. Молярная масса.....	42
5.3. Идеальный газ.....	44
5.4. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории	46

5.5. Молекулярно-кинетическое толкование абсолютной температуры.....	47
5.6. Число степеней свободы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекулы.....	48
ЛЕКЦИЯ 6. СТАТИСТИКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.....	50
6.1. Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям и энергиям	50
6.2. Наиболее вероятная, средняя арифметическая и среднеквадратичная скорости молекул	52
6.3. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул.....	53
6.4. Барометрическая формула. Распределение Больцмана	54
ЛЕКЦИЯ 7. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ.....	56
7.1. Внутренняя энергия идеального газа	56
7.2. Первое начало термодинамики	59
7.3. Работа, совершаемая идеальным газом при изопроцессах	60
7.4. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам.....	61
7.5. Адиабатный процесс	62
7.6. Политропный процесс	65
ЛЕКЦИЯ 8. ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ	66
8.1. Круговые процессы	66
8.2. Тепловые и холодильные машины	67
8.3. Цикл Карно.	68
8.4. Второе начало термодинамики	70
8.5. Обратимые и необратимые процессы	74
8.6. Энтропия. Закон возрастания энтропии.....	76
8.7. Энтропия идеального газа	78
8.8. Статистическое толкование второго начала термодинамики	80
МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ.....	81
СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)	81
Постулаты специальной теории относительности	81
Сокращение длины и эффект замедления времени	82
РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ	83
Отступления от законов идеального газа	83
Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия	83
Уравнение Ван-дер-Ваальса.....	84
Внутренняя энергия реального газа	85
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	86

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из основных задач преподавания физики в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «МИРЭА - Российский технологический университет» (РТУ МИРЭА) является формирование у студентов фундаментальных основ знаний, которые создают базу для успешного освоения специальных технических дисциплин и позволяют в дальнейшем свободно ориентироваться в области своей профессиональной деятельности.

В соответствии с учебными планами курс физики в РТУ МИРЭА разбит на три части: (1) механика и молекулярная физика, (2) электричество и магнетизм, (3) оптика и атомная физика. Предлагаемое учебное пособие по первой части курса физики предназначено для студентов всех специальностей дневной, вечерней и заочной форм обучения. Материал разбит на 8 лекций. Излагаются основные законы и методы классической механики, молекулярной физики и термодинамики. В учебное пособие включены традиционные разделы: кинематика, динамика, колебательное движение, основные понятия молекулярно-кинетической теории, статистика идеального газа, вопросы термодинамики, включая понятие энтропии. Большое внимание уделено изложению основополагающих принципов, таких, как законы сохранения, закономерности движения абсолютно твердого тела, понятие внутренней энергии, закон равнораспределения энергии по степеням свободы, первое и второе начало термодинамики, циклические процессы и принцип действия тепловых машин. Часть материала собрана в разделе, предназначенном для самостоятельного изучения студентами. В конце учебного пособия приведен библиографический список рекомендуемой литературы.

ЛЕКЦИЯ 1. КИНЕМАТИКА

1.1. Математическое введение

В физике все величины делятся на векторные и скалярные. Вектором называется направленный отрезок, у которого есть величина (модуль вектора) и направление. Вектор обозначается стрелочкой сверху, например \vec{a} , в математике модуль вектора \vec{a} обозначается $|\vec{a}|$, а в физике просто a . Произведением $c\vec{a}$ вектора \vec{a} на скаляр (число) c называется вектор, численно равный ca и направленный вдоль \vec{a} . Любой вектор можно представить в виде

$$\vec{a} = a\vec{e}, \quad (1.1)$$

где \vec{e} - единичный вектор (т.е. его длина равна единице), направленный вдоль вектора \vec{a} .

Для сложения двух векторов \vec{a} и \vec{b} необходимо параллельным переносом перенести начало второго вектора в конец первого, тогда вектор \vec{c} , соединяющий начало первого вектора с концом второго является суммой векторов \vec{a} и \vec{b} (см. рис. 1.1а). Такой метод сложения векторов называется **правилом треугольника**. При сложении большого количества векторов надо начало каждого последующий вектора располагать в конце предыдущего, тогда вектор соединяющий начало первого и конец последнего вектора будет результатом их суммирования.

Складывавать два вектора \vec{a} и \vec{b} можно и по **правилу параллелограмма**. Для этого надо нарисовать вектора исходящими из одной точки и достроить до параллелограмма, тогда вектор \vec{c} , исходящий из начала векторов и совпадающий с диагональю параллелограмма будет суммой векторов \vec{a} и \vec{b} (см. рис. 1.1б).

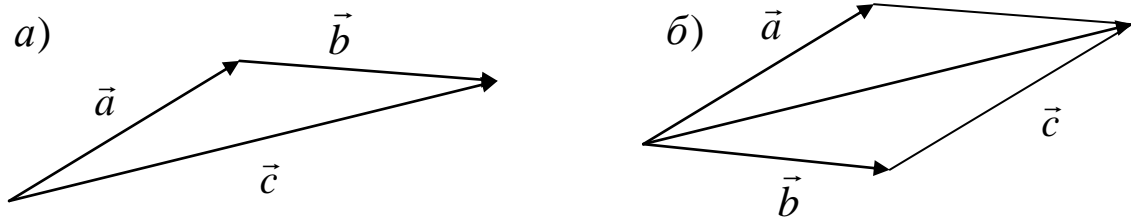


Рис. 1.1

Согласно правилу параллелограмма произвольный вектор \vec{a} в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости можно представить в виде

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}, \quad (1.2)$$

где a_x и a_y - проекции вектора \vec{a} на оси x и y , \vec{i} и \vec{j} - единичные вектора вдоль осей x и y (см. рис. 1.2).

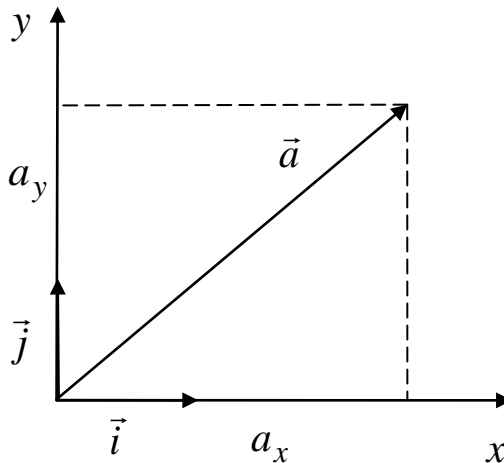


Рис. 1.2

Модуль вектора \vec{a} находится по теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (1.3)$$

В прямоугольной декартовой системе координат трехмерного пространства можно записать уравнения аналогичные (1.2) и (1.3):

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (1.4)$$

где a_z - проекция вектора \vec{a} на ось z , \vec{k} - единичный вектор вдоль оси z ,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.5)$$

Единичные вектора \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} образуют так называемый ортонормированный базис.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними

$$\vec{a}\vec{b} = ab \cos \alpha. \quad (1.6)$$

Векторным произведением двух векторов $[\vec{a}, \vec{b}]$ называется вектор \vec{c} , модуль которого равен произведению модулей векторов \vec{a} и \vec{b} на синус угла между ними, то есть

$$c = ab \sin \alpha. \quad (1.7)$$

Для определения направления вектора \vec{c} существует множество способов, мы будем использовать правило правого буравчика. Под правым буравчиком понимается штопор, состоящий из стержня с правой винтовой нарезкой и перпендикулярной ему ручки. Если нарисовать вектора \vec{a} и \vec{b} , исходящими из одной точки и поворачивать ручку штопора по кратчайшему углу от первого вектора ко второму (от \vec{a} к \vec{b}), то направление, в котором будет закручиваться винтовой стержень, и есть направление вектора \vec{c} . Вектор \vec{c} всегда перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{b} .

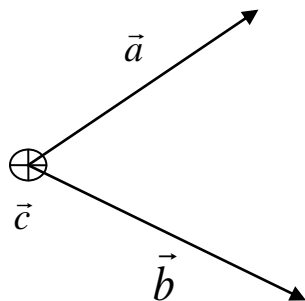


Рис. 1.3а

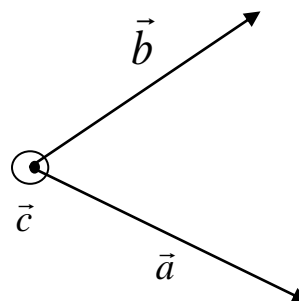


Рис. 1.3б

При расположении векторов \vec{a} и \vec{b} , показанном на рис. 1.3а (1.3б) вектор \vec{c} будет направлен от нас (на нас). Такое направление принято обозначать крестиком (точкой), что символизирует хвост (наконечник) арбалетной стрелы.

Отметим, что из предыдущих определений следует, что $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ и $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.

1.2. Пространственно-временные системы отсчета

Окружающий нас мир представляет собой совокупность различных форм материи, которые находятся в постоянном движении и взаимодействии. Физика – наука, которая изучает наиболее общие законы этих явлений и взаимодействий. Простейшей формой движения является механическое движение, которое состоит в изменении с течением времени взаимного расположения тел или их частей в пространстве. Механика Галилея – Ньютона называется классической механикой. Предметом ее изучения является движение макроскопических материальных тел, совершаемое со скоростями, значительно меньшими скорости света c в вакууме ($c \approx 3 \times 10^8$ м/с).

Движение тел со скоростями, приближающимися к скорости света в вакууме, рассматривается в теории относительности (релятивистская механика, основоположником которой является А.Эйнштейн), а движение микрочастиц – в квантовой механике.

По характеру решаемых задач механику разделяют на кинематику и динамику. В кинематике рассматриваются характеристики движения тел без указания причин, вызывающих это движение. В динамике рассматриваются причины движения тел. Частным случаем динамики является статика, которая изучает условия равновесия тел.

Механическое движение – это изменение расположения материальных тел в пространстве с течением времени. Положение тела в пространстве определяется относительно некоторой системы отсчета, связанной с условно неподвижными телами. Выбор системы координат диктуется соображениями удобства при решении конкретных задач. Например, для положения точки в пространстве чаще всего используется прямоугольная, декартова система координат, в которой положение точки задается радиус-вектором $\vec{r}(t)$. На плоскости задание вектора $\vec{r}(t)$ эквивалентно заданию двух скалярных функций $x(t)$ и $y(t)$, называемых координатами точки (см. рис. 1.4). Координаты $x(t)$ и $y(t)$ являются проекциями радиус-вектора $\vec{r}(t)$ на оси координат. В пространстве положение точки задается тройкой координат $x(t), y(t), z(t)$.

При решении задач, связанных с движением по окружности, более удобными являются так называемые полярные координаты r , $\varphi(t)$, где r - модуль радиус-вектора точки, φ - угол поворота этого радиус-вектора относительно какой-либо оси (см. рис. 1.4). Связь между парами чисел (x, y) и (r, φ) очевидна

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.8)$$

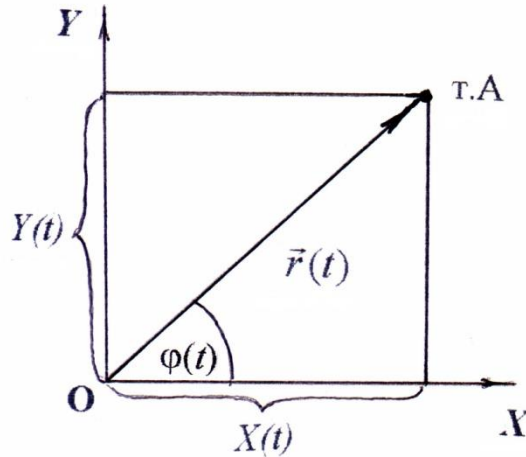


Рис. 1.4

При проведении численных расчетов следует правильно использовать размерности физических величин. В настоящее время в физике общепотребительной является Международная система измерений СИ. В частности, в механике в качестве основных размерностей используются размерность длины $[x] = \text{м}$ (метр), размерность времени $[t] = \text{с}$ (секунда) и размерность массы $[m] = \text{кг}$ (килограмм).

1.3. Модель материальной точки и модель абсолютно твердого тела

В качестве объектов исследования в классической механике служат материальные тела. При изучении движения тел в классической механике используются две физические модели этих тел, а именно, модель материальной точки и модель абсолютно твердого тела.

Материальная точка – физическая модель тела, обладающего массой, размерами которого можно пренебречь в сравнении с другими характерными размерами задачи. Иначе, когда размеры и форма тела не влияют на характеристики движения. Например, при изучении движения планет вокруг Солнца их можно принимать за материальные точки. При этом решение задачи существенно упрощается.

Абсолютно твердое тело – другая физическая модель. Эта модель используется при решении таких задач, когда на характеристики движения тела ока-

зывают влияние не только масса, но и размеры и форма тела, причем деформацией тела можно пренебречь. Например, при изучении вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Использование физических моделей – материальной точки и абсолютно твердого тела существенно упрощает решение ряда задач механики.

1.4. Кинематика материальной точки

В процессе движения конец радиус-вектора точки $\vec{r}(t)$ описывает линию, которая называется траекторией. В зависимости от вида траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным. Частным случаем криволинейного движения является движение точки по окружности.

Путь (или длина пути) ΔS представляет собой полное расстояние, пройденное точкой при движении вдоль траектории. Путь - скалярная величина, то есть число, причем положительное, которое в процессе движения может только увеличиваться. **Перемещением точки** за некоторый промежуток времени называется вектор $\Delta\vec{r}$, соединяющий начальное и конечное положения точки в пространстве. Обозначим радиус – векторы начального и конечного положений точки через \vec{r}_1 и \vec{r}_2 (см. рис. 1.5), тогда по правилу треугольника

$$\vec{r}_1 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_2, \quad (1.9)$$

откуда

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (1.10)$$

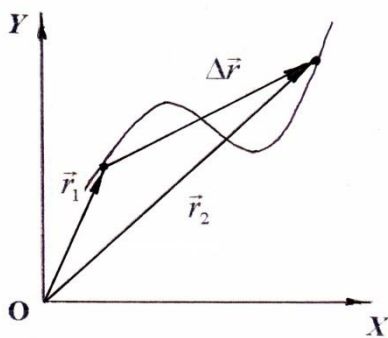


Рис. 1.5

При сближении начала и конца траектории Δr будет уменьшаться, и стремиться к длине пути ΔS , пройденному точкой. В пределе бесконечно малого перемещения можно заключить, что

$$dr = dS. \quad (1.11)$$

Скорость. Пусть перемещение $\Delta\vec{r}$ между точками траектории 1 и 2 совершено за время Δt (см. рис. 1.5). **Средней скоростью** $\langle \vec{v} \rangle$ на участке траек-

тории 1 – 2 называется вектор, равный отношению перемещения $\Delta \vec{r}$ к интервалу времени Δt

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.12)$$

Мгновенная скорость \vec{v} определяется как первая производная радиус-вектора $\vec{r}(t)$ по времени

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.13)$$

В физике производную по времени принято обозначать точкой сверху, поэтому (1.13) часто записывают в виде

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad (1.14)$$

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в каждой ее точке (рис. 1.6). Размерность скорости в системе СИ $[v] = \text{м/с}$.

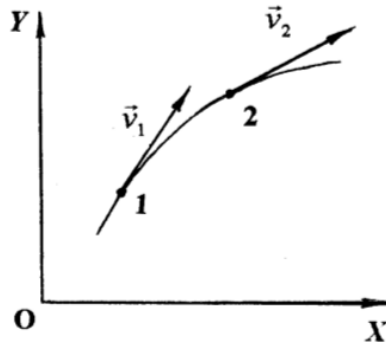


Рис. 1.6

Используя условие (1.11) легко показать, что

$$v = \frac{dS}{dt} \text{ или } v = \dot{S}. \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что путь ΔS_{12} , проходимый точкой за время от t_1 до t_2 , может быть представлен в виде интеграла от модуля скорости по времени

$$\Delta S_{12} = \int_{t_1}^{t_2} v dt. \quad (1.16)$$

Иногда используется понятие **среднепутевой скорости** в виде

$$\langle v \rangle_{\text{пут.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (1.17)$$

где ΔS - путь, проходимый точкой за время Δt . Среднепутевая скорость является скалярной величиной, причем $\langle v \rangle_{\text{пут.}} \geq 0$.

Используя (1.4) можно разложить скорость \vec{v} по ортонормированному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}. \quad (1.18)$$

Согласно (1.13)

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt} \text{ или } v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z} \quad (1.19)$$

Модуль скорости выражается через ее составляющие по осям координат v_x, v_y, v_z (см. 1.5) в виде

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.20)$$

Ускорение. Ускорение это первая производная скорости \vec{v} по времени или вторая производная радиус-вектора \vec{r} по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \text{ или } \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}. \quad (1.21)$$

Размерность ускорения в СИ $[a] = \text{м}/\text{с}^2$. При прямолинейном движении векторы скорости и ускорения направлены вдоль одной прямой. В общем случае их направления не совпадают. Используя (1.4), (1.21) и (1.5) получим

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (1.22)$$

где a_x, a_y, a_z - проекции вектора ускорения \vec{a} на оси прямоугольной декартовой системы координат,

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}, \quad (1.23)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.24)$$

1.5. Ускорение при криволинейном движении

Любой достаточно малый участок криволинейной траектории представляет собой дугу некоторой окружности. При движении тела по окружности принято раскладывать вектор \vec{a} на нормальную \vec{a}_n и тангенциальную \vec{a}_τ составляющие (см. рис. 1.7)

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \quad (1.25)$$

или

$$\vec{a} = a_n \vec{n} + a_\tau \vec{\tau} \quad (1.26)$$

где \vec{n} - единичный вектор, направленный к центру окружности, $\vec{\tau}$ - единичный вектор, направленный по касательной к окружности в данной точке вдоль скорости. Модуль полного ускорения согласно (1.3) находится как

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.27)$$

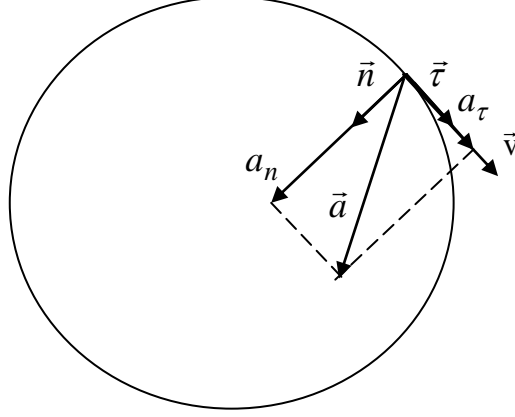


Рис. 1.7

Отметим, что направление вектора \vec{a}_τ совпадает с направлением скорости \vec{v} при ускоренном движении, и противоположно направлению скорости \vec{v} при замедленном движении. Найдем выражения для модулей a_τ и a_n . Представим скорость \vec{v} в виде

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}, \quad (1.28)$$

тогда вектор ускорения, согласно определению (1.21), равен

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (1.29)$$

При движении точки по криволинейной траектории вектор $\vec{\tau}$ изменяет свое направление в пространстве, следовательно, он изменяется и во времени. Найдем $d\vec{\tau}/dt$. Для этого рассмотрим две близкие точки траектории 1 и 2 (рис. 1.8). Напомним, что углом в радианах называется отношение длины дуги ΔS , на которую он опирается, к радиусу окружности R . Тогда из рис. 1.8 следует, что

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta S}{R} = \frac{v\Delta t}{R}, \quad (1.30)$$

причем $\Delta\vec{\tau} = \Delta\tau \cdot \vec{n}$, следовательно

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \frac{v}{R} \cdot \vec{n}. \quad (1.31)$$

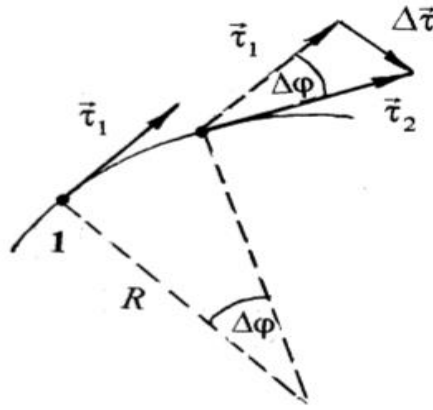


Рис. 1.8

Используя (1.29) и (1.31), получаем окончательное выражение для полного ускорения

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}. \quad (1.32)$$

Из (1.32) следует, что модули тангенциального a_τ и нормального a_n ускорений равны

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.33)$$

при этом тангенциальное ускорение a_τ определяет быстроту изменения скорости по модулю, а нормальное ускорение a_n - по направлению.

