# Практическое занятие №10

## *Теория вычетов*
## *нахождение типа и.о.т. и вычетов*

**Определение.** *Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0$ называется комплексное число, определяемое равенством*

$$res f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz,$$

*где $C$ – любой контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$, содержащий внутри себя единственную особую точку $z_0$ функции $f(z)$.*

**Теорема.** *Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0$ является коэффициент $c_{-1}$ при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0$*, т. е. $res f(z_0) = c_{-1}$

***<u>Формулы для вычисления вычетов функции $f(z)$</u>***

1. Если $z_0$ – устранимая особая точка функции $f(z)$,
то $res f(z_0) = 0$.

2. Если точка $z_0$ – существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения вычета нужно найти коэффициент $c_{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана: $res f(z_0) = c_{-1}$ .

3. Если $z_0$ – полюс порядка $n$ функции $f(z)$, то

$$res f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z-z_0)^n].$$

*<u>Частные случаи (для полюсов)</u>*

А) если $z_0$ – простой полюс, т.е. полюс первого порядка $(n = 1)$, то

$$resf(z_0) = \lim_{z \to z_0} [f(z)(z - z_0)\ ] \ .$$

Б) для полюса 2-го порядка

$$resf(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} [f(z)(z - z_0)^2].$$

В) для полюса 3-го порядка

$$resf(z_0) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2} [f(z)(z - z_0)^3]$$

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{cosz-1}{7z^2(z-\pi)}$, определить их тип и найти вычеты функции в ее особых точках.

*Решение.* Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1 = 0$, $z_2 = \pi$.

В точке $z = 0$

$$\lim_{z \to 0} f\ (z) = \lim_{z \to 0} \frac{cosz - 1}{7z^2(z - \pi)} = \lim_{z \to 0} \frac{-z^2}{14z^2(z - \pi)} = \frac{1}{14\pi}.$$

Следовательно, $z = 0$ – устранимая особая точка и $res\ f(0) = 0$.

Точка $z = \pi$ - это полюс первого порядка:

$\lim_{z \to \pi} f\ (z) = \lim_{z \to \pi} \frac{cosz-1}{7z^2(z-\pi)} = \infty.$ Тогда

$$res\ f(\pi) = \lim_{z \to \pi} \frac{(cosz - 1)(z - \pi)}{7z^2(z - \pi)} = \frac{-1 - 1}{7\pi^2} = -\frac{2}{7\pi^2}.$$

Пример. Найти вычет функции $f(z) = z^2 sin\frac{2}{z}$ в особой точке.

*Решение.* Особая точка функции $f(z)$ - точка $z = 0$. Выпишем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z$

$$f(z) = z^2 \left( \frac{2}{z} - \frac{8}{3!\, z^3} + \frac{2^5}{5!\, z^5} - \frac{2^7}{7!\, z^7} + \ldots \right) =$$

$$= 2z - \frac{8}{3!\, z} + \frac{2^5}{5!\, z^3} - \frac{2^7}{7!\, z^5} + \ldots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, поэтому точка $z = 0$ - существенно особая точка функции $f(z)$. Вычет функции в точке $z = 0$ есть коэффициент $c_{-1} = -\frac{8}{3!}$, т.е. $res\, f(0) = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$.

<u>Пример.</u> Найти вычет функции $f(z) = \frac{1}{z^5+4z^3}$ в ее особых точках.

*Решение*. Особые точки функции находятся из решения

уравнения $z^5 + 4z^3 = 0$ , т.е. $z^3(z+2i)(z-2i) = 0$. Получаем,

$z_1 = 0$ – полюс третьего порядка,

$z_{2,3} = \pm 2i$ – полюсы первого порядка.

Используя приведенные выше формулы для вычисления вычетов, найдем вычеты в точках $z_2$, $z_3$:

$$res\, f(2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(2i)^3 4i} = \frac{1}{32},$$

$$res\, f(-2i) = \lim_{z\to -2i} \frac{(z+2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(-2i)^3(-4i)} = \frac{1}{32}.$$

Найдем вычет в точке $z_1$:

$$res\, f(0) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1\cdot z^3}{z^3(z^2+4)}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[-\frac{2z}{(z^2+4)^2}\right] =$$

$$= -\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z^2+4)^2} = -\lim_{z\to 0} \frac{-3z^2+4}{(z^2+4)^3} = -\frac{1}{16}.$$

<u>Пример.</u> Найти изолированные особые точки (иот) функции, их тип, вычислить вычеты функции в таких точках:

$f(z) = (z-1)^3 sin\frac{1}{z-1}$ .

