

ДИСЦИПЛИНА	<b>Радиотехнические цепи и сигналы часть 2</b>
	полное название дисциплины без аббревиатуры
ИНСТИТУТ	<b>Радиотехнических и телекоммуникационных систем</b>
КАФЕДРА	<b>радиоволновых процессов и технологий</b>
	полное название кафедры
ГРУППА/Ы	<b>РРБО-1-3-18; РССО-1-3-18</b>
	номер групп/ы, для которых предназначены материалы
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	<b>Лекция №6</b>
	лекция; материал к практическим занятиям; контрольно-измерительные материалы к практическим занятиям; руководство к КР/КП, практикам
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	<b>Исаков Владимир Николаевич</b>
	фамилия, имя, отчество
СЕМЕСТР	<b>6</b>
	указать номер семестра обучения

## 6. Методы восстановления сигналов

### 6.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Рассматриваемый метод интерполяции не является регулярным, однако мы обратим на него внимание, поскольку на нём основаны подходы к построению локальных регулярных методов.

Интерполяция многочленом Лагранжа (рис.6.6) рассматривается на конечном интервале  $t \in [\tau_0, \tau_{N-1}]$ , на котором задана последовательность  $N$  моментов дискретизации  $\tau_0, \tau_k, \dots, \tau_{N-1}$ . В общем случае интерполяция многочленом Лагранжа может рассматриваться на неравномерных сетках дискретизации. Мы будем рассматривать частный случай, когда сетка дискретизации равномерна с шагом  $T$  и  $\tau_n = \tau_0 + nT$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ .

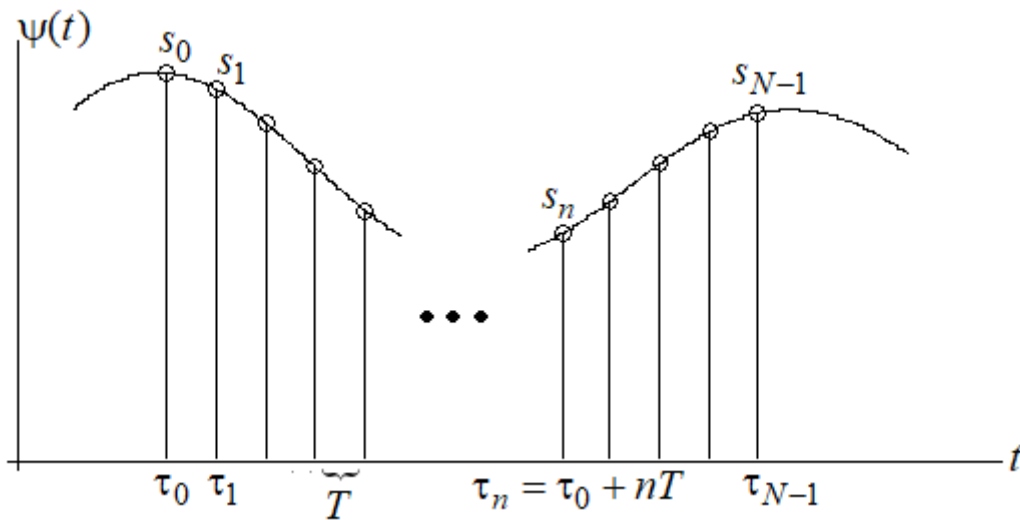


Рис.6.1. Построение интерполяционного многочлена Лагранжа

Интерполяционный многочлен Лагранжа представляет собой многочлен

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k t^k,$$

степени  $N-1$ , коэффициенты которого выбираются так, чтобы его график проходил через узлы интерполяции  $(\tau_n, s_n)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ , что имеет место, если

$$\psi(\tau_n) = s_n, n = 0, \dots, N-1,$$

или

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \tau_n^k = s_n, n = 0, \dots, N-1. \quad (6.1)$$

Записанное выражение (6.1) является системой линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов интерполяционного многочлена Лагранжа. Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \tau_0 & \tau_0^2 & \dots & \tau_0^{N-1} \\ 1 & \tau_1 & \tau_1^2 & \dots & \tau_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \tau_{N-1} & \tau_{N-1}^2 & \dots & \tau_{N-1}^{N-1} \end{vmatrix} \quad (6.2)$$

представляет собой определитель Вандермонда и отличен от нуля, при условии, что абсциссы всех узлов интерполяции различны, что обязательно имеет место на равномерной сетке дискретизации.

Покажем, что Лагранжева интерполяция обладает свойством линейности. Рассмотрим интерполяцию двух сигналов  $s_1(\tau_n)$  и  $s_2(\tau_n)$  на одной и той же сетке  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}$ . Построим для них интерполяционные многочлены Лагранжа

$$\psi_1(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^{(1)} t^k; \quad \psi_2(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^{(2)} t^k, \quad (6.3)$$

определяя их коэффициенты решением систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k^{(1)} \tau_n^k = s_1(\tau_n), \quad n = 0, \dots, N-1; \quad (6.4)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k^{(2)} \tau_n^k = s_2(\tau_n), \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (6.5)$$

Образует линейную комбинацию рассматриваемых дискретных сигналов

$$s(\tau_n) = k_1 s_1(\tau_n) + k_2 s_2(\tau_n)$$

и построим для неё интерполяционный многочлен:

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k t^k,$$

Коэффициенты которого найдутся решением системы

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \tau_n^k = k_1 s_1(\tau_n) + k_2 s_2(\tau_n), \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (6.6)$$

Подставим (6.4-6.5) в (6.6):

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \tau_n^k = \sum_{k=0}^{N-1} \left( k_1 a_k^{(1)} + k_2 a_k^{(2)} \right) \tau_n^k, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

ИЛИ

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[ a_k - \left( k_1 a_k^{(1)} + k_2 a_k^{(2)} \right) \right] \tau_n^k = 0, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (6.7)$$

Поскольку система линейных алгебраических уравнений (6.7) однородна и её главный определитель (6.2) отличен от нуля, она имеет единственное нулевое решение, то есть

$$a_k = k_1 a_k^{(1)} + k_2 a_k^{(2)}, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

откуда и следует выполнение условия линейности:

