

ДИСЦИПЛИНА	Радиотехнические цепи и сигналы часть 2
	полное название дисциплины без аббревиатуры
ИНСТИТУТ	Радиотехнических и телекоммуникационных систем
КАФЕДРА	радиоволновых процессов и технологий
	полное название кафедры
ГРУППА/Ы	РРБО-1-3-18; РССО-1-3-18
	номер групп/ы, для которых предназначены материалы
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	Лекция №4
	лекция; материал к практическим занятиям; контрольно-измерительные материалы к практическим занятиям; руководство к КР/КП, практикам
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	Исаков Владимир Николаевич
	фамилия, имя, отчество
СЕМЕСТР	6
	указать номер семестра обучения

4. Спектральный анализ дискретных сигналов

4.1. Дискретизация спектра сигнала. Теорема Котельникова в частотной области

Теорема (Котельникова в частотной области): Спектр $S(\omega)$ сигнала $s(t)$ ограниченной длительности τ_u полностью определяется своими дискретными значениями $\{S(n\Omega)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, взятыми с интервалом $\Omega \leq \frac{2\pi}{\tau_u}$ и может быть представлен рядом Котельникова в частотной области:

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n\Omega) \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Omega} (\omega - n\Omega) \right] \quad (4.1)$$

Доказательство

Рассмотрим сигнал ограниченной длительности $s(t)$ (рис.5.1) и соответствующий сигнал $s_{\Pi}(t)$, полученный его периодическим повторением с периодом $T_{\Pi} = \frac{2\pi}{\Omega}$ (рис.4.2-4).

Периодический сигнал $s_{\Pi}(t)$ представим рядом Фурье в комплексной форме:

$$s_{\Pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\Omega t}, \quad (4.2)$$

где $C_n = \frac{1}{T} S(n\Omega)$.

При выполнении условия теоремы $\Omega \leq \frac{2\pi}{\tau_u}$ периодизация сигнала происходит без наложения повторяющихся копий исходного сигнала и соответствует рис.4.2 и 4.3. так как $T_{\Pi} \geq \tau_u$, при этом на интервале $\left[-\frac{T_{\Pi}}{2}, \frac{T_{\Pi}}{2}\right]$ имеет место равенство $s(t) = s_{\Pi}(t)$. С учётом этого для спектральной плотности сигнала запишем:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_{\Pi}/2}^{T_{\Pi}/2} s_{\Pi}(t) e^{-j\omega t} dt.$$

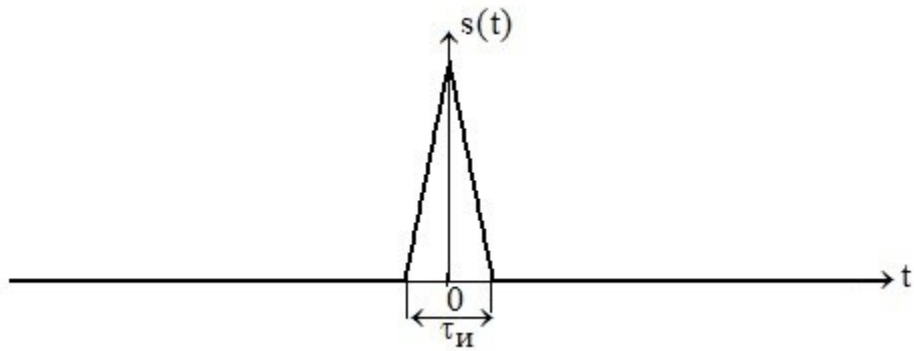


Рис.4.1. Сигнал с ограниченной длительностью

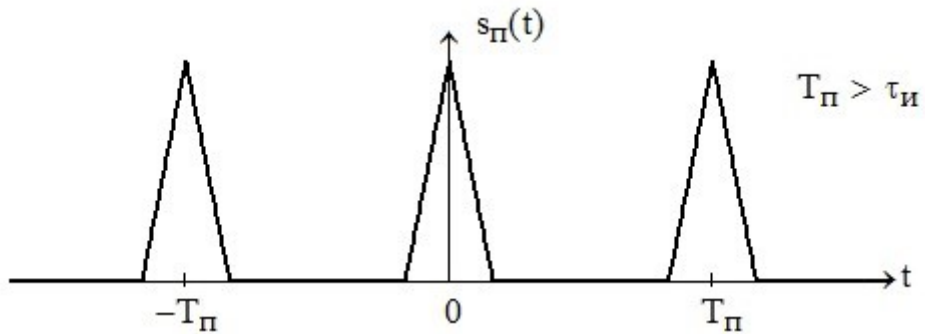


Рис.4.2. Периодический сигнал при $T_{\Pi} > \tau_u$

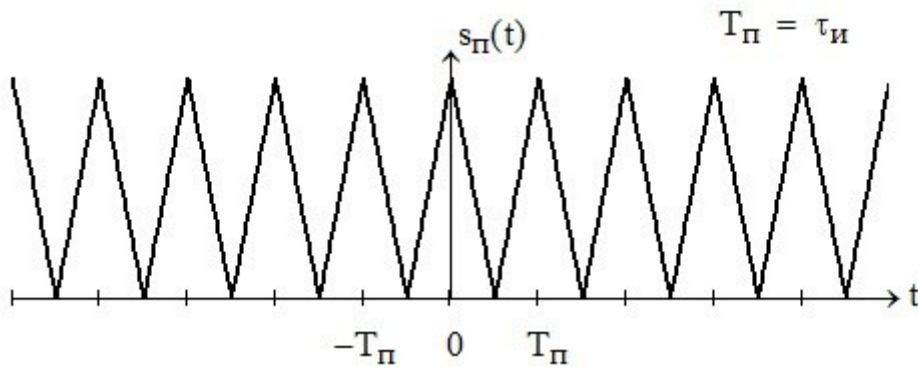


Рис.4.3. Периодический сигнал при $T_{\Pi} = \tau_u$

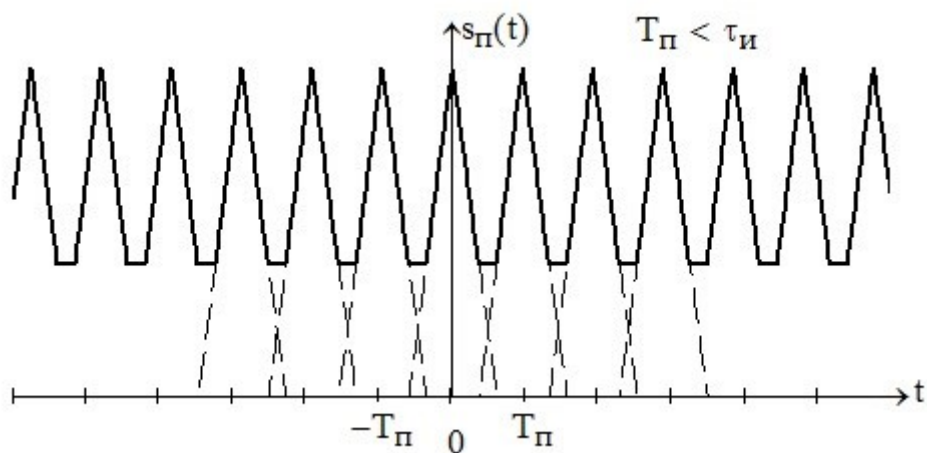


Рис.4.4. Периодический сигнал при $T_{\Pi} < \tau_u$

Подставим в последнее выражение $s_{\Pi}(t)$ в виде (4.2) и преобразуем:

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \int_{-\frac{T_{\Pi}}{2}}^{\frac{T_{\Pi}}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\Omega t} e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \int_{-\frac{T_{\Pi}}{2}}^{\frac{T_{\Pi}}{2}} e^{-j(\omega-n\Omega)t} dt = \\
 &= - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \frac{e^{-j(\omega-n\Omega)t}}{j(\omega-n\Omega)} \bigg|_{-\frac{T_{\Pi}}{2}}^{\frac{T_{\Pi}}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n T_{\Pi} \operatorname{sinc} \left[\frac{T_{\Pi}}{2} (\omega - n\Omega) \right] = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n\Omega) \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\Omega} (\omega - n\Omega) \right].
 \end{aligned}$$

Полученный результат совпадает с (4.1).

