

Лекция 8

4.5.1 Прохождение через границу раздела сред. Случай перпендикулярной поляризации

Геометрия задачи показана на рис.4.7.

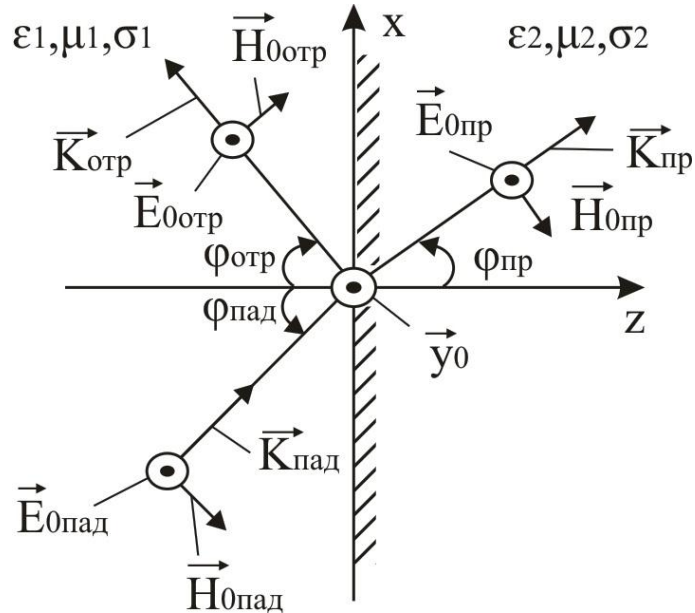


Рис.4.7. Прохождение плоской волны с перпендикулярной поляризацией через границу раздела сред.

На рисунке обозначено:

$\vec{k}_{пад}, \vec{k}_{отр}, \vec{k}_{пр}$ - волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн, соответственно;

$\vec{E}_{0пад}, \vec{E}_{0отр}, \vec{E}_{0пр}$ - векторные амплитуды напряженностей электрического поля падающей, отраженной и преломленной волн, соответственно;

$\vec{H}_{0пад}, \vec{H}_{0отр}, \vec{H}_{0пр}$ - векторы амплитудных напряженностей магнитного поля падающей, отраженной и преломленной волн;

$\phi_{пад}, \phi_{отр}, \phi_{пр}$ - углы относительно нормали к границе раздела, под которыми распространяются падающая, отраженная и преломленная волны.

Также на рисунке учтено, что поляризация (ориентация) векторов \vec{E}_0 всех волн сохраняется; направление векторов \vec{H}_0 определяется свойством поперечности плоских волн и заданными направлениями распространения. Вектора \vec{E}_0 , \vec{H}_0 и $\vec{k}_{пад}, \vec{k}_{отр}, \vec{k}_{пр}$ образуют правые тройки для всех волн. Учитывая геометрические обозначения рисунка, выражение (4.45) для падающей, отраженной и преломленной волн можно записать в следующем виде, учитывая, что $|\vec{k}_{пад}| = |\vec{k}_{отр}| = k_1; |\vec{k}_{пр}| = k_2$:

$$\begin{cases}
\vec{E}_{na\partial} = E_{0na\partial} \vec{y}_0 e^{-jk_1(x \sin \phi_{na\partial} + z \cos \phi_{na\partial})}, \\
\vec{H}_{na\partial} = H_{0na\partial} (-\cos \phi_{na\partial} \vec{x}_0 + \sin \phi_{na\partial} \vec{z}_0) e^{-jk_1(x \sin \phi_{na\partial} + z \cos \phi_{na\partial})} \\
\vec{E}_{omp} = E_{0omp} \vec{y}_0 e^{-jk_1(x \sin \phi_{omp} - z \cos \phi_{omp})}, \\
\vec{H}_{omp} = H_{0omp} (\cos \phi_{omp} \vec{x}_0 + \sin \phi_{omp} \vec{z}_0) e^{-jk_1(x \sin \phi_{omp} - z \cos \phi_{omp})} \\
\vec{E}_{np} = E_{0np} \vec{y}_0 e^{-jk_2(x \sin \phi_{na\partial} + z \cos \phi_{na\partial})}, \\
\vec{H}_{np} = H_{0np} (-\cos \phi_{np} \vec{x}_0 + \sin \phi_{np} \vec{z}_0) e^{-jk_2(x \sin \phi_{np} + z \cos \phi_{np})}
\end{cases} \quad (4.47)$$

