

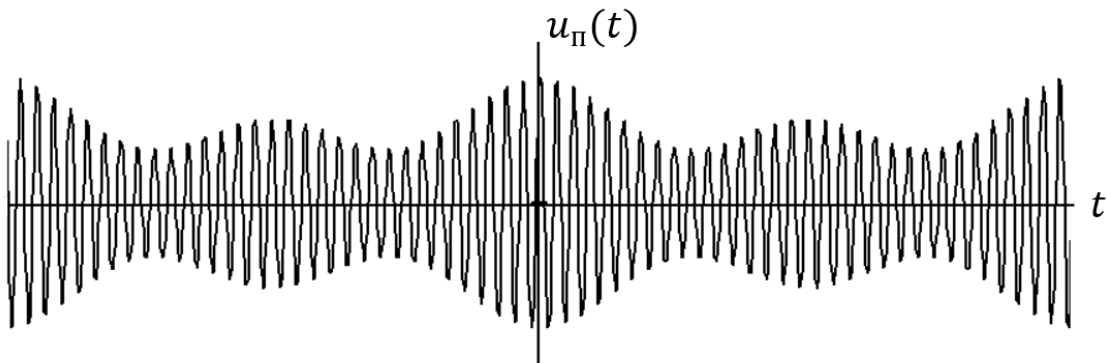
ДИСЦИПЛИНА	<b>Радиотехнические цепи и сигналы часть 1</b>
	полное название дисциплины без аббревиатуры
ИНСТИТУТ	<b>Радиотехнических и телекоммуникационных систем</b>
КАФЕДРА	<b>радиоволновых процессов и технологий</b>
	полное название кафедры
ГРУППА/Ы	<b>РРБО-1-3-18; РССО-1-3-18</b>
	номер групп/ы, для которых предназначены материалы
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	<b>Лекция №8</b>
	лекция; материал к практическим занятиям; контрольно-измерительные материалы к практическим занятиям; руководство к КР/КП, практикам
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	<b>Исаков Владимир Николаевич</b>
	фамилия, имя, отчество
СЕМЕСТР	<b>5</b>
	указать номер семестра обучения

## Лекция 8

### 8. Периодические радиосигналы

#### 8.1. Математическое описание, спектр и средняя мощность периодического радиосигнала

Схематично пример фрагмента временной диаграммы периодического радиосигнала показан на рис.8.1. На практике, обычно, мы можем либо наблюдать как изменяется огибающая радиосигнала, но тогда не можем видеть структуру сигнала (осциллограмма предстаёт перед нами «закрашенной» цветом луча осциллографа), либо можем наблюдать структуру сигнала, но тогда огибающая кажется нам неизменной, а сам сигнал выглядит подобным гармоническому.



*Рис.8.1. Пример фрагмента временной диаграммы периодического радиосигнала*

Периодический радиосигнал описывается выражением:

$$u_{\Pi}(t) = v_{\Pi}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_{\Pi}(t)).$$

С этим математическим описанием периодического сигнала связаны следующие термины:

$v_{\Pi}(t) \geq 0$  - огибающая,

$\varphi_{\Pi}(t)$  - мгновенная фаза,

$\omega_0$  - несущая частота,

$\Phi_{\Pi}(t) = \omega_0 t + \varphi_{\Pi}(t)$  - полная фаза,

$\omega_{\Pi}(t) = \Phi'_{\Pi}(t) = \omega_0 + \varphi'_{\Pi}(t)$  - мгновенная частота,

$\dot{v}_{\Pi}(t) = v_{\Pi}(t)e^{j\varphi_{\Pi}(t)}$  - комплексная огибающая.