1.6. Кинематика движения по окружности

При изучении движения точки по окружности удобно ввести так называемые угловые характеристики движения. Положение точки определяется центральным углом поворота $\varphi(t)$ (рис. 1.9). Пусть за время Δt точка повернулась на угол $\Delta\varphi$, тогда можно ввести понятие средней угловой скорости следующим образом

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (1.34)$$

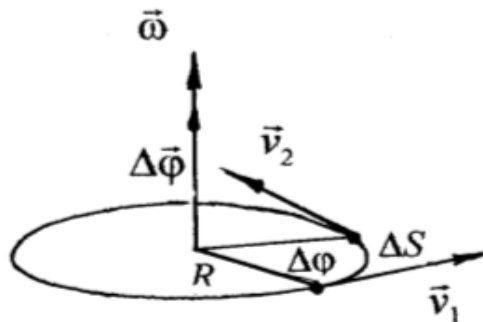


Рис. 1.9

Величина мгновенной угловой скорости ω характеризует быстроту изменения угла поворота φ и определяется аналогично (1.13)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \omega = \dot{\varphi}. \quad (1.35)$$

Угловое перемещение $\Delta\vec{\varphi}$ и угловая скорость $\vec{\omega}$ являются векторами, их направление условно связывается с осью вращения и выбирается по правилу правого винта при его вращении в направлении вектора скорости \vec{v} (такие векторы называются псевдовекторами). При этом связь между векторами \vec{v} , $\vec{\omega}$, \vec{R} дается в виде векторного произведения

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]. \quad (1.36)$$

При равномерном движении точки по окружности ($\omega = \text{const}$) можно ввести период вращения T , равный времени одного полного оборота. Поскольку за время $\Delta t = T$ происходит поворот точки на угол $\Delta\varphi = 2\pi$, то угловая скорость $\omega = \Delta\varphi/\Delta t = 2\pi/T$ и, следовательно,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.37)$$

Число оборотов, совершаемых точкой при равномерном движении по окружности в единицу времени, называется частотой вращения и определяется как

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (1.38)$$

Следовательно, между угловой скоростью ω и частотой вращения n имеется связь

$$\omega = 2\pi n. \quad (1.39)$$

Угловое ускорение ε характеризует быстроту изменения угловой скорости ω и вводится аналогично (1.21)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (1.40)$$

Угловое ускорение – векторная величина. Направление вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ также связывается с осью вращения. Направление $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении и противоположно по направлению $\vec{\omega}$ при замедленном вращении.

Размерность угловых характеристик движения в СИ: $[\varphi] = \text{рад}$, $[\omega] = \text{рад/с}$, $[\varepsilon] = \text{рад/с}^2$, $[T] = \text{с}$, $[n] = \text{с}^{-1}$.

1.7. Связь линейных и угловых характеристик движения

Из определения угла поворота в радианах следует, что

$$\Delta S = R\Delta\varphi. \quad (1.41)$$

Поделив обе части равенства (1.41) на время поворота Δt и устремив интервал времени Δt к нулю, получим связь между линейной и угловой скоростями движения точки по окружности

$$\frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}, \text{ то есть } v = \omega R \quad (1.42)$$

Еще раз дифференцируя по времени полученное соотношение (1.42), найдем связь между линейным (тангенциальным) и угловым ускорениями

$$\frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}, \text{ то есть } a_\tau = \varepsilon R \quad (1.43)$$

Используя (1.33), (1.42) и (1.39), найдем связь нормального ускорения a_n с угловой скоростью ω и частотой n

$$a_n = \omega^2 R = 4\pi^2 n^2 R \quad (1.44)$$

ЛЕКЦИЯ 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Динамика – раздел механики, изучающий причины, вызывающие движение. В основе динамики лежат три закона Ньютона, связанные с понятием силы и массы.

Сила является мерой воздействия, оказываемого на данное тело со стороны другого тела или тел. Сила \vec{F} – величина векторная, если на тело действуют несколько сил, то результирующее воздействие будет таково, как если бы на тело действовала одна сила, равная векторной сумме исходных сил, такая сила называется равнодействующей

$$\vec{F} = \sum_j \vec{F}_j. \quad (2.1)$$

Масса – скалярная величина, характеризующая инертность тела, то есть способность тела приобретать то или иное ускорение под действием данной силы.

2.1. Законы Ньютона

Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отчета. При решении физических задач встает вопрос о выборе системы отсчета (см. раздел 1.2). Решение этого вопроса связано с первым законом Ньютона, иначе называемом законом инерции: тело пребывает в состоянии покоя или равномерного прямоли-

нейного движения ($\vec{v} = \text{const}$), если сумма сил, действующих на тело, равна нулю ($\vec{F} = 0$). Системы отчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются инерциальными. Системы отсчета, в которых первый закон Ньютона не выполняется, называются неинерциальными и в дальнейшем нами рассматриваться не будут.

Первый закон Ньютона утверждает равноправие всех инерциальных систем: во всех инерциальных системах процессы, происходящие с телом, будут протекать одинаково. В механике этот принцип носит название принципа относительности Галилея.

Второй закон Ньютона. Второй закон Ньютона устанавливает количественное соотношение между равнодействующей силой \vec{F} , действующей на тело массы m , и ускорением \vec{a} , приобретаемым телом под действием этой силы. В инерциальных системах отсчета второй закон Ньютона записывается в виде

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.2)$$

Единица измерения силы в СИ определяется на основе уравнения (2.2) с учетом размерностей массы и ускорения. Размерность силы $[F] = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 = \text{Н}$ (Ньютон).

Третий закон Ньютона. Третий закон Ньютона утверждает, что при взаимодействии двух тел между ними возникают силы, равные по величине и противоположные по направлению. То есть, если со стороны первого тела на второе действует сила \vec{F}_{12} , а со стороны второго на первое сила \vec{F}_{21} , то имеет место соотношение

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad F_{12} = F_{21} \quad (2.3)$$

Следует иметь в виду, что эти силы приложены к разным телам, то есть каждое тело находится под действием только одной силы.

Применяя третий закон Ньютона к системе из нескольких взаимодействующих тел, получим, что сумма всех внутренних сил, то есть сил, действующих между телами внутри системы, будет равна нулю

$$\sum_j \vec{F}_{j\text{внутр.}} = 0. \quad (2.4)$$

Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется замкнутой или изолированной.

2.2. Импульс. Закон сохранения импульса

Считая массу тела m постоянной и используя определение ускорения (1.21), перепишем второй закон Ньютона (2.2) в виде

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.5)$$

где вектор $\vec{p} = m\vec{v}$ называется импульсом тела.

Рассмотрим систему взаимодействующих между собой тел. Для каждого из этих тел можно записать уравнение типа (2.5). Если, затем, все эти уравнения сложить, то получим

$$\sum_j \frac{d}{dt}(m_j \vec{v}_j) = \frac{d}{dt}(\sum_j m_j \vec{v}_j) = \sum_j \vec{F}_{j\text{внутр.}} + \sum_j \vec{F}_{j\text{внешн.}} \quad (2.6)$$

Поскольку сумма внутренних сил равна нулю (см. (2.4)), то уравнение (2.5) для системы тел будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \sum_j m_j \vec{v}_j = \vec{F}, \quad (2.7)$$

где $\vec{F} = \sum_j \vec{F}_{j\text{внешн.}}$ - сумма всех внешних сил, действующих на систему тел.

Если система тел является замкнутой, то $\vec{F} = 0$, и суммарный импульс такой системы остается постоянным

$$\sum_j m_j \vec{v}_j = \sum_j \vec{p}_j = \text{const.} \quad (2.8)$$

Полученное утверждение (2.8) представляет собой один из фундаментальных законов природы – закон сохранения импульса.

2.3. Силы в природе

В природе мы встречаемся с проявлением всего лишь четырёх типов сил: гравитационных, электромагнитных, сильных (ядерных) и слабых.

Гравитационные силы, или силы всемирного тяготения, действуют между всеми телами, имеющими массу, - все тела притягиваются друг к другу. Обычно это притяжение существенно лишь тогда, когда хотя бы одно из взаимодействующих тел так же велико, как Земля или Луна. Иначе эти силы столь малы, что ими можно пренебречь.

Электромагнитные силы действуют между частицами, имеющими электрические заряды. Сфера их действия особенно разнообразна. В атомах, молекулах, твёрдых, жидких и газообразных телах, живых организмах именно элек-

тромагнитные силы являются главными. Такие, казалось бы, чисто механические силы, как силы трения и упругости, имеют электромагнитную природу.

Ядерные силы действуют между частицами в атомных ядрах и определяют свойства ядер. Область действия ядерных сил очень ограничена. Они заметны только внутри атомных ядер (т. е. на расстояниях порядка 10^{-15} м). Уже на расстояниях между частицами порядка 10^{-13} м (в тысячу раз меньших размеров атома — 10^{-10} м) они не проявляются совсем.

Слабые взаимодействия вызывают взаимные превращения элементарных частиц, определяют радиоактивный распад ядер, реакции термоядерного синтеза. Они проявляются на ещё меньших расстояниях, порядка 10^{-17} м.

В механике обычно имеют дело с тремя видами сил - силами тяготения, силами трения и силами упругости.

2.3.1. Сила тяготения. Первая и вторая космическая скорость.

Опыт показывает, что между двумя телами с массами m_1 и m_2 существует взаимное притяжение, называемое гравитационным (закон всемирного тяготения). Для точечных масс, т.е. когда размеры тел значительно меньше расстояния r между ними, закон всемирного тяготения утверждает, что сила гравитационного взаимодействия будет пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.9)$$

Отметим, что закон всемирного тяготения будет так же выполняться для двух шаров, плотность которых равномерно распределена по объему. Такие два шара могут располагаться сколь угодно близко друг к другу, а под r в (2.9) следует понимать расстояние между их центрами.

Из (2.9) следует, что масса в данном случае является величиной, характеризующей взаимное притяжение тел (гравитационная масса). С другой стороны, ускорение, приобретаемое телом под действием силы (2.2) также определяется массой, которая, в отличие от гравитационной, называется инерционной. Вообще говоря, нет оснований утверждать, что гравитационная и инерционная массы – одна и та же характеристика тела. Но поскольку на основании опытных данных можно заключить, что обе массы пропорциональны друг другу, выбором соответствующего коэффициента пропорциональности в законе всемирного тяготения (2.9) можно добиться равенства гравитационной и инерционной масс. Гравитационная постоянная $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11}$ Нм²/кг² подобрана таким образом, чтобы гравитационная масса измерялась в килограммах, сила гравитаци-

онного притяжения в Ньютонах, а расстояние – в метрах. В окончательном виде закон всемирного тяготения (см. рис. 2.1) имеет вид

$$F_{12} = F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.10)$$

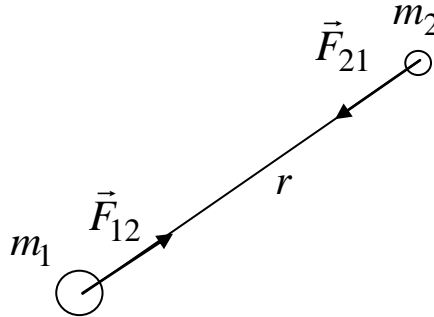


Рис. 2.1

Предположим, что Земля представляет собой идеальный шар, тогда можно считать, что сила, приложенная к любому телу, находящемуся вблизи ее поверхности, направлена к центру Земли и равна по величине

$$F = G \frac{mM}{R_3^2} = mg, \quad (2.11)$$

где M – масса Земли ($M \cong 6 \times 10^{24}$ кг), R_3 – радиус Земли ($R_3 \cong 6400$ км), m – масса тела, находящегося вблизи поверхности Земли. Величина $g = GM/R_3^2 \cong 9,8 \text{ м/с}^2$ имеет размерность ускорения и называется ускорением свободного падения, которое направлено к центру Земли и одинаково для всех тел вблизи ее поверхности. Сила $F = mg$ (2.11) называется силой тяготения или силой тяжести.

Силу тяжести не следует путать с **силой веса** – силой, с которой тело давит на неподвижную относительно него опору или растягивает нить, на которой оно подвешено.

Закон всемирного тяготения (2.11) позволяет рассчитать первую космическую скорость v_1 , которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли, т. е. вращалось с постоянной скоростью вокруг Земли на расстоянии от ее поверхности, много меньшем ее радиуса. Сила тяготения должна сообщать телу нормальное ускорение $a_n = v_1^2/R$. На основании (2.2) и (2.11) получаем

$$m \frac{v_1^2}{R_3} = mg, \quad (2.12)$$

откуда скорость движения тела на орбите вокруг Земли (первая космическая скорость) равна

$$v_1 = \sqrt{gR_3} \cong 7,9 \text{ км/с.} \quad (2.13)$$

Разумеется, для вывода тела на околоземную орбиту следует сообщить ему скорость по касательной к Земле. Если запустить тело вертикально вверх с первой космической скоростью, оно упадет обратно на Землю.

Второй космической скоростью v_2 называется скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно вышло из сферы земного притяжения. Расчет дает для второй космической скорости значение $v_2 \cong 11,2 \text{ км/с.}$

2.3.2. Сила трения.

При контактном взаимодействии двух тел, движущихся друг относительно друга, между ними возникает сила контактного происхождения. Природа этой силы носит электромагнитный характер и обусловлена взаимодействием электронных оболочек атомов взаимодействующих тел.

Составляющая силы контактного взаимодействия направленная по нормали к поверхности представляет собой **силу реакции опоры** \vec{N} , а составляющая вдоль границы раздела двух тел – **силу трения** $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 2.2). Направление силы трения скольжения всегда противоположно скорости тела вдоль границы раздела. Обычно, величина сила трения скольжения $F_{\text{тр}}$ пропорциональна величине силы реакции опоры N , то есть

$$F_{\text{тр}} = kN, \quad (2.14)$$

где k – коэффициент трения (безразмерный), определяемый характером поверхности тел.

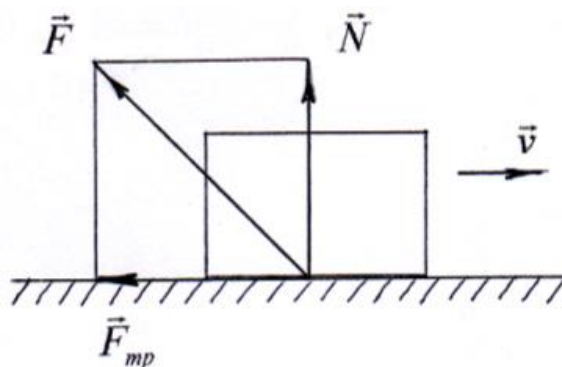


Рис. 2.2

Кроме силы трения скольжения вводится понятие **силы трения покоя**. Из повседневного опыта известно, что для того, чтобы сдвинуть тело, лежащее на шероховатой поверхности, необходимо приложить достаточно большую силу. Сила, удерживающая тело в покое, называется силой трения покоя. Её величина не постоянна и изменяется от нуля до максимального значения, равного

силе трения скольжения. На рис. 2.3 представлена зависимость модуля силы трения $F_{тр}$ от модуля приложенной к телу силы F .

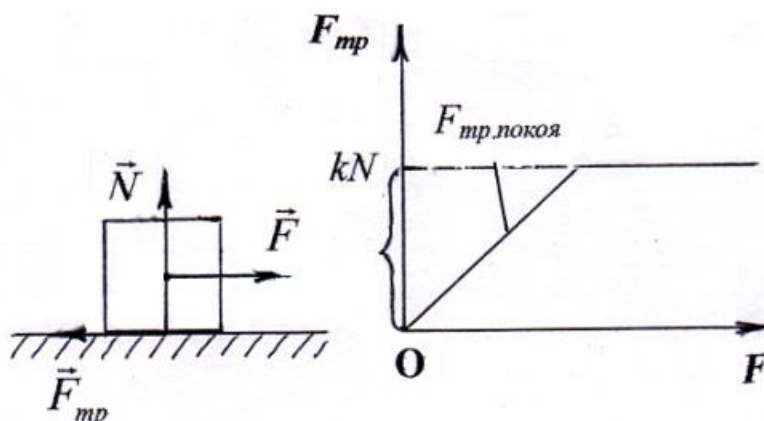


Рис. 2.3

2.3.3. Сила упругости.

Под действием внешних сил различные части тела смещаются друг относительно друга, т. е. тела деформируются. Упругой деформацией называется такая деформация, при которой после прекращения действия внешних сил тело восстанавливает свою первоначальную форму. Рассмотрим деформацию, возникающую при растяжении (или сжатии) тела. Если первоначальная длина тела l под действием силы увеличилась до l_1 , то величина $x = l_1 - l$ называется абсолютным удлинением тела, а величина $\varepsilon = x/l$ - относительным удлинением.

Если изменение длины достаточно мало, то упругая сила, возникающая в деформированном теле и противодействующая действию внешней силы, пропорциональна величине абсолютного удлинения

$$F = kx, \quad (2.15)$$

где k - коэффициент пропорциональности (размерный), называемый коэффициентом упругости или жесткостью тела.

Если внешняя сила равномерно распределена по некоторой поверхности тела S , то используют понятие нормального напряжения $\sigma = F/S$, под действием которого находится тело. При упругих деформациях напряжение σ пропорционально относительному удлинению тела ε , то есть

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.16)$$

где E - модуль упругости или модуль Юнга материала тела.

Выражения (2.15) и (2.16), описывающие связь между величиной внешней силы или напряжения и изменением длины тела (например, сжатие или

растяжение пружины), выражают закон Гука, который справедлив в пределах допущения малой упругой деформации.

ЛЕКЦИЯ 3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

3.1. Работа и мощность.

Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{r}$, совершаемое телом под действием силы \vec{F} . Скалярное произведение двух этих векторов

$$(\vec{F}d\vec{r}) = F \cdot dr \cdot \cos\alpha = dA \quad (3.1)$$

называется элементарной работой, совершаемой силой \vec{F} при перемещении $d\vec{r}$. Здесь α - угол между направлением силы и направлением перемещения точки ее приложения (рис. 3.1). Когда сила при перемещении изменяется, то работа силы при перемещении тела от начального положения 1 до конечного положения 2 равна интегралу

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}d\vec{r}). \quad (3.2)$$

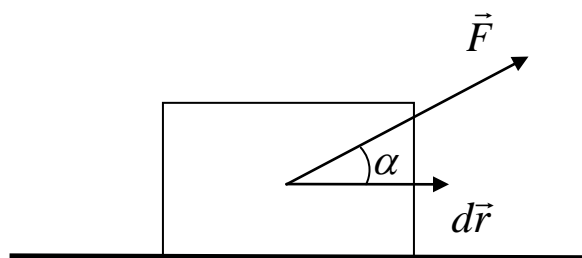


Рис. 3.1

Если сила F остается постоянной по величине и направлению, то из-под знака интеграла можно вынести модуль силы и работа, с учетом (3.1), будет равна

$$A_{12} = F \int_1^2 \cos\alpha dr. \quad (3.3)$$

Под интегралом (3.3) стоит проекция элементарного перемещения $d\vec{r}$ на направление действия силы. Поэтому этот интеграл равен сумме проекций всех элементарных перемещений на указанное направление.

Примером, иллюстрирующим разобранный случай, служит работа силы тяжести вблизи поверхности Земли при движении тела по произвольной траектории. Поскольку величина силы тяготения, действующей на материальную точку массы m , постоянна и равна $F = mg$, а ее направление при малых перемещениях также можно считать постоянным, то длина проекции траектории на

направление силы тяжести равно изменению высоты тела Δh над поверхностью Земли. Следовательно, работа силы тяжести равна $A = mg\Delta h$.

Пусть теперь материальная точка совершает одномерное движение вдоль оси x под действием силы, направление которой постоянно и образует с осью x угол α . При этом модуль силы может изменяться как функция координаты x . Тогда $\cos\alpha$ можно вынести из-под знака интеграла (3.2) и выражение для работы примет следующий вид

$$A = \cos\alpha \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (3.4)$$

Применим этот результат для определения работы, совершаемой при деформации пружины, подчиняющейся закону Гука (2.15). При медленном растяжении пружины необходимо, чтобы в каждый момент времени действующая на пружину внешняя сила F равнялась бы по абсолютной величине и была бы противоположна по направлению упругой силе (2.15), т.е. $F = kx$. Подставляя это выражение для силы в (3.4) и учитывая, что $\cos\alpha = 1$ (направление силы и перемещение совпадают, $\alpha = 0$), получим, что для того, чтобы удлинить первоначально нерастянутую пружину на x нужно совершить работу

$$A = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}. \quad (3.5)$$

Очевидно, что если пружина уже была растянута на x_1 , то для растяжения до x_2 необходимо совершить дополнительную работу

$$A = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (3.6)$$

Если на тело действует несколько сил \vec{F}_j , то элементарная работа этих сил может быть представлена в виде

$$dA = \left(\sum_j \vec{F}_j \right) d\vec{r} = \sum_j (\vec{F}_j d\vec{r}) = \sum_j dA_j.$$

Иными словами, работа суммы нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из этих сил, то есть

$$A = \sum_j A_j. \quad (3.7)$$

Силы, действующие на материальную точку, могут зависеть от времени, т. е. $\vec{F} = \vec{F}(t)$. Для расчета работы такой силы перемещение $d\vec{r}$ можно представить в виде $d\vec{r} = \vec{v}dt$ (см. (1.13)). Тогда работа, совершаемая силой за промежуток времени от t_1 до t_2 , согласно (3.2)

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt. \quad (3.8)$$

Чтобы охарактеризовать способность какой-либо машины совершать работу, важно знать, за какое время эта работа совершается. Так вводится понятие мощности силы: мощностью P называется работа, совершаемая силой за единицу времени

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (3.9)$$

Согласно (3.8), если на тело, движущееся в данный момент времени со скоростью \vec{v} , действует сила \vec{F} , то мощность этой силы равна

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (3.10)$$

В системе СИ размерность работы $[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$ (Джоуль), а размерность мощности $[P] = \text{Дж/с} = \text{Вт}$ (Ватт).