Сделаем несколько замечаний к доказанной теореме.

Переход от сплошного спектра к дискретному соответствует периодизации сигнала. Если условие $\Omega \leq \frac{2\pi}{\tau_u}$ не выполняется, то

происходит наложение периодически повторяющихся копий исходного сигнала – так называемый эффект наложения во временной области. В условиях наложения невозможно однозначно установить спектру какого сигнала принадлежит заданная совокупность отчётов, а, следовательно, и восстановить спектр: результат восстановления спектра зависит от того, какой из сигналов мы выберем в качестве образующего периодическую последовательность.

Теорема Котельникова в частотной области может рассматриваться как следствие из теоремы Котельникова и свойства симметрии преобразования Фурье.

Доказанная теорема относится в равной мере как к спектрам аналоговых сигналов, так и к спектрам дискретных сигналов, то есть речь идёт о дискретизации сплошных спектров вообще. Переход к дискретному спектру является основой методов цифровой обработки сигналов в частотной области.

4.2. Спектральное представление дискретных сигналов

Будем рассматривать дискретные сигналы в виде числовых последовательностей $s = \{s[n]\}_{n=0}^{N-1}$ длины N . Определим для них операцию сложения и умножения на число поэлементно:

$$\begin{aligned} \{s_1[n]\}_{n=0}^{N-1} + \{s_2[n]\}_{n=0}^{N-1} &= \{s_1[n] + s_2[n]\}_{n=0}^{N-1}, \\ \lambda \{s[n]\}_{n=0}^{N-1} &= \{\lambda s[n]\}_{n=0}^{N-1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Нулевой элемент

$$0 = \{s[n] = 0\}_{n=0}^{N-1}. \quad (4.4)$$

Нетрудно убедиться, что рассматриваемая совокупность дискретных сигналов образует линейное пространство размерности N , поскольку для представления любого сигнала достаточно N базисных элементов вида: $\{1, 0, \dots, 0\}; \{0, 1, \dots, 0\}; \dots \{0, 0, \dots, 1\}$.

Введём скалярное произведение:

$$(s_1, s_2) = \sum_{n=0}^{N-1} s_1[n] s_2^*[n]. \quad (4.5)$$

Убедимся, что введённая операция обладает свойствами скалярного произведения:

1. $(s_1, s_2)^* = \left(\sum_{n=0}^{N-1} s_1[n] s_2^*[n] \right)^* = (s_2, s_1);$
2. $(\alpha s_1 + \beta s_2, s_3) = \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha s_1[n] + \beta s_2[n]) s_3^*[n] = \alpha (s_1, s_3) + \beta (s_2, s_3);$
3. $(s, s) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] s^*(n) = \sum_{n=0}^{N-1} |s[n]|^2 \geq 0.$

Норма, порождённая скалярным произведением:

$$\|s\| = \sqrt{(s, s)} = \sum_{n=0}^{N-1} |s[n]|^2. \quad (4.6)$$

Рассмотрим в линейном пространстве дискретных сигналов конечной длины N систему решетчатых функций вида:

$$\varphi_k = \{\varphi_k[n]\}_{n=0}^{N-1} = \left\{ e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \right\}_{n=0}^{N-1}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (4.7)$$

Данная система функций ортогональна, действительно:

$$\begin{aligned}
 (\varphi_k, \varphi_m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k[n] \varphi_m^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \begin{cases} N, k = m \\ 1 + e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)} + \dots + e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)(N-1)}, k \neq m \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Рассматривая сумму в последнем выражении, как сумму первых N членов геометрической прогрессии с начальным членом 1 и знаменателем $e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}$, получим:

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \begin{cases} N, k = m \\ \frac{1 - e^{j2\pi(k-m)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}}, k \neq m \end{cases} = \begin{cases} N, k = m \\ 0, k \neq m \end{cases}.$$

Квадрат нормы рассматриваемых функций

$$\|\varphi_k\|^2 = N, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (4.8)$$

Система функций (5.7) не только ортогональна, но и полна, так как количество функций в системе совпадает с размерностью пространства N , поэтому образует ортогональный базис, то есть любой сигнал в рассматриваемом пространстве может быть представлен в виде:

$$s = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \varphi_k,$$

где $C_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} (s, \varphi_k)$. Обозначив $S_d[k] = NC_k$, подставив базисные функции и развернув скалярное произведение, последние выражения перепишем как:

$$S_d[k] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (4.9a)$$

$$s[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_d[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (4.9b)$$

Пара выражений (4.9) определяет взаимно-однозначное преобразование последовательностей $\{s[n]\}_{n=0}^{N-1}$ и $\{S_d[k]\}_{k=0}^{N-1}$. Преобразование (4.9а) называется прямым дискретным преобразованием Фурье (ДПФ). Преобразование (4.9б) называется обратным дискретным преобразованием Фурье (ОДПФ).

Сокращённо соответствие в смысле (4.9) обозначается как $s[n] \leftrightarrow S_d[k]$, прямое ДПФ $S_d[k] = DFT\{s[n]\}$, обратное $s[n] = DFT^{-1}\{S_d[k]\}$ от английского «Discrete Fourier Transform».

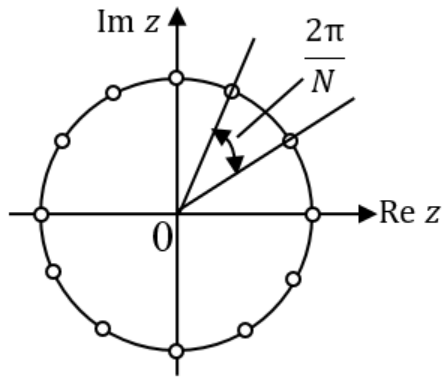
Как видно из (5.9б) при ДПФ дискретный сигнал представляется в виде совокупности комплексных гармонических дискретных сигналов с частотами $\Omega_k = \frac{2\pi}{NT}k$ с амплитудами $\frac{1}{N}|S_d[k]|$ и начальными фазами $\varphi_{S_d}[k] = \arg S_d[k]$. Сами значения $\frac{1}{N}S_d[k]$ при этом имеют смысл комплексных амплитуд комплексных гармоник сигнала. В случае, когда рассматриваются действительные сигналы возможна и тригонометрическая, более наглядная, форма ОДПФ:

$$\begin{aligned} s[n] = \operatorname{Re} s[n] &= \operatorname{Re} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_d[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |S_d[k]| \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk + \varphi_{S_d}[k]\right). \end{aligned}$$

Последовательность $\{S_d[k]\}_{k=0}^{N-1}$ называется комплексным дискретным спектром дискретного сигнала. Последовательность $\{|S_d[k]|\}_{k=0}^{N-1}$ называется амплитудным дискретным спектром дискретного сигнала. Последовательность $\{\varphi_{S_d}[k]\}_{k=0}^{N-1}$ называется фазовым дискретным спектром дискретного сигнала.

ДПФ связано с Z-преобразованием дискретного сигнала:

$$S_d[k] = S(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] z^{-n} \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad (4.10)$$

Рис.4.5. z -плоскость

В соответствии с (4.10) ДПФ можно рассматривать как Z – преобразование сигнала, взятое в N точках, равномерно распределённых на единичной окружности комплексной z - плоскости (рис.4.5).