Комплексная огибающая периодического радиосигнала является периодической функцией. Её период  $T$  представляет такое

наименьшее число, которое делится нацело на периоды огибающей и мгновенной фазы  $T = nT_{v_{\Pi}} = kT_{\varphi_{\Pi}}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ . Период комплексной огибающей обычно рассматривается как период и самого радиосигнала, однако в строгом математическом смысле это может быть не так: математическим периодом радиосигнала  $T_{u_{\Pi}}$  является наименьшее число, которое делится нацело на периоды комплексной огибающей и несущей частоты  $T_{u_{\Pi}} = nT = kT_{\omega_0}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ , где  $T_{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

Как периодическая функция комплексная огибающая радиосигнала может быть представлена рядом Фурье в комплексной форме:

$$\dot{v}_{\Pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{U}_n e^{j\Omega_n t},$$

где  $\Omega_n = n\Omega_1$ ,  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  - частота первой гармоники;  $\dot{U}_n = U_n e^{j\varphi_{U_n}}$  - комплексная амплитуда  $n$ -й комплексной гармоники комплексной огибающей.

Сам периодический радиосигнал выразим через свою комплексную огибающую:

$$\begin{aligned} u_{\Pi}(t) &= \operatorname{Re} \dot{v}_{\Pi}(t) e^{j\omega_0 t} = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{U}_n e^{j\Omega_n t} e^{j\omega_0 t} = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{j\varphi_{U_n}} e^{j\Omega_n t} e^{j\omega_0 t} = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{j((\omega_0 + \Omega_n)t + \varphi_{U_n})} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n \cos((\omega_0 + \Omega_n)t + \varphi_{U_n}). \end{aligned}$$

Полученное выражение даёт разложение периодического радиосигнала по системе тригонометрических функций. Совокупность амплитуд гармоник  $\{U_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  называется амплитудным спектром радиосигнала. Совокупность начальных фаз гармоник  $\{\varphi_{U_n}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  называется фазовым спектром радиосигнала.



