ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №12

ЛИНЕЙНЫЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Прохождение детерминированных сигналов через линейные цепи

Как уже было сказано, суть анализа цепей – установление закона соответствия межу входным воздействием $u_{вх}(t)$ и реакцией цепи $u_{вых}(t)$. Так как существуют разные способы описания цепей, существуют и различные методы анализа:

- составление и решение дифференциальных уравнений – так называемый классический метод;
- временной метод – использование временных характеристик цепи: переходной и импульсной;
- частотный (спектральный) метод – использование частотных характеристик.

Классический метод всё равно применяется на первом этапе для нахождения временных или частотных характеристик.

Временной метод анализа процессов в линейных цепях

В основе этого метода – использование импульсной $h(t)$.

Входной сигнал запишем в виде:

$$u_{вх}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{вх}(x)\delta(t-x)dx,$$

т.е. мы представляем непрерывный сигнал в виде последовательности (интеграл) дельта-импульсов, т.к. импульсная характеристика – реакция цепи на единичный дельта-импульс. Т.е. зная реакцию цепи на дельта-импульс и просуммировав во времени реакции цепи на каждый дельта-импульс, принимающий значение, соответствующее значению входного воздействия в соответствующий момент времени.

Выходной сигнал в общем виде (L – оператор, обозначающий воздействие цепи на входной сигнал):

$$u_{вых}(t) = L\int_{-\infty}^{\infty} u_{вх}(x)\delta(t-x)dx.$$

Однако, оператор L действует лишь на величины, зависящие от конкретного момента времени, но не от постоянной интегрирования, поэтому выражение необходимо записать в виде:

$$u_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{вх}(x)L\{\delta(t-x)\}dx.$$

По определению импульсной характеристики:

$$h(t-x) = L\{\delta(t-x)\},$$

и тогда можем записать:

$$u_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{вх}(x)h(t-x)dx.$$

Эта формула называется интегралом Дюамеля. Она обозначает свёртку (корреляционная функция, скалярное произведение) функции с импульсной характеристикой цепи:

$$u_{вых}(t) = u_{вх}(x)\otimes h(t).$$

Для физически реализуемой цепи нижний предел интегрирования можно заменить нулём, а верхний – необходимым значением времени, обычно t = $\tau_и$.

