ЛИКБЕЗ

неоднородное дифференциальное уравнение

$\hat{L}[y(x)] = f(x),$ (•) где $\hat{L}$ – линейный оператор

Метод вариации постоянных. Решим однородную задачу $\hat{L}[y(x)] = 0$ и найдем $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$. Будем считать коэффициенты $c_i(x)$ зависящими от x (т. е. $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)$). Причем выберем их так, что

$$y'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x);$$

$$y''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x).$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} {c_i}'(x) y_i(x) = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} {c_i}'(x) y_i'(x) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} {c_i}'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Из условия, что вронскиан не равен нулю, находим

$$c_i'(x) = \varphi_i(x), \quad \text{или} \quad c_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + \bar{c}_i$$

Таким образом, решение

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \varphi_i(x)\, dx + y_i(x) \bar{c}_i.$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}. \qquad (\ \diamond\ )$$

Решение однородного уравнения: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Проварьируем постоянные $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

и получим

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}, \\ C_2'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \ln|\cos x| + \bar{C}_1, \\ C_2(x) = x + \bar{C}_2. \end{cases}$$

Решение неоднородного уравнения ($\diamond$)

$$y = \bar{C}_1 \cos x + \bar{C}_2 \sin x + ln|\cos x| \cos x + x \sin x.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y}(t) + a^2 y(t) = f(t). \qquad (\diamond\diamond)$$

Решение однородного уравнения: $y(t) = C_1\cos(at) + C_2\sin(at)$. Проварьируем постоянные

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos(at) + C_2'(t)\sin(at) = 0, \\ -aC_1'(t)\sin(at) + aC_2'(t)\cos(at) = f(t), \end{cases}$$

и получим

$$\begin{cases} C_1'(t) = -\dfrac{1}{a} f(t)\sin(at), \\ C_2'(t) = \dfrac{1}{a} f(t)\cos(at) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} C_1(t) = \bar{C}_1 - \dfrac{1}{a}\int\limits_0^t f(u)\sin(au)\,du, \\ C_2(t) = \bar{C}_2 + \dfrac{1}{a}\int\limits_0^t f(u)\cos(au)\,du. \end{cases}$$

Таким образом, решение ($\diamond\diamond$):

$$y(t) = -\frac{\cos(at)}{a}\int\limits_0^t f(u)\sin(au)\,du +$$

$$+\frac{\sin(at)}{a}\int\limits_0^t f(u)\cos(au)du + \bar{C}_1\cos(at) + \bar{C}_2\sin(at) =$$

$$= \frac{1}{a}\int\limits_0^t f(u)\sin a(t-u)du + \bar{C}_1\cos(at) + \bar{C}_2\sin(at).$$

Метод Коши. Для того чтобы найти решение уравнения [redacted], предположим, что известно решение однородного уравнения $\hat{L}[y(x)] = 0$, которое зависит от одного параметра $K(x,s)$ и удовлетворяет следующим условиям: $K(s,s) = K'(s,s) = \ldots = K^{n-2}(s,s) = 0$ и $K^{n-1}(s,s) = 1$.

Решение [redacted] $y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,s)f(s)ds$ удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{n-2}(x_0) = 0$. В этом легко убедиться, n раз продифференцировав решение и подставив его в уравнение.

Вынужденные колебания ограниченной струны

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \Omega_t, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, & t \in [0,\infty), \\ u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), & x \in [0,l], \\ \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{u}(x,0) = \psi(x), & \end{cases}$$

$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где $v(x,t)$, $w(x,t)$ – решения

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, \\ w(0,t) = w(l,t) = 0, \\ w(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \\ \dot{w}(x,0) = \psi(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t), \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, \\ v(x,t)|_{t=0} = 0, \\ \dot{v}(x,0) = 0, \end{cases}$$

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\omega_n t)+\frac{b_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

где $\omega_n=\frac{\pi a n}{l}$, $\lambda_n=\frac{\pi n}{l}$, а коэффициенты a_n и b_n равны

$$a_n=\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi;$$

$$b_n=\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi.$$

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ddot{T}_n(t)+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=f(x,t)$$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \qquad f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi$$

$$f_n(t)=\frac{2f(t)}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi n}f(t), & \text{если } n \text{ нечетное,}\\ 0, & \text{если } n \text{ четное.}\end{cases}$$

$$\ddot{T}_n(t)+\omega_n^2 T_n(t)=f_n(t), \quad t\in(0,\infty),$$
$$T_n(0)=0, \quad \dot{T}_n(0)=0,$$

где $\omega_n=\dfrac{\pi a n}{l}$.

$$T_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

Пример 1. Исследуем вынужденные колебания струны, на которую в момент времени $t=0$ начинает действовать постоянная сила, равная силе тяжести, $f(x,t)=-g$. В этом случае коэффициенты разложения

$$f_n=-\frac{2g}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx=-\frac{2g}{l}(1-\cos\pi n)=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4g}{\pi(2k+1)}, & n=2k+1 \text{ (нечетное)},\\ 0, & n=2k \text{ (четное)}.\end{cases}$$

Функции $T_{2k}(t) = 0$, так как удовлетворяют уравнению $\ddot{T}_{2k}(t) + \left(\frac{(2k)\pi a}{l}\right)^2 T_{2k} = 0$ с нулевыми граничными условиями $T_{2k}|_{t=0} = 0$ и $\dot{T}_{2k}|_{t=0} = 0$.

Для нечетных $n = 2k + 1$ получается неоднородное уравнение

$$\ddot{T}_{2k+1}(t) + \left(\frac{(2k+1)\pi a}{l}\right)^2 T_{2k+1} = -\frac{4g}{\pi(2k+1)},$$

которое имеет частное решение $-\frac{4gl^2}{(2k+1)^3\pi^3a^2}$. Общее решение принимает вид

$$T_{2k+1} = A_{2k+1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l}t\right) + {}+ B_{2k+1}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l}t\right) - \frac{4gl^2}{(2k+1)^3\pi^3a^2}.$$

$$A_{2k+1} = \frac{4\,g\,l^2}{(2k+1)^3\,\pi^3\,a^2}; \quad B_{2k+1} = 0.$$

$$T_{2k+1} = -\frac{4gl^2}{(2k+1)^3\pi^3a^2}\left[1-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{l}t\right)\right]$$

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) =$$

$$-\frac{4gl^2}{(2k+1)^3\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[1-\cos\left(\frac{(2k+1)\,\pi\,a}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

в момент времени $t = (2k+1)l/a$ в точке $x = l/2$:

$$|v|_{\max} = \left|v\left(\frac{l}{2},\frac{l}{a}\right)\right| = \frac{8gl^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{gl^2}{4a^2}.$$

Пример 2. Исследуем вынужденные колебания струны без начальных смещений и скоростей, на которую действует равномерно распределенная сила с плотностью $g(x,t) = A\rho \sin \nu_0 t$, где ρ — линейная плотность струны.

$$f_{2k}(t) = 0, \qquad f_{2k+1}(t) = \frac{4A}{\pi(2k+1)} \sin \nu_0 t$$

$$T_{2k+1}(t) = \frac{4lA}{(2k+1)^2\pi^2 a} \int_0^l \sin \nu_0 t \sin \frac{(2k+1)\pi a}{l}(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{4lA}{(2k+1)^2\pi^2 a} \frac{\omega_{2k+1} \sin \nu_0 t - \nu_0 \sin \omega_{2k+1} t}{\omega_{2k+1}^2 - \nu_0^2},$$

$$\omega_{2k+1} = (2k+1)\pi