

Лекция 9

4.6 Прохождение плоских волн через плоско слоистую среду

Под плоско слоистой средой в электродинамике понимают ряд граничащих друг с другом сред с различными параметрами и параллельными границами раздела. Простейшим случаем такой среды является слой диэлектрика, находящийся в воздухе. Такие конструкции применяются на практике. Рассмотрим прохождение плоской волны через бесконечный в поперечных размерах слой диэлектрика толщиной d . Будем считать, что на слой из первой среды падает плоская линейно поляризованная волна, имеющая параллельную или перпендикулярную поляризацию.

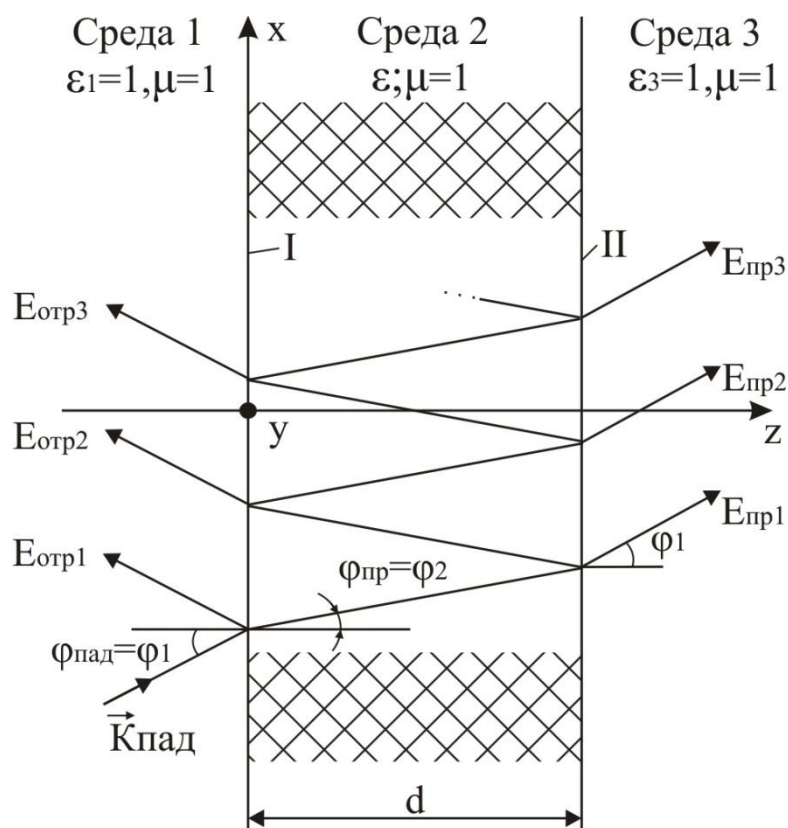


Рис.4.9 Прохождение плоской волны через слой диэлектрика.

На границе раздела I образуется отраженная и преломленная волны. Преломленная волна двигается в слое диэлектрика, получая фазовый сдвиг и, возможно, затухание, если $tg\delta \neq 0$. Эта волна достигает границы II , где также происходит процесс преломления и отражения. Понятно, что в дальнейшем, волна, отразившаяся от границы II внутрь слоя, будет испытывать бесконечные отражения от границ I и II и постепенно уменьшаться по амплитуде. Ее мощность распределяется между волнами, которые возникают в среде 1 и среде 3 при преломлении переотражающейся волны на границах I и II , и частично тратится на потери внутри слоя. Таким образом, в первой среде возникает множество волн, распространяющихся так же, как первая отраженная волна. Они образуют суммарную отраженную

волну. В третьей среде также образуется суммарное, прошедшее через слой, поле. Используя обозначения рис.4.9 можно записать:

$$\begin{aligned} E_{\Sigma na\partial} &= E_{1na\partial} + E_{2na\partial} + E_{3na\partial} + \dots, \\ E_{\Sigma np} &= E_{1np} + E_{2np} + E_{3np} + \dots, \end{aligned} \quad (4.59)$$

Для нахождения комплексных амплитуд суммарных отраженных и преломленных волн необходимо определить вид членов в (4.59) и разновидность рядов. Рассмотрим вначале $E_{\Sigma np}$. Пусть комплексная амплитуда падающей волны на границе I равна $E_{na\partial}$. Тогда после преломления на границе I амплитуда волны будет равна $E_{na\partial} \cdot T_{12}$, где T_{12} - коэффициент преломления при прохождении из среды 1 в среду 2, определяемый формулами Френеля. Эта волна распространяется в слое под углом ϕ_2 к оси z и у границы II будет равна $E_{na\partial} \cdot T_{12} \cdot e^{-jk_2 l}$, где k_2 - волновое число для 2 среды, l - расстояние, которое проходит волна в слое. Волна преломляется на границе II, образуя волну E_{np1} . Очевидно, учитывая, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ и $T_{23} = T_{21}$:

$$E_{np1} = E_{na\partial} \cdot T_{12} \cdot e^{-jk_2 l} \cdot T_{21}. \quad (4.60)$$

