Лекция №11

Основная теорема о вычетах (продолжение)

Теорема. *Если функция* $f(z)$ *является аналитической всюду внутри области D, за исключением конечного числа изолированных особых точек* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *лежащих внутри кусочно-гладкой замкнутой кривой Г, Г⊂D, тогда*

$$\oint_{\Gamma} f\,(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k).$$

Контур *Г* проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$.

Решение. Находим особые точки подынтегральной функции:

$z_1 = -2$ – полюс второго порядка,

$z_{2,3} = \pm i$ – полюсы первого порядка.

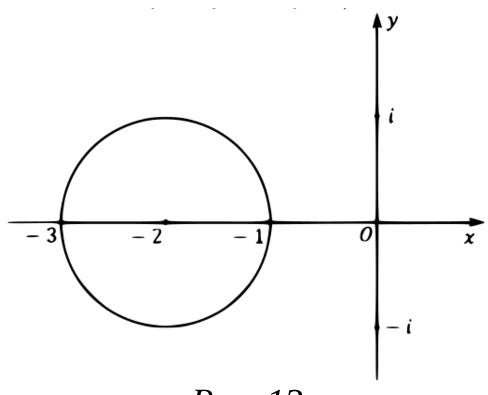

Рис. 13

Нарисуем контур $|z+2|=1$. Внутри контура лежит только одна особая точка $z_1 = -2$ (см. рис. 13).

По основной теореме о вычетах получаем

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 2\pi i \cdot resf(-2).$$

Найдем $res\ f(-2)$:

$$\operatorname{res} f(-2) = \lim_{z\to -2} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+2)^2(z^2+1)}\right] = \lim_{z\to -2} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{4}{25}.$$

Далее получим

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(-2) = \frac{8\pi i}{25}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\int_{|z|=3} \frac{1}{z^5+4z^3} dz$.

Решение. Особые точки функции находятся из решения уравнения $z^5 + 4z^3 = 0$, т.е. $z^3(z+2i)(z-2i) = 0$. Получаем,

$z_1 = 0$ – полюс третьего порядка,

$z_{2,3} = \pm 2i$ – полюсы первого порядка.

<u>В области D: $|z| < 3$</u>

функция $f(z) = \frac{1}{z^5+4z^3}$ имеет три и.о.т. $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm 2i$

Найдем вычеты в полюсах первого порядка, т.е. в точках z_2, z_3:

$$res\ f(2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(2i)^3 4i} = \frac{1}{32},$$

$$res\ f(-2i) = \lim_{z\to -2i} \frac{(z+2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(-2i)^3(-4i)} = \frac{1}{32}.$$

Найдем вычет в точке $z_1 = 0$ (это полюс третьего порядка), применяем формулу

$$resf(z_0) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^2}{dz^2}[f(z)(z-z_0)^3].$$

Тогда

$$res\, f(0) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1\cdot z^3}{z^3(z^2+4)}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[-\frac{2z}{(z^2+4)^2}\right] =$$

$$= -\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z^2+4)^2} = -\lim_{z\to 0} \frac{-3z^2+4}{(z^2+4)^3} = -\frac{1}{16}.$$

Тогда $\int_{|z|=3} \frac{1}{z^5+4z^3} dz = 2\pi i\big(res\, f(2i) + res\, f(-2i) + res\, f(0)\big) =$ $2\pi i\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32} - \frac{1}{16}\right) = 0.$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{|z-3|=1} (z-3)^3 cos\frac{1}{z-3} dz$.

Решение. Изолированная особая точка $z = 3$.

В области D: $|z-3| < 1$

функция $f(z) = (z-3)^3 cos\frac{1}{z-3}$ имеет данную и.о.т.

Найдем вычет.

В данном случае нужно разложить функцию в ряд Лорана

$$f(z) = (z-3)^3\Big(1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} +$$

$$+\ldots) = (z-3)^3 - \frac{(z-3)}{2!} + \frac{1}{4!\,(z-3)} - \frac{1}{6!\,(z-3)^3} + \ldots$$

В данном случае главная часть ряда Лорана имеет бесконечное количество слагаемых. Тогда изолированная особая точка $z = 3$ является существенно особой точкой. Находим коэффициент при $(z-3)^{-1}$, значит вычет функции $res\, f(3) = \frac{1}{4!}$.

Тогда $\int_{|z-3|=1} (z-3)^4 cos\frac{1}{z-3} dz = 2\pi i \cdot res\, f(3) = 2\pi i\left(\frac{1}{4!}\right).$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{|z-i|=2} (z-i)^3 sin\frac{1}{z-i} dz$.

