Лекция №3

§ 2. Функции комплексного переменного:

предел, непрерывность, дифференцирование функции комплексного переменного, аналитические функции

2.2 Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть функция $f(z)$ определена и однозначна в некоторой окрестности точки z_0, кроме, быть может, самой точки z_0.

Определение 2.8. *Комплексное число A называется пределом однозначной функции $f(z)$ в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall z, \text{такого что } 0 < |z - z_0| < \delta, \Rightarrow$$

$|f(z) - A| < \varepsilon.$ z_0 *и* A *– конечные точки комплексной плоскости.*

Определение 2.9. *Однозначная функция $f(z)$, заданная в области D, называется непрерывной в точке $z_0 \in D$, если* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D, называется непрерывной в этой области.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы функция комплексной переменной $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$ по совокупности переменных x и y.*

Таким образом, функция w = $f(z)$ непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в этой же точке. Поэтому все свойства непрерывных функций двух действительных переменных переносятся без изменений на функции комплексного переменного.

Пример. Вычислить предел функции $\lim\limits_{z \to -2i} \frac{z^2+iz+2}{z+2i}$.

Решение. Непосредственная подстановка в числитель и знаменатель предельного значения аргумента $z = -2i$ обращает их в нуль и приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим числитель на множители, сократим на $(z + 2i)$, получим

$$\lim_{z \to -2i} \frac{z^2 + iz + 2}{z + 2i} = \lim_{z \to -2i} \frac{(z + 2i)(z - i)}{z + 2i} = \lim_{z \to -2i} (z - i) = -3i.$$

2.3 Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z. Пусть точки z и $z + \Delta z$ принадлежат области D. Обозначим

$$\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z), \qquad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Определение 2.10. *Однозначная функция* $\omega = f(z)$ *называется дифференцируемой в точке* $z \in D$, *если отношение* $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ *имеет конечный предел при* Δz, *стремящемся к нулю. Этот предел называется производной функции* $f(z)$ *в данной точке* z *и обозначается* $f'(z)$ *или* ω', *т.е.*

$$\omega' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}.$$

Обычные правила дифференцирования функций действительного переменного остаются справедливыми для функций комплексного переменного.

Определение 2.11. *Однозначная функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если она дифференцируема в самой точке z_0 и в некоторой окрестности этой точки.*

Теорема 2.2. *Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x, y) и чтобы в этой точке имели место равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

называемые условиями Коши-Римана. При этом формулы для производной функции $f'(z)$ имеют вид:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

<u>Пример</u>. Исследовать функцию $f(z) = z^2$ на аналитичность.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции, подставив вместо $z = x + iy$:

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

т. е.

$$\mathrm{Re} f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2, \mathrm{Im} f(z) = v(x, y) = 2xy.$$

Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы во всех точках (x, y). Проверим выполнение теоремы 2.2.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

Условия Коши-Римана выполнены во всех точках (x, y), т.е. выполнены условия теоремы 2.2, следовательно, $f(z) = z^2$ аналитическая функция на всей комплексной плоскости.

Пример. Исследовать функцию $f(z)=3\overline{z}+2$ на аналитичность.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции, подставим вместо $\overline{z}=x-iy$

$$f(z)=3(x-iy)+2=(3x+2)-3yi,$$

т.е.

$$\mathrm{Re}f(z)=u(x,y)=3x+2, \mathrm{Im}f(z)=v(x,y)=-3y.$$

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы во всех точках (x,y), проверим выполнение условий теоремы 2.2

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3, \frac{\partial v}{\partial y}=-3, \frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ - первое условие Коши-Римана не выполнено ни в одной точке комплексной плоскости. Значит, функция $\omega(z)=3\overline{z}+2$ нигде не дифференцируема, а следовательно, не является аналитической.

Пример. Исследовать функцию $f(z)=e^z$ на аналитичность.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции

$f(z)=e^z=e^x cosy+ie^x siny$, т.е.