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k t^k = \sum_{k=0}^{N-1} \left( k_1 a_k^{(1)} + k_2 a_k^{(2)} \right) t^k = k_1 \psi_1(t) + k_2 \psi_2(t) \quad (6.8)$$

Как показано в лк.5, при выполнении условия линейности интерполирующую функцию можно представить в виде

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s(\tau_k) \varphi_k(t). \quad (6.9)$$

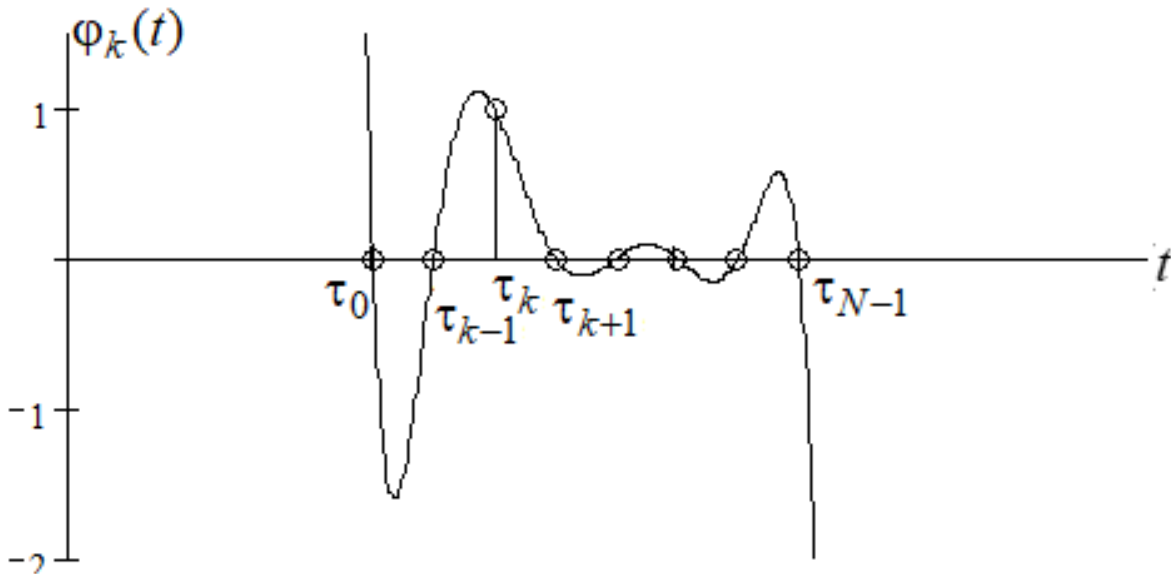


Рис.6.2. Базисная функция Лагранжа

Каждая базисная функция интерполяционного многочлена Лагранжа  $\varphi_k(t)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ , будучи результатом интерполяции единичного отсчёта, соответствующего  $k$ -моменту дискретизации (рис. 6.2), представляет собой многочлен степени  $N-1$ , график которого пересекает ось абсцисс во все моменты дискретизации

$\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}, \dots, \tau_{N-1}$ , кроме  $\tau_k$ , в который он принимает значение 1.

Поскольку все корни многочлена  $\varphi_k(t)$  известны, можем записать:

$$\begin{aligned}\varphi_k(t) &= \alpha_{N-1}^{(k)} (t - \tau_0)(t - \tau_1) \dots (t - \tau_{k-1})(t - \tau_{k+1}) \dots (t - \tau_{N-1}) = \\ &= \alpha_{N-1}^{(k)} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N-1} (t - \tau_i).\end{aligned}$$

Коэффициент при старшей степени  $\alpha_{N-1}^{(k)}$  найдём, используя известное значение многочлена  $\varphi_k(\tau_k) = 1$ :

$$\varphi_k(\tau_k) = \alpha_{N-1}^{(k)} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N-1} (\tau_k - \tau_i) = 1,$$

откуда

$$\alpha_{N-1}^{(k)} = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N-1} (\tau_k - \tau_i)}.$$

и выражение для базисных функций многочлена Лагранжа принимает вид:

$$\varphi_k(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N-1} \frac{t - \tau_i}{\tau_k - \tau_i}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (6.10)$$

Пример графиков базисных функций (6.10) показан на рис.6.3 для  $N = 7$ .