*Решение*. Изолированная особая точка $z$ =1. В данном случае нужно разложить функцию в ряд Лорана

$$f(z) = (z-1)^3\left(\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{3!\,(z-1)^3} + \frac{1}{5!\,(z-1)^5} - \frac{1}{7!\,(z-1)^7} + \ldots\right) =$$

$$= (z-1)^2 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!\,(z-1)^2} - \frac{1}{7!\,(z-1)^4} + \ldots$$

Главная часть ряда Лорана имеет вид:

$$\frac{1}{5!\,(z-1)^2} - \frac{1}{7!\,(z-1)^4} + \cdots.$$

Главная часть ряда Лорана имеет бесконечное количество слагаемых. Имеем, что иот $z = 1$ является существенно особой точкой. Находим коэффициент при $(z-1)^{-1}$ .

Этот коэффициент равен 0. Тогда вычет функции $res\, f(1) = 0$

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \dfrac{e^{15z} - 1}{(z^2+9)z}$ и установить их тип. Найти вычеты.

*Решение*: Изолированные особые точки функции $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$ и $z_3 = 0$.

Для нахождения типа каждой особой точки нужно вычислить предел функции в каждой особой точке.

$$\lim_{z\to 3i} \frac{e^{15z}-1}{(z^2+9)z} = \lim_{z\to 3i} \frac{e^{15z}-1}{(z+3i)(z-3i)z} = \infty$$

Тогда $z_1 = 3i$ полюс первого порядка. Найдем вычет в этой точке.

$$res\, f(3i) = \lim_{z\to 3i} \frac{(e^{15z}-1)(z-3i)}{z \quad (z+3i)(z-3i)} = \frac{e^{45i}-1}{(3i) \quad 6i} = \frac{e^{45i}-1}{-18}.$$

Перейдем к следующей точке:

$$\lim_{z\to -3i} \frac{e^{15z}-1}{(z^2+9)z} = \lim_{z\to -3i} \frac{e^{15z}-1}{(z+3i)(z-3i)z} = \infty$$

Тогда $z_2 = -3i$ полюс первого порядка.

Найдем вычет в этой точке:

$$res\, f(-3i) = \lim_{z\to -3i} \frac{(e^{15z}-1)(z+3i)}{z \quad (z+3i)(z-3i)} = \frac{e^{-45i}-1}{(-3i) \quad (-6i)} = \frac{e^{-45i}-1}{-18}.$$

Рассмотрим еще одну и.о.т. $z_3 = 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{15z}-1}{(z^2+9)z} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{15z}{(z^2+9)z} = \lim_{z\to 0} \frac{15}{(z^2+9)} = \frac{15}{9}$$

Тогда $z_3 = 0$ устранимая особая точка. В этом случае $res\, f(0) = 0.$

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z)=(z+4)^5 e^{\frac{2}{z+4}}$ и установить их тип. Найти вычет.

*Решение*: Изолированная особая точка функции $z=-4$.

Разложим функцию в ряд по степеням (z+4) в кольце $0<|z+4|<+\infty$.

$$f(z)=(z+4)^5 e^{\frac{2}{z+4}}$$

$$=(z+4)^5(1+\frac{2}{z+4}+\frac{2^2}{2!\,(z+4)^2}+\frac{2^3}{3!\,(z+4)^3}+\frac{2^4}{4!\,(z+4)^4}+$$

$$\frac{2^5}{5!(z+4)^5}+\frac{2^6}{6!(z+4)^6}+\frac{2^7}{7!(z+4)^7}+\cdots)\ldots$$

Раскрываем скобки и получаем

$$f(z)=(z+4)^5+2(z+4)^4+\frac{2^2(z+4)^3}{2!}+\frac{2^3(z+4)^2}{3!}+\frac{2^4(z+4)}{4!}+$$

$$+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!(z+4)}+\frac{2^7}{7!(z+4)^2}+\cdots$$

Главная часть полученного ряда Лорана имеет бесконечное количество членов (слагаемых). Выделенная изолированная особая точка $z=-4$ существенно особая точка. Вычет равен $res\, f(-4)=\frac{2^6}{6!}$.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z)=\frac{8z+11}{z^2+3z+2}$

и установить их тип.

*Решение*. Находим и.о.т. (приравняем знаменатель дроби к нулю): $z_1=-2$, $z_2=-1$.

$$\lim_{z\to-2}\frac{8z+11}{z^2+3z+2}=\lim_{z\to-2}\frac{8z+11}{(z+2)(z+1)}=\infty$$

Изолированная особая точка $z_1=-2$ является полюсом 1-го порядка.

Найдем вычет.

$$res\, f(-2) = \lim_{z\to -2} \frac{(8z+11)(z+2)}{(z+2)(z+1)} = \frac{-5}{-1} = 5$$

Рассмотрим следующую точку.

$$\lim_{z\to -1} \frac{8z+11}{z^2+3z+2} = \lim_{z\to -1} \frac{8z+11}{(z+2)(z+1)} = \infty$$

Изолированная особая точка $z_1 = -1$ является полюсом 1-го порядка.

