Теория вероятностей и математическая статистика

1. Алгебра событий. Комбинаторика

Случайные события. Аксиомы вероятностей. Вероятностные схемы. Классическое и статистическое определения вероятности. Действия над событиями. Элементы комбинаторики и применение их для нахождения вероятностей случайных событий.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ: Перед рассмотрением примеров и решением задач необходимо ознакомиться с материалами лекции №1.

1.1. Алгебра событий

Пример 1.1. *Событие A означает, что хотя бы один из шести проверяемых двигателей неисправен, событие B – все двигатели исправны. Что означают события $A+B, AB$?*

►Здесь событие $\bar{A}$ означает, что все двигатели исправны, т.е. $\bar{A}=B$. Следовательно, A и B представляют собой противоположные события, для которых $A+B=\Omega, AB=\varnothing$. ◄

Пример 1.2. *Пусть событие A – при аварии сработал первый сигнализатор, событие B – сработал второй сигнализатор. Опишите события:*

$$A+B,\ AB,\ A\bar{B},\ \bar{A}\bar{B},\ A\bar{B}+\bar{A}B.$$

►Сумма событий $A+B$ означает, что при аварии сработал либо первый сигнализатор, либо – второй, либо – оба. Событие AB – сработали оба сигнализатора одновременно; $A\bar{B}$ означает, что первый сигнализатор сработал, а второй нет; $\bar{A}\bar{B}$ – не сработали оба сигнализатора. $A\bar{B}+\bar{A}B$ – сработал один сигнализатор, первый или второй. ◄

Пример 1.3. *Доказать, что: а) $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$, б) $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$.*

►а) Событие $\bar{A}\bar{B}$ означает непоявление событий ни A, ни B. Противоположное событие $\overline{\bar{A}\bar{B}}$ состоит в том, что хотя бы одно из событий

A или B имеет место, а это и есть сумма событий $A+B$; следовательно, $\bar{A}\cdot\bar{B}=\overline{A+B}$.

б) Событие AB состоит в совместном появлении событий A и B; событие $\overline{AB}$ состоит в не появлении хотя бы одного из этих событий A, B или в появлении хотя бы одного из событий $\bar{A}, \bar{B}$, а это равносильно $\bar{A}+\bar{B}$. ◀

Пример 1.4. *Событие A состоит в том, что хотя бы один из имеющихся десяти цехов не выполняет план; событие B состоит в том, что цехов, не выполняющих план, среди них не менее двух. Описать события: а) $\bar{A}$ и $\bar{B}$, б)$A+B$, в)$A\bar{B}$, г)$\bar{A}B$.*

▶а) $\bar{A}$ — все цеха выполняют план, $\bar{B}$ — цехов, не выполняющих план, один или нет ни одного; б) так как наступление события B означает также наступление события A, то $A+B=A$; в) один цех не выполняет план; г) $\bar{A}B=\varnothing$, т.к. события $\bar{A}$ и B несовместны. ◀

Пример 1.5. *Производится три выстрела по мишени. Событие A — попадание в мишень при первых двух выстрелах (оба попали в цель), событие B — промах при третьем выстреле. Что означают события: $A+B$, AB, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$, $\bar{A}\bar{B}$?*

▶Событие $A+B$ — или произошло попадание при двух выстрелах, или произошёл промах при третьем выстреле, либо то и другое. AB — два первых выстрела попали в мишень, третий — нет. $A\bar{B}$ — произошло попадание при всех трёх выстрелах. $\bar{A}B$ — при всех трёх выстрелах промах. $\bar{A}\bar{B}$ — два первых выстрела промах, третий — попадание. ◀

Пример 1.6. *Из множества супружеских пар наудачу выбирается одна. Событие A — мужу больше 30 лет, событие B — муж старше жены, событие C — жене больше 30 лет. Что означают события: ABC, $A\bar{B}$, $A\bar{B}C$?*

▶ABC — оба супруга старше 30 лет, причём муж старше жены. $A\bar{B}$ — мужу больше 30 лет, но он не старше своей жены. $A\bar{B}C$ — оба супруга старше 30 лет, но муж не старше своей жены. ◀

Пример 1.7. *Пусть A, B, C — три произвольных события. Что означают следующие события:*

а) $A+B+C$, б) $AB+AC+BC$, в) ABC, г) $A\bar{B}C$,

д) $A\bar{B}\bar{C}$, е) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, ж) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$,

з) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$, и) $A+B+C-ABC$?

