Лекция №7

§ 5. Теория вычетов функций:

классификация изолированных особых точек на основе вычисления предела функции

5.1 Нули аналитической функции

Определение 5.1. *Точка z_0 называется нулем n-го порядка аналитической в окрестности z_0 функции $f(z)$, если*

$$f(z_0) = 0, f'^{(z_0)} = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0,$$

$$f^{(n)}(z_0) \quad \neq 0.$$

Если $n = 1$, то точка z_0 называется простым нулем.

Теорема 5.1. *Точка z_0 является нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$$

где $\varphi(z)$ аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Пример. Найти нули функции $f(z) = cosz - 1$, определить порядок нуля.

Решение. Приравняем $f(z)$ нулю, получим $cosz = 1$, откуда $z_n = 2\pi n$ $(n = 0, \pm 1, \dots)$ – нули данной функции.

Найдем

$$f'(z)\,|_{z=z_n} = -sinz\,|_{z=2\pi n} = 0,$$

$$f''(z)\,|_{z=z_n} = -cosz\,|_{z=2\pi n} = -1 \neq 0.$$

Согласно определению (5.1), $z_n = 2\pi n$ являются нулями второго порядка.

Пример. Найти нули функции $f(z) = z^8 - 9z^7$,

определить порядок нуля.

Решение. Приравняем $f(z)$ нулю, получим $z^7(z-9) = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 9$. Можно воспользоваться определением (5.1), однако проще использовать теорему 5.1. Функция $f(z)$ представима в виде

$f(z) = z^7(z-9)$, но тогда $z = 0$ является нулем порядка 7, функцией $\varphi(z)$ является сомножитель $\varphi(z) = z - 9$, $\varphi(0) = -9 \neq 0$; $z = 9$, является нулем порядка 1, функцией $\varphi(z)$ в данном случае является $\varphi(z) = z^7$,

$\varphi(9) = 9^7 \neq 0$.

5.2 Изолированные особые точки, их классификация

Определение 5.2. *Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитическая в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки z_0, а в точке z_0 функция не определена или не дифференцируема.*

Определение 5.3. *Точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = C.$$

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1-e^{3z}}{z}$ и установить их тип.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ - это $z_0 = 0$. Вычислим

$$\lim_{z \to 0} \frac{1 - e^{3z}}{z} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z \to 0} \frac{-3z}{z} = -3.$$

т.е. $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

Определение 5.4. *Точка z_0 называется* <u>*полюсом*</u> *функции $f(z)$, если* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Теорема 5.2. *Для того, чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

Теорема 5.3. *Пусть $f(z)$ является аналитической в окрестности точки z_0. Если точка z_0 – нуль порядка n для $f(z)$, то точка z_0 –полюс порядка n для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

Замечание. Если точка z_0 – полюс порядка n для $f(z)$, то точка z_0 – нуль порядка n для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ при условии $\frac{1}{f(z_0)} = 0$.

Отметим, что без последнего условия $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ утверждение становится неверным. В самом деле, если $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, то z=0 – полюс первого порядка. Однако функция $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{z^2}{\sin z}$ не определена при z=0.

Теорема 5.4. *Если функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитическая функция в точке z_0 и*

$\varphi(z_0) \neq 0$, *то точка z_0 является полюсом порядка n функции $f(z)$.*

Замечание. Теорема остается справедливой, если z_0 – устранимая особая точка функции $\varphi(z)$ и существует $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) \neq 0$.

Например, если $\varphi(z) = \frac{\sin z}{z}$, а $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z}$, то z_0=0 – полюс первого порядка функции $f(z)$.

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{2z+1}{z^4-2z^3}$

и установить их тип.

Решение. Найдем нули функции $\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2-2z^3}{2z+1}$. Поскольку

$z^4 - 2z^3 = z^3(z-2)$, то для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка $z = 0$ – это нуль третьего порядка согласно теореме 5.1, а $z = 2$ – нуль первого порядка. Пользуясь теоремой 5.2, имеем: $z = 0$ – это полюс третьего порядка функции $f(z)$, а $z = 2$ – полюс первого порядка.

Теорема 5.5. *Если функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ и точка z_0 является нулем порядка m для функции $P(z)$ и нулем порядка l для функции $Q(z)$, тогда*

1. если $m \geq l \geq 1$, то точка z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$;

2. если $m < l$, то точка z_0 будет полюсом порядка $n = m - l$ функции $f(z)$.

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{e^{z-3}-1}{(z-3)^2 z^4}$ и установить их тип.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1 = 3$ и

$z_2 = 0$.

В точке $z_1 = 3$ числитель и знаменатель $f(z)$ обращаются в нуль. Для числителя $P(z) = e^{z-3} - 1$ число $z = 3$ является нулем 1 порядка, так как $P'(z)\,|_{z=3} = e^{z-3}\,|_{z=3} = 1$, то $z = 3$ – нуль 1-го порядка,

т.е. в теореме 5.5 $m = 1$.

Знаменатель $Q(z) = (z-3)^2 z^4$ по теореме 5.1 в точке $z = 3$ имеет

нуль 2-го порядка, т. е. $l = 2$. Следовательно по теореме 5.5

$l - m = 1$ – порядок полюса функции $f(z)$.