Для формирования волны E_{np2} , поле падающей на границу II волны внутри слоя, должно отразиться от границы II, пройти через слой в обратном направлении, отразиться от границы I, вновь пройти через слой. Поэтому:

$$\begin{aligned} E_{np2} &= E_{na\partial} \cdot T_{12} \cdot e^{-jk_2 l} \cdot \Gamma_{21} \cdot e^{-jk_2 l} \cdot \Gamma_{21} \cdot e^{-jk_2 l} \cdot T_{21} = \\ &= E_{na\partial} \cdot T_{12} \cdot T_{21} \cdot \Gamma_{21}^2 \cdot e^{-j3k_2 l} = E_{na\partial} \cdot \Gamma_{21}^2 \cdot e^{-j2k_2 l}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Очевидно, что и другие волны E_{npi} будут образовываться подобным образом. Поэтому ряд $E_{\Sigma np}$ в (4.58) образует бесконечную геометрическую прогрессию, первый член которой a_1 равен E_{np1} , а знаменатель q имеет вид:

$$q = \Gamma_{21}^2 e^{-j2k_2 l}. \quad (4.62)$$

Заметим, что при $\varepsilon > 1$, $|\Gamma_{21}| < 1$, $|q| < 1$, поэтому прогрессия сходящаяся и ее сумму можно найти по известной формуле:

$$E_{\Sigma np} = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{E_{np1}}{1 - \Gamma_{21}^2 \cdot e^{-j2k_2 l}} = E_{na\partial} \frac{T_{12} \cdot T_{21} \cdot e^{-j2k_2 l}}{1 - \Gamma_{21}^2 \cdot e^{-j2k_2 l}}. \quad (4.63)$$

Получим подобным образом формулу для $E_{\Sigma omp}$ и затем приведем оба соотношения к более удобному виду.

Очевидно, что комплексная амплитуда $E_{omp1} = E_{na\partial} \cdot T_{12}$. Волна E_{omp2} получается в результате преломления падающей волны на границе I,

прохождения через слой, отражения от границы II, обратного нахождения волны через слой и преломления на границе I, поэтому она равна

$$E_{omp2} = E_{nad} T_{12} e^{-jk_2 l} \Gamma_{21} e^{-jk_2 l} T_{21}. \quad (4.64)$$

Последующие отраженные волны образуются подобно тому, как образуются последующие преломленные волны, например:

$$E_{omp3} = E_{omp2} \Gamma_{21}^2 e^{-j2k_2 l}. \quad (4.65)$$

Это означает, что выражение $E_{\Sigma omp}$ в (4.59) за исключением первого члена является также бесконечной геометрической прогрессией с первым членом $a_1 = E_{omp2}$ и знаменателем q . Поэтому:

$$\begin{aligned} E_{\Sigma omp} &= E_{omp1} + \frac{E_{omp2}}{1 - \Gamma_{21}^2 \cdot e^{-j2k_2 l}} = \\ &= E_{nad} \left(T_{12} + \frac{T_{12} \cdot T_{21} \cdot \Gamma_{21} \cdot e^{-j2k_2 l}}{1 - \Gamma_{21}^2 \cdot e^{-j2k_2 l}} \right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Отметим, что (4.66) описывает суммарную отраженную волну в среде 1 на границе I, (4.63) описывает суммарную проходящую волну к среде 3 на границе II, значение E_{nad} в обеих формулах относится к среде 1, границе I. Граница I часто называется «освещенной», граница II – «теневой».

Дадим определения:

Коэффициент отражения плоской волны от слоя диэлектрика Γ_{Σ} - отношение комплексной амплитуды суммарной отраженной волны к комплексной амплитуде падающей волны, определяемое на освещенной границе слоя.

