8. Непрерывные случайные величины

8.1. Функции распределения и плотности непрерывной случайной величины

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Определение 8.1. *Функция $F(x)$ обладает кусочно непрерывной производной, если её производная $F'(x)$ непрерывна везде, кроме конечного (или бесконечного счётного) множества точек, в которых $F'(x)$ может иметь разрывы 1-го рода.*

В частности, если производная $F'(x)$ непрерывна, то она кусочно непрерывна, т.к. множество точек разрыва пусто.

Определение 8.2. *Случайная величина ξ называется* ***непрерывной****, если её функция $F(x)$ непрерывна и обладает кусочно непрерывной производной $F'(x)$.*

Свойства функции распределения непрерывной случайной величины :

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1,\ F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$;
(2) $P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$;
(3) $F(x)$ не убывает;
(4) $F(x)$ непрерывна;
(5) $P\{\xi = a\} = 0$ для любого числа a.

Определение 8.3. ***Функцией распределения*** *$F(x)$ случайной величины ξ называется вероятность того, что ξ приняла значение меньшее x:*

$$F(x) = P\{\xi < x\}. \tag{8.1}$$

Используя определение функции распределения (8.3), рассмотрим ряд задач и на непрерывные случайные величины.

В соответствии с только что сделанным замечанием вероятность попадания случайной величины в заданный промежуток зависит от скорости роста функции распределения. Поэтому непрерывную случайную величину задают, используя производную от функции распределения.

Определение 8.4. ***Плотностью распределения*** $f(x)$ *(или дифференциальной функцией распределения) непрерывной случайной величины* ξ *называют первую производную от её функции распределения:*

$$f(x) = F'(x). \tag{8.2}$$

Замечание 8.1. *Поскольку функция распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатую форму, для её описания плотность распределения неприменима.*

Свойства плотности распределения:

(1) $f(x) \geqslant 0$;
(2) $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$;
(3) $f(x)$ кусочно непрерывная функция;
(4) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$;
(5) $P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$;
(6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Пример 8.1. *Случайная величина* ξ *задана функцией распределения*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant -2, \\ (x+2)^2 \text{ при } -2 < x \leqslant -1, \\ 1 \text{ при } x > -1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина ξ *примет значение, заключенное в интервале* $(-3/2, -1)$.

►Вероятность того, что ξ примет значение, заключенное в интервале $(-3/2, -1)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$P(-3/2 < \xi < -1) = F(-1) - F(-3/2) = (-1+2)^2 - (-3/2+2)^2 = \dfrac{3}{4}$.◄

Ответ: 0,75.

Пример 8.2. *Непрерывная случайная величина* ξ *задана плотностью распределения* $\varphi(x) = \cos x$ *в интервале* $(0,\pi/2)$*; вне этого интервала* $f(x) = 0$. *Найти вероятность того, что* ξ *примет значение, принадлежащее интервалу* $(\pi/4, \pi/3)$.

►Применим формулу

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

По условию, $a = \pi/4$, $b = \pi/3$, $f(x) = \cos x$. Следовательно, данная вероятность

$P\left(\dfrac{\pi}{4} < \xi < \dfrac{\pi}{3}\right) = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos x dx = \sin x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \approx 0{,}159.$◄

Ответ: $\approx 0{,}159$.

Пример 8.3. *Дана функция распределения непрерывной случайной величины* ξ

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ A(x-1)^2 \text{ при } 1 < x \leqslant 3, \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Найти значение величины A *и плотность распределения* $f(x)$.

►Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 2A(x-1) \text{ при } 1 < x \leqslant 3, \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Для определения A используем свойство функции плотности вероятностей

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Подставляем полученную функцию $f(x)$.

$$\int\limits_1^3 2A(x-1)dx = 2A\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^3 = 2A\left(\left(\frac{9}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right) = 4A.$$

Следовательно, $A = \dfrac{1}{4}$ и

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 0{,}25(x-1) \text{ при } 1 < x \leqslant 3, \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases} \quad ◀$$

Пример 8.4. *ξ – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, заданной следующим образом:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ A(4x - x^2), \text{ если } 0 < x \leqslant 4, \\ 0, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) значение параметра A б) вероятность попадания ξ в интервал $(1; 2)$; в) функцию распределения $F(x)$.