В этих выражениях известны все параметры падающей волны, а величины E_{0omp} , H_{0omp} , ϕ_{omp} , E_{0np} , H_{0np} , ϕ_{np} неизвестны и должны быть определены. Для их нахождения используем граничные условия на границе раздела сред. Считаем, что среды реальные, поэтому выражения (2.8, 2.10) имеют вид:

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}; \quad H_{\tau_1} = H_{\tau_2}.$$

Полное поле в первой среде является суммой падающей и отраженной волн, а во второй среде – является полем только преломленной волны. Тангенциальными составляющими являются проекции векторов на оси X и Y , поэтому в данном случае граничные условия принимают вид:

$$E_{yna\partial} \Big|_{z=0} + E_{yomp} \Big|_{z=0} = E_{ynp} \Big|_{z=0},$$

$$H_{xna\partial} \Big|_{\tau=0} + H_{xomp} \Big|_{\tau=0} = H_{xnp} \Big|_{\tau=0}.$$

Подстановка в эти выражения составляющих из (4.47) дает:

$$E_{0na\partial} e^{-jk_1 x \sin \phi_{na\partial}} + E_{0omp} e^{-jk_1 x \sin \phi_{omp}} = E_{0np} e^{-jk_2 x \sin \phi_{np}}; \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}
& -H_{0na\partial} \cos \phi_{na\partial} e^{-jk_1 x \sin \phi_{na\partial}} + H_{0omp} \cos \phi_{omp} e^{-jk_1 x \sin \phi_{omp}} = \\
& = -H_{0np} \cos \phi_{np} e^{-jk_2 x \sin \phi_{np}}.
\end{aligned}$$

Граничные условия должны выполняться в каждой точке границы одинаково и не зависеть от координаты x , т.к. все точки границы одинаковы и начало координат выбрано произвольно. Поэтому выражения (4.48) необходимо преобразовать так, чтобы зависимость от координаты x исчезла. Это можно сделать, приравняв показатели всех экспонент, тогда экспоненциальные множители, содержащие координату x можно сократить.

$$-jk_1 x \sin \phi_{na\partial} = -jk_1 x \sin \phi_{omp} = -jk_2 x \sin \phi_{np},$$

$$\text{или } \phi_{na\partial} = \phi_{omp}, \quad \phi_{np} = \arcsin \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \phi_{na\partial} \right); \quad (4.49)$$

$$\text{или } k_i \sin \phi_i = \text{const}. \quad (4.50)$$

Выражения (4.49) были получены в оптике экспериментально и известны как закон Снеллиуса; выражение (4.50) называется обобщенным законом Снеллиуса.

Преобразуем (4.48), учитывая (4.49):

$$\begin{cases} E_{0na\partial} + E_{0omp} = E_{0np}, \\ H_{0na\partial} \cos \phi_{na\partial} - H_{0omp} \cos \phi_{omp} = H_{0np} \cos \phi_{np}. \end{cases} \quad (4.51)$$

Амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей плоской волны связаны через волновое сопротивление:

$$\frac{E_{0na\partial}}{H_{0na\partial}} = W_1; \quad \frac{E_{0omp}}{H_{0omp}} = W_1; \quad \frac{E_{0np}}{H_{0np}} = W_2.$$

