

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МИРЭА – РОССИЙСКИЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.С. БЕЛАНОВ, Е.А. КОЛОМИЙЦЕВА, К.Ю. ХАРИТОНОВА

**ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

Курс лекций по физике

Москва 2018

Оглавление

Раздел I. ЭЛЕКТРОСТАТИКА	4
Лекция 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ	4
1.1. Электрический заряд. Закон сохранения заряда.....	4
1.2. Закон Кулона.....	4
1.3. Напряженность электрического поля.....	5
1.4. Принцип суперпозиции электрических полей. Электрический диполь	6
1.5. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса-Остроградского	8
1.6. Теорема Гаусса-Остроградского	9
Лекция 2. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.....	11
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ.....	11
2.1. Работа сил электрического поля.....	11
2.2. Потенциал электростатического поля.....	12
2.3. Эквипотенциальные поверхности	12
2.4. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом	13
2.5. Полярные и неполярные диэлектрики.....	14
2.6. Поляризация электронная, ориентационная и ионная. Вектор поляризованности.....	14
2.7. Напряженность электрического поля в диэлектрике. Диэлектрическая проницаемость.....	16
2.9. Граничные условия для векторов \vec{D} и \vec{E}	17
Лекция 3. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ	17
3.1. Проводник во внешнем электростатическом поле	18
3.2. Электрическая емкость	19
3.3. Энергия заряженного проводника, системы проводников и конденсатора.....	20
3.4. Энергия электрического поля. Объемная плотность энергии электрического поля в диэлектрике и в вакууме.....	21
Раздел II ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	21
Лекция 4. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	21
4.1. Электрический ток и его характеристики	21
4.2. Электродвижущая сила источника тока. Напряжение	22
4.3. Закон Ома для однородного участка цепи и закон Ома в дифференциальной форме	23
4.3.2. Закон Ома в дифференциальной форме	24
4.4. Закон Ома для неоднородного участка цепи	25
4.5. Закон Джоуля – Ленца. Работа и мощность тока. КПД источника.....	26
4.6. Закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме.....	27
4.7. Правила Кирхгофа.....	27
4.8. Электрический ток в газах.	29
Раздел III МАГНЕТИЗМ	30
Лекция 5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ И ВЕЩЕСТВЕ	30
5.1. Магнитный момент контура с током. Магнитная индукция	30
5.2. Закон Ампера.....	31
5.3. Закон Био-Савара–Лапласа.....	32
5.4. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. Поле соленоида и тороида.....	33
5.5. Магнитный поток. Теорема Гаусса	34
5.6. Работа перемещения проводника и рамки с током в магнитном поле.....	35
5.7. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца.....	35
5.8. Магнитные моменты атомов.....	36
5.9. Намагниченность и напряженность магнитного поля.....	37
5.10. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля.....	37
5.11. Виды магнетиков.....	38
Лекция 6 ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ.....	39

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.....	39
6.1. Явление электромагнитной индукции.....	39
6.2. Явление самоиндукции	39
6.3. Энергия магнитного поля	41
6.4. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля.....	41
6.5. Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме	43
Раздел IV КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.....	45
Лекция 7 КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ.....	45
7.1. Гармонические колебания	45
7.2. Скорость, ускорение. Потенциальная и кинетическая энергии	47
7.3. Сложение колебаний.....	48
7.4. Свободные затухающие колебания	49
7.5. . Вынужденные колебания.....	50
Лекция 8 ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ	51
8.1. Упругие среды. Продольные и поперечные волны	51
8.2. Уравнение гармонической бегущей волны.....	52
8.3. Фронт волны, волновые поверхности, фазовая скорость.....	53
8.4. Волновое уравнение.....	54
8.5. Принцип суперпозиции волн. Групповая скорость. Эффект Доплера.....	54
8.6. Энергия бегущей волны. Вектор плотности потока энергии	55
8.7. Волновые уравнения для электромагнитных волн	56
8.8. Уравнение плоской гармонической волны	57
8.9. Энергия электромагнитной волны.....	58
8.10. Шкала электромагнитных волн	59
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	60

Раздел I. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Лекция 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.

1.1. Электрический заряд. Закон сохранения заряда

Известно, что имеются два вида электрических зарядов, условно называемых положительными и отрицательными. О природе электрического заряда до сих пор в физике нет единого представления. Экспериментально установлено, что величина заряда не зависит от скорости, следовательно, электрический заряд является релятивистски инвариантным.

Заряды в СИ измеряют в Кулонах. Все существующие на практике заряды кратны величине $e = 1,60219 \times 10^{-19}$ Кл, называемой элементарным зарядом: $q = Ne$, где N — целые числа, т.е, электрический заряд квантуется.

Носителем положительного элементарного заряда $+e$ является, например, протон, носитель отрицательного элементарного заряда $-e$ — электрон.

Как известно, все вещества состоят из атомов, а атом, в свою очередь, состоит из положительно заряженного ядра, вокруг которого вращаются отрицательно заряженные электроны. В целом атом электронейтрален, т. к. число протонов, несущих положительный заряд $q_+ = +ze$ (где z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева), равно числу электронов, несущих отрицательный заряд $q_- = -ze$.

При электризации, например, трением, оба тела заряжаются разноименно: одно — положительно, а другое — отрицательно, т.е, одно тело теряет электроны, а другое приобретает их.

Раздел электродинамики, изучающий неподвижные электрические заряды, называется **электростатикой**.

Если рассмотреть изолированную систему, через поверхность которой заряды не проходят, то можно утверждать:

Алгебраическая сумма электрических зарядов в изолированной системе есть величина постоянная:

$$\sum_{i=1}^n q_i = \text{const}.$$

Это один из фундаментальных законов физики — **закон сохранения электрического заряда**. Его опытным путем установил Фарадей.

1.2. Закон Кулона

Он справедлив для точечных зарядов.

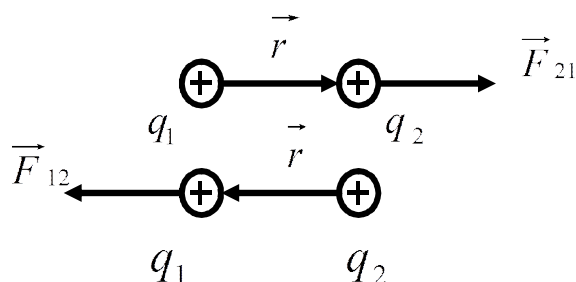
Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями от него до других заряженных тел. Кулон в 1785 г. экспериментально установил, что

сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величинам этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1)$$

где в СИ коэффициент $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9}$ Ф/м — электрическая постоянная. В итоге имеем $k = 9 \times 10^9$ м/Ф, или Нм²/Кл². Одноименно заряженные тела отталкиваются, разноименно заряженные — притягиваются. Закон Кулона можно выразить в векторной форме:

$$\overset{\textcircled{R}}{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}, \quad (2)$$



$\overset{\textcircled{R}}{F}_{12}$ — сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 ; $\overset{\textcircled{R}}{F}_{21}$ — сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 .

Рис.1

Экспериментально установлено, что взаимодействие двух зарядов не изменится, если вблизи них поместить другие заряды. Пусть, кроме заряда q , имеются еще заряды q_1, q_2, \dots, q_n , тогда результирующая сила, с которой они действуют на заряд q , будет

$$\overset{\textcircled{R}}{F} = \overset{\textcircled{R}}{\sum}_{i=1}^n \overset{\textcircled{R}}{F}_i, \quad (3)$$

где $\overset{\textcircled{R}}{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{r_i^3} \overset{\textcircled{R}}{r}_i$; $\overset{\textcircled{R}}{r}_i$ — радиус-вектор, исходящий от заряда q_i , и направленный к заряду q .

1. 3. Напряженность электрического поля

Всякий электрический заряд изменяет свойства окружающего его пространства, создавая в нем электрическое поле. Это поле проявляет себя в том, что оно действует с силой на заряд, внесенный в него. Такой малый по величине точечный положительный заряд q' называется пробным (малый потому, чтобы не изменять ни величины, ни распределения тех сторонних зарядов, которые порождают исследуемое поле).

Электрическое поле выступает посредником при взаимодействии между покоящимися зарядами, поэтому скорость взаимодействия конечна.

Основной количественной характеристикой электрического поля является его силовая характеристика — **напряженность электрического поля** $\overset{\textcircled{R}}{E}$ — векторная величина, определяемая как отношение силы, действующей со стороны поля на пробный заряд q' , к величине этого заряда:

$$\overset{\textcircled{R}}{E} = \overset{\textcircled{R}}{F} / q'. \quad (4)$$

Иными словами, напряженность электрического поля равна силе, с которой электрическое поле действует на единичный положительный заряд и совпадает по

направлению с этой силой, (см. рис. 2.) Напряженность электрического поля измеряется в В/м.

В общем случае на заряд q , находящийся в поле с напряженностью \vec{E} , действует сила

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (5)$$

Условно электрическое поле изображают с помощью силовых линий вектора \vec{E} - линий; касательные к которым в рассматриваемой точке поля совпадают с направлением силы, действующей на пробный заряд в этой точке. Густота линий соотносится с величиной поля.

Силовые линии электрического поля

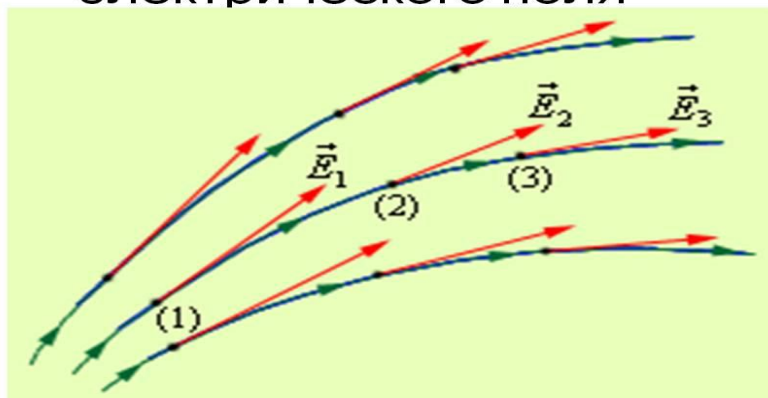


Рис.3

Исследуем с помощью пробного заряда q' поле **точечного** заряда $+q$.

Согласно закону Кулона на пробный заряд q' со стороны заряда q будет действовать сила (2); с учетом этого напряженность поля, создаваемого точечным

зарядом q ,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (6)$$

здесь \vec{r} - радиус-вектор, проведенный от заряда q в рассматриваемую точку поля.

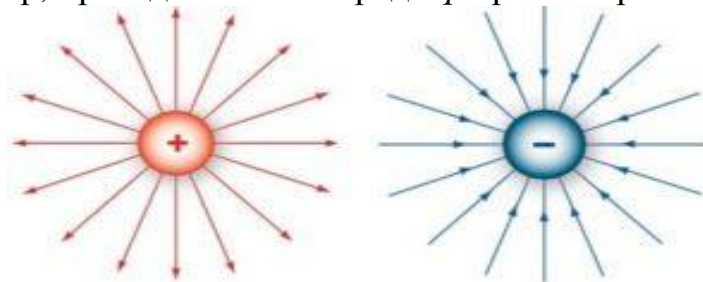


Рис.4

Поле заряда $-q$ отличается лишь направлением векторов \vec{E} - силовые линии заканчиваются на заряде. Это можно показать и по формуле (6).

1.4. Принцип суперпозиции электрических полей. Электрический диполь

Если электрическое поле создается совокупностью точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n , то оно будет действовать на пробный заряд q' в некоторой точке поля M с результирующей силой \vec{F} . Напряженность поля в этой точке

$$\overset{\textcircled{R}}{E} = \frac{\overset{\textcircled{R}}{F}}{q'} = \frac{\overset{n}{\overset{\textcircled{R}}{a}} \overset{\textcircled{R}}{F}_i}{q'} = \overset{n}{\overset{\textcircled{R}}{a}} \overset{\textcircled{R}}{E}_i, \quad (7)$$

т.е, равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов в отдельности. Таким образом,

$$\overset{\textcircled{R}}{E} = \overset{n}{\overset{\textcircled{R}}{a}} \overset{\textcircled{R}}{E}_i. \quad (8)$$

Это утверждение носит название **принципа суперпозиции** (наложения) электрических полей и справедливо для не очень больших величин $\overset{\textcircled{R}}{E}$.

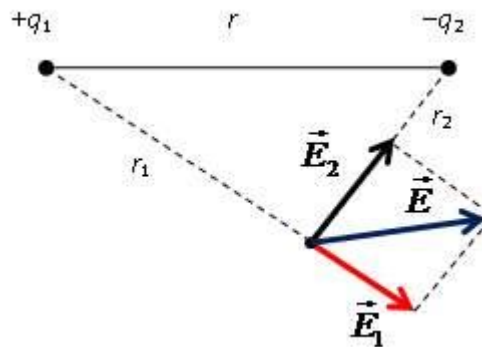


Рис.5

Два точечных заряда, равных по величине и противоположных по знаку, находящихся на некотором расстоянии $\overset{\textcircled{R}}{l}$ друг от друга, называются **электрическим диполем** (см. рис. 7). Плечом диполя называется вектор $\overset{\textcircled{R}}{l}$, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и по модулю равный расстоянию между ними. Модель диполя применима, например, для описания поведения молекул в электрических полях.

Электрический диполь характеризуется моментом диполя (дипольным моментом) $\overset{\textcircled{R}}{p} = q \overset{\textcircled{R}}{l}$. (9)

На диполь, помещенный в электрическое поле с напряженностью $\overset{\textcircled{R}}{E}$, действует момент сил

$$\overset{\textcircled{R}}{M} = \overset{\textcircled{R}}{p}' \overset{\textcircled{R}}{E}, \quad (10)$$

который стремится установить диполь по полю, (см. рис.6).

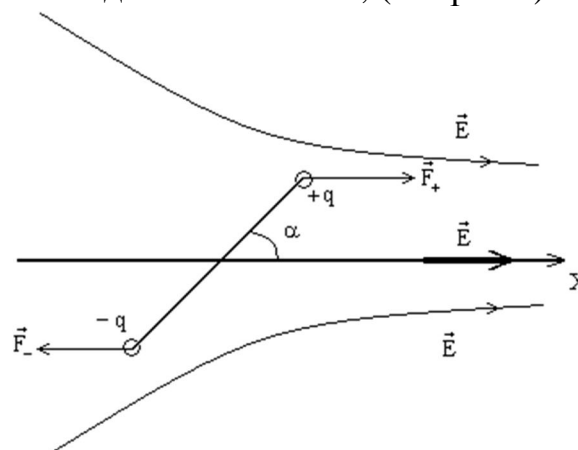


Рис.6

Потенциальная энергия диполя во внешнем электростатическом поле

$$W_n = - p E. \quad (11)$$

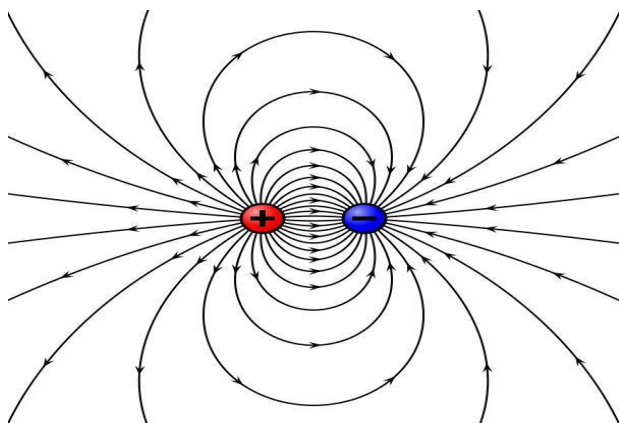


Рис. 7

В соответствии с принципом суперпозиции напряженность в произвольной точке поля диполя $E = E_+ + E_-$.

Несложно рассчитать напряженность поля диполя (задание для решения на семинарских занятиях):

1) в точке А, расположенной на оси диполя

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r - \frac{l}{2})^2} - \frac{q}{(r + \frac{l}{2})^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{(r^2 - \frac{l^2}{4})^2}. \quad (12)$$

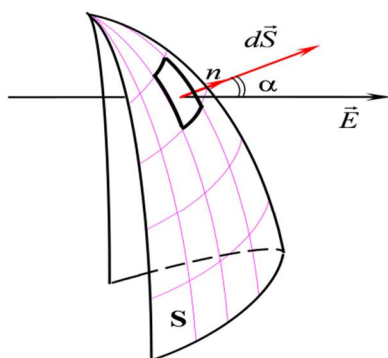
2) в точке, расположенной на перпендикуляре к середине его оси

$$E = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{(r^2 + \frac{l^2}{4})^{3/2}}. \quad (13)$$

1.5. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса-Остроградского

Поток вектора - одно из важнейших понятий векторного анализа, математического аппарата для работы с векторными полями.

Пусть имеется электрическое поле E (в общем случае неоднородное), пронизывающее некоторую поверхность (в общем случае неплоскую). Поверхность может быть как реальной, так и мысленной.



Разобьем поверхность на бесконечно малые элементарные площадки dS , которые можно считать плоскими, а поле вблизи них однородным. Определим поток вектора E через элементарную площадку - величину $d\Phi$, как

$$d\Phi = \vec{E} d\vec{S} = E dS \cos \alpha = E_n dS, \quad (14)$$

Рис.8

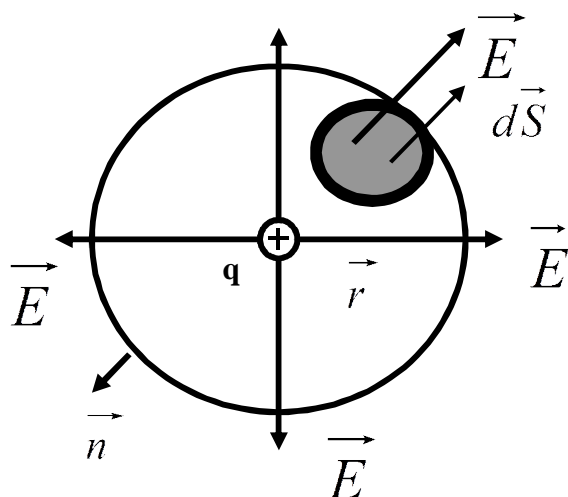
где $\vec{S} = S \vec{n}$ — есть вектор, равный произведению величины площади на нормаль к этой поверхности, E_n — проекция вектора \vec{E} на нормаль \vec{n} к площадке.