Коэффициент прохождения плоской волны через слой диэлектрика T_{Σ} - отношение комплексной амплитуды суммарной преломленной волны на теневой границе слоя к комплексной амплитуде падающей волны на освещенной границе слоя. Из (4.63) и (4.66) следует:

$$T_{\Sigma} = \frac{T_{12} \cdot T_{21} \cdot e^{-jk_2 l}}{1 - \Gamma_{21}^2 \cdot e^{-j2k_2 l}}, \quad \Gamma_{\Sigma} = T_{12} + \frac{T_{12} \cdot T_{21} \cdot \Gamma_{21} \cdot e^{-j2k_2 l}}{1 - \Gamma_{21}^2 \cdot e^{-j2k_2 l}}. \quad (4.67)$$

Если подставить в полученные формулы значения коэффициентов отражения и преломления на границах раздела сред из формул Френеля (4.53) и (4.56), подставить значения $k_2 l$ в показатели экспонент, учитывая представления (4.42, 4.43), то путем громоздких преобразований можно получить следующие формулы:

$$T_{\Sigma\parallel} = \frac{1}{ch j\beta + \frac{1}{2} \left(\frac{W_1 \cos \phi_1}{W_2 \cos \phi_2} + \frac{W_2 \cos \phi_2}{W_1 \cos \phi_1} \right) sh j\beta},$$

$$T_{\Sigma\perp} = \frac{1}{ch j\beta + \frac{1}{2} \left(\frac{W_1 \cos \phi_2}{W_2 \cos \phi_1} + \frac{W_2 \cos \phi_1}{W_1 \cos \phi_2} \right) sh j\beta},$$
(4.68)

$$G_{\Sigma\parallel} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{W_2 \cos \phi_2}{W_1 \cos \phi_1} + \frac{W_1 \cos \phi_1}{W_2 \cos \phi_2} \right) sh j\beta}{ch j\beta + \frac{1}{2} \left(\frac{W_1 \cos \phi_1}{W_2 \cos \phi_2} + \frac{W_2 \cos \phi_2}{W_1 \cos \phi_1} \right) sh j\beta},$$

$$G_{\Sigma\perp} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{W_2 \cos \phi_1}{W_1 \cos \phi_2} + \frac{W_1 \cos \phi_2}{W_2 \cos \phi_1} \right) sh j\beta}{ch j\beta + \frac{1}{2} \left(\frac{W_1 \cos \phi_2}{W_2 \cos \phi_1} + \frac{W_2 \cos \phi_1}{W_1 \cos \phi_2} \right) sh j\beta},$$

$$\text{где } \beta = \frac{2\pi d}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon' (1 - tg \delta)} \cos \phi_2; \phi_2 = \arcsin \left(\frac{\sin \phi_1}{Re \left\{ \sqrt{\varepsilon' (1 - tg \delta)} \right\}} \right).$$

Эти соотношения путем подобных рассуждений впервые были получены известным математиком Эйри, и часто называются формулами Эйри. Формулы можно легко преобразовать для случая $\varepsilon_3 \neq \varepsilon_1$.

Для определения коэффициентов прохождения и отражения от плоскостойкой среды, содержащей более одного слоя диэлектрика чаще всего используется матричный подход, описанный в [2]. Здесь приведем только окончательные соотношения, используя обозначения рис.4.10.

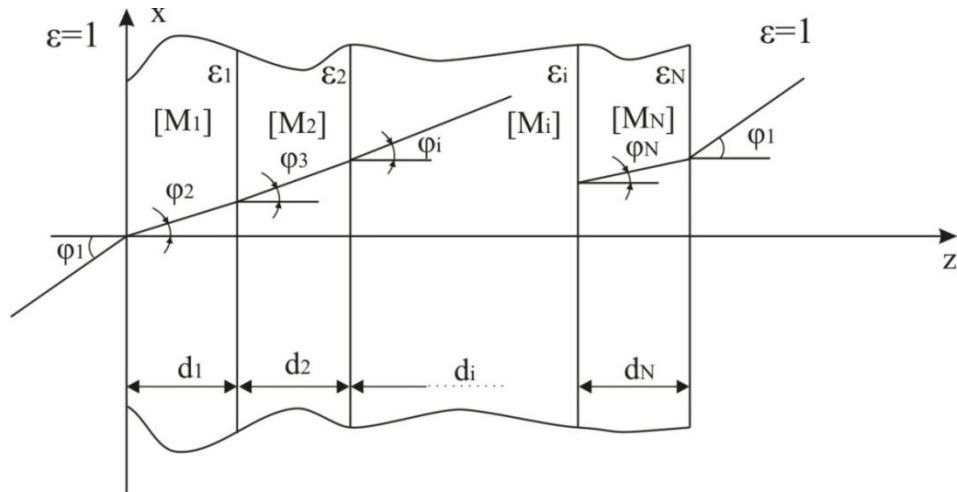


Рис.4.10. Прохождение плоской волны через плоскостойкую среду

Каждый слой плоскостойкой среды описывается характеристической матрицей (или матрицей передачи), имеющей следующий вид для различных поляризаций:

$$[M_{i\parallel}] = \begin{bmatrix} ch j\beta_i & \frac{W_0 \cos \phi_1}{W_i \cos \phi_i} sh j\beta_i \\ \frac{W_i \cos \phi_i}{W_0 \cos \phi_0} sh j\beta_i & ch j\beta_i \end{bmatrix}$$