Если снять ограничения на изменение дискретных переменных n, k в (4.9), то нетрудно убедиться, что дискретное преобразование

Фурье связывает две периодические последовательности периода N . В дальнейшем, если не оговорено особо будем считать n и k целыми числами.

4.3. Основные свойства ДПФ

Рассмотрим некоторые основные свойства ДПФ. Особое внимание следует обратить на то, что свойства ДПФ формулируются именно для неограниченных n и k , а последовательности $\{s[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{s_{1,2,3}[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ и $\{S_d[k]\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, $\{S_{d1,2,3}[k]\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ рассматриваются периодическими с периодом N .

4.3.1. Линейность

$$DFT\{k_1 s_1[n] + k_2 s_2[n]\} = k_1 DFT\{s_1[n]\} + k_2 DFT\{s_2[n]\}. \quad (4.11)$$

Доказательство свойства линейности может быть осуществлено непосредственной подстановкой в (4.9). Выполнение свойства линейности означает, что линейной комбинации сигналов соответствует такая же линейная комбинация их дискретных комплексных спектров.

5.3.2. Циклический сдвиг

$$DFT\{s[n-m]\} = DFT\{s[n]\} e^{-j\frac{2\pi}{N}km}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.12)$$

Для доказательства рассмотрим ОДПФ сигнала со сдвигом

$$s[n-m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_d[k] e^{j\frac{2\pi}{N}(n-m)k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(S_d[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} =$$

$$= DFT^{-1} \left\{ S_d[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} mk} \right\},$$

откуда в виду взаимной однозначности ДПФ следует (4.12).

4.3.3. Циклическая свёртка

Циклическая свёртка определяется для двух дискретных сигналов периода N выражением

$$s_1 * s_2[n] = \sum_{n'=0}^{N-1} s_1[n'] s_2[n - n'] = \sum_{n'=0}^{N-1} s_1[n - n'] s_2[n']. \quad (4.13)$$

В результате выполнения циклической свёртки получается дискретный сигнал с периодом N .

Циклической свёртке сигналов соответствует произведение их ДПФ:

$$DFT\{s_1 * s_2[n]\} = DFT\{s_1[n]\} DFT\{s_2[n]\}. \quad (4.14)$$

Действительно, учетом свойств линейности и циклического сдвига имеем:

$$\begin{aligned} DFT\{s_1 * s_2[n]\} &= DFT \left\{ \sum_{n'=0}^{N-1} s_1[n'] s_2[n - n'] \right\} = \\ &= \sum_{n'=0}^{N-1} s_1[n'] DFT\{s_2[n - n']\} = DFT\{s_2[n]\} \sum_{n'=0}^{N-1} s_1[n'] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn'} = \\ &= DFT\{s_1[n]\} DFT\{s_2[n]\}. \end{aligned}$$

4.4. Спектральная плотность дискретного сигнала и дискретное преобразование Фурье

Для определения спектра дискретного сигнала рассмотрим его преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} S_d(\omega) &= F\{s_d(t)\} = F \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \delta(t - nT) \right\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) F\{\delta(t - nT)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) e^{-j\omega nT} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n] e^{-j\omega nT}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Полученное выражение позволяет определить спектральную плотность дискретного сигнала, когда известна последовательность $\{s[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$.

Спектральная плотность дискретного сигнала, к которому применимо Z – преобразование может быть выражена через последнее. Сравнивая выражения для спектра и Z – преобразования такого сигнала

$$S_d(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} s[n]e^{-j\omega nT} \quad \text{и} \quad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} s[n]z^{-n},$$

установим, что

$$S_d(\omega) = S(z)|_{z=e^{j\omega T}} = S(e^{j\omega T}). \quad (4.16)$$

Запись $S(e^{j\omega T})$ часто также используется как обозначение спектральной плотности дискретного сигнала. Спектральная плотность дискретного сигнала, таким образом, является его Z – преобразованием, рассматриваемым на единичной окружности комплексной плоскости параметра z .

Структура (4.15) такова, что $S_d(\omega)$ можно рассматривать и как функцию нормированной частоты ωT . Один период спектра дискретного сигнала занимает интервал $[0, \omega_d]$ при этом ωT изменяется от нуля до 2π .

Рассмотрим теперь сигналы ограниченной длительности τ_u так, что ненулевые отсчёты имеют номера $n = 0, \dots, N-1$ и $N \gg 1$, при этом $\tau_u = (N-1)T \approx NT$. Дискретизируем спектр такого сигнала с максимальным шагом дискретизации $\Omega = \frac{2\pi}{\tau_u} = \frac{2\pi}{NT}$, при этом

$$\Omega T = \frac{2\pi}{N}. \quad (4.17)$$

Из (4.15) получим отсчёты спектра:

$$S_d(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]e^{-jk\Omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = DFT\{s[n]\} = S_d[k].$$

Последняя запись показывает, что ДПФ последовательности

$\{s[n]\}_{n=0}^{N-1}$ даёт дискретные значения спектра $S_d(\omega)$, взятые с максимальным шагом.

4.5. Быстрое преобразование Фурье

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) – это алгоритм, позволяющий сократить количество операций умножения при вычислении ДПФ. Как видно из (4.9а), для расчёта значений $\{S_d[k]\}_{k=0}^{N-1}$ требуется N^2 операций комплексного умножения (N умножений при однократном расчёте суммы, и эту сумму требуется посчитать N раз). Существует большое количество различных алгоритмов БПФ, в данном разделе будет рассмотрен только один пример БПФ по основанию 2, то есть предполагается, что N является натуральной степенью числа 2.

Введём обозначение $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ и отметим некоторые свойства этой величины:

$$W_N^2 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}; \quad (4.18a)$$

$$W_N^{N/2} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^{N/2} = e^{-j\pi} = -1; \quad (4.18б)$$

$$W_N^{(N/2+m)} = W_N^{N/2} W_N^m = -W_N^m. \quad (4.18в)$$

В последовательности $\{s[n]\}_{n=0}^{N-1}$ выделим две подпоследовательности так, чтобы одна $\{s_q[n]\}_{n=0}^{N/2-1}$ содержала только члены исходной последовательности с чётными номерами, а другая $\{s_n[n]\}_{n=0}^{N/2-1}$ – только с нечётными:

$$s_q[n] = s[2n];$$

$$s_n[n] = s[2n+1], \quad n = 0, \dots, N/2-1.$$

С учётом введённых обозначений преобразуем (4.9а):

$$\begin{aligned}
S_d[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} s[n]W_N^{nk} = \sum_{\substack{n=0 \\ n-\text{чётное}}}^{N-1} s[n]W_N^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ n-\text{нечётное}}}^{N-1} s[n]W_N^{nk} = \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} s[2n]W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} s[2n+1]W_N^{(2n+1)k} = \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} s_q[n](W_N^2)^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} s_h[n](W_N^2)^{nk} W_N^k = \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} s_q[n]W_{N/2}^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} s_h[n]W_{N/2}^{nk} W_N^k = \\
&= S_q[k] + W_N^k S_h[k], \quad k = 0, \dots, N-1,
\end{aligned}$$

где $S_q[k] = DFT\{s_q[n]\}$ и $S_h[k] = DFT\{s_h[n]\}$ - $N/2$ - точечные ДПФ подпоследовательностей. Рассмотрим подробнее процедуру вычисления ДПФ с помощью полученной формулы, представленную в табл. 4.1. Номерам $k = 0, \dots, N/2 - 1$ соответствует один период $N/2$ -точечного ДПФ подпоследовательностей. Дальнейшие вычисления при $k = N/2, \dots, N-1$ соответствуют уже второму периоду $N/2$ -точечного ДПФ подпоследовательностей.