Полный поток вектора напряженности через поверхность S

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS. \quad (15)$$

1.6. Теорема Гаусса-Остроградского

Найдем поток вектора напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом q , через сферическую поверхность радиуса r .



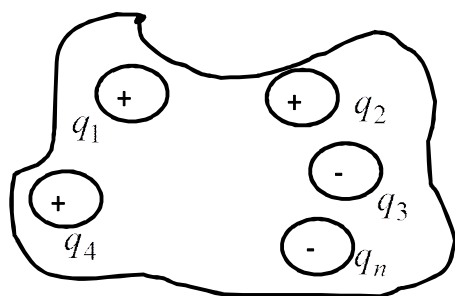
Площадь ее поверхности $S = 4\pi r^2$. Силовые линии электрического поля идут по радиусам к поверхности сферы и поэтому угол между векторами \vec{E} и \vec{n} равен нулю.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (16)$$

Рис.9

Можно показать, что поток через замкнутую поверхность не зависит от формы поверхности и от расположения зарядов в ней.

Рассмотрим поток, создаваемый системой зарядов, сквозь замкнутую поверхность произвольной формы, внутри которой они находятся (рис.10):



$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Согласно принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n, \text{ поэтому}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \dots + \oint_S \vec{E}_n \cdot d\vec{S} = \\ &= \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \dots + \frac{q_n}{\epsilon_0} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Рис.10

Таким образом,

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0}. \quad (17)$$

Итак, мы доказали теорему Гаусса — Остроградского:

Полный поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью, деленной на ϵ_0 .

Из теоремы Гаусса — Остроградского вытекают **следствия**:

1) линии вектора \vec{E} (силовые линии) нигде, кроме зарядов, не начинаются и не заканчиваются: они, начавшись на заряде, уходят в бесконечность для положительного заряда, либо, приходя из бесконечности, заканчиваются на отрицательном заряде (картина силовых линий приводится на рис. 4,7);

2) если алгебраическая сумма зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью, равна нулю, то полный поток через эту поверхность равен нулю;

3) если замкнутая поверхность проведена в поле так, что внутри нее нет зарядов, то число входящих линий вектора напряженности равно числу выходящих и поэтому полный поток через такую поверхность равен нулю.

Теорема Гаусса позволяет рассчитать электрические поля, создаваемые заряженными телами различной формы (задание для решения на семинарских занятиях):

- **Поле равномерно заряженной, бесконечно протяженной плоскости**

$$E = \frac{q}{2\epsilon_0 S} = \frac{S}{2\epsilon_0}, \quad (18)$$

где $S = q/S$ поверхностная плотность заряда, измеряемая в СИ в Кл/м².

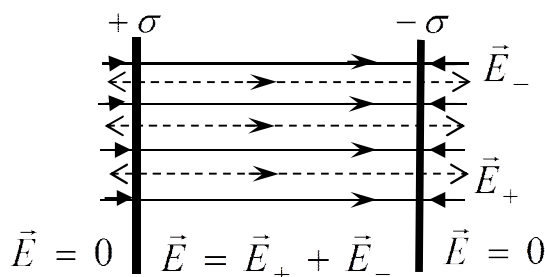


Рис.11

В частности, поле между двумя бесконечно протяженными, разноименно заряженными параллельными плоскостями

$$E = \frac{S}{2\epsilon_0} + \frac{S}{2\epsilon_0} = \frac{S}{\epsilon_0} \quad (19)$$

Вне внутреннего промежутка $\vec{E} = 0$.

По этой же формуле (19) определяется напряженность электрического поля вблизи заряженного проводника.

- **Поле заряженного цилиндра**

$$E = \frac{1}{2\pi r \epsilon_0} \frac{q}{h} = \frac{t}{2\pi r \epsilon_0}, \quad r \geq R \quad (20)$$

где $t = q/h$ — линейная (погонная) плотность заряда, которая измеряется в Кл/м. При $r < R$, т.е. внутри цилиндра, $\vec{E} = 0$.

- **Поле заряженной сферы:**

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r \geq R \quad (21)$$

т.е. вне заряженной сферы поле такое же, как и поле точечного заряда той же величины, помещенного в центре сферы. Внутри сферы нет зарядов, и поэтому поле там отсутствует, т.е. при $r < R$ имеем $E = 0$. Это свойство используют для экранировки от полей внешних зарядов.

Лекция 2. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ.

2.1. Работа сил электрического поля

Найдем работу по перемещению пробного заряда q' из точки 1 в точку 2 в поле, создаваемом точечным зарядом q (см. Рис.1):

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos \alpha = F dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dr,$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1)$$

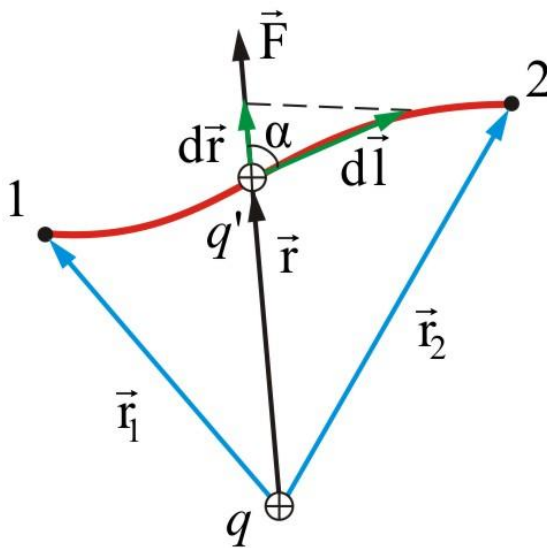


Рис.1

Таким образом, работа сил не зависит от формы пути. Она является только функцией начального и конечного положения заряда.

Можно показать, что данное утверждение справедливо для поля, создаваемого любым заряженным телом.

В механике такие силы мы называли **консервативными**, а поля, работа сил которых не зависит от формы пути, называются **потенциальными полями**.

По замкнутой траектории L работа равна нулю, т. к. $r_1 = r_2$, т. е.

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = \oint_L q' \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad \text{или} \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (2)$$

т.е. **циркуляция вектора напряженности по любому замкнутому контуру равна нулю**.

Итак, электростатическое поле является потенциальным, а кулоновские силы - консервативными.

2.2. Потенциал электростатического поля

Известно, что работа сил потенциального поля может быть представлена как убыль потенциальной энергии, например из (1)

$$A_{12} = W_{n1} - W_{n2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (3)$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия пробного заряда q' в поле точечного заряда q будет иметь вид

$$W_n = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} + C.$$

При $r \rightarrow \infty$ потенциальная энергия должна обращаться в нуль, поэтому значение постоянной C полагаем равным нулю. В итоге получаем, что

$$W_n = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (4)$$

Величину $j = W_n / q'$ (5)

называют **потенциалом** электрического поля в данной точке. Потенциал j , наряду с напряженностью электрического поля E , используется для описания электрического поля, являясь его энергетической характеристикой. Потенциал точечного заряда q , как следует из (4) и (5),

$$j = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (6)$$

т. е. $j \sim q/r$ (прямо пропорционален величине заряда и обратно пропорционален расстоянию от него). Потенциал в СИ измеряется в вольтах: $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл}$.

Если поле создает система точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n , то потенциал

$$j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \quad (7)$$

Из формулы (5) вытекает, что заряд q' , находящийся в точке поля с потенциалом j , обладает потенциальной энергией

$$W_n = q'j. \quad (8)$$

Следовательно, работу сил поля над зарядом q' можно выразить через разность потенциалов

$$A_{12} = W_{n1} - W_{n2} = q'(j_1 - j_2) = q'U, \quad (9)$$

здесь $j_1 - j_2 = U$ - разность потенциалов между двумя точками поля, которая называется **напряжением**. Напряжение $U = j_1 - j_2$ тоже измеряется в вольтах.

2.3. Эквипотенциальные поверхности

Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной поверхностью.

Ее уравнение имеет вид $j(x, y, z) = \text{const}$. (10)

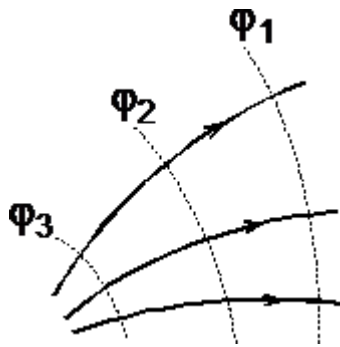


Рис.2

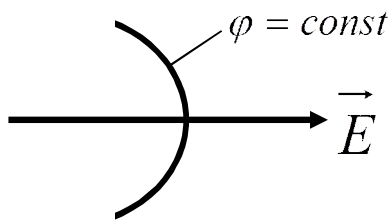
Для точечного заряда q , согласно (6),

$$j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

и эквипотенциальной поверхностью является сфера радиуса r .

При перемещении заряда q' вдоль эквипотенциальной поверхности на отрезок dl потенциал не изменяется, т. е. $dj = 0$, следовательно,

$$dA = -q' dj = 0. \quad (11)$$



С другой стороны

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = q' \vec{E} d\vec{r} = q' E dr \cos \alpha$$

и равна нулю, следовательно, $\alpha = 90^\circ$, т.е. вектор напряженности электрического поля \vec{E} в данной точке всегда перпендикулярен эквипотенциальной поверхности

Рис.3

2.4. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом

Напряженность электрического поля и потенциал используются для описания электрического поля. \vec{E} - векторная величина (силовая характеристика), j - скалярная величина (энергетическая характеристика). Они связаны между собой.

Используем соотношение между консервативной силой \vec{F} и потенциальной энергией W_p , уже известное из раздела «Механика»:

$$\vec{F} = - \text{grad} W_p = - \vec{\nabla} W_p,$$

где

$$\text{grad} W_p = \vec{\nabla} W = \frac{\partial W_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z} \vec{k}$$

Учитывая, что $\vec{F} = q' \vec{E}$ и $W_p = q' j$ и сокращая пробный заряд q' , получим

$$\vec{E} = - \text{grad} j = - \vec{\nabla} j \quad (12)$$

Градиент потенциала есть вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону наибыстрейшего возрастания j . Знак "минус" в (12) означает, что \vec{E} и $\text{grad} j$ направлены в противоположные стороны, т.е. поле направлено в сторону наибыстрейшего убывания потенциала.

В частном одномерном случае

$$E = - dj / dl \quad (13)$$

Из формул (12), (13) видно, что напряженность электрического поля \vec{E} измеряется в В/м.

2.5. Полярные и неполярные диэлектрики

Перейдем к рассмотрению электрического поля в диэлектриках

Все вещества по электропроводности разделяются на проводники и диэлектрики. Промежуточное положение между ними занимают полупроводники.

Проводниками называют вещества, в которых имеются свободные носители зарядов, способные перемещаться под действием электрического поля. Примерами проводников являются металлы, растворы или расплавы солей, кислот, щелочей.

Диэлектриками или изоляторами называются вещества, в которых нет свободных носителей зарядов и которые, следовательно, не проводят электрический ток. Это будут идеальные диэлектрики. В действительности диэлектрики проводят электрический ток, но очень слабо, их проводимость в 10^{15} - 10^{20} раз меньше, чем у проводников. Это обусловлено тем, что в обычных условиях заряды в диэлектриках связаны в устойчивые молекулы и не могут, как в проводниках, легко отрываться и становиться свободными. Молекулы диэлектрика электронейтральны: суммарный заряд электронов и атомных ядер, входящих в состав молекулы, равен нулю. В первом приближении молекулу можно рассматривать как диполь с электрическим моментом $\vec{p} = q\vec{l}$; здесь q - заряд ядра молекулы, \vec{l} - вектор, проведенный из "центра тяжести" электронов в "центр тяжести" положительных зарядов атомных ядер (в 1.4 \vec{l} называли плечом диполя).

Различают два основных типа диэлектриков: полярный и неполярный.

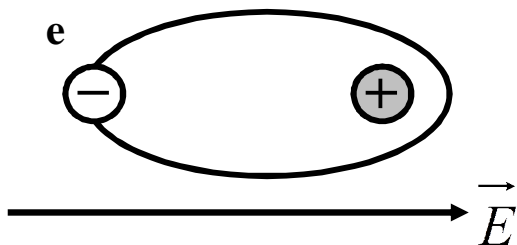
Диэлектрик называют неполярным, если в его молекулах в отсутствие внешнего электрического поля центры тяжести отрицательных и положительных зарядов совпадают, например, H_2, O_2, N_2 . Для них дипольный момент $\vec{p} = q\vec{l} = 0$, т. к. $\vec{l} = 0$. И, следовательно, суммарный дипольный момент неполярного диэлектрика $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0$.

В молекулах полярных диэлектриков (H_2O , спирты, $HC1...$) центры тяжести зарядов разных знаков сдвинуты друг относительно друга. В этом случае молекулы обладают собственным дипольным моментом $\vec{p} = q\vec{l} \neq 0$. Но эти дипольные моменты в отсутствие внешнего электрического поля из-за теплового движения молекул ориентированы хаотически и суммарный дипольный момент такого диэлектрика равен нулю, т. е.

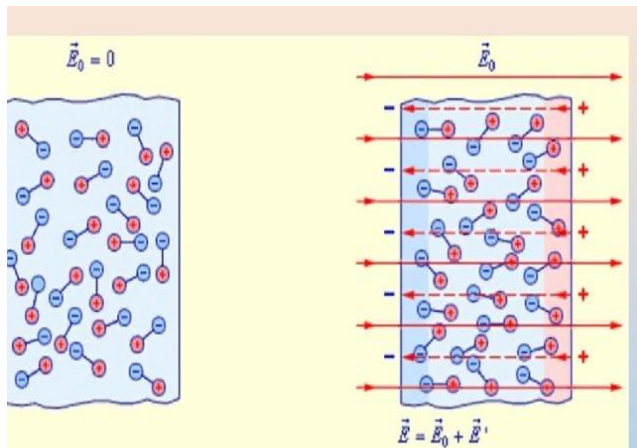
$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0.$$

2.6. Поляризация электронная, ориентационная и ионная. Вектор поляризованности

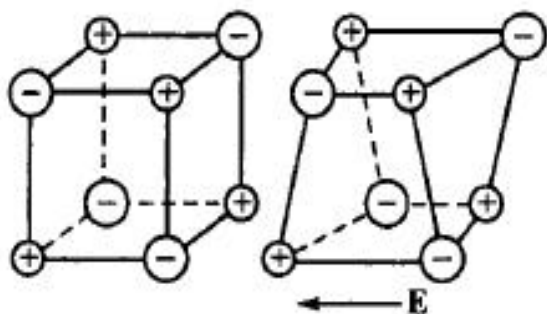
Если диэлектрик внести в электрическое поле, то в нем произойдет перераспределение связанных зарядов. В результате этого суммарный дипольный момент диэлектрика $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ становится отличным от нуля. В этом случае говорят, что произошла поляризация диэлектрика. Различают три типа поляризации диэлектриков:



1) **ЭЛЕКТРОННАЯ**: она наблюдается в неполярных диэлектриках, когда электронная оболочка смещается относительно ядра против поля.



2) **ОРИЕНТАЦИОННАЯ**: она наблюдается в полярных диэлектриках, когда диполи стремятся расположиться вдоль поля. Этому препятствует тепловое хаотическое движение и взаимодействие диполей



3) **ИОННАЯ**: она наблюдается в твердых кристаллических диэлектриках, когда внешнее поле вызывает смещение положительных ионов по полю, а отрицательных - против поля.

Количественной мерой поляризации диэлектрика является **поляризованность диэлектрика** \vec{P} - векторная величина, равная отношению суммарного дипольного момента малого объема диэлектрика к величине этого объема DV , т. е.

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{DV}, \quad (14)$$

в СИ $[P] = \text{Кл} / \text{м}^2$.

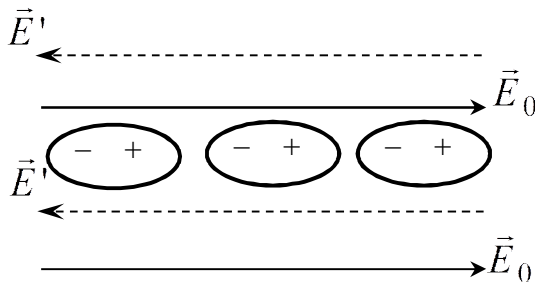
Таким образом, вектор поляризованности диэлектрика равен дипольному моменту единицы объема поляризованного диэлектрика.

Как показывает опыт, у изолированных диэлектриков вектор поляризованности для не слишком больших E пропорционален напряженности электрического поля, т.е.

$$\vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (15)$$

где ϵ_0 - электрическая постоянная, ϵ - называется диэлектрической восприимчивостью диэлектрика; это безразмерная величина, которая для вакуума и, практически, для воздуха, равна нулю.

2.7. Напряженность электрического поля в диэлектрике. Диэлектрическая проницаемость.



Итак, при внесении диэлектрика в электрическое поле с напряженностью E_0 происходит поляризация диэлектрика, в результате которой возникает поле связанных зарядов, направленное против внешнего поля.

Напряженность поля связанных зарядов обозначим через E' ,

Рис.4

оказывается, она пропорциональна напряженности поля в диэлектрике, т.е. $E' = \epsilon E$, поэтому напряженность поля в диэлектрике

$$E = E_0 + E' \quad \text{или} \quad E = E_0 - E' = E_0 - \epsilon E,$$

откуда

$$E = \frac{E_0}{1 + \epsilon} = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (16)$$

где величину

$$\epsilon = 1 + \epsilon \quad (17)$$

называют относительной диэлектрической проницаемостью вещества или среды; ϵ - безразмерная величина; т.к. $\epsilon = 0$ для вакуума и, практически, для воздуха, то для этих же сред $\epsilon = 1$.