или

$$[M_{i\perp}] = \begin{bmatrix} ch j\beta_i & \frac{W_i \cos \phi_i}{W_0 \cos \phi_1} sh j\beta_i \\ \frac{W_0 \cos \phi_0}{W_2 \cos \phi_i} sh j\beta_i & ch j\beta_i \end{bmatrix},$$

$$\text{где } \beta_i = \frac{2\pi d}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon'_i (1 - jtg \delta_i) \cos \phi_i}; \phi_i = \arcsin \left(\frac{\sin \phi_1}{Re \left\{ \sqrt{\varepsilon'_i (1 - jtg \delta_i)} \right\}} \right).$$

Вся плоскостойкая среда описывается матрицей M_Σ , которая равна произведению всех матриц слоев, вычисляемому в такой же последовательности, как проходит через слоистую среду падающая волна.

$$M_\Sigma = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_i \cdot \dots \cdot M_N = \prod_{i=1}^N M_i = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Коэффициенты отражения и прохождения плоской волны через слой определяются через элементы суммарной матрицы передачи плоскостойкой среды по формулам:

$$T_\Sigma = \frac{2}{m_{11} + m_{12} + m_{21} + m_{22}},$$

$$\Gamma_\Sigma = \frac{(m_{11} + m_{12}) - (m_{21} + m_{22})}{m_{11} + m_{12} + m_{21} + m_{22}}. \quad (4.71)$$

Эти соотношения используются на практике, например при расчете обтекателей и укрытий антенн СВЧ. Из них можно получить и формулы Эйри для соответствующей задачи.

4.7 Представление электромагнитных полей в виде разложения по плоским волнам

В подразделе 3.4 отмечалось, что плоские волны вида (4.45) являются собственными функциями волнового уравнения для свободного пространства. Поэтому любое электромагнитное поле в среде можно представить в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся под всевозможными углами. Рассмотрим, в каком виде можно записать такое

представление. Предположим для удобства, что поле в среде является линейно – поляризованным и имеет компоненту E_x , а $E_y = 0$. Пусть на некоторой условной поверхности, например, удовлетворяющей соотношению $z = 0$, поле имеет распределение $E_x = (x, y)$. Очевидно, что компонента E_x выделяется из (4.45) скалярным произведением

$$E_x = \vec{x}_0 \vec{E}_0 = \vec{x}_0 \vec{E}_0 \exp[-jk(xS_1 + yS_2 + zc)],$$

где S_1, S_2, c – направляющие косинусы волнового вектора: $S_1 = \sin \theta \cos \phi$; $S_2 = \sin \theta \sin \phi$; $c = \cos \theta$.

В плоскости $z = 0$ последний член в показателе экспоненты исчезает, тогда произвольное поле на поверхности можно записать в виде суперпозиции:

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= \iint_{S_1 S_2} \vec{x}_0 \vec{E}_0(S_1, S_2) \exp[-jk(xS_1 + yS_2)] dS_1 dS_2 = \\ &= \vec{x}_0 \iint_{S_1 S_2} \vec{E}_0(S_1, S_2) \exp[-jk(xS_1 + yS_2)] dS_1 dS_2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Так как плоские волны поперечны, то при $E_y = 0$ $E_x = |\vec{E}_0| \cos \theta = |\vec{E}_0| C$: и $E_z = |\vec{E}_0| \sin \theta = |\vec{E}_0| \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$, и также $C = \sqrt{1 - (S_1^2 + S_2^2)}$.

Если ввести обозначение $\vec{E}_0(x, y)|_{z=0} = |\vec{E}_0| C \vec{x}_0 + |\vec{E}_0| \sqrt{S_1^2 + S_2^2} \vec{z}_0$, то можно (4.72) переписать в виде:

$$\vec{E}_0(x, y)|_{z=0} = \iint_{S_1 S_2} \vec{E}_0(S_1, S_2) \exp[-jk(xS_1 + yS_2)] dS_1 dS_2. \quad (4.73)$$

Это соотношение по форме совпадает с двумерным интегральным преобразованием Фурье, для которого существует обратное преобразование:

$$\vec{E}_0(S_1, S_2)|_{z=0} = K \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_0(x, y)|_{z=0} \exp[jk(xS_1 + yS_2)] dx dy. \quad (4.74)$$

Это выражение представляет поле в пространстве как суперпозицию плоских волн или угловой спектр плоских волн. Поле представляется в виде подынтегрального выражения (4.72), амплитуда волн определяется (4.74).