Рис.8.2. Амплитудный спектр комплексной огибающей



Рис.8.3. Фазовый спектр комплексной огибающей

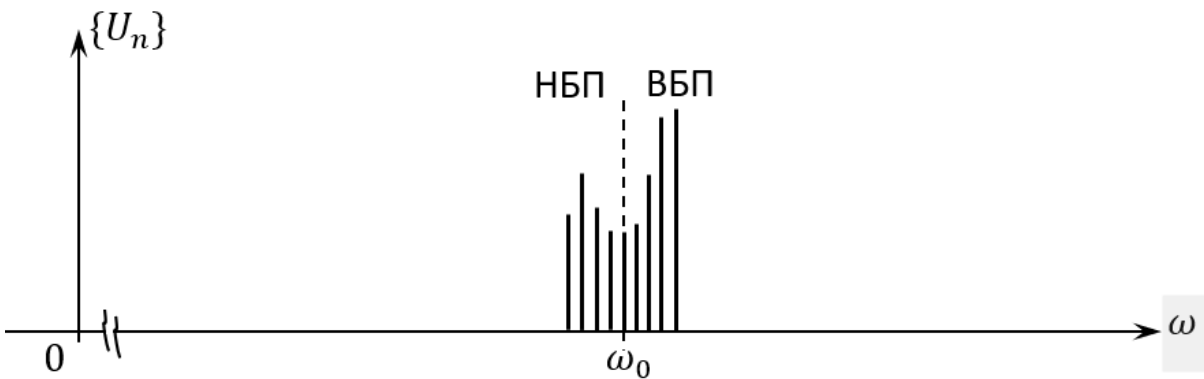


Рис.8.4. Амплитудный спектр периодического радиосигнала

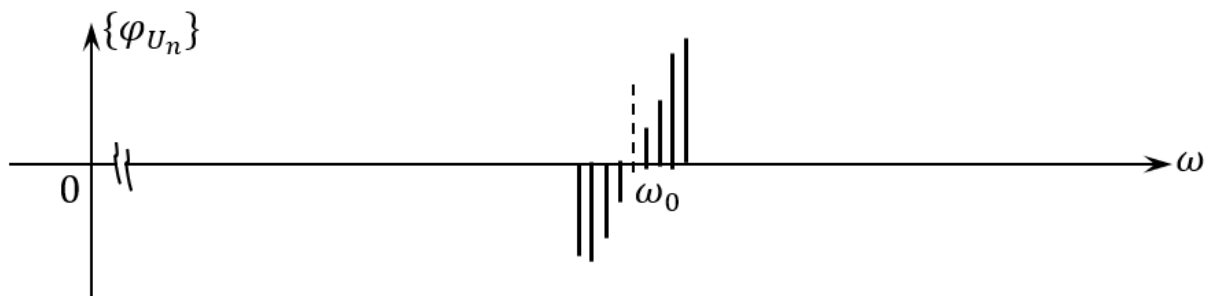


Рис.8.5. Фазовый спектр периодического радиосигнала

Амплитудный и фазовый спектры радиосигнала и его комплексной огибающей отличаются только расположением на частотной оси: те линии спектра, которые на спектральных диаграммах для комплексной огибающей располагались на частотах  $\{\Omega_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  на спектральных диаграммах радиосигнала располагаются на частотах  $\{\omega_0 + \Omega_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ , то есть амплитудный и фазовый спектр радиосигнала получается путём смещения амплитудного и фазового спектра его комплексной огибающей в окрестность несущей частоты (рис.8.2 – рис.8.5).

Ширина спектра  $\Delta\omega$  периодического радиосигнала равна ширине спектра его комплексной огибающей в комплексном гармоническом базисе.

Область частот, в которой располагаются линии спектра радиосигнала, соответствующие частотам меньшим несущей частоты, называется нижней боковой полосой спектра (НБП). Область частот, в которой располагаются линии спектра радиосигнала, соответствующие частотам большим несущей частоты, называется верхней боковой полосой спектра (ВБП).

В частном случае, когда угловая модуляция отсутствует и  $\varphi_{v_{\Pi}}(t) = \varphi_0$ , комплексная огибающая периодического сигнала имеет вид

$$\dot{v}_{\Pi}(t) = v_{\Pi}(t)e^{j\varphi_0},$$

разложив огибающую в ряд Фурье в тригонометрической форме

$$v_{\Pi}(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} V_n \cos(\Omega_n t + \varphi_{V_n}),$$

получим:

$$\dot{v}_{\Pi}(t) = \underbrace{\left( V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} V_n \cos(\Omega_n t + \varphi_{V_n}) \right)}_{\text{огибающая разложена в ряд Фурье в тригонометрической форме}} e^{j\varphi_0}.$$

Переходя к комплексной форме ряда Фурье для огибающей, для комплексной огибающей радиосигнала запишем:

$$\dot{v}_{\Pi}(t) = \underbrace{\left( V_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{V_{|n|}}{2} e^{j\varphi_{V_{|n|}} \text{sign}(n)} e^{j\Omega_n t} \right)}_{\text{оглабающая разложена в ряд Фурье в комплексной форме}} e^{j\varphi_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{U}_n e^{j\Omega_n t},$$

где  $\dot{U}_0 = V_0 e^{j\varphi_0}$ ;  $\dot{U}_n = \frac{V_{|n|}}{2} e^{j(\varphi_{V_{|n|}} \text{sign}(n) + \varphi_0)}$ ;  $U_0 = V_0$ ;  $U_n = \frac{V_{|n|}}{2}$ ;  
 $\varphi_{U_0} = \varphi_0$ ;  $\varphi_{U_n} = \varphi_{V_{|n|}} \text{sign}(n) + \varphi_0$ .

При этом для самого периодического радиосигнала получим разложение вида

$$\begin{aligned} u_{\Pi}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n \cos((\omega_0 + \Omega_n)t + \varphi_{U_n}) = \\ &= \underbrace{V_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)}_{\text{несущее колебание}} + \\ &\quad + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{V_n}{2} \cos((\omega_0 + \Omega_n)t + \varphi_0 + \varphi_{V_n})}_{\text{верхняя боковая полоса}} + \\ &\quad + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{V_n}{2} \cos((\omega_0 - \Omega_n)t + \varphi_0 - \varphi_{V_n})}_{\text{нижняя боковая полоса}}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае амплитудный спектр периодического радиосигнала чётно-симметричен относительно несущей частоты, а фазовый спектр, за вычетом  $\varphi_0$ , нечётно-симметричен относительно несущей частоты (рис.8.6 – 8.7).