В точке $z = 0$ перепишем функцию в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^4}$,

где $\varphi(z) = \frac{e^{z-3}-1}{(z-3)^2}$ – аналитическая функция в точке $z = 0$,

$\varphi(0) = \frac{e^{-3}-1}{9} \neq 0.$

По теореме 5.4 $z = 0$ – полюс 4-го порядка.

Окончательно, $z = 3$ – полюс первого порядка, $z = 0$ – полюс 4-го порядка.

Определение 5.5. *Точка* z_0 *называется* <u>*существенно особой*</u> *точкой, если в этой точке не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции* $f(z)$ *при* $z \to z_0$.

Рассмотрим различные задачи.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{(z^2+9)z^3}$

и установить их тип.

Решение: Изолированные особые точки функции $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$ и $z_3 = 0$.

Для нахождения типа каждой особой точки нужно вычислить предел функции в каждой особой точке. При этом используем определения, приведенные в данной лекции, и теорему 5.5.

$\lim\limits_{z \to 3i} \dfrac{e^z - 1}{(z^2+9)z^3} = \lim\limits_{z \to 3i} \dfrac{e^z - 1}{(z-3i)(z+3i)z^3} = \infty$, следовательно

получаем $z_1 = 3i$ полюс первого порядка.

Рассмотрим следующую иот. $z_2 = -3i$.

$$\lim_{z \to -3i} \frac{e^z - 1}{(z^2+9)z^3} = \lim_{z \to -3i} \frac{e^z - 1}{(z-3i)(z+3i)z^3} = \infty,$$ следовательно

$z_2 = -3i$ полюс первого порядка.

Рассмотрим следующую иот. $z_3 = 0$.

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{(z^2+9)z^3} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{(z^2+9)z^3} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{(z^2+9)z^2} = \infty$$

Отметим, что при вычислении предела использовались эквивалентности.

Получаем, что

$z_3 = 0$ полюс второго порядка.

Ответ. Заданная функция имеет 3 иот. Тип каждой иот следующий:

$z_1 = 3i$ полюс первого порядка

$z_2 = -3i$ полюс первого порядка

$z_3 = 0$ полюс второго порядка.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \dfrac{e^z}{(z^2+9)z^3}$

и установить их тип.

Решение: Изолированные особые точки функции $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$ и $z_3 = 0$.

Для нахождения типа каждой особой точки нужно вычислить предел функции в каждой особой точке. Заметим, что в отличие от предыдущего примера в числителе здесь стоит другая функция!

$$\lim_{z \to 3i} \frac{e^z}{(z^2+9)z^3} = \lim_{z \to 3i} \frac{e^z}{(z-3i)(z+3i)z^3} = \infty$$

Получаем $z_1 = 3i$ полюс первого порядка.

Для следующей иот. имеем

$$\lim_{z \to -3i} \frac{e^z}{(z^2+9)z^3} = \lim_{z \to -3i} \frac{e^z}{(z-3i)(z+3i)z^3} = \infty$$

Получаем, что

$z_2 = -3i$ полюс первого порядка .

Теперь установим тип $z_3 = 0$.

$\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{e^z}{(z^2+9)z^3} = \infty$, значит

$z_3 = 0$ полюс третьего порядка. Отметим, что в отличие от предыдущего примера, в данном случае эквивалентности не применяются!

Ответ. Заданная функция имеет 3 иот. Тип каждой иот следующий:

$z_1 = 3i$ полюс первого порядка

$z_2 = -3i$ полюс первого порядка

$z_3 = 0$ полюс третьего порядка.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z)=\dfrac{e^{z}-1}{(z^2+9)z}$

и установить их тип.

Решение: Изолированные особые точки функции $z_1=3i$, $z_2=-3i$ и $z_3=0$.

Для нахождения типа каждой особой точки нужно вычислить предел функции в каждой особой точке.

$$\lim_{z\to 3i}\frac{e^{z}-1}{(z^2+9)z}=\lim_{z\to 3i}\frac{e^{z}-1}{(z-3i)(z+3i)z}=\infty$$

Получаем $z_1=3i$ полюс первого порядка.

$$\lim_{z\to -3i}\frac{e^{z}-1}{(z^2+9)z}=\lim_{z\to -3i}\frac{e^{z}-1}{(z-3i)(z+3i)z}=\infty\text{, тогда}$$

$z_2=-3i$ полюс первого порядка.

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{(z^2+9)z}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{(z^2+9)z}=\frac{1}{9}$$

Получаем, что $z_3=0$ устранимая особая точка. Заметим, что здесь при вычислении предела были применены эквивалентности.

Ответ. Заданная функция имеет 3 иот. Тип каждой иот следующий:

$z_1=3i$ полюс первого порядка

$z_2=-3i$ полюс первого порядка

$z_3=0$ устранимая особая точка.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = (z+4)^5 e^{\frac{2}{z+4}}$ и установить их тип.

Решение: Изолированная особая точка функции $z = -4$.

Если вычислять предел функции в этой особой точке, то его не существует.

Получаем, что $z = -4$ существенно особая точка.

Данная задача довольно просто решается, если ввести классификацию изолированных особых точек на основе разложения функции в ряд Лорана.

Такой подход будет рассмотрен в следующих лекциях.