ДИСЦИПЛИНА	**Разработка и эксплуатация радиотелеметрических систем часть 1**
	полное название дисциплины без аббревиатуры
ИНСТИТУТ	**Радиотехнических и телекоммуникационных систем**
КАФЕДРА	**радиоволновых процессов и технологий**
	полное название кафедры
ГРУППА/Ы	**РССО-1,2,3-19; РРБО-1,2-19; РИБО-1,2,3,4-19**
	номер групп/ы, для которых предназначены материалы
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	**Лекция №5**
	лекция; материал к практическим занятиям; контрольно-измерительные материалы к практическим занятиям; руководство к КР/КП, практикам
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	**Исаков Владимир Николаевич**
	фамилия, имя, отчество
СЕМЕСТР	**5**
	указать номер семестра обучения

Лекция 5
5. Преобразование Лапласа
5.1. Прямое и обратное преобразование Лапласа

Прямое и обратное преобразования Лапласа определяются выражениями:

$$\overline{S}(p) = \int_{0}^{+\infty} s(t)e^{-pt}dt,$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} \overline{S}(p)e^{pt}dp, \alpha > \alpha_0.$$

Функция $\overline{S}(p) \in \mathbb{C}$ комплексной переменной $p \in \mathbb{C}$ называется изображением сигнала $s(t)$. Сигнал и его изображение взаимно-однозначно связаны друг с другом преобразованием Лапласа, что принято обозначать как $s(t) \risingdotseq \overline{S}(p)$. Прямое преобразование Лапласа сокращённо будем записывать как

$$\overline{S}(p) = L_t\left\{s(t); p\right\} = L\left\{s(t)\right\},$$

а обратное

$$s(t) = L_p^{-1}\left\{\overline{S}(p); t\right\} = L^{-1}\left\{\overline{S}(p)\right\}.$$

Преобразование Лапласа рассматривается для сигналов, удовлетворяющих условиям:

1. $s(t)\big|_{t<0} = 0$,

2. $\exists M > 0, \alpha_0 > 0 : \forall t \geq 0 \Rightarrow |s(t)| \leq Me^{\alpha_0 t}$,

параметр α_0 называется показателем роста.

При этом изображение существует и аналитично в области $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

5.2. Свойства преобразования Лапласа
5.2.1. Линейность

$$k_1, k_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow L\left\{k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t)\right\} = k_1 L\left\{s_1(t)\right\} + k_2 L\left\{s_2(t)\right\}.$$

Это свойство следует из свойства линейности интеграла и его доказательство очевидно.

5.2.2. Запаздывание сигнала

Пусть $t_0 > 0$ - параметр запаздывания, тогда

$$L\{s(t-t_0)\} = L\{s(t)\}e^{-pt_0}.$$

Доказательство:

$$L\{s(t-t_0)\} = \int_0^{+\infty} s(t-t_0)e^{-pt}dt = \begin{bmatrix} t' = t - t_0 \\ dt' = dt \end{bmatrix} = \int_{-t_0}^{+\infty} s(t')e^{-pt'}e^{-pt_0}dt' =$$

$$= e^{-pt_0}\int_0^{+\infty} s(t')e^{-pt'}dt' = L\{s(t)\}e^{-pt_0}.$$

5.2.3. Изменение масштаба времени

Пусть $a > 0$ - параметр масштаба, тогда

$$L\{s(at)\} = \frac{1}{a}L\left\{s(t);\frac{p}{a}\right\}.$$

Доказательство:

$$L\{s(at)\} = \int_0^{+\infty} s(at)e^{-pt}dt = \begin{bmatrix} t' = at \\ dt' = adt \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} s(t')e^{-\frac{p}{a}t'}dt' =$$

$$= \frac{1}{a}L\left\{s(t);\frac{p}{a}\right\}.$$

5.2.4. Дифференцирование сигнала

$$L\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} = pL\{s(t)\} - s(0).$$

Доказательство:

$$L\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} = \int_0^{+\infty}\frac{ds(t)}{dt}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}ds(t) =$$

$$= e^{-pt}s(t)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} s(t)de^{-pt}.$$

В области существования изображения $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ и первое слагаемое в записанном выражении даёт $s(0)$, поэтому

$$L\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\}=p\int_0^{+\infty}s(t)e^{-pt}dt-s(0)=pL\{s(t)\}-s(0).$$

5.2.5. Интегрирование сигнала

$$L\left\{\int_0^t s(t')dt'\right\}=\frac{1}{p}L\{s(t)\}.$$

Доказательство:

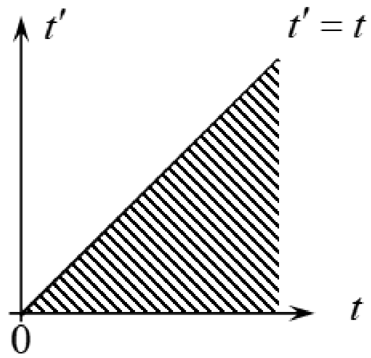

Рис.5.1. Область интегрирования

$$L\left\{\int_0^t s(t')dt'\right\}=\int_0^{+\infty}\int_0^t s(t')dt'e^{-pt}dt=\int_{t'=0}^{+\infty}\left(\int_{t=t'}^{+\infty}e^{-pt}dt\right)s(t')dt'=$$

$$=-\frac{1}{p}\int_{t'=0}^{+\infty}s(t')\left(e^{-pt}\Big|_{t=t'}^{+\infty}\right)dt'=\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}s(t')e^{-pt'}dt'=\frac{1}{p}L\{s(t)\}.$$

5.2.6. Теорема о свёртке

$$L\{s_1*s_2(t)\}=L\{s_1(t)\}L\{s_2(t)\}.$$

Доказательство:

$$L\{s_1*s_2(t)\}=L_t\left\{\int_0^{+\infty}s_1(t')s_2(t-t')dt'\right\}=\int_0^{+\infty}s_1(t')L_t\{s_2(t-t')\}dt'=$$

$$=\int_0^{+\infty}s_1(t')L_t\{s_2(t)\}e^{-pt'}dt'=L\{s_2(t)\}\int_0^{+\infty}s_1(t')e^{-pt'}dt'=$$

$$=L\{s_1(t)\}L\{s_2(t)\}.$$

5.2.7. Предельные равенства

$$\lim_{p\to 0} p\bar{S}(p) = \lim_{t\to +\infty} s(t),$$

$$\lim_{p\to \infty} p\bar{S}(p) = \lim_{t\to 0} s(t).$$

5.3. Преобразование Лапласа и преобразование Фурье

Рассмотрим выражения для преобразования Лапласа и преобразования Фурье некоторого сигнала $s(t)\big|_{t<0} = 0$:

$$S(\omega) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt,$$

$$\bar{S}(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt.$$

Преобразование Лапласа можно рассматривать как преобразование Фурье сигнала $\bar{s}(t) = s(t)e^{-\alpha t}$. Добавление множителя $e^{-\alpha t}$ приводит к тому, что класс сигналов, для которых существует преобразование Лапласа оказывается шире, чем класс сигналов, для которых существует преобразование Фурье. Преобразование Лапласа рассматривается и для сигналов, не затухающих на бесконечности, и для возрастающих сигналов (не быстрее экспоненциального роста).

Преобразование Фурье можно рассматривать как преобразование Лапласа, при переносе контура интегрирования на мнимую ось $\alpha \to 0$. Такой перенос контура интегрирования возможен для убывающих сигналов, поскольку для них может быть выбрано $\alpha_0 = 0$ и для ограниченных неубывающих сигналов, но с учётом того, что при таком переносе на контуре интегрирования могут появится особые точки подынтегральной функции.

Рассмотрим простой случай убывающих сигналов:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \bar{S}(p)e^{pt}dp = \left[\alpha \to 0\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \bar{S}(p)e^{pt}dp =$$

$$= \begin{bmatrix} p = j\omega \\ dp = jd\omega \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{S}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Взяв прямое преобразование Фурье от левой и правой частей записанного равенства, получим

$$S(\omega) = \overline{S}(j\omega) = \overline{S}(p)\Big|_{p=j\omega}.$$

Выражение для спектральной плотности сигнала получается из выражения для его изображения при замене в последнем p на $j\omega$.