Итак, поле в диэлектрике ослабляется в ϵ раз по сравнению с полем в вакууме. С учетом этого ряд формул, описывающих взаимодействие зарядов в диэлектрике, будут иметь другой вид, всюду вместо ϵ_0 пишется $\epsilon_0 \epsilon$.

Из рис. 4 следует, что связанный суммарный заряд не равен нулю лишь на поверхности диэлектрика. Эти заряды называются поверхностными поляризационными зарядами.

2.8. Теорема Гаусса - Остроградского для поля в диэлектрике. Связь векторов \vec{D} - смещения, \vec{E} - напряженности и \vec{P} - поляризованности

Теорема Гаусса - Остроградского для потока вектора \vec{E} в вакууме имела вид:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i, \quad \text{или} \quad \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i = q,$$

где q - суммарный заряд, охватываемый замкнутой поверхностью S . В диэлектрике q складывается из свободных (сторонних) зарядов и связанных зарядов, т.е.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = q_{\text{своб}} + q_{\text{связ}} \quad (18)$$

Можно показать, что

$$q_{\text{связ}} = - \oint_S \vec{P} d\vec{S}.$$

Подставляя эту формулу в (17), после преобразования получим

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q_{\text{своб}} \quad (19)$$

Величину $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$ (20)

называют вектором электрического смещения или вектором электрической индукции. Она измеряется, как и \vec{P} , в Кл/м². Учитывая, что $\vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$, находим

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \epsilon) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}. \quad (21)$$

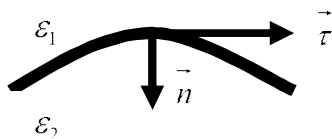
Линии вектора \vec{D} могут начинаться или заканчиваться лишь на свободных зарядах, а линии \vec{E} - на свободных и связанных. С учетом (20) формула (19) запишется так

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_{i\text{своб}} = Q_{\text{своб}}, \quad (22)$$

т.е. **поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью.**

Это и есть теорема Гаусса - Остроградского в интегральной форме для поля в диэлектрике.

2.9. Граничные условия для векторов \vec{D} и \vec{E}



Из теоремы Гаусса-Остроградского (22) для поля в диэлектрике на границе раздела двух диэлектриков имеем

Рис.5

откуда

$$D_{2n} = D_{1n},$$

$$\epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n}.$$

откуда

$$\frac{D_{2t}}{\epsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\epsilon_1},$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$

Таким образом, на границе раздела двух диэлектриков касательные составляющие напряженности электрического поля изменяются непрерывно, а нормальные составляющие - скачкообразно.

Лекция 3. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Проводники - это вещества, в которых есть свободные носители зарядов, способные перемещаться под действием электрического поля. В случае металлических проводников свободными носителями заряда являются валентные электроны. Далее

будем говорить о металлических проводниках, в которых носителями свободных зарядов являются электроны.

Электроны в проводнике способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы, т.к. $\vec{F} = q\vec{E} = e\vec{E}$, то для равновесия (покоя) электронов в проводнике необходимо, чтобы:

- 1) напряженность поля внутри проводника равнялась нулю:

$$\vec{E} = 0. \quad (1)$$

Поскольку $\vec{E} = -\text{grad } j$, то равенство нулю \vec{E} означает, что потенциал внутри проводника должен быть постоянным:

$$j = \text{const}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что поверхность проводника и весь проводник являются эквипотенциальной поверхностью;

- 2) напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности, т. е. $\vec{E} = \vec{E}_n$, а касательная составляющая

$$\vec{E}_t = 0 \quad (3)$$

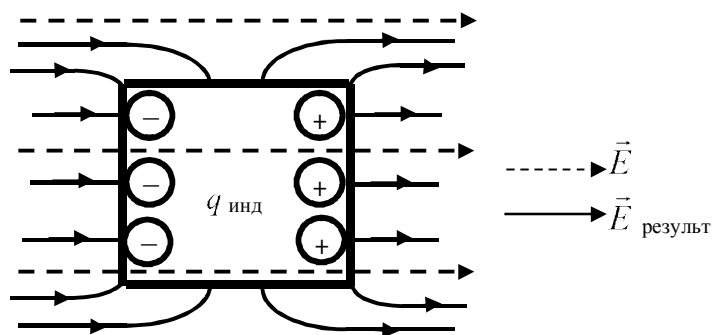
3) Поскольку внутри заряженного проводника электрическое поле отсутствует, то согласно теореме Гаусса – Остроградского это означает, что сумма зарядов внутри него равна нулю. Следовательно, все нескомпенсированные заряды располагаются на поверхности проводника с поверхностной плотностью σ .

Используя теорему Гаусса-Остроградского, легко показать, что вблизи поверхности заряженного проводника

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (4)$$

3.1. Проводник во внешнем электростатическом поле

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле, изображенное штриховыми линиями на рис. 1, положительные заряды будут перемещаться по направлению \vec{E} , а отрицательные – против поля \vec{E} . В результате этого у концов проводника возникают индукционные заряды противоположных знаков. Они создают поле, направленное против внешнего так, что внутри проводника $\vec{E} = 0$ и линии напряженности будут разорваны поверхностью проводника, заканчиваясь на



индуцированных отрицательных зарядах и начинаясь на индуцированных положительных (на рис. 1 - сплошные линии).

Рис.1

3.2. Электрическая емкость

Будем сообщать уединенному проводнику разные по величине заряды q_1, q_2, \dots, q_n . При этом проводник будет иметь разные по величине потенциалы j_1, j_2, \dots, j_n . Оказывается отношение $\frac{q_1}{j_1} = \frac{q_2}{j_2} = \dots = \frac{q_n}{j_n}$ - есть величина постоянная для данного проводника и не зависит от величины сообщенного заряда, а зависит только от геометрической формы проводника и диэлектрической проницаемости окружающей его среды.

Это отношение дает величину электроемкости уединенного проводника, т.е.

$$C = q/j. \quad (5)$$

Электрическая емкость характеризует способность проводника накапливать электрический заряд и измеряется в фарадах: $1\text{Ф} = 1\text{Кл} / 1\text{В}$ (однако 1Ф - очень большая емкость, реальные емкости составляют $10^{-3} \div 10^{-12}\text{Ф}$).

Потенциал заряженного шара радиуса R равен $j = q/4\pi\epsilon_0 R$, с учетом этого находим емкость уединенного шарового проводника:

$$C = q/j = 4\pi\epsilon_0 R, \quad (6)$$

т.е. оказывается, что C пропорциональна радиусу шарового проводника R . Подсчитаем емкость Земного шара, имеющего радиус $R \gg 6400\text{ км} \gg 6,4 \times 10^6\text{ м}$.

$$C = 4\pi \frac{1}{9 \times 10^9} \times 6,4 \times 10^6 \gg 7 \times 10^{-4}\text{ Ф} = 700\text{ мкФ}.$$

Для получения большей емкости используют **конденсаторы** в виде двух проводников, помещенных близко друг от друга. В этом случае емкость

$$C = \frac{q}{j_1 - j_2} = \frac{q}{U}. \quad (7)$$

Для плоского конденсатора (см. рис.

$$2), U = Ed, E = \frac{s}{\epsilon_0 e} = \frac{q}{\epsilon_0 e S},$$

тогда по формуле (7) можно найти

$$C = \frac{q}{Ed} = \frac{\epsilon_0 e S}{d}, \quad (8)$$

где e - диэлектрическая проницаемость вещества между пластинами

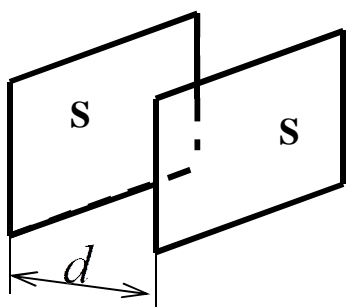


Рис.2

На электрических схемах электрические конденсаторы обозначают так:

- а) рис. 3. а - конденсатор постоянной емкости,
- б) рис. 3.б- конденсатор переменной емкости,
- в) рис. 3. в - подстроечный конденсатор.

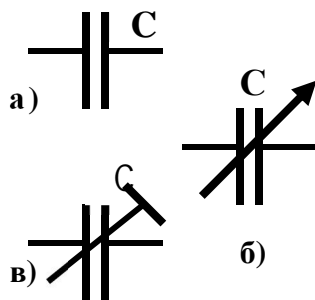


Рис.3

Соединение конденсаторов.

При параллельном соединении конденсаторов (см. рис. 4) общий заряд

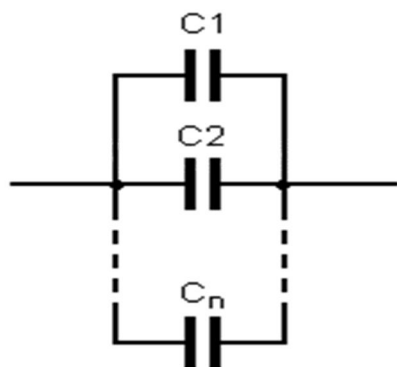


Рис.4

$$q_{\Sigma} = q_1 + q_2 + \dots + q_n.$$

Используя формулу (7), находим, что

$$UC_{\Sigma} = UC_1 + UC_2 + \dots + UC_n,$$

откуда

$$C_{\Sigma} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \Sigma C_i \quad (9)$$

При последовательном соединении конденсаторов, (рис. 5) $U_{\Sigma} = U_1 + U_2 + \dots + U_n$, что согласно (7) можно переписать как $\frac{q}{C_{\Sigma}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n}$.

Отсюда

$$\frac{1}{C_{\Sigma}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \Sigma \frac{1}{C_i}, \quad (10)$$

т.е. суммарная емкость уменьшается.

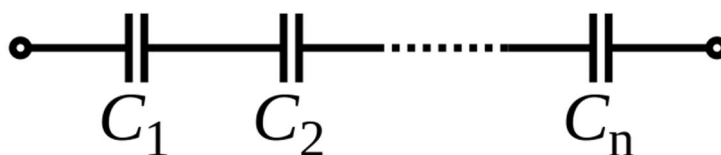


Рис.5

3.3. Энергия заряженного проводника, системы проводников и конденсатора

Пусть проводник имеет емкость C , заряд q , потенциал j ; тогда работа, совершаемая против сил электрического поля при перенесении заряда dq из бесконечности на проводник, будет

$$dA = j dq = Cj dj. \quad (11)$$

Чтобы зарядить проводник от нуля до потенциала j , необходимо совершить работу

$$A = \int_0^j dA = C \int_0^j dj = \frac{Cj^2}{2}. \quad (12)$$

Энергия заряженного проводника

$$W_n = A = \frac{Cj^2}{2} = \frac{qj}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

полная энергия системы заряженных проводников

$$W_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_i j_i^2. \quad (13)$$

Для конденсатора $W_n = CU^2/2 = qU/2. \quad (14)$

3.4. Энергия электрического поля. Объемная плотность энергии электрического поля в диэлектрике и в вакууме

Покажем, что формула (14) выражает энергию электрического поля. Подставляя в (14) выражение для емкости плоского конденсатора (8) и учитывая, что $U = Ed$, находим

$$W_n = \epsilon_0 \epsilon E^2 Sd/2 = \epsilon_0 \epsilon E^2 V/2, \quad (15)$$

где V - объем, занятый электрическим полем. Объемная плотность энергии

$$w = W_n/V = \epsilon_0 \epsilon E^2/2 = ED/2, \quad \text{Дж/м}^3 \quad (16)$$

Из (16) следует, что объемная плотность энергии электрического поля в вакууме ($\epsilon=1$)

$$w_{\text{вак}} = \epsilon_0 E^2/2 \quad (17)$$

С учетом этого объемная плотность энергии поляризованного диэлектрика

$$w_{\text{диэл}} = w - w_{\text{вак}} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E^2/2 = \epsilon \epsilon_0 E^2/2 = PE/2, \quad (18)$$

где $P = \epsilon \epsilon_0 E$ - поляризованность диэлектрика, ϵ - его диэлектрическая восприимчивость; $w_{\text{диэл}}$ - характеризует энергию, которая была затрачена при поляризации диэлектрика.

Раздел II ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Лекция 4. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

4.1. Электрический ток и его характеристики

Упорядоченное движение электрических зарядов называется электрическим током. Носителями тока могут быть электроны, а также положительные и отрицательные ионы. За направление тока условились принимать направление движения положительных зарядов, образующих этот ток.

Если за время dt через поперечное сечение проводника переносится заряд dq , то **сила тока**

$$i = dq/dt. \quad (1)$$

Ток, не изменяющийся со временем, называется постоянным. Для постоянного тока

$$I = q/t. \quad (2)$$

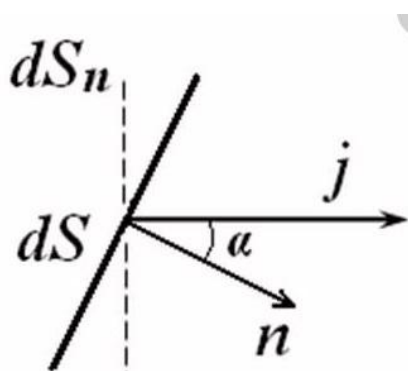
Если ток в проводнике создается как положительными, так и отрицательными носителями зарядов одновременно, то

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \left| \frac{dq^-}{dt} \right|. \quad (3)$$

Единицей силы тока в СИ является А - ампер. Приборы для измерения силы тока называются амперметрами. Идеальный амперметр имеет нулевое внутреннее сопротивление.

Электрический ток может быть неравномерно распределен по поверхности, через которую он течет. Более детально электрический ток можно характеризовать с помощью вектора **плотности тока** \vec{j} . Он численно равен отношению тока dI через расположенную перпендикулярно направлению тока площадку dS_\perp к величине этой площадки, т. е.

$$j = dI / dS_\perp, \quad \text{А/м}^2 \quad (4)$$



По направлению вектор \vec{j} совпадает с направлением скорости упорядоченного движения положительных зарядов. Зная \vec{j} в каждой точке сечения проводника, можно найти ток I через любую поверхность S , (рис.1)

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oint_S j_n dS, \quad (5)$$

Рис.1

где $d\vec{S} = dS\vec{n}$; $\vec{j} \cdot d\vec{S} = j dS \cos \alpha = j_n dS$; j_n - проекция \vec{j} на направление нормали \vec{n} к площадке ds .

4.2. Электродвижущая сила источника тока. Напряжение

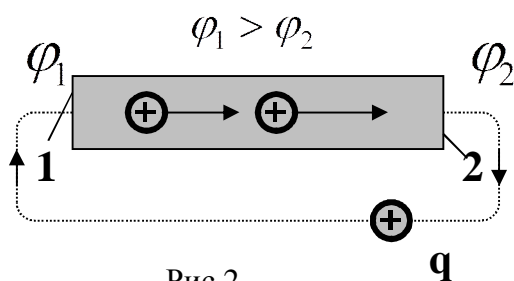


Рис.2

Если в проводнике создать электрическое поле и затем не поддерживать его неизменным, то за счет перемещения зарядов поле исчезнет и, следовательно, ток прекратится.

Для того, чтобы поддерживать ток неизменным, необходимо от конца проводника (см. рис. 2) с меньшим потенциалом φ_2 отводить приносимые туда током заряды и переносить их к началу проводника с большим потенциалом φ_1 , т.е. необходимо создать круговорот зарядов.

Это возможно лишь за счет работы сторонних сил неэлектростатической природы, например, за счет протекания химических процессов в гальванических элементах.

Величина, численно равная работе сторонних сил, по перемещению единичного положительного заряда называется ЭДС и обозначается \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = A_{\text{стор}}/q. \quad (6)$$

ЭДС, как и потенциал, в СИ измеряется в вольтах. Представим стороннюю силу как

$$\vec{F}_{\text{стор}} = q\vec{E}_{\text{стор}}, \quad (7)$$

тогда работа сторонних сил на участке 1-2 цепи будет равна

$$A_{12\text{стор}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{стор}} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}, \quad (8)$$

а ЭДС на этом же участке
$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A_{12\text{стор}}}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l},$$

где $d\vec{l}$ - элемент длины проводящего участка цепи. ЭДС, действующая в замкнутой цепи,

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}, \quad (9)$$

т.е. ЭДС равна циркуляции вектора напряженности сторонних сил.

Однако, кроме сторонних сил, на носители тока действуют силы электростатического поля $q\vec{E}$. Следовательно, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (10)$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом q на участке 1-2 цепи, рис. 2,

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = q \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \mathcal{E}_{12}. \quad (11)$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электрическими и сторонними силами над единичным положительным зарядом, называется падением напряжения или просто **напряжением** U на данном участке, т. е.

$$U_{12} = A_{12} / q = j_1 - j_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (12)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным. Для него

$$U_{12} = j_1 - j_2. \quad (13)$$

Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, называется неоднородным.

Для замкнутой цепи $(j_1 - j_2) = 0$ и поэтому $U = \mathcal{E}$.

4.3. Закон Ома для однородного участка цепи и закон Ома в дифференциальной форме

4.3.1. Закон Ома для однородного участка электрической цепи экспериментально установлен в 1826 г:

ток, текущий по однородному металлическому проводнику, пропорционален падению напряжения U на проводнике, т. е.

$$I = \frac{1}{R}U = \frac{1}{R}(j_1 - j_2), \quad (14)$$

где R - сопротивление проводника, характеризует способность проводника проводить электрический ток и измеряется в СИ в омах (Ом); из (14) следует, что $1\text{Ом} = 1\text{ В}/1\text{ А}$.