$$u_{вых}(t) = \int_{0}^{t} u_{вх}(x)h(t-x)dx.$$

Прохождение прямоугольного импульса через RC-цепь

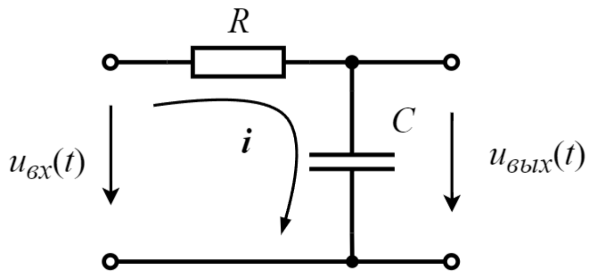


Рис. 1 – RC цепь

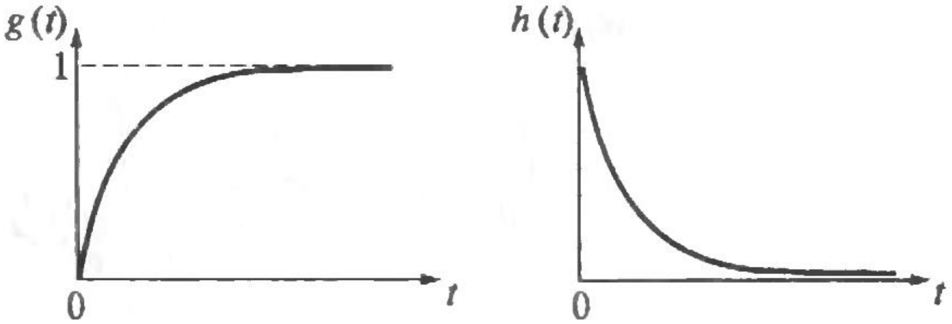


Рис. 2 – Переходная (слева) и импульсная (справа) характеристики RC-цепи

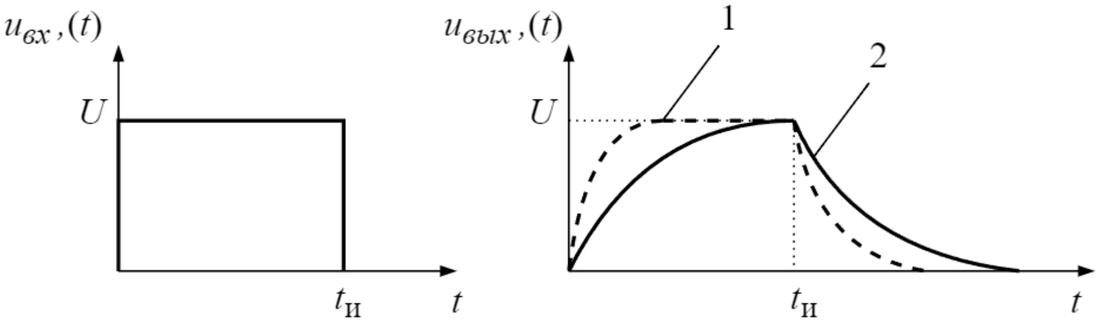


Рис. 3 – Прямоугольный импульс (слева), реакция цепи (справа)

В этом случае $u_{вх}(t) = U$, при $0 < t < \tau_и$ и $u_{вх}(t) = 0$, при всех остальных значениях. Тогда интеграл необходимо разбить на два:

$$u_{вых}(t) = \int_0^t U \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t-x}{\tau}} dx = U(1 - e^{-t/\tau}),$$

$$u_{вых}(t)=\int_0^{\tau_и} U\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t-x}{\tau}}dx=U(e^{-\tau_и/\tau}-1)e^{-t/\tau}.$$

Первое выражение описывает процесс заряда конденсатора, второе – процесс разряда. Длительность каждого из этих процессов приблизительно равна утроенной постоянной времени цепи 3τ. На рис. 3 показано входное воздействие и два варианта реакции цепи. В данном случае, цепь сглаживает входной прямоугольный сигнал (такую цепь называют сглаживающим фильтром и широко используют в источниках питания). Эффект тем сильнее, чем больше постоянная времени – больше ёмкость конденсатора (для 1-ой кривой ёмкость меньше, чем для 2-ой).

Частотный (спектральный) метод анализа процессов в линейных цепях

При частотном методе для анализа используется комплексная частотная характеристика цепи $H(i\omega)$, также необходимо знать комплексную спектральную функцию требуемого сигнала $\dot{S}_{вх}(\omega)$.

Учитывая выражение

$$u_{вых}(t)=u_{вх}(x)\otimes h(t),$$

теорему о спектре свертки сигналов можно записать:

$$s_1(t)\otimes s_2(t)\leftrightarrow \dot{S}_1(\omega)\dot{S}_1(\omega),$$

выражение для спектра реакции цепи имеет вид:

$$\dot{S}_{вых}(\omega)=\dot{S}_{вх}(\omega)H(i\omega).$$

То есть выходной сигнал можно найти, как произведение спектральной функции входного сигнала и КЧХ цепи. КЧХ содержит информацию как о влиянии цепи на амплитуды составляющих – АЧХ – ослабление или усиление составляющих, так и о изменениях фазы составляющих – ФЧХ. В результате получится спектр выходного сигнала, от которого, через обратное преобразование Фурье можно перейти к временному представлению сигнала.

Однако прямые вычисления по данной формуле зачастую довольно громоздки, поэтому производят замену $i\omega$ на p:

$$\dot{S}_{вых}(p) = \dot{S}_{вх}(p)H(p).$$

Это выражение отражает использование операторного метода и применение передаточной функции $H(p)$. Тогда для обратного перехода к $u_{вых}(t)$ можно использовать таблицы преобразования Лапласа.

Прямое и обратное преобразование Лапласа

Так как при нахождении реакции цепи частотным методом встречается преобразование Лапласа, нужно его вспомнить.