Средняя мощность периодического сигнала за период комплексной оглабающей

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u_{\Pi}^2(t') dt' = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} v_{\Pi}^2(t') \cos^2(\omega_0 t' + \varphi_{\Pi}(t')) dt' = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} v_{\Pi}^2(t') dt' + \frac{1}{2T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} v_{\Pi}^2(t') \cos(2\omega_0 t' + 2\varphi_{\Pi}(t')) dt'. \end{aligned}$$

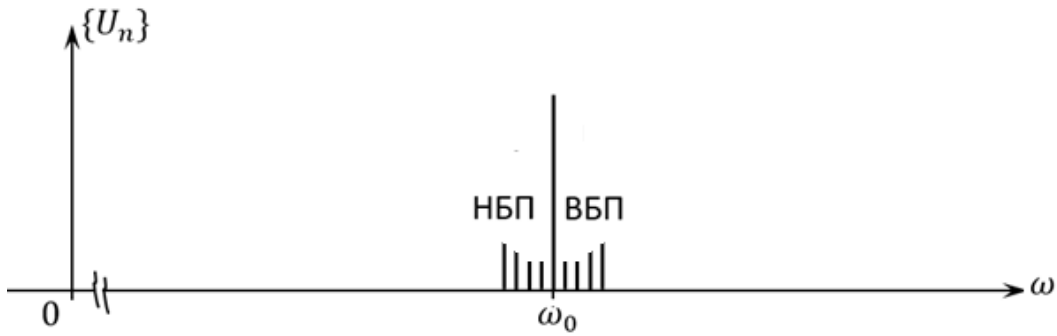


Рис.8.6. Амплитудный спектр в частном случае  $\varphi_{v_{\Pi}}(t) = \varphi_0$

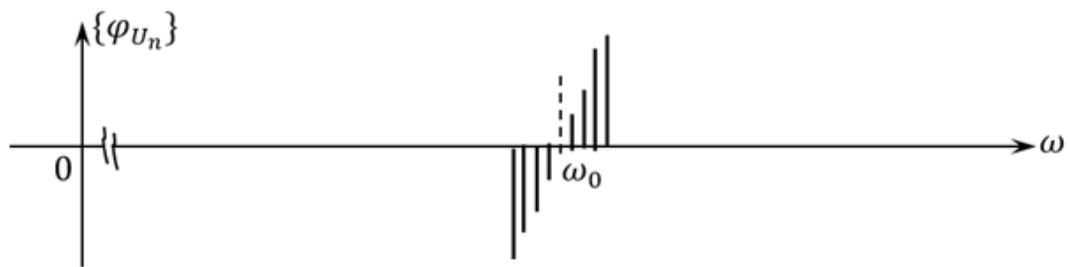


Рис.8.7. Фазовый спектр в частном случае  $\varphi_{v_{\Pi}}(t) = \varphi_0 = 0$

Второе слагаемое в полученном выражении равно нулю, так как содержит интеграл от радиосигнала. Первое слагаемое даёт половину средней мощности комплексной огибающей радиосигнала:

$$P = \frac{1}{2} P_{\dot{v}} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n^2.$$

В частном случае, когда  $\varphi_{v_{\Pi}}(t) = \varphi_0$ , получим

$$P = \frac{1}{2} \left( V_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} V_n^2 \right).$$

Средняя мощность за период несущего колебания:

$$P_{T_0} = \int_{t-T_0/2}^{t+T_0/2} u_{\Pi}^2(t') dt' = \int_{t-T_0/2}^{t+T_0/2} v_{\Pi}^2(t') \cos^2(\omega_0 t' + \varphi_{\Pi}(t')) dt'.$$