►а) Произошло по крайней мере одно из трёх событий; б) произошли по крайней мере два события из трёх; в) произошли все три события; г) произошли A и B, а событие C не произошло; д) произошло A, а события B и C не произошли; е) ни одно событие не произошло; ж) произошло только одно событие; з) произошли только два события; и) произошло не более двух событий.

Если рассматривать событие A как попадание в область A, событие $\bar{A}$ как непопадание в область A и ввести аналогичные обозначения для событий B и C, то рассмотренные события можно представить, как попадание в области, заштрихованные на рис. 1

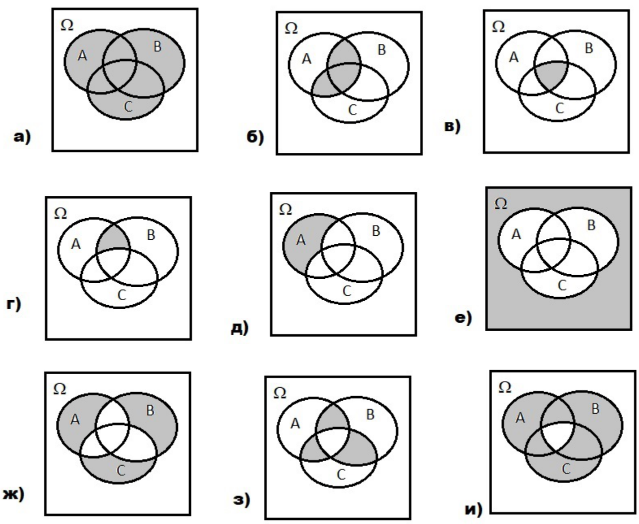

Рис. 1. *Геометрическая иллюстрация операций над событиями*

Пример 1.8. *Доказать, что события $A, \bar{A}B, \overline{A+B}$ образуют полную группу попарно несовместных событий.*

►Учитывая, что $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$, будем рассматривать события $A, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$. Их сумма

$$A + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} = A + \bar{A}(B + \bar{B}) = A + \bar{A}\Omega = A + \bar{A} = \Omega,$$

а произведения

$$A \cdot \bar{A}B = (A\bar{A}) \cdot B = \varnothing B = \varnothing, \quad A \cdot \bar{A}\bar{B} = (A\bar{A})\bar{B} = \varnothing\bar{B} = \varnothing,$$

$$\bar{A}B \cdot \bar{A}\bar{B} = (\bar{A}\bar{A})(B\bar{B}) = \bar{A}\varnothing = \varnothing).$$

События с данными свойствами по определению образуют полную группу попарно несовместных событий. ◀

1.2. Относительная частота

Необходимый теоретический материал из лекции 1.

Определение 1.1. *Пусть в N испытаниях событие A появилось M раз. Относительной частотой или просто частотой события A в данной серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу испытаний:*

$$P^*(A) = \frac{M}{N}. \tag{1.1}$$

Определение 1.2. *Условной частотой события A при условии появления B $P^*(A/B) = P^*_B(A)$ называется отношение числа испытаний, в которых появились оба события A и B, к числу испытаний, в которых появилось событие B.*

Если в N испытаниях событие B появилось L раз, а событие A появилось совместно с событием B K раз, то