$\mathrm{Re}f(z)=u(x,y)=e^x cosy$ – действительная часть функции,

$\mathrm{Im}f(z)=v(x,y)=e^x siny$ - мнимая часть функции.

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы во всех точках (x,y), проверим выполнение условий теоремы 2.2

$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x cosy$, $\frac{\partial v}{\partial y}=e^x cosy$, получаем $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ во всех точках (x,y)

$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x siny$, $\frac{\partial v}{\partial x}=e^x siny$, получаем $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ во всех точках (x,y)

Таким образом, $f(z)=e^z$ дифференцируема во всех точках z и аналитическая на всей комплексной плоскости.

Свойства аналитических функций

Если $f_1(z), f_2(z)$ аналитические функции в области D, то

1) $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z) \cdot f_2(z)$ – также аналитические функции в области D;

2) $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ - аналитическая функция во всех точках области D, где $f_2(z) \neq 0$.

При этом имеют место формулы

$$[f_1(z) \pm f_2(z)]' = f_1'(z) \pm f_2'(z),$$

$$[cf_1(z)]' = cf_1'(z), \left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \frac{f_1'(z)f_2(z) - f_2'(z)f_1(z)}{f_2^2(z)},$$

$$[f_1(z) \cdot f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z).$$

Пример. Исследовать функцию $f(z) = \frac{1}{z+5i}$ на аналитичность.

Решение. По свойствам аналитических функций заданная функция является аналитической на всей комплексной плоскости за исключением точки $z = -5i$.

Пример. Исследовать функцию $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$ на аналитичность.

Решение. По свойствам аналитических функций заданная функция является аналитической на всей комплексной плоскости за исключением точек, где знаменатель равен нулю, т.е. за исключением

$z = -3i$ и $z = 3i$.

Связь аналитических и гармонических функций, геометрический смысл модуля и аргумента производной, конформные отображения

2.4. Связь аналитических и гармонических функций

Определение 2.12. *Функция $\psi(x,y)$ называется гармонической в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$$

Теорема 2.3. *Если функция*

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *аналитична в некоторой области* D *комплексной плоскости, то ее действительная часть* $u(x,y)$ *и мнимая часть* $v(x,y)$ *являются гармоническими функциями в соответствующей области плоскости (xy), т. е.* $u(x,y)$, $v(x,y)$ *удовлетворяют уравнению Лапласа:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Определение 2.13. *Две гармонические функции, связанные условиями Коши-Римана, называются сопряженными.*

Пример.

Показать, что функция $u(x,y)=x^2-y^2+x$ является гармонической. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по действительной части $u(x,y)$ и условию $f(0)=2$.

Решение. Найдем частные производные функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+1,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2.$$

Сложим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0.$ Получаем, что функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической.

Функция $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ и искомая функция $v(x,y)$ должны удовлетворять условиям Коши-Римана. Используя одно из условий Коши-Римана, имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1$.

Интегрируем последнее уравнение по y (считая x постоянной), получаем

$$v(x,y) = \int (2x+1)\,dy + c(x) = (2x+1)y + c(x). \qquad (2.5)$$

Чтобы найти $c(x)$, используем второе условие Коши-Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

Для этого дифференцируем $v(x,y)$ по переменной x и приравняем выражения: $2y + c'(x) = 2y$, т.е. $c'(x) = 0$. Отсюда находим $c(x) = c_1$, где c_1 – постоянная, т.е. $v(x,y) = (2x+1)y + c_1$. Следовательно,

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 + x + i[(2x+1)y + c_1].$$

Тогда $f(z) = z^2 + z + ic_1$.

Для нахождения c_1 воспользуемся условием $f(0) = 2$, $2 = ic_1$, т.е. $c_1 = -2i$, окончательно $f(z) = z^2 + z + 2$.

2.5 Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Примеры конформных отображений

Рассмотрим функцию $\omega = f(z)$, аналитическую в точке z_0 , $f'(z_0) \neq 0$. Тогда $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $\omega = f(z)$ плоскости z на плоскость ω:

при $|f'(z_0)| > 1$ имеет место растяжение,

при $|f'(z_0)| < 1$ имеет место сжатие.

Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости z, проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $\omega_0 = f(z_0)$ к образу этой кривой на плоскости ω при отображении $\omega = f(z)$.

Определение 2.14. *Отображение окрестности точки* z_0 *на окрестность точки* ω_0, *осуществляемое функцией* $\omega = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$ *и обладающее в точке* z_0 *свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжений, называется конформным в точке* z_0.

Свойство сохранения углов означает: если при отображении $\omega = f(z)$ кривые γ_1 и γ_2 переходят соответственно в кривые Γ_1 и Γ_2, то угол φ между касательными k_1 и k_2 к кривым γ_1 и γ_2 в точке z_0 будет равен угла Φ между соответствующими касательными K_1 и K_2 к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке ω_0, т.е. $\Phi = \varphi$ (см. рис. 9).

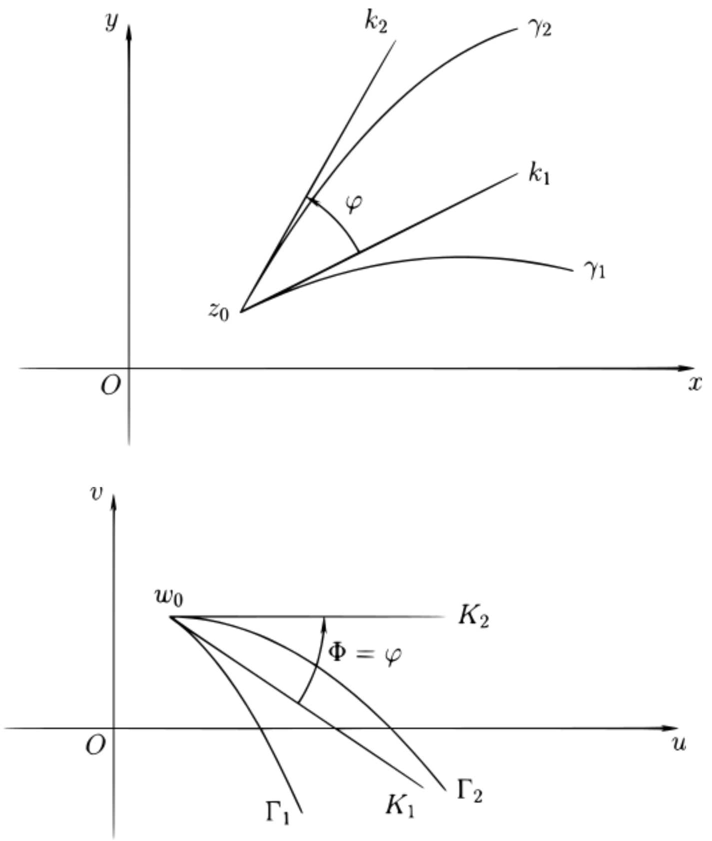


Рис. 1

Свойство постоянства растяжений: при отображении, осуществляемом аналитической функцией, $f'(z_0) \neq 0$ «малые элементы» в окрестности точки z_0 преобразуются подобным образом с коэффициентом $k = |f'(z_0)|$.

Рассмотрим примеры конформных отображений, осуществляемые линейной функцией $\omega = az + b$ и степенной $\omega = z^n$.

1. ***<u>Линейная функция</u>*** $\boldsymbol{\omega = az + b}$, где a и b – постоянные комплексные числа $(a \neq 0)$. Пусть $a = re^{i\alpha}$, $z = |z|e^{i\psi}$. Рассмотрим два преобразования, составляющие функцию ω:

$\omega_1 = az,$

$\omega = \omega_1 + b,$

$\omega_1 = re^{i\alpha} \cdot |z|e^{i\psi} = r|z|e^{i(\alpha+\psi)},$

т.е. $\omega_1 = r|z|$, $arg\omega_1 = \psi + \alpha$. Значит, функция ω_1 осуществляет преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом, равным r и поворот вокруг начала координат на угол α.