Считая, что огибающая и мгновенная фаза не изменяются за период несущего колебания, выражение для средней мощности приведём к виду:

$$P_{T_0} = v_{\Pi}^2(t) \underbrace{\int_{t-T_0/2}^{t+T_0/2} \cos^2(\omega_0 t' + \varphi_{\Pi}(t)) dt'}_{\substack{\text{средняя мощность} \\ \text{гармонического сигнала}}} = \frac{v_{\Pi}^2(t)}{2}.$$

## 8.2. Многотональный амплитудно-модулированный сигнал (МАМС)

МАМС описывается выражением

$$u_{\Pi}(t) = v_{\Pi}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $v_{\Pi}(t) = V_0 + k s_{\Pi}(t)$  - огибающая,

$k$  - коэффициент, определяемый устройством, осуществляющим амплитудную модуляцию,

$s_{\Pi}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(\Omega_n t + \theta_n)$  - модулирующий сигнал (периодический

видеосигнал с нулевой постоянной составляющей),

$S_n, \Omega_n, \theta_n$  - амплитуды, частоты и начальные фазы гармоник модулирующего сигнала.

Подставив выражение для модулирующего сигнала, огибающую представим в виде

$$\begin{aligned} v_{\Pi}(t) &= V_0 + k s_{\Pi}(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} k S_n \cos(\Omega_n t + \theta_n) = \\ &= V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} V_n \cos(\Omega_n t + \theta_n) = V_0 \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} M_n \cos(\Omega_n t + \theta_n) \right), \end{aligned}$$

где  $V_n = k S_n$  - амплитуды гармоник ряда Фурье в тригонометрической форме комплексной огибающей МАМС,  $M_n = \frac{V_n}{V_0} = \frac{k S_n}{V_0}$  - пар-

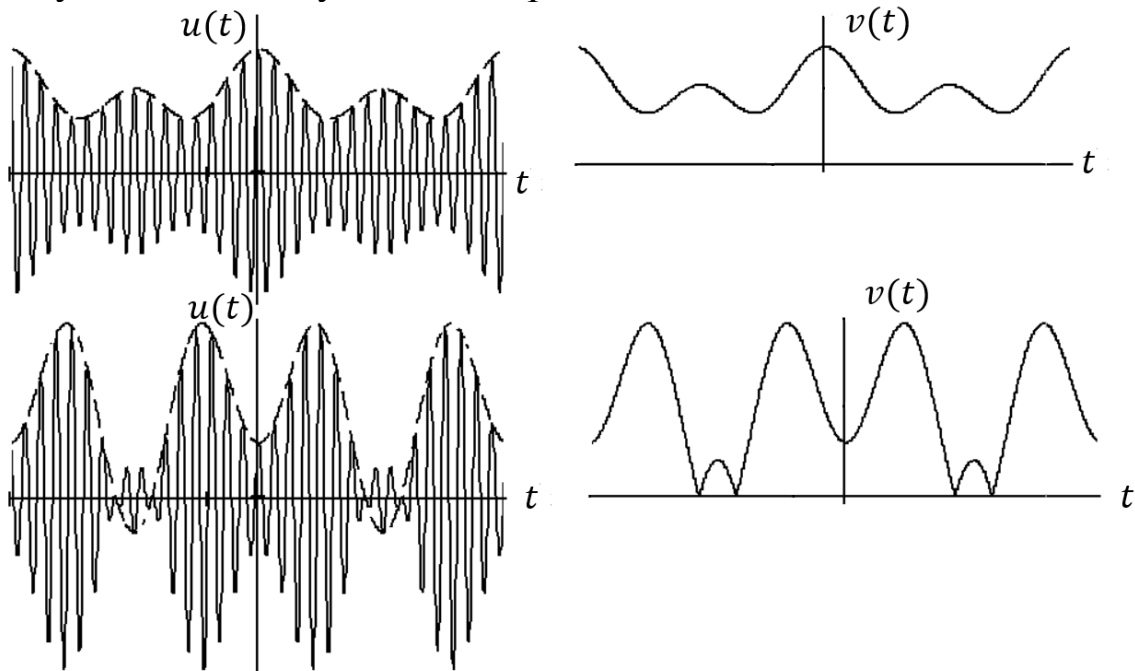
циальные коэффициенты (глубины) модуляции – это максимальное относительное отклонение  $n$  - й гармоники огибающей от среднего значения огибающей.