►а)

$$\int_0^4 A(4x - x^2)dx = A\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = A\left(32 - \frac{64}{3} - 0\right) = \frac{32A}{3}.$$

$$\frac{32A}{3} = 1 \qquad \Rightarrow A = \frac{3}{32}.$$

б) Вероятность

$$P(1 < \xi < 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{32}(4x - x^2)dx = A\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{11}{32} \approx 0{,}344.$$

в) Функция распределения $F(x)$ для непрерывной случайной величины даётся формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Если $-\infty < x \leqslant 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

если $0 < x \leqslant 4$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \frac{6x^2 - x^3}{32};$$

если, наконец, $x > 4$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{4} \frac{3}{32}(4t - t^2)dt + \int_{0}^{x} 0dt = 1. \blacktriangleleft$$

Ответ: $P(1 < \xi < 2) = 11/32 \approx 0{,}344$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \dfrac{6x^2 - x^3}{32}, \text{ если } 0 < x \leqslant 4, \\ 1, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Пример 8.5. *Случайная величина ξ имеет на всей числовой оси плотность распределения $f(x) = a/(1 + x^2)$ (закон Коши). Найти коэффициент a и функцию распределения $F(x)$.*

►Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1 + x^2}dx = a \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = a\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a\pi = 1.$$

Отсюда найдем, что $a = 1/\pi$, а плотность распределения $f(x) = 1/\pi(1 + x^2)$. Функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x. \blacktriangleleft$$

Ответ: $a = 1/\pi \approx 0{,}318$, $F(x) = 0{,}5 + \operatorname{arctg}(x)/\pi$.

8.2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Определение 8.5. ***Математическим ожиданием*** *непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $f(x)$ называется:*

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \tag{8.3}$$

Замечание 8.2. *Если $\eta = \varphi(\xi)$ — непрерывная функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то*

$$M(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx, \tag{8.4}$$

где $f(x)$ – плотность распределения ξ.

Определение дисперсии как математического ожидания квадрата отклонения полностью сохраняется для непрерывных случайных величин:

$$D(\xi) = M\big(\xi - M(\xi)\big)^2.$$

Вычисление дисперсии непрерывной случайной величины с учётом замечания 10.1 следует вести по следующей формуле:

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(\xi)\big)^2 f(x) dx. \tag{8.5}$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, приведённые в предыдущей для ДСВ, сохраняются в этом случае.

Если $\eta = \varphi(\xi)$ — функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(\varphi(\xi) - M(\varphi(x))\big)^2 f(x) dx, \tag{8.6}$$

или

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\, dx - M^2(\varphi(\xi)). \tag{8.7}$$

Пример 8.6. *Случайная величина ξ задана плотностью распределения $f(x) = x/8$ в интервале $(0,4)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ.*

►Поскольку плотность равна 0 вне (0, 4),

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int\limits_{0}^{4} x f(x) dx.$$

Подставив $f(x) = x/8$, получим

$$M(\xi) = \frac{1}{8} \int\limits_{0}^{4} x^2 dx = \frac{1}{8} \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^4 = \frac{8}{3} \approx 2{,}667.$$

Дисперсия

$$D(\xi) = \int\limits_{a}^{b} x^2 f(x) dx - M^2(\xi)$$

или

$$D(\xi) = \frac{1}{8} \int_0^4 x^3 dx - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{1}{8} \cdot \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^4 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889. ◄$$

Ответ: $M(\xi) = 8/3 \approx 2{,}667$, $D(\xi) = 8/9 \approx 0{,}889$.

Пример 8.7. *График плотности вероятности случайной величины ξ изображен на рисунке 30 (закон Симпсона). Найти математическое ожидание и дисперсию.*

►Из графика $f(x)$ видно, что плотность вероятности определяется уравнениями:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ при } x \in (-1, 0), \\ -x + 1 \text{ при } x \in (0, 1), \\ 0 \text{ при } x \leqslant -1,\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

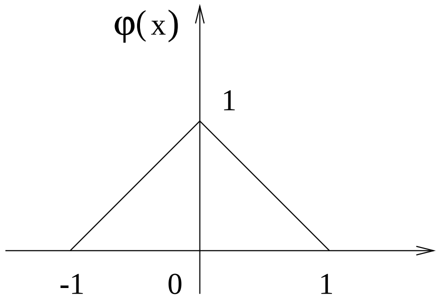

Рис. 30. *График плотности распределения*

Поскольку $f(x)$ задана на интервале $(-1,1)$ двумя аналитическими выражениями, то

$$M(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-1}^{0} x(x+1)dx+\int\limits_{0}^{1} x(-x+1)dx=0.$$

Далее, учитывая, что $M(\xi)=0$, найдем дисперсию

$$D(\xi)=\int\limits_{-1}^{0} x^2(x+1)dx+\int\limits_{0}^{1} x^2(-x+1)dx=\frac{1}{6}\approx 0{,}167.◄$$

Ответ: $M(\xi)=0,\ D(\xi)=1/6\approx 0{,}167$.