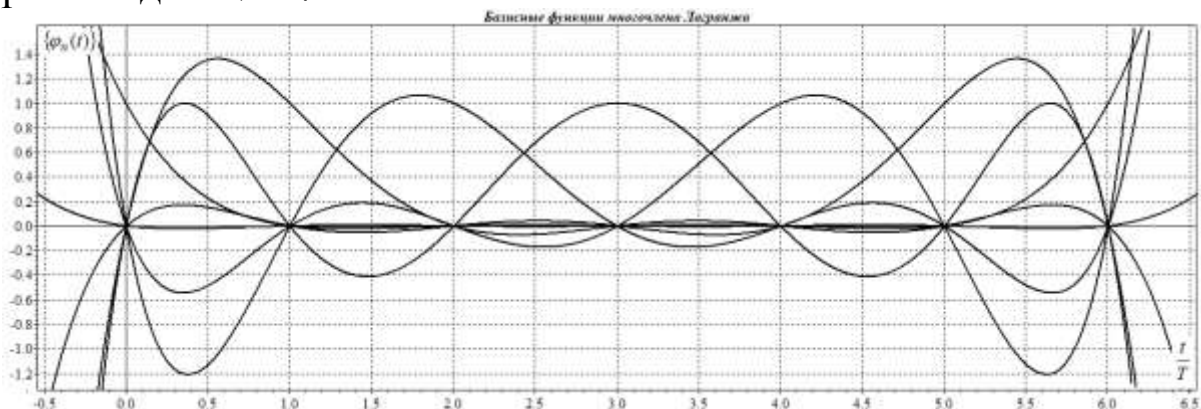


Рис.6.3. Базисные функции многочлена Лагранжа при  $N = 7$

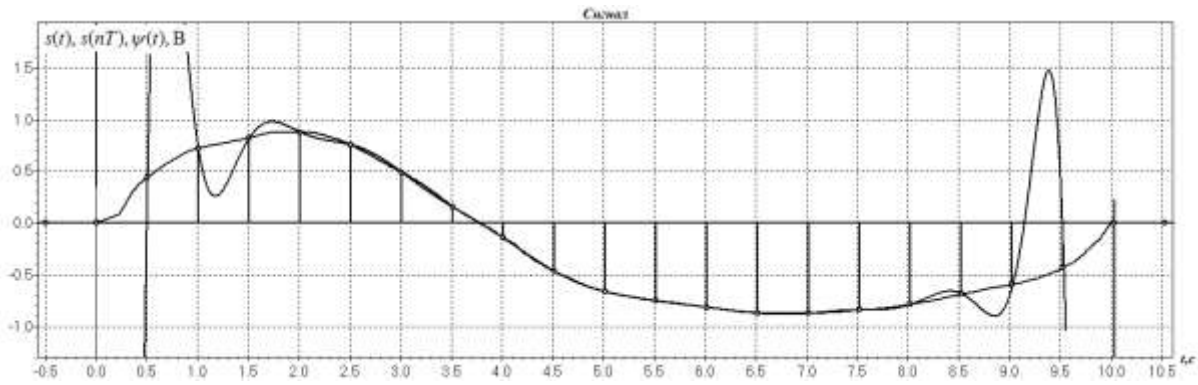


Рис.6.4. Пример интерполяции многочленом Лагранжа при  $N = 21$

Интерполяция многочленом Лагранжа даёт приемлемые результаты на всём интервале интерполяции при  $N \leq 8$ . При большем числе узлов интерполяции поведение интерполирующей функции в некоторой области вблизи левой и правой границ интервала интерполяции становится геометрически непредсказуемым: часто имеет место сильная «раскачка» графика интерполирующей функции между узлами интерполяции. При этом внутри интервала интерполяции (вблизи его середины) интерполирующая функция вполне сохраняет геометрическую предсказуемость. В качестве примера на рис. 6.4 показаны соответствующие отмеченному эффекту графики дискретного сигнала, аналогового сигнала и интерполирующей функции.

При неограниченном увеличении количества узлов интерполяции  $N \rightarrow \infty$  интерполирующая функция на основе многочлена Лагранжа асимптотически переходит в интерполирующую функцию на основе ряда Котельникова.

Действительно, имея в виду разложение синуса в бесконечное произведение (по Эйлеру):

$$\sin(x) = x \prod_{i=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{i^2 \pi^2} \right),$$

порождающую функцию Котельникова можем представить в виде:

$$\varphi_0^K(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{t^2}{i^2 T^2} \right) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left( \frac{iT - t}{iT} \right) \left( \frac{iT + t}{iT} \right) =$$

$$= \prod_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{+\infty} \left( \frac{t - t_i}{t_0 - t_i} \right),$$

где  $t_i = iT, i \in \mathbb{Z}$ . Последнее выражение можно рассматривать как предельный вариант базисной функции Лагранжа (6.10), соответствующей моменту дискретизации  $\tau_{\frac{N-1}{2}} = 0$  при симметричном

расширении сетки дискретизации  $\tau_0 \rightarrow -\infty, \tau_{N-1} \rightarrow +\infty$ .

## 6.2. Локальная полиномиальная интерполяция

### 6.2.1. Геометрические правила формирования интерполирующей кривой

При локальной полиномиальной интерполяции интерполирующая функция является совокупностью своих фрагментов  $\psi_k(t)$ , описывающих её на соответствующем частном интервале  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ .

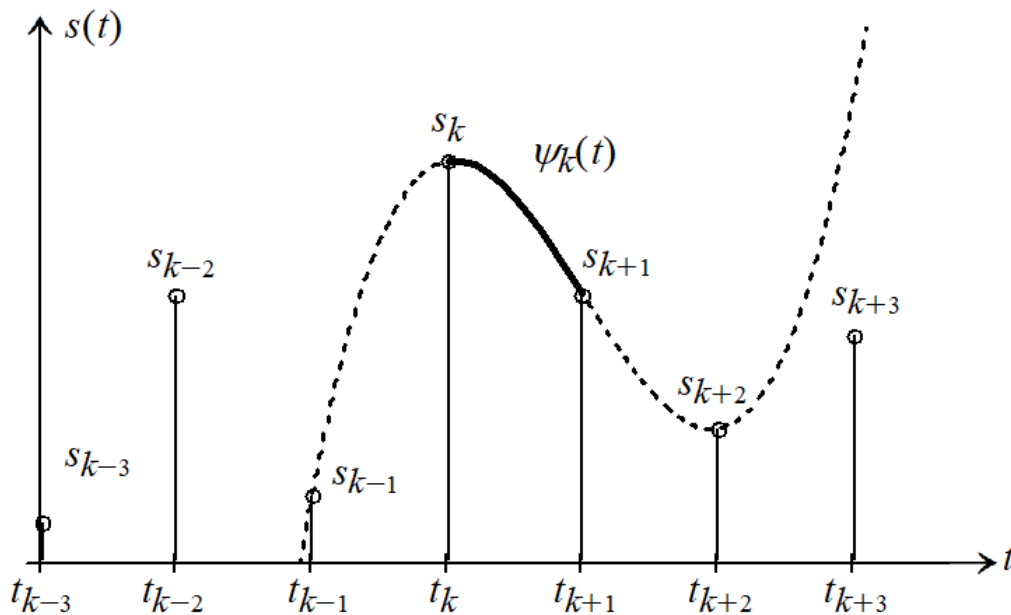


Рис.6.5. Формирование интерполирующего фрагмента при локальной полиномиальной интерполяции первого порядка

График интерполирующего фрагмента  $\psi_k(t)$  совпадает с графиком многочлена Лагранжа, построенном на граничных узлах рассматриваемого интервала, а также на  $M$  предшествующих и  $M$  последующих узлах интерполяции.  $M$  называется порядком

интерполяции. На рис.6.5 показан пример при  $M = 1$ . Вспомогательный многочлен показан пунктирной линией, а сплошной линией отмечен график фрагмента интерполирующей функции  $\psi_k(t)$ . Интерполирующая функция, таким образом, на каждом частном интервале представляет собой многочлен степени  $2M + 1$ .