Сопротивление проводника

$$R = \rho l / S, \quad (15)$$

где ρ - удельное сопротивление, измеряется в СИ в Ом ж. Оно зависит от температуры: $\rho = \rho_0 a T$, где ρ_0 - удельное сопротивление при температуре

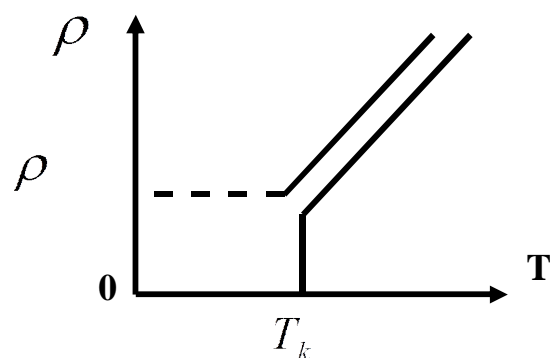


Рис.3

$t = 0^\circ\text{C}$, a - температурный коэффициент сопротивления, близкий к $1/273\text{ К}^{-1}$, T - термодинамическая температура; так что с ростом температуры сопротивление металлических проводников увеличивается. Качественная температурная зависимость удельного сопротивления металлического проводника от T представлена на рис. 3.

Сопротивление многих металлов и их сплавов при очень низких температурах T_k (0,14 – 20K), называемых критическими, скачкообразно уменьшается до нуля. Это явление называется сверхпроводимостью.

4.3.2. Закон Ома в дифференциальной форме

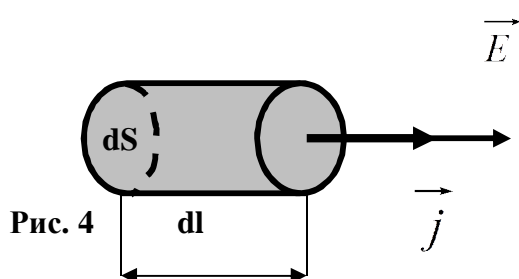


Рис.4

Найдем связь между векторами \vec{j} и \vec{E} . Для этого мысленно выделим в окрестности некоторой точки проводника элементарный цилиндрический объем с образующими, параллельными векторам \vec{j} и \vec{E} . Между концами

проводника длиной dl напряжение $U = Edl$, под действием которого через его поперечное сечение площадью dS течет ток $I = jdS$. Сопротивление цилиндрического

проводника, в нашем случае, равно $R = r \frac{dl}{dS}$. Используя закон Ома для участка цепи

$I = \frac{U}{R}$, находим: $jdS = \frac{Edl}{r \frac{dl}{dS}}$, откуда и получаем закон Ома в дифференциальной

форме

$$\dot{j} = \frac{1}{r} \dot{E} = g \dot{E}, \quad (16)$$

где $g = 1/r$ удельная электропроводность; $[g] = 1 / (\text{Ом м}) = 1 \text{ См} / \text{м}$, где $1 \text{ См} = 1 / \text{Ом}$ – это единица измерения электропроводности в СИ, называемая сименс (См).

4.4. Закон Ома для неоднородного участка цепи

На неоднородном участке цепи плотность тока пропорциональна сумме напряженностей электростатического поля и поля сторонних сил, т.е.

$$\dot{j} = g(\dot{E} + \dot{E}_{\text{стор}}). \quad (17)$$

Рассмотрим цилиндрический проводник длиной l с площадью поперечного сечения S . Умножим обе части равенства (17) на перемещение dl вдоль оси проводника и проинтегрируем получившееся соотношение по длине проводника от 0 до l :

$$\int_0^l \dot{j} r \frac{r}{dS} dl = g \left(\int_0^l \dot{E} r \frac{r}{dS} dl + \int_0^l \dot{E}_{\text{стор}} r \frac{r}{dS} dl \right),$$

что дает

$$j\mathcal{A} = g(j_1 - j_2 + e_{12}). \quad (18)$$

Заменив j на I/S , а g на $\frac{1}{r}$, из (18) получим $I \frac{r l}{S} = j_1 - j_2 + e_{12}$, откуда следует закон

Ома для неоднородного участка цепи

$$I = (j_1 - j_2 + e_{12}) / R_{12} \quad (19)$$

Здесь $R_{12} = r l / S$ - сопротивление участка цепи 12. Для замкнутой цепи $j_1 = j_2$ формула (19) запишется в виде

$$I = e / R_{\text{а}}, \quad (20)$$

где $R_{\text{а}}$ - суммарное сопротивление всей цепи; e - ЭДС источника.

Пусть замкнутая цепь состоит из источника электрической энергии с ЭДС e и внутренним сопротивлением r , а также внешней цепи потребителя, имеющей сопротивление R . Согласно (20)

$$I = e / (R + r). \quad (21)$$

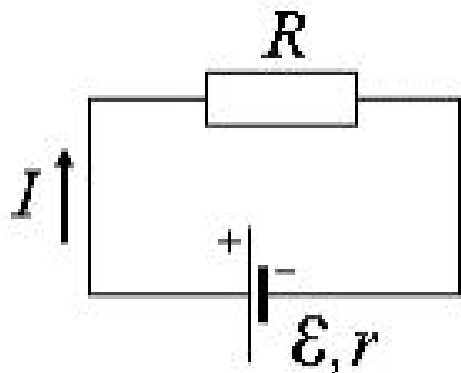


Рис.5

Разность потенциалов на электродах источника, рис. 5, равна напряжению на внешнем участке цепи:

$$U = j_1 - j_2 = IR = \mathcal{E} - Ir. \quad (22)$$

Если цепь разомкнуть, то ток в ней прекратится и напряжение U на зажимах источника станет равным его ЭДС, т.е. $U = \mathcal{E}$.

В общем случае, напряжение на внешнем участке цепи, рис. 5, будет равно

$$U = IR = \mathcal{E}R / (R + r). \quad (23)$$

В пределе, когда $R \rightarrow 0$ (источник тока замкнут накоротко), ток максимален в соответствии с (21)

$$I_{к.з.} = I_{\max} = \mathcal{E} / r, \quad (24)$$

а напряжение во внешней цепи равно нулю.

В противоположном предельном случае, $R \rightarrow \infty$, т.е. цепь разомкнута и ток отсутствует: $I = \lim_{R \rightarrow \infty} [\mathcal{E} / (R + r)] = 0$, а напряжение на зажимах источника максимально и равно его ЭДС:

$$U_{R \rightarrow \infty} = \mathcal{E}R / (R + r) = \mathcal{E}, \text{ т. к. } \lim_{R \rightarrow \infty} R / (R + r) = 1. \quad (25)$$

4.5. Закон Джоуля – Ленца. Работа и мощность тока. КПД источника

Проводник нагревается, если по нему протекает электрический ток. Джоуль и Ленц экспериментально установили, что количество выделившегося тепла

$$Q = I^2 R t, \quad (26)$$

где I - ток, R – сопротивление проводника, t - время протекания тока. Легко показать, что

$$Q = I^2 R t = UI t = U^2 t / R = qU, \quad (27)$$

где $q = It$ - электрический заряд.

Если ток изменяется со временем (т. е. в случае непостоянного тока), то

$$Q = \int_0^t dQ = \int_0^t i^2 R dt, \quad (28)$$

где i – мгновенное значение тока.

Нагревание проводника происходит за счет работы, совершаемой силами электрического поля над носителями заряда. Эта работа

$$A = qU = UI t = I^2 R t = U^2 t / R . \quad (29)$$

Работа A , энергия W , количество тепла Q в СИ измеряются в Дж.

Так как мощность характеризует работу, совершаемую в единицу времени, т.е. $P = \frac{dA}{dt}$,

то

$$P = UI = I^2 R = U^2 / R . \quad (30)$$

Мощность в СИ измеряется в ваттах: 1 Вт = 1 Дж / 1 с; откуда 1 Дж = 1 Вт·с;

3600 Дж = 1Вт час, $3,6 \cdot 10^6$ Дж = 1 кВт час.

Формулы (29) и (30) позволяют рассчитать полезную работу и полезную мощность. Затраченная работа и мощность определяется по формулам

$$A_{\text{затр}} = q e = e I t = I^2 (R + r) t = \frac{e^2}{R + r} t. \quad (31)$$

$$P_{\text{затр}} = \frac{q e}{t} = e I = I^2 (R + r) = \frac{e^2}{R + r}. \quad (32)$$

Отношение полезной работы (мощности) к затраченной характеризует КПД источника

$$h = \frac{A}{A_{\text{затр}}} = \frac{P}{P_{\text{затр}}} = \frac{R}{R + r}. \quad (33)$$

Из (35) следует, что при $R \rightarrow 0, h \rightarrow 0$; при $R \rightarrow \infty, h \rightarrow 1$. Но при $R \rightarrow \infty$ ток $I \rightarrow 0$ и поэтому $A \rightarrow 0$ и $P \rightarrow 0$.

Легко показать (задание для семинарских занятий/самостоятельной работы), что максимальная мощность выделяется на нагрузке при $R = r$, тогда

$$P_{\text{МАКС}} = I^2 R = \frac{e^2 R}{(R + r)^2} = \frac{e^2}{4r}, \quad (34)$$

а КПД в этом случае будет 50% ($h=0.5$).

4.6. Закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме

Согласно закону Джоуля - Ленца (28) в элементарном цилиндрическом объеме dV с площадью поперечного сечения dS и длиной dl за время dt выделяется тепло

$$dQ = I^2 R dt = (j dS)^2 r \frac{dl}{dS} dt = r j^2 dl dS dt = r j^2 dV dt.$$

Разделив на dV и dt , найдем количество тепла, выделяющееся в единицу времени в единице объема

$$Q_{\text{уд}} = \frac{dQ}{dV dt} = r j^2. \quad (35)$$

здесь $Q_{\text{уд}}$ называется удельной тепловой мощностью тока, которая в СИ измеряется в Вт/м³.

С учетом (16) из (35) следует, что

$$Q_{\text{уд}} = r j^2 = \mathcal{E}^2. \quad (36)$$

Формулы (35) и (36) выражают закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

4.7. Правила Кирхгофа

В основе расчета электрических цепей лежат два правила Кирхгофа, с помощью которых можно найти токи, текущие через резисторы.:

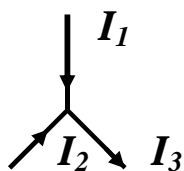


Рис.6

Первое правило Кирхгофа формулируется для узлов цепи – точек, где сходятся три и более проводника. Оно является следствием закона сохранения электрического заряда:

I Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (37)$$

Току, текущему к узлу, приписывается один знак ("+" или "-"), а току, текущему от узла, - другой знак; таким образом, для направлений токов в узле электрической схемы, представленном на рис. 6, имеем

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

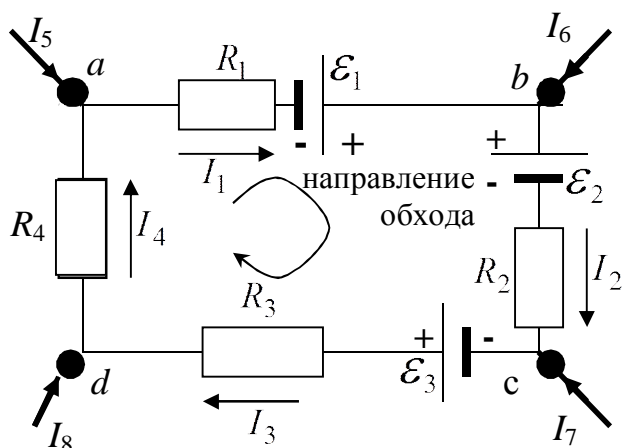


Рис.7

Второе правило Кирхгофа формулируется для замкнутых контуров, являющихся частями цепи, и представляет собой обобщение закона Ома.

II В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на всех участках этого контура равна алгебраической сумме ЭДС, встречающихся в этом контуре

$$\sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_{i=1}^m e_i \quad (38)$$

При этом также следует придерживаться правила знаков: токи, текущие вдоль выбранного направления обхода контура, считаются положительными, а идущие против направления обхода - отрицательными. Соответственно положительными считаются ЭДС тех источников, которые вызывают ток, совпадающий по направлению с обходом контура (см. рис.7).

Применим правила Кирхгофа для расчета электрической цепи, представленной на рис. 7, содержащей $m=4$ узлов (a, b, c, d). Для этого нужно записать $(m-1)$

уравнений на основании первого правила Кирхгофа и еще одно уравнение для единственного здесь замкнутого контура, используя второе правило Кирхгофа и принимая во внимание направления токов в ветвях, обхода контура и ЭДС:

$$I_1 - I_4 - I_5 = 0,$$

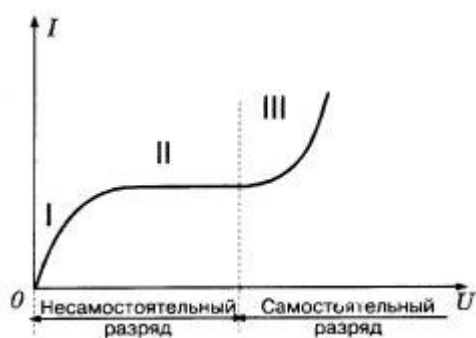
$$I_1 + I_6 - I_2 = 0,$$

$$I_2 - I_3 + I_7 = 0,$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

4.8. Электрический ток в газах.

Помимо рассмотренных выше металлических проводников, ток может существовать также и в газах. Различают несамостоятельные и самостоятельные электрические разряды. Явление протекания электрического тока через газ, наблюдаемое только при условии какого-либо внешнего воздействия на газ, называется несамостоятельным электрическим разрядом. Процесс отрыва электрона от атома называется ионизацией атома. Минимальная энергия, которую необходимо затратить для отрыва электрона от атома, называется энергией ионизации. Частично или полностью ионизированный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов одинаковы, называется плазмой.



Носителями электрического тока при несамостоятельном разряде являются положительные ионы и отрицательные электроны.

Вольт-амперная характеристика представлена на рис.8. В области I - II - несамостоятельный разряд. В области III разряд становится самостоятельным.

Рис.8

При самостоятельном разряде одним из способов ионизации атомов является ионизация электронным ударом. Ионизация электронным ударом становится возможна тогда, когда электрон на длине свободного пробега λ приобретает кинетическую энергию W_k , достаточную для совершения работы по отрыву другого электрона от атома. Виды самостоятельных разрядов в газах - искровой, коронный, дуговой и тлеющий разряды.

Искровой разряд возникает между двумя электродами, заряженными разными зарядами и имеющими большую разность потенциалов. Напряжение между разноименно заряженными телами достигает 40 000 В. Искровой разряд кратковременный, его механизм - электронный удар. Молния - вид искрового разряда.

В сильно неоднородных электрических полях, образующихся, например, между острием и плоскостью или между проводом линии электропередачи и поверхностью

Земли, возникает особая форма самостоятельного разряда в газах, называемая коронным разрядом.

Электрический дуговой разряд был открыт русским ученым В. В. Петровым в 1802 г. При соприкосновении двух электродов из углей при напряжении 40-50 В в некоторых местах возникают участки малого сечения с большим электрическим сопротивлением. Эти участки сильно разогреваются, испускают электроны, которые ионизируют атомы и молекулы между электродами. Носителями электрического тока в дуге являются положительно заряженные ионы и электроны. Дуговой разряд применяется при сварке.

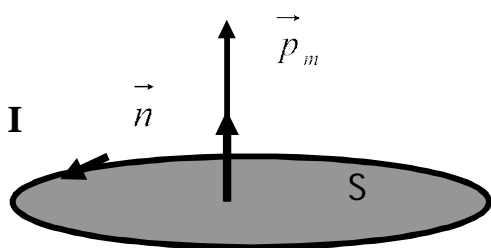
Разряд, возникающий при пониженном давлении, называется тлеющим разрядом. При понижении давления увеличивается длина свободного пробега электрона, и за время между столкновениями он успевает приобрести достаточную для ионизации энергию в электрическом поле с меньшей напряженностью. Разряд осуществляется электронно-ионной лавиной. Тлеющий разряд используется как источник света в люминесцентных лампах и плазменных экранах.

Раздел III МАГНЕТИЗМ

Лекция 5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ И ВЕЩЕСТВЕ

5.1. Магнитный момент контура с током. Магнитная индукция

Опыт показывает, что электрические токи взаимодействуют между собой, например, токи I_1 - I_2 притягиваются, а токи I_1 - I_2 отталкиваются. Взаимодействие токов осуществляется через поле, которое называется магнитным. Следовательно, движущиеся заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства - создают в нем магнитное поле. Это поле проявляется в том, что на движущиеся в нем заряды (токи) действуют силы. Подобно тому, как для исследования электрического поля мы использовали пробный заряд, применим для исследования магнитного поля пробный ток, циркулирующий в плоском замкнутом контуре очень малых размеров. Будем называть такой контур пробным контуром.



Ориентацию его в пространстве характеризует направление нормали \vec{n} к контуру, восстанавливаемой по правилу правого винта: вращаем рукоятку правого буравчика по направлению тока в контуре, тогда направление его поступательного движения даст направление нормали \vec{n} (см. рис. 1).

Рис.1

Помещая пробный контур в магнитное поле, обнаружим, что поле стремится повернуть контур (нормаль) в определенном направлении.

Вращающий момент, действующий на контур, зависит как от свойств магнитного поля в данной точке, так и от свойств контура. Оказывается, что максимальная величина вращающего момента пропорциональна IS , т.е. $M_{\text{макс}} \sim IS$, где I - ток контуре, S - площадь контура с током (рис. 1). Векторную величину

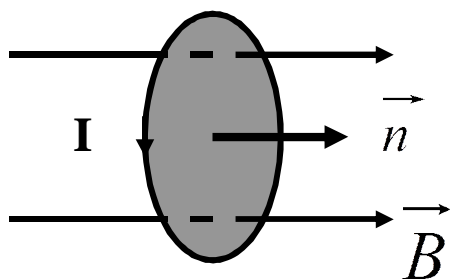
$$\vec{p}_m = IS \vec{n} \quad (1)$$

называют магнитным моментом контура, который в СИ измеряется в $\text{А}\cdot\text{м}^2$.