Пример 8.8. *Случайная величина ξ задана плотностью распределения $f(x)=A\sin 2x$ в интервале $(0,\pi/2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ.*

►Заданная функция может быть функцией плотностью, если она неотрицательна и площадь между графиком функции и осью абсцисс равна 1. Получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=A\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin 2x dx=-0{,}5A\cos 2x\Big|_0^{\pi/2}=$$
$$=-0{,}5A(\cos\pi-\cos 0)=A.$$

При $A = 1$ все требования к функции плотности выполняются.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} x\sin 2xdx = -0{,}5\int\limits_{0}^{\pi/2} xd\cos 2x =$$
$$= -0{,}5x\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} + 0{,}5\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos 2x\,dx =$$
$$= -0{,}5(\tfrac{\pi}{2}\cos\pi - 0\cos 0) + 0{,}25\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} = \pi/4.$$

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} x^2\sin 2xdx = -0{,}5\int\limits_{0}^{\pi/2} x^2 d\cos 2x =$$
$$= -0{,}5x^2\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} + 0{,}5\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos 2x\,dx^2 = \frac{\pi^2}{8} + \int\limits_{0}^{\pi/2} x\cos 2xdx =$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + 0{,}5\int\limits_{0}^{\pi/2} xd\sin 2x = \frac{\pi^2}{8} + 0{,}5(x\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_{0}^{\pi/2}\sin 2xdx) =$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + 0{,}25\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}.$$

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi^2}{16} = \dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$.◄

Ответ: $M(\xi) == \pi/4,\ D(\xi) = \dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$.

Пример 8.9. *Плотность вероятности распределения Лапласа имеет вид:* $f(x) = \dfrac{\lambda}{2}\cdot e^{-\lambda|x|}$ $(\lambda > 0)$. *Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины* ξ.

►Математическое ожидание

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}dx = \frac{1}{2}\lambda\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{\lambda x}dx + \frac{1}{2}\lambda\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx.$$

Проводя интегрирование по частям, получим $M(\xi) = 0$. Этот результат можно было получить сразу, поскольку подынтегральная функция нечётная.

Аналогично найдем дисперсию

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \dfrac{\sqrt{2}}{\lambda}$.◄

Ответ: $M(\xi) = 0,\ D(\xi) = 2/\lambda^2,\ \sigma(\xi) = \dfrac{\sqrt{2}}{\lambda}$.

Пример 8.10. *Случайная величина эксцентриситета детали характеризуется функцией распределения Рэлея:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{ при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, моду и медиану распределения.

►Плотность вероятности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \dfrac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{ при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Модой распределения $M_0(\xi)$ называется значение аргумента, при котором плотность вероятности достигает максимума. Здесь

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right)$$

и так как $x \geqslant 0$, то $f'(x) = 0$ только при $x = \sigma$. Поскольку $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $x = \sigma$, то f в этой точке будет иметь максимум. Следовательно, мода $M_0(\xi) = \sigma$.

Медианой распределения $M_e(\xi)$ называют величину x, определяемую из равенства $F(x) = 1/2$. В данной задаче

$$1/2 = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad 1/2 = e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Отсюда найдем $x = \sigma\sqrt{2 \cdot \ln 2}$ или $M_e(\xi) = \sigma\sqrt{2 \cdot \ln 2}$. ◄

Задания для самостоятельной работы

Пример 8.11. *Случайная величина ξ задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x) = 1/2 + \mathrm{arctg}(x)/\pi$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина ξ примет значение, заключенное в интервале $(0, \sqrt{3})$.*

Пример 8.12. *Плотность распределения непрерывной случайной величины ξ в интервале $(0, 2)$ задана как $f(x) = Ax^3$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Определить A, найти вероятность того, что ξ*

примет значение, принадлежащее интервалу $(0, 1)$ *и её математическое ожидание.*

Пример 8.13. *Дана функция распределения непрерывной случайной величины* ξ

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1/2 - (1/2)\cos 3x \text{ при } 0 < x \leqslant \pi/3, \\ 1 \text{ при } x > \pi/3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$.

Пример 8.14. *Функция распределения непрерывной случайной величины* ξ *задана выражением*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ ax^3 \text{ при } 0 < x \leqslant 4, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Определить: коэффициент a, *плотность распределения* ξ, *вероятность попадания* ξ *в интервал* $(2, 3)$.

Пример 8.15. *Плотность распределения случайной величины* ξ *имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0 \text{ или } x > \pi, \\ A\sin x, \text{ если } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Найти A, *функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.*

Пример 8.16. *Случайная величина* ξ *имеет плотность вероятности* $f(x) = (2/\pi) \cdot \cos^2 x$ *при* $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ *и* $f(x) = 0$ *вне указанного интервала. Найти среднее квадратическое отклонение величины* ξ.

Домашнее задание.

Выполнить задание 1.10 типового расчёта.