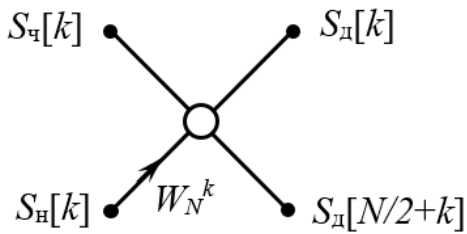


Рис.4.6. Базовая операция при БПФ

При этом значения $S_q[k]$ и $S_h[k]$ заново вычислять нет никакой необходимости, поскольку они были вычислены на первом периоде. Таким образом значения $S_d[k]$ и $S_d[N/2+k]$ могут быть получены в единой вычислительной процедуре вида:

$$\begin{aligned}
S_d[k] &= S_q[k] + W_N^k S_h[k] \\
S_d[N/2+k] &= S_q[k] - W_N^k S_h[k]
\end{aligned}, \quad k = 0, \dots, N/2 - 1, \quad (4.19)$$

сразу же, как только вычислены $S_q[k]$ и $S_h[k]$, с выполнением только одного комплексного умножения для получения $W_N^k S_h[k]$, что схематично изображают как показано на рис.4.6. Ввиду внешнего сходства рассматриваемую процедуру иногда называют «бабочка».

Таблица 4.1.

Процедура вычисления ДПФ

$k = 0$	$S_d[0] = S_q[0] + W_N^0 S_H[0]$	Первый период $N/2$ -точечного ДПФ
$k = 1$	$S_d[1] = S_q[1] + W_N^1 S_H[1]$	
$k = 2$	$S_d[2] = S_q[2] + W_N^2 S_H[2]$	
...	...	
$k = \frac{N}{2} - 1$	$S_d\left[\frac{N}{2} - 1\right] = S_q\left[\frac{N}{2} - 1\right] + W_N^{N/2-1} S_H\left[\frac{N}{2} - 1\right]$	
$k = \frac{N}{2}$	$S_d\left[\frac{N}{2}\right] = S_q\left[\frac{N}{2}\right] + W_N^{N/2} S_H\left[\frac{N}{2}\right] =$ $= S_q[0] - W_N^0 S_H[0]$	Второй период $N/2$ -точечного ДПФ
$k = \frac{N}{2} + 1$	$S_d\left[\frac{N}{2} + 1\right] = S_q\left[\frac{N}{2} + 1\right] + W_N^{N/2+1} S_H\left[\frac{N}{2} + 1\right] =$ $= S_q[1] - W_N^1 S_H[1]$	
$k = \frac{N}{2} + 2$	$S_d\left[\frac{N}{2} + 2\right] = S_q\left[\frac{N}{2} + 2\right] + W_N^{N/2+1} S_H\left[\frac{N}{2} + 2\right] =$ $= S_q[2] - W_N^2 S_H[2]$	
...	...	
$k = N - 1$	$S_d[N - 1] = S_q[N - 1] + W_N^{N-1} S_H[N - 1] =$ $= S_q\left[\frac{N}{2} - 1\right] - W_N^{N/2-1} S_H\left[\frac{N}{2} - 1\right]$	

При расчёте $N/2$ - точечных ДПФ объём алгоритмов также оказывается степенью двойки и снова может быть использован рассмотренный подход, который будет предполагать расчёт $N/4$ - точечных ДПФ и так до тех пор, пока длина подпоследовательностей не окажется равной 2.

Полные наглядные схемы алгоритма БПФ, отражающие изложенный подход, при произвольном объёме достаточно громоздки. Рассмотрим пример при $N = 8 = 2^3$ на рис.4.7-4.9. Блок двухточечного ДПФ, показанный на рис. 4.9 формально содержит

одно умножение $M_2 = 1$.

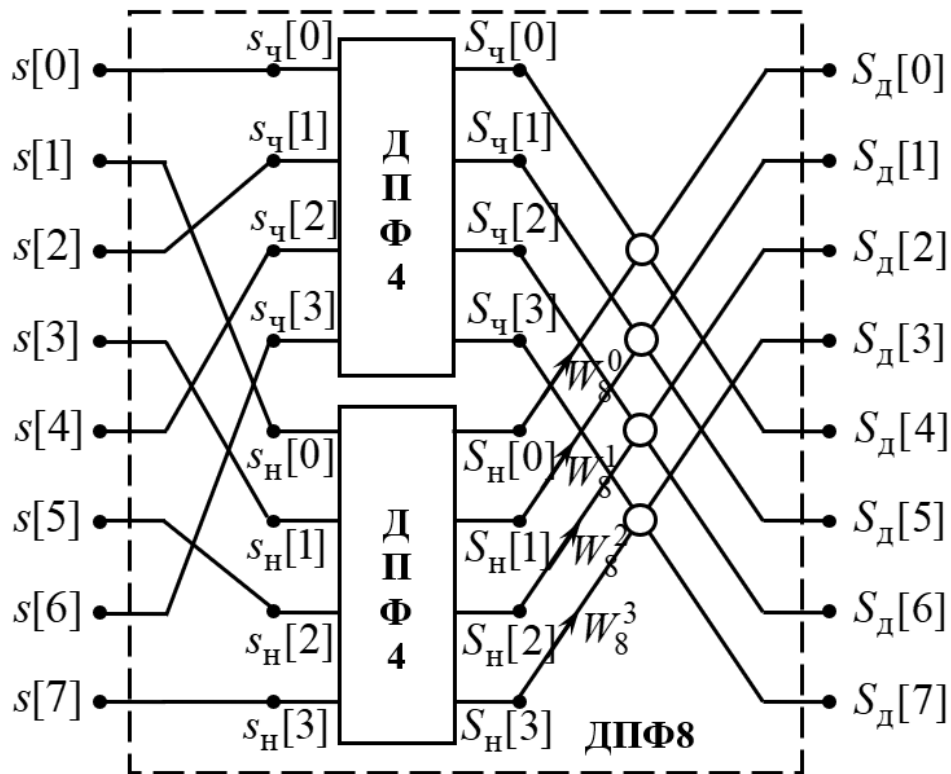


Рис.4.7. Схема алгоритма 8-ми точечного БПФ

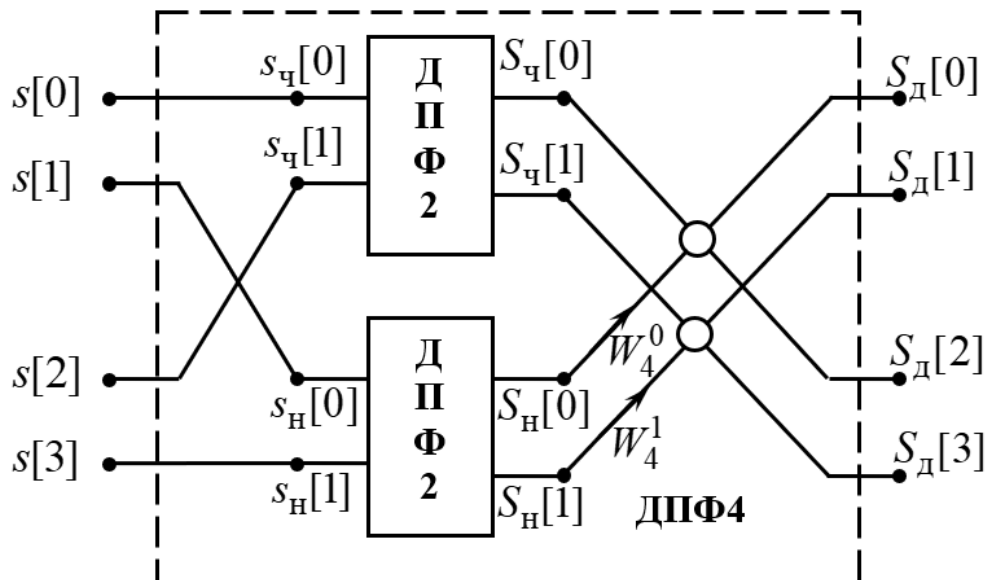


Рис.4.8. Схема алгоритма 4-х точечного БПФ

Далее 4-х точечное ДПФ на рис.4.8 содержит два блока 2-х точечных ДПФ (по M_2 умножений в каждом) и два собственных умножения $M_4 = 2M_2 + 2$.