Линейность интерполяции следует из линейности интерполяции на основе многочлена Лагранжа. Поскольку правила формирования интерполирующей функции одинаковы на каждом интервале дискретизации, метод является регулярным. Симметрия учёта узлов интерполяции указывает на его изотропность.

Так как в формировании интерполирующего фрагмента участвует конечное количество отсчётов, метод интерполяции является локальным и выражение (5.11а) даёт

$$\psi_k(t) = \sum_{m=-M}^{M+1} s_{k+m} \varphi_0(t - t_{k+m}). \quad (6.11)$$

### 6.2.2. Локальная полиномиальная интерполяция нулевого порядка

В простейшем случае рассматриваемый подход приводит к кусочно-линейной интерполяции, при которой интерполирующая функция представляет собой совокупность отрезков прямой, соединяющих каждые два соседних узла интерполяции. Порождающая функция, как нетрудно увидеть, выполняя интерполяцию единичного отсчёта, описывается выражением

$$\varphi_0(t) = \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right). \quad (6.12)$$

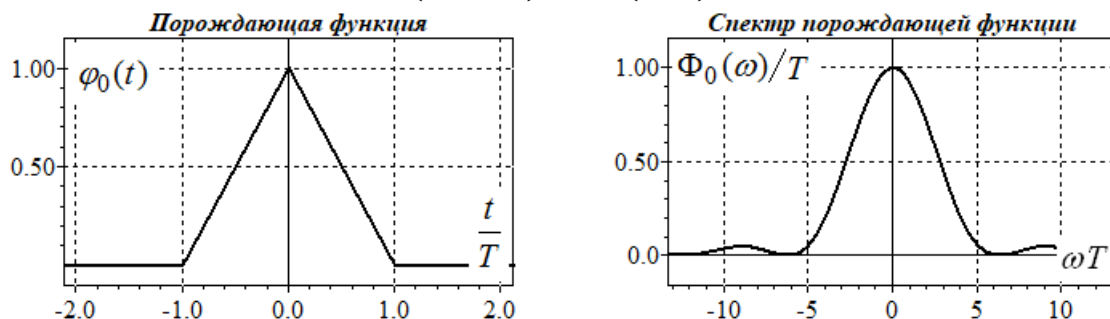


Рис.6.6. Порождающая функция и её спектральная плотность при кусочно-линейной интерполяции

Спектральная плотность порождающей функции



$$\Phi_0(\omega) = T \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (6.13)$$

Графики порождающей функции (6.12) и её спектральной плотности (6.13) при  $T = 1$  показаны на рис.6.6.

Значение граничной частоты метода приведено в табл. 6.1. Формула (6.11) упрощается до

$$\psi_k(t) = s_k \Phi_0(t - t_k) + s_{k+1} \Phi_0(t - t_{k+1}). \quad (6.14)$$

Таблица 6.1.

Граничные частоты методов локальной полиномиальной интерполяции

$M$	$(\omega T)_{\text{гр}}, \text{ рад}$	
	$K_{\text{и.доп}} = 0,01$ (-40дБ)	$K_{\text{и.доп}} = 0,001$ (-60дБ)
0	0,34	0,11
1	0,91	0,51
2	1,26	0,85
3	1,50	1,05

### 6.2.3. Локальная полиномиальная интерполяция первого порядка

Рассмотрим кусочно-полиномиальную интерполяцию первого порядка  $M = 1$ . Для нахождения порождающей функции интерполяционного базиса следует рассмотреть интерполяцию единичного отсчёта. Для уменьшения громоздкости выкладок будем исследовать случай  $T = 1$ , имея в виду, то выражение для порождающей функции при произвольном периоде дискретизации может быть получено из выражения для порождающей функции при единичном периоде дискретизации путём замены в нём  $t$  на  $\frac{t}{T}$ .

Построение интерполирующего фрагмента  $\psi_0(t)$  на интервале  $t \in [0,1]$  иллюстрируется рис. 6.7.  $\psi_0(t)$  является многочленом 3-й степени, корни которого известны, что позволяет представить его в виде:

$$\psi_0(t) = a_3^{(0)}(t+1)(t-1)(t-2).$$

Коэффициент при старшей степени  $a_3^{(0)}$  определим, исходя из условия в нуле:

$$\psi_0(0) = a_3^{(0)}(0+1)(0-1)(0-2) = 1,$$

откуда  $a_3^{(0)} = \frac{1}{2}$  и  $\psi_0(t) = \frac{1}{2}(t+1)(t-1)(t-2)$ .