Преобразование Лапласа – интегральное преобразование, связанное с преобразованием Фурье.

$$S(p) = \int_0^\infty s(t)e^{-pt}dt,$$

где $p = \sigma + i\omega$ - комплексная частота. $s(t)$ – оригинал, $S(p)$ – отображение.

Если σ равняется нулю, то выражение сведётся к преобразованию Фурье, т.е. преобразование Лапласа можно рассматривать, как обобщение преобразования Фурье на случай комплексных частот. Свойства преобразования Лапласа совпадают со свойствами преобразования Фурье.

Для перехода от изображения к оригиналу используют обратное преобразование Лапласа:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} S(p)e^{pt}dt.$$

Обычно, $S(p)$ – дробно-рациональная функция – отношение многочленов по степеням p:

$$S(p)=\frac{A(p)}{B(p)},$$

причём степень числителя не больше степени знаменателя. При этом корни уравнения при $B(p)=0$ рассматриваются в качестве особых точек – полюсов.

Допустим, что все корни уравнения p_k, k = 1, 2, 3, … n имеют различные значения. Обратное преобразование можно записать:

$$s(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p}k^{t};\quad B'(p)=\frac{dB}{dp}.$$

Пример

Изображение сигнала – дробно-рациональная функция:

$$S(p)=\frac{1}{(p+a)(p+b)},$$

где $A(p)=1,\quad B(p)=(p+a)(p+b).\quad p_1=-a,\ p_2=-b-$ полюсы функции. Тогда:

$$B'(p)=2p+a+b;\quad B'(p_1)=b-a;\quad B'(p_2)=a-b.$$

Оригинал имеет вид:

$$s(t)=\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt}).$$

Передаточная функция линейной цепи

Передаточная функция $H(p)$ линейной цепи представляет собой преобразования Лапласа её импульсной характеристики

$$H(p)=\int_0^{\infty}h(t)e^{-pt}dt.$$

Переход от вещественной частоты ω к комплексной частоте p осуществляется формальной заменой $i\omega$ на p. Тогда на основе дифференциального уравнения получим выражение

$$H(p) = \frac{\sum_{m=0}^{M_2} b_m p^m}{\sum_{m=0}^{M_1} a_m p^m}.$$

Дробно-рациональная функция. Плюсы функции – корни характеристического уравнения:

$$\sum_{m=0}^{M_1} a_m p^m = 0$$

Если действительная часть корней ХУ отрицательна, то полюсы передаточной функции расположены в левой полуплоскости комплексной переменной p.

Прохождение экспоненциального импульса через RC-цепь

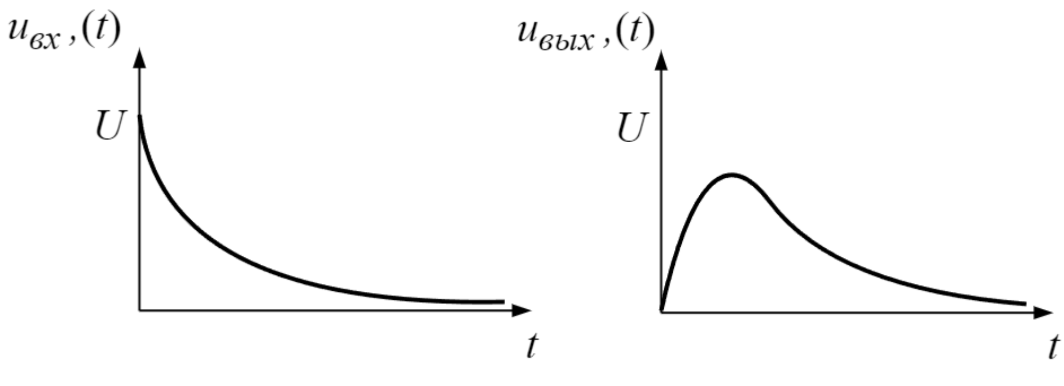


Рис. 4 – входное воздействие (слева) и реакция цепи (справа)

Входной сигнал

$$u_{вх}(t) = Ue^{-at},\ t \geq 0.$$

Нахождение реакции цепи через интеграл Дюамеля:

$$u_{вых}(t)=\frac{U}{\tau}\int_0^t e^{-ax}e^{-\frac{t-x}{\tau}}dx=\frac{U}{1-a\tau}(e^{-at}-e^{-t/\tau}).$$