Затем 8-ми точечное ДПФ на рис.4.7 содержит два блока 4-х точечных ДПФ (по M_4 умножений в каждом) и четыре собственных умножения $M_8 = 2M_4 + 4$.

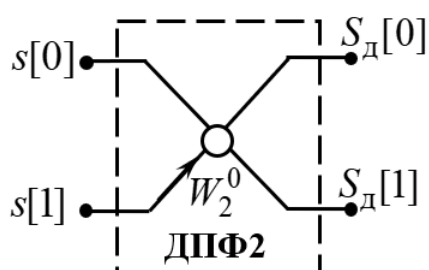


Рис.4.9. Схема двухточечного БПФ

Продолжая рассуждения для количества умножений в общем случае N -точечного ДПФ сможем записать

$$M_N = 2M_{N/2} + N/2.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что решением этого разностного уравнения является

$$M_N = \frac{N}{2} \log_2 N. \quad (4.20)$$

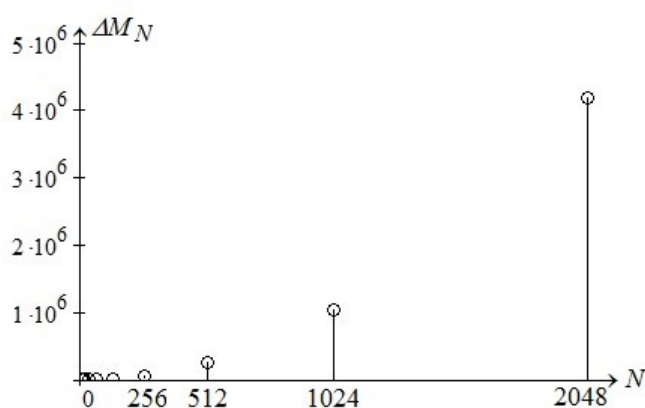


Рис.4.10. Разность количества умножений ДПФ и БПФ

На рис.4.10 показана разность количества операций умножения, требуемых при прямом расчёте ДПФ и при использовании БПФ. Уже при $N = 1024$ разница в количестве умножений достигает миллиона.

4.6. Детализация спектра при ДПФ

При цифровом спектральном анализе непосредственное сочетание скорости расчёта спектра на основе БПФ и детальности его представления оказывается затруднительным ввиду того, что ДПФ даёт отсчёты спектра сигнала, взятые с максимальным шагом. Например, ДПФ прямоугольного импульса (рис.4.11) практически не позволяет установить структуру спектра, так как содержит всего один ненулевой отсчёт.

Если имеется возможность изменить количество отсчётов в сигнале, например, увеличить их количество в два раза, то легко обнаружить, что этот приём не даст улучшение детализации спектра (рис.4.12). Действительно, в случае, когда сигнал представлен N отсчётами и дискретизирован с периодом T , ДПФ даёт отсчёты

его спектра с частотным интервалом

$$\Omega = 2\pi / NT.$$

После увеличения числа отсчётов в два раза, период дискретизации соответственно уменьшится в два раза, и для интервала дискретизации получим

$$\Omega_2 = 2\pi / 2N(T/2) = 2\pi / NT = \Omega.$$

Изменение числа отсчётов не приводит к изменению шага дискретизации спектра при ДПФ, то есть не даёт возможности более детально исследовать его структуру.

Рассмотрим ситуацию, когда к исследуемому сигналу добавляются нулевые отсчёты (рис.4.13), то есть ДПФ выполняется над последовательностью

$$\{\tilde{s}(nT)\}_{n=0}^{\tilde{N}-1} = \{s(nT)\}_{n=0}^{N-1} \cup \{0\}_{n=N}^{\tilde{N}-1}.$$

При этом

$$\tilde{\Omega} = \frac{2\pi}{\tilde{N}T} = \frac{N}{\tilde{N}} \Omega.$$

Поскольку $\tilde{N} > N$, добавление нулевых отсчётов способствует уменьшению шага дискретизации спектра.