На пробные контуры с разными p_m , помещаемыми в данную точку магнитного поля, будут действовать разные по величине максимальные вращающие моменты $M_{\text{макс}}$, но отношение $M_{\text{макс}} / p_m$ будет для всех контуров одинаково, оно будет являться силовой характеристикой магнитного поля, которая называется магнитной индукцией

$$B = M_{\text{макс}} / p_m. \quad (2)$$

Магнитная индукция есть вектор, направление которого совпадает с направлением нормали контура с током, свободно установившегося во внешнем магнитном поле (см.рис.2)



Поле вектора B можно представить с помощью силовых линий (см. рис. 2), как и поле вектора E ; таким образом B является аналогом E . Магнитная индукция в СИ измеряется в теслах: $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Нм} / 1 \text{ А}\cdot\text{м}^2$. Тесла равен магнитной индукции однородного

Рис.2

поля, в котором на плоский контур с током, который имеет магнитный момент $1 \text{ А}\cdot\text{м}^2$, действует максимальный вращающий момент, равный 1 Нм .

На контур с током, помещенный в магнитное поле с индукцией \vec{B} , действует вращающий момент

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (3)$$

Величина его $M = p_m B \sin \alpha$,

при $\alpha = \pi/2$ имеем $M = M_{\text{макс}} = p_m B$, при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, $M = 0$.

5.2. Закон Ампера

Ампер экспериментально установил, что на элемент тока $I d\vec{l}$, помещенный в магнитное поле с индукцией \vec{B} , действует сила

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (4)$$

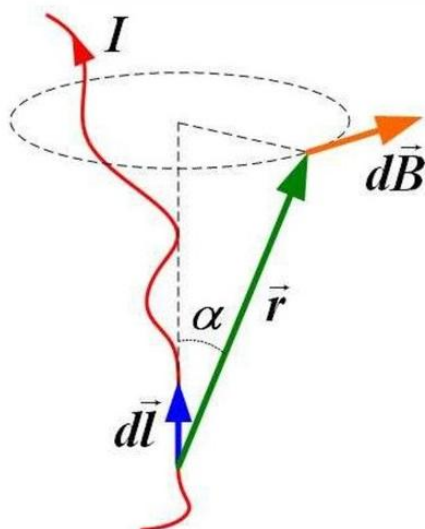
Произведение $I d\vec{l}$ называют элементом тока, где $d\vec{l}$ - вектор, совпадающий с элементом участка тока и направленный в сторону, в которую течет ток.

5.3. Закон Био-Савара–Лапласа

Био, Савар и Лаплас установили закон, который позволяет вычислить магнитную индукцию поля, созданного элементом тока $Id\vec{l}$ на расстоянии \vec{r} от него:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (5)$$

т.е. индукция магнитного поля, создаваемого элементом тока $Id\vec{l}$ в точке А, (см. рис. 3), на расстоянии r от него, пропорциональна величине элемента тока и синусу угла α , равного углу между направлениями элемента тока $Id\vec{l}$ и \vec{r} , а также обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн / м - магнитная постоянная.



Закон Био-Савара-Лапласа в векторной форме имеет вид:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (6)$$

Закон Био-Савара-Лапласа позволяет вычислить магнитную индукцию поля любых систем токов, используя принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\vec{B} = \sum_{k=1}^n \vec{B}_k. \quad (7)$$

Рис.3

Применяя закон Био-Савара-Лапласа и принцип суперпозиции (7), можно без труда рассчитать магнитных полей следующих токов (**задание для семинарских занятий/самостоятельной работы**):

5.3.1. Поле прямого тока:

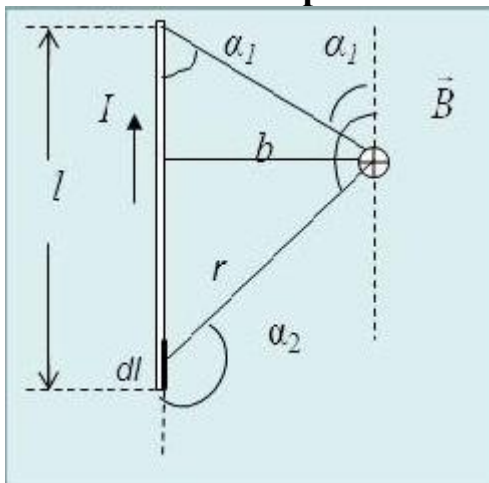


Рис.4

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (8)$$

Для бесконечно длинного проводника

$\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow \pi$ и из (8) следует, что

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} [1 - (-1)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \quad (9).$$

С учетом (4) и (9) сила взаимодействия двух бесконечно длинных тонких и параллельных проводников

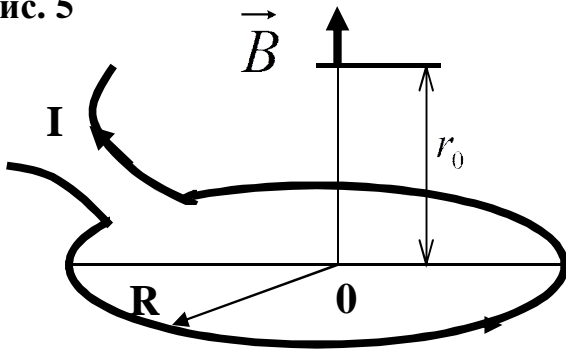
$$F = BIl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2pr_0} l = 2 \times 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{r_0} l. \quad (10)$$

Пусть $I_1 = I_2 = I$, $r_0 = 1\text{ м}$, $l = 1\text{ м}$, $F = 2 \times 10^{-7}\text{ Н}$, тогда $I = 1\text{ А}$. Это было строгое определение единицы силы тока - ампера.

5.3.2. Поле кругового тока

$$B = \frac{\mu_0}{4p} \frac{2IpR^2}{(R^2 + r_0^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + r_0^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Рис. 5



В частности, в центре кругового тока ($r_0 = 0$),

$$B = \frac{\mu_0}{4p} \frac{2pl}{R} = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (12)$$

Для плоской катушки, состоящей из N витков, магнитная индукция на оси катушки

$$B = \mu_0 NI / 2R. \quad (13)$$

Рис.5

При больших расстояниях от контура (рис. 5), т. е. при $r_0 \gg R$ из (11) получим

$$B = \mu_0 IR^2 / 2r_0^3. \quad (14)$$

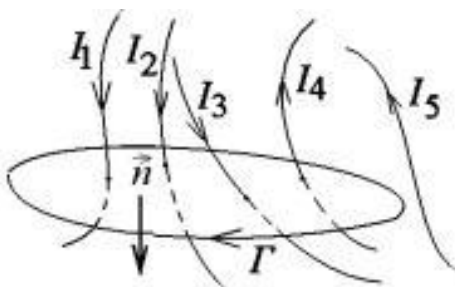
5.4. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. Поле соленоида и тороида

Выше (в Лекции 1) было показано, что для электростатического поля

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0,$$

т. е. циркуляция вектора \vec{E} вдоль замкнутого контура L равна нулю. Можно показать, что циркуляция вектора \vec{B} вдоль замкнутого контура L равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, умноженной на μ_0 :

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k \quad (15)$$



При этом токи будем считать положительными, если они совпадают с поступательным движением правого винта, рукоятка которого вращается по направлению обхода контура. Токи, текущие в обратном направлении, будут считаться отрицательными.

Рис.6

Токи, текущие от нас, обозначаются как \odot , текущие на нас – как \otimes .

Поскольку $\oint_L \vec{B} d\vec{l} \neq 0$, то магнитное поле не является потенциальным, оно называется вихревым или соленоидальным.

Теорему о циркуляции вектора \vec{B} (15) называют также законом полного тока для магнитного поля в вакууме.

Применив теорему о циркуляции (15), можно рассчитать индукцию магнитного поля соленоида и тороида (задание для семинарских занятий/самостоятельной работы). Соленоидом называется цилиндрическая катушка, на которую вплотную намотано большое число витков провода. Тороид представляет собой тонкий провод, плотно навитый на каркас, имеющий форму тора.

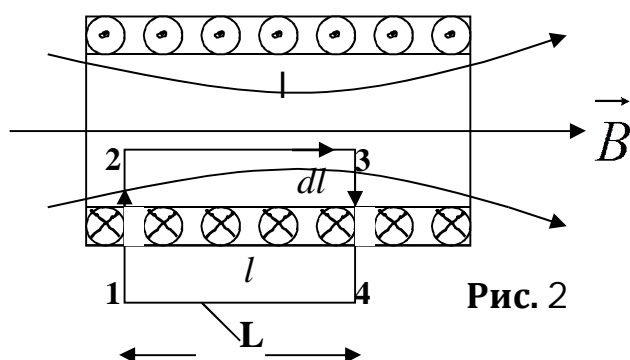


Рис. 2

Поле соленоида:

$$B = \mu_0 IN / l = \mu_0 nI, \quad (16)$$

где N - число витков, l - длина соленоида, $n = N / l$.

Рис.7

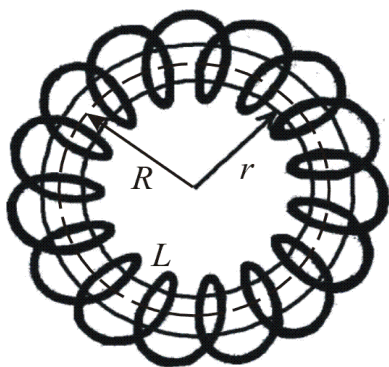


Рис.8

Поле тороида:

$$B = \mu_0 IN / 2\pi R, \quad (17)$$

где N - число витков, R - радиус средней линии тороида, $n = N / l$.

Поле тороида неоднородно: оно уменьшается с увеличением r . Поле вне тороида равно нулю.

5.5. Магнитный поток. Теорема Гаусса

Магнитный поток через малую поверхность площадью dS , которую можно считать плоской и в пределах которой магнитное поле можно считать однородным,

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S} = B dS \cos \alpha = B_n dS \quad (18)$$

где $\vec{S} = S\vec{n}$, \vec{n} - нормаль к поверхности.

Магнитный поток сквозь произвольную поверхность

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS.$$

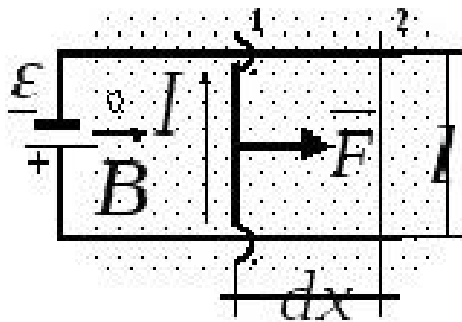
Магнитный поток в СИ измеряется в веберах - (Вб): $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$.

природе нет магнитных зарядов (монополей) и поэтому теорема Гаусса для магнитного потока имеет вид

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0, \quad (19)$$

т.е. магнитный поток сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

5.6. Работа перемещения проводника и рамки с током в магнитном поле



Согласно закону Ампера на проводник с током в магнитном поле, направленном «на нас», действует сила $F = IB$, которая направлена вправо. Если под действием этой силы проводник переместится на dx , то $dA = Fdx = IBldx = IBdS = Id\Phi$, где $d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$

Рис.9

- это изменение магнитного потока, пронизывающего контур.

Итак, работа, совершаемая магнитным полем

$$dA = Id\Phi. \quad (20)$$

Заметим, что работа совершается за счет энергии источника тока, а не за счет магнитного поля.

5.7. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца

На элемент тока $Id\vec{l}$ в магнитном поле с индукцией \vec{B} действует сила Ампера

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}.$$

Появление этой силы связано с действием силы со стороны магнитного поля на носители тока в проводнике. Покажем это. Пусть заряд носителя тока q , скорость его направленного движения v , концентрация n , тогда

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{qdN}{dt} = \frac{qndV}{dt} = qnS \frac{dl}{dt} = qnSv, \quad (21)$$

где $dQ = qdN$ - заряд в объеме проводника $dV = Sdl$; $ndV = dN$ - число носителей тока в проводнике длиной dl ; $d\vec{l}$ - направлено по току и совпадает со скоростью положительных зарядов. Окончательно

$$d\vec{F} = qdN\vec{v} \times \vec{B}$$

Отсюда сила, действующая на один заряд, называемая силой Лоренца,

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (22)$$

При наличии электрического поля сила

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (23)$$

Это выражение называют формулой Лоренца.

Модуль магнитной составляющей силы Лоренца (22) равен :

$$F_L = qvB \sin a, \quad (24)$$

здесь a - угол между направлениями векторов \vec{v} и \vec{B} .

5.8. Магнитные моменты атомов

Если несущие ток провода находятся в какой-либо среде, то магнитное поле изменяется. Объясним это явление.

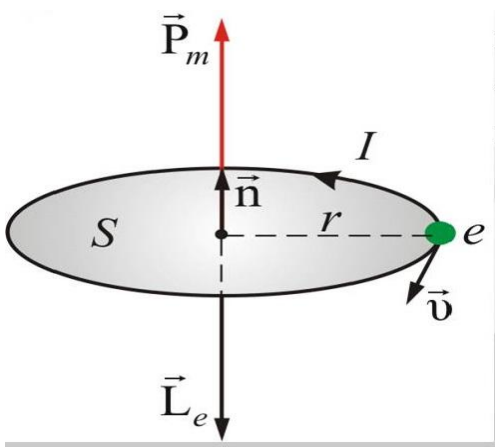


Рис.10

Опыт показывает, что все вещества, помещенные в магнитное поле, намагничиваются. Классическая физика это объясняет существованием в веществе микротоков, обусловленных движением электронов в атомах и молекулах.

Действительно, электрон, движущийся по круговой орбите вокруг ядра своего атома, эквивалентен круговому току, (см.рис.10), поэтому

он обладает орбитальным магнитным моментом

$$\vec{p}_m = I \vec{S} = IS \vec{n}, \quad (25)$$

который по модулю равен

$$p_m = eS / T = eSv, \quad (26)$$

где T - период вращения, $v = I / T$ - частота вращения электрона на орбите.

Кроме того, электрон обладает собственным или спиновым магнитным моментом \vec{p}_{ms} (spin - верчение; квантовомеханическая характеристика, аналога которой в классической механике не существует).

Общий магнитный момент атома равен сумме орбитальных и спиновых магнитных моментов, входящих в атом электронов:

$$\vec{p}_a = \sum \vec{p}_m + \sum \vec{p}_{ms}.$$

Магнитные моменты ядер в тысячи раз меньше и ими обычно пренебрегают.

5.9. Намагниченность и напряженность магнитного поля

Всякое вещество является магнетиком, оно способно под действием внешнего магнитного поля приобретать магнитный момент, т.е. намагничиваться. Для количественного описания намагничивания вводят вектор намагниченности, равный магнитному моменту единицы объема магнетика, т. е.

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{DV} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_{ia}}{DV}, \quad (27)$$

где n - число атомов (молекул), содержащихся в объеме DV , \vec{P}_m - магнитный момент атомов в объеме DV , \vec{p}_{ia} - магнитный момент i - того атома.

Намагниченность, как следует из (4), в СИ измеряется в А/м. Оказывается, для несильных полей

$$\vec{J} = c \vec{H}, \quad (28)$$

здесь c - безразмерная величина, называемая магнитной восприимчивостью вещества; для вакуума и, практически, для воздуха $c = 0$; H - напряженность магнитного поля, его силовая характеристика, которая описывает магнитное поле макродтоков, или токов проводимости. Макродтоки ранее мы называли просто токи. Для вакуума

$$\vec{H} = \vec{B}_0 / \mu_0, \quad (29)$$

она измеряется в СИ в А / м.

Вектор магнитной индукции в веществе характеризует результирующее магнитное поле в веществе, создаваемое всеми макродтоками и микродтоками:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}. \quad (30)$$

С учетом (28) получаем

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 c \vec{H} = \mu_0 (1 + c) \vec{H} = \mu_0 m \vec{H}, \quad (31)$$

где $m = 1 + c$ называется магнитной проницаемостью вещества, m - безразмерная величина. Она показывает, во сколько раз усиливается магнитное поле в веществе. Напомним, что ϵ - диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз электрическое поле ослабляется в веществе.

5.10. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

Ранее было показано, что для поля в вакууме $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k$.

В случае поля в веществе эта теорема о циркуляции \vec{B} запишется так

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I + I'), \quad (32)$$

где I и I' соответственно алгебраические суммы макродтоков и микродтоков, охватываемых контуром L . Можно показать, что

$$\oint_L \vec{J} d\vec{l} = I'. \quad (33)$$

С учетом этого (32) перепишется в виде

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{m_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I, \quad (34)$$

или, принимая во внимание (31), найдем $\frac{\vec{B}}{m_0} - \vec{J} = \vec{H}$ и $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$, где $I = \sum_{k=1}^n I_k$ -

алгебраическая сумма макротоков.

В итоге имеем

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k \quad (35)$$

Выражение (35) представляет собой **теорему о циркуляции вектора \vec{H}** и гласит: Циркуляция вектора напряженности магнитного поля \vec{H} по любому замкнутому контуру L равна алгебраической сумме макротоков, охватываемых контуром. Вектор напряженности магнитного поля \vec{H} , являясь аналогом электрического смещения \vec{D} , определяется только макротоками. Из (35) следует, что H измеряется в А/м.

5.11. Виды магнетиков

В зависимости от знака и величины магнитной восприимчивости все магнетики подразделяются на три группы:

1) **ДИАМАГНЕТИКИ**, у которых ϵ отрицательна и мала (10^{-5} , 10^{-6}); для них $m=1+\epsilon$ несколько меньше единицы; диамагнетиками являются Zn , Au , Hg , Si , P , C (графит), Bi (висмут)... Диамагнетики незначительно ослабляют внешнее магнитное поле.

2) **ПАРАМАГНЕТИКИ**, у которых ϵ положительна и мала (10^{-3} , 10^{-5}); с ростом температуры ϵ уменьшается по закону Кюри: $\epsilon \sim 1/T$, для них m несколько больше единицы; парамагнетиками являются щелочные металлы, кислород... Парамагнетики незначительно усиливают внешнее магнитное поле.