Преобразование $\omega = \omega_1 + b$ – параллельный перенос на вектор, соответствующего комплексному числу b.

Таким образом, при отображении $\omega = az + b$ нужно вектор z повернуть на угол $\alpha = arga$, изменить его длину в $r = |a|$ раз и параллельно перенести на вектор b.

<u>Пример.</u> Определить область D_2 плоскости ω, на которую отобразится область D_1 плоскости z функцией $\omega = (1-i)z + \omega_1$.

Область D_1: $|z| \leq 2$, $0 \leq argz \leq \frac{\pi}{4}$.

Решение. Представим функцию $\omega = (1-i)z + 2i = \omega_1 + 2i$, где $\omega_1 = (1-i)z$. Коэффициент $a = 1 - i$, $|a| = \sqrt{2}$, $arga = -\frac{\pi}{4}$, т.е. ω_1 осуществляет поворот области D_1 на угол $-\frac{\pi}{4}$ (поворот по часовой стрелке на $\frac{\pi}{4}$) и растяжение с коэффициентом $|a| = \sqrt{2}$.

В результате получаем, что область D_1 перешла в область D. Заключительный шаг: $\omega_2 = \omega_1 + 2i$ – это параллельный перенос полученной области D на вектор $b = 2i$ (все этапы показаны на рис. 10).