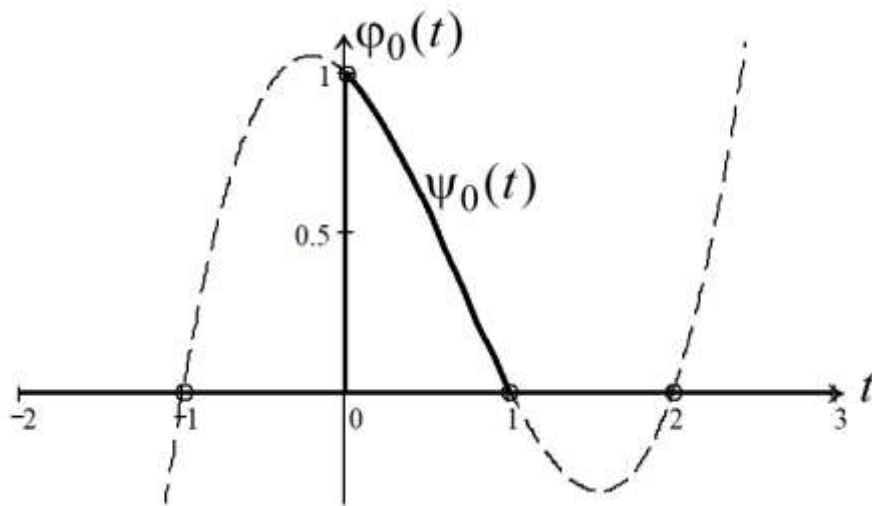


Рис.6.7. Построение фрагмента порождающей функции на  $t \in [0, 1]$

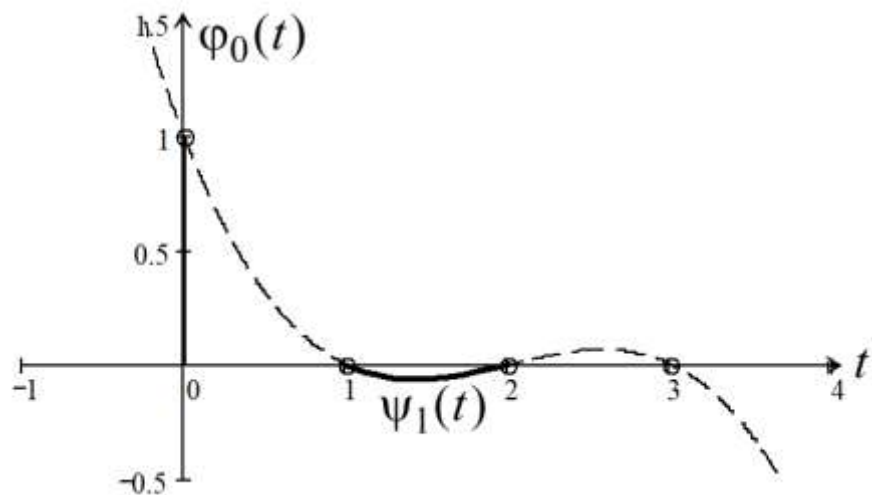


Рис.6.8. Построение фрагмента порождающей функции на  $t \in [1, 2]$

Построение интерполирующего фрагмента  $\psi_1(t)$  на интервале  $t \in [1, 2]$  иллюстрируется рис. 6.8.  $\psi_1(t)$  является многочленом 3-й степени, корни которого известны, что позволяет представить его в виде:

$$\psi_1(t) = a_3^{(1)}(t-1)(t-2)(t-3).$$

Коэффициент при старшей степени  $a_3^{(1)}$  определим, исходя из условия в нуле:

$$\psi_1(0) = a_3^{(1)}(0-1)(0-2)(0-3) = 1,$$

откуда  $a_3^{(1)} = \frac{1}{6}$  и  $\psi_1(t) = -\frac{1}{6}(t-1)(t-2)(t-3).$

На других интервалах, расположенных правее  $[1,2]$ , при построении интерполирующего фрагмента будем иметь совокупность узлов с нулевыми ординатами и, соответственно, получим  $\psi_{k>1}(t) = 0$ .

Полное выражение для порождающей функции получим с учётом того, что изотропный метод интерполяции имеет чётно-симметричную порождающую функцию, поэтому в найденном нами выражении для положительных  $t > 0$  следует  $t$  заменить на  $|t|$ .

Окончательно для порождающей функции при первом порядке интерполяции запишем:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(|\tau|+1)(|\tau|-1)(|\tau|-2), & |\tau| < 1 \\ -\frac{1}{6}(|\tau|-1)(|\tau|-2)(|\tau|-3), & 1 \leq |\tau| < 2, \\ 0, & |\tau| \geq 2 \end{cases} \quad (6.15)$$

где  $\tau = t/T$ .

Графики порождающей функции (6.15) и её спектральной плотности показаны на рис.6.9. Значение граничной частоты приведено в табл.6.1. Формула (6.11) упрощается до

$$\begin{aligned} \psi_k(t) = & s_{k-1}\varphi_0(t-t_{k-1}) + s_k\varphi_0(t-t_k) + \\ & + s_{k+1}\varphi_0(t-t_{k+1}) + s_{k+2}\varphi_0(t-t_{k+2}). \end{aligned} \quad (6.16)$$

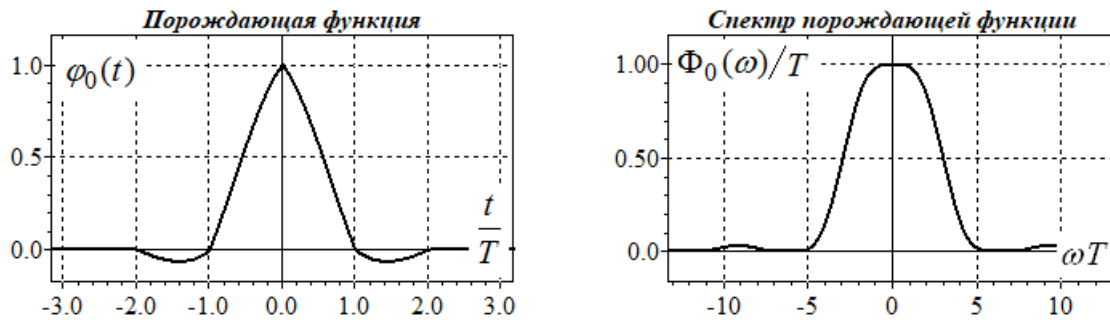


Рис.6.9. Порождающая функция при полиномиальной интерполяции и её спектральная плотность при  $M = 1$

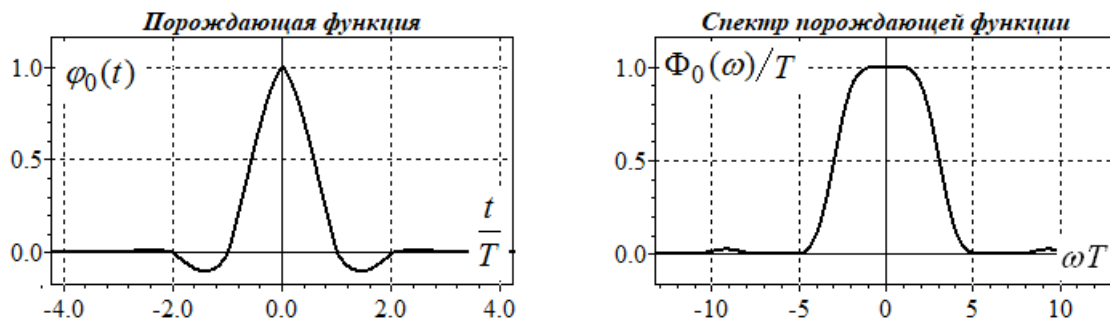


Рис.6.10. Порождающая функция при полиномиальной интерполяции и её спектральная плотность при  $M = 2$