3) **ФЕРРОМАГНЕТИКИ**, у которых ϵ положительна и очень велика: может достигать, например, у супермалоя 800000; для Fe магнитная проницаемость $m=5000$. Таким образом, ферромагнетики являются сильномагнитными веществами.

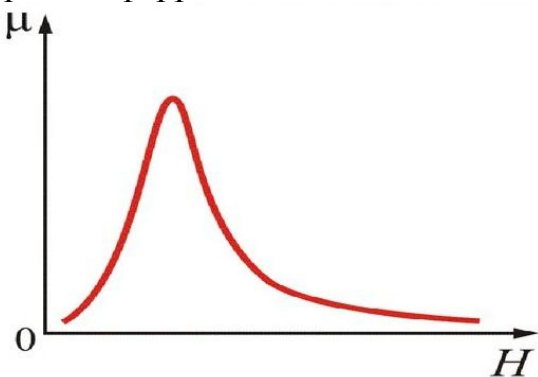


Рис.11

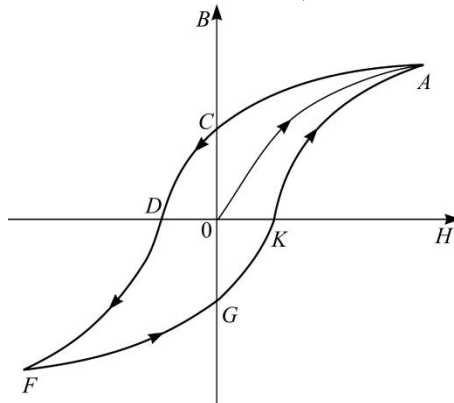


Рис.12

Магнитная проницаемость m для них зависит от H (рис. 11), и для каждого ферромагнетика имеется определенная температура, называемая точкой Кюри, при

которой он теряет магнитные свойства, т. к. области спонтанного намагничивания (домены) распадаются и ферромагнетик становится парамагнетиком - это фазовый переход II рода. Для железа $t_c^0 = 768^\circ\text{C}$ или $T_c = 273 + 768 = 1041\text{K}$

Для ферромагнетиков характерна нелинейная зависимость индукции B (или намагниченности J) от напряженности внешнего магнитного поля H (рис.12). Явление остаточной намагниченности ферромагнетика после снятия внешнего поля носит название гистерезиса, а типичная кривая называется петлей гистерезиса.

Лекция 6 ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

6.1. Явление электромагнитной индукции

Электрический ток создает вокруг себя магнитное поле. Существует и обратное явление: изменяющееся во времени магнитное поле вызывает (индуцирует) электрический ток. Это явление было открыто Фарадеем в 1831 г. и получило название электромагнитной индукции, а возникающий ток называют индукционным током. Закон электромагнитной индукции гласит:

При изменении магнитного потока в контуре возникает электродвижущая сила индукции, пропорциональная взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока:

$$e_i = - \frac{dF}{dt}. \quad (1)$$

Знак "-" в (1) объясняет закон Ленца:

Индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызвавшей.

Если контур, в котором индуцируется ЭДС, состоит из N витков, то ЭДС будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом из витков в отдельности, т.е.

$$e_i = - \sum_{i=1}^N \frac{dF_i}{dt} = - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N F_i. \quad (2)$$

Величину $\Psi = \sum_{i=1}^N F_i = NF$ называют потокоцеплением или полным магнитным потоком. так что

$$e_i = - d\Psi / dt. \quad (3)$$

6.2. Явление самоиндукции

Явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях, когда изменяется магнитный поток, пронизывающий контур. В частности, этот магнитный поток может создаваться током, текущим в самом рассматриваемом контуре. При изменениях тока I в этом контуре изменяется также и полный магнитный поток Ψ , вследствие чего в контуре индуцируется ЭДС самоиндукции e_s . Такое явление называется самоиндукцией. Поскольку $\Psi = NF$, а $\Phi \sim B$, $B \sim I$ то, следовательно, $\Psi \sim I$, т.е

$$\mathcal{U} = LI, \quad (4)$$

здесь L - называется индуктивностью контура, $L = \mathcal{U} / I$.

За единицу индуктивности в СИ принимается 1 Гн - генри: это индуктивность такого контура, у которого при силе тока в нем в 1А возникает сцепленный с ним полный магнитный поток \mathcal{U} , равный 1 Вб;

В общем случае
$$e_s = - \frac{d\mathcal{U}}{dt} = - (L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt}). \quad (5)$$

Если при изменении тока индуктивность L контура не изменяется, то

$$e_s = - L dI / dt. \quad (6)$$

Для соленоида

$$L = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 n^2 V, \quad (7)$$

где $V=IS$ - объем соленоида, n - число витков, приходящееся на единицу длины соленоида.

Учитывая явление самоиндукции, можно рассчитать зависимость силы тока от времени при размыкании и замыкании цепи, изображенной на рис.1 (задание для семинарских занятий/самостоятельной работы).

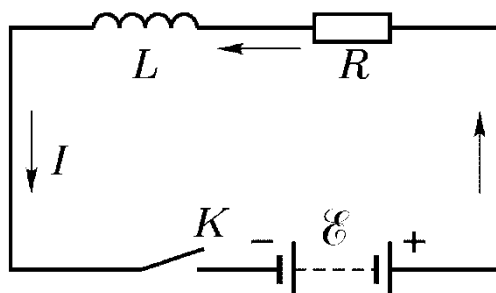
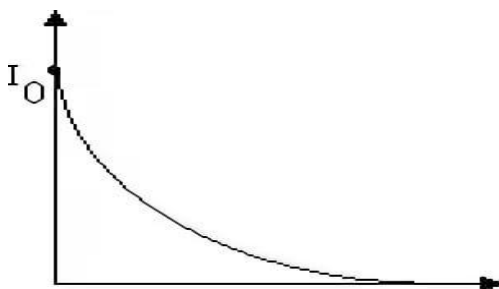


Рис.1

При размыкании цепи

$$I = I_0 \exp(- \frac{R}{L} t),$$

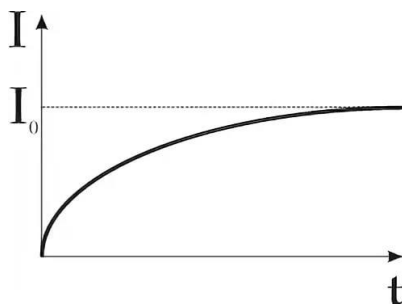
где $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$.



При замыкании цепи

$$I = I_0 [1 - \exp(-\frac{R}{L}t)],$$

где $I_0 = \frac{e}{R}$



6.3. Энергия магнитного поля

При возрастании тока в контуре в нем возникает ЭДС самоиндукции и закон Ома запишется с учетом этого факта:

$$I = (e + e_s) / R_s, \quad \text{где } e_s = -L \frac{dI}{dt}, \quad \text{отсюда } e = IR + L \frac{dI}{dt}.$$

Полная работа источника тока за время dt $dA = I e dt = I^2 R dt + L I dI$.

здесь $I^2 R dt$ - это работа, затрачиваемая на нагревание; $L I dI$ - это работа дополнительная к работе источника тока, обусловленная индукционными явлениями в цепи. Вся работа, совершаемая в цепи для увеличения тока от 0 до I

$$A = \int_0^I L I dI = LI^2 / 2. \quad (8)$$

Эта работа и будет равна энергии магнитного поля, т.е.

$$W = LI^2 / 2. \quad (9)$$

Для соленоида индуктивность L определяется по формуле (7), что позволяет найти

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 m^2 V I^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} V. \quad (10)$$

т.к. $B = \mu_0 m H = \mu_0 m I$.

Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = W / V = B^2 / 2 \mu_0 m = B H / 2, \quad (11)$$

она измеряется в СИ в Дж / м³.

6.4. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля

В 60-х годах прошлого века (около 1860 г.) Максвелл, основываясь на идеях Фарадея, обобщил законы электростатики и электромагнетизма: теорему Гаусса – Остроградского для электростатического поля $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \sum_{k=1}^n q_k = Q$ и для магнитного поля

$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$; закон полного тока $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k = I_{\text{полн}}$; закон электромагнитной индукции

$e = - d\Phi / dt$, и в результате разработал законченную теорию электромагнитного поля.

Теория Максвелла позволила с единой точки зрения понять широкий круг явлений, начиная от электростатического поля неподвижных зарядов и заканчивая электромагнитной природой света.

Математическим выражением теории Максвелла служат четыре векторные уравнения Максвелла, которые принято записывать в двух формах: интегральной и дифференциальной.

Уравнения Максвелла в интегральной форме выражают соотношения, справедливые для мысленно проведенных в электромагнитном поле неподвижных замкнутых контуров и поверхностей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме показывают как связаны между собой характеристики электромагнитного поля и плотности зарядов и токов в каждой точке этого поля.

6.4.1. Первое уравнение Максвелла

Оно является обобщением закона электромагнитной индукции $\mathcal{E} = - d\Phi / dt$:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (12)$$

и утверждает, что с переменным магнитным полем \vec{B} неразрывно связано вихревое электрическое поле \vec{E} , которое не зависит от того, находятся в нем проводники или нет.

6.4.2. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

Максвелл обобщил закон полного тока $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k = I$, предположив, что переменное электрическое поле, также как и электрический ток, является источником магнитного поля. Для количественной характеристики "магнитного действия" переменного электрического поля Максвелл ввел понятие тока смещения.

По теореме Гаусса - Остроградского поток электрического смещения сквозь замкнутую поверхность $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i = q$.

Продифференцировав это выражение по времени, получим для неподвижной и недеформируемой поверхности S

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (13)$$

Левая часть этой формулы имеет размерность тока, который, как известно, выражается через вектор плотности тока

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (14)$$

Из сравнения (13) и (14) следует, что $\frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$ имеет размерность плотности тока: А / м². Максвелл предложил назвать $\frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$ плотностью тока смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (15)$$

$$I_{\text{см}} = \oint_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S} = \oint_S \frac{\vec{\dot{D}}}{\epsilon_0} d\vec{S}. \quad (16)$$

Из всех физических свойств, присущих действительному току (току проводимости), связанному с переносом зарядов, ток смещения обладает лишь одним: способностью создавать магнитное поле. При "протекании" тока смещения в вакууме или диэлектрике не выделяется тепло. Примером тока смещения может служить переменный ток через конденсатор. В общем случае токи проводимости и смещения не разделены в пространстве и можно говорить о полном токе, равном сумме токов проводимости и смещения:

$$I_{\text{полн}} = I_{\text{см}} + I_{\text{пров}} \quad (17)$$

С учетом этого Максвелл обобщил закон полного тока, добавив в правую часть его ток смещения:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{полн}} = I_{\text{пров}} + I_{\text{см}} = \oint_S \vec{j} d\vec{S} + \oint_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S} = \oint_S (\vec{j} + \frac{\vec{\dot{D}}}{\epsilon_0}) d\vec{S}.$$

Итак, второе уравнение Максвелла в интегральной форме имеет вид:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_S (\vec{j} + \frac{\vec{\dot{D}}}{\epsilon_0}) d\vec{S}. \quad (18)$$

6.4.3. Третье и четвертое уравнения Максвелла

Максвелл обобщил теорему Гаусса - Остроградского для электростатического поля. Он предположил, что эта теорема справедлива для любого электрического поля, как стационарного, так и переменного. Соответственно, третье уравнение Максвелла в интегральной форме имеет вид:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q \quad (19)$$

или

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \vec{r} dV, \quad (20)$$

где $\vec{r} = dq/dV$ - объемная плотность свободных зарядов, $[\vec{r}] = \text{Кл} / \text{м}^3$

Четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме – это теорема Гаусса - Остроградского для магнитного :

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (21)$$

6.5. Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

Дифференциальные уравнения получаются из интегральных с помощью двух теорем векторного анализа – теоремы Гаусса и теоремы Стокса.

Теорема Гаусса:

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} dV, \quad (22)$$

где

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (23)$$

A_x, A_y, A_z - проекции вектора \vec{A} на оси; V - объем, ограниченный поверхностью S .

Теорема Стокса:

$$\oint_{\partial L} \vec{A} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S}, \quad (24)$$

где

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_i & \vec{e}_j & \vec{e}_k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \quad (25)$$

$\operatorname{rot} \vec{A}$ - ротор вектора \vec{A} , векторный оператор, выраженный в декартовых координатах, S - площадь, ограниченная контуром L .

Применяя эти теоремы, перепишем уравнения Максвелла в дифференциальной форме, которая удобна для исследования локальных полей:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Эту систему уравнений необходимо дополнить материальными уравнениями, характеризующими электрические и магнитные свойства среды:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu \vec{H} \\ \vec{j} &= g \vec{E}. \end{aligned} \quad (27)$$

Итак, после открытия взаимосвязи между электрическими и магнитным полями стало ясно, что эти поля не существуют обособленно, независимо одно от другого. Нельзя создать переменное магнитное поле без того, чтобы одновременно в пространстве не возникло и электрическое поле.

Отметим, что покоящийся в некоторой системе отсчета электрический заряд создает только электростатическое поле в этой системе отсчета, но он будет создавать магнитное поле в системах отсчета, относительно которых он движется. То же самое относится и к неподвижному магниту. Заметим также, что уравнения Максвелла инвариантны к преобразованиям Лоренца: причем для инерциальных систем отсчета K и K' выполняются следующие соотношения:

$$\vec{E}' \vec{B}' = \vec{E} \vec{B}, \quad \vec{H}' \vec{D}' = \vec{H} \vec{D}. \quad (28)$$

На основании изложенного можно сделать вывод, что электрические и магнитные поля являются проявлением единого поля, которое называют электромагнитным полем. Оно распространяется в виде электромагнитных волн.

Раздел IV КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Лекция 7 КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Повторяющиеся во времени процессы называются колебаниями.

Такие процессы широко распространены в природе и технике. Качания маятника часов, волны на воде, переменный электрический ток, свет, звук, и т.д. являются примерами колебаний различных физических величин. Колебательные процессы характерны также для биологических, социальных, экономических систем. Поскольку количественные закономерности (т. е. математические выражения) этих процессов имеют много общего, то полученные на примере изучения простейших механических колебаний результаты можно распространить и на другие области знания.

7.1. Гармонические колебания

Изучим простейшую колебательную систему – тело массы m ,



прикрепленное к пружине и скользящее без трения по горизонтальному столу (рис. 1).

Рис.1

Пусть выполнены следующие условия:

- система является консервативной (отсутствуют потери энергии);
- возмущение (сила) однократно приложено к системе, затем она предоставляется сама себе;
- в системе имеется отрицательная обратная связь (квазиупругая сила, пропорциональная смещению x и направленная в сторону, обратную смещению)
- все смещения достаточно малы

По 2-му закону Ньютона: $F = ma$, где $F = -kx$, а ускорение $a = dV/dt = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$. В итоге, обозначая через $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, получаем

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

Уравнение (1) называется уравнением колебаний и является обыкновенным линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решением будет:

$$x = A \cos(\omega_0 t + q) \text{ или } x = A \sin(\omega_0 t + q), \quad (2)$$

т.е. свободные гармонические незатухающие колебания. Здесь:

• x – смещение,

• A – амплитуда колебаний,

• $(\omega_0 t + q)$ – фаза колебаний, θ – начальная фаза,

• ω_0 – собственная круговая (циклическая) частота. Можно также ввести величину

• n – частоту, которая измеряется в Гц, – число колебаний в единицу времени, и период – время одного колебания

• $T = 1/n = 2\pi/\omega_0$

Колебания также можно представить в комплексной форме, используя формулу Эйлера

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a, \text{ где } i = \sqrt{-1}.$$

Уравнение гармонического колебания (2) запишется в экспоненциальной форме: $\tilde{x} = A \exp[i(\omega_0 t + q)]$. Как вещественная часть $\text{Re}(\tilde{x})$, так и мнимая часть $\text{Im}(\tilde{x})$ представляют гармонические колебания:

$$x = \text{Re}(\tilde{x}) = A \cos(\omega_0 t + q),$$

$$y = \text{Im}(\tilde{x}) = A \sin(\omega_0 t + q).$$

Удобно представить гармоническое колебание в виде проекции вектора \vec{A} , вращающегося против хода часовой стрелки с угловой скоростью, равной круговой частоте ω_0 :

$$x = A \cos(\omega_0 t + q).$$

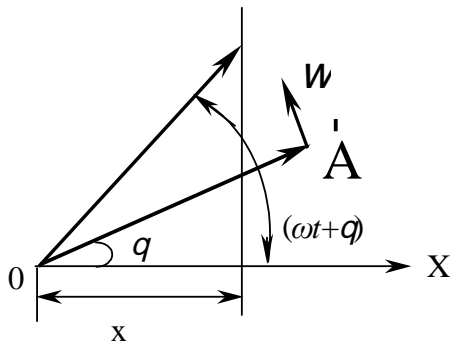


Рис.2

Из рис.2 видно, что проекция вектора \vec{A} на направление OX будет при этом равно

$$x = A \cos(\omega_0 t + q).$$

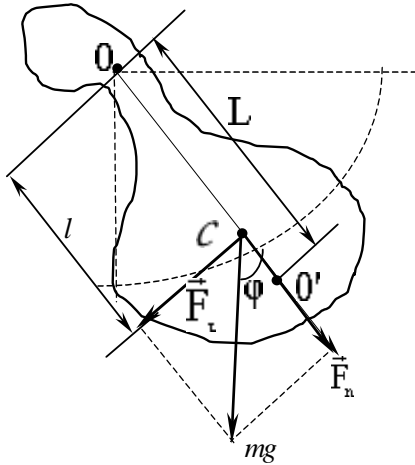
Такое графическое представление называется векторной диаграммой гармонического колебания.