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L}\ , \tag{1.2}$$

$$P^*(B) = \frac{L}{N}\ , \tag{1.3}$$

$$P^*(AB) = \frac{K}{N}\ . \tag{1.4}$$

Теорема 1.1 (умножения частот)**.** *Относительная частота произведения двух событий равна произведению условной частоты одного из них при условии появления другого на относительную частоту другого события:*

$$P^*(AB) = P^*(B) \cdot P^*(A/B). \tag{1.5}$$

Если сомножителей больше двух, то:

$$\begin{gathered} P^*(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k) = P^*(A_1) \cdot P^*(A_2/A_1) \cdot P^*(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdots \\ \cdots P^*(A_k/A_1 \cdot A_2 \cdots A_{k-1}). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Пример 1.9. *Резцом обточено 120 поршней. При проверке оказалось, что только 105 поршней имеют размеры, лежащие в пределах допуска. Найти относительную частоту изготовления годных поршней.*

►Согласно формуле (1.1), частота изготовления годного поршня равна:

$$P^*(A) = \frac{M}{N} = \frac{105}{120} = \frac{7}{8} \approx 0{,}875.◄$$

Ответ: $P^*(A) = 7/8 \approx 0{,}875$.

Пример 1.10. *Брошены 100 раз две игральные кости. При этом совпадение числа очков было 15 раз, а шестерка на обеих гранях костей выпала 4 раза. Определить условную частоту выпадения шестерок в случае совпадения числа очков.*

►Обозначим: событие A – появление шестерок на обеих гранях, событие B – совпадение числа очков. Тогда событие A появилось $K = 4$ раза, а событие B произошло $L = 15$ раз. Следовательно, $P^*(A) = \frac{6}{100}$ и $P^*(B) = \frac{15}{100}$.

Согласно формуле (1.2), условная частота появления двух шестерок равна:

$$P^*(A/B) = \frac{K}{L} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267.$$

Ответ: $P^*(A/B) = 4/15 \approx 0{,}267$. ◄

Пример 1.11. *Из 300 произведённых изделий 20 обладают дефектом α, причём 5 из них имеют также дефект β. Найти относительную частоту появления изделия с обоими дефектами.*

►Пусть событие A — появление дефекта β, а событие B — дефекта α. Тогда по формуле (1.5) относительная частота произведения этих двух событий определится как

$$P^*(AB) = \frac{20}{300} \cdot \frac{5}{20} = \frac{1}{60} \approx 0{,}017.$$

Ответ: $P^*(AB) = 1/60 \approx 0{,}017$. ◄

1.3. Вычисление вероятностей.

Определение 1.3. *Вероятность события A равна отношению числа (m) благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех исходов данного испытания (n):*

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.7}$$

Решение задач непосредственно по формуле (1.7) часто сводится к определению отдельно числителя и знаменателя.

Пример 1.12. *В партии из 80 деталей 11 нестандартных. Взятые для контроля 5 деталей оказались стандартными. Определить вероятности того, что взятая затем деталь будет: а) стандартной, б) нестандартной.*

►После первой проверки остались 64 стандартных и 11 нестандартных деталей. Число всех деталей перед второй проверкой $n = 75$.

а) Число благоприятствующих исходов — появлений стандартной детали (событие A) $m = 64$. Тогда $P(A) = 64/75 \approx 0{,}853$.

б) Число благоприятствующих исходов для этого случая – число появлений нестандартной детали (событие B) $m = 11$ и
$P(B) = 11/75 \approx 0{,}147$.◄

Ответ: $P(A) = 64/75 \approx 0{,}853$; $P(B) = 11/75 \approx 0{,}147$.

1.4. Элементы комбинаторики

Необходимый теоретический материал из лекции 1.

Для непосредственного подсчёта вероятности появления события на основе классического определения применяются, как правило, формулы комбинаторики (раздела математики, изучающего вопросы о том, сколько различных комбинаций (соединений) можно составить из заданного числа объектов).

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух основных правил: правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Если элемент a из некоторого конечного множества можно выбрать n_1 способами, а другой элемент b можно выбрать n_2 способами, то выбор «или a или b» можно осуществить n_1+n_2 способами.