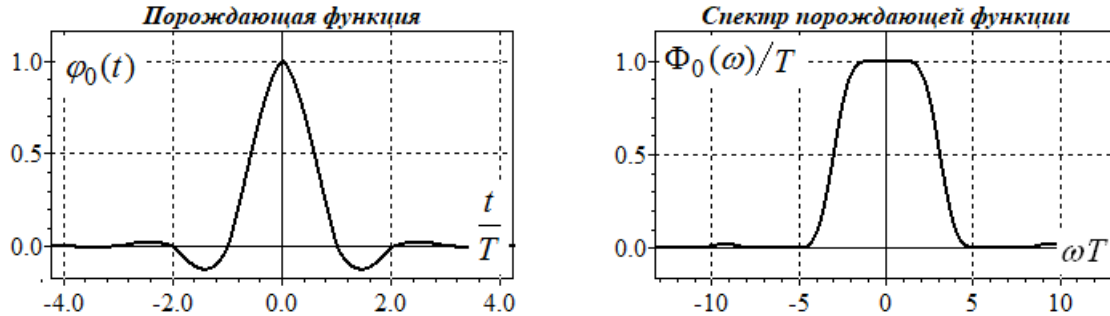


Рис.6.11. Порождающая функция при полиномиальной интерполяции и её спектральная плотность при  $M = 3$

#### 6.4.4. Локальная полиномиальная интерполяция второго порядка

Аналогично п.6.2.3 в случае локальной полиномиальной интерполяции при  $M = 2$  получим

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} -\frac{1}{12}(|\tau|+2)(|\tau|+1)(|\tau|-1)(\tau-2)(|\tau|-3), & |\tau| < 1 \\ \frac{1}{24}(|\tau|+1)(|\tau|-1)(|\tau|-2)(\tau-3)(|\tau|-4), & 1 \leq |\tau| < 2 \\ -\frac{1}{120}(|\tau|-1)(|\tau|-2)(|\tau|-3)(\tau-4)(|\tau|-5), & 2 \leq |\tau| < 3 \\ 0, & |\tau| \geq 3 \end{cases} \quad (6.17)$$

где  $\tau = t / T$ .

Графики порождающей функции (6.17) и её спектральной плотности показаны на рис.6.10. Значение граничной частоты приведено в табл.6.1.

### 6.2.5. Локальная полиномиальная интерполяция третьего порядка

Аналогично п.6.2.3 в случае локальной полиномиальной интерполяции при  $M = 3$  получим

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \prod_{n=-3, n \neq 0}^4 (1 + |\tau|/n), & |\tau| < 1 \\ \prod_{n=-2, n \neq 0}^5 (1 + |\tau|/n), & 1 \leq |\tau| < 2 \\ \prod_{n=-1, n \neq 0}^6 (1 + |\tau|/n), & 2 \leq |\tau| < 3, \\ \prod_{n=0, n \neq 0}^7 (1 + |\tau|/n), & 3 \leq |\tau| < 4 \\ 0, & |\tau| \geq 4 \end{cases} \quad (6.18)$$

где  $\tau = t / T$ .

Графики порождающей функции (6.18) и её спектральной плотности показаны на рис.6.11. Значение граничной частоты приведено в табл.6.1.

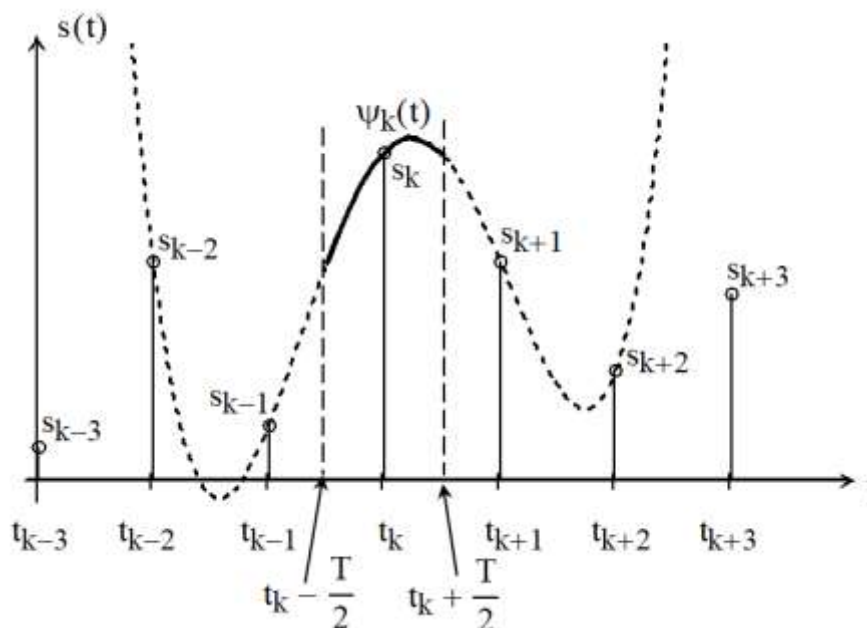
#### 6.4.6. Общая формула для порождающей функции при локальной полиномиальной интерполяции

Обобщая результаты п.п. 6.2.3 – 6.2.5 запишем выражение для порождающей функции интерполяционного базиса при локальной полиномиальной интерполяции при произвольном порядке интерполяции  $M$  :

$$\varphi_0(t) = \sum_{i=0}^{M+1} \prod_{\substack{n=-M+i, \\ n \neq 0}}^{M+i+1} \left( 1 - \frac{|t|}{nT} \right) \text{rect} \left( \frac{|t| - iT - T/2}{T} \right). \quad (6.19)$$

### 6.3. Численная оценка производных аналогового сигнала в моменты дискретизации

Численная оценка производных аналогового сигнала в моменты дискретизации может быть осуществлена путём дифференцирования его интерполирующей функции. К сожалению, интерполяция, рассмотренная в п.6.2 не обеспечивает дифференцируемость интерполирующей функции в моменты дискретизации.



