# ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №13

# ЛИНЕЙНЫЕ УЗКОПОЛОСНЫЕ ЦЕПИ

Для передачи и преобразования сигналов, как правило, используются узкополосные цепи. Радиотехническая цепь называется узкополосной или избирательной (по частоте), если её частотная характеристика отлична от нуля в некоторой полосе частот, чья ширина значительно меньше средней (несущей) частоты сигнала $\omega_в - \omega_н = \Delta\omega \ll \omega_0$, где $\omega_в -$верхняя частота среза, $\omega_н -$нижняя частота среза; или относительная ширина полосы пропускания $\Delta\omega/\omega_0$ менее 5%. В *узкополосной цепи* при комплексной нагрузке (активная и реактивная составляющие) можно добиться согласования, близкого к оптимальному (в широкополосных только с активной нагрузкой).

Большая часть радиосигналов относятся к узкополосным сигналам, хотя сейчас применяются широко- и сверхширокополосные сигналы, ширина полосы которых может достигать нескольких гигагерц.

Линейные узкополосные цепи, как уже было сказано, являются избирательными по частоте, т.е. *фильтрам*, которые пропускают лишь те колебания, которые попадают в область *полосы пропускания* фильтра.

## Узкополосная цепь и низкочастотный эквивалент

При анализе и описании узкополосной цепи (определения характеристик) используют низкочастотный эквивалент, т.е. «переносят» (рис. 1) полосу пропускания с центральной частоты $\omega_0$ на нулевую частоту $\omega = 0$. Это позволяет упростить анализ.

В качестве характеристик линейной цепи рассматривались импульсная и частотная характеристики, связанные преобразованием Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t}d\omega; \quad H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt.$$

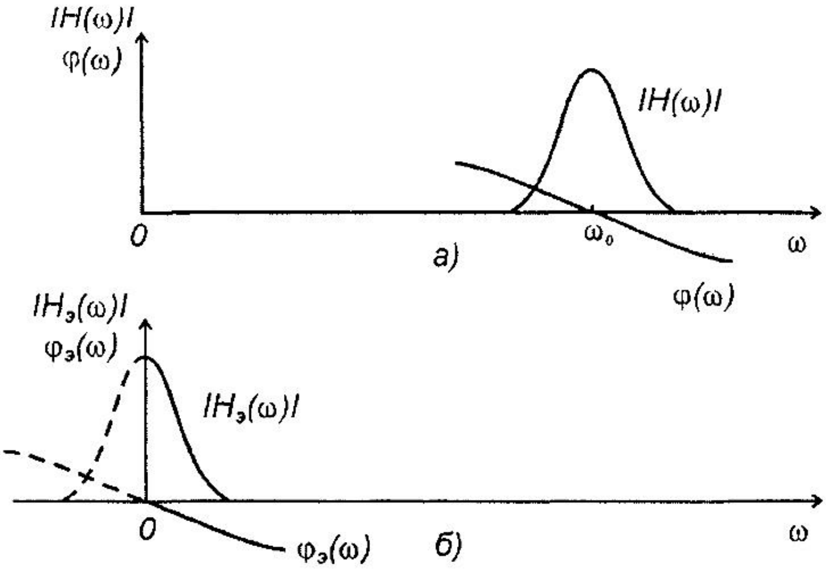


*Рис. 1 – Перенос частотной характеристики в область низких частот*

Для низкочастотного эквивалента частотная характеристика переносится на нулевую частоту. Для области положительных частот:

$$H(\omega) = H_э(\omega - \omega_0).$$

Обычно, частотная характеристика симметрична относительно центральной частоты

$$\left|H(\omega_0 + \omega)\right| = \left|H(\omega_0 - \omega)\right|, \;\; \varphi(\omega_0 + \omega) = -\varphi(\omega_0 - \omega).$$

Цепь с такой частотной характеристикой – низкочастотный эквивалент. Частотной характеристике низкочастотного эквивалента соответствует импульсная характеристика

$$h_э(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_э(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Для симметричной частотной характеристики и с учётом, что ИХ – действительная функция времени:

$$h(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega\right].$$

$$h(t) = 2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} H_э(\omega-\omega_0)e^{i\omega t}d\omega\right] =$$

$$= 2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}e^{i\omega_0 t}\int_0^{\infty} H_э(\omega-\omega_0)e^{i(\omega-\omega_0)t}d(\omega-\omega_0)\right].$$

Однако, с учётом узкополосности цепи, нижний предел можно заменить на -∞.

$$h(t) = 2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}e^{i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} H_э(x)e^{i(x)t}d(x)\right] = 2\operatorname{Re}\left[h_э(t)e^{i\omega_0 t}\right],$$

где $x = \omega - \omega_0$.