Для корректной демодуляции огибающая МАМС должна быть положительной, что гарантируется, когда



$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n \leq 1.$$

На рис. 8.8 показаны два примера МАМС. У одного сигнала огибающая всегда положительна, а у другого – на некоторых интервалах может принимать отрицательные значения (пунктир на графиках радиосигналов). Во втором случае огибающая радиосигнала оказывается неоднозначно определена и демодулятор (детектор огибающей) выделяет сигнал, отличный от модулирующего. В этом случае говорят о некорректной модуляции или о перемодуляции. Некорректную модуляцию не допускают на практике.



*Рис.8.8. Корректная и некорректная модуляция и результат демодуляции МАМС*

Спектры МАМС найдём с учётом формул для спектра периодического радиосигнала при отсутствии угловой модуляции:

- амплитудный спектр МАМС

$$U_n = \begin{cases} V_0, n = 0 \\ \frac{V_{|n|}}{2}, n \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} V_0, n = 0 \\ \frac{kS_{|n|}}{2}, n \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} V_0, n = 0 \\ \frac{M_{|n|}V_0}{2}, n \neq 0 \end{cases};$$

- фазовый спектр МАМС

$$\varphi_{U_n} = \begin{cases} \varphi_0, n = 0 \\ \theta_{|n|} \operatorname{sign}(n) + \varphi_0, n \neq 0 \end{cases}.$$

Примеры спектров МАМС приведены на рис.8.6-8.7.

Средняя мощность МАМС за период несущего колебания

$$\begin{aligned} P_{T_0}(t) &= \frac{1}{2} v_{\Pi}^2(t) = \frac{V_0^2}{2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} M_n \cos(\Omega_n t + \theta_n) \right)^2 = \\ &= P_0 \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} M_n \cos(\Omega_n t + \theta_n) \right)^2, \end{aligned}$$

где обозначено  $P_0 = \frac{V_0^2}{2}$  - средняя мощность несущего колебания.

Средняя мощность МАМС изменяется во времени, достигая максимального и минимального значений

$$P_{T_0 \min} = P_0 \left( 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} M_n \right)^2; \quad P_{T_0 \max} = P_0 \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} M_n \right)^2.$$

Средняя мощность МАМС за период модулирующего сигнала

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \left( V_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} V_n^2 \right) = \frac{V_0^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{V_n^2}{V_0^2} \right) = P_0 \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M_n^2}{2} \right) = \\ &= P_0 + P_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M_n^2}{2}. \end{aligned}$$

Формально среднюю мощность МАМС можно рассматривать как сумму средних мощностей несущего колебания  $P_0$  и средней мощности боковых полос

$$P_B = \frac{1}{2} P_0 \sum_{n=1}^{+\infty} M_n^2.$$

Так как  $M_n \geq 0$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n \leq 1$ , то  $M_n \leq 1$  и  $M_n^2 \leq M_n$ , поэтому

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} M_n \leq 1, \text{ то есть}$$

$$P_B \leq \frac{1}{2} P_0.$$

Полученное неравенство показывает, что средняя мощность боковых полос не превышает половины средней мощности несущего колебания. Поскольку информация передаётся именно в боковых полосах, мощность радиопередающего устройства с МАМС распределяется неэффективно.