*Рис.6.12. Изменённый подход к формированию интерполирующего фрагмента при локальной полиномиальной интерполяции второго порядка*

Однако геометрический подход к формированию интерполирующей кривой может быть изменён, соответственно текущей за-

даче. На каждом частном интервале  $t \in [t_k - 0,5T, t_k + 0,5T]$  фрагмент интерполирующей функции  $\psi_k(t)$  положим совпадающим с интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным на узле  $(t_k, s_k)$ , а также  $M$  предшествующих и  $M$  последующих узлах (рис.6.12).  $M$  называется порядком интерполяции. На рис. 6.12 показан пример при  $M = 2$ . Вспомогательный многочлен показан пунктирной линией, а сплошной линией отмечен график фрагмента интерполирующей функции  $\psi_k(t)$ . Интерполирующая функция, таким образом, на каждом частном интервале представляет собой многочлен степени  $2M$ .

Линейность интерполяции следует из линейности интерполяции на основе многочлена Лагранжа. Поскольку правила формирования интерполирующей функции одинаковы на каждом интервале дискретизации, метод является регулярным. Симметрия учёта узлов интерполяции указывает на его изотропность.

Так как в формировании интерполирующего фрагмента участвует конечное количество отсчётов, метод интерполяции является локальным и выражение (5.11а) даёт

$$\psi_k(t) = \sum_{m=-M}^M s_{k+m} \varphi_0(t - t_{k+m}). \quad (6.20)$$

Благодаря тому, что узлы стыковки фрагментов интерполирующей функции находятся на середине интервалов дискретизации, интерполирующая функция в моменты дискретизации дифференцируема и приближённый расчёт отсчёта  $l$ -й производной сигнала  $s_k^{(l)}$  в момент  $t_k$  может быть выполнен как

$$s_k^{(l)} = s^{(l)}(t_k) \approx \psi_k^{(l)} = \sum_{m=-M}^M s_{k+m} \varphi_0^{(l)}(t_k - t_{k+m}).$$

Имея в виду, что  $t_k - t_{k+m} = kT - (k+m)T = -mT$ , обозначив

$$d_m^{(l)} = \varphi_0^{(l)}(-mT) \quad (6.21)$$

- коэффициенты алгоритма оценки  $l$ -й производной сигнала, сам алгоритм оценки производной получим в виде:

$$s_k^{(l)} = \sum_{m=-M}^M s_{k+m} d_m^{(l)}. \quad (6.22)$$

Поскольку порождающая функция чётно-симметрична, дополнительно заметим, что

$$\begin{aligned} d_m^{(l)} &= -d_{(-m)}^{(l)}; \quad d_0^{(l)} = 0, \quad l - \text{нечётное}; \\ d_m^{(l)} &= d_{(-m)}^{(l)}, \quad l - \text{чётное}; \\ \sum_{m=-M}^M d_m^{(l)} &= 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Коэффициенты алгоритма дифференцирования удобно определять для единичного периода дискретизации  $T = 1$ . В таком случае будем обозначать их  $\tilde{d}_m^{(l)}$ . Поскольку изменение периода дискретизации приводит к масштабированию порождающей функции, при котором в её выражении  $t$  заменяется на  $t/T$ , то

$$d_m^{(l)} = \frac{\tilde{d}_m^{(l)}}{T^l}. \quad (6.24)$$

Рассмотрим простейший случай  $M = 1$ ,  $T = 1$ . Для нахождения порождающей функции применим геометрические правила формирования интерполяционной кривой на единичном отсчёте.

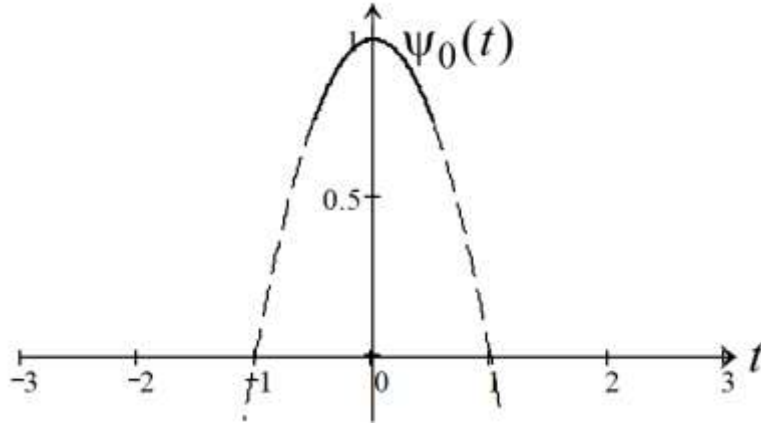


Рис.6.13. Фрагмент порождающей функции на  $t \in [-0,5; 0,5]$

На интервале  $t \in [-0,5; 0,5]$  (рис.6.13) фрагмент порождающей функции  $\psi_0(t)$  совпадает с графиком многочлена, корни которого  $\pm 1$ , принимающим единичное значение в нуле:

$$\psi_0(t) = a_2^{(0)}(t-1)(t+1),$$

$$\psi_0(0) = a_2^{(0)}(0-1)(0+1) = 1,$$

откуда  $\psi_0(t) = (t-1)(t+1)$ .

На интервале  $t \in [0,5; 1,5]$  (рис.6.14) фрагмент порождающей



функции  $\psi_1(t)$  совпадает с графиком многочлена, корни которого 1; 2, принимающим единичное значение в нуле:

$$\psi_1(t) = a_2^{(1)}(t-1)(t-2),$$

$$\psi_1(0) = a_2^{(1)}(0-1)(0-2) = 1,$$

откуда  $\psi_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)$ .