Это выражение определяет связь импульсных характеристик узкополосной цепи и её низкочастотного эквивалента. Соотношение для всей оси частот можно получить через преобразование Фурье

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{i\omega t}dt = 2\int_0^{\infty}\operatorname{Re}\left[h_э(t)e^{i\omega_0 t}\right]dt.$$

Воспользовавшись $\operatorname{Re}[z] = 1/2(z + z^*)$, получим

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[h_э(t)e^{i\omega_0 t} + h_э^*(t)e^{-i\omega_0 t}\right]e^{i\omega_0 t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h_э(t)e^{i(\omega-\omega_0)t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i(\omega+\omega_0)t}dt.$$

$$H(\omega) = H_э(\omega-\omega_0) + H_э^*(\omega+\omega_0)$$

Низкочастотный эквивалент узкополосной цепи, это математическая модель цепи, позволяющий упростить анализ.

***Характеристики LRC-цепи***

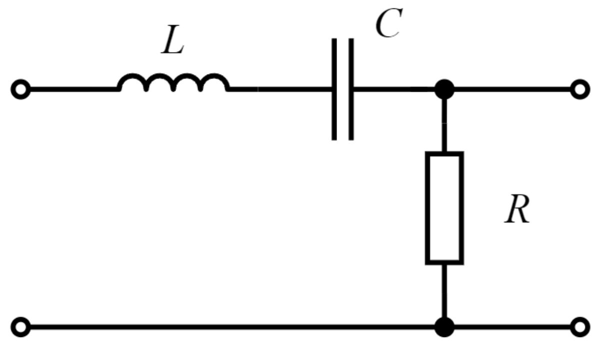


*Рис. 2 – LCR-цепь*

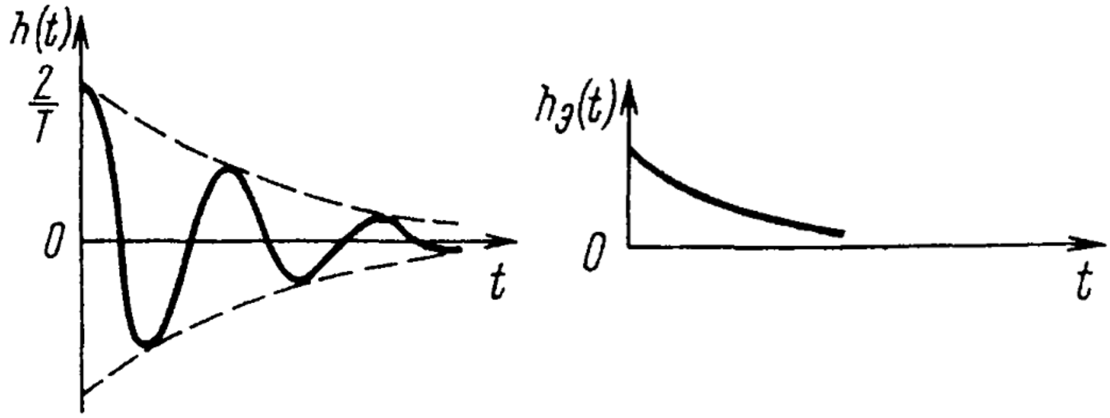


*Рис. 3 – импульсная характеристика УЦ (слева), ИХ низкочастотного эквивалента (спарава).*