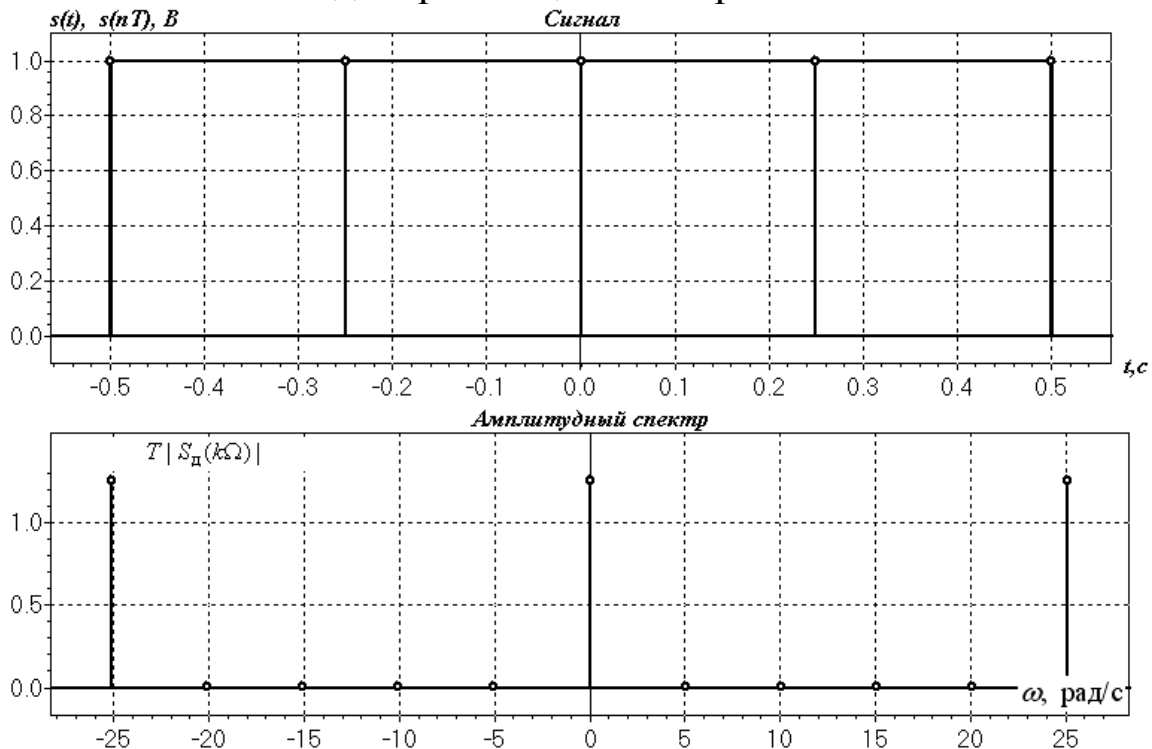


Рис.4.11. Дискретный прямоугольный импульс и его ДПФ

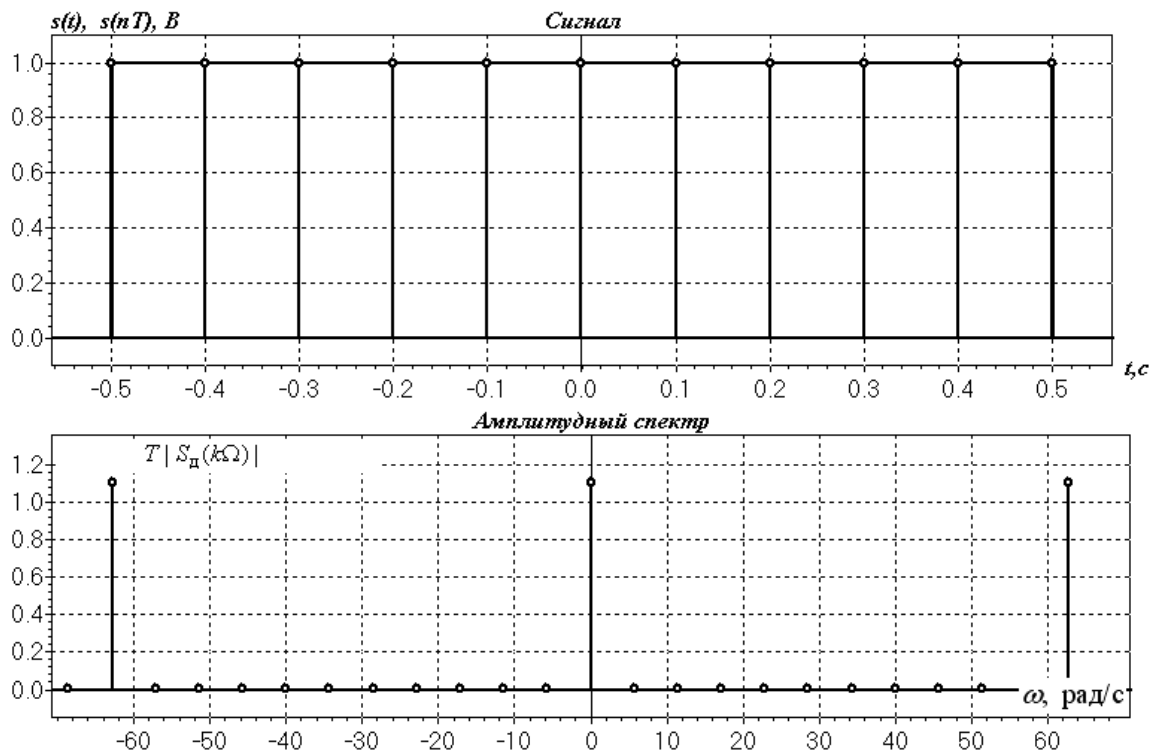


Рис.4.12. Дискретный прямоугольный импульс и его ДПФ при увеличении количества отсчётов в импульсе.

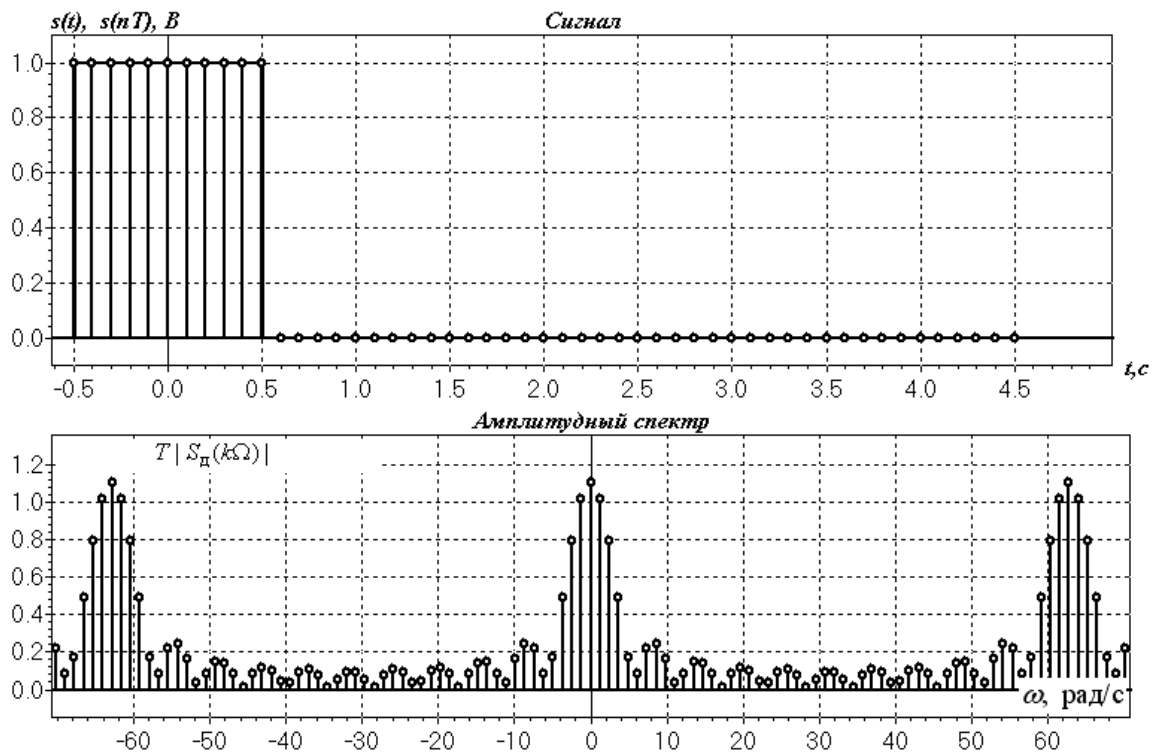


Рис.4.13. Дискретный прямоугольный импульс и его ДПФ при добавлении нулевых отсчётов

При использовании БПФ количество отсчётов в сигнале

должно быть степенью двойки. Поэтому добавление нулевых отсчётов должно выполняться так чтобы общее увеличение их числа тоже было степенью двойки. Например, исходное число отсчётов в сигнале, являющееся степенью числа 2, можно увеличивать в 2^d раза

$$\tilde{N} = 2^d N.$$

Натуральный параметр d называют степенью детализации спектра. При этом

$$\tilde{\Omega} = \frac{N}{2^d N} \Omega = \frac{\Omega}{2^d}, \quad (4.21)$$

и увеличению детализации на единицу соответствует уменьшение шага дискретизации спектра в два раза.

Требуемое количество добавляемых нулевых отсчётов:

$$N_0 = \tilde{N} - N = (2^d - 1)N, \quad (4.22)$$

4.7. Примеры и задачи

4.7.1. Спектральная плотность дискретного экспоненциального импульса

Дискретный экспоненциальный импульс описывается выражением $s(nT) = \sigma(nT)e^{-\alpha nT}$. Временная диаграмма дискретного экспоненциального импульса показана на рис.4.14.