### 8.3. Однотональный (тональный) амплитудно-модулированный сигнал (ТАМС)

ТАМС является простейшим периодическим радиосигналом, часто используется в качестве тестового при проектировании и настройке радиотехнических устройств. Это связано с простотой измерения его параметров по временной или спектральной диаграмме.

ТАМС описывается выражением

$$u_{\Pi}(t) = v_{\Pi}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $v_{\Pi}(t) = V_0 + k s_{\Pi}(t)$  - огибающая,  $k$  - коэффициент, определяемый устройством, осуществляющим амплитудную модуляцию.

ТАМС является частным случаем МАМС, когда модулирующий сигнал содержит только одну гармонику:

$$s_{\Pi}(t) = S_m \cos(\Omega t + \theta),$$

$S_m, \Omega, \theta$  - амплитуда, частота и начальная фаза модулирующего сигнала.

Огибающая представляется в виде

$$\begin{aligned} v_{\Pi}(t) &= V_0 + k s_{\Pi}(t) = V_0 + k S_m \cos(\Omega t + \theta) = \\ &= V_0 + V_m \cos(\Omega t + \theta) = V_0 (1 + M \cos(\Omega t + \theta)), \end{aligned}$$

где  $V_m = k S_m$  - амплитуда 1-й гармоники ряда Фурье в тригонометрической форме комплексной огибающей ТАМС,  $M = \frac{V_m}{V_0} = \frac{k S_m}{V_0}$  -

коэффициент (глубины) модуляции – это максимальное относительное отклонение огибающей от своего среднего значения.

Временная диаграмма ТАМС схематично показана на рис.8.9.

Максимальное и минимальное значение огибающей

$$V_{\min} = V_0(1 - M), \quad V_{\max} = V_0(1 + M),$$

Максимальное отклонение огибающей от своего среднего значения

$$V_m = \frac{V_{\min} + V_{\max}}{2},$$

Среднее значение огибающей

$$V_0 = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2},$$

Коэффициент модуляции

$$M = \frac{V_m}{V_0} = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max} + V_{\min}}.$$

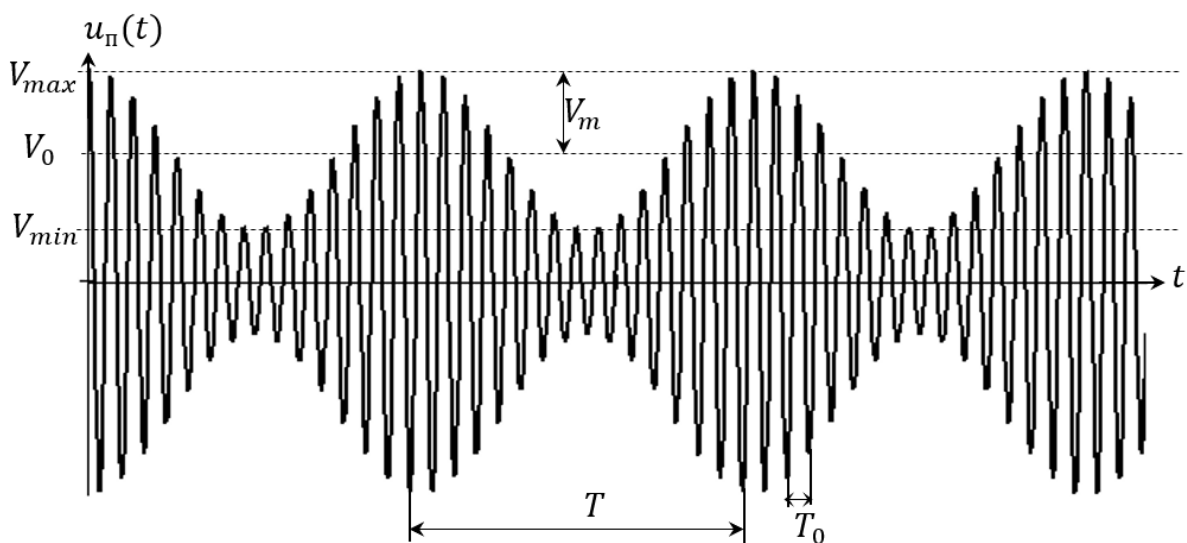


Рис.8.9. Временная диаграмма ТАМС

Полученное выражение является основой для измерения коэффициента модуляции по осциллограмме.