Частотная характеристика цепи

$$H(\omega)=\frac{R}{R+i\omega L+\dfrac{1}{i\omega C}}.$$

Центральную частоту ЧХ можно принять - $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, тогда выражение для ЧХ можно преобразовать к виду:

$$H(\omega)=\frac{R}{1+i\left(\omega-\omega_0\right)\tau},$$

где $\tau = 2L/R$. А ЧХ низкочастотного эквивалента:

$$H_э(\omega)=\frac{R}{1+i\omega\tau}.$$

Импульсная характеристика эквивалентной низкочастотной (рис. 3) цепи соответствует огибающей импульсной характеристики узкополосной цепи и описывается выражением

$$h_э(t) = \frac{1}{\tau e^{-t/\tau}}.$$

От импульсной характеристики НЧЭ можем перейти к ИХ узкополосной цепи:

$$h(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}e^{i\omega t}\right] = \frac{2}{\tau}e^{-t/\tau}\cos\left(\omega_0 t\right).$$

## Прохождение узкополосного сигнала через узкополосную цепь

Анализ прохождения сигнала через узкополосную цепь наиболее удобно проводить с использованием комплексного представления сигналов. Метод комплексной огибающей (КО) – приближённый метод анализа прохождения сигналов через цепи.

Узкополосный сигнал в комплексной форме:

$$s_{вх}(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}_1(t)e^{i\omega_0 t}\right],$$

где $\dot{U}_1(t) = U_1(t)e^{i\varphi_1(t)}$ - его комплексная огибающая.

Метод КО состоит в нахождении комплексной огибающей выходного сигнала

$$\dot{U}_2(t) = U_2(t)e^{i\varphi_2(t)}$$

$$s_{вых}(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}_2(t)e^{i\omega_0 t}\right].$$

Определить огибающую и фазу выходного радиосигнала как модуль и аргумент комплексной огибающей:

$$U_2(t) = \left|\dot{U}_2(t)\right|, \quad \varphi_2 = \arg\left(\dot{U}_2(t)\right).$$

$$s_{вых}(t) = U_2(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_2(t)).$$

Узкополосная линейная цепь имеет АЧХ, значения которой значительно отличны от нуля только в небольшой полосе частот вокруг центральной частоты.

Спектральная функция входного сигнала:

$$S_{вх}(\omega) = \frac{1}{2} S_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} S_1^*(-\omega - \omega_0)$$

Для определения спектральной функции выходного сигнала (через его огибающую) потребуется спектральный метод. Нужно подставить последнее выражение в:

$$S_{вых}(\omega) = S_{вх}(\omega) H(i\omega),$$

и получим

$$s_{вых}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega - \omega_0) H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \; +$$

$$+ \; \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1^*(-\omega - \omega_0) H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Интегралы можно преобразовать, сделав замену переменной интегрирования $\omega$: в первом интеграле $\omega = \omega_0 + \Omega$, а во втором интеграле $\omega = -\omega_0 - \Omega$. Тогда запишем выражение в виде:

$$s_{вых}(t) = \left[ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\Omega) H(i[\omega_0 + \Omega]) e^{i\Omega t} d\Omega \right] e^{i\omega_0 t} +$$

$$+ \left[ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1^*(\Omega) H(i[\omega_0 + \Omega]) e^{-i\Omega t} d\Omega \right] e^{-i\omega_0 t}.$$

$$s_{вых}(t) = \mathrm{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\Omega) H(i[\omega_0 + \Omega]) e^{i\Omega t} d\Omega \right] e^{i\omega_0 t}.$$

В итоге:

$$\dot{U}_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\Omega) H(i[\omega_0 + \Omega]) e^{i\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega.$$

Из это выражения следует, что спектральная функция комплексной огибающей выходного радиосигнала определяется как

$$S_2(\Omega) = S_1(\Omega) H(i[\omega_0 + \Omega]).$$

Это выражение отражает суть спектрального метода для комплексных огибающих: спектральная функция сигнала на выходе – произведение спектра сигнала (комплексная спектральная функция) на входе на комплексную частотную характеристику

$$H(i[\omega_0 + \Omega]) = H_{НЧ}(i\Omega).$$

Через частотную характеристику низкочастотного эквивалента как обратное преобразование Фурье:

$$h_{НЧ}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{НЧ}(i\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega.$$

Комплексную огибающую сигнала на выходе можно записать

$$\dot{U}_2(t) = \int_{0}^{\infty} \dot{U}_1(x) h_{НЧ}(t - x) dx.$$

Эта формула – временной метод для комплексной огибающей.