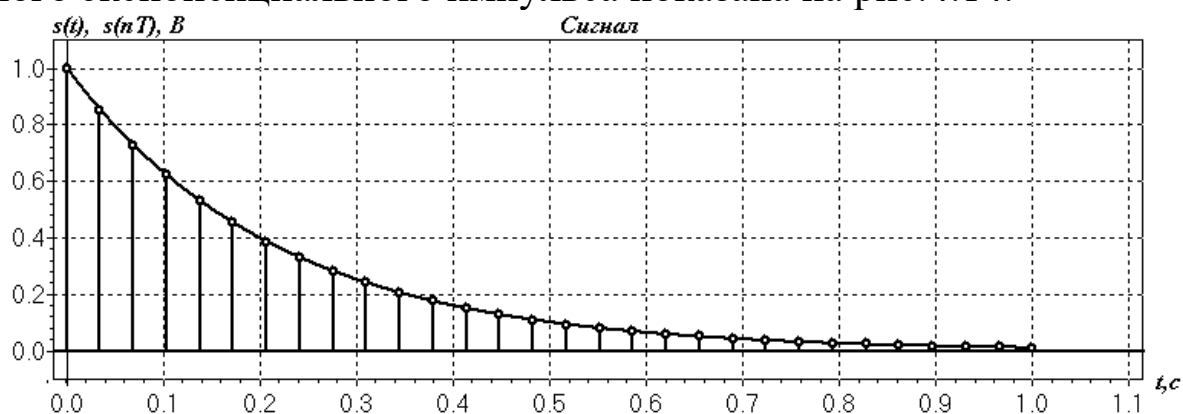


Рис.4.14. Временная диаграмма дискретного экспоненциального импульса

Выражение для Z – преобразования заданного сигнала имеет вид:

$$S(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}.$$

Учитывая взаимосвязь между спектральной плотностью и Z – преобразованием сигнала получим

$$S_d(\omega) = S(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} e^{-j\omega T}} = \frac{1}{1 - e^{-(\alpha + j\omega)T}}.$$

Амплитудный спектр сигнала

$$\begin{aligned} |S_d(\omega)| &= \sqrt{S_d(\omega) S_d^*(\omega)} = \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-\alpha T} e^{-j\omega T}} \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} e^{j\omega T}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-\alpha T} e^{j\omega T} - e^{-\alpha T} e^{-j\omega T} + e^{-2\alpha T}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2e^{-\alpha T} \cos(\omega T) + e^{-2\alpha T}}}. \end{aligned}$$

Фазовый спектр сигнала

$$\varphi_d(\omega) = \arg(S_d(\omega)) = -\arctg\left(\frac{e^{-\alpha T} \sin(\omega T)}{1 - e^{-\alpha T} \cos(\omega T)}\right).$$

Пример графиков амплитудного и фазового спектров показан на рис.4.15.

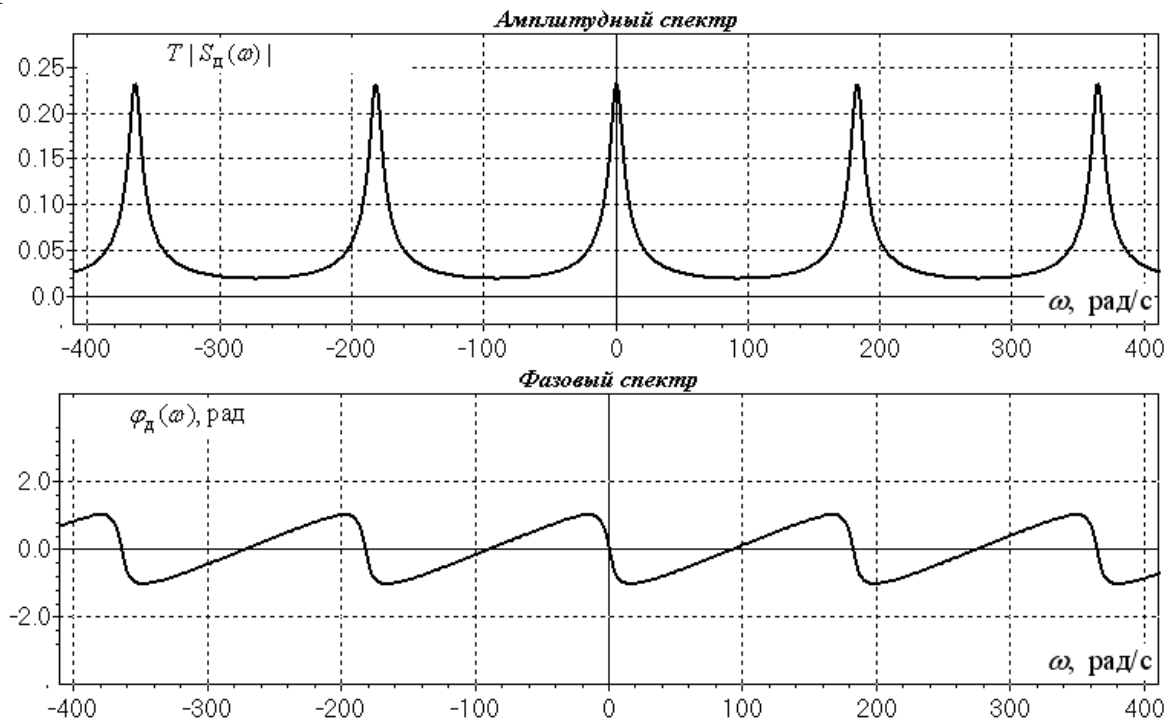


Рис.4.15. Амплитудный и фазовый спектры дискретного экспоненциального импульса

4.7.2. Спектральная плотность дискретного прямоугольного импульса

Дискретный прямоугольный импульс описывается выражением $s(nT) = 1, 0 \leq n \leq N - 1$.

Выражение для Z – преобразования дискретного прямоугольного импульса имеет вид:

$$S(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}.$$

Учитывая связь между спектральной плотностью и Z - преобразованием дискретного сигнала, получим

$$\begin{aligned} S_d(\omega) &= S(e^{j\omega T}) = \frac{1 - e^{-jN\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{1 - e^{-jN\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} \frac{e^{-jN\omega T/2} e^{jN\omega T/2}}{e^{-j\omega T/2} e^{j\omega T/2}} = \\ &= \frac{2j e^{jN\omega T/2} - e^{-jN\omega T/2}}{2j e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}} \frac{e^{-jN\omega T/2}}{e^{-j\omega T/2}} = \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} e^{-j(N-1)\omega T/2} \end{aligned}$$

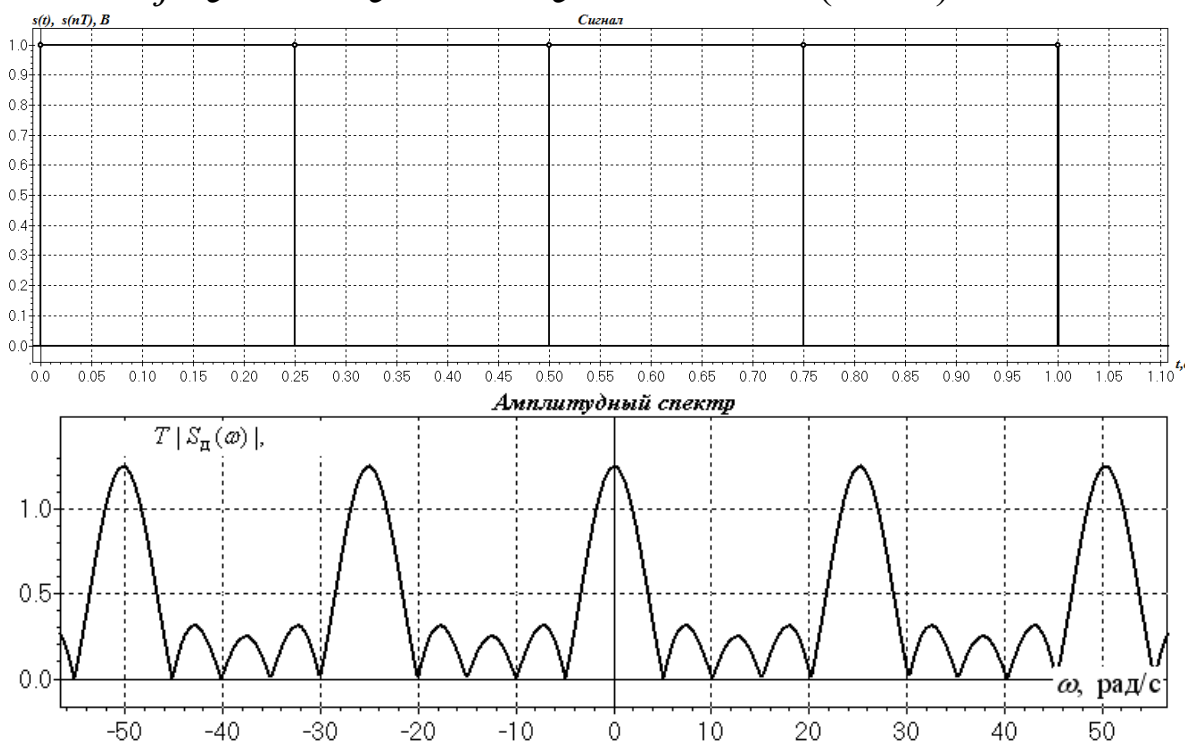


Рис.4.16. Дискретный прямоугольный импульс и его амплитудный спектр

Амплитудный спектр сигнала:

$$|S_d(\omega)| = \left| \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \right|.$$