Амплитудный спектр ТАМС:

$$U_n = \begin{cases} V_0, n = 0 \\ \frac{V_m}{2}, n = \pm 1 \end{cases} = \begin{cases} V_0, n = 0 \\ \frac{kS_m}{2}, n = \pm 1 \end{cases} = \begin{cases} V_0, n = 0 \\ \frac{MV_0}{2}, n = \pm 1 \end{cases}.$$

Фазовый спектр ТАМС

$$\varphi_{U_n} = \begin{cases} \varphi_0, n = 0 \\ \varphi_0 \pm \theta, n = \pm 1 \end{cases}.$$

Примеры амплитудного и фазового спектров ТАМС показаны на рис.8.9-8.10.

Средняя мощность ТАМС за период несущего колебания

$$P_{T_0}(t) = P_0 (1 + M \cos(\Omega t + \theta))^2.$$

Средняя мощность ТАМС изменяется во времени, достигая максимального и минимального значений

$$P_{T_0 \min} = P_0 (1 - M)^2; \quad P_{T_0 \max} = P_0 (1 + M)^2.$$

Средняя мощность ТАМС за период модулирующего сигнала

$$P = P_0 \left( 1 + \frac{M^2}{2} \right).$$

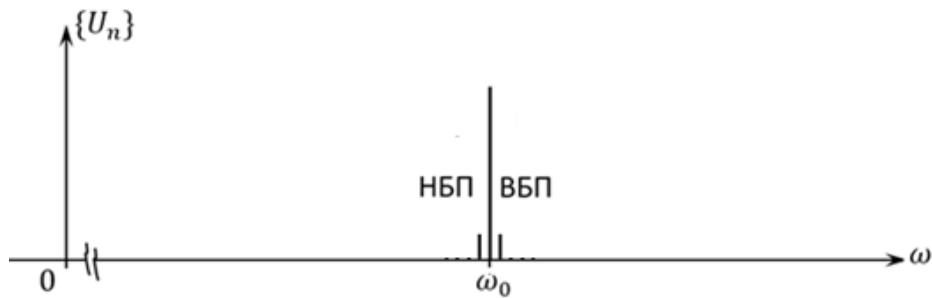


Рис.8.10. Амплитудный спектр ТАМС

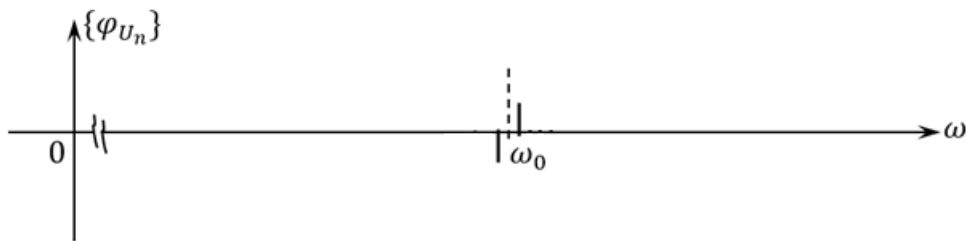


Рис.8.11. Фазовый спектр в ТАМС при  $\varphi_0 = 0$

## Литература

### Основная литература

1. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов / О. А. Стеценко. — М.: Высш. шк., 2007.
2. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Дрофа, 2006.
3. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Радио и связь, 1986.
4. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 2000.

### Дополнительная литература

5. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.: ил. — Библиогр.: с. 804 (15 назв.)
6. Сигналы. Теоретическая радиотехника: Справ. пособие / А. Н. Денисенко. — М.: Горячая линия - Телеком, 2005. — 704 с.
7. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М.: Наука, 1998. — 608 с.