Лекция №14

Интегралы, зависящие от параметра

1. Собственный интеграл, зависящий от параметра

Определение. Пусть для каждого y ∈ Y функция f (x, y) интегрируема в смысле Римана на отрезке $[a(y); b(y)]$. Тогда функция

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$$

называется *собственным интегралом, зависящим от параметра y*.

Теорема (*о предельном переходе под знаком интеграла***).**
Если функция $f(x, y)$ при постоянном $y \in Y$ интегрируема по x в $[a, b)$, и при $y \to y_0$ стремится к $\phi(x)$ равномерно относительно x, то
$\lim\limits_{y\to y_0} I(y) = \lim\limits_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \phi(x)\,dx.$

Теорема (*о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра***).** Пусть $D=[a; b]\times[c; d]$, $f(x, y)$ непрерывна на D. Тогда интеграл

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \text{ -}$$

непрерывная функция параметра y на $[c; d]$.

Теорема (*о дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра* (*правило Лейбница*)). Пусть $D = [a; b] \times [c; d]$, функция $f(x, y)$ непрерывна по x в $[a; b]$ при любом $y \in [c; d]$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C(D)$, т.е непрерывна на D. Тогда при любом $y \in [c; d]$

$$I'(y) = \int_a^b f'_y\,(x, y)\,dx.$$

Случай, когда пределы интегрирования зависят от параметра.

Теорема (*об интегрировании собственного интеграла, зависящего от параметра*)**.** Пусть $D = [a; b] \times [c; d]$, $f(x, y)$ непрерывна на D, и $I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ при $y \in [c; d]$. Тогда

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy\right) dx.$$

2. Несобственный интеграл, зависящий от параметра

Определение. Пусть функция $f(x, y)$ задана для всех $x \geq a$ и для всех $y \in Y$. Пусть при каждом существует интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx.$$

Тогда функция $I(y)$ называется *несобственным интегралом*, *зависящим от параметра y*.

Равномерная сходимость несобственных интегралов

Пусть Y — множество сходимости интеграла $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx.$

Определение. Будем говорить, что *интеграл $I(y)$ сходится равномерно на Y*, если все функции $I(b, y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ сходятся равномерно к функции $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$ при $b \to \infty$ на Y.

Признаки равномерной сходимости интегралов

Признак Вейерштрасса.

Пусть для семейства функций $f(x, y)$, интегрируемых на $[a;\ +\infty)$ при всех $y \in Y$, существует такая функция $g(x)$, что при всех $x \in [a;\ +\infty)$ и $y \in Y$ справедливо неравенство $|f(x, y)| \leq g(x)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ сходится. Тогда интеграл $I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx$ сходится абсолютно и равномерно на множестве Y.

Функция $g(x)$, такая, что $|f(x, y)| \leq g(x)$ при всех $x \in [a;\ +\infty)$ и $y \in Y$, называется *мажорантой* семейства $f(x, y)$ на множестве Y.

Признак Вейерштрасса представляет собой аналог теоремы сравнения для несобственных интегралов, не зависящих от параметра.

Как и функциональные ряды, интегралы исследуют на равномерную сходимость с помощью ряда признаков.

Вычисление интегралов Эйлера

Значительное применение в решении многих задач высшей математики и прикладных вопросов имеют интегралы, зависящие от параметра, в частности, интегралы Эйлеры. Следующий параграф посвящен рассмотрению таких интегралов, их свойств и применению.

Определение. *Гамма-функцией* называется $\Gamma(p)$, определяемая равенством

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx,$$

где p – любое комплексное число, $Re\, p > 0$.

Основные свойства $\Gamma(p)$:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ – формула приведения
3. $\Gamma(n+1) = n!$
4. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ – формула дополнения, $0 < p < 1$
5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Определение. *Бета-функция* определяется формулой *(для $p > 0$, $q > 0$)*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Свойства $B(p,q)$:

1. $B(p,q) = B(q,p)$
2. $B(p,q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$
3. $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Пример.

Вычислить $I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$, $a > 0$.

Решение. Сделаем замену $\frac{x^2}{a^2} = t$, т.е. $x = a\sqrt{t}$, $dx = \frac{a\,dt}{2\sqrt{t}}$, пределы интегрирования изменятся $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = a \Rightarrow t = 1$.

Подставляя в интеграл, получим

$$I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^1 \frac{a^2t\sqrt{a^2-a^2t}}{2\sqrt{t}}a\,dt = \frac{a^4}{2}\int_0^t t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt.$$

Это есть Бета-функция

$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$.

Найдем p и q, используя определение, т.е. сопоставим полученное выражение интеграла с определением

$$I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_0^1 \frac{a^2 t\sqrt{a^2 - a^2 t}}{2\sqrt{t}} a\, dt = \frac{a^4}{2}\int_0^t t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt,$$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Получаем

$p - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{3}{2}, q - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{3}{2}.$

Тогда

$$I = \frac{a^4}{2}\int_0^t t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{a^4}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)},$$

Теперь используем свойства Гамма-функции.

Заметим $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma(3) = 2!$.

Тогда получаем

$$I = \frac{a^4}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2}{2!} = \frac{a^4}{2}\frac{1}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

Ответ: $I = \frac{\pi a^4}{16}$.

<u>Пример</u>. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{20} dx$

Решение. Сделаем замену переменной $t = \ln\frac{1}{x} \Rightarrow x = e^{-t},\ dx = -e^{-t}dt$, пределы интегрирования также изменятся

при $x \to 0^-$ $t \to +\infty$,

при $x = 1$ $t = 0$.

Будем использовать определение $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$.

Заданный интеграл примет вид (используем замену)

$$I = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{20} dx = -\int_\infty^0 t^{20}e^{-t}dt = \Gamma(21).$$

Вычислим $\Gamma(21) = 20!$ (по свойству Γ- функции), т.е. $I = 20!$.

<u>Пример.</u>

Вычислить интеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^4 x\, dx$ с помощью $\Gamma -$, $\mathrm{B} -$функций.

Решение. Сделаем замену $t = \sin^2 x$, тогда $dx = \frac{dt}{2\sin x \cos x}$, пределы интегрирования изменятся так:

$x = 0 \Rightarrow t = 0$,

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Используем определение Beta-функции

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Заданный интеграл примет вид (на основе замены)

$$I = \int_0^1 \frac{t^4(1-t)^2dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{4-\frac{1}{2}}(1-t)^{2-\frac{1}{2}}dt.$$

Сопоставим полученную запись интеграла с определением Beta-функции, найдем p и q:

$p - 1 = 4 - \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{9}{2}$,

$q - 1 = 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{5}{2}$.

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}B\left(\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}+\frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(7)}.$$

Вычислим, используя свойства Г-функции

$\Gamma(7) = 6!$,

$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}$,

$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) =$

$= \frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2^2}\sqrt{\pi} = \frac{7\cdot5\cdot3}{2^4}\sqrt{\pi}$.

Окончательно получаем,

$$I = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{2^4}\sqrt{\pi} \cdot \frac{3}{2^2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{7\pi}{2^{11}}.$$

Ответ. $I = \frac{7\pi}{2^{11}}$.