Механическая система, совершающая колебания около положения равновесия, называется **классическим осциллятором**. Самые известные примеры гармонических осцилляторов – пружинный, математический и физический маятники, колебательный контур. Периоды колебаний этих осцилляторов легко рассчитать (**задание для семинарских занятий/самостоятельной работы**).

Û Пружинный маятник (груз массой m , прикрепленный к абсолютно упругой пружине и совершающий колебания около положения равновесия, рис. 1). Для него

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \text{ и } T = 2\pi\sqrt{m/k} \quad (3)$$

Û Физический маятник - это твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс C тела. Для него

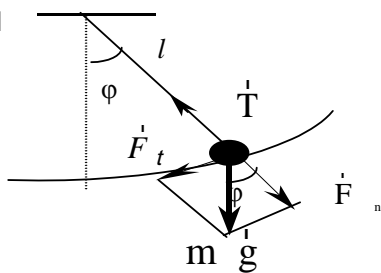


$$\omega_0 = \sqrt{mgl/J},$$

$$T = 2\pi\sqrt{J/mgl}.$$

Û Математический маятник - это материальная точка, подвешенная на

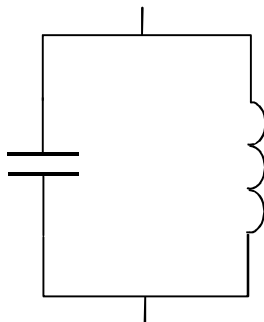
Û невесомой, нерастяжимой нити). Для него



$$\omega_0 = \sqrt{g/l},$$

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

Û Электрический колебательный контур - это осциллятор, состоящий из катушки индуктивности L и конденсатора емкости C , при условии, что



сопротивление катушки и проводов (паразитное сопротивление) пренебрежимо мало.

Для него

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC},$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

В роли смещения в данном случае выступает заряд q на обкладках конденсатора.

7.2. Скорость, ускорение. Потенциальная и кинетическая энергии

Скорость

$$v = dx/dt = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + q) \quad (4)$$

отличается по фазе от смещения (2) на $\pi/2$. Максимальная скорость $v_m = A\omega_0$.

Ускорение

$$a = dv/dt = d^2x/dt^2 = \ddot{x} = -Aw_0^2 \cos(w_0t + q) = -w_0^2x \quad (5)$$

по направлению совпадает с направлением силы \vec{F} , а по фазе отличается от скорости (4) на $\pi/2$, и от смещения (2) – на π . Максимальное ускорение $a_m = Aw_0^2$.

В колебательном контуре аналогом скорости выступает сила тока $i = dq/dt$, аналогом ускорения – напряжение $U_L = -Ldi/dt$.

Пространство (x, \dot{x}) называют фазовым пространством, а совокупность точек в нем – фазовой траекторией тела.

Установим изменение потенциальной и кинетической энергий колеблющейся системы (на примере пружинного маятника). Потенциальная энергия этого осциллятора равна $W_n = kx^2/2$, где k – коэффициент упругости, x – смещение; откуда

$$W_n = (kA^2/2)\cos^2(w_0t + q). \quad (6)$$

Кинетическая энергия $W_k = mv^2/2$, что, согласно (1) и (4), равно

$$W_k = (mw_0^2A^2/2)\sin^2(w_0t + q) = (kA^2/2)\sin^2(w_0t + q). \quad (7)$$

Анализ (6) и (7) показывает, что когда одна из энергий W_k или W_n увеличивается, то другая уменьшается. Полная же энергия

$$E = W_n + W_k = kA^2/2 = \quad (8)$$

остается величиной постоянной в полном соответствии с условием консервативности системы, и для пружинного маятника она определяется работой, совершенной внешней силой по сжатию или растяжению пружины.

В колебательном контуре аналогом потенциальной энергии выступает энергия электрического поля в конденсаторе $CU^2/2$, аналогом кинетической энергии – энергия магнитного поля $LI^2/2$.

7.3. Сложение колебаний

Сложение одинаково и взаимно перпендикулярно направленных колебаний представляют собой разные задачи.

7.3.1. Сложение одинаково направленных колебаний. Ставится задача нахождения результирующего колебания.

Если складываются два гармонических колебаний одинаковой частоты, смещения которых $x_1 = A_1 \cos(wt + q_1)$ и $x_2 = A_2 \cos(wt + q_2)$, то

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(wt + q)$$

и с помощью векторной диаграммы (рис. 2) найдем

$$A^2 = A_1^2 + 2A_1A_2 \cos(q_1 - q_2) + A_2^2$$
$$q = \arctg(A_1 \sin q_1 + A_2 \sin q_2) / (A_1 \cos q_1 + A_2 \cos q_2).$$

Если $x_1 = A \cos w_1t$, $x_2 = A \cos w_2t$, то

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{w_1 - w_2}{2}t \cos \frac{w_1 + w_2}{2}t,$$

т.е. результирующее колебание не будет гармоническим. Если колебания мало отличаются по частоте, например, $w_1 = w_0 - Dw$, $w_2 = w_0 + Dw$, то результирующее колебание $x = 2A \cos Dw \cos w_0t$ можно рассматривать как почти гармоническое

колебание с частотой ω_0 и медленно меняющейся амплитудой $B = 2A \cos D\omega t$. Такие периодические изменения амплитуды называются биениями.

7.3.2. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Ставится задача определить траекторию движения тела. Результат зависит от соотношения частот, амплитуд и начальных фаз исходных колебаний.

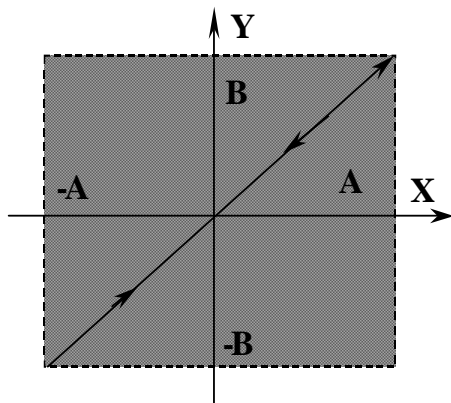


Рис.3а

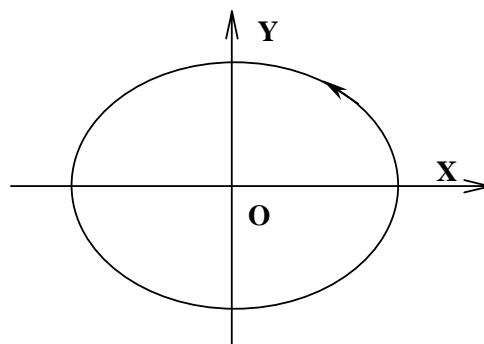


Рис.3б

Пусть $x = A \cos \omega t$ и $y = B \cos \omega t$, тогда траекторией будет отрезок прямой линии, (рис.3а): $y = (B/A)x$.

При $x = A \cos \omega t$ и $y = B \sin \omega t$ траекторией будет эллипс, (рис.3б): $(x^2/A^2) + (y^2/B^2) = 1$.

При разных частотах складывающихся колебаний результирующие траектории будут иметь более сложный вид.

Замкнутые траектории, очерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются фигурами Лиссажу.

7.4. Свободные затухающие колебания

Реальные системы не являются консервативными, в них действуют силы неконсервативные силы типа трения, из-за чего свободные колебания переходят в затухающие.

Сила сопротивления при небольших скоростях движения пропорциональна скорости и направлена против движения: $F_{\text{сопр}} = -rv = -r(dx/dt)$, где r - коэффициент сопротивления, с размерностью $[r] = \text{кг/с}$.

Возвращаясь к модели пружинного маятника, уравнение движения (2-й закон Ньютона) $ma = F$ запишется в виде $m(d^2x/dt^2) = -kx - r(dx/dt)$, или, приведя к удобному для решения виду,

$$x'' + 2bx' + \omega_0^2 x = 0, \quad (9)$$

где $b = r/2m$ - коэффициент затухания; $[b] = 1/c = c^{-1}$. Его решение будет

$$x = A_0 \exp\left[\left(-b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}\right)t\right] \quad (10)$$

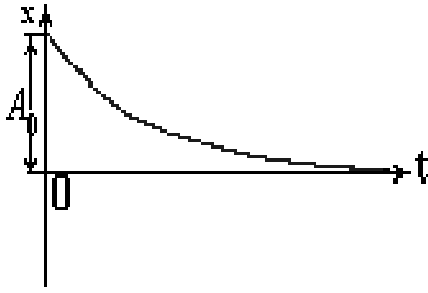


Рис.4а

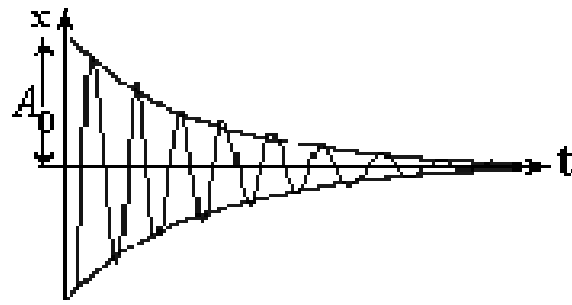


Рис.4б

Анализируя (10), можно видеть, что:

1) при $b \gg \omega_0$ $x = A_0 \exp(-2bt)$,

т.е. движение получается неперiodическим, рис.4а; его называют аперiodическим, т.к. тело монотонно стремится к положению равновесия.

2) при $b \ll \omega_0$ $x = A_0 [\exp(-bt)] \cos(\omega t + q) = A(t) \cos(\omega t + q)$, (11)

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$, - собственная частота затухающих колебаний, период

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \quad (12)$$

а амплитуда

$$A(t) = A_0 \exp(-bt). \quad (13)$$

Из (13) следует, что затухающие колебания не являются строго гармоническими, их амплитуда $A(t)$ уменьшается с течением времени и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания b (рис. 4б).

Натуральный логарифм отношения отклонения системы в моменты времени t и $t + T$ называется логарифмическим декрементом затухания:

$$d = \ln[x(t)/x(t + T)] = \ln[A_0 e^{-bt} / A_0 e^{-b(t+T)}] = bT = 2\pi b / \sqrt{b^2 - \omega_0^2} = 2\pi b / \omega. \quad (14)$$

Величина, обратная d , показывает число колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e = 2,7182$ раз.

Величина $Q = \pi/d = \pi\omega/2\pi b = \omega/2b$ (15)

называется добротностью колебательной системы.

7.5. . Вынужденные колебания

Они возникают при действии на систему внешней периодически изменяющейся силы (вынуждающей силы) $F = F_m \cos \omega t$, (16)

где ω - круговая частота вынуждающей силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний с учетом затухания запишется в виде:

$$m(d^2x/dt^2) = -kx - r(dx/dt) + F_m \cos \omega t.$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_m/m) \cos \omega t. \quad (17)$$

Таким образом, получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Решением такого уравнения будет

$x = x_0 + x_{\text{част}}$, где x_0 – общее решение однородного уравнения (17), (т. е. уравнения (23) с правой частью, равной нулю). Согласно (11)

$$x_0 = A_0 \exp\left[-b - \sqrt{b^2 - w_0^2} t\right]$$

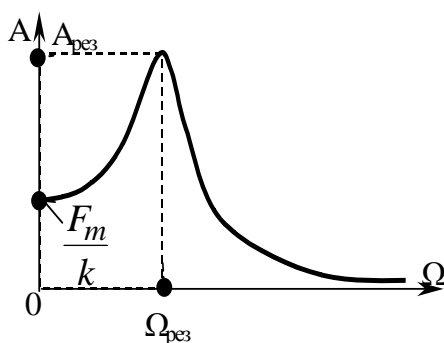
и с течением времени $x_0 \rightarrow 0$. Поэтому $x \rightarrow x_{\text{част}}$.

Из решения (17) следует, что $x_{\text{част}} = A \cos(Wt - q)$ (18)

где $A = F_m / m \sqrt{(w_0^2 - W^2)^2 + 4b^2 W^2}$, (19)

$$q = \arctg[2bW / (w_0^2 - W^2)]. \quad (20)$$

Из анализа (19) следует, что хотя амплитуда вынуждающей силы F_m , остается постоянной, амплитуда A вынужденных колебаний зависит от частоты W вынуждающей силы (рис.5).



Исследуя (19) на экстремум, можно показать, что только при резонансной частоте

$$W_{\text{рез}} = \sqrt{w_0^2 - b^2} \quad (21)$$

амплитуда вынужденных колебаний достигает максимальной величины:

Рис.5

$$W_{\text{рез}} = F_m / 2mb \sqrt{w_0^2 - b^2}. \quad (22)$$

Это явление называется резонансом.

При $W \neq W_{\text{рез}}$ имеем $A < A_{\text{рез}}$, что объясняется инерционностью колебательной системы).

Явление резонанса, состоящее в резком увеличении амплитуды колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к резонансной частоте, широко используется в технике. Его следует учитывать при конструировании машин, кораблей, самолетов и т.д. Необходимо, чтобы их резонансные частоты не совпадали с частотой вынуждающих внешних воздействий.

Лекция 8 ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

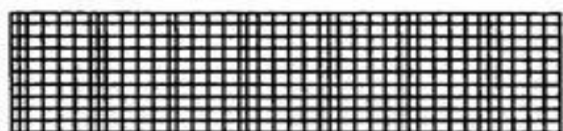
8.1. Упругие среды. Продольные и поперечные волны

Процесс распространения колебаний в среде называется волной. Иначе, возмущение, распространяющееся в пространстве (среде), называется волной.

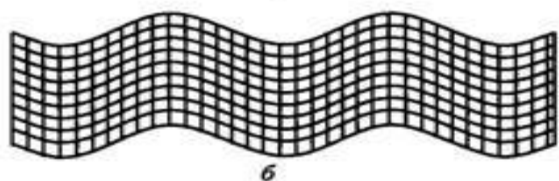
Волновые процессы, также как колебания, обладают одинаковыми характеристиками и одинаковыми свойствами, поэтому целесообразно начать их изучение с механических волн. Будем полагать, что имеем сплошную упругую среду, например, твердое тело, жидкости, газы. Для упругой среды характерно возникновение упругих деформаций при небольшом внешнем воздействии на нее. Эти деформации полностью исчезают после прекращения внешних воздействий.

Если в каком-либо месте упругой среды возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами эти колебания будут распространяться в среде с некоторой скоростью v . Механические возмущения (деформации), распространяющиеся в упругой среде, называются упругими или механическими волнами.

Упругие волны бывают продольные и поперечные. В продольных волнах (рис.1а) частицы среды колеблются в направлении распространения волны, в поперечных (рис.1б) – в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.



Продольная волна



Поперечная волна

Рис.1

Продольные волны могут возбуждаться в твердых, жидких и газообразных средах. Примером продольных механических волн являются звуковые или акустические волны - упругие волны с частотами в пределах 16-20000 Гц. Поперечные волны могут возникать только в твердых телах. Сейсмические волны могут быть как поперечными, так и продольными.

Отметим, что распространение упругих волн не связано с переносом вещества. Бегущие волны переносят энергию колебательного движения в направлении распространения волны.

8.2. Уравнение гармонической бегущей волны

Упругая волна называется гармонической, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими, т.е. описываются по закону синуса или косинуса. Часто гармоническую волну называют синусоидальной.

На рис.2 представлена гармоническая поперечная волна, распространяющаяся со скоростью v вдоль оси x , т.е. приведена зависимость между смещением x частиц среды и расстоянием r этих частиц от источника колебаний O для фиксированного момента времени t .

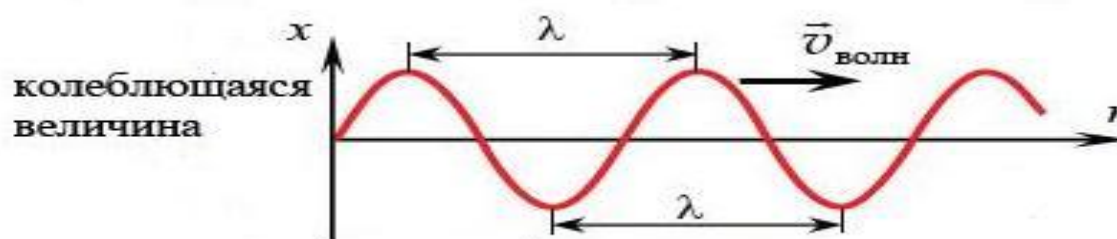


Рис.2

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны l . Длина волны равна тому расстоянию, на которое распространится гармоническая волна за время, равное периоду колебаний T , т.е.

$$l = vT. \quad (1)$$

Учитывая, что частота $\nu = 1/T$ получаем

$$l = v / \nu. \quad (2)$$

т.е. длина волны обратно пропорциональна частоте.

Уравнение такой волны в общем случае имеет вид

$$S = A \cos \left(\omega t - \frac{x}{v} + j_0 \right), \quad (3)$$

Для характеристики волн используется волновое число

$$k = \frac{2\pi}{l} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}, \quad (4)$$

где $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ – циклическая, (круговая) частота. По своему смыслу волновое число является пространственным аналогом круговой частоты ω .

С учетом (4) получим уравнение бегущей гармонической волны

$$S = A \cos(\omega t - kx + j_0), \quad (5)$$

где A – амплитуда волны, $\varphi = \omega t - kx + j_0$ – фаза волны, j_0 – начальная фаза.

Основываясь на формуле Эйлера ($e^{ia} = \cos a + i \sin a, i = \sqrt{-1}$), уравнение (5) можно записать в экспоненциальной (комплексной) форме

$$S = A_0 e^{i(\omega t - kx + j_0)} = A_0 \exp[i(\omega t - kx + j_0)], \quad (6)$$

где физический смысл имеет лишь действительная часть выражения (6). Такая форма представления волны существенно облегчает математические действия.

8.3. Фронт волны, волновые поверхности, фазовая скорость

Волна, распространяясь от источника колебаний, охватывает все новые и новые области пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется волновым фронтом.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью (поверхностью постоянных фаз, фазовой поверхностью).

Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в каждый момент времени – один.

Гармоническая бегущая волна (5) является плоской волной, т.к. ее волновые поверхности $\varphi = \omega t - kx + j_0 = \text{const}$ представляет собой совокупности плоскостей, параллельных друг другу и перпендикулярных оси x .

Уравнение гармонической сферической волны имеет вид

$$S = A(r) \cos(\omega t - kx + j_0), \quad (7)$$

где r – радиальная координата. При распространении волны в непоглощающей среде $A(r) \sim 1/r$.

Скорость v распространения гармонической волны называется фазовой скоростью. Она равна скорости перемещения волновой поверхности. Например, в случае плоской гармонической волны из условия $\omega t - kx + j_0 = \text{const}$ следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w}{k} = v. \quad (8)$$

8.4. Волновое уравнение

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается волновым уравнением – дифференциальным уравнением в частных производных.

$$\Delta S = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \quad (9)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \quad (10)$$

оператор Лапласа, v – фазовая скорость.

Решением уравнения (9) является уравнение любой волны (плоской, сферической и т.д.). В частности, для анализируемой здесь плоской гармонической волны (5), которая не зависит от координат y и z , волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Соответствующей подстановкой можно убедиться, что уравнению (11) удовлетворяет уравнение (5).

8.5. Принцип суперпозиции волн. Групповая скорость. Эффект Доплера.

Предполагается, что гармоническая волна вида (5) не имеет ни начала, ни конца во времени и пространстве.

Реальная волна ограничена во времени и в пространстве, поэтому является негармонической, оказывается, такую волну можно заменить эквивалентной ей системой гармонических волн, которые распространяются в линейной среде независимо друг от друга. Это утверждение справедливо для волн любой природы и носит название принципа суперпозиции.

Таким образом, негармоническую волну представляют в виде группы волн или волнового пакета. Набор частот этих гармонических компонент, или гармоник, который может быть как дискретным, так и непрерывным, называется спектром исходной волны.

Интерес представляет скорость распространения огибающей этой группы волн (по существу, скорость распространения энергии волнового пакета или скорость передачи сигнала). Эту скорость называют групповой скоростью. Можно показать, что групповая скорость

$$u = dw / dk \quad (12)$$

и она связана с фазовой скоростью соотношением

$$u = v - l \frac{dv}{dl} \quad (13)$$

Для гармонической волны $\frac{dv}{dl} = 0$ и скорость переноса энергии (групповая скорость) равна фазовой скорости, т.е. $u = v$ (14)

При движении источника излучения и/или движения наблюдателя (приёмника) происходит изменение частоты и, соответственно, длины волны излучения, воспринимаемое наблюдателем (приёмником). Это явление получило название эффекта Доплера и справедливо для волн любой природы.

Если скорость волны c , скорость источника волны v и скорость наблюдателя u относительно среды, то измеренная частота будет равна

$$n = n_0 \frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{v}{c}},$$

т.е. зависит от направления движения: при сближении источника и приемника увеличивается («сдвиг в фиолетовую область»), при удалении – уменьшается («сдвиг в фиолетовую область»).

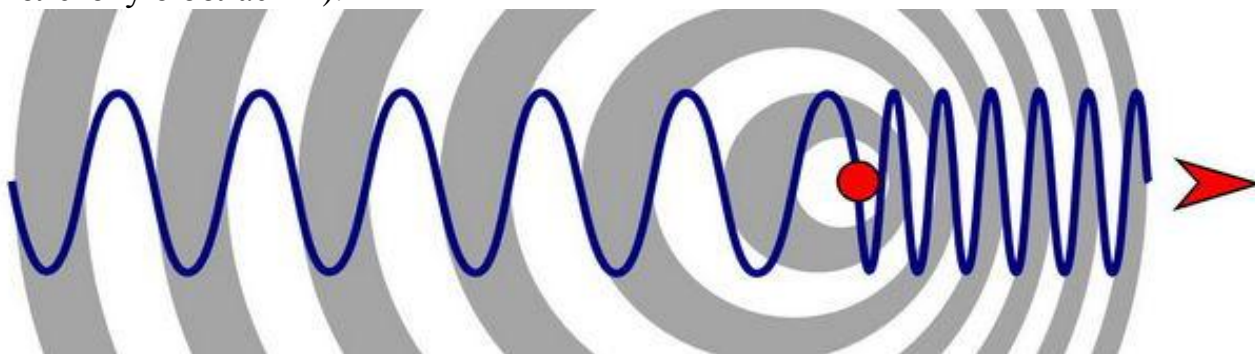


Рис.3

8.6. Энергия бегущей волны. Вектор плотности потока энергии

Упругая среда, в которой распространяется волна, обладает как кинетической энергией колебательного движения частиц, так и потенциальной энергией, обусловленной деформацией среды.

Для характеристики переноса энергии вводят понятие вектора плотности потока энергии \vec{P} – вектор Умова.

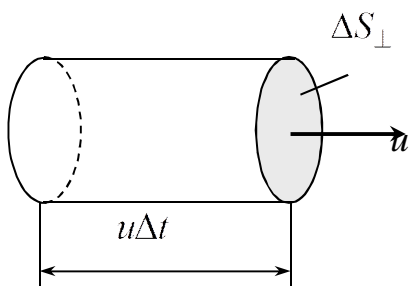


Рис.4

Если через площадку DS_{\perp} , перпендикулярную к направлению распространения волны, переносится за время Dt энергия DW , то плотность потока энергии

$$P = \frac{DW}{DS_{\perp} Dt} = \frac{wDV}{DS_{\perp} Dt} = \frac{wuDS_{\perp} Dt}{DS_{\perp} Dt} = wu, \quad (15)$$

где $DV = DS_{\perp} uDt$ – объем элементарного цилиндра, выделенного в среде.

Поскольку скорость переноса энергии или групповая скорость есть вектор, то и плотность потока энергии можно представить в виде вектора

$$\vec{P} = w\vec{u}, \quad \text{Вт/м}^2. \quad (16)$$

Этот вектор ввел профессор Московского университета Н.А. Умов в 1874 г.

Среднее значение его модуля называют интенсивностью волны

$$I = \langle |\Pi| \rangle. \quad (17)$$

Для гармонической волны $u=v$ и для такой волны в формулах (15)-(17) и можно заменить на v .

8.7. Волновые уравнения для электромагнитных волн

В Лекции 6 были получены уравнения Максвелла в дифференциальной форме (т.е. справедливые для бесконечно малого объема среды):

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{D} = r, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad (18)$$

где \vec{E} и \vec{H} – векторы напряженности электрического и магнитного полей, которые измеряются соответственно в В/м и А/м; \vec{B} – вектор магнитной индукции (Тл), \vec{D} – вектор электрического смещения (Кл/м²), \vec{j} – вектор плотности тока проводимости (А/м²), r – объемная плотность заряда (Кл/м³).

Кроме того, необходимо учитывать, что

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = g \vec{E}, \quad (19)$$

где $\epsilon_0 = 1/(4\pi \times 10^9)$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м – электрическая и магнитная постоянные; ϵ , μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; g – удельная электропроводность среды (величина, обратная удельному сопротивлению).

Из первого уравнения Максвелла следует, что переменное (изменяющееся во времени) магнитное поле вызывает переменное электрическое поле, а оно, согласно второму уравнению в (18), изменяясь, вызывает магнитное поле и т.д. Нельзя создать только электрическое поле, не вызвав магнитного поля и наоборот, т.е. электрическое и магнитное поля взаимосвязаны. Они образуют единое электромагнитное поле, которое распространяется в пространстве (среде) в виде электромагнитных волн.

Электромагнитные волны удовлетворяют уравнениям, аналогичным (9), которые выводятся из уравнений Максвелла с применением векторного равенства

$$\text{rot rot} \vec{A} = \text{grad div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

Для линейной однородной изотропной среды при отсутствии токов ($\vec{j} = 0$) и зарядов ($r=0$) волновые уравнения для векторов \vec{E} и \vec{H} имеют вид

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (20)$$

где $\Delta \vec{E}$ и $\Delta \vec{H}$ – операторы Лапласа, примененные к векторам \vec{E} и \vec{H} соответственно, они выражаются через операторы Лапласа от скалярных функций

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \Delta E_x \vec{i} + \Delta E_y \vec{j} + \Delta E_z \vec{k}, \\ \Delta \vec{H} &= \Delta H_x \vec{i} + \Delta H_y \vec{j} + \Delta H_z \vec{k}, \end{aligned} \quad (21)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты).

Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде

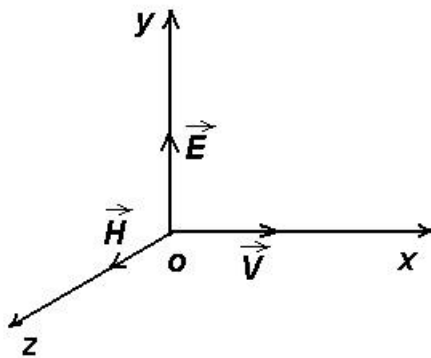
$$v = (\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu)^{-1/2} = c / \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (22)$$

поскольку $c = (\epsilon_0 m_0)^{-1/2} = 3 \times 10^8$ м/с - скорость света в вакууме, одинаковая для всех электромагнитных волн. Величину

$$n = \sqrt{\epsilon m} \quad (23)$$

называют оптической плотностью среды или абсолютным показателем преломления среды, он показывает, во сколько раз скорость света v в среде меньше скорости света в вакууме c . Таким образом, $v = c/n$.

Будем далее предполагать, что электромагнитная волна распространяется в направлении оси x (см. рис.5) со скоростью \dot{v} и при этом вектор \dot{E} колеблется



в одной плоскости, например, в плоскости xoy (эту плоскость называют плоскостью поляризации).

Тогда вектор \dot{H} будет колебаться в перпендикулярной к ней плоскости xoz (это следует из двух первых уравнений Максвелла (18)), т.е. в такой линейно поляризованной волне векторы \dot{E} и \dot{H}

Рис.5

имеют только по одной составляющей, электромагнитные волны всегда являются поперечными волнами иными словами,

$$\dot{E} = E_y \dot{j}, \quad \dot{H} = H_z \dot{k}.$$

Следует заметить, что векторы \dot{E} , \dot{H} и \dot{v} образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов (т.е. направление вектора \dot{v} определяется по правилу правого винта, если вращать его по направлению от \dot{E} к \dot{H}).

Для такой линейно поляризованной волны волновые уравнения (20) упростятся и примут вид

$$\frac{\nabla_x^2 E_y}{\nabla_x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\nabla_t^2 E_y}{\nabla_t^2}, \quad \frac{\nabla_x^2 H_z}{\nabla_x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\nabla_t^2 H_z}{\nabla_t^2}, \quad (24)$$

где индексы y и z при E и H подчеркивают лишь то, что векторы \dot{E} и \dot{H} направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей y и z .

8.8. Уравнение плоской гармонической волны

Уравнениям (24) удовлетворяют, в частности, плоские электромагнитные гармонические волны, описываемые уравнениями

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \cos(\omega t - kx + j_0), \\ H_z &= H_0 \cos(\omega t - kx + j_0), \end{aligned} \quad (25)$$

где E_0 , H_0 – амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей; $\omega = 2\pi/T = 2\pi n$ – круговая частота (s^{-1}); T – период колебаний (с); $n = 1/T$ – частота колебаний (Гц); $k = \omega/v = 2\pi/l$ – волновое число; v – скорость распространения волны, для нее скорость переноса энергии (групповая скорость) и равна фазовой скорости v этой волны; $l = vT$ – длина волны, для вакуума

$$l = cT = c/n, \quad (26)$$

j_0 – начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$.

В уравнениях гармонической волны (25) j_0 – одинаково, т.к. колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят в одинаковой фазе (это следует из (18)).

На рис.6 показаны векторы \vec{E} и \vec{H} поля плоской линейно поляризованной волны в различных точках луча (оси ОХ) в один и тот же момент времени. Плоскость, проходящая через электрический вектор \vec{E} и луч (или вектор \vec{v}), называется плоскостью поляризации.

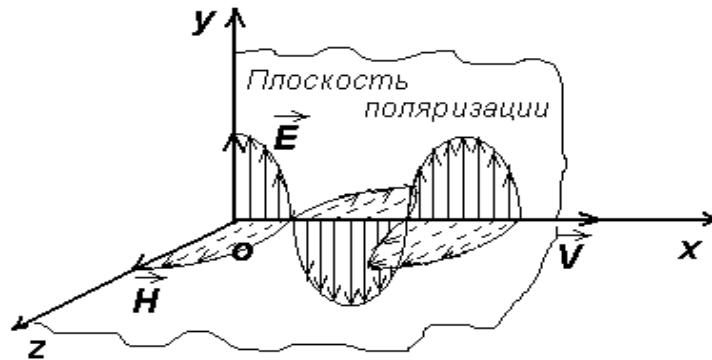


Рис.6

Электромагнитную гармоническую волну часто записывают в экспоненциальной (комплексной) форме:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \exp[i(\omega_0 t - kx + q)], \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \exp[i(\omega_0 t - kx + q)]. \end{aligned}$$

Электромагнитная волна так же, как упругая волна, характеризуется фронтом волны, волновой поверхностью. В отличие от упругих волн, которые распространяются только в среде (в вакууме упругие волны не могут распространяться, т.к. в нем нет частиц, которые совершали бы колебания), электромагнитные волны распространяются не только в среде, но и в вакууме, т.к. они представляют собой процесс распространения колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} в пространстве.

Как и в случае упругих волн по форме волновых поверхностей или волновому фронту различают плоские, сферические, цилиндрические и прочие электромагнитные волны.

Обычно в практике используются пучки электромагнитной энергии (света) конечного поперечного сечения. Конечный, но достаточно узкий пучок будем называть лучом. Луч всегда перпендикулярен волновому фронту.

Из уравнений Максвелла (18) также следует, что

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H, \quad (27)$$

8.9. Энергия электромагнитной волны

Объемная плотность энергии электромагнитного поля в линейной изотропной среде равна сумме объемных плотностей энергии электрического и магнитного полей, поэтому

$$w = \frac{e_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{m_0 m H^2}{2}, \text{ Дж/м}^3 \quad (28)$$

С учетом соотношений (22) и (27) из (28) следует, что

$$w = e_0 \epsilon E^2 = m_0 m H^2 = (e_0 \epsilon m_0 m)^{1/2} EH = EH / v, \quad (29)$$

где v – скорость распространения электромагнитной волны в среде.

В случае плоской линейно поляризованной монохроматической волны (25) объемная плотность энергии волны

$$w = \frac{E_0 H_0}{v} \cos^2(\omega t - kx + j_0), \quad (30)$$

т.е. значение w в каждой точке поля периодически изменяется от 0 до $w_{\max} = E_0 H_0 / v$ за промежуток времени $\Delta t = T/2$.

Среднее значение объемной плотности энергии волны

$$\langle w \rangle = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} w dt = \frac{E_0 H_0}{2v}. \quad (31)$$

Отсюда получим величину плотности потока энергии

$$S = wv = EH. \quad (32)$$

Т.к. векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{v} взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку векторов, то направление вектора $\vec{E} \times \vec{H}$ совпадает с направлением переноса энергии – с направлением вектора \vec{v} . Поэтому (32) можно записать в векторной форме

$$\vec{S} = w\vec{v} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (33)$$

Вектор плотности потока энергии \vec{S} (иногда обозначают \vec{P}) направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени, через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. S измеряется в Дж/(см²)=Вт/м².

Заметим, что в общем случае

$$\vec{S} = w\vec{u}, \quad (34)$$

где u – скорость переноса энергии или групповая скорость, однако для гармонических волн $u=v$ и поэтому можно не различать их.

Интенсивность волны

$$I = \langle \vec{S} \rangle = \langle w \rangle v \quad (35)$$

8.10. Шкала электромагнитных волн

В зависимости от длины волны в вакууме λ или частоты $\nu = c/\lambda$, а также способа излучения и регистрации различают несколько видов электромагнитных волн: радиоволны, оптическое излучение, рентгеновское излучение и гамма-излучение.

Радиоволны образуются при ускоренном движении электронов, т.е. переменными токами. Для радиоволн $10^4 \text{ м} > \lambda > 5 \times 10^{-5} \text{ м}$.

Оптическое излучение возникает при переходе электронов в атомах с верхних энергетических уровней на более низкие, за счет теплового излучения тел (за счет теплового движения зарядов). Для него $1 \text{ мм} > \lambda > 10 \text{ нм}$ ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$).

К оптическому излучению относятся инфракрасное ($1 \text{ мм} > \lambda > 770 \text{ нм}$), видимое ($770 \text{ нм} > \lambda > 380 \text{ нм}$) и ультрафиолетовое излучение ($380 \text{ нм} > \lambda > 10 \text{ нм}$).

Рентгеновское излучение возникает при торможении заряженных частиц в веществе, при переходе электронов в атоме с верхних на самые низкие энергетические уровни. Для него $2 \times 10^{-9} \text{ м} > \lambda > 6 \times 10^{-12} \text{ м}$.

Гамма-излучение возникает при ядерных реакциях, для него $\lambda < 10^{-11} \text{ м} = 0,1 \text{ \AA}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 томах. Т.2. Электричество и магнетизм. Волновая оптика. – М.: «Лань», 2017.
2. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Учебник. В 2-х томах. Т.1. Механика. Электродинамика. М., Лань, 2018
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. Том 3. Учебное пособие. – М., ФИЗМАТЛИТ, 2015
4. Трофимова Т.И. Основы физики. Электродинамика. – М., КноРус, 2017
5. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма (электронная книга). М.: Лаборатория Знаний, 2017.
6. Беланов А.С. Физика, часть II. Электромагнетизм, колебания и волны. Учебное пособие. (электронное издание). М., МГУПИ, 2015

При написании конспекта лекций также использовались известные учебники по физике, изданные в период с 1923 г. и журналы «Потенциал» и «Физическое образование в вузах».