Решение. Изолированная особая точка $z_1 = i$. Эта точка попадает внутрь контура интегрирования. В данном случае нужно разложить функцию в ряд Лорана

$$f(z)=(z-i)^3\left(\frac{1}{(z-i)}-\frac{1}{3!\,(z-i)^3}+\frac{1}{5!\,(z-i)^5}-\frac{1}{7!\,(z-i)^7}+\ldots\right)=$$

$$=(z-i)^2-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!\,(z-i)^2}-\frac{1}{7!\,(z-i)^4}+\ldots$$

Главная часть ряда Лорана имеет бесконечное количество слагаемых. Имеем, что иот $z_1=i$ является существенно особой точкой. Находим коэффициент при $(z-1)^{-1}$. Этот коэффициент равен 0. Тогда вычет функции $res\, f(i)=\ 0.$

Ответ: $\int_{|z-i|=2}(z-i)^3 sin\frac{1}{z-i}dz=0.$

Пример. Найти интеграл от функции $f(z)=\dfrac{e^z-1}{(z^2+9)z}$

по контуру $|z|=5.$

Решение: Изолированные особые точки функции $z_1=3i$, $z_2=-3i$ и $z_3=0$. Все точки попадают внутрь заданной окружности $|z|=5$.

Для нахождения типа каждой особой точки нужно вычислить предел функции в каждой особой точке.

$$\lim_{z\to 3i}\frac{e^z-1}{(z^2+9)z}=\lim_{z\to 3i}\frac{e^z-1}{(z+3i)(z-3i)z}=\infty$$

Тогда $z_1=3i$ полюс первого порядка. Найдем вычет в этой точке.

$$res\, f(3i)=\lim_{z\to 3i}\frac{(e^z-1)(z-3i)}{z\quad(z+3i)(z-3i)}=\frac{e^{3i}-1}{(3i)\quad 6i}=\frac{e^{3i}-1}{-18}.$$

Перейдем к следующей точке:

$$\lim_{z\to -3i}\frac{e^z-1}{(z^2+9)z}=\lim_{z\to -3i}\frac{e^z-1}{(z+3i)(z-3i)z}=\infty$$

Тогда $z_2=-3i$ полюс первого порядка.

Найдем вычет в этой точке:

$$res\, f(-3i) = \lim_{z\to -3i} \frac{(e^z-1)(z+3i)}{z\ \ (z+3i)(z-3i)} = \frac{e^{-3i}-1}{(-3i)\ \ (-6i)} = \frac{e^{-3i}-1}{-18}.$$

Рассмотрим еще одну и.о.т. $z_3 = 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{(z^2+9)z} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{z}{(z^2+9)z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z^2+9)} = \frac{1}{9}$$

Тогда $z_3 = 0$ устранимая особая точка. В этом случае $res\, f(0) = 0$.

Получаем ответ

$$\int_{|z|=5} \frac{e^z-1}{(z^2+9)z} dz = 2\pi i\big(res\, f(3i) + res\, f(-3i) + res\, f(0)\big)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^{3i}-1}{-18} + \frac{e^{-3i}-1}{-18}\right)$$

<u>Пример.</u> Вычислить $\int_{|z+4|=2} (z+4)^5 e^{\frac{2}{z+4}} dz.$

Решение: Изолированная особая точка функции $z = -4$. Внутри области,

ограниченной контуром $|z+4| = 2,$ лежит данная точка $z = -4$.

Разложим функцию в ряд по степеням (z+4)

$$f(z) = (z+4)^5 e^{\frac{2}{z+4}}$$

$$= (z+4)^5\left(1 + \frac{2}{z+4} + \frac{2^2}{2!\,(z+4)^2} + \frac{2^3}{3!\,(z+4)^3} + \frac{2^4}{4!\,(z+4)^4} + \right.$$

$$\left. \frac{2^5}{5!(z+4)^5} + \frac{2^6}{6!(z+4)^6} + \frac{2^7}{7!(z+4)^7} + \cdots\right) \ldots$$

Раскрываем скобки и получаем

$$f(z) = (z+4)^5 + 2(z+4)^4 + \frac{2^2(z+4)^3}{2!} + \frac{2^3(z+4)^2}{3!} + \frac{2^4(z+4)}{4!} +$$

$$+ \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!(z+4)} + \frac{2^7}{7!(z+4)^2} + \cdots$$

Главная часть полученного ряда Лорана имеет бесконечное количество членов (слагаемых). Выделенная изолированная особая точка $z=-4$ существенно особая точка. Вычет равен $res\, f(-4)=\frac{2^6}{6!}$.

Тогда по основной теореме о вычетах имеем

$$\int_{|z+4|=2}(z+4)^5 e^{\frac{2}{z+4}}dz=2\pi i\cdot res\, f(-4)=2\pi i\cdot\frac{2^6}{6!}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить $\int_{|z+1|=4}\frac{8z+11}{z^2+3z+2}dz$

Решение. Находим и.о.т. (приравняем знаменатель дроби к нулю): $z_1=-2$, $z_2=-1$.