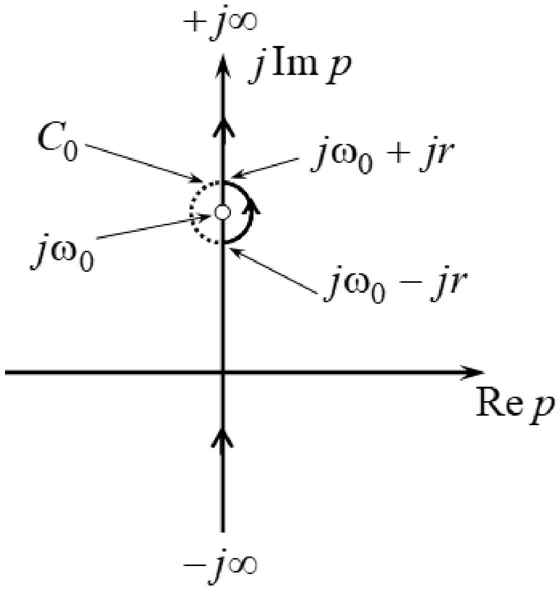

Рис.5.2. К доопределению интеграла

Рассмотрим случай ограниченных неубывающих сигналов. Для них мнимая ось является границей области аналитичности и на ней могут располагать особые точки изображения. В этом случае значение интеграла, который мы получаем при переносе контура оказывается в строгом смысле неопределённым. В подобных случаях часто оказывается удобным доопределение интегралов по Коши. Суть доопределения заключается в том, что в бесконечно маленькой окрестности особой точки на контуре интегрирования допускают малую деформацию контура интегрирования, которая позволяет его провести в обход проблемной точки. При этом «обходной фрагмент» формально считают половинкой окружности бесконечно-малого радиуса r с центром в проблемной точке (рис.5.2). Далее интеграл считается по контуру с исключённой особенностью – получается так называемое главное значение интеграла по Коши, затем учитываются поправки на обход проблемных точек.

В окрестности некоторой особой точки, соответственно рис., имеем:

$$s(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}\bar{S}(p)e^{pt}dp=\left[\alpha\to 0\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\lim_{r\to 0}\left(\int\limits_{-j\infty}^{j\omega_0-jr}\bar{S}(p)e^{pt}dp+\int\limits_{j\omega_0-jr}^{j\omega_0+jr}\bar{S}(p)e^{pt}dp+\int\limits_{j\omega_0+jr}^{+j\infty}\bar{S}(p)e^{pt}dp\right).$$

В записанном выражении слагаемое

$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{j\omega_0-jr}^{j\omega_0+jr}\bar{S}(p)e^{pt}dp=\frac{1}{2}\oint\limits_{C_0}\bar{S}(p)e^{pt}dp=\pi j\underset{p=j\omega_0}{\operatorname{res}}\bar{S}(p)e^{pt}$$

представляет собой добавку на обходном фрагменте контура. Формально это половина интеграла по окружности C_0 с центром в особой точке $j\omega_0$, который может быть найден с учётом теоремы о вычетах.

Другие два слагаемых

$$\lim_{r\to 0}\left(\int\limits_{-j\infty}^{j\omega_0-jr}\bar{S}(p)e^{pt}dp+\int\limits_{j\omega_0+jr}^{+j\infty}\bar{S}(p)e^{pt}dp\right)=v.p.\int\limits_{-j\infty}^{+j\infty}\bar{S}(p)e^{pt}dp$$

дают исходный интеграл, с исключением из контура особенностей, то есть главное значение интеграла по Коши, что обозначается «*v.p.*».

Преобразуем

$$v.p.\int\limits_{-j\infty}^{+j\infty}\bar{S}(p)e^{pt}dp=\left[p=j\omega\right]=j\ v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{S}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Возвращаясь к исходной задаче, запишем

$$s(t)=\frac{1}{2}\underset{p=j\omega_0}{\operatorname{res}}\bar{S}(p)e^{pt}+\frac{1}{2\pi}v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{S}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

В общем случае на мнимой оси может оказаться N особенностей изображения сигнала. Повторяя проведённые рассуждения для каждой из точек, получим

$$s(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\underset{p_n=j\omega_n}{\operatorname{res}}\bar{S}(p)e^{pt}+\frac{1}{2\pi}v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{S}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Взяв теперь прямое преобразование Фурье от левой и правой частей записанного равенства, найдём:

$$S(\omega)=\frac{1}{2}F\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\underset{p_n=j\omega_n}{\operatorname{res}}\bar{S}(p)e^{pt}\right\}+\bar{S}(j\omega).$$

В качестве примера рассмотрим функцию Хевисайда $\sigma(t)$. Её преобразование Лапласа

$$\bar{\Sigma}(p)=\int_0^{+\infty}\sigma(t)e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}e^{-pt}d(-pt)=-\frac{e^{-pt}}{p}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}.$$

Изображение имеет единственный полюс $p_0=0$ на мнимой оси. Для спектральной плотности получим:

$$\Sigma(\omega)=\frac{1}{2}F\left\{\underset{p=0}{\operatorname{res}}\frac{e^{pt}}{p}\right\}+\frac{1}{j\omega}=\frac{1}{2}F\{1\}+\frac{1}{j\omega}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}.$$