3.2. Кинетическая энергия

Если до начала действия силы тело покоилось, то в результате совершения силой работы тело приобретает некоторую скорость \vec{v} . Найдем связь между работой силы и скоростью, приобретаемой телом.

Для простоты рассмотрим случай постоянной силы F , действующей вдоль направления движения тела. Элементарная работа на основании (3.1) с учетом второго закона Ньютона, записанного в виде (2.5), равна

$$dA = F dS = \frac{d(mv)}{dt} \cdot v dt = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (3.11)$$

Если до совершения силой работы тело покоилось, то после совершения работы A тело приобрело скорость v , причем

$$A = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.12)$$

Величина $T = mv^2/2$ называется кинетической энергией тела. Таким образом, в результате совершения над покоящимся телом работы A у него появляется кинетическая энергия $T = A$.

Выражение (3.12) можно обобщить и на случай движения тела по произвольной траектории под действием произвольной силы. Воспользовавшись уравнениями (2.5) и (3.8) в общем случае получаем

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1, \quad (3.13)$$

то есть работа силы (или равнодействующей всех сил), действующей на материальную точку, идет на изменение ее кинетической энергии. При этом, если $A_{12} > 0$, то кинетическая энергия возрастает и $T_2 > T_1$, а если $A_{12} < 0$, то убывает. Размерность кинетической энергии в СИ совпадает с размерностью работы, т.е. $[T] = \text{Дж}$.

3.3. Поле сил. Потенциальная энергия

Пространство, в каждой точке которого действует сила, называется полем сил. Так, вблизи поверхности Земли на тело действует сила тяжести, следовательно, тело находится в поле силы тяготения. Если силы, действующие на тело, не изменяются во времени, то такое поле сил называется стационарным.

Среди различных полей сил существуют такие, в которых работа силы над телом при его перемещении из начальной точки в конечную точку не зависит от вида траектории тела. Или, другими словами, работа силы по замкнутой траектории равна нулю. Такие поля сил называются консервативными, или потенциальными.

Поля сил, в которых не выполняются вышеуказанные условия, называются неконсервативными. Типичной неконсервативной силой является сила трения. Действительно, поскольку сила трения направлена противоположно скорости тела, ее работа по замкнутой траектории не может быть равной нулю.

Если поле сил является консервативным, то каждой точке поля можно поставить в соответствие значение некоторой функции $U(x, y, z)$ такой, что разность значений этой функции в точках 1 и 2 будет равно работе этих сил при переходе тела из точки 1 в точку 2 (см. примеры, разобранные в разделе 3.1).

$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (3.14)$$

Функция U называется потенциальной энергией тела во внешнем поле.

Из (3.14) видно, что добавление к функции U произвольной постоянной величины не изменяет значения работы при переходе тела из точки 1 в точку 2. Поэтому потенциальная энергия U определяется с точностью до произвольной постоянной, которую выбирают из соображений удобства. Обычно потенциальную энергию считают равной нулю в какой-либо точке пространства, а энергию в других точках отсчитывают от этого условного уровня.

Конкретный вид функции U зависит от характера поля. В качестве примера определим потенциальную энергию тела в поле тяготения вблизи поверхности Земли. В разделе 3.1 было показано, что работа силы тяготения равна $A = mg\Delta h = mg(h_1 - h_2)$ и не зависит от вида траектории. Из (3.14) следует, что в этом случае потенциальная энергия равна

$$U = mgh, \quad (3.15)$$

где высота h отсчитывается от произвольного уровня, например, от поверхности Земли.

Аналогично найдем потенциальную энергию сжатой (растянутой) пружины, подчиняющейся закону Гука. Поскольку, согласно (3.6) работа упругой силы не зависит от формы траектории, то сравнение (3.6) с (3.14) показывает, что потенциальная энергия сжатой (растянутой) пружины равна

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (3.16)$$

При этом произвольная постоянная выбирается из условия, что потенциальная энергия недеформированной пружины ($x = 0$) равна нулю.

Зная вид функции потенциальной энергии $U(x, y, z)$, можно найти силу, действующую на тело в каждой точке пространства. Рассмотрим, например, перемещение тела вдоль оси x на dx . При этом поле сил совершает работу $dA = \vec{F} \cdot d\vec{x} = F_x dx$. Согласно (3.14) эта работа может быть представлена как убыль потенциальной энергии $dA = -dU$. Из сравнения полученных выражений для элементарной работы dA следует, что $F_x dx = -dU$. Следовательно

$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \quad (3.17)$$

В общем случае можно получить

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \quad F_y = -\frac{dU}{dy}, \quad F_z = -\frac{dU}{dz}. \quad (3.18)$$

Соотношения (3.18) можно записать в другом, более общем виде, используя понятие оператора $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$, обозначаемого иначе как grad, а именно

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot U = -\text{grad} U. \quad (3.19)$$

Для центральной силы $F(r)$, которая является функцией только расстояния r от некоторого силового центра, можно записать

$$F(r) = -\frac{dU}{dr}. \quad (3.20)$$

3.4. Закон сохранения и превращения энергии

Пусть на тело действует консервативная сила, определяемая потенциальной энергией U , и неконсервативная сила. Тогда при переходе тела из точки 1 в точку 2 поля над ним будет совершена работа $A_{12} = A_k + A_{н/к}$, где A_k - работа

консервативной силы, $A_{н/к}$ - работа неконсервативной силы. Согласно (3.13)

$A_{12} = T_2 - T_1$, а из (3.14) следует, что $A_к = U_1 - U_2$. В результате, получим

$$T_2 + U_2 - (T_1 + U_1) = A_{н/к}. \quad (3.21)$$

Определим полную механическую энергию тела E как сумму кинетической T и потенциальной U энергий

$$E = T + U, \quad (3.22)$$

тогда (3.21) можно записать

$$E_2 - E_1 = A_{н/к}, \quad (3.23)$$

то есть изменение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил, в этом и заключается закон превращения механической энергии. Если работа неконсервативных сил равна нулю $A_{н/к} = 0$, то полная механическая энергия сохраняется

$$E = T + U = \text{const}. \quad (3.24)$$

В том случае, если механическая система состоит из нескольких невзаимодействующих тел, то законы сохранения и превращения энергии (3.23) и (3.24) сохраняют свой вид, если под E подразумевается энергия, складывающаяся из суммарных кинетических и потенциальных энергий всех тел, составляющих систему.

Согласно (3.24) полная механическая энергия невзаимодействующих тел, на которые действуют только консервативные силы, остается постоянной. Соотношение (3.24) является законом сохранения механической энергии. Если на тела механической системы помимо консервативных сил действуют также неконсервативные силы, например, силы трения, то полная механическая энергия системы не сохраняется, а изменение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил.

ЛЕКЦИЯ 4. ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Поступательное и вращательное движение тела

В предыдущих главах рассматривалось движение тел, при котором их размеры и форма не влияли на характеристики движения, и тела можно было рассматривать как материальные точки. Однако часто размеры и форма тела оказывают существенное влияние на характер его движения. Пренебрегая деформацией твердого тела в процессе движения, будем использовать физическую модель абсолютно твердого тела (см. раздел 1.3).

Любое сложное движение твердого тела состоит из более простых движений - поступательного и вращательного.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором каждая линия, соединяющая любые точки тела, сохраняет свое направление в пространстве. При поступательном движении тело движется, не поворачиваясь, и перемещение всех точек, за какой либо промежуток времени одинаково. Это значит, что при поступательном движении, зная движение какой-либо одной точки тела, можно определить движение всех остальных точек. Поступательное движение твердого тела описывается движением его центра масс, т.е. сводится к описанию движения материальной точки с помощью второго закона Ньютона (см. раздел 2.1).

Вращательным движением называется такое движение, при котором траектории всех точек тела являются концентрическими окружностями с центрами на одной прямой, называемой осью вращения. Ось может, как двигаться, так и покоиться. В дальнейшем ограничимся только плоским движением твердого тела, когда во время движения любая точка тела остается в одной и той же плоскости.

Положение твердого тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси полностью определяется углом поворота $\varphi(t)$. Угловая скорость ω и угловое ускорение ε твердого тела определяются точно так же, как и при движении материальной точки по окружности (см. раздел 1.7). Когда тело одновременно участвует в поступательном и вращательном движениях, говорят о сложном движении твердого тела.

При рассмотрении движения твердого тела его всегда можно мысленно разбить на столь малые элементы, чтобы их размеры были малы по сравнению с расстояниями, существенными в данной задаче. Тогда движение этих элементов можно представить как движение материальных точек. Так как твердое тело считается недеформируемым, то все расстояния между отдельными точками тела остаются неизменными. Написав уравнения движения для отдельных элементов тела, можно определить движение всего твердого тела.

Центр инерции тела. Установим закон движения одной фиксированной точки твердого тела C , называемой центром масс, или центром инерции. В разделе 2.2 было получено уравнение движения (2.7) для системы взаимодействующих между собой материальных точек, а именно

$$\frac{d}{dt} \sum_j m_j \vec{v}_j = \vec{F}, \quad (4.1)$$

где \vec{F} - равнодействующая всех внешних сил, действующих на элементы тела.

По определению, положение центра масс твердого тела в какой-либо неподвижной системе координат определяется радиус-вектором \vec{R}_C

$$\vec{R}_C = \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{m}, \quad (4.2)$$

где \vec{r}_j - радиус-вектор, определяющий положение каждого j -го элемента тела с массой m_j , и $m = \sum_j m_j$ - масса всего тела. Дифференцируя (4.2) по времени, получим

$$m \vec{v}_C = \sum_j m_j \vec{v}_j, \quad (4.3)$$

где \vec{v}_C - скорость центра масс. Видно, таким образом, что твердое тело обладает импульсом, каким обладала бы материальная точка массой m , равной массе всего тела, и движущейся со скоростью центра масс тела \vec{v}_C . Если подставить (4.3) в уравнение (4.1), то получим уравнение движения центра масс твердого тела

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) аналогично уравнению движения материальной точки. Центр масс твердого тела движется так же, как двигалась бы материальная точка той же массы под действием всех внешних сил, приложенных к твердому телу.

4.2. Момент силы

Моментом силы \vec{F} относительно некоторой точки O называется вектор \vec{M} , равный

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (4.5)$$

где \vec{r} - радиус-вектор, проведенный от точки O в точку приложения силы (см. рис. 4.1).

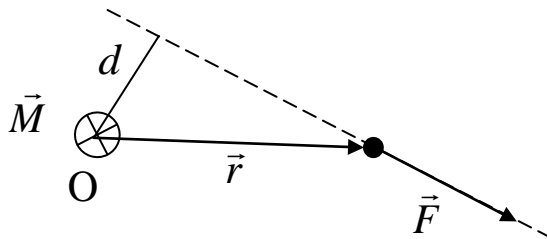


Рис. 4.1

На рис. 4.1 вектор \vec{M} перпендикулярен плоскости рисунка и направлен от нас.

Модуль момента силы можно записать в виде

$$M = F \cdot d, \quad (4.6)$$

где $d = r \sin \alpha$ - плечо силы, равное кратчайшему расстоянию от оси до линии действия силы.

Моментом силы \vec{F} относительно некоторой оси z называется проекция M_z вектора \vec{M} (4.5) на эту ось.

4.3. Момент инерции. Теорема Штейнера

Рассмотрим вращательное движение относительно оси z некоторого элемента тела под действием силы \vec{F} (см. рис. 4.2). Ось z перпендикулярна плоскости рисунка.

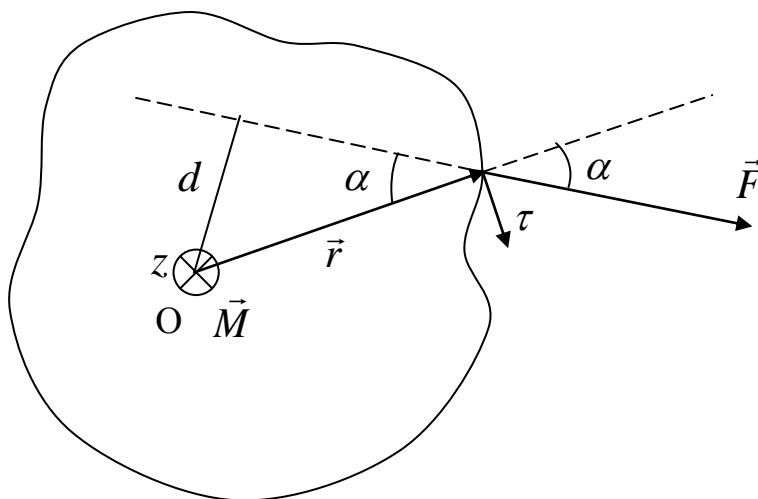


Рис. 4.2

Применим для этого элемента второй закон Ньютона (2.2) в проекции на тангенциальное направление

$$ma_\tau = F_\tau. \quad (4.7)$$

Умножив левую и правую части уравнения (4.7) на r , и используя кинематическую связь $a_\tau = \varepsilon r$ (1.43), получим

$$mr^2\varepsilon = F_\tau \cdot r = F \sin \alpha \cdot r = Fd = M, \quad (4.8)$$

где в правой части уравнения имеем момент силы F , действующей на точку. Множитель при угловом ускорении ε , стоящий в левой части уравнения вращательного движения (4.8) рассматриваемой материальной точки, называется моментом инерции материальной точки относительно оси вращения

$$I = mr^2. \quad (4.9)$$

Для того чтобы найти момент инерции всего твердого тела, нужно просуммировать моменты инерции всех составляющих его элементов

$$I = \sum_j m_j r_j^2, \quad (4.10)$$

где r_j - расстояние от элемента массой m_j до оси вращения. Взяв элементы, на которые разбивается твердое тело, бесконечно малыми, можно перейти от суммирования к интегрированию

$$I = \int r^2 dm, \quad (4.11)$$

что позволяет вычислить моменты инерции различных тел. Для тела произвольной формы это является трудной задачей. Однако для однородного симметричного относительно оси вращения тела задача значительно упрощается. Важно обратить внимание на то, что величина момента инерции зависит от ориентации оси вращения относительно данного тела.

Приведем расчетные формулы для моментов инерции некоторых тел. Момент инерции однородного обода (кольца, обруча) массой m и радиуса R относительно оси, проходящей через центр обода, перпендикулярно его плоскости

$$I = mR^2. \quad (4.12)$$

Момент инерции однородного цилиндра массой m и радиуса R относительно оси, совпадающей с осью цилиндра

$$I = \frac{mR^2}{2}. \quad (4.13)$$

Поскольку момент инерции цилиндра не зависит от его высоты h , то формула (4.13) применима и для тонкого диска, если ось проходит через центр его основания и перпендикулярна к нему.

Момент инерции тонкого цилиндра или диска массой m и радиуса R (толщина диска $h \ll R$) относительно оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости диска равна

$$I = \frac{mR^2}{4}. \quad (4.14)$$

Для длинного стержня длиной l и массой m момент инерции относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню, равен

$$I = \frac{ml^2}{12}, \quad (4.15)$$

и не зависит от формы сечения стержня, если только характерный размер сечения стержня $b \ll l$ – длины стержня.

Момент инерции шара радиуса R и массой m относительно любой оси, проходящей через его центр, равен

$$I = \frac{2}{5}mR^2. \quad (4.16)$$

Нетрудно заметить, что моменты инерции тел, приведенные в формулах (4.12 – 4.16), соответствуют осям, проходящим через центры масс этих тел. Значение момента инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс, можно рассчитать с помощью теоремы Штейнера. Согласно утверждению этой теоремы момент инерции I твердого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_C относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела C , и произведения массы тела на квадрат расстояния a между осями

$$I = I_C + ma^2. \quad (4.17)$$

Например, рассчитаем по теореме Штейнера момент инерции стержня длиной l и массой m относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно стержню. Используя (4.15), получим

$$I = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}. \quad (4.18)$$

4.4. Основное уравнение динамики вращательного движения тела

Разобьем твердое тело (см. рис. 4.2) на малые элементы и запишем для каждого из этих элементов уравнение движения относительно оси вращения z , взяв за основу уравнение вращательного движения (4.8) материальной точки

$$I_j \varepsilon = M_{jz}, \quad (4.19)$$

где $I_j = m_j r_j^2$ - момент инерции j -го элемента твердого тела с массой m_j , находящегося на расстоянии r_j от оси вращения z , ε - угловое ускорение вращения тела вокруг оси z , M_{jz} - проекция на ось z суммарного момента внешних и внутренних сил, действующих на этот элемент.

Просуммировав уравнения типа (4.19), записанные для всех элементов твердого тела, и учитывая, что угловое ускорение ε одинаково для всех элементов тела (т.к. у них одинаковый угол поворота), получим

$$I \varepsilon = M_{z\text{внеш}}, \quad (4.20)$$

где $I = \sum_j I_j = \sum_j m_j r_j^2$ - момент инерции твердого тела относительно оси z (см. 4.10), $M_{z\text{внеш}}$ - суммарный момент **внешних сил** относительно оси z . При выводе уравнения (4.20) мы учли, что сумма моментов **внутренних сил** равна нулю (это можно показать, используя третий закон Ньютона).

Уравнение (4.20) называется **основным уравнением** динамики вращательного движения твердого тела.

4.5. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Пусть материальная точка имеет импульс $\vec{p} = m\vec{v}$. Моментом импульса материальной точки относительно точки О (см. рис. 4.3) называется вектор \vec{L} равный

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}], \quad (4.21)$$

где \vec{r} - радиус – вектор, проведенный от точки О до материальной точки. Независимо от формы траектории частица может обладать моментом импульса.

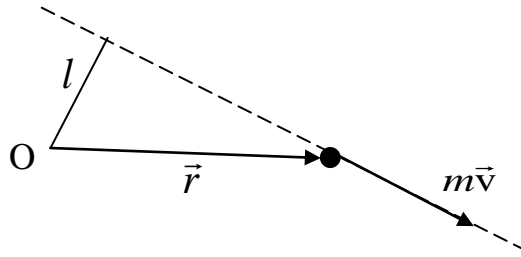


Рис. 4.3

Модуль момента импульса равен $L = pl = rp \sin \alpha$, где p – модуль импульса материальной точки, $l = r \sin \alpha$ - плечо импульса, равное кратчайшему расстоянию от точки О до линии импульса, α - угол между векторами \vec{r} и \vec{p} . На рис. 4.3 вектор момента импульса \vec{L} направлен от нас.

Моментом импульса \vec{L} системы материальных точек относительно точки О называется сумма моментов импульса отдельных частиц \vec{L}_i относительно этой точки

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i] \quad (4.22)$$

Моментом импульса частицы L_z относительно некоторой оси z называется проекция вектора (4.21) на ось z . Моментом импульса L_z системы материальных точек относительно некоторой оси z называется проекция вектора (4.22) на ось z .

Вычислим производную по времени от \vec{L} (4.21)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{v} \right] + m \left[\vec{r}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right]. \quad (4.23)$$

Используя второй закон Ньютона (2.2) и определение момента силы \vec{M} (4.5), а также учитывая, что $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ и $[\vec{v}, \vec{v}] = 0$, получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (4.24)$$

Уравнение (4.24), называется **уравнением моментов** для материальной точки.

Рассмотрим теперь систему материальных точек на которые действуют как внутренние, так и внешние силы. Применим для каждой точки уравнение (4.24) и просуммируем все полученные уравнения

$$\sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_{i_{\text{внутр}}} + \sum_i \vec{M}_{i_{\text{внеш}}}, \quad (4.25)$$

где $\vec{M}_{i_{\text{внутр}}}$ ($\vec{M}_{i_{\text{внеш}}}$) – суммарный момент внутренних (внешних) сил, действующих на i -тую частицу. Из третьего закона Ньютона можно показать, что $\sum_i \vec{M}_{i_{\text{внутр}}} = 0$, поэтому (4.25) можно переписать в виде

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}, \quad (4.26)$$

где \vec{L} - момент импульса системы материальных точек (см. 4.22), $\vec{M}_{\text{внеш}}$ - суммарный момент внешних сил, действующих на систему. Уравнение (4.26) называется уравнением моментов для системы материальных точек.