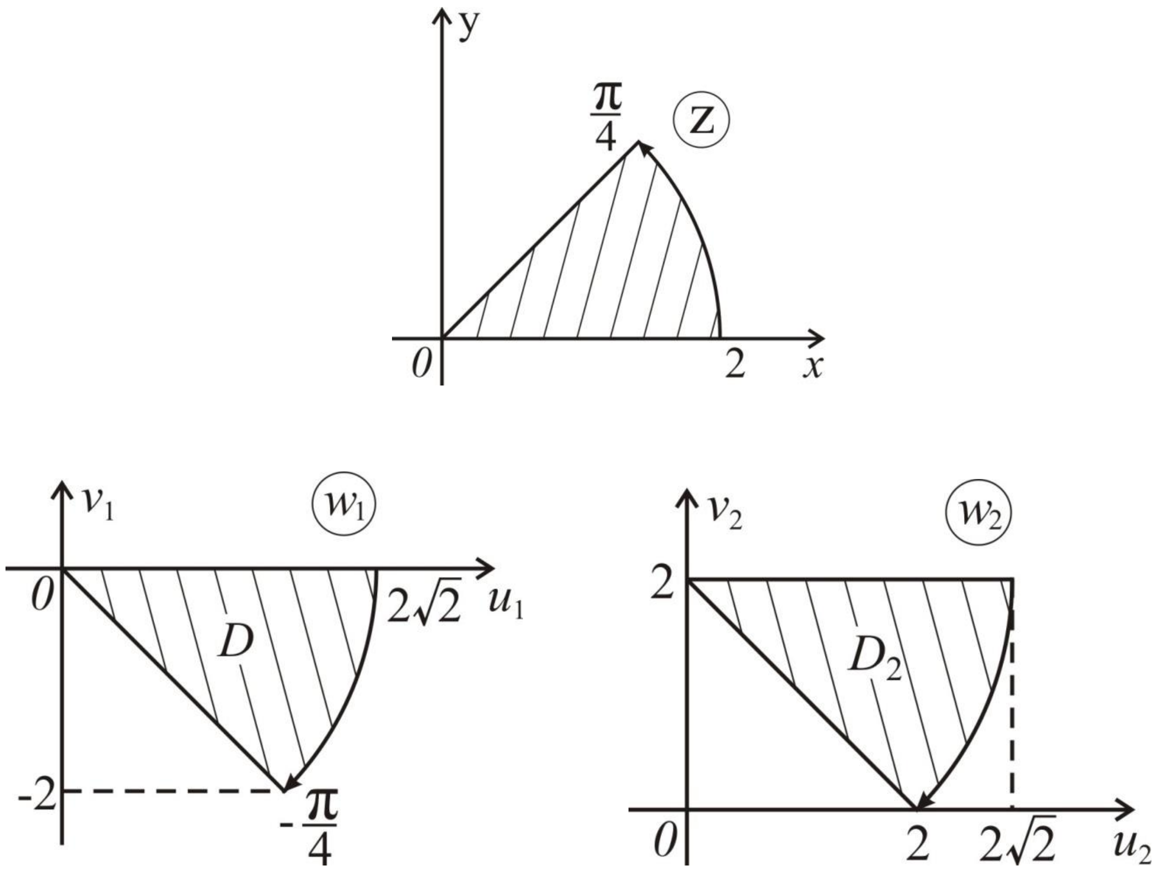


Рис. 10

2. ***Степенная функция*** $\boldsymbol{\omega = z^n}$, $n \geq 2$ – целое положительное число.

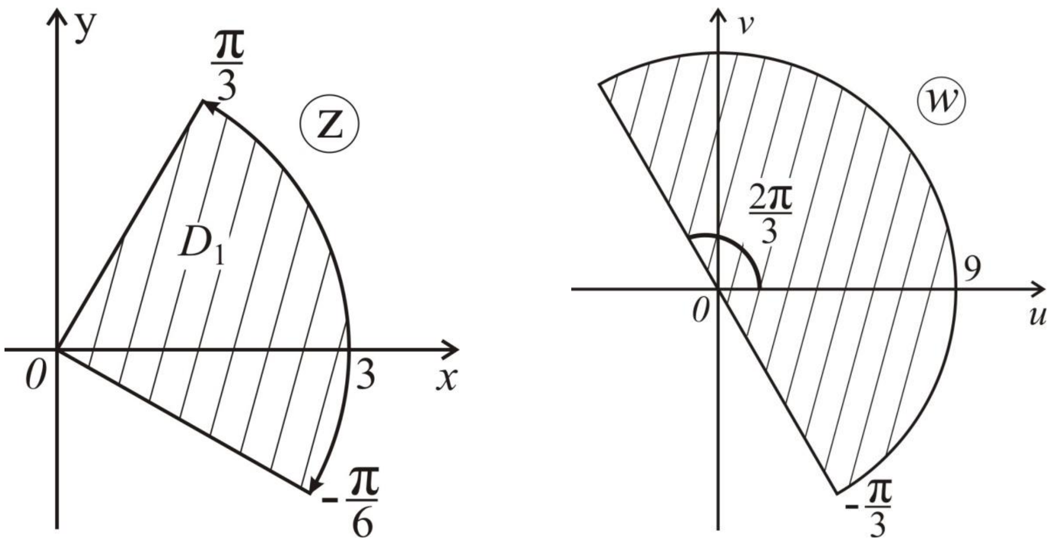
Отображает взаимно-однозначно и конформно внутренность угла с вершиной в начале координат, раствор которого θ не превосходит $\frac{2\pi}{n}$ на внутренность угла с вершиной в начале координат раствора $n\theta$.

<u>Пример.</u> Определить область D_2 плоскости ω, на которую отобразится область D_1 плоскости z функцией $\omega = z^2$. Область D_1:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{6} \le argz \le \frac{\pi}{3}, \\ |z| \le 3. \end{cases}$$

Решение. При отображении $\omega = z^2$ луч $argz = -\frac{\pi}{6}$ перейдет в луч $arg\omega = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$, луч $argz = \frac{\pi}{3}$ перейдет в луч $argz = \frac{2\pi}{3}$.
$|\omega| = |z|^2 = 9$, т. е. получим область D_2 (все этапы показаны на рис. 11):

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \le arg\omega \le \frac{2\pi}{3}, \\ |z| \le 9. \end{cases}$$



(область D_2)

Рис. 11