При этом способы выбора элементов a и b не должны совпадать между собой. В противном случае будет $m + k - l$ способов выбора, где l – число совпадений.

Правило произведения. Пусть даны два упорядоченных множества A и B: A содержащее n_1 элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\} \in A$ и B, содержащее n_2 элементов $\{b_1, b_2, \dots, b_{n_2}\} \in B$. Тогда можно образовать ровно $n_1 n_2$ различных пар $\{(a_i, b_j) \big| i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}\}$, содержащих по одному элементу из каждого множества.

Это правило можно обобщить на случай любого конечного числа упорядоченных множеств.

Определение 1.4. ***Перестановками*** *называются различные способы упорядочивания n различных предметов (пронумерованных карточек) при их расположении слева направо.*

$$P_n = n!. \tag{1.8}$$

Определение 1.5. ***Размещениями*** *из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами или порядком их расположения в выборке.*

$$A_n^m = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.9}$$

Размещения обладают следующими свойствами:

$$A_n^n = n! = P_n, \quad A_n^0 = 1, \quad A_n^1 = n. \tag{1.10}$$

Размещения с повторениями вычисляются по формуле:

$$\overline{A}_n^m = n^m. \tag{1.11}$$

Определение 1.6. ***Сочетаниями*** *из n по m называются различные способы выбора m предметов из n, отличающиеся самими предметами.*

Число сочетаний из n по m определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.12}$$

Сочетания обладают следующими свойствами:

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$,
(2) $C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$,

$$(3)\ \sum_{i=0}^{n} C_n^i = \left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n\right) = (1+1)^n = 2^n.$$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов определяется формулой

$$\overline{C}\,_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \qquad (1.13)$$

Пример 1.13. *В урне 13 чёрных и 8 белых шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что он — белый.*

►Всего возможно $n = 13 + 8 = 21$ исход, в том числе $m = 8$ благоприятных, откуда $P(A) = \dfrac{8}{21}$.◄

Ответ: $\dfrac{8}{21}$.

Пример 1.14. *Карта называется козырной, если она — туз, король, дама или трефовой масти. Из колоды в 36 карт вынимают одну. Какова вероятность того, что она — козырная?*

►Общее число исходов $n = 36$; число благоприятных исходов равно числу козырей, которых 9 треф и ещё по три карты (Д, К, Т) в трёх некозырных мастях, $m = 9 + 3 \cdot 3 = 18 \;\Rightarrow\; P(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.◄

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Пример 1.15. *Найдите количество трёхбуквенных «слов» (включая бессмысленные), составленных из букв слова ПРИВЕТ.*

► Первую букву можно вытащить шестью способами, из пяти оставшихся букв вытаскиваем вторую букву пятью способами и третью букву вытаскиваем четырьмя способами. Получаем,
$n = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Можно было просто вычислить число размещений из шести различных букв по три буквы. $n = A_6^3 = \dfrac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. ◄

Пример 1.16. *Найдите количество трёхбуквенных «слов» (включая бессмысленные), составленных из букв слова ДОКЛАД.*

►n= $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60$. Делим на 2, потому что в наборе две буквы Д.◄

Пример 1.17. *В урне лежит 5 белых и 6 красных перенумерованных (различающихся) шаров. а) Сколькими способами можно вынуть белый и красный шар? б) Сколькими способами можно вынуть белый или красный шар?*

►Вынуть белый шар можно пятью, а чёрный — шестью способами. Тогда вынуть одновременно один белый и один красный шар можно $5 \cdot 6 = 30$ способами (правило умножения), а вынуть один шар любого цвета можно $5 + 6 = 11$ способами (правило сложения). ◄

Пример 1.18. *Бросаются три игральные кости. Найти вероятности того, что: а) сумма очков на выпавших гранях равна 4, б) на всех гранях выпадает одинаковое число очков, в) на всех гранях выпадает различное число очков.*

►Игральная кость представляет собой куб, на гранях которого нанесены 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков. Каждый из исходов бросания одной кости может сочетаться с каждым из исходов бросания второй и третьей, поэтому общее число возможных исходов испытания $n = 6^3$.