Поэтому (4.51) можно преобразовать:

$$\begin{cases} E_{0na\partial} + E_{0omp} = E_{0np}, \\ \frac{E_{0na\partial}}{W_1} \cos \phi_{na\partial} - \frac{E_{0omp}}{W_1} \cos \phi_{omp} = \frac{E_{0np}}{W_2} \cos \phi_{np}. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений относительно E_{0omp} и E_{0np} :

$$\begin{aligned} E_{0omp} &= E_{0na\partial} \frac{W_2 \cos \phi_{na\partial} - W_1 \cos \phi_{np}}{W_2 \cos \phi_{na\partial} + W_1 \cos \phi_{np}}, \\ E_{0np} &= E_{0na\partial} \frac{2W_2 \cos \phi_{na\partial}}{W_2 \cos \phi_{na\partial} + W_1 \cos \phi_{np}}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Используем определение.

Коэффициент отражения Γ плоской волны от границы раздела сред – это отношение комплексной амплитуды напряженности электрического поля отраженной волны к комплексной амплитуде падающей волны, вычисляемое на границе раздела.

Коэффициент преломления T плоской волны на границе раздела сред – это отношение комплексной амплитуды напряженности электрического поля преломленной волны к комплексной амплитуде падающей волн, вычисляемое на границе раздела сред.

С учетом определений для случая перпендикулярной поляризации имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp} &= \frac{W_2 \cos \phi_{na\partial} - W_1 \cos \phi_{np}}{W_2 \cos \phi_{na\partial} + W_1 \cos \phi_{np}}, \\ T_{\perp} &= \frac{2W_2 \cos \phi_{na\partial}}{W_2 \cos \phi_{na\partial} + W_1 \cos \phi_{np}}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Подставим сюда значения волновых сопротивлений и значение угла преломления из (4.49):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\perp} &= \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \phi_{nad} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \phi_{nad}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \phi_{nad} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \phi_{nad}}}, \\
T_{\perp} &= \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \phi_{nad}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \phi_{nad} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \phi_{nad}}}.
\end{aligned}
\tag{4.54}$$

Эти выражения известны как формулы Френеля для перпендикулярной поляризации. Подстановка найденных значений в (4.47) дает полное решение задачи прохождения плоской волны через границу раздела сред для случая перпендикулярной поляризации.

4.5.2. Случай параллельной поляризации

Для решения этой задачи необходимо проделать те же выкладки, аналогично материалу подраздела 4.5.1. В результате получатся формулы Френеля для параллельной поляризации. Поскольку определения Γ и T будут аналогичными, случаи перпендикулярной и параллельной поляризации являются взаимосвязанными. Действительно, при угле падения равном нулю невозможно однозначно определить плоскость падения, поэтому случаи обеих поляризаций сливаются в один, значит, формулы Френеля должны иметь одинаковый вид при $\phi_{nad} = 0$. Это накладывает ограничения на исходное геометрическое построение. На рис.4.8 показана геометрия задачи с учетом сделанного замечания.

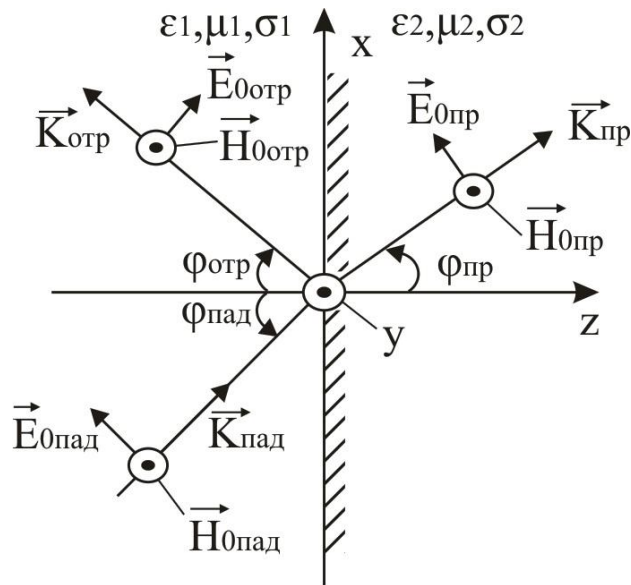


Рис.4.8 Прохождение плоской волны с параллельной поляризацией через границу раздела сред

Обозначения на рис.4.8 аналогичны обозначениям на рис.4.7.

