12. Контрольная работа №2

Примерный вариант контрольной работы №2

Пример 12.1. *В урне из 15 шаров 3 белых. Шар извлекают, смотрят цвет и кладут на место. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины ξ — числа извлечённых белых шаров при 8 подходах и вероятность того, что белый шар появится не менее двух раз.*

Пример 12.2. *Лампочки проверяют до первой бракованной, но всего имеется 5 лампочек. Составить ряд распределения дискретной случайной величины ξ –– числа проверенных лампочек. Вероятность работы любой лампочки равна 0,8. Найти функцию распределения д.с.в. $\xi, M(\xi), D(\xi)$ и построить её график.*

Пример 12.3. *Непрерывная случайная величина ξ задаётся плотностью распределения вероятностей* $f(x) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{A}{1+x^2}, & x \in (-1;1], \\ 0, & x \notin (-1;1]. \end{array}\right.$ *Найти вероятность попадания ξ в интервал* $(0;\sqrt{3}/3)$.

Пример 12.4. *Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 4$. Найти функцию распределения $F(x)$ н.с.в. ξ, $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(0{,}25 \leqslant \xi \leqslant 0{,}75)$ и отобразить графически полученное решение.*

Пример 12.5. *Дискретные случайные величины ξ и η независимы. Найти ряд распределения дискретной случайной величины $\theta = 2\xi - 4\eta$, математическое ожидание и дисперсию θ. Ряды распределения д.с.в. ξ и η равны:*

ξ	0	1	2
P	0,5	0,25	0,25

η	-1	0
P	0,5	0,5

Пример 12.6. *Непрерывный случайный вектор $(\xi;\eta)$ задаётся плотностью распределения вероятностей*

$$f(x,y) = \left[\begin{array}{ll} A\cos x\cos y, & (x,y) \in D : \{x \in (0;\pi/2], y \in (0;\pi/2]\}, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{array}\right.$$

Найти функции плотности распределения случайных величин $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ и схематически постройте их графики. Найдите $M(\xi)$ и $M(\eta)$.

Решение примерного варианта контрольной работы №2

Пример 12.1. *В урне из 15 шаров 3 белых. Шар извлекают, смотрят цвет и кладут на место. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины ξ — числа извлечённых белых шаров при 8 подходах и вероятность того, что белый шар появится не менее двух раз.*

Необходимый теоретический материал из лекции 4.

Пусть проведено n независимых испытаний с вероятностью p появления события A в каждом испытании (испытания Бернулли). Обозначим ξ – случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях. По формуле Бернулли

$$P\{\xi = m\} = P(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1-p,\ m = 0,1,\ \dots, n. \quad (12.1)$$

Определение 12.1. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое нижеприведенной таблицей, называется биномиальным.*

ξ	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$	n
p	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2p^2q^{n-2}$	$\dots$	$C_n^kp^kq^{n-k}$	$\dots$	p^k

$$M(\xi) = M(\xi_1) + \ldots + M(\xi_n) = n \cdot p,$$
$$D(\xi) = D(\xi_1) + \ldots + D(\xi_n) = n \cdot p \cdot q.$$

►

Найдём искомые вероятности по формуле Бернулли при $n = 8$, $p = \dfrac{3}{15} = 0{,}2$.

$$P_8(0) = 0{,}8^8 = 0{,}16777216; \quad P_8(1) = 8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}3355443.$$

Пусть A искомое событие. Тогда
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (P_8(0) + P_8(1)) = 0.4967$

По формулам (9.2) находим:

$$M(\xi) = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6; \quad D(\xi) = nqp = 8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 1{,}28.$$

Ответ: $P(A) \approx 0.4967$, $M(\xi) = 1{,}6$, $D(\xi) = 1{,}28$.

◄

Пример 12.2. *Лампочки проверяют до первой бракованной, но всего имеется 5 лампочек. Составить ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа проверенных лампочек. Вероятность работы любой лампочки равна 0,8. Найти функцию распределения д.с.в. $\xi, M(\xi), D(\xi)$ и построить её график.*

►Случайная величина ξ может принимать следующие значения: 1, 2, 3, 4, 5. Найдем вероятности, с которыми она принимает эти значения. Здесь имеет место геометрическое распределение, где $p = 0{,}8,\ \ q = 0{,}2$.

$P\{\xi = 1\}$ есть вероятность, что первая лампочка оказалась бракованной. Значение этой вероятности, согласно условию, равна 0,2;
$P\{\xi = 1\} = 0{,}2;\ \ P\{\xi = 2\} = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16;$
$P\{\xi = 3\} = 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128;$
$P\{\xi = 4\} = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}1024.$

Событие состоящее в том, что будут проверены все пять лампочек будет состоять из двух событий: первые четыре лампочки исправны, а пятая неисправна и все пять исправны.