а) Здесь благоприятствующих событию A – появлению на трёх костях суммы очков, равной 4, будет $m = 3$ исхода: $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$. Тогда

$$P(A) = 3/6^3 = 1/72 \approx 0{,}014.$$

б) В этом случае число благоприятствующих исходов будет равно числу граней, т.е. 6. Следовательно,

$$P(B) = 6/6^3 = 1/36 \approx 0{,}028.$$

в) Число исходов, когда на трёх гранях выпадает различное число очков, равно числу размещений $m = A_6^3 = 4 \cdot 5 \cdot 6$ и

$$P(C) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6^3} = 5/9 \approx 0{,}556. \blacktriangleleft$$

Ответ: $P(A) = 1/72 \approx 0{,}014$; $P(B) = 1/36 \approx 0{,}028$; $P(C) = 5/9 \approx 0{,}556$.

Пример 1.19. *Из шести карточек с буквами А, В, Д, З, К, О выбираются наудачу в определённом порядке пять. Найти вероятность того, что при этом получится слово ЗАВОД.*

►Здесь производится выборка пяти букв из шести и в нужной последовательности. Порядок выбора букв существенен, поэтому число всевозможных исходов данного испытания равно $n = A_6^5$, а число исходов благоприятствующих получению слова ЗАВОД равно $m = 1$. Тогда вероятность искомого события A равна

$$P(A) = 1/A_6^5 = 1/720 \approx 0{,}001. \blacktriangleleft$$

Ответ: $P(A) = 1/720 \approx 0{,}001$.

Пример 1.20. *В коробке имеются десять букв: А, А, А, В, И, К, М, О, Т, Т. Найти вероятность того, что если наудачу вынимать одну букву за другой, то можно сложить слово АВТОМАТИКА.*

►В данном примере имеются повторяющиеся буквы. Число всех исходов равно всевозможным перестановкам из 10 букв, т.е. $n = 10!$ В числителе формулы для вероятности мы должны учесть, что букву А можно расположить на трёх местах 3! способами, а букву Т – 2! способами. Сочетая каждое расположение букв А с каждым расположением букв Т, найдем:

$$P(A) = \frac{3! \cdot 2!}{10!} = \frac{1}{302400} \approx 0{,}331 \cdot 10^{-5}. \blacktriangleleft$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{302400} \approx 0{,}331 \cdot 10^{-5}$.

Пример 1.21. *В цехе из 80 рабочих не выполняют норму выработки 5 человек. По списку случайно отбирается 3 человека. Найти вероятность того что: а) все выбранные рабочие выполняют норму; б) все выбранные рабочие не выполняют норму; в) только два выбранные рабочие выполняют норму.*

► В данном примере порядок выбора рабочих не существенен. Поэтому для подсчёта числа исходом опыта (выбора трёх рабочих) применяется формула для сочетаний. Количество всех возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 3 человека из 80, т.е. числу сочетаний $n = C_{80}^3$.

а) Благоприятствующими будут те исходы, когда 3 человека отбираются только из тех рабочих, которые выполняют норму, т.е. из $80 - 5 = 75$ рабочих; их число равно $m_1 = C_{75}^3$. Вероятность данного события A

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_{75}^3}{C_{80}^3} = \frac{75!}{3!72!} \cdot \frac{3!77!}{80!} = \frac{73 \cdot 74 \cdot 75}{78 \cdot 79 \cdot 80} = \frac{13505}{16432} \approx 0{,}822.$$

б) Здесь вычислим вероятность того, что трое рабочих выбираются именно из тех пяти, которые не выполняют норму (событие B). Число таких случаев равно $m_2 = C_5^3$; тогда

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{C_5^3}{C_{80}^3} = \frac{5! \quad \cdot 3!\ 77!}{3!\ 2! \quad \cdot 80!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{78 \cdot 79 \cdot 80} = \frac{1}{8216} \approx 0{,}1217 \cdot 10^{-3}.$$

