Лекция №9

Теория вычетов

Продолжаем изучение теории вычетов. Еще раз с примерами рассмотрим важнейшие теоретические понятия.

Определение. *Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитическая в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки z_0, а в точке z_0 функция не определена или не дифференцируема.*

Пример. У функции $f(z) = (z-2)^4 sin\frac{8}{z-2}$ есть изолированная особая точка (и.о.т.) z=2 (функция не является аналитической в этой точке).

Пример. У функции $f(z) = \frac{8z+11}{z^2+3z+2}$ есть две изолированные особые точки (и.о.т.): $z_1 = -2$, $z_2 = -1$.

Выделяют 3 типа изолированных особых точек: устранимая особая точка, полюс n-го порядка и существенно особая точка.

Перейдем к рассмотрению ***классификация изолированных особых точек на основе вычисления предела функции***

Определение. *Точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = C.$$

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1-e^{3z}}{z}$

и установить их тип.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ - это $z_0 = 0$. Вычислим

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-e^{3z}}{z} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{-3z}{z} = -3.$$

т.е. $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{cos3z-1}{z^2}$

и установить их тип.

Решение. Особая точка заданной функции z=0.

Вычислим

$$\lim_{z\to 0} \frac{cos3z-1}{z^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{-9z^2}{2z^2} = -4{,}5.$$

Получается, что $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

Нули функции

Определение. Точка z_0 называется нулем n-го порядка аналитической в окрестности z_0 функции $f(z)$, если

$$f(z_0) = 0, f'^{(z_0)} = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0,$$

$$f^{(n)}(z_0) \quad \neq 0.$$

Если $n = 1$, то точка z_0 называется простым нулем (нулем первого порядка).

Пример. Найти нули функции $f(z) = cosz - 1$,

определить порядок нулей.

Решение. Приравняем $f(z)$ нулю, получим $cosz = 1$, откуда

$z_n = 2\pi n \ (n = 0, \pm 1, \dots)$ – нули данной функции.

Найдем

$$f'(z)\,|_{z=z_n} = -sinz\,|_{z=2\pi n} = 0,$$

$$f''(z)\,|_{z=z_n} = -cosz\,|_{z=2\pi n} = -1 \neq 0.$$

Согласно определению 3, $z_n = 2\pi n$ являются нулями второго порядка.

<u>*Теорема.*</u> *Точка z_0 является нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$$

где $\varphi(z)$ аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

<u>Пример.</u> Найти нули функции $f(z) = z^8 - 9z^7$,

определить порядок нулей.

Решение. Приравняем $f(z)$ нулю, получим $z^7(z-9) = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 9$. Можно воспользоваться определением 3, однако проще использовать

теорему 1. Функция $f(z)$ представима в виде

$f(z) = z^7(z-9)$, но тогда $z = 0$ является нулем порядка 7, функцией $\varphi(z)$ является сомножитель $\varphi(z) = z - 9$, $\varphi(0) = -9 \neq 0$; $z = 9$, является нулем порядка 1, функцией $\varphi(z)$ в данном случае является $\varphi(z) = z^7$,

$\varphi(9) = 9^7 \neq 0$.

<u>*Определение.*</u> *Точка z_0 называется <u>полюсом</u> функции $f(z)$, если*

$\lim\limits_{z \to z_0} f\,(z) = \infty$.

<u>Пример.</u> Для функции $f(z) = \frac{1}{7-2z}$ изолированная особая точка

$z = \frac{7}{2}$. Рассмотрим $\lim\limits_{z \to \frac{7}{2}} \frac{1}{7-2z} = \infty$, по определению 4 данная точка

является полюсом.

<u>Теорема.</u> *Для того, чтобы точка* z_0 *была полюсом функции* $f(z)$ *необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции*

$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$.

<u>Теорема.</u> *Пусть* $f(z)$ *является аналитической в окрестности точки* z_0 *. Если точка* z_0 *– нуль порядка* n *для* $f(z)$*, то точка* z_0 *– полюс порядка* n *для функции* $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$.

<u>Теорема.</u> *Если функцию* $f(z)$ *можно представить в виде* $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$*, где* $\varphi(z)$ *аналитическая функция в точке* z_0 *и*

$\varphi(z_0)\neq 0$*, то точка* z_0 *является полюсом порядка* n *функции* $f(z)$.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z)=\frac{2z+1}{z^4-2z^3}$

и установить их тип.