Записываем выражение для всех плоских волн задачи:

$$\begin{cases} \vec{E}_{nad} = E_{0nad}(\vec{x}_0 \cos \phi_{nad} - \vec{z}_0 \sin \phi_{nad}) e^{-jk_1(x \sin \phi_{nad} + z \cos \phi_{nad})}, \\ \vec{H}_{nad} = H_{0nad} \vec{y}_0 e^{-jk_1(x \sin \phi_{nad} + z \cos \phi_{nad})}. \end{cases} \quad (4.55)$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{omp} = E_{0omp}(\vec{x}_0 \cos \phi_{omp} + \vec{z}_0 \sin \phi_{nad}) e^{-jk_1(x \sin \phi_{omp} - z \cos \phi_{omp})}, \\ \vec{H}_{omp} = -H_{0omp} \vec{y}_0 e^{-jk_1(x \sin \phi_{omp} - z \cos \phi_{omp})}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{np} = E_{0np}(\vec{x}_0 \cos \phi_{np} - \vec{z}_0 \sin \phi_{np}) e^{-jk_2(x \sin \phi_{np} + z \cos \phi_{np})}, \\ \vec{H}_{np} = H_{0np} \vec{y}_0 e^{-jk_2(x \sin \phi_{np} + z \cos \phi_{np})}. \end{cases}$$

Вновь отмечаем, что выражения (4.55) содержат неизвестные величины E_{0omp} , H_{0omp} , E_{0np} , H_{0np} , ϕ_{omp} , ϕ_{np} , которые можно найти, применяя граничные условия. Тангенциальными составляющими относительно границы раздела являются составляющие векторов поля по координатам X и Y. Поэтому граничные условия дают следующие выражения:

$$\begin{cases} E_{xnad}|_{z=0} + E_{xomp}|_{z=0} = E_{xnp}|_{z=0}, \\ H_{ynad}|_{z=0} + H_{yomp}|_{z=0} = H_{ynp}|_{z=0}. \end{cases}$$

Подстановка в эти выражения составляющих из (4.55) дает:

$$\begin{cases} E_{0nad} \cos \phi_{nad} e^{-jk_1 x \sin \phi_{nad}} + E_{0omp} \cos \phi_{omp} e^{-jk_1 x \sin \phi_{omp}} = \\ = E_{0np} \cos \phi_{np} e^{-jk_2 x \sin \phi_{np}}, \\ H_{0nad} e^{-jk_1 x \sin \phi_{nad}} - H_{0omp} e^{-jk_1 x \sin \phi_{omp}} = H_{0np} e^{-jk_2 x \sin \phi_{np}}. \end{cases}$$

Проводя рассуждения о выполнении граничных условий, аналогичные сделанным, для предыдущего случая получаем соотношения (4.49) и (4.50), известные как закон Снеллиуса. Учитывая это, имеем:

$$\begin{cases} E_{0nad} \cos \phi_{nad} + E_{0omp} \cos \phi_{omp} = E_{0np} \cos \phi_{np}, \\ H_{0nad} - H_{0omp} = H_{0np}. \end{cases}$$