Внутри контура $|z+1|=4$ находятся обе точки.

$$\lim_{z\to-2}\frac{8z+11}{z^2+3z+2}=\lim_{z\to-2}\frac{8z+11}{(z+2)(z+1)}=\infty$$

Изолированная особая точка $z_1=-2$ является полюсом 1-го порядка.

Найдем вычет.

$$res\, f(-2)=\lim_{z\to-2}\frac{(8z+11)(z+2)}{(z+2)(z+1)}=\frac{-5}{-1}=5$$

Рассмотрим следующую точку.

$$\lim_{z\to-1}\frac{8z+11}{z^2+3z+2}=\lim_{z\to-1}\frac{8z+11}{(z+2)(z+1)}=\infty$$

Изолированная особая точка $z_1=-1$ является полюсом 1-го порядка.

Найдем вычет.

$$res\, f(-1)=\lim_{z\to-1}\frac{(8z+11)(z+1)}{(z+2)(z+1)}=\frac{3}{1}=3$$

Ответ:

$$\int_{|z+1|=4} \frac{8z+11}{z^2+3z+2}\,dz = 2\pi i\big(res\, f(-2) + res\, f(-1)\big) = 16\pi i$$

<u>Пример.</u> Вычислить $\int_{|z+3|=0,5} \frac{1}{(z^2+5z+6)^2} dz$

Решение. Находим и.о.т. функции: $z \quad = -3, z \quad = -2$.

Рисуем контур интегрирования $|z+3| = 0,5$. Внутри этого контура лежит <u>*только одна особая точка*</u> $z \quad = -3$.

Рассмотрим эту точку $z \quad = -3$

Вычислим $\lim\limits_{z\to -3} \frac{1}{(z^2+5z+6)^2} = \lim\limits_{z\to -3} \frac{1}{(z+2)^2(z+3)^2} = \infty$

Следовательно, изолированная особая точка $z_1 = -3$ является полюсом 2-го порядка.

Найдем вычет в точке z_1:

$$resf(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left[f(z)(z-z_0)^2\right].$$

Тогда

$$resf(-3) = \lim_{z\to -3} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+2)^2(z+3)^2}(z+3)^2\right] = 2$$

По основной теореме о вычетах получаем, что

$$\int_{|z+3|=0,5} \frac{1}{(z^2+5z+6)^2} dz = 2\pi i \cdot resf(-3) = 4\pi i.$$

На основе теории вычетов можно вычислять несобственные интегралы. В курсе математического анализа 2-го семестра рассматривались вопросы, связанные с изучением сходимости несобственных интегралов и их вычисления при условии сходимости.
Теория вычетов позволяет вычислять сложные несобственные интегралы, в частности, такие, которые не рассматривались во втором семестре.

6.2 Вычисление несобственных интегралов

Изучение методов вычисления несобственных интегралов включает рассмотрение методов вычисления *интегралов от рациональных функций* и методов вычисления *интегралов с тригонометрическими функциями*.

Рассмотрим сначала более простую ситуацию: вычисление интегралов от рациональных функций.

6.2.1 Интегралы от рациональных функций

Теорема 6.2. *Если* $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$, $Q(x)$ *– многочлены, причем многочлен* $Q(x)$ *не имеет действительных корней и степень* $Q(x)$ *«m» хотя бы на две единицы больше степени* $P(x)$ *«n»* $(m - n \geq 2)$, *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, F(z_k),$$

где $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *и* z_k *– полюсы функции* $F(z)$, *лежащие в верхней полуплоскости.*

Пример. Вычислить интеграл

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}, \quad (a>0).$$

Решение. Подынтегральная функция

$$F(x)=\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$$

является четной. Поэтому

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Введем функцию $F(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$. Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1=ai$, $z_2=-ai$ – это полюсы второго порядка. В верхней полуплоскости находится точка $z=ai$, $a>0$. Условия теоремы 6.2 для функции $F(z)$ выполнены. Вычислим $resF(ai)$:

$$res\,F(ai)\ =\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}[F(z)(z-ai)^2]=$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z-ai)^2}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right]=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+ai)^2}=$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+ai)^3}=\frac{2(ai)^2}{(2ai)^3}=\frac{1}{4ai}.$$

Следовательно,

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot res\,F(ai)=\frac{\pi i}{4ai}=\frac{\pi}{4a}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2}$$

Решение. Подынтегральная функция

$$F(x) = \frac{x^2}{(x^2+4)^2}$$

является четной. Поэтому

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2}.$$

Введем функцию $F(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^2}$.

Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$ – это полюсы второго порядка. В верхней полуплоскости находится точка $z = 2i$. Условия теоремы 6.2 для функции $F(z)$ выполнены. Вычислим $resF(2i)$:

$$res\,F(2i) = \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz}[F(z)(z-2i)^2] =$$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z-2i)^2}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{4iz}{(z+2i)^3} = \frac{1}{8i}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot res\,F(2i) = \frac{\pi i}{8i} = \frac{\pi}{8}.$$