в) В этом случае два рабочих выполняют норму, а один не выполняет. Для определения количество исходов благоприятствующих появлению искомого случайного события C, применяем свойство умножения. Умножаем число комбинаций в которых два рабочие выполняют норму $n_1 = C_{75}^2$ на число комбинаций в которых один рабочие не выполняют норму $n_2 = C_5^1 = 5$. Получаем $m_3 = n_1 \cdot n_2 = C_{75}^2 \cdot C_5^1$.
$P(C) = \dfrac{m_3}{n} = \dfrac{C_{75}^2 \cdot 5}{C_{80}^3} = \dfrac{75! \cdot 5}{2!73!}\dfrac{3!77!}{80!} = \dfrac{75 \cdot 74 \cdot 5 \cdot 3}{78 \cdot 79 \cdot 80} = \dfrac{2775}{16432} \approx 0{,}1689.$◄

Ответ: $\dfrac{13505}{16432} \approx 0{,}822$; $P(B) = \dfrac{1}{8216} \approx 0{,}1217 \cdot 10^{-3}$;
$P(C) = \dfrac{2775}{16432} \approx 0{,}1689.$

Пример 1.22. *В партии из $N = 100$ изделий имеются $M = 12$ бракованных. Из партии наудачу выбираются $n = 10$ изделий. Определить вероятность того что среди этих 10 изделий будет ровно $m = 2$ бракованных.*

►Количество элементарных исходов данного испытания равно $n = C_{100}^{10}$. Обозначим через A событие состоящее в появлении 2 бракованных изделий среди выбранных наудачу 10 изделий. Так как всех бракованных изделий 12, то число способов, которыми можно вынуть 2 бракованных изделия, равно C_{12}^2. Каждый из этих способов может дополняться любой группой изделий из числа способов, которыми можно вынуть оставшиеся $10 - 2$ годных из общего числа годных $100 - 12$ изделий. Число таких групп равно $C_{100-12}^{10-2} = C_{88}^8$. Применяя свойство умножения комбинаций, получаем число всех исходов, благоприятствующих событию A: $m = C_{12}^2 \cdot C_{88}^8$ и вероятность

$$P(A) = \frac{C_{12}^2 \cdot C_{88}^8}{C_{100}^{10}} = \frac{12! \quad \cdot 88! \quad \cdot 10!\ 90!}{2!\ 10! \cdot 8!\ 80! \cdot 100!}.$$

Для вычисления вероятности по полученной формуле, используем Maxima-программу:

```
P:binomial(12,2)*binomial(88, 8)/binomial(100, 10); P, numer;
```

(P) $\dfrac{192830746581}{786832248020}$ (P) 0.24507224642386 ◄

Ответ: $P(A) \approx 0{,}245$.

Пример 1.23. *Телефонный номер состоит из семи цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.*

►Цифры изменяются от 0 до 9, поэтому количество всех номеров будет $n = 10^7$, а число номеров с различными цифрами равно числу размещений $m = A_{10}^7 = \dfrac{10!}{3!}$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{10!}{3! \cdot 10^7} = \frac{189}{3125} \approx 0{,}061.$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}061$. ◄

Maxima-команда: $10!/(3! * 10^7)$; %, numer;

Пример 1.24. *В автобусе находятся 5 пассажиров, причём каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любой из оставшихся 7 остановок автобуса. Найти вероятность того, что: а) все пассажиры выйдут на одной остановке, б) все выйдут на четвертой остановке, в) все выйдут на разных остановках, г) на одной остановке выйдут три, а на другой два.*

►Общее число случаев $n = 7^5$.