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z . Твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек. Спроецируем (4.26) на ось вращения z

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{z_{\text{внеш}}}. \quad (4.27)$$

Используя основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела (4.20) и определение углового ускорения (1.40), из (4.27) получим выражение для проекции момента импульса твердого тела на ось вращения

$$L_z = I\omega. \quad (4.28)$$

Закон сохранения момента импульса. Если суммарный момент внешних сил равен нулю (при этом система тел не обязательно является замкнутой), то из уравнения моментов (4.26) следует, что

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \text{ то есть } \vec{L} = \text{const}, \quad (4.29)$$

что выражает закон сохранения момента импульса. Момент импульса системы тел остается постоянным, если суммарный момент всех внешних сил равен нулю.

4.6. Кинетическая энергия вращающегося тела

Рассмотрим вращение материальной точки вокруг неподвижной оси. Так как линейная и угловая скорости вращения связаны соотношением (1.42), то для кинетической энергии точки получим

$$T_j = m_j v_j^2 / 2 = m_j r_j^2 \omega^2 / 2 = I_j \omega^2 / 2,$$

где I_j - момент инерции материальной точки, находящейся на расстоянии r_j от оси вращения. Полная кинетическая энергия системы материальных точек, из которых состоит твердое тело, будет равна сумме кинетических энергий всех точек системы, следовательно

$$T = \sum_j T_j = \sum_j I_j \frac{\omega^2}{2} = \left(\sum_j I_j \right) \frac{\omega^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (4.30)$$

Таким образом, формула (4.30) определяет величину кинетической энергии вращения твердого тела с моментом инерции I относительно неподвижной оси вращения.

4.7. Работа внешних сил при вращении твердого тела

Рассмотрим твердое тело, вращающееся относительно неподвижной оси z . Пусть внешняя сила, приложенная к некоторой точке твердого тела, направлена по касательной к окружности радиуса r , по которой движется точка приложения силы. За время dt точка приложения силы перемещается по дуге окружности на расстояние dS в направлении действия силы F . Элементарная работа, совершаемая силой F за время dt , будет равна $dA = F \cdot dS$. Поскольку длина дуги dS связана с углом поворота $d\varphi$ тела соотношением $dS = r d\varphi$, то $dA = F r d\varphi = M d\varphi$, где $M = Fr$ - величина момента силы F . Если направления действия силы и перемещения противоположны, то элементарная работа будет $dA = -M d\varphi$, т. е. отрицательна. Оба выражения для работы можно объединить в одно, введя угол α между направлениями векторов \vec{M} и $d\vec{\varphi}$, тогда

$$dA = M d\varphi \cos \alpha = M_z d\varphi = \vec{M} d\vec{\varphi}, \quad (4.31)$$

где M_z - проекция вектора \vec{M} на ось вращения z .

При вращении тела вокруг закрепленной оси угол α в (4.31) может принимать только два значения. Действительно, напомним, что направление вектора углового перемещения $d\vec{\varphi}$ совпадает с направлением угловой скорости $\vec{\omega}$ (см. раздел 1.7), а векторы $\vec{\omega}$ и \vec{M} направлены вдоль оси вращения. Если векторы $\vec{\omega}$ и \vec{M} направлены в одну сторону, то $\alpha = 0$, и совершается положительная

работа, если же направления их противоположны, то $\alpha = \pi$, и работа отрицательна.

В том случае, если сила, совершающая работу, направлена под произвольным углом к оси вращения, формула для работы силы при вращательном движении не будет отличаться от (4.31). Это объясняется тем, что моменты всех составляющих произвольной силы, кроме тангенциальной, будут равны нулю при вращении тела вокруг закрепленной оси.

Так как работа dA совершается за время dt , то развиваемая мощность P будет равна

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{M} \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{M}\vec{\omega}. \quad (4.32)$$

Работа, совершаемая за конечный интервал времени от t_1 до t_2 , определяется с помощью интегрирования элементарной работы

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M} d\vec{\varphi} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\vec{\omega} dt, \quad (4.33)$$

где φ_1 и φ_2 — углы поворота твердого тела в моменты времени t_1 и t_2 , соответственно. Если момент силы, действующий на тело постоянен, то его можно вынести за знак интеграла

$$A = \vec{M} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\vec{\varphi} = \vec{M}\Delta\vec{\varphi}. \quad (4.34)$$

Воспользовавшись основным уравнением динамики вращательного движения (4.20), найдем связь между работой и кинетической энергией при вращательном движении

$$dA = M_z d\varphi = I \frac{d\omega}{dt} d\varphi = Id\omega \cdot \frac{d\varphi}{dt} = I\omega d\omega = Id\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right), \quad (4.35)$$

т.е. совершаемая за время dt работа идет на изменение кинетической энергии вращения. Интегрируя (4.35), получим

$$A_{12} = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = T_2 - T_1, \quad (4.36)$$

что аналогично формуле (3.13) для поступательного движения.

4.8. Колебательное движение твердого тела

Среди явлений природы часто наблюдаются периодические, т. е. регулярно повторяющиеся процессы: смена дня и ночи, вращение Луны вокруг Земли, колебания маятника часов и т.д. Колебательные процессы, имея различную фи-

зическую природу, обладают общими чертами и подчиняются одинаковым закономерностям. В дальнейшем ограничимся рассмотрением механических колебательных систем.

В любой колебательной системе можно указать некоторую физическую величину, отклонение которой от равновесного значения зависит от времени по периодическому закону. Напомним определение периодической функции: если $F(t)$ - периодическая функция времени с периодом T , то для любого момента времени t выполняется соотношение

$$F(t+T) = F(t). \quad (4.37)$$

Таким образом, период колебаний T равен времени, через которое движение полностью повторяется. Например, в случае колебаний груза, подвешенного на пружине, колеблющейся величиной является смещение груза из положения равновесия.

Колебания, которые совершает система около положения равновесия после того, как она была выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе, называются собственными, или свободными колебаниями.

Во всякой реальной колебательной системе существует некое сопротивление колебательному движению. В такой системе колебания прекращаются с течением времени (затухают). Такие колебания называются затухающими. Если на колебательную систему действует некоторая внешняя сила, изменяющаяся по времени по периодическому закону, то колебания называются вынужденными.

Среди колебаний различного вида выделяют гармонические колебания. Гармонические колебания представляют собой периодический процесс, при котором смещение колеблющегося тела $x(t)$ происходит по закону косинуса или синуса. Такие колебания описываются уравнением гармонических колебаний вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.38)$$

где ω_0 - круговая или циклическая частота колебаний. Решения уравнения (4.38) могут быть записаны в виде

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ или } x(t) = B \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4.39)$$

в чём можно убедиться при помощи подстановки (4.39) в уравнение (4.38).

Величины, стоящая в (4.39) перед знаком синуса или косинуса называются амплитудой, а функция $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$, стоящая под знаком синуса или косинуса называется фазой колебаний. Значение фазы в момент $t = 0$ называется

начальной фазой колебаний φ_0 . Различие между колебаниями, происходящими по закону синуса или косинуса, заключается только в величине начальной фазы.

Из определения периодической функции (4.37) можно найти, что период гармонических колебаний равен $T = 2\pi/\omega_0$. Частота колебаний f , равная числу колебаний, совершаемых за единицу времени, может быть записана как $f = 1/T = \omega_0/2\pi$. Частота f измеряется в Герцах (Гц) Круговая или циклическая частота колебаний ω_0 измеряется в рад/с.

Физическим маятником называется твердое тело, закрепленное на горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс. Тело, выведенное из положения равновесия и представленное себе самому, будет совершать колебания относительно такой оси. Пусть ось проходит через точку О (рис. 4.4), перпендикулярно плоскости колебаний, а центр масс тела находится в точке С на расстоянии a от оси вращения. Если тело отклонить на угол φ от положения равновесия, то на него будет действовать вращательный момент силы тяжести $M = mga \sin \varphi$, возвращающий тело в состояние равновесия. При этом тело начнет двигаться с угловым ускорением ε , определяемым основным уравнением динамики вращательного движения (4.20)

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mga \sin \varphi,$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения. При малых углах φ , когда $\sin \varphi \approx \varphi$, уравнение колебаний физического маятника принимает вид

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mga}{I} \varphi = 0. \quad (4.40)$$

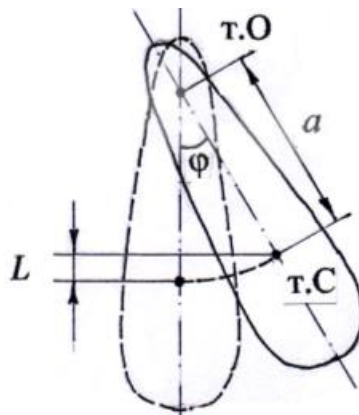


Рис. 4.4

Сравнивая уравнения (4.40) и (4.38) между собой, приходим к выражениям для круговой частоты ω_0 и для периода T собственных колебаний физического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (4.41)$$

Математическим маятником называется тело небольших размеров, подвешенное на длинной невесомой и нерастяжимой нити. При этом размерами тела по сравнению с длиной нити можно пренебречь (приближение материальной точки). Если длина нити l , а масса тела m , то момент инерции тела относительно точки подвеса $I = ml^2$. Подставляя это значение в формулы (4.41) и учитывая, что в рассматриваемом случае $a = l$, получим для малых колебаний математического маятника выражения

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.42)$$

Сравнение формул (4.41) и (4.42) приводит к выводу, что период колебаний физического маятника равен периоду колебаний математического маятника с длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ma}. \quad (4.43)$$

Величина $l_{\text{пр}}$ называется приведенной длиной физического маятника.

ЛЕКЦИЯ 5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Молекулярная физика изучает зависимость строения и физические свойства вещества от характера движения и взаимодействия составляющих его частиц (атомов и молекул). При этом молекулярная физика исходит из того, что:

- а) все тела представляют собой совокупность большого числа атомов и молекул, находящихся в непрерывном хаотическом (тепловом) движении;
- б) движение частиц тела (атомов и молекул) и их взаимодействие подчиняется законам классической механики.

Существуют два способа описания процессов, происходящих в макроскопических телах – статистический (молекулярно-кинетический) и термодинамический.

Статистическая физика, пользуясь методами теории вероятностей, позволяет описать наблюдаемые макроскопические свойства тел, как результат суммарного действия большого числа микрочастиц, составляющих это тело. Здесь

используются усредненные значения таких характеристик частиц как их скорость, энергия и т.д. Причем законы статистики (молекулярно-кинетической теории) выполняются тем точнее, чем по большему числу частиц, участвующих в рассматриваемых процессах, происходит усреднение.

Термодинамический подход (термодинамика) изучает свойства веществ без учета их внутреннего строения. В основе термодинамики лежит небольшое число фундаментальных законов, установленных путем обобщения очень большого количества опытных фактов. По этой причине область применения термодинамики значительно шире, чем молекулярно-кинетической теории. Однако термодинамика ничего не говорит о механизме явлений, происходящих в телах, а лишь устанавливает связь между макроскопическими характеристиками вещества.

Таким образом, молекулярно-кинетическая теория (статистическая физика) и термодинамика подходят к изучению свойств веществ с различных точек зрения, взаимно дополняя друг друга.

5.1. Термодинамические параметры.

Равновесные состояния и процессы

Совокупность макроскопических тел называется термодинамической системой. В частности, термодинамическая система может состоять из одного тела. Физические величины, измеряемые опытным путем, и характеризующие состояние термодинамической системы, называются термодинамическими параметрами состояния. Это - давление p , плотность ρ , температура T , объем V .

Давление p это физическая величина, численно равная силе, действующей на единицу поверхности, по направлению к ее нормали

$$p = \frac{F}{S} \quad (5.1)$$

Единицей измерения давления в СИ является Паскаль (Па), $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$. Давление $p_0 = 1,06 \cdot 10^5 \text{ Па}$ называется нормальным давлением.

Величина, характеризующая распределение массы тела по его объему, называется плотностью тела (вещества) $\rho = dm/dV$, где dm – масса тела, занимающая объем dV . Для однородного тела $\rho = m/V$, где m – масса тела, V – его объем. Единица измерения плотности в СИ – 1 кг/м^3 .

Температура тела – мера интенсивности теплового движения молекул или атомов тела или, по определению Максвелла, мера состояния тела, определяющее его способность сообщать тепло другим телам.

Для измерения температуры пользуются шкалой Цельсия ($^{\circ}\text{C}$) и абсолютной шкалой Кельвина (К). По шкале Цельсия температура измеряется в градусах: интервал от 0°C (температура плавления льда при нормальном атмосферном давлении) до 100°C (температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении) равномерно делится на 100 частей – $1/100$ этого интервала и есть 1°C . В абсолютной шкале Кельвина температура таяния льда равна $273,15\text{ К}$. Поэтому, температура t по шкале Цельсия и температура T по шкале Кельвина связаны соотношением $T = t + 273,15$. Температура T получила название абсолютной температуры.

Состояние термодинамической системы называется равновесным, если состояние системы не изменяется с течением времени (состояние термодинамического равновесия). В этом случае параметры состояния остаются неизменными во всех точках системы и сохраняются произвольно долго.

Термодинамическим процессом называется переход системы из одного состояния в другое. Термодинамический процесс, при котором система проходит ряд бесконечно близких равновесных состояний называется равновесным или квазистатическим.

Если по координатным осям откладывать значения каких-либо двух параметров (например, p и V), то равновесное состояние системы можно изобразить точкой на координатной плоскости, а равновесный процесс можно изобразить некоторой кривой.

Все другие процессы – неравновесные. Изопроцессы – термодинамические процессы, происходящие в системе с постоянной массой при каком-либо фиксированном параметре состояния p , V или T .

Процесс, протекающий при постоянной температуре ($T = \text{const}$), называется изотермическим. Изохорный (или изохорический) процесс происходит при постоянном объеме ($V = \text{const}$). Изобарный (или изобарический процесс) протекает при постоянном давлении ($p = \text{const}$).

5.2. Масса и размеры молекул. Молярная масса

Как известно, все тела состоят из атомов и молекул. Их типичный размер $d \approx 3 \cdot 10^{-10}\text{ м}$. Для характеристики массы атомов и молекул в молекулярной физике вводят атомную единицу массы (а.е.м.) - массу $m_{\text{ед.}}$, равную $1/12$ массы атома изотопа углерода ^{12}C . Атомная единица массы равна

$$m_{\text{ед.}} = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг.} \quad (5.2)$$

Массы атомов и молекул, измеряемые в а.е.м., называют относительной атомной массой A_r и относительной молекулярной массой M_r . Если m_a – масса атома, а m_m – масса молекулы, то

$$A_r = \frac{m_a}{m_{\text{ед}}}, \quad M_r = \frac{m_m}{m_{\text{ед}}}. \quad (5.3)$$

Из определения (5.3) следует, что A_r и M_r – безразмерные величины.

За единицу количества вещества в СИ принимается величина, называемая молю. Молю – количество вещества, в котором содержится число частиц (атомов, молекул или других структурных единиц), равное числу атомов в 12 г изотопа углерода ^{12}C . Опытным путем установлено, что в одном моле содержится $N_A \cong 6,02 \cdot 10^{23}$ частиц. Это число называется постоянной Авогадро, то есть

$$N_A \cong 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}. \quad (5.4)$$

Массу моля обозначают буквой M и называют молярной массой. Из (5.3) и (5.4) следует, что

$$M = N_A \cdot m_m = N_A \cdot M_r \cdot m_{\text{ед}}. \quad (5.5)$$

Рассчитаем произведение $N_A \cdot m_{\text{ед}}$. С учетом (5.2) получаем

$$N_A \cdot m_{\text{ед}} = N_A \cdot \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = \frac{1}{12} N_A \cdot m(^{12}\text{C}) = \frac{1}{12} M(^{12}\text{C}),$$

где $M(^{12}\text{C})$ – масса моля изотопа углерода ^{12}C , равная 12 г по определению моля. Поэтому

$$N_A \cdot m_{\text{ед}} = 1 \text{ г/моль}. \quad (5.6)$$

С учетом (5.6) выражение (5.5) преобразуется к виду

$$M = M_r \cdot (N_A \cdot m_{\text{ед}}) = M_r \cdot 1 \text{ г/моль}.$$

Таким образом, молярная масса M данного вещества, выраженная в граммах, численно равна относительной молекулярной массе M_r вещества. Значение M_r и A_r указывается в таблицах (например, относительную атомную массу A_r можно найти в таблице Менделеева). Подчеркнем, что молярная масса вещества (в отличие от относительной молекулярной массы) – величина размерная; в СИ ее размерность – кг/моль. Пользуясь понятием молярной массы M и числом Авогадро N_A , вводят величину η , определяющую количество вещества (число молей) в теле массы m , состоящим из N частиц

$$\eta = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}. \quad (5.7)$$

5.3. Идеальный газ

Выяснение многих физических законов производится для идеализированных моделей, что не мешает применять эти законы при решении практических задач. Одной из таких идеализаций является понятие идеального газа, для которого:

- собственный размер молекул пренебрежимо мал по сравнению со средним расстоянием между молекулами газа, т.е. можно считать, что молекулы идеального газа являются материальными точками и суммарный объём частиц пренебрежимо мал по сравнению с объёмом газа;
- силы удаленного взаимодействия между молекулами отсутствуют, то есть потенциальной энергией взаимодействия молекул можно пренебречь по сравнению кинетической энергией их теплового движения;
- взаимодействие проявляется в виде соударений молекул друг с другом и со стенками сосуда, причем такие соударения считаются абсолютно упругими.

Многие газы удовлетворяют этим условиям при комнатной температуре и нормальном давлении, т. е. их можно считать при этих условиях идеальными. Свойства газа тем ближе к идеальным, чем выше его температура и ниже давление.

Уравнение состояния идеального газа. Состояние газа может быть задано с помощью трех термодинамических параметров p , V , T . Опытным путем установлено, что при постоянной массе газа ($m = \text{const}$) справедливо следующее соотношение между термодинамическими параметрами

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (5.8)$$

Это уравнение состояния идеального газа или уравнение Клапейрона-Менделеева. Величина $R = 8,31$ Дж/(моль·К) называется универсальной газовой постоянной.

Разделим правую и левую части (5.8) на объём V . Тогда, с учетом (5.7), уравнение состояния принимает вид

$$p = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{N}{N_A} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{N}{V} \left(\frac{R}{N_A} \right) \cdot T. \quad (5.9)$$

Учитывая, что $N/V = n$ это концентрация частиц (число атомов или молекул в единице объема), и вводя обозначение $R/N_A = k$, получим еще одну форму записи уравнения состояния идеального газа

$$p = nkT, \quad (5.10)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Газовые законы. Изопроцессы. Зависимость объёма газа от температуры при неизменном давлении (изобарный процесс) была экспериментально исследована в 1802 году Жозефом Луи Гей-Люссаком. Такую зависимость для идеального газа легко получить из уравнения состояния (5.8), переписав его в виде

$$\frac{V}{T} = \frac{m}{M} \frac{R}{p}.$$

Принимая во внимание неизменную массу газа и фиксированное давление, получаем **закон Гей-Люссака**

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad (5.11)$$

Аналогично, для данной массы идеального газа можно получить зависимость давления от температуры при неизменном объёме (**закон Шарля** для изохорного процесса)

$$\frac{p}{T} = \text{const}. \quad (5.12)$$

Наконец, изотермический процесс в идеальных газах описывается **законом Бойля - Мариотта**

$$pV = \text{const}, \quad (5.13)$$

который сразу получается из уравнения состояния (5.8) с постоянной правой частью.

Давление смеси химически не взаимодействующих идеальных газов с разными молярными массами определяется **законом Дальтона**. Концентрация молекул смеси N газов равна сумме концентраций молекул отдельных газов $n = n_1 + n_2 + \dots + n_N$. Подставляя это равенство в уравнение состояния идеального газа в форме (5.10), получаем

$$p = nkT = (n_1 + n_2 + \dots + n_N)kT = n_1kT + n_2kT + \dots + n_NkT, .$$

или

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_N = \sum_{i=1}^N p_i, \quad (5.14)$$

где p_1, p_2, \dots, p_N – парциальные давления, т. е. такие давления, которые создавал бы каждый из газов, входящих в смесь, если бы он один занимал весь объём. Уравнение (5.14) носит название закона Дальтона: давление смеси химически не взаимодействующих идеальных газов равно сумме парциальных давлений всех газов, образующих смесь.