Вновь используем взаимосвязь между амплитудами напряженностей электрического и магнитного полей через волновые сопротивления сред, аналогично предыдущему случаю, и получаем:

$$\begin{cases} E_{0nad} \cos \phi_{nad} + E_{0omp} \cos \phi_{omp} = E_{0np} \cos \phi_{np}, \\ \frac{E_{0nad}}{W_1} - \frac{E_{0omp}}{W_1} = \frac{E_{0np}}{W_2}. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений относительно E_{0omp} и E_{0np} , и сразу же используем определения коэффициентов отражения и преломления. Для случая параллельной поляризации получаем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\parallel} &= \frac{E_{0omp}}{E_{0nad}} \Big|_{z=0} = \frac{W_2 \cos \phi_{np} - W_1 \cos \phi_{nad}}{W_2 \cos \phi_{np} + W_1 \cos \phi_{nad}}, \\ T_{\parallel} &= \frac{E_{0np}}{E_{0nad}} \Big|_{z=0} = \frac{2W_2 \cos \phi_{np}}{W_2 \cos \phi_{np} + W_1 \cos \phi_{nad}}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Подставляя сюда выражения для волновых сопротивлений сред и значение угла преломления, получаем формул Френеля для случая параллельной поляризации:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\parallel} &= \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \phi_{nad}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \phi_{nad}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \phi_{nad}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \phi_{nad}}, \\ T_{\parallel} &= \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \phi_{nad}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \phi_{nad}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \phi_{nad}}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Отметим, что формулы (4.57) совпадают с формулами (4.54) при $\phi_{nad} = 0$.

4.5.3 Дополнительные замечания к подразделу 4.5.

Анализ полученных в разделе 4.5 результатов позволяет сделать ряд важных замечаний.

4.5.3.1. В средах с потерями при $tg\delta \neq 0$ выражения для полей, полученные в подразделе, видоизменяются соответственно пункту 4.3.3, в частности изменяется вид формул (4.49) и (4.50). Так обобщенный закон Снеллиуса пример вид $k_i' \sin \phi_i = const$.

4.5.3.2. Для случая параллельной поляризации при отсутствии потерь существует такой угол падения, при котором коэффициент отражения становится равным нулю. Отраженная волна исчезает, и вся энергия поля падающей волны переходит во вторую среду. Такое явление называется полным преломлением, а соответствующий ему угол падения называется углом Брюстера.

4.5.3.3. В том случае, если $\mu_1 \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \mu_2$ существует такой угол падения, при котором угол преломления становится равным 90° . При этом, во второй среде формируется электромагнитное поле, которое называется

поверхностной волной или неоднородной плоской волной. Поле характеризуется тем, что его амплитуда экспоненциально убывает при удалении от границы раздела сред, а фазовая скорость направлена вдоль границы. Энергия падающей волны в среднем за период колебаний во вторую среду не поступает. Такое явление называется полным внутренним отражением, а соответствующий ему угол падения называется углом полного внутреннего отражения.

4.5.3.4. При падении плоской волны на границу раздела с металлом угол преломления стремится к нулю с учетом замечания 4.5.3.1 и оценки k' сделанной в 4.3.4. Т.к. плоская волна в металле остается поперечной, то вектора поля в металле являются почти параллельными границе раздела:

$$E_{2\tau} \approx E_2 \text{ и } H_{2\tau} \approx H_2,$$

поэтому граничные условия для тангенциальных составляющих поля на границе воздух – металл можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau}, & E_{1\tau} &\approx E_2, \\ H_{1\tau} &= H_{2\tau}, & \text{или} & \\ & & H_{1\tau} &\approx H_2. \end{aligned}$$

Вычисляя отношение выражений, получаем:

$$\frac{E_{1\tau}}{H_{1\tau}} \approx W_2. \quad (4.58)$$

Это выражение известно как приближенное импедансное граничное условие Щукина – Леонтовича. Оно часто применяется при решении задач излучения и дифракции электромагнитных волн в присутствии реальных металлов.

4.5.3.5. Из выражений (4.54) и (4.57) следует, что при угле падения, стремящемся к 90° , численное значение модуля коэффициента отражения от границы раздела сред стремится к единице.