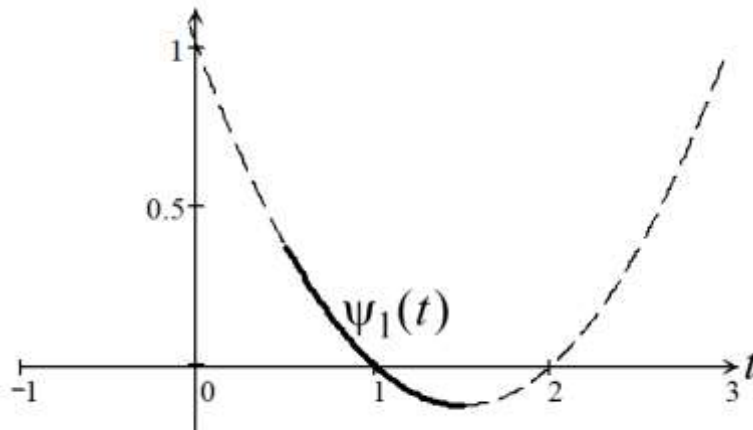


Рис.6.14. Фрагмент порождающей функции на  $t \in [0,5;1,5]$

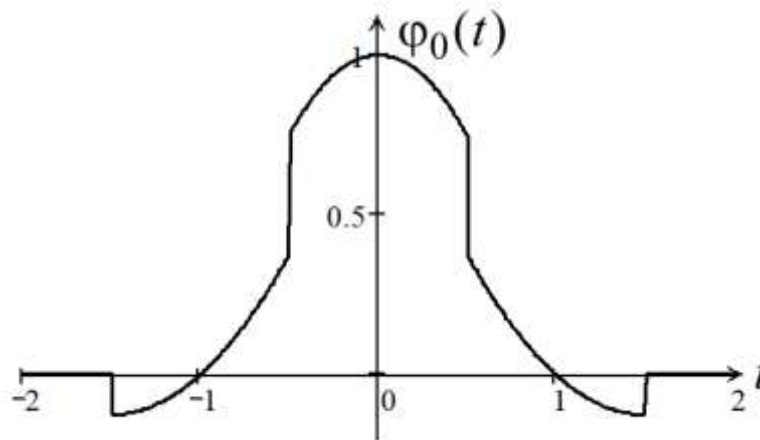


Рис.6.15. Порождающая функция при  $M = 1$ ,  $T = 1$ .

Для узлов, лежащих правее единицы  $t_k > 1$  все ординаты будут нулевыми, что даст и равные нулю фрагменты порождающей функции. Учитывая и изотропность рассматриваемого метода интерполяции, выражение для порождающей функции может быть записано в виде:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} (1-t^2), & |t| < 0,5 \\ \frac{1}{2}(|t|-1)(|t|-2), & 0,5 \leq |t| < 1,5 \\ 0, & |t| \geq 1,5 \end{cases} \quad (6.25)$$

График порождающей функции (6.25) показан на рис.6.16. Обращает на себя внимание наличие разрывов в узлах стыковки фрагментов порождающей функции, которое указывает на возможное наличие разрывов на графике интерполирующей функции в серединах интервалов дискретизации. Однако мы не имеем намерений использовать данный метод для восстановления сигналов, а разработали его в целях оценки производной. Полученный результат, с учётом (6.21), даёт следующие коэффициенты алгоритма оценки первой производной:  $\tilde{d}_{-1}^{(1)} = \varphi'_0(1) = -0,5$ ;  $\tilde{d}_0^{(1)} = \varphi'_0(0) = 0$ ;  $\tilde{d}_1^{(1)} = \varphi'_0(-1) = 0,5$  и из (6.22) сам алгоритм

$$s'_k = \frac{s_{k+1} - s_{k-1}}{2T}. \quad (6.26)$$

Таблица 6.2.

Коэффициенты алгоритмов оценки производной

$M$	$l$	$\tilde{d}_{-3}^{(l)}$	$\tilde{d}_{-2}^{(l)}$	$\tilde{d}_{-1}^{(l)}$	$\tilde{d}_0^{(l)}$	$\tilde{d}_1^{(l)}$	$\tilde{d}_2^{(l)}$	$\tilde{d}_3^{(l)}$
1	1			-1/2	0	1/2		
	2			1	-2	1		
2	1		1/12	-2/3	0	2/3	-1/12	
	2		-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12	
	3		-1/2	1	0	-1	1/2	
	4		1	-4	6	-4	1	
3	1	-1/60	3/20	-3/4	0	3/4	-3/20	1/60
	2	1/90	-3/20	3/2	-49/18	3/2	-3/20	1/90
	3	1/8	-1	13/8	0	-13/8	1	-1/8
	4	-1/6	2	-13/2	28/3	-13/2	2	-1/6
	5	-1/2	2	-5/2	0	5/2	-2	1/2
	6	1	-6	15	-20	15	-6	1

Рассматривая по аналогии случаи больших порядков интерполяции и обобщая результаты, получим выражение для порождающей функции:

$$\varphi_0(t) = \sum_{i=0}^M \prod_{\substack{n=-M+i, \\ n \neq 0}}^{M+i} \left( 1 - \frac{|t|}{nT} \right) \text{rect} \left( \frac{|t| - iT}{T} \right). \quad (6.27)$$

Некоторые коэффициенты алгоритмов дифференцирования, полученные из (6.27) приведены в табл.6.2.

## Литература

### Основная литература

1. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов / О. А. Стеценко. — М.: Высш. шк., 2007. — 432 с. <https://library.mirea.ru/books/39991>
2. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Радио и связь, 1986. — 512 с. <https://library.mirea.ru/books/6969>
3. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 2005. — 462 с. <https://library.mirea.ru/books/875>
4. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие / Д. В. Васильев, М. Р. Витоль, Ю. Н. Горшенков, и др.; К. А. Самойло. — М.: Радио и связь, 1982. — 528 с. <https://library.mirea.ru/books/19694>

### Дополнительная литература

5. Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров: учебное пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1982.
6. Основы цифровой обработки сигналов: Учеб. пособие для вузов / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 753 с. <https://library.mirea.ru/books/831>
7. Сигналы. Теоретическая радиотехника: Справ. пособие / А. Н. Денисенко. — М.: Горячая линия - Телеком, 2005. — 704 с. <https://library.mirea.ru/books/45>
8. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.: ил. — Библиогр.: с. 804 (15 назв.) <https://library.mirea.ru/books/9447>
9. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М.: Наука, 1998. — 608 с. <https://library.mirea.ru/books/4829>

### Пособия и методические указания

10. Радиотехнические цепи и сигналы. Ч. 2 [Электронный ресурс]: метод. указания по выполнению лаб. работ / В. Н. Исаков, Д. Р. Барский. — М.: РТУ МИРЭА, 2019. — Электрон. опт. диск (ISO) <https://library.mirea.ru/share/3274>