Фазовый спектр сигнала:

$$\varphi_d(\omega) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \operatorname{sign} \left(\frac{\sin(N\omega T / 2)}{\sin(\omega T / 2)} \right) \right) \operatorname{sign}(\omega T) - \frac{(N-1)\omega T}{2}.$$

Пример дискретного прямоугольного импульса и его амплитудного спектра при $N = 5$ показан на рис.4.16.

4.7.3. ДПФ усечённого экспоненциального импульса

Усечённый экспоненциальный импульс описывается выражением

$$s[n] = \sigma[n]e^{-\alpha nT}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Выражение для Z – преобразования данного сигнала имеет вид:

$$S(z) = \frac{1 - e^{-\alpha NT} z^{-N}}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}.$$

Используя взаимосвязь между ДПФ и Z – преобразованием, получим:

$$S_d[k] = S \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} \right) = \frac{1 - e^{-\alpha NT} e^{-j\frac{2\pi}{N}Nk}}{1 - e^{-\alpha T} e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1 - e^{-\alpha NT}}{1 - e^{-\alpha T} e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}.$$

Дискретный амплитудный спектр сигнала:

$$|S_d[k]| = \frac{1 - e^{-\alpha NT}}{\sqrt{1 - 2e^{-\alpha T} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + e^{-2\alpha T}}}.$$

Пример графика дискретного амплитудного спектра показан на рис.4.17.

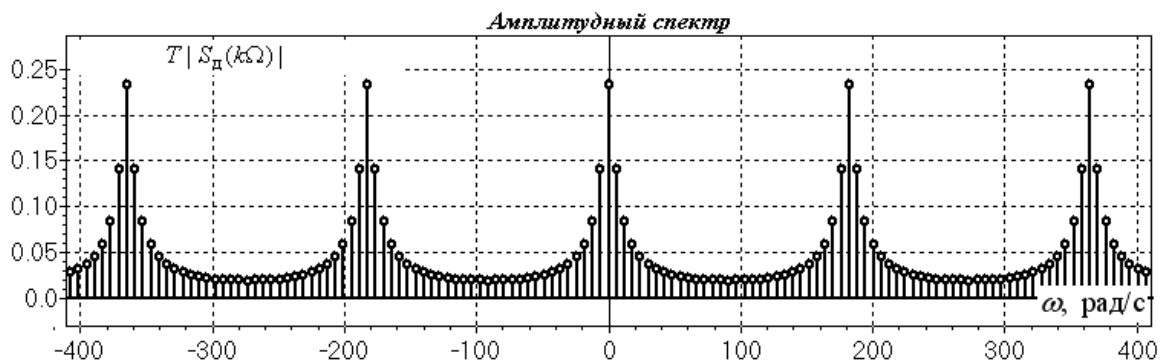


Рис.4.17. Пример дискретного амплитудного спектра усечённого экспоненциального импульса

4.7.4. ДПФ дискретного прямоугольного импульса

Дискретный прямоугольный импульс описывается выражением

$$\{s(nT)\}_{n=0}^{N-1} = \{1\}_{n=0}^{N-1}.$$

Выражение для спектральной плотности заданного сигнала имеет вид:

$$S_d(\omega) = \frac{\sin(N\omega T / 2)}{\sin(\omega T / 2)} e^{-j(N-1)\omega T / 2}.$$

ДПФ представляет собой результат дискретизации спектра дискретного сигнала с шагом $\Omega = \frac{2\pi}{NT}$. С учётом этого получим

$$\begin{aligned} S_d[k] = S_d(k\Omega) &= \frac{\sin(Nk\Omega T / 2)}{\sin(k\Omega T / 2)} e^{-j(N-1)k\Omega T / 2} = \\ &= \frac{\sin(Nk2\pi / 2N)}{\sin(k2\pi / 2N)} e^{-j(N-1)k2\pi / 2N} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin(k\pi / N)} e^{-j(N-1)k\pi / N} = \\ &= N \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta[k - iN]. \end{aligned}$$

Пример дискретного амплитудного спектра для $N = 11$ показан на рис.4.18.

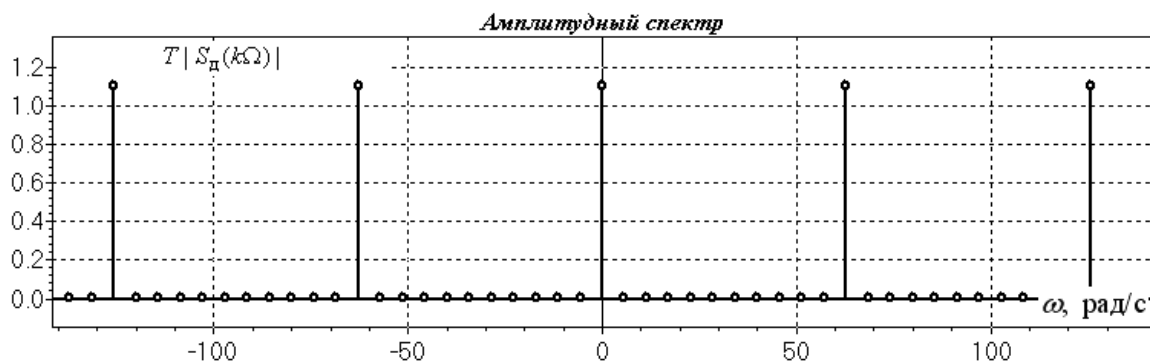


Рис.4.18. Пример дискретного амплитудного спектра прямоугольного импульса

Литература

Основная литература

1. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов / О. А. Стеценко. — М.: Высш. шк., 2007. — 432 с. <https://library.mirea.ru/books/39991>
2. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Радио и связь, 1986. — 512 с. <https://library.mirea.ru/books/6969>
3. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 2005. — 462 с. <https://library.mirea.ru/books/875>
4. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие / Д. В. Васильев, М. Р. Витоль, Ю. Н. Горшенков, и др.; К. А. Самойло. — М.: Радио и связь, 1982. — 528 с. <https://library.mirea.ru/books/19694>

Дополнительная литература

5. Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров: учебное пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1982.
6. Основы цифровой обработки сигналов: Учеб. пособие для вузов / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 753 с. <https://library.mirea.ru/books/831>
7. Сигналы. Теоретическая радиотехника: Справ. пособие / А. Н. Денисенко. — М.: Горячая линия - Телеком, 2005. — 704 с. <https://library.mirea.ru/books/45>
8. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.: ил. — Библиогр.: с. 804 (15 назв.) <https://library.mirea.ru/books/9447>
9. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М.: Наука, 1998. — 608 с. <https://library.mirea.ru/books/4829>

Пособия и методические указания

10. Радиотехнические цепи и сигналы. Ч. 2 [Электронный ресурс]: метод. указания по выполнению лаб. работ / В. Н. Исаков, Д. Р. Барский. — М.: РТУ МИРЭА, 2019. — Электрон. опт. диск (ISO) <https://library.mirea.ru/share/3274>