5.4. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Рассчитаем давление, которое оказывает идеальный газ на стенку сосуда. Для этого в соответствии с определением давления (5.1) найдем силу F , действующую на площадку ΔS поверхности стенки.

Молекулы газа, находясь в хаотическом движении, сталкиваются между собой и со стенками сосуда. Если Δp - импульс, передаваемый молекулами газа площадке ΔS за время Δt , то согласно второму закону Ньютона на нее действует сила

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (5.15)$$

В силу абсолютной упругости столкновений, молекула массой m_0 , имеющая скорость v_i , перпендикулярную площадке, передает ей импульс $2m_0v_i$. В равновесном состоянии газа все направления движения молекул газа равновероятны – ни одно из направлений не имеет предпочтения перед другими. Поэтому можно считать, что вдоль прямой, перпендикулярной площадке ΔS , движется $1/3$ всех молекул газа, причем половина из них движется к площадке, а половина – в противоположном направлении. Поэтому число молекул N_i , движущихся со скоростью v_i , которые достигают площадки ΔS , равно $1/6$ их количества, находящегося в цилиндре с основанием ΔS и высотой $v_i\Delta t$. Если n_i - концентрация молекул со скоростью v_i , то

$$N_i = \frac{1}{6} n_i \Delta S v_i \Delta t,$$

а импульс Δp_i , передаваемый стенке, этими молекулами равен

$$\Delta p_i = N_i \cdot 2m_0v_i = \frac{1}{3} m_0 n_i v_i^2 \Delta t.$$

Все молекулы газа, движущиеся со всеми возможными скоростями, сообщают поверхности ΔS за время Δt импульс

$$\Delta p = \frac{1}{3} m_0 \Delta t \sum_i n_i v_i^2. \quad (5.16)$$

Обратим внимание на то, что выражение $\sum_i n_i v_i^2$ это сумма квадратов скоростей всех n молекул, содержащихся в единице объема. Если разделить эту сумму на n , то получим среднее значение квадрата скорости молекул $\langle v^2 \rangle$ или квадрата среднеквадратичной скорости

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_i n_i v_i^2}{n}, \text{ то есть } \sum_i n_i v_i^2 = n \langle v^2 \rangle. \quad (5.17)$$

В итоге, давление газа на стенку сосуда определяется выражением

$$p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\Delta p}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{3} m_0 \sum_i n_i v_i^2$$

или, с учетом (5.17),

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle. \quad (5.18)$$

Соотношение (5.18) называется основным уравнением молекулярно-кинетической теории.

Подставляя давление p (5.18) в уравнение состояния идеального газа в форме (5.10), получим

$$\left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle = \langle \varepsilon_{\text{пост.}} \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (5.19)$$

где $\langle \varepsilon_{\text{пост.}} \rangle$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

5.5. Молекулярно-кинетическое толкование абсолютной температуры

Из выражения (5.19) следует, что средняя энергия поступательного движения молекул газа не зависит ни от массы молекул, ни от других термодинамических параметров, кроме температуры T . Следовательно, средние кинетические энергии молекул различных газов, находящихся при одинаковой температуре, равны между собой, то есть

$$\frac{m_{01} \langle v_1^2 \rangle}{2} = \frac{m_{02} \langle v_2^2 \rangle}{2}. \quad (5.20)$$

В этом выражении m_{01} и m_{02} - массы различных молекул, а $\langle v_1^2 \rangle$ и $\langle v_2^2 \rangle$ - квадраты их среднеквадратичных скоростей.

Из соотношения (5.20) следует, что при перемешивании различных газов, имеющих одинаковую температуру, не происходит преимущественной передачи энергии от молекул одного газа молекулам другого. При столкновении молекул как одного и того же, так и различных газов, происходит передача энергии, скорости отдельных молекул изменяются, но при фиксированной температуре смеси газов T среднее значение энергии поступательного движения любой молекулы остается неизменным.

На основании приведенных рассуждений можно сделать вывод, что температура – мера интенсивности теплового (хаотического) движения молекул.

5.6. Число степеней свободы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекулы

До сих пор мы рассматривали только поступательное движение молекул. Но молекулы, состоящие из более чем одного атома, могут совершать также колебательные и вращательные движения, которые связаны с некоторым запасом энергии. Вращательное движение одноатомной молекулы не имеет смысла, так как по определению идеального газа такая молекула является материальной точкой, т. е. не имеет размеров. Прежде чем перейти к вопросу об энергиях вращения и колебания молекул, рассмотрим понятие числа степеней свободы молекулы.

Молекула – физическое тело, состоящее из системы материальных точек (атомов). При описании движения любого тела необходимо знать его положение относительно выбранной системы координат. Количество независимых координат, которые полностью определяют положение тела в пространстве, называется числом степеней свободы тела.

Положение материальной точки в пространстве определяется тремя координатами. Поэтому одноатомные молекулы (состоят из одного атома – материальной точки) имеют три степени свободы. Это, например, молекулы аргона Ar , гелия He и др.

Жесткие двухатомные молекулы (расстояние между атомами остается неизменным) имеют пять степеней свободы (см. рис. 5.1)

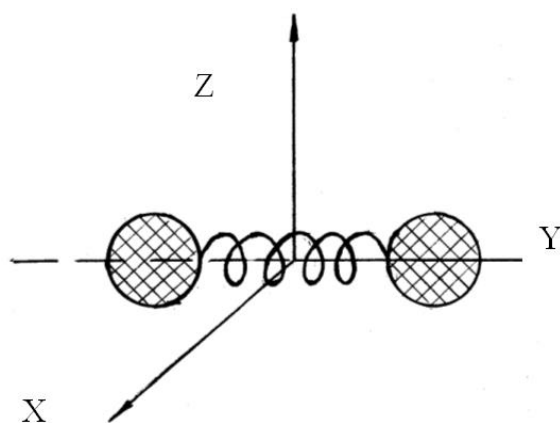


Рис. 5.1

Действительно, они имеют три степени свободы поступательного движения вдоль осей OX , OY , OZ и две степени свободы вращения (вращательные степени свободы) вокруг осей OX и OZ . Вращением молекулы вокруг оси OY можно

пренебречь, т.к. ее момент инерции относительно этой оси пренебрежимо мал (в нашей модели равен нулю). При условиях, близких к нормальным, жесткими двухатомными молекулами являются, например, молекулы водорода H_2 и азота N_2 .

Молекулы, состоящие из трех и более жестко связанных атомов, не лежащих на одной прямой, имеют шесть степеней свободы.

Рассмотрим другой способ нахождения количества степеней свободы двухатомного и трехатомного газа с жесткой связью в молекулах. Положение молекулы двухатомного газа с фиксированным расстоянием l между атомами будут описывать 6 координат (по три координаты для каждого атома). Однако, не все эти координаты являются независимыми параметрами, так как любую из этих координат можно выразить через другие координаты. Применим для двух атомов, из которых состоит молекула формулу для длины отрезка

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

откуда можно выразить любую из координат. Такая «координата» уже не является независимой координатой, поскольку мы ее выразили через другие координаты, и, таким образом, число степеней свободы молекулы газа с жесткой связью будет равно 5. С помощью подобных рассуждений легко объяснить, почему у молекулы трехатомного газа с жесткой связью число степеней свободы равно 6. Положение трех атомов, из которых состоит молекула, будут описываться 9 координатами, при этом для молекулы трехатомного газа можно 3 раза применить формулу длины отрезка. Из полученных 3 уравнений исключим 3 координаты. В результате имеем 6 независимых координат, т.е. 6 степеней свободы.

В случае, когда расстояние между молекулами может изменяться (на рис. 5.1 это схематично изображено в виде пружины), появляются дополнительные – колебательные степени свободы. Например, для двухатомной молекулы – одна колебательная степень свободы вдоль оси Y .

Все молекулы, независимо от числа атомов, имеют три поступательных степени свободы. Так как они равноправны между собой, то на основании (5.19) можно заключить, что на каждую поступательную степень свободы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\langle \varepsilon_{\text{пост.}} \rangle}{3} = \frac{1}{2} kT. \quad (5.21)$$

В статистической физике доказывается закон Больцмана о равномерном распределении **кинетической** энергии по степеням свободы молекулы, согласно которому на каждую степень свободы приходится в среднем одинаковая ки-

нетическая энергия, равная $kT/2$. При этом, для каждой колебательной степени свободы необходимо еще учесть **потенциальную** энергию взаимодействия. В итоге, полная энергия, приходящаяся на колебательную степень свободы, будет равна kT . Колебательная степень свободы будет обладать двойной энергетической емкостью, так как средние значения кинетической энергии колебательного движения и средние значения потенциальной энергии упругой деформации равны между собой.

Таким образом, средняя энергия молекулы будет равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (5.22)$$

где $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{кол}}$ это сумма количества поступательных степеней свободы $i_{\text{пост}}$, вращательных степеней свободы $i_{\text{вращ}}$ и удвоенного количества колебательных степеней свободы $i_{\text{кол}}$ молекулы.

Говоря о колебательных степенях свободы, нужно отметить, что энергия колебаний становится существенной только при достаточно высоких температурах (порядка несколько тысяч градусов Кельвина). Поэтому для комнатных температур ($T \approx 300$ К) величина i будет равна сумме числа поступательных и вращательных степеней свободы: $i = i_{\text{пост.}} + i_{\text{вращ.}}$

ЛЕКЦИЯ 6. СТАТИСТИКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

6.1. Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям и энергиям

При хаотическом движении молекулы газа сталкиваются между собой, постоянно меняя скорость движения, как по величине, так и по направлению. Поэтому нельзя определить число молекул, которые обладают точно заданной скоростью v , но можно подсчитать число молекул, скорости которых имеют значения, лежащие между некоторыми данными скоростями v_1 и v_2 .

В молекулярно-кинетической теории установлено, что, несмотря на все изменения скоростей, существует некоторое стационарное (т.е. не зависящее от времени) распределение атомов или молекул по скоростям, называемое распределением Максвелла. При выводе формулы, описывающей максвелловское распределение частиц по скоростям, предполагалось, что газ состоит из большого числа N одинаковых атомов или молекул, находящихся в состоянии хаотического теплового движения при постоянной температуре T в отсутствие внешних силовых полей.

Если $dN(v)$ - число молекул, имеющих скорости в интервале от v до $v+dv$, то, можно ввести некоторую функцию $f(v)$, называемую функцией распределения молекул по скоростям, которая определяет относительное число атомов или молекул $dN(v)/N$ со скоростями от v до $v + dv$

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv. \quad (6.1)$$

Пользуясь методами теории вероятностей, Максвелл нашел вид этой функции

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / 2kT}, \quad (6.2)$$

где m_0 – масса атома или молекулы газа. График этой функции для двух температур T_1 и T_2 приведен на рис. 6.1.

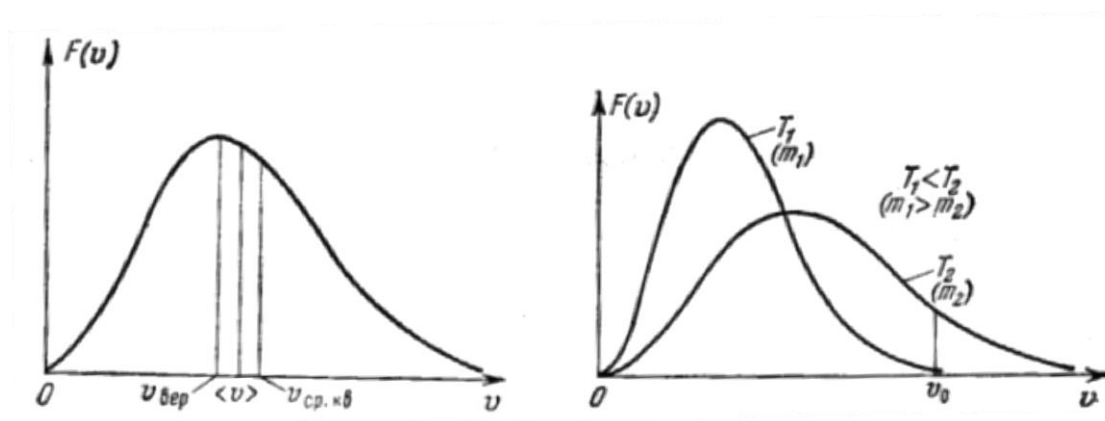


Рис. 6.1

Пользуясь выражениями (6.1) и (6.2), можно определить относительное число частиц $\Delta N/N$, имеющих скорости в интервале от v_1 до v_2 . Очевидно, что

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv. \quad (6.3)$$

Так как число частиц, имеющих скорость от $v_1=0$ до $v_2 = \infty$ должно быть равно полному числу частиц N , то согласно (6.1)

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} dN(v) = 1. \quad (6.4)$$

Выражение (6.4) называется условием нормировки функции распределения $f(v)$.

Исходя из формулы (6.2), можно найти распределение атомов или молекул идеального газа по их кинетическим энергиям E . Переходя в (6.2) от переменной v к переменной $E = m_0 v^2 / 2$, получим

$$\frac{dN(E)}{N} = f(E)dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{3/2} E^{1/2} e^{-\frac{E}{kT}}, \quad (6.5)$$

где $f(E)$ - функция распределения молекул идеального газа по энергиям теплового движения.

6.2. Наиболее вероятная, средняя арифметическая и среднеквадратичная скорости молекул

Функция распределения Максвелла имеет максимум, который соответствует наиболее вероятной скорости молекул v_B при данной температуре (см. рис. 6.1.)

$$v_B = \sqrt{2kT/m_0} = \sqrt{2RT/M}. \quad (6.6)$$

Уравнение (6.6) получено приравниванием нулю производной по скорости от (6.2), кроме того использованы соотношения $M = m_0 N_A$, $R = k N_A$.

Из (6.6) следует, что наиболее вероятная скорость молекул v_B растет с температурой T как \sqrt{T} , а значит, максимум функции распределения с ростом температуры смещается вправо (см. рис. 6.1.), в сторону более высоких скоростей. С ростом температуры T график функции $f(v)$ становится более пологим, при этом максимальное значение функции $f(v)$ уменьшается, так как, согласно условию нормировки (6.4), площадь под графиком постоянна и равна единице.

Пользуясь функцией распределения $f(v)$ можно найти также среднее значение модуля скорости $\langle v \rangle$ и среднеквадратичную $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ скорость молекул. Они вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv, \\ \langle v^2 \rangle &= \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v^2 dN(v) = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv. \end{aligned}$$

После интегрирования получим

$$v_{\text{ср.}} = \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (6.7)$$

$$v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (6.8)$$

Сравнение формул (6.6), (6.7) и (6.8) показывает, что

$$v_B < v_{cp.} < v_{cp.kv.}$$

Из распределения Максвелла по энергиям (6.5) можно найти среднее значение энергии $\langle E \rangle$ теплового (хаотического) движения молекул

$$\langle E \rangle = \int_0^{\infty} E f(E) dE = \frac{3}{2} kT, \quad (6.9)$$

что согласуется с формулой (5.19), полученной в молекулярно-кинетической теории.

6.3. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул

Согласно молекулярно-кинетической теории строения вещества все молекулы газа находятся в непрерывном хаотическом движении, обусловленном столкновениями. Столкновения между молекулами играют важную роль во всех процессах, происходящих в газах. В частности, столкновения играют решающую роль при установлении равновесия в газах, из-за столкновений устанавливается максвелловское распределение молекул по скоростям.

Столкновения между молекулами характеризуются средней частотой столкновений η и средней длиной свободного пробега λ - средним расстоянием, которое пролетает молекула от одного столкновения до другого.

Для выяснения вопроса о средней частоте столкновений η и длины свободного пробега λ введем понятие эффективного диаметра молекулы d . Это минимальное расстояние, на которое сближаются центры двух молекул при столкновении. При расчете λ и η молекулы будем считать твердыми упругими шариками диаметром d , равномерно распределенными по объему с концентрацией n .

Предположим сначала, что все молекулы газа неподвижны за исключением одной, движущейся со средней скоростью теплового движения $\langle v \rangle$. Тогда она столкнется (см. рис. 6.2) со всеми молекулами, центры которых лежат внутри ломаного цилиндра радиуса d . Так как расстояние, проходимое молекулой за время Δt , численно равно $\langle v \rangle \Delta t$, то объем цилиндра, в котором будут происходить столкновения в течение этого времени, очевидно, равен $\pi d^2 \langle v \rangle \Delta t$.

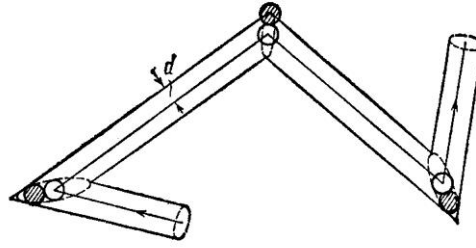


Рис. 6.2

Если концентрация молекул n , то число молекул газа, с которыми произойдет столкновение нашей молекулы за 1 с, будет равно $\pi d^2 \langle v \rangle n$. Чтобы учесть движение молекул, с которыми происходят столкновения, вместо средней скорости теплового движения молекулы относительно стенок сосуда $\langle v \rangle$, нужно взять ее скорость $\langle v_{\text{отн.}} \rangle$ относительно других молекул. Для максвелловского распределения молекул по скоростям можно получить

$$\langle v_{\text{отн.}} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle.$$

Тогда для средней частоты столкновений молекулы получим

$$\eta = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle, \quad (6.10)$$

а среднее время между двумя последовательными столкновениями $\tau = 1/\eta$. Отсюда, среднее расстояние, проходимое молекулой между столкновениями (длина свободного пробега) равна

$$\lambda = \langle v \rangle \cdot \tau = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}. \quad (6.11)$$

Таким образом, длина свободного пробега молекулы λ обратно пропорциональна концентрации молекул n . Если учесть, что при постоянной температуре T газа концентрация его молекул n , согласно (5.10), пропорциональна давлению p , то $\lambda \sim 1/p$.

6.4. Барометрическая формула. Распределение Больцмана

При выводе формулы, описывающей Максвелловское распределение молекул по скоростям, предполагалось, что на молекулы газа не действуют внешние силовые поля. Поэтому молекулы газа равномерно распределены по всему объему сосуда. Однако в реальных условиях молекулы подвержены действию внешних сил. Например, молекулы воздуха в атмосфере Земли находятся в поле силы тяжести. Вследствие этого каждая молекула массы m_0 испытывает дей-

ствие силы тяжести $f = m_0 g$ (g – ускорение свободного падения). В частности, это приводит к убыванию атмосферного давления p с высотой h .

Найдем закон изменения давления с высотой. Будем считать температуру T газа постоянной ($T = \text{const}$), а газ однородным, т.е. состоящим из одинаковых молекул массы m_0 . Выделим в атмосфере (см. рис. 6.3) вертикальный столб газа с площадью поперечного сечения S и рассмотрим в нем на высоте h произвольный бесконечно малый горизонтальный слой газа толщиной dh . Атмосферное давление, действующее в произвольном сечении столба газа на высоте h , обусловлено весом воздуха, находящегося выше этого сечения. Поэтому давление в сечении, расположенном на высоте h , будет отличаться от давления газа в сечении на высоте $h + dh$ на величину $p - (p + dp)$, равному давлению воздуха, заключенного в горизонтальном бесконечно узком слое высотой dh .

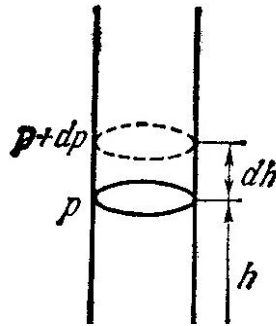


Рис. 6.3

Если ρ – плотность воздуха на высоте h , то $dm = \rho dV = \rho S dh$ – масса слоя высотой dh . Вес этого слоя $dF = (dm) \cdot g$, и, по определению давления,

$$p - (p + dp) = \frac{dF}{S} = \frac{(dm)g}{S} = \frac{\rho g S dh}{S} = \rho g dh. \quad (6.12)$$

Из уравнения Клапейрона-Менделеева (5.8) следует, что

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}, \quad (6.13)$$

тогда (6.12) преобразуется к виду

$$dp = -\frac{Mg}{RT} p dh. \quad (6.14)$$

Разделяя в дифференциальном уравнении (6.14) переменные и интегрируя при постоянной температуре T , получим закон изменения давления с высотой

$$p = p_0 \exp(-Mgh/RT), \quad (6.15)$$

где p_0 – давление у поверхности Земли. Выражение (6.15) называется барометрической формулой. Эта формула справедлива только вблизи поверхности Зем-

ли, для небольшого перепада высот, когда изменение температуры ΔT с высотой невелико $\Delta T \ll T$ и им можно пренебречь.

С помощью уравнения состояния идеального газа в виде (5.10) выражение (6.15) можно преобразовать к виду

$$n = n_0 \exp(-Mgh/RT) = n_0 \exp(-m_0gh/kT), \quad (6.16)$$

описывающему изменение концентрации воздуха n с высотой (здесь n_0 – концентрация молекул воздуха у поверхности Земли на высоте $h = 0$).