а) Здесь $m = 7$, т.е. числу всех остановок; тогда $P(A) = 1/7^4 \approx 0{,}416 \cdot 10^{-3}$;

б) $m = 1$, $P(B) = 1/7^5 \approx 0{,}594 \cdot 10^{-5}$;

в) $m = C_7^5 = 21$, $P(C) = 21/7^5 = 3/7^4 \approx 0{,}125 \cdot 10^{-2}$;

г) число способов, которыми можно выбрать одну остановку, на которой сойдут три пассажира, равно $C_7^1 = 7$; кроме того, мы должны учесть C_5^3 способов, которыми можно выбрать этих трёх пассажиров из пяти; число способов, которыми можно выбрать остановку, где сойдут оставшиеся два пассажира, равно $C_6^1 = 6$; таким образом,

$$m = C_5^3 \cdot C_7^1 \cdot C_6^1 \quad \text{и} \quad P(D) = 60/7^4 \approx 0{,}025. \ ◄$$

Ответ: $P(A) = 1/7^4 \approx 0{,}416 \cdot 10^{-3}$; $P(B) = 1/7^5 \approx 0{,}594 \cdot 10^{-5}$; $P(C) = 3/7^4 \approx 0{,}125 \cdot 10^{-2}$; $P(D) = 60/7^4 \approx 0{,}025$.

Пример 1.25. *Восемь студентов садятся в аудитории случайно на один ряд. Найти вероятность того, что три определённых студента окажутся рядом.*

►Всех комбинаций здесь будет $n = 8!$. Трёх определённых студентов можно посадить подряд шестью способами (начиная с 1-го места, со 2-го и т.д., с 6-го), причём нужно учесть, что внутри тройки $3!$ комбинаций; пятерых оставшихся студентов можно разместить $5!$ способами. Таким образом,

$$m = 6 \cdot 3! \cdot 5! \quad \text{и} \quad P(A) = \frac{6 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = \frac{6 \cdot 6}{6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{3}{28} \approx 0{,}107. \blacktriangleleft$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{3}{28} \approx 0{,}107.$

Пример 1.26. *Из колоды в 36 карт наугад вынимают 8 карт. Найти вероятность того, что взяли: а) три карты бубновой масти и три карты чёрной масти; б) хотя бы одну картинку?*

►а) В колоде карт всего 9 карт бубновой масти и 18 карт чёрной масти. Искомое событие A происходит когда вытаскивают три карты бубновой масти и три карты чёрной и две карты червонной масти. Применяем правило произведения для трёх множеств упорядоченных элементов.

$$P(A) = \frac{C_9^3 \cdot C_{18}^3 \cdot C_9^2}{C_{36}^8} = \frac{9! \quad \cdot \quad 18! \cdot \quad 9! \quad \cdot \quad 8! \cdot 28!}{3! \cdot 6! \cdot 3! \cdot 15! \cdot 2! \cdot 7! \cdot 36!} = \frac{4032}{49445}.$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{4032}{49445} \approx 0{,}082.$

б) Всего в колоде карт 16 картинок (валет, дама, король, туз). Искомое событие $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8$, где A_i — событие состоящее в том, что вытащили i карт являющихся картинками. $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) + {}$ $+P(A_7) + P(A_8)$. При этом $P(A_i) = \dfrac{C_{16}^i \cdot C_{20}^{8-i}}{C_{36}^8}$. Вычисляем все восемь вероятностей, суммируя их получаем

$$P(A) = \frac{1}{C_{36}^8} \sum_{i=1}^{8} C_{16}^i \cdot C_{20}^{8-i}.$$

Всё просто, но трудоёмко.

Но нетрудно заметить, что

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 = \Omega - A_0.$$

Поэтому, $P(A) = 1 - P(A_0) = 1 - \dfrac{C_{20}^8}{C_{36}^8} = 1 - \dfrac{20! \quad \cdot \ 8! \cdot 28!}{8! \cdot 12! \cdot \ 36!} =$
$$= 1 - \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} = 1 - \frac{247}{59334} = \frac{59087}{59334} \approx 0{,}9958.$$
◄

Проверка с помощью пакета maxima:

Первый способ:

P: sum(binomial(16, i)*binomial(20, 8-i), i, 1, 8)/binomial(36, 8); P,numer;

Второй способ:

P:1-binomial(20,8)/binomial(36,8); P,numer; $\dfrac{59087}{59334} \approx 0{,}9958.$

$\dfrac{59087}{59334} \approx 0{,}9958.$

Задания для самостоятельной работы

1.1. В электрическую цепь последовательно подсоединены два выключателя. Каждый из них может быть, как включен, так и выключен. Рассмотрим события: A — включен первый выключатель, B включен второй выключатель, C — по цепи идет ток. Выразите события C и $\bar{C}$ через A и B.