Найдем вычет.

$$res\, f(-1) = \lim_{z\to -1} \frac{(8z+11)(z+1)}{(z+2)(z+1)} = \frac{3}{1} = 3$$

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1}{(z^2+5z+6)^2}$

и установить их тип.

*Решение*. Находим и.о.т. (приравняем знаменатель дроби к нулю): $z_1 = -3$, $z_2 = -2$.

Используем определение и.о.т. через предел функции, также используем теоремы о связи нулей и полюсов функции. Вычислим

$$\lim_{z\to -2} \frac{1}{(z^2+5z+6)^2} = \lim_{z\to -2} \frac{1}{(z+2)^2(z+3)^2} = \infty$$

Следовательно, изолированная особая точка $z_1 = -2$ является полюсом 2-го порядка.

Вычислим $\lim_{z\to -3} \frac{1}{(z^2+5z+6)^2} = \lim_{z\to -3} \frac{1}{(z+2)^2(z+3)^2} = \infty$

Следовательно, изолированная особая точка $z_1 = -3$ является полюсом 2-го порядка. Найдем вычет в точке $z_1$:

$$res\, f(0) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1\cdot z^3}{z^3(z^2+4)}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[-\frac{2z}{(z^2+4)^2}\right] =$$

$$= -\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z^2+4)^2} = -\lim_{z\to 0} \frac{-3z^2+4}{(z^2+4)^3} = -\frac{1}{16}.$$

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+5z+6)^2}$

и установить их тип.

*Решение*. Находим и.о.т. (приравняем знаменатель дроби к нулю): $z_1 = -3$, $z_2 = -2, z_3 = 0$.

Используем определение и.о.т. через предел функции, также используем теоремы о связи нулей и полюсов функции. Вычислим

$$\lim_{z\to-2} \frac{1}{z^3(z^2+5z+6)^2} = \lim_{z\to-2} \frac{1}{z^3(z+2)^2(z+3)^2} = \infty$$

Тогда изолированная особая точка $z_1 = -2$ является полюсом 2-го порядка.

Вычислим $\lim_{z\to-3} \frac{1}{z^3(z^2+5z+6)^2} = \lim_{z\to-3} \frac{1}{z^3(z+2)^2(z+3)^2} = \infty$

Тогда изолированная особая точка $z_1 = -3$ является полюсом 2-го порядка.

Вычислим

$$\lim_{z\to0} \frac{1}{z^3(z^2+5z+6)^2} = \lim_{z\to0} \frac{1}{z^3(z+2)^2(z+3)^2} = \infty$$

Тогда изолированная особая точка $z_1 = 0$ является полюсом 3-го порядка.

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = (z+2)^2 e^{\frac{1}{z+2}}$.

Определить тип особой точки.

*Решение*. Изолированная особая точка функции $f(z)$ $z_0 = -2$.

Используем разложение $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ zϵc

Получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z+2)$

$$f(z) = (z+2)^2 \left[1 + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{2!(z+2)^2} + \frac{1}{3!(z+2)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4!(z+2)^4} + \ldots \right] = (z+2)^2 + (z+2) + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!(z+2)} +$$

$+\frac{1}{4!(z+2)^2}+\ldots$

Разложение справедливо в кольце $0<|z+2|<+\infty$. Это разложение в ряд Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $(z+2)$. Следовательно, точка $z_0=-2$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Пример. Найти особые точки функции $f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}e^{(z+2)}$.

Определить тип особой точки.

*Решение*. Изолированная особая точка функции $f(z)$ $z_0=-2$.

$$f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}\left[1+\frac{z+2}{1}+\frac{(z+2)^2}{2!}+\frac{(z+2)^3}{3!}+\right.$$

$$\left.+\frac{(z+2)^4}{4!}+\ldots\right]=\frac{1}{(z+2)^2}+\frac{1}{(z+2)}+\frac{1}{2!}+\frac{(z+2)}{3!}+$$

$$+\frac{(z+2)^2}{4!}+\ldots$$

Получили ряд Лорана в кольце $0<|z+2|<+\infty$. Главная часть содержит два слагаемых, т.е. содержит конечное число членов. Тогда и.о.т. $z_0=-2$

будет полюсом 2-го порядка.

**Домашнее задание**.

Учебно-методическое пособие «Теория функций комплексного переменного», часть 2. Задачи №№ 2.4, 2.5 (выполнение типового расчета).

Пособие размещено на сайте кафедры ВМ-2

http://vm-2.mozello.ru

раздел «Математический анализ. 4 семестр».