Нахождение реакции цепи частотным методом. Спектральная функция входного сигнала:

$$S_{вх}(\omega)=\frac{U}{a+i\omega}.$$

КЧХ RC-цепи:

$$H(i\omega)=\frac{1}{1+i\omega\tau}.$$

Тогда реакция цепи:

$$S_{вых}(\omega)=S_{вх}(\omega)H(i\omega)=\frac{U}{a+i\omega}\cdot\frac{1}{1+i\omega\tau}.$$

Заменим $i\omega$ на p; тогда изображение по Лапласу:

$$S_{вых}(p)=\frac{U}{(a+p)\cdot(1+p\tau)};$$

$$u_{вых}(t)=\frac{U}{1-a\tau}(e^{-at}-e^{-t/\tau}).$$

На рис. 3 видно, что цепь сглаживает импульс. Вид выходного сигнала зависит от $a\tau$, т.е. от скорости убывания экспоненциального импульса и от постоянной времени цепи.

Реакция цепи на линейно-возрастающее воздействие

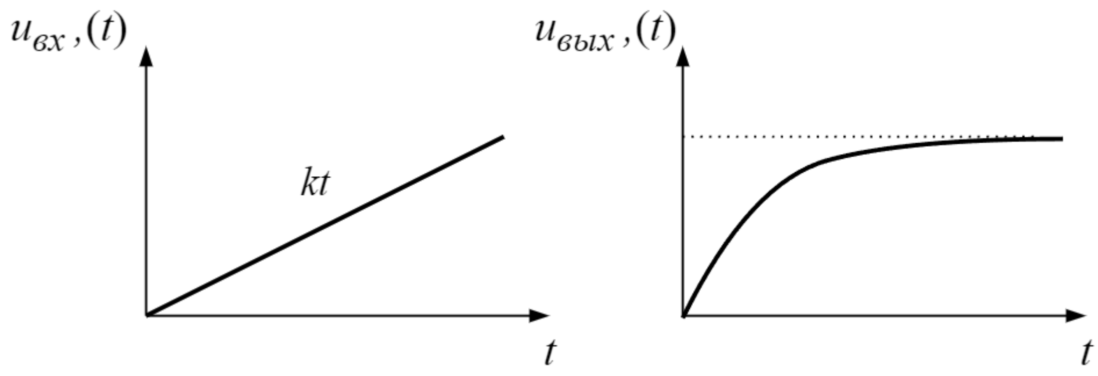


Рис. 5 – Сигнал на входе (слева) и выходе (справа) цепи

Решение через интеграл Дюамеля.