В качестве второго примера рассмотрим гармонический сигнал

$$s(t)=A\sigma(t)\cos(\omega_0t+\varphi),$$

его преобразование Лапласа

$$\bar{S}(p)=A\int_0^{+\infty}\sigma(t)\cos(\omega_0t+\varphi)e^{-pt}dt=$$

$$=\frac{1}{2}Ae^{j\varphi}\int_0^{+\infty}e^{j\omega_0t}e^{-pt}dt+\frac{1}{2}Ae^{-j\varphi}\int_0^{+\infty}e^{-j\omega_0t}e^{-pt}dt=$$

$$=\frac{1}{2}Ae^{j\varphi}\int_0^{+\infty}e^{-(p-j\omega_0)t}dt+\frac{1}{2}Ae^{-j\varphi}\int_0^{+\infty}e^{-(p+j\omega_0)t}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{Ae^{j\varphi}}{p-j\omega_0}e^{-(p-j\omega_0)t}\bigg|_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\frac{Ae^{-j\varphi}}{p+j\omega_0}e^{-(p+j\omega_0)t}\bigg|_0^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{Ae^{j\varphi}}{p-j\omega_0}+\frac{1}{2}\frac{Ae^{-j\varphi}}{p+j\omega_0}=A\operatorname{Re}\frac{Ae^{j\varphi}}{p-j\omega_0}=$$

$$= A\,\mathrm{Re}\frac{\cos\varphi + j\sin\varphi}{p^2+\omega_0^2}(p + j\omega_0) =$$

$$= A\,\mathrm{Re}\frac{p\cos\varphi + jp\sin\varphi + j\omega_0\cos\varphi - \omega_0\sin\varphi}{p^2+\omega_0^2}$$

$$= A\frac{p\cos\varphi - \omega_0\sin\varphi}{p^2+\omega_0^2}.$$

Изображение имеет два полюса на мнимой оси $p_{0,1} = \pm j\omega_0$,

$$S(\omega) = \frac{1}{2}F\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\operatorname*{res}_{p_n=j\omega_n}\bar{S}(p)e^{pt}\right\} + \bar{S}(j\omega) =$$

$$= \frac{1}{2}F\left\{\operatorname*{res}_{p_0=j\omega_0} A\frac{p\cos\varphi - \omega_0\sin\varphi}{p^2+\omega_0^2}e^{pt} + \right.$$

$$\left. + \operatorname*{res}_{p_1=-j\omega_0} A\frac{p\cos\varphi - \omega_0\sin\varphi}{p^2+\omega_0^2}e^{pt}\right\} +$$

$$+ A\frac{j\omega\cos\varphi - \omega_0\sin\varphi}{\omega_0^2-\omega^2}.$$

Найдём отдельно вычеты

$$\operatorname*{res}_{p_0=\pm j\omega_0} A\frac{p\cos\varphi - \omega_0\sin\varphi}{p^2+\omega_0^2}e^{pt} =$$

$$= A\frac{p\cos\varphi - \omega_0\sin\varphi}{(p + j\omega_0)(p - j\omega_0)}e^{pt}(p \mp j\omega_0)\Bigg|_{p=\pm j\omega_0} =$$

$$= \pm A\frac{\pm j\omega_0\cos\varphi - \omega_0\sin\varphi}{2j\omega_0}e^{\pm j\omega_0 t} = A\frac{\cos\varphi \pm j\sin\varphi}{2}e^{\pm j\omega_0 t} = \frac{A}{2}e^{\pm j(\omega_0 t+\varphi)}.$$

Подставим найденное в исходное выражение

$$S(\omega) = \frac{A}{4}F\left\{e^{j(\omega_0 t+\varphi)} + e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}\right\} + A\frac{j\omega\cos\varphi - \omega_0\sin\varphi}{\omega_0^2-\omega^2} =$$

$$= \frac{Ae^{j\varphi}}{4}F\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} + \frac{Ae^{-j\varphi}}{4}F\left\{e^{-j\omega_0 t}\right\} + A\frac{j\omega\cos\varphi - \omega_0\sin\varphi}{\omega_0^2-\omega^2} =$$

$$= \frac{Ae^{j\varphi}}{4} F\left\{1; \omega - \omega_0\right\} + \frac{Ae^{-j\varphi}}{4} F\left\{1; \omega + \omega_0\right\} + A \frac{j\omega\cos\varphi - \omega_0 \sin\varphi}{\omega_0^2 - \omega^2} =$$

$$= \frac{A\pi e^{j\varphi}}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{A\pi e^{-j\varphi}}{2} \delta(\omega + \omega_0) + A \frac{j\omega\cos\varphi - \omega_0 \sin\varphi}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Литература

Основная литература

1. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов / О. А. Стеценко. — М.: Высш. шк., 2007.

2. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Дрофа, 2006.

3. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Радио и связь, 1986.

4. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 2000.

Дополнительная литература

5. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.: ил. — Библиогр.: с. 804 (15 назв.)

6. Сигналы. Теоретическая радиотехника: Справ. пособие / А. Н. Денисенко. — М.: Горячая линия - Телеком, 2005. — 704 с.

7. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М.: Наука, 1998. — 608 с.