Данная вероятность равна
$P(\{\xi = 5\}) = 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 + 0{,}8^5 = 0{,}081292 + 0{,}32768 = 0{,}4096.$

Таким образом, ряд распределения имеет вид:

ξ	1	2	3	4	5
p	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

$M(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k p_k = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}16 + 3 \cdot 0{,}128 + 4 \cdot 0{,}1024 + 5 \cdot 0{,}4096 =$
$= 3{,}3616.$

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi).$

$M(\xi^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2 p_k = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}16 + 9 \cdot 0{,}128 + 16 \cdot 0{,}1024 +$
$+ 25 \cdot 0{,}4096 = 13{,}8704.$

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 13{,}8704 - 3{,}3616^2 \approx 2{,}57.$

Найдём теперь функцию распределения $F(x) = P(\xi < x)$.

При $x \leqslant 1$ функция $F(x) = 0$, так как ξ не принимает значений, меньших единицы. Если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 1) =$ $= 0{,}2$. Если $2 < x \leqslant 3$, то событие, заключающееся в том, что случайная величина ξ удовлетворяет неравенству $\xi < x$, можно представить как сумму двух несовместных событий: $\xi < 2$ и $2 \leqslant \xi < 3$. Поэтому по теореме сложения имеем:

$F(x) = P(\xi < x) = P\{(\xi < 2) + (2 \leqslant \xi < 3)\} =$
$P(\xi < 2) + P(2 \leqslant \xi < 3) = 0{,}36$ и так далее.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\leqslant 1,\\ 0{,}2, & \text{при} \quad 1<x\leqslant 2,\\ 0,36, & \text{при} \quad 2<x\leqslant 3,\\ 0,488, & \text{при} \quad 3<x\leqslant 4,\\ 0,5094, & \text{при} \quad 4<x\leqslant 5,\\ 1, & \text{при} \quad 5<x. \end{cases}$$

График этой функции $F(x)$ является ступенчатой линией со скачками в точках $x = k, k = 1,2,3,4,5$, равными вероятностям $P(\xi = k)$, рис. 37. ◄

Пример 12.3. *Непрерывная случайная величина* ξ *задаётся плотностью распределения вероятностей* $f(x) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{A}{1+x^2}, & x\in(-1;1],\\ 0, & x\notin(-1;1]. \end{array}\right.$ *Найти вероятность попадания* ξ *в интервал* $(0;\sqrt{3}/3)$. *Построить графики функции плотности вероятностей и функции распределения вероятностей.*

►Для нахождения A воспользуемся свойством плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{A}{1+x^2}dx = 1 \Leftrightarrow A\arctan x\Big|_{-1}^{1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$A(\arctan(1)-\arctan(-1)) = A\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = A\pi/2. \Rightarrow A = \frac{2}{\pi}. \Rightarrow$$

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & x\in(-1;1],\\ 0, & x\notin(-1;1]. \end{array}\right.$$

График плотности $f(x)$ изображен на рис.38.

Для нахождения функции распределения $F(x)$, связанной с плотностью формулой $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, рассмотрим три возможных случая расположения x:

$$(1)\ \ x\leqslant -1 \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

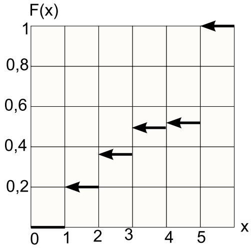

Рис. 37. $F(x)$

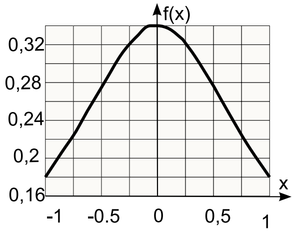

Рис. 38. $f(x)$

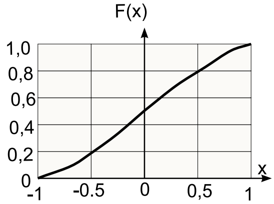

Рис. 39. $F(x)$

$$(2)\ -1 < x \leqslant 1 \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dt + \int\limits_{-1}^{x} \frac{2}{\pi(1+t^2)} dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \arctan t \Big|_{-1}^{x} = \frac{2}{\pi}\left(\arctan x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2\arctan x}{\pi};$$

$$(3)\ 1 < x \Rightarrow F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dt + \int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{\pi(1+t^2)} dt + \int\limits_{1}^{x} 0dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} (\arctan t) \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Окончательно получаем:

$$F(x) = \left[\begin{array}{lll} 0 & \text{при} & x \leqslant -1; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{2\arctan x}{\pi} & \text{при} & 0 < x \leqslant 1; \\ 1 & \text{при} & 1 < x. \end{array}\right.$$