Решение. Найдем нули функции $\frac{1}{f(z)}=\frac{z^4-2z^3}{2z+1}$. Поскольку

$z^4-2z^3=z^3(z-2)$, то для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка $z=0$ – это нуль третьего порядка согласно теореме 1, а $z=2$ – нуль первого порядка. Пользуясь теоремами 2, 3, имеем: $z=0$ – это полюс третьего порядка функции $f(z)$, а $z=2$ – полюс первого порядка.

<u>Теорема.</u> *Если функция* $f(z)$ *представима в виде* $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ *и точка* z_0 *является нулем порядка* m *для функции* $P(z)$ *и нулем порядка* l *для функции* $Q(z)$*, тогда*

1. если $m\geq l\geq 1$ *, то точка* z_0 *– устранимая особая точка функции* $f(z)$*;*

2. если $m<l$*, то точка* z_0 *будет полюсом порядка* $n=m-l$ *функции* $f(z)$.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{e^{z-3}-1}{(z-3)^2 z^4}$ и установить их тип.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1 = 3$ и

$z_2 = 0$. В точке $z_1 = 3$ числитель и знаменатель $f(z)$ обращаются в нуль. Для числителя $P(z) = e^{z-3} - 1$ число $z = 3$ является нулем 1 порядка, так как $P'(z)\,|_{z=3} = e^{z-3}\,|_{z=3} = 1$, то $z = 3$ – нуль 1-го порядка. Знаменатель $Q(z) = (z-3)^2 z^4$ в точке $z = 3$ имеет нуль 2-го порядка. Следовательно,

по теореме 5 $z_1 = 3$ –полюс первого порядка функции $f(z)$.

В точке $z = 0$ перепишем функцию в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^4}$, где $\varphi(z) = \frac{e^{z-3}-1}{(z-3)^2}$ – аналитическая функция в точке $z = 0$,

$\varphi(0) = \frac{e^{-3}-1}{9} \neq 0$. По теореме 4 $z = 0$ – полюс 4-го порядка. Окончательно, $z = 3$ – полюс первого порядка, $z = 0$ – полюс 4-го порядка.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \dfrac{e^{8z} - 1}{(z^2+9)z^3}$

и установить их тип.

Решение: Изолированные особые точки функции $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$ и $z_3 = 0$.

Для нахождения типа каждой особой точки нужно вычислить предел функции в каждой особой точке.

$$\lim_{z\to 3i} \frac{e^{8z}-1}{(z^2+9)z^3} = \lim_{z\to 3i} \frac{e^{8z}-1}{(z+3i)(z-3i)z^3} = \infty$$

Тогда $z_1 = 3i$ полюс первого порядка.

$$\lim_{z\to -3i} \frac{e^{8z}-1}{(z^2+9)z^3} = \lim_{z\to -3i} \frac{e^{8z}-1}{(z+3i)(z-3i)z^3} = \infty$$

Тогда $z_2 = -3i$ полюс первого порядка.

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{8z}-1}{(z^2+9)z^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{8z}{(z^2+9)z^3}=\lim_{z\to 0}\frac{8}{(z^2+9)z^2}=\infty$$

Тогда $z_3=0$ полюс второго порядка.

Ответ. $z_1=3i$ полюс первого порядка, $z_2=-3i$ полюс первого порядка, $z_3=0$ полюс второго порядка.

Пример. Найти особые точки функции $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$, установить их тип.

Решение: Изолированные особые точки функции $z_1=-2$, $z_2=1$.

$$\lim_{z\to -2}\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\lim_{z\to -2}\frac{2z+1}{(z+2)(z-1)}=\infty$$

Тогда $z_1=-2$ - полюс первого порядка (используется теоремы о связи нулей и полюсов).

$$\lim_{z\to 1}\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\lim_{z\to 1}\frac{2z+1}{(z+2)(z-1)}=\infty$$

Тогда $z_1=1$ - полюс первого порядка (используется теоремы о связи нулей и полюсов).

Определение. Точка z_0 называется существенно особой точкой, если в этой точке не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$ при $z\to z_0$.

Перейдем к рассмотрению ***классификации изолированных особых точек по виду главной части ряда Лорана.***

Напомним определение ряда Лорана (материал предыдущего занятия).

Определение. Рядом Лорана называется ряд вида

$$..+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+$$
$$+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

где z_0, c_n – комплексные постоянные, z – комплексная переменная.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots$

называется главной частью ряда Лорана.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$

называется правильной частью ряда Лорана.

Теорема. Точка z_0 является устранимой особой точкой, если в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 отсутствует главная часть, т.е.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Пример. Найти изолированные особые точки функции $f(z)=\frac{sin3z}{z}$. Определить тип особой точки.

Решение. Изолированная особая точка функции $f(z)$ $z_0=0$. Используем разложение в ряд Тейлора функции $sinz$ по степеням z

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad z\epsilon c$$

Получим разложение функции $f(z)$ по степеням z в ряд Лорана (разложение справедливо в кольце $0<|z|<+\infty$).

$$f(z)=\frac{1}{z}\left[(3z)-\frac{(3z)^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{(3z)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right]=$$

$$=3-\frac{9z^2}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{(3z)^{2n}\cdot 3}{(2n+1)!}+\ldots$$

Это разложение не содержит главной части. Точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой.

<u>Теорема.</u> *Точка z_0 является полюсом n-го порядка функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит конечное число слагаемых, т.е.*

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,(z-z_0)^k \text{ , где } c_{-n}\neq 0.$$

<u>Пример</u>. Найти особые точки функции $f(z)=\frac{e^z-1}{z^5}$. Определить тип особой точки.

Решение. Изолированная особая точка функции $f(z)$ $z_0=0$.

Используем разложение в ряд Тейлора для функции e^z

$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ zϵc.

Получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z

$$f(z)=\frac{1}{z^5}\left[1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots-1\right]=$$

$$=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^3 2!}+\frac{1}{z^2 3!}+\frac{1}{z4!}+\frac{1}{5!}+\frac{z}{6!}+\ldots$$

Разложение справедливо в кольце $0<|z|<+\infty$. Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_0=0$ является полюсом четвертого порядка.

<u>Пример</u>. Найти особые точки функции $f(z)=\frac{e^{3z}-1}{z^3}$. Определить тип особой точки.

Решение. Изолированная особая точка функции $f(z)$ $z_0=0$.

Используем разложение в ряд Тейлора для функции e^z

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\left[1+3z+\frac{9z^2}{2!}+\frac{27z^3}{3!}+\frac{81z^4}{4!}+\ldots-1\right]=$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z2!}+\frac{27}{3!}+\frac{81z}{4!}+\ldots-\frac{1}{z^3}=\frac{3}{z^2}+\frac{9}{z2!}+\frac{27}{3!}+\frac{81z}{4!}+\cdots$$

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_0=0$ является полюсом 2-го порядка.

<u>Теорема.</u> Точка z_0 является существенно особой точкой для функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности z_0 содержит бесконечное количество членов.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z)=(z-2)^2e^{\frac{1}{z-2}}$.

Определить тип особой точки.

Решение. Изолированная особая точка функции $f(z)$ $z_0=2$.

Используем разложение $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ zϵc

Получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$

$$f(z)=(z-2)^2\left[1+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{3!(z-2)^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4!(z-2)^4}+\ldots\right]=(z-2)^2+(z-2)+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!(z-2)}+$$

$$+\frac{1}{4!(z-2)^2}+\ldots$$

Разложение справедливо в кольце $0<|z-2|<+\infty$. Это разложение в ряд Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $(z-2)$. Следовательно, точка $z_0=2$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Пример. Найти особые точки функции

$f(z) = (z+6)^5 cos\frac{1}{z+6}$. Определить тип особой точки.

Решение. Изолированная особая точка функции $f(z)$ $z_0 = -6$.

Используем разложение:

$cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, zϵC

Тогда

$$cos\frac{1}{z+6} = 1 - \frac{1}{2!\,(z+6)^2} + \frac{1}{4!\,(z+6)^4} - \frac{1}{6!\,(z+6)^6} + \frac{1}{8!\,(z+6)^8} - \ldots,$$

Имеем следующее разложение функции

$$f(z) = (z+6)^5 \left(1 - \frac{1}{2!\,(z+6)^2} + \frac{1}{4!\,(z+6)^4} - \frac{1}{6!\,(z+6)^6} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8!\,(z+6)^8} - \ldots \right)$$

$$= (z+6)^5 - \frac{(z+6)^3}{2!} + \frac{(z+6)}{4!} - \frac{1}{6!\,(z+6)} + \frac{1}{8!\,(z+6)^3} - \ldots$$

Разложение справедливо в кольце $0 < |z+6| < +\infty$.

Это ряд Лорана, его главная часть

$$-\frac{1}{6!\,(z+6)} + \frac{1}{8!\,(z+6)^3} - \cdots$$

Главная часть полученного ряда Лорана имеет бесконечное количество членов (слагаемых). Выделенная изолированная особая точка $z = -6$ существенно особая точка.

Рассмотрим различные задачи.

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = (z+4)^5 e^{\frac{2}{z+4}}$ и установить их тип.

Решение: Изолированная особая точка функции $z = -4$.

Разложим функцию в ряд по степеням (z+4) в кольце $0 < |z+4| < +\infty$.

$$f(z) = (z+4)^5 e^{\frac{2}{z+4}}$$

$$= (z+4)^5 (1 + \frac{2}{z+4} + \frac{2^2}{2!\,(z+4)^2} + \frac{2^3}{3!\,(z+4)^3} + \frac{2^4}{4!\,(z+4)^4} +$$

$$\frac{2^5}{5!(z+4)^5} + \frac{2^6}{6!(z+4)^6} + \frac{2^7}{7!(z+4)^7} + \cdots) \ldots$$

Раскрываем скобки и получаем

$$f(z) = (z+4)^5 + 2(z+4)^4 + \frac{2^2(z+4)^3}{2!} + \frac{2^3(z+4)^2}{3!} + \frac{2^4(z+4)}{4!} +$$

$$+ \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!(z+4)} + \frac{2^7}{7!(z+4)^2} + \cdots$$

Главная часть полученного ряда Лорана имеет бесконечное количество членов (слагаемых). Выделенная изолированная особая точка $z = -4$ существенно особая точка.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{8z+11}{z^2+3z+2}$ и установить их тип.

Решение. Находим и.о.т. (приравняем знаменатель дроби к нулю): $z_1 = -2$, $z_2 = -1$.

$$\lim_{z \to -2} \frac{8z+11}{z^2+3z+2} = \lim_{z \to -2} \frac{8z+11}{(z+2)(z+1)} = \infty$$

Изолированная особая точка $z_1 = -2$ является полюсом 1-го порядка.

$$\lim_{z \to -1} \frac{8z+11}{z^2+3z+2} = \lim_{z \to -1} \frac{8z+11}{(z+2)(z+1)} = \infty$$

Изолированная особая точка $z_1 = -1$ является полюсом 1-го порядка.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1}{(z^2+5z+6)^2}$ и установить их тип.

Решение. Находим и.о.т. (приравняем знаменатель дроби к нулю): $z_1 = -3$, $z_2 = -2$.

Используем определение и.о.т. через предел функции, также используем теоремы о связи нулей и полюсов функции. Вычислим

$$\lim_{z\to -2}\frac{1}{\left(z^2+5z+6\right)^2}=\lim_{z\to -2}\frac{1}{(z+2)^2(z+3)^2}=\infty$$

Следовательно, изолированная особая точка $z_1=-2$ является полюсом 2-го порядка.

Вычислим $\lim_{z\to -3}\frac{1}{\left(z^2+5z+6\right)^2}=\lim_{z\to -3}\frac{1}{(z+2)^2(z+3)^2}=\infty$

Следовательно, изолированная особая точка $z_1=-3$ является полюсом 2-го порядка.

Выводы.

1). *Выделяют 3 типа изолированных особых точек:*

- *устранимая особая точка*
- *полюс n-го порядка*
- *существенно особая точка.*

2). *Каждый тип можно установить*:

- путем вычисления предела функции при $z\to z_0$ (z_0 – изолированная особая точка);
- путем разложения функции в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$ и выделения главной части.

Замечание. Для успешного вычисления предела функции необходимо повторить методы вычисления пределов, в частности, основные эквивалентности.