1.2. В группе студентов несколько человек являются отличниками; группа делится также по цвету волос на шатенов, брюнетов и блондинов. Из группы наудачу отобраны два человека с разным цветом волос. Пусть событие A — выбран шатен, событие B — выбран брюнет, событие C — выбран отличник. Опишите события: AC, $\bar{A}\bar{B}$, ABC.

1.3. По аналогии с задачей 1.3 доказать, что

а) $\overline{\bar{A}_1\bar{A}_2...\bar{A}_n} = A_1 + A_2 + ... + A_n$,

б) $\overline{A_1A_2...A_n} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + ...\bar{A}_n$.

1.4. Доказать, что $(A+B)(A+C) = A+BC$.

1.5. Событие A – первый узел автомобиля работает безотказно, событие B – второй узел автомобиля работает безотказно. Опишите события: $\bar{A}$ и $\bar{B}$, $A+B, AB, A\bar{B}, \bar{A}B, A\bar{B}+\bar{A}B$; как и в примере 1.7, сделайте рисунки.

1.6. Релейная схема, рис.2 , состоит из семи элементов: V_1, $V_2, \ldots, V_7$. Событие A_i состоит в том, что элемент V_i работает безотказно в течение времени T. Выразить событие A, состоящее в том, что за время T а) схема работает безотказно; б) схема выйдет из строя.

1.7. Процент выполнения задания предприятием в течение 10 дней соответственно равняется

$$107, 111, 109, 116, 115, 105, 112, 114, 121, 124.$$

Какова относительная частота дней, в которые задание было выполнено более чем на 110 процентов?

1.8. В ящике «Спортлото» находится 36 шаров, помеченных номерами от 1 до 36. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется с номером, кратным 3?

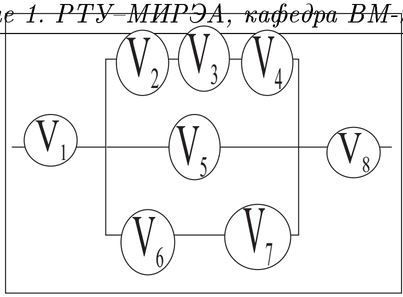

Рис. 2. *К примеру 1.6*

1.9. Найдите вероятность того, что взятое наудачу двузначное число кратно 5.

1.10. Буквы, составляющие слово РАКЕТА, написаны по одной на шести карточках; карточки перемешаны и положены в пакет. а) Чему равна вероятность того, что, вынимая четыре буквы, получим слово РЕКА? б) Какова вероятность сложить слово КАРЕТА при вынимании всех букв?

1.11. В цех сборки привезли 25 деталей, из которых 20 изготовлены Московским заводом. Найти вероятность того, что среди 10 взятых наудачу деталей окажутся: а) все детали Московского завода, б) 7 деталей Московского завода.

1.12. Полная колода содержит 52 карты, разделяющиеся на 4 различные масти по 13 карт в каждой. Взяли 5 карт. Найти вероятность того, что среди этих карт будет шестерка трефовой масти.

1.13. Бригада, состоящая из 20 мужчин и 4 женщин, делится наудачу на два равных звена. Найти вероятность того, что в каждом звене окажется по две женщины.

1.14. В студенческой лотерее выпущено 100 билетов, из которых 15 выигрышных. Куплено три билета. Какова вероятность того, что один из них выигрышный?

1.15. Из колоды в 52 карты наудачу выбирается четыре. Найти вероятность того, что среди них окажется одна десятка.