График $F(x)$ представлен на рис.39.

$$P\left(x \in (0; \sqrt{3}/3)\right) = F(\sqrt{3}/3) - F(0) = \left(0{,}5 + \frac{2\arctan(\sqrt{3}/3)}{\pi}\right) -$$

$$- \left(0{,}5 + \frac{2\arctan(0)}{\pi}\right) = \frac{2\pi/6}{\pi} = 1/3.$$

Ответ: $A = \dfrac{1}{\pi}$, $P(x \in (0; \sqrt{3}/3) = 1/3$. ◀

Пример 12.4. *Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 4$. Найти функцию распределения $F(x)$ н.с.в. ξ, $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(0{,}25 \leqslant \xi \leqslant 0{,}75)$ и отобразить графически полученное решение.*

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Определение 12.2. *Распределение непрерывной случайной величины называется экспоненциальным (показательным), если плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \textit{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \textit{при} \quad x < 0, \quad \textit{где } \lambda > 0. \end{cases} \tag{12.2}$$

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром $\lambda > 0$.

Математическое ожидание и дисперсия равны

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \frac{1}{\lambda^2} = \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

►

Найдем функцию распределения:

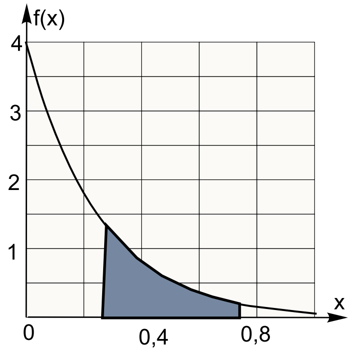

Рис. 40. *Функция* $f(x)$

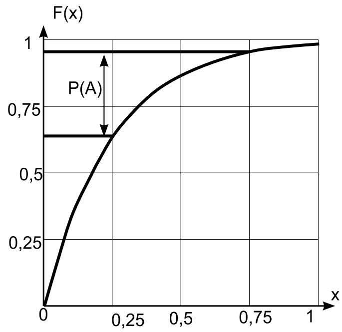

Рис. 41. *Функция* $F(x)$

$$\text{при } x \geqslant 0 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} 4e^{-4t}dt = -e^{-4t}\Big|_0^x = 1 - e^{-4x};$$

$$\text{при } x < 0 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda} = 0{,}25.$$

$$D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2} = 0{,}625.$$

$P(0{,}25 \leqslant \xi \leqslant 0{,}75) = F(0{,}75) - F(0{,}25) =$
$= (1 - e^{-4\cdot 0{,}75}) - (1 - e^{-4\cdot 0{,}25}) = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e^3} \approx 0{,}233$. На рис. 40 изображен график функции плотности данного распределения. Искомая вероятность равна закрашенной области. На рис. 41 представлен график функции распределения. Искомая вероятность рана приращению функции $F(0,75) - F(0,25)$. ◀

Пример 12.5. *Дискретные случайные величины ξ и η независимы. Найти ряд распределения дискретной случайной величины $\theta = 2\xi - 4\eta$, математическое ожидание и дисперсию θ. Ряды распределения д.с.в. ξ и η равны:*

ξ	*0*	*1*	*2*
P	*0,5*	*0,25*	*0,25*

η	*-1*	*0*
P	*0,5*	*0,5*

▶

Ряды распределения д.с.в. 2ξ и -4η равны:

2ξ	0	2	4
P	0,5	0,25	0,25

-4η	0	4
P	0,5	0,5

$M(\xi) = 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}75$.

$M(\eta) = -1 \cdot 0{,}5 = -0{,}5$.

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 1^2 \cdot 0{,}25 + 2^2 \cdot 0{,}25 - (0{,}75)^2 = 0{,}25 + 1 - 0{,}5625 = 0{,}6875$.

$D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta) = (-1)^2 \cdot 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$.

Случайная величина $\theta = 2\xi - 4\eta$ принимает следующие значения: $\theta = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Найдём вероятности

$P(\theta = 0) = P(2\xi = 0) \cdot P(-4\eta = 0) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.
$P(\theta = 2) = P(2\xi = 2) \cdot P(-4\eta = 0) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$.
$P(\theta = 4) = P(2\xi = 0) \cdot P(-4\eta = 4) + P4\xi = 0 \cdot P(-4\eta = 0) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}375$.
$P(\theta = 6) = P(2\xi = 2) \cdot P(-4\eta = 4) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$.
$P(\theta = 8) = P(2\xi = 4) \cdot P(-4\eta = 4) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$.