$$u_{вх}(t) = kt, \ t \geq 0.$$

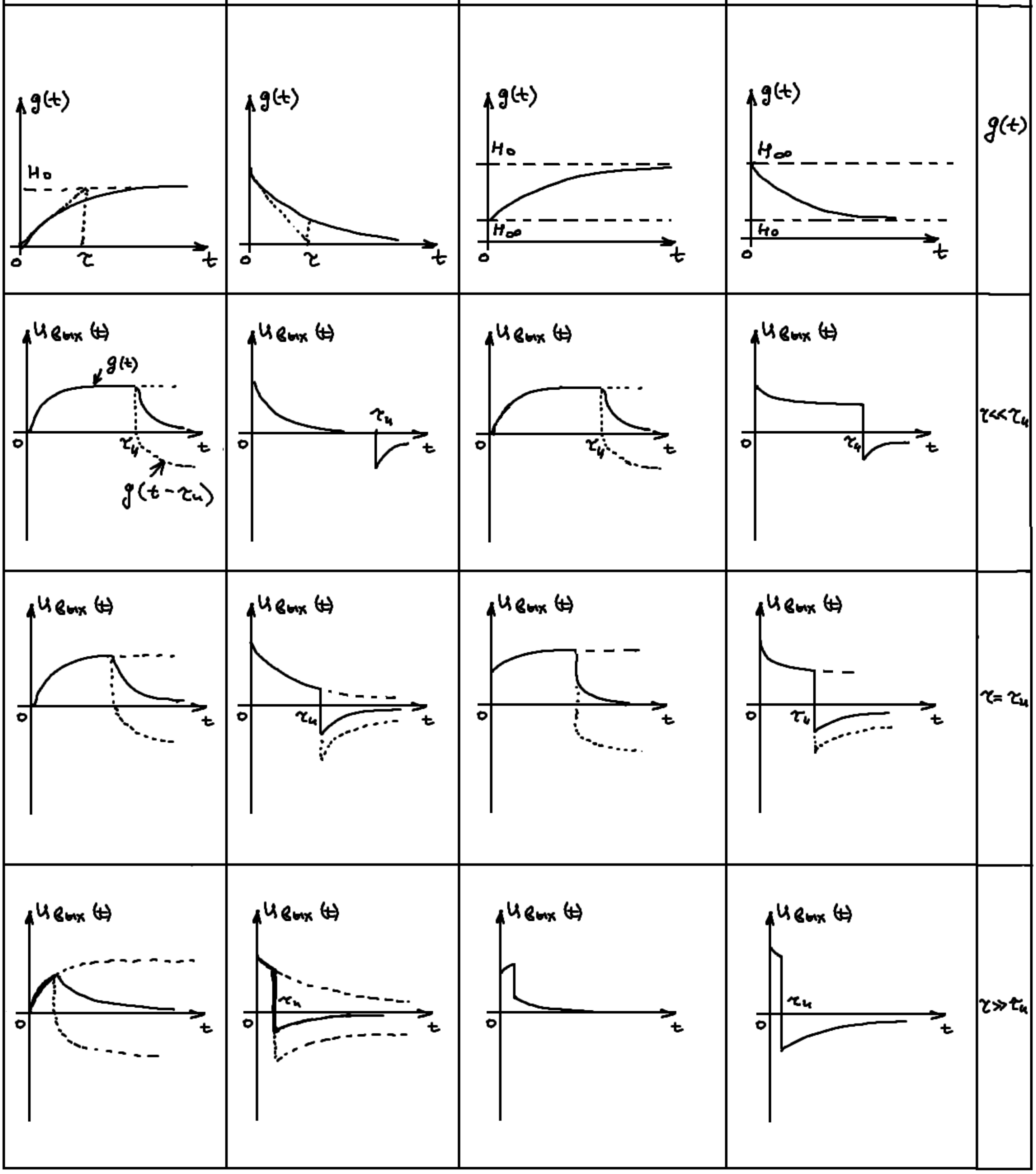
$$u_{вых}(t) = \int_0^t u_{вх}(t) h(t-x) dx = \int_0^t kt e^{-\frac{t-x}{\tau}} dx = kt \int_0^t e^{-\frac{t-x}{\tau}} dx = k\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Реакция линейной цепи 1-ого порядка на прямоугольный импульс

$$g(t) = H_\infty \sigma(t) + (H_0 - H_\infty) \cdot \sigma(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$u_{вых}(t) = g(t) - g(t - \tau_и)$$

$H_0 \neq 0;\ H_\infty = 0$	$H_0 = 0;\ H_\infty \neq 0$	$H_0 > H_\infty > 0$	$H_\infty > H_0 > 0$	



Реакция линейной цепи 1-ого порядка на линейно нарастающее воздействие

$$g_1(t) = \int_0^t g(t')\,dt' = \int_0^t \left(H_\infty \sigma(t') + (H_0 - H_\infty)\,\sigma(t')\left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}}\right)\right) dt' =$$

$$= H_\infty \sigma_1(t) + (H_0 - H_\infty)\,\sigma(t)\left[\int_0^t dt' + \tau \int_0^t e^{-\frac{t'}{\tau}}\, d\left(-\frac{t'}{\tau}\right)\right] =$$

$+ = 0$

$$= H_\infty \sigma_1(t) + (H_0 - H_\infty)\,\sigma(t)\left(t' + \tau e^{-\frac{t'}{\tau}} \Big|_0^t \right) =$$

$$= H_0 \sigma_1(t) + (H_0 - H_\infty)\,\tau\,\sigma(t)\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) =$$

$$= H_0 \sigma_1(t) - (H_0 - H_\infty)\,\tau\,\sigma(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$