Барометрическая формула представляет собой частный случай распределения Больцмана, описывающего изменение концентрации молекул во внешнем потенциальном поле. Действительно $m_0gh = U$ это потенциальная энергия молекулы массой m_0 в поле силы тяжести Земли. В общем случае распределение Больцмана имеет вид

$$n = n_0 \exp(-U/kT), \quad (6.17)$$

где U – потенциальная энергия молекулы во внешнем силовом поле. Соотношение (6.17) представляет собой закон распределения частиц идеального газа по потенциальным энергиям в условиях термодинамического равновесия.

ЛЕКЦИЯ 7. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

Как уже указывалось, термодинамика изучает свойства термодинамических систем и протекающие в них процессы без учета их микроскопического строения. Термодинамика строится на основании опытных законов, называемых началами термодинамики. Процессы рассматриваются с энергетической точки зрения. В дальнейшем, в качестве исследуемой термодинамической системы рассматривается идеальный газ.

7.1. Внутренняя энергия идеального газа

В молекулярной физике для описания состояния термодинамической системы вводится понятие внутренней энергии тела U . Внутренняя энергия тела U это вся энергия тела за исключением кинетической энергии тела как целого и его потенциальной энергии во внешнем поле. Таким образом, внутренняя энергия тела включает: (1) энергию хаотического теплового движения молекул; (2) потенциальную энергию взаимодействия молекул; (3) внутримолекулярную энергию.

В модели идеального газа молекулы рассматриваются как материальные точки, силы взаимодействия между которыми отсутствуют. То есть внутренняя энергия идеального газа складывается из кинетической энергии хаотического движения молекул (поступательного и вращательного) и энергии колебательно-

го движения атомов в молекуле. Если газ состоит из N молекул, каждая из которых обладает энергией, определяемой выражением (5.22), то для внутренней энергии идеального газа U справедливо выражение

$$U = N\langle\varepsilon\rangle = N\frac{i}{2}kT. \quad (7.1)$$

Так как $k = R/N_A$ и $N/N_A = m/M$ (напомним, что m – масса газа, M – молярная масса газа), то выражение (7.1) для внутренней энергии идеального газа можно переписать как

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT. \quad (7.2)$$

Данному равновесному состоянию идеального газа, согласно выражению (7.2), соответствует одно и только одно значение внутренней энергии U , определяемое его температурой T . Приращение внутренней энергии ΔU при переходе газа из одного состояния в другое всегда равно разности значений внутренней энергии в этих состояниях, независимо от способа перехода. Поэтому говорят, что внутренняя энергия U является функцией состояния системы.

В термодинамические формулы входит не сама энергия, а ее изменение. Поэтому внутреннюю энергию определяют с точностью до произвольной аддитивной постоянной, выбирая ее такой, чтобы выражение для внутренней энергии было наиболее простым.

Внутренняя энергия системы может быть изменена всего двумя принципиально различными способами: совершением работы и путем теплообмена (теплопередачи).

Для того чтобы объем, занимаемый газом, увеличился, газ должен совершить работу против внешних сил. Пусть идеальный газ заключен в цилиндрический объем с поршнем (см. рис. 7.1). Сила F , действующая на поршень площадью S со стороны газа, равна $F = pS$, и, следовательно, элементарная работа δA , совершаемая при перемещении поршня на расстояние dx есть

$$\delta A = Fdx = p \cdot Sdx = pdV, \quad (7.3)$$

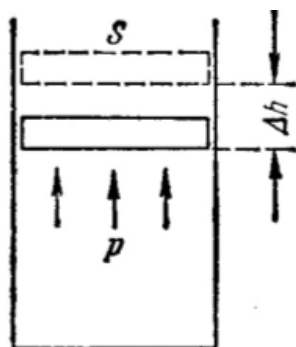


Рис. 7.1

где $dV = Sdx$ - бесконечно малое изменение объема газа. Значок δ , стоящий перед работой в (7.3) называется вариацией. Вариация используется вместо дифференциала в случаях, когда величина не является функцией состояния.

Работа газа при перемещении поршня из положения, соответствующему объему газа V_1 , до положения, соответствующему объему V_2 , определяется выражением

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV . \quad (7.4)$$

При расширении газа его объем увеличивается и работа A_{12} – положительна, при сжатии газа $A_{12} < 0$. На p, V - диаграмме (рис. 7.2) работа A_{12} , согласно определению интеграла, численно равна площади криволинейной трапеции, образованной кривой $p = f(V)$ и осью абсцисс. Как известно из курса механики, работа против внешних сил совершается только за счет энергии системы. В нашем случае сосуд с газом покоится, то есть кинетическая и потенциальная энергия, рассматриваемой нами термодинамической системы как целого, остается неизменной. Поэтому работа против внешних сил совершается только за счет внутренней энергии U системы.

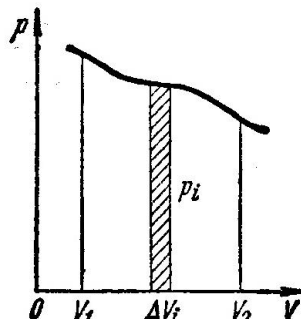


Рис. 7.2

Внутренняя энергия системы может быть изменена еще и другим способом. Так, при приведении в контакт двух тел с различной температурой через некоторое время установится одинаковое значение температуры T в обоих телах. Такой процесс может протекать, например, при нагретых стенках сосуда, неподвижном поршне и холодном газе. При этом объем газа не изменяется, т. е. работа против внешних сил равна нулю, – передача энергии от одного тела другому осуществляется без совершения работы. Такой способ изменения внутренней энергии называется теплообменом или теплопередачей. Рассмотренный выше вид теплообмена называется теплопроводностью. Физическая природа теплопроводности заключается в том, что отдельные молекулы более нагретого тела совершают положительную работу над остальными молекулами менее

нагретого тела, увеличивая энергию их теплового движения. Теплопередача может происходить также через излучение (поглощение молекулами тела электромагнитного излучения) и при перемешивании газа (конвекция).

Количество энергии, переданное телу при теплообмене, называется количеством теплоты δQ . Энергия в виде теплоты может, как сообщаться телу ($\delta Q > 0$), так и отбираться от него ($\delta Q < 0$). Количество теплоты не является функцией состояния. Таким образом, изменение внутренней энергии dU термодинамической системы описывается выражением

$$dU = \delta Q - \delta A, \quad (7.5)$$

где δQ – количество теплоты, сообщенное системе, а δA – работа системы против внешних сил, совершаемая за счет внутренней энергии, т.е. приводящая к уменьшению U .

7.2. Первое начало термодинамики

Перепишем уравнение (7.5) в виде

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (7.6)$$

Выражение (7.6) носит название первого начала (закона) термодинамики. Оно получено из энергетических соображений и формулируется следующим образом: теплота, переданная системе в процессе изменения ее состояния, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение работы против внешних сил.

Как уже отмечалось, внутренняя энергия системы U является функцией состояния газа. Работа расширения газа при переходе из состояния 1 в состояние 2 (рис 7.3) зависит от способа осуществления этого перехода.

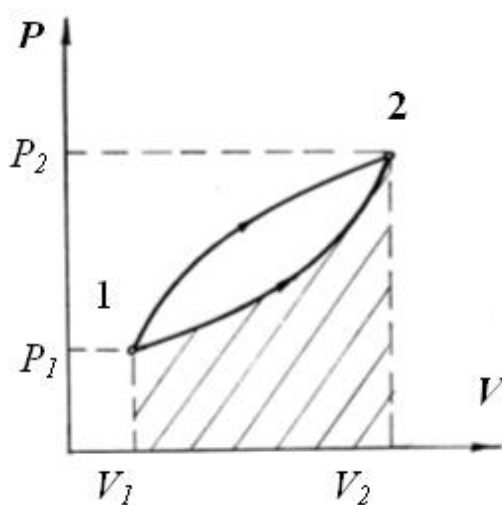


Рис. 7.3

Нижняя кривая соответствует меньшим давлениям, чем верхняя кривая. Поэтому будет различной и работа, численно равная площади криволинейной трапе-

ции, образованной кривой $p = f(V)$ и осью абсцисс. Следовательно, работа расширения газа A_{12} зависит от пути перехода из состояния 1 в состояние 2, т. е. не может быть функцией состояния системы. Поскольку изменение внутренней энергии dU не зависит, а δA зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое, то и δQ также должно зависеть от формы пути.

В СИ количество теплоты Q так же, как внутренняя энергия и работа, измеряется в джоулях, Дж.

7.3. Работа, совершаемая идеальным газом при изопроцессах

Пользуясь соотношением (7.4), вычислим работу, совершаемую идеальным газом при различных изопроцессах.

При изохорном процессе $V = \text{const}$, следовательно, $dV = 0$. Поэтому $\delta A = p dV = 0$, т. е. $A_{12} = 0$.

При изобарном процессе $p = \text{const}$, поэтому, в соответствии с формулой (7.4), имеем

$$A_{12} = \int_1^2 p dV = p \int_1^2 dV = p(V_2 - V_1). \quad (7.7)$$

С помощью уравнения Клапейрона-Менделеева (5.8) работа (7.7), совершаемая идеальным газом при изобарном процессе также может быть записана в виде

$$A_{12} = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \quad (7.8)$$

При изотермическом процессе $T = \text{const}$, а давление газа изменяется, в соответствии с (5.8), как

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V},$$

поэтому для работы идеального газа при изотермическом процессе получим

$$A_{12} = \int_1^2 p dV = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT (\ln V_2 - \ln V_1) = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (7.9)$$

Так как при изотермическом процессе $pV = \text{const}$, т. е. $p_1 V_1 = p_2 V_2$, то выражение (7.9) может быть также преобразовано к виду

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (7.10)$$

7.4. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Для характеристики тепловых свойств тел в термодинамике применяют понятие теплоемкости. Теплоемкостью какого-либо тела C называется величина, равная количеству теплоты, затрачиваемой на изменение температуры тела на 1 К, т.е.

$$C = \frac{\delta Q}{dT}, \quad (7.11)$$

здесь dT – изменение температуры тела при сообщении ему количества теплоты δQ . В СИ теплоемкость измеряется в Дж/К.

Теплоемкостью единицы массы тела $C_{уд}$ (в СИ одного килограмма) называется удельной. Теплоемкость одного моля газа называется молярной. Теплоемкость C , удельная теплоемкость $C_{уд}$ и молярная теплоемкость C_M связаны очевидными соотношениями

$$C = mC_{уд} = \frac{m}{M} C_M. \quad (7.12)$$

Теплоемкость зависит от условий, в которых происходит нагревание тела, то есть от вида процесса. Наибольший интерес представляет молярная теплоемкость газа C_M , когда нагревание происходит при постоянном объеме (обозначается C_V) или при постоянном давлении (обозначается C_p). Чтобы получить выражения для C_V и C_p идеального газа, применим первое начало термодинамики к изопроцессам.

Рассмотрим **изохорный процесс** $V = \text{const}$. В этом случае $dV = 0$, следовательно, $\delta A = 0$, то есть газ не совершает работы. Тогда первое начало термодинамики (7.6) принимает вид

$$\delta Q = dU. \quad (7.13)$$

Видно, что при $V = \text{const}$ вся сообщенная газу теплота δQ идет на изменение его внутренней энергии dU .

На основании определения теплоемкости тела имеем

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_M dT = \frac{m}{M} C_V dT, \quad (7.14)$$

а внутренняя энергия идеального газа определяется выражением (7.2), поэтому

$$\frac{m}{M} C_V dT = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R dT,$$

откуда

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (7.15)$$

Теперь применим первое начало термодинамики (7.6) к **изобарному процессу** $p = \text{const}$. Согласно (7.6) и (7.3) имеем $\delta Q = dU + p dV$. Количество теплоты δQ запишем через молярную теплоемкость тела при постоянном давлении

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_p dT.$$

Изменение внутренней энергии dU с учетом (7.13) и (7.14) возьмем в виде

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT. \quad (7.16)$$

При $p = \text{const}$ из уравнения Клапейрона-Менделеева следует, что

$$\delta A = p dV = \frac{m}{M} R dT.$$

Тогда первое начало термодинамики преобразуется к виду

$$\frac{m}{M} C_p dT = \frac{m}{M} C_V dT + \frac{m}{M} R dT,$$

откуда получаем соотношение

$$C_p = C_V + R \quad (7.17)$$

известное как уравнение Майера. Подставляя (7.15) в (7.17), для молярной теплоемкости C_p идеального газа получим

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (7.18)$$

При **изотермическом процессе** $T = \text{const}$, $dT = 0$ и, следовательно, $dU = 0$. Поэтому первое начало термодинамики принимает вид

$$\delta Q = \delta A, \quad (7.19)$$

то есть передаваемая газу теплота полностью идет на совершение газом работы. Внутренняя энергия при этом остается неизменной. Поэтому при изотермическом процессе теплоемкость газа равна бесконечности.

7.5. Адиабатный процесс

Адиабатным (адиабатическим) называется процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой, т.е. при $\delta Q = 0$. Тогда, согласно первому началу термодинамики (7.6) имеем

$$dU + \delta A = 0. \quad (7.20)$$

Уравнение, описывающее такой процесс, называется уравнением адиабаты и в переменных p , V имеет вид

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (7.21)$$

где $\gamma = C_p/C_V$ - показатель адиабаты. Уравнение (7.21) можно получить из (7.20), подставив в него dU (7.16) и $\delta A = pdV$. Это дает

$$\frac{m}{M} C_V dT = -pdV = -\frac{m}{M} \frac{RT}{V} dV, \quad (7.22)$$

где в последнем равенстве использовано уравнение Клапейрона – Менделеева для идеального газа.

Разделяя в дифференциальном уравнении (7.22) переменные

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \cdot \frac{dV}{V}$$

и используя уравнение Майера (7.17), переписанное в виде $R = C_p - C_V$, получим

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}.$$

Интегрируя левую и правую части этого уравнения, получим $\ln T = -\ln V^{(\gamma-1)} + \text{const}$ или

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (7.23)$$

Соотношение (7.23) это уравнение адиабаты, записанное в переменных T, V . Выражение (7.21), называемое также уравнением Пуассона, можно получить из (7.23), заменив в нем T/V на $p \cdot (M/mR)$, в соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева. Уравнения (7.21) и (7.23) это разные формы записи уравнения адиабаты.

Показатель адиабаты γ представляет собой характерную для каждого газа величину, определяемую только числом степеней свободы молекулы. Согласно формулам (7.18) и (7.15) получим

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \quad (7.24)$$

Элементарная работа δA , совершаемая при адиабатном процессе идеального газа, определяется, согласно (7.20) и (7.16), соотношением

$$\delta A = -dU = -\frac{m}{M} C_V dT.$$

Поэтому, при адиабатном переходе из состояния 1 с параметрами (p_1, V_1, T_1) в состояние 2 с параметрами (p_2, V_2, T_2) идеальный газ совершит работу

$$A_{12} = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2). \quad (7.25)$$

Используя уравнения адиабаты (7.23) или (7.21), а также уравнение Клапейрона-Менделеева, можно получить другие выражения для работы

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] \quad (7.26)$$

или

$$A_{12} = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (7.27)$$

При этом, как и следовало ожидать, работа (7.26) и (7.27) положительна, так как $V_2 > V_1$. Поскольку при адиабатном процессе $\delta Q = 0$, газ совершает работу за счет убыли внутренней энергии, поэтому при адиабатном расширении газ охлаждается, а при сжатии – нагревается.

В заключение, сопоставим изотермический и адиабатический процессы. Для этого построим графики обоих процессов в переменных p, V на одном рисунке (рис. 7.4). Для определения тангенса угла наклона касательных изотермы и адиабаты в точке пересечения кривых (точка А) вычислим производные dp/dV . Продифференцировав уравнение изотермы ($pV = \text{const}$), получим $p dV + V dp = 0$, откуда $dp/dV = -p/V$.

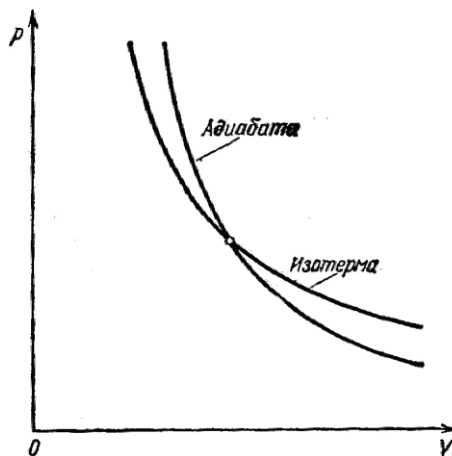


Рис. 7.4

Дифференцирование уравнения адиабаты ($pV^\gamma = \text{const}$) дает $dp/dV = -\gamma p/V$. Видно, что абсолютная величина тангенса угла наклона касательной к адиабате в точке А в γ раз больше, чем у изотермы. Поскольку $C_p > C_V$ и $\gamma > 1$, то адиабата идет круче, чем изотерма.

7.6. Политропный процесс

Политропный (политропический) процесс это такой термодинамический процесс, во время которого теплоёмкость газа остаётся неизменной. В соответствии с определением теплоемкости (7.11) предельными частными случаями политропного процесса являются изотермический процесс (теплоёмкость равна бесконечности) и адиабатный процесс (теплоёмкость равна нулю). Согласно (7.15) и (7.18) изохорный и изобарный процессы идеального газа тоже являются политропными. Уравнение, описывающее политропный процесс, называется уравнением политропы и для идеального газа в переменных p , V имеет вид

$$pV^n = \text{const}, \quad (7.28)$$

где n называется показателем политропы, причем

$$n = \frac{C_0 - C_p}{C_0 - C_V} \quad (7.29)$$

и C_0 это молярная теплоёмкость газа в данном процессе.

Уравнение политропы можно получить, используя первый закон термодинамики (7.6) и определение молярной теплоемкости, а именно

$$\frac{m}{M} C_0 dT = \frac{m}{M} C_V dT + p dV = \frac{m}{M} C_V dT + \frac{m}{M} \frac{RT}{V} dV$$

Разделяя в этом дифференциальном уравнении переменные, получим

$$(C_0 - C_V) \frac{dT}{T} = R \frac{dV}{V}. \quad (7.30)$$

Используя далее соотношение Майера (7.17)

$$R = C_p - C_V = (C_0 - C_V) - (C_0 - C_p),$$

перепишем (7.30) в виде

$$\frac{dT}{T} = -(n-1) \frac{dV}{V}.$$

Интегрируя левую и правую части этого уравнения, получим $\ln T = -\ln V^{(n-1)} + \text{const}$ или

$$TV^{n-1} = \text{const}. \quad (7.31)$$

Соотношение (7.31) это уравнение политропы, записанное в переменных T , V . Выражение (7.28) можно получить из (7.31), заменив в нем T/V на $p \cdot (M/mR)$, в соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева. Уравнения (7.28) и (7.31) это разные формы записи уравнения политропы.

В зависимости от вида процесса можно определить значения показателя политропы n :

- при изотермическом процессе $n = 1$, что сразу видно из сравнения закона Бойля-Мариотта $pV = \text{const}$ с уравнением политропы (7.28);
- при изобарном процессе $n = 0$, так как $p = \text{const}$ и, поэтому, уравнение политропы (7.28), должно выглядеть как $pV^0 = \text{const}$;
- при изохорном процессе $n = \infty$, так как $V = \text{const}$ и из уравнения политропы (7.28) следует, что $(p_1/p_2)^{1/n} = V_2/V_1 = 1$, а это возможно, только если n является бесконечным;
- при адиабатном процессе $n = \gamma$, что сразу следует из сравнения (7.28) с (7.21).

ЛЕКЦИЯ 8. ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

8.1. Круговые процессы

Круговым процессом (или циклом) называется такой процесс, при котором система после ряда изменений возвращается в исходное состояние. Рассмотрим круговой процесс $1 \rightarrow a \rightarrow 2 \rightarrow b \rightarrow 1$, изображенный на рис. 8.1.

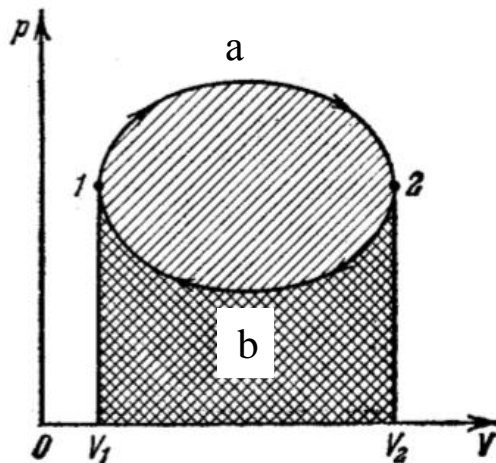


Рис. 8.1

Работа, совершаемая идеальным газом на участке $1 \rightarrow a \rightarrow 2$, положительна и численно равна площади криволинейной трапеции $1a2 V_1 V_2$ (она отмечена на рис. 8.1 вправо наклоненной штриховкой). Работа на участке $2 \rightarrow b \rightarrow 1$ отрицательна и равна площади фигуры $1b2 V_1 V_2$ (она отмечена на рис. 8.1 влево наклоненной штриховкой). Поэтому работа за цикл численно равна площади, охватываемой кривой $1a2b1$, и будет положительной при прямом обходе (по часовой стрелке) и отрицательной при обратном обходе (против часовой стрелки).

После совершения цикла система возвращается в исходное состояние. Поэтому всякая функция состояния, в частности, внутренняя энергия, имеет в

начале и конце цикла одинаковые значения, то есть $\Delta U = 0$ - изменение внутренней энергии за полный цикл будет равно нулю. Следовательно, работа в цикле может совершаться только за счет внешних источников, подводящих рабочему телу теплоту. Круговые процессы лежат в основе всех тепловых машин: двигателей внутреннего сгорания, турбин, холодильников и т.д.

8.2. Тепловые и холодильные машины

Тепловой машиной называют непрерывно действующую систему, осуществляющую круговые процессы (циклы), в которых теплота превращается в работу. Вещество, за счет изменения состояния которого получают работу в цикле, именуется рабочим телом. Для определённости в дальнейшем будем считать, что рабочим телом является газ.

Что касается теплоты, которая превращается в работу, то следует отметить, что на одних участках цикла теплота к рабочему телу подводится, на других - отводится. Отвод определенного количества теплоты от рабочего тела на некоторых участках цикла является неотъемлемым условием осуществимости цикла любого теплового двигателя.

При рассмотрении процессов подвода и отвода теплоты в цикле, естественно возникает вопрос: откуда подводится к рабочему телу теплота Q_1 и куда отводится от рабочего тела теплота Q_2 ? В этой связи введем понятие об источниках и поглотителях теплоты. Систему, от которой отбирается теплота Q_1 , сообщаемая рабочему телу, принято называть горячим телом или нагревателем, а систему, которой отдается теплота Q_2 , отбираемая от рабочего тела, называют холодным телом или холодильником. Для удобства в дальнейшем будем считать, что теплоемкости горячего и холодного тела настолько велики, что отвод от нагревателя теплоты Q_1 и, соответственно, подвод к холодильнику теплоты Q_2 не приводят к сколько-нибудь заметному изменению температуры этих тел. Такие тела называются тепловыми резервуарами. Необходимость нагревателя и рабочего тела обычно не вызывает сомнений, что же касается холодильника, как конструктивной части тепловой машины, то он может отсутствовать. В этом случае его функцию выполняет окружающая среда.

Различают прямой цикл тепловой машины и обратный цикл (холодильная машина). При прямом цикле газ на участке расширения $1 \rightarrow a \rightarrow 2$ (рис. 8.1) совершает работу A_1 за счет подводимой к нему извне теплоты Q_1 от нагревателя. На участке $2 \rightarrow b \rightarrow 1$ над газом совершается работа сжатия A_2 и от него отбирается количество теплоты Q_2 , которое сообщается холодильнику. Так как изменение внутренней энергии газа за полный цикл будет равно нулю, то есть

$\Delta U = 0$, то полезная работа A за цикл, согласно первому началу термодинамики (7.6), равна

$$A = A_1 - A_2 = Q_1 - Q_2. \quad (8.1)$$

Чем большая часть полученного извне тепла Q_1 переходит в полезную работу A , тем эта машина эффективнее. Поэтому тепловую машину принято характеризовать при помощи КПД – коэффициента полезного действия η . КПД тепловой машины называется отношение полезной работы к тепловой энергии, получаемой системой извне, то есть

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (8.2)$$

Из определения КПД следует, что $\eta < 1$.

При обратном цикле газ отбирает от холодильника (холодного резервуара тепла) некоторое количество теплоты Q_2 и отдает нагревателю (горячему резервуару тепла) количество теплоты Q_1 равное сумме количества теплоты Q_2 и работе внешних сил, производящих сжатие газа. Таким образом, в результате осуществления обратного цикла происходит дополнительное охлаждение холодного тела. Обратный цикл представляет собой цикл холодильной установки (холодильной машины). Холодильная машина может быть использована не только для охлаждения различных тел, но и для отопления помещений. Действительно, даже обычный бытовой холодильник, охлаждая помещённые в нём продукты, одновременно нагревает воздух в комнате. Принцип действия, лежащий в основе современных тепловых насосов, заключается в использовании обращённого цикла тепловой машины для перекачки теплоты из окружающей среды в отапливаемое помещение.

8.3. Цикл Карно.

Из различных круговых процессов особое значение в термодинамике имеет цикл Карно. Он состоит из двух изотермических и двух адиабатических процессов (рис. 8.2). Определим его КПД, пользуясь формулой (8.2).

На участке $1 \rightarrow 2$ рабочее тело соединено с нагревателем, и происходит изотермическое расширение идеального газа от объема V_1 до объема V_2 при температуре T_1 нагревателя. По первому началу термодинамики для изотермического процесса (7.19) работа газа $A_{12} = Q_1$ - количеству теплоты, сообщенной газу нагревателем.

На участке 2→3 рабочее тело отсоединяется от нагревателя и совершает адиабатическое расширение от объема V_2 до объема V_3 .

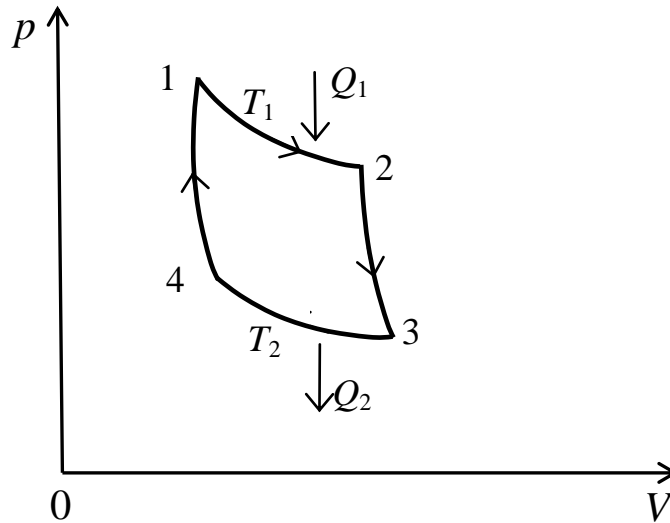


Рис. 8.2

На участке 3→4 рабочее тело подключается к холодильнику с температурой $T_2 < T_1$ и осуществляется процесс изотермического сжатия за счет работы внешних сил. Эта работа будет равна Q_2 - теплоте, передаваемой холодильнику.

Наконец, на участке 4→1 рабочее тело отключается от холодильника и, в процессе адиабатического сжатия, нагревается до исходной температуры T_1 .

С помощью формулы (7.25) для работы идеального газа при адиабатическом процессе можно видеть, что $A_{23} = -A_{41}$. Тогда, полная работа газа, совершаемая за цикл

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = A_{12} + A_{34}.$$

Пользуясь далее выражением (7.9) для работы идеального газа при изотермическом процессе, приходим к выражению для КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Из уравнения адиабаты (7.23), применённой для участков 2–3 и 4–1 следует, что $V_2/V_1 = V_3/V_4$, поэтому после сокращения получим

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (8.3)$$

Цикл Карно замечателен тем, что на всех его участках отсутствует соприкосновение тел с различными температурами. Цикл Карно исключает теплообмен при конечной разности температур рабочего тела и окружающей среды, когда тепло может передаваться без совершения работы. Поэтому цикл Карно – наиболее эффективный круговой процесс из всех возможных при заданных температурах нагревателя и холодильника. Именно по этой причине идеальный цикл Карно характеризуется наибольшим значением КПД в заданном интервале температур нагревателя и холодильника. По сути дела, КПД цикла Карно определяет теоретический предел возможных значений КПД тепловых машин для данного температурного интервала. КПД реальной машины всегда меньше КПД идеальной тепловой машины, то есть

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1} . \quad (8.4)$$

и знак равенства соответствует идеальному циклу Карно.

Оценим верхний предел КПД тепловой машины. Возьмем, например, паровую машину. Пусть максимальная температура пара в котле $t_1 = 150^\circ\text{C}$, температура холодильника $t_2 = 20^\circ\text{C}$ (температура окружающей среды). В абсолютной шкале соответствующие температуры будут $T_1 = 423\text{ К}$ и $T_2 = 293\text{ К}$. КПД такой машины не может превосходить

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{130}{423} \approx 30\% .$$

В действительности КПД паровых машин значительно меньше.

8.4. Второе начало термодинамики

Возникает вопрос, нельзя ли построить периодически действующую тепловую машину без холодильника, то есть добиться того, чтобы $Q_2 = 0$, и следовательно, $\eta = 1$? Такая машина могла бы превращать в работу всю теплоту, заимствованную от одного теплового резервуара. Возможность ее построения не противоречит закону сохранения энергии. По своему практическому значению она почти не уступала бы вечному двигателю (перпетуум мобиле), так как с ее помощью можно было бы производить работу за счет практически неисчерпаемых запасов внутренней энергии, содержащихся в воде океанов и морей, воздушной атмосфере и недрах Земли. Такую машину Вильгельм Оствальд (1853—1932) назвал перпетуум мобиле второго рода в отличие от перпетуум мобиле первого рода, т. е. вечного двигателя, производящего работу из ничего, возможность которого отрицается законом сохранения энергии.

Опытные факты говорят против возможности построения перпетуум мобиле второго рода. Поэтому невозможность построения такого перпетуум мобиле была возведена в постулат. Он называется постулатом второго начала термодинамики. Доказательством этого постулата является согласие всех вытекающих из него следствий с опытом. До сих пор, применяя этот постулат к макроскопическим системам, размеры которых не очень малы, физика нигде не натолкнулась на противоречия. Поэтому постулат второго начала термодинамики покоится на надежной экспериментальной основе. Приведем другие эквивалентные формулировки этого постулата.

Вильям Томсон (получивший позднее за научные заслуги титул лорда Кельвина, 1824 – 1907 гг.) в 1851 г. дал такую формулировку второго начала термодинамики: **«Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы извлечение теплоты из теплового резервуара и превращения её полностью в работу»**

Указание на круговой процесс (то есть периодичность действия тепловой машины) весьма существенно. Действительно, возможен процесс (но не круговой), единственным результатом которого было бы совершение работы (например, поднятие груза) за счет внутренней энергии, заимствованной от теплового резервуара. Примером такого процесса может служить процесс изотермического расширения. Газ, получив количество тепла Q , совершает работу A , причем, согласно первому закону термодинамики $Q = \Delta U + A$. Так как внутренняя энергия идеального газа U зависит только от температуры, которая в описанном процессе не меняется, то $Q = A$ и, таким образом, теплота Q , заимствованная у теплового резервуара, полностью перешла в работу. Это не противоречит второму закону термодинамики, так как описанный процесс не круговой, т. е. машина не является периодически действующей.

Рудольф Клаузиус (1822-1888 гг.) в 1850 г. дал существенно иную формулировку второго закона термодинамики. Он выдвинул следующее положение: **«Теплота не может самопроизвольно переходить от тела менее нагретого к телу более нагретому»**.

Постулат Клаузиуса никоим образом не сводится к утверждению, что при непосредственном тепловом контакте двух тел теплота всегда переходит от тела более нагретого к телу менее нагретому. Это утверждение вообще не составляет содержания какого-либо физического закона, а является просто определением того, какое из двух тел условились называть более, а какое менее нагретым. Передачу тепла можно осуществить не только тепловым контактом, но и множеством других способов. Содержание постулата Клаузиуса как раз и со-

стоит в том, что невозможно каким бы то ни было способом забрать тепло от тела менее нагретого и целиком передать его телу более нагретому и притом так, чтобы в природе больше не произошло никаких изменений. Другими словами: **«Невозможен процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от тела менее нагретого и к телу более нагретому».**

Постулат Клаузиуса не утверждает, что передача тепла от тела менее нагретого к телу более нагретому вообще невозможна. Она невозможна при условии, что во всех остальных телах никаких изменений не должно произойти. В этом смысл слова «самопроизвольно», употребленного при формулировке второго начала термодинамики. Самопроизвольными называются такие процессы, которые происходят без воздействия внешних тел, а значит, без изменений в этих телах. Если же допустить другие процессы, то передача тепла от тела менее нагретого к телу более нагретому становится возможной. Так, в холодильных машинах тепло, заимствованное от менее нагретого тела, передается более нагретому телу. Это не противоречит постулату Клаузиуса, так как такой переход происходит здесь не самопроизвольно, а сопровождается работой электрического мотора. Электрический холодильник перестает действовать, если выключить питающий его ток.

Отметим, что Клаузиусу принадлежит и количественная формулировка второго начала термодинамики, получившая название неравенства Клаузиуса, которое мы рассмотрим более подробно.

Из формулы (8.3) и определения КПД (8.2) следует, что для идеального цикла Карно

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad (8.5)$$

то есть отношение количества переданной теплоты к температуре теплового резервуара (называемое приведенной теплотой) остается неизменным. Рассмотрим произвольный круговой процесс, осуществляемый над идеальным газом, по пути $1 \rightarrow a \rightarrow 2 \rightarrow b \rightarrow 1$ (рис. 8.3). Проведем семейство бесконечно близких адиабат (они отмечены на рисунке зеленым цветом), пересекающих линии a и b . В результате этого линии a и b разобьются на бесконечное число малых отрезков. Через середину каждого такого отрезка проведем изотермы (все изотермы отмечены на рисунке красным цветом) до пересечения с двумя соседними адиабатами. Тогда цикл $1 \rightarrow a \rightarrow 2 \rightarrow b \rightarrow 1$ можно представить себе как совокупность элементарных циклов Карно, состоящих из двух адиабат и двух изотерм.

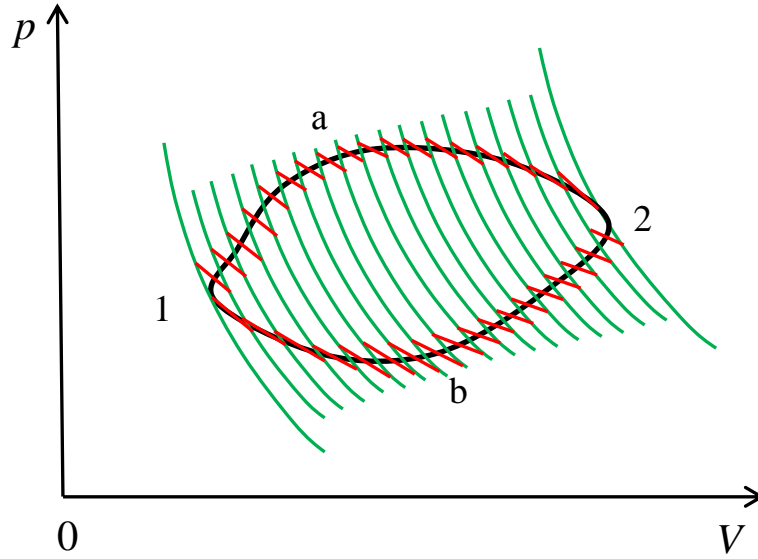


Рис. 8.3

В каждом из этих элементарных циклов подвод и отвод теплоты осуществляются по изотермам с температурами нагревателей $T_{a1}, T_{a2}, T_{a3}, \dots$, сообщаемых рабочему телу количества теплоты $\delta Q_{a1}, \delta Q_{a2}, \delta Q_{a3}, \dots$, и теплоприемников (холодильников) с температурами $T_{b1}, T_{b2}, T_{b3}, \dots$, которым рабочее тело отдает количества теплоты $\delta Q_{b1}, \delta Q_{b2}, \delta Q_{b3}, \dots$. При этом, поскольку каждая из адиабат, исключая две крайние, проходится в совокупности дважды, причем в противоположных направлениях, то суммарная работа цикла при замене его элементарными циклами Карно остается неизменной. Записывая для каждого элементарного цикла Карно соотношение (8.5) и, складывая эти равенства, получим

$$\sum \frac{\delta Q_{ai}}{T_{ai}} = \sum \frac{\delta Q_{bi}}{T_{bi}}. \quad (8.6)$$

Если считать количество теплоты, получаемое от нагревателя, положительным, а, отдаваемое холодильнику – отрицательным, то (8.6) можно записать в виде

$$\sum \frac{\delta Q_i}{T_i} = 0. \quad (8.7)$$

Для реальных тепловых машин получаем, согласно (8.4), неравенство

$$\sum \frac{\delta Q_i}{T_i} < 0. \quad (8.8)$$

В общем случае бесконечно малого разбиения (рис. 8.3) суммы в (8.7) и (8.8) перейдут в интеграл по замкнутому контуру, так что

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0, \quad (8.9)$$

где особый знак интеграла напоминает, что интегрирование идет по произвольному замкнутому циклу и знак неравенства относится к реальной тепловой машине, а знак равенства - к идеальной. Фундаментальное соотношение (8.9) называется неравенством Клаузиуса и является наиболее общей математической формулировкой второго начала термодинамики.

8.5. Обратимые и необратимые процессы

Первый закон термодинамики, как уже сказано, характеризует процессы превращения энергии с количественной стороны. Второй закон термодинамики характеризует качественную сторону этих процессов. Первый закон термодинамики дает все необходимое для составления энергетического баланса какого-либо процесса. Однако он не дает никаких указаний относительно возможности протекания того или иного процесса. Между тем, далеко не все процессы, не противоречащие закону сохранения энергии (первому закону термодинамики), реально осуществимы.

Первое начало термодинамики не дает никаких указаний относительно направления, в котором могут происходить процессы в природе. Например, в каком направлении будет переходить тепло при контакте двух тел с разной температурой - на этот вопрос первое начало термодинамики ответить не может. Первому началу не противоречил бы, например, процесс, в котором тепло самопроизвольно переходит от тела менее нагретого к телу более нагретому. Второе начало термодинамики, наоборот, позволяет судить о направлении процессов, которые могут происходить в действительности.

Обратимым процессом называется такой процесс, который может быть проведен в обратном направлении таким образом, что система будет проходить через те же промежуточные состояния, что и при прямом ходе. Таким образом, при возвращении системы в исходное состояние в окружающих телах не происходит каких-либо изменений. При наличии изменений процесс называется необратимым.

Из повседневной практики известно, что все естественные самопроизвольные процессы, происходящие в природе, являются необратимыми; обратимых самопроизвольных процессов в природе не существует. Рассмотрим примеры некоторых необратимых процессов.

Типичным примером необратимого процесса, сопровождающего многие процессы в природе, является процесс трения. Работа, затрачиваемая на пре-

одоление трения, необратимо превращается в теплоту, выделяющуюся при трении. Если, например, рассмотреть перемещение некоторого тела по поверхности из точки 1 в точку 2, то в этом процессе на преодоление неизбежного трения нужно затратить определенную работу. В обратном процессе, при перемещении тела из точки 2 в точку 1 по тому же самому пути, нужно будет также затратить такую же работу на преодоление трения. Если бы процесс трения был обратим, то работа, затраченная в прямом процессе $1 \rightarrow 2$, должна была бы быть отдана в обратном процессе $2 \rightarrow 1$. Трение является причиной, вызывающей необратимость любых механических процессов. При отсутствии трения любой механический процесс был бы обратимым. Для того чтобы осуществить такой процесс в обратном направлении, достаточно было бы изменить знаки скоростей движения всех элементов системы на противоположные, и тогда система пройдет через все те же состояния, что и в прямом процессе.

Процесс расширения газа в вакуум также является типично необратимым процессом: очевидно, что газ, занимавший ранее объем V_1 и занявший после расширения объем $V_1 + V_2$, сам собой, без затраты работы извне, не сожмется и не соберется вновь в объеме V_1 , освободив объем V_2 .

Часто встречающимся в повседневной практике необратимым процессом является процесс перехода теплоты от тела с более высокой температурой к телу с более низкой температурой. Известно, что если обеспечить контакт двух тел, имеющих различные температуры, то теплота будет переходить от более нагретого тела к менее нагретому, причем этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока температуры тел не сравняются (т.е. пока между телами не установится тепловое равновесие). Необратимость такого процесса непосредственно следует из постулата Клаузиуса. Многовековая практика человечества показывает, что сама собой, без затраты работы извне, теплота не будет переходить от более холодного тела к более горячему.

По завершении самопроизвольных процессов замкнутая система обязательно приходит в состояние равновесия. Как показывает практика, такая система, достигшая равновесия, в дальнейшем в этом состоянии и пребывает, т.е. является неспособной к дальнейшему самопроизвольному изменению своего состояния, это соответствует утверждению о том, что в замкнутой системе всякий самопроизвольный процесс необратим.

Чрезвычайно важно подчеркнуть следующее. Степень необратимости того или иного необратимого процесса может быть различной. В принципе, можно представить себе степень необратимости настолько малой, что процесс будет осуществляться практически обратимо (т.е. неизбежная в любом реальном

процессе необратимость будет неуловимо малой). В этой связи полезно использовать понятие о равновесных (квазистатических) процессах.

Любой неравновесный процесс становится равновесным, если скорость осуществления этого процесса стремится к нулю. Действительно, бесконечно медленное (квазистатическое) проведение процесса делает этот процесс обратимым. При бесконечно медленном процессе рабочее тело проходит через непрерывную последовательность равновесных состояний, которые могут быть воспроизведены при обратном течении процесса. Квазистатические процессы не реализуются в природе, но являются хорошей моделью для описания процессов, протекающих достаточно медленно.

8.6. Энтропия. Закон возрастания энтропии

Рассмотрим некоторый обратимый цикл $1 \rightarrow a \rightarrow 2 \rightarrow b \rightarrow 1$ (рис. 8.3). Равенство Клаузиуса для него можно переписать в виде

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{1a}^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_{2b}^1 \frac{\delta Q}{T} = 0$$

откуда

$$\int_{1a}^2 \frac{\delta Q}{T} = - \int_{2b}^1 \frac{\delta Q}{T} = \int_{1b}^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (8.10)$$

Поскольку интеграл в (8.10) не зависит от пути перехода из состояния 1 в состояние 2, то он выражает изменение некоторой функции состояния системы, названной Клаузиусом энтропией S , причем

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (8.11)$$

Саму энтропию S можно определить лишь с точностью до аддитивной постоянной, т.е. начало отсчета энтропии произвольно. Обычно, выбирается некоторое состояние, которому присваивается значение $S = 0$. Принято считать, что энтропия системы равна нулю при $T = 0$ К (теорема Нернста). Физический смысл имеет лишь разность энтропий. Размерность энтропии $[S] = \text{Дж/К}$.

Допустим, теперь, что система переходит из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2 (рис. 8.4), но процесс перехода является необратимым - на рисунке он изображен красной линией $1 \rightarrow a \rightarrow 2$. Вернем систему из состояния 2 в исходное состояние с помощью обратимого процесса $2 \rightarrow b \rightarrow 1$, изображенного зеленым цветом.

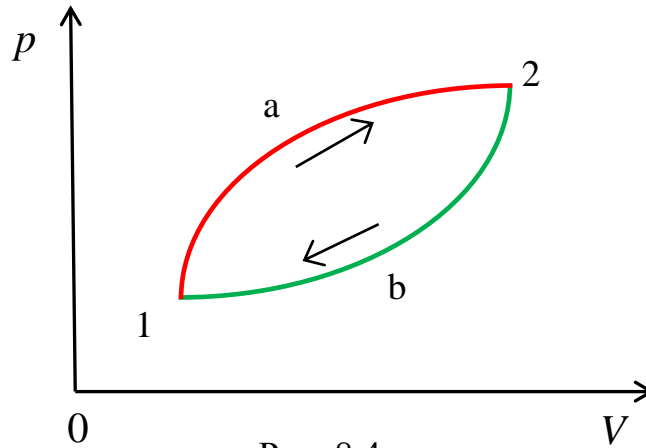


Рис. 8.4

На основании неравенства Клаузиуса (8.9) можно написать

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{1a}^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_{2b}^1 \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (8.12)$$

Так как процесс $2 \rightarrow b \rightarrow 1$ является обратимым, то

$$S_1 - S_2 = \int_{2b}^1 \frac{\delta Q}{T}$$

и неравенство Клаузиуса (8.12) принимает вид

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 \geq \int_{1a}^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (8.13)$$

Подводя итог, можно сделать вывод, что при переходе из одного равновесного состояния системы 1 в другое равновесное состояние системы 2 изменение энтропии определяется соотношением

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad (8.14)$$

причем знак равенства соответствует обратимым процессам, а знак неравенства - необратимым.

Если система теплоизолирована, то $\delta Q = 0$, и интеграл в (8.14) обращается в нуль. Тогда $S_2 \geq S_1$ и, таким образом, энтропия изолированной системы не может убывать; она либо возрастает, либо остается постоянной. Это утверждение называется законом возрастания энтропии. Он был открыт Клаузиусом в 1865 году, а его статистическое обоснование было дано Больцманом в 1870-е годы.

Если $S_2 > S_1$, то переход теплоизолированной системы из состояния 2 в состояние 1 невозможен, так как он сопровождался бы убыванием энтропии.

Наоборот, адиабатический переход системы из состояния 1 с меньшей энтропией в состояние 2 с большей энтропией не противоречит постулату второго начала термодинамики и в этом смысле является возможным. Второе начало, таким образом, позволяет судить о направлении процессов, которые могут происходить в природе.

Следует отметить, что рост энтропии при любом процессе не беспредельен, а продолжается лишь до определенного максимального значения, характерного для данной системы. Это значение энтропии соответствует состоянию равновесия замкнутой системы и после того, как оно достигнуто, какие бы то ни было изменения состояния без внешнего воздействия не происходят.

Энтропия как функция состояния существенно отличается от внутренней энергии. Энергия адиабатически замкнутой системы не может быть создана или уничтожена, а энтропия может создаваться во всяком процессе перехода системы к равновесию. Но однажды созданная, энтропия уже не может быть уничтожена: обратный процесс с уменьшением энтропии в изолированной системе идти не может.

8.7. Энтропия идеального газа

В качестве примера рассмотрим изменение энтропии идеального газа массы m и молярной массы M при обратимом переходе из состояния 1 с параметрами p_1, V_1, T_1 в состояние 2 с параметрами p_2, V_2, T_2 . Используя (8.14) и первый закон термодинамики, получим

$$\Delta S_{12} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}. \quad (8.15)$$

Подставляя в (8.15) для изменения внутренней энергии dU идеального газа выражение (7.16), а для работы $\delta A = pdV$ выражение

$$\delta A = pdV = \frac{m}{M} \frac{RT}{V} dV, \quad (8.16)$$

приходим к формуле

$$\Delta S_{12} = \frac{m}{M} \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (8.17)$$

Видно, что изменение энтропии идеального газа действительно зависит только от начальных и конечных значений параметров, характеризующих систему в состояниях 1 и 2, а не от вида перехода.

Каждый из изопроцессов идеального газа характеризуется своим изменением энтропии, а именно:

- изохорный процесс $\Delta S_{12} = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$, так как $V_1 = V_2$;
- изотермический процесс $\Delta S_{12} = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}$, так как $T_1 = T_2$;
- изобарный процесс $\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} = \frac{m}{M} C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$;
- адиабатический процесс $\Delta S_{12} = 0$, так как $\delta Q = 0$.

Отметим, что в последнем случае $S = \text{const}$, как это и должно быть для обратимого процесса в теплоизолированной системе.

Несмотря то, что формула (8.17) выведена для обратимого процесса, её можно применять и для расчета изменения энтропии при необратимом процессе идеального газа. Действительно, энтропия является функцией состояния системы, поэтому её изменение определяется лишь разностью значений энтропии в конечном и начальном состоянии и не зависит от вида перехода (обратимого или необратимого) между этими состояниями.

В качестве примера рассмотрим процесс расширения идеального газа в вакуум. Пусть, например, идеальный газ заключен в цилиндр с теплонепроницаемыми стенками (рис. 8.5).



Рис. 8.5

Цилиндр разделен на две равные части твердой непроницаемой перегородкой. Сначала газ занимает одну из этих частей с объемом V , а во второй части - вакуум. Затем перегородка убирается, и газ начинает перетекать во вторую часть цилиндра, пока не выровняются давления и температуры в обеих частях. Ясно, что этот процесс является необратимым.

Заметим, что в результате описанного процесса внутренняя энергия идеального газа не меняется, так как он заключен в теплонепроницаемую оболочку и при расширении в вакуум газ не совершает работы. Не меняется и температура идеального газа, поскольку она однозначно определяется его внутренней энергией. Тогда, в соответствии с формулой (8.17), получаем

$$\Delta S_{12} = \frac{m}{M} R \ln \frac{2V}{V} = \frac{m}{M} R \ln 2.$$

Видно, что энтропия в указанном процессе возрастает, как это и должно быть для необратимых процессов в замкнутых системах.

8.8. Статистическое толкование второго начала термодинамики

С точки зрения молекулярно-кинетической теории каждому макроскопическому состоянию системы, которое характеризуется некоторым набором значений ее параметров, соответствует определенное распределение молекул по объему, занимаемому системой, а также распределение молекул по скоростям и энергиям.

Термодинамической вероятностью (статистическим весом) W называется число различных способов, с помощью которых может быть осуществлено данное состояние. Термодинамическая вероятность отличается от математической, которая выражается дробным числом и не может быть больше единицы. W , напротив, представляет собой целое число.

Если замкнутая система не находится в состоянии термодинамического равновесия, то с течением времени ее состояние будет изменяться, пока система в конце концов не придет в состояние полного равновесия. Характеризуя каждое макроскопическое состояние системы распределением, например, энергии между различными подсистемами, мы можем сказать, что ряд последовательно проходимых системой состояний соответствует все более вероятному распределению энергии. Другими словами, система, предоставленная самой себе, будет переходить из менее вероятного состояния в более вероятное состояние. Попад в наиболее вероятное состояние, система будет находиться в нем как угодно долго.

Связь между термодинамической вероятностью состояния системы и ее энтропией была установлена в 1875 г. двумя знаменитыми учеными – Д. Гиббсом и Л. Больцманом. Эта связь выражается формулой Больцмана, которая имеет вид

$$S = k \ln W, \quad (8.18)$$

где k - постоянная Больцмана. Таким образом, увеличение энтропии при переходе изолированной системы в равновесное состояние можно интерпретировать просто как переход системы в более вероятное состояние. Наибольшая вероятность соответствует состоянию равновесия, поэтому энтропия замкнутой системы будет расти до того момента, когда система придет в это состояние равновесия.

Понятно, что процесс увеличения энтропии в замкнутой системе является необратимым именно вследствие того, что обратный ему процесс маловероя-

тен. Таким образом, процессы, невозможные по второму началу термодинамики (например, самопроизвольный переход теплоты от более холодного тела к более горячему) на самом деле является только очень маловероятным.

Говоря о маловероятном процессе, надо иметь в виду, что в действительности вероятность перехода в состояние с большей энтропией настолько подавляюще велика по сравнению с вероятностью сколько-нибудь заметного ее уменьшения, что последнее вообще фактически никогда не может наблюдаться в природе.

МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

Постулаты специальной теории относительности

Напомним, что теория относительности описывает физические процессы при скоростях частиц, сравнимых по порядку величины со скоростью света в вакууме ($c \approx 300\,000$ км/с). Такие процессы называют релятивистскими.

Ряд экспериментов показали, что скорость света в вакууме одинакова в различных инерциальных системах отсчета, что противоречило закону сложения скоростей классической механики Ньютона. Выход был найден Альбертом Эйнштейном в 1905 г.

В основу его новой теории легли два постулата:

- 1) принцип относительности – все физические процессы протекают одинаково в различных инерциальных системах отсчета;
- 2) принцип постоянства скорости света – скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости источника и приемника световой волны.

Эйнштейн предположил, что любое тело, имеющее массу m , будет обладать энергией

$$E_0 = mc^2, \quad (1)$$

эту энергию он назвал энергией покоя. Полная энергия тела, движущегося со скоростью v , будет описываться выражением

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2)$$

тогда как кинетическая энергия (энергия движения) релятивистской частицы будет представлять собой разность полной энергии и энергии покоя

$$T = E - E_0 = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right]. \quad (3)$$

Релятивистским импульсом называется величина равная

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4)$$

Можно убедиться, что при $v \ll c$ выражение для релятивистской кинетической энергии (3) переходит в $T = mv^2/2$, а выражение для релятивистского импульса (4) – в $\vec{p} = m\vec{v}$. В релятивистской механике выполняется закон сохранения импульса и энергии, при этом классический закон сохранения импульса и энергии соответственно являются их частными случаями при $v \ll c$.

Заменяя во втором законе Ньютона классический импульс на релятивистский (4), получим уравнение движения релятивистской частицы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \vec{F} \quad (5)$$

Комбинируя (2) и (4) можно выразить полную энергию через импульс

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \quad (6)$$

Сокращение длины и эффект замедления времени

Из постулатов теории относительности следует зависимость длин и промежутков времени от выбора инерциальной системы отсчета.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' , (рис. 1) причем K' движется относительно K со скоростью \vec{v} , при этом y и y' , z и z' остаются параллельными друг другу, а направления x , x' и \vec{v} совпадают.

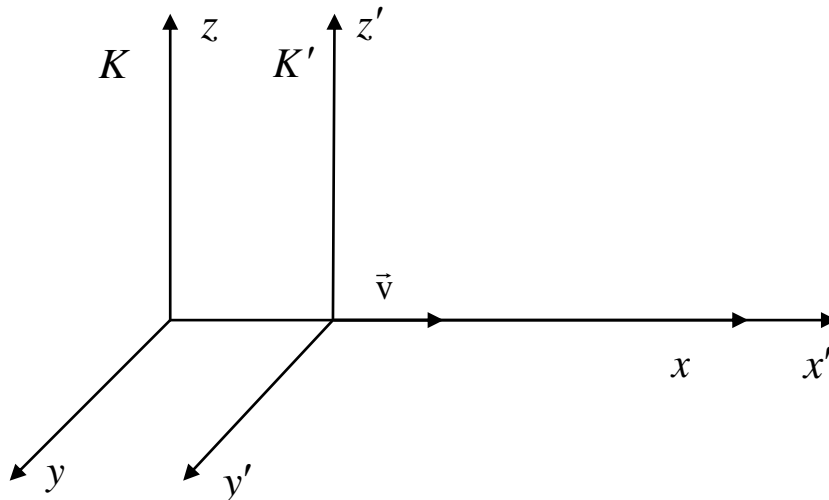


Рис. 1.

Пусть имеется стержень, покоящийся относительно системы K' и параллельный оси x' , тогда длины стержня l и l_0 в системах K и K' , соответственно, связаны между собой соотношением

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (7)$$

где l_0 называется собственной длиной стержня.

Теперь возьмем пару часов, и пусть одни часы покоятся относительно системы K , а другие относительно K' , тогда промежутки времени, измеряемые по этим часам t и t_0 , соответственно, будут связаны уравнением:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (8)$$

Теория относительности Эйнштейна нашла подтверждение в многочисленных экспериментах. Так, покоящийся свободный нейтрон (не входящий в состав ядра) является нестабильной частицей и распадается за время порядка 11 минут (время жизни нейтрона). Если же свободный нейтрон будет двигаться со скоростью $v \sim c$ относительно лабораторной системы отсчета, его время жизни возрастает. Это возрастание хорошо описывается уравнением (8).

РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Отступления от законов идеального газа

Экспериментальные исследования реальных газов, проведенные в широком диапазоне давлений, показали, что произведение объема газа на давление pV может изменяться при постоянной температуре газа, то есть закон Бойля-Мариотта $pV = \text{const}$ может не выполняться. Причина отклонения экспериментальных зависимостей для реальных газов от основных газовых законов заключается в невыполнении для этих газов условий идеальности из-за сил межмолекулярного взаимодействия и конечности размеров молекул.

У реальных газов произведение pV меняется с давлением так, как будто при малых давлениях сопротивление сжатию меньше, а при больших давлениях — больше, чем для идеального газа. Это указывает на то, что при малых плотностях газа в нем действуют дополнительные силы притяжения, а при больших плотностях — силы отталкивания.

Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия

Силы, действующие между молекулами, имеют в своей основе электрическую природу, поскольку атомы, составляющие молекулу, сами состоят из положительно заряженного ядра и окружающей это ядро отрицательно заря-

женной электронной оболочки. Таким образом, многоатомные молекулы представляют собой сложные электрические системы.

При взаимодействии молекул на малых расстояниях преобладают силы отталкивания, а на больших расстояниях – силы притяжения. Поэтому потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия $U(r)$ должна содержать два слагаемых: отрицательную энергию взаимодействия притягивающихся зарядов и положительную энергию – отталкивающихся.

Какой – либо универсальной формы для потенциальной энергии $U(r)$ (r – расстояние между молекулами), пригодной для всех типов молекул, не существует. Типичный график зависимости $U(r)$ приведен на рис. 2.

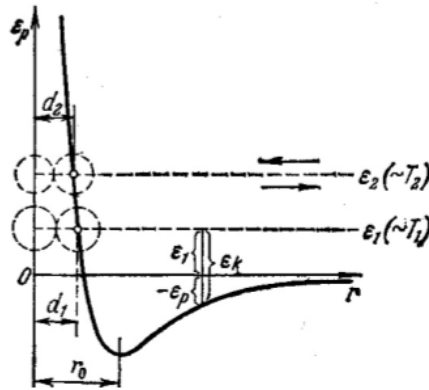


Рис. 2

На расстоянии r_0 между центрами двух молекул силы притяжения и отталкивания равны между собой. Это соответствует минимуму потенциальной энергии системы. Если молекулы сближаются, то силы отталкивания очень быстро нарастают, и поэтому обязательно наступит момент, когда молекулы начнут разлетаться. Следовательно, механизм соударения молекул в реальном газе иной, чем в идеальном, а именно, отсутствует прямой упругий удар. Молекулы реального газа не сближаются до соприкосновения.

Уравнение Ван-дер-Ваальса

Один из способов учета конечных размеров молекул и потенциальной энергии их взаимодействия состоит в том, чтобы ввести соответствующие поправки на давление и объем в уравнение Клапейрона – Менделеева

$$(p + p')(V + V') = RT. \quad (9)$$

Полученное таким образом уравнение называется уравнением Ван-дер-Ваальса. В (9) оно записано для одного моля газа.

Для вычисления поправки p' – дополнительного молекулярного давления моля газа, обусловленного наличием потенциальной энергии взаимодействия

молекул, рассмотрим молекулы на границе газа в сосуде. Они притягиваются другими молекулами внутри газа, что создает эффективное дополнительное давление, пропорциональное числу частиц, приходящихся на единицу площади границы, и пропорциональное силе, с которой каждая частица вблизи границы втягивается другими частицами. Эта сила, в свою очередь, пропорциональна числу частиц, которые участвуют в ее создании, и, следовательно, пропорциональна концентрации частиц n . Поэтому дополнительное давление должно быть пропорционально n^2 , то есть обратно пропорционально квадрату объема, то есть $p' = a/V^2$.

Учет конечного объема молекул приводит к тому, что в уравнении состояния газа доступным для измерения является не весь объем, а лишь его часть $(V - b)$, то есть $V' = -b$.

В итоге, для одного моля газа уравнение (9) запишется в виде

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (10)$$

Если газ взят в количестве m/M молей, то получаем следующее уравнение

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \frac{m^2}{M^2}\right)\left(V - \frac{m}{M}b\right) = \frac{m}{M}RT. \quad (11)$$

Величины a и b различны для разных газов. Их значения занесены в таблицы.

Внутренняя энергия реального газа

У идеального газа внутренняя энергия U определяется кинетической энергией поступательного и вращательного движений молекул. В реальном газе необходимо учитывать также потенциальную энергию взаимодействия молекул U' , зависящую от Ван-дер-Ваальсовских сил

$$U = \int p' dV = \int \frac{adV}{V^2} = -\frac{a}{V} + \text{const} \quad (12)$$

Отметим, что при стремлении объема V к бесконечности потенциальная энергия U' стремится к нулю. Поэтому постоянная интегрирования в (12) должна обращаться в нуль. Таким образом, выражение для внутренней энергии одного моля реального газа принимает вид

$$U = C_V T - \frac{a}{V}, \quad (13)$$

где C_V - молярная теплоемкость при постоянном объеме.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3-х томах. Том 1. Механика. Молекулярная физика – СПб.: Издательство «Лань», 2018. – 432 с.
2. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики. В 3-х томах. Том 1. Механика. Теплота. Молекулярная физика - М.: Физматлит, 2016. - 612 с.
3. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. В 5-и томах. Том 1. Механика - М.: Физматлит, 2013. – 560 с.
4. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. В 5-и томах. Том 2. Термодинамика и молекулярная физика - М.: Физматлит, 2017. - 544 с.
5. Трофимова Т.И. Курс физики. –М.: Издательский центр «Академия», 2016. – 560 с.
6. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2016. – 718 с.
7. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. - М.: Бином. Лаборатория знаний, М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. – 309 с.
8. Иродов И.Е. Физика макросистем. Основные законы. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015. – 208 с.