θ	0	2	4	6	8
P	0,25	0,125	0,375	0,125	0,125

$M(\theta) = 0{\cdot}0{,}25 + 2{\cdot}0{,}125 + 4{\cdot}0{,}375 + 6{\cdot}0{,}125 + 8{\cdot}0{,}125 = 16{\cdot}0{,}125 + 1{,}5 = 3{,}5$.

$D(\theta) = 4 \cdot 0{,}125 + 16 \cdot 0{,}375 + 36 \cdot 0{,}125 + 64 \cdot 0{,}125 - (3{,}5)^2 = = 19 - 12{,}25 = 6{,}75$.

Найдём теперь $M(\theta)$ и $D(\theta)$ используя свойства математического ожидания и дисперсии.

$M(\theta) = 2 \cdot M(\xi) - 4 \cdot M(\eta) = 2 \cdot 0{,}75 + 4 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$.

$D(\theta) = 2^2 \cdot D(\xi) + (-4)^2 \cdot D(\eta) = 4 \cdot 0{,}6875 + 16 \cdot 0{,}4375 = 6{,}75$.

результаты совпали. ◄

Пример 12.6. *Непрерывный случайный вектор* $(\xi;\eta)$ *задаётся плотностью распределения вероятностей*

$$f(x,y) = \left[\begin{array}{ll} A\cos x\cos y, & (x,y) \in D : \{x \in (0;\pi/2], y \in (0;\pi/2]\}, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{array}\right.$$

Найти функции плотности распределения случайных величин $f_\xi(x)$ *и* $f_\eta(y)$ *и схематически постройте их графики. Найдите* $M(\xi)$ *и* $M(\eta)$.

►

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1 \Rightarrow A\int\limits_0^{\pi/2}(\cos x)dx\int\limits_0^{\pi/2}(\cos y)dy = A\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos x)dx\right)^2 =$$

$$= A\left(\sin x\Big|_0^{\pi/2}\right)^2 = A \Rightarrow A = 1.$$

Формулы $M(\xi)$ и $M(\eta)$.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx. \quad M(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} yf_\eta(y)dxdy.$$

Найдём функции плотности распределения случайных величин $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cos y dy = \cos x\sin y\Big|_0^{\pi/2} = \cos x.$$

$$f_\eta(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cos y dx = \cos y\sin x\Big|_0^{\pi/2} = \cos y.$$

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx = \int\limits_0^{\pi/2} x d(\sin x) =$$

$$= x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = \pi/2 + \cos x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \pi/2 - 1.$$

$$M(\eta) = \pi/2 - 1. \blacktriangleleft$$

Задания для самостоятельной работы

Решите вариант контрольной работы №2

Пример 12.7. *Детали проверяются до появления первой бракованной (число деталей неограниченно). Вероятность бракованной детали 0,1. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины ξ — числа проверенных деталей и вероятность того, что будет проверено более четырёх деталей. Отобразить графически полученное решение.*

Пример 12.8. *Вероятность искажения «точки» при передаче сигнала 0,1, искажения «тире» 0,2. Найти ряд распределения дискретной случайной величины ξ — числа искажений при передаче сигнала из трёх точек и одного тире. Найти функцию распределения д.с.в. ξ, $M(\xi)$, $D(\xi)$ и построить её график.*

Пример 12.9. *Непрерывная величины ξ задана функцией распределения $F(x) = \left[\begin{array}{ll} Ax^4, & x \in (0;2], \\ 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x \geqslant 2 \end{array}\right.$. Найти параметр A, функцию плотности распределения н.с.в. ξ, вероятность попадания ξ, в $[-2; 1,5]$, $M(\xi)$, $D(\xi)$ и построить её график.*

Пример 12.10. *Найти среднеквадратичную ошибку измерений, если известно, что, с вероятностью 0,95, ошибка составит не более 1 см (по модулю). Систематическая ошибка отсутствует, случайные ошибки распределены по нормальному закону. Результат отобразить графически.*

ξ/η	-2	0	2
-4	0	0	0,125
-2	0,25	0,25 0	0
0	0	0,25 0	0,125

Пример 12.11. *Найти ряды распределения случайных величин* ξ, η, $\xi + \eta$. *Выяснить, зависимы ли величины* ξ *и* η.

Пример 12.12. *Непрерывный случайный вектор* (ξ, η) *равномерно распределён в области* $D : \{x^2 + y^2 \leqslant 16\}$. *Найти вероятность попадания случайной точки в область* $D : \{|x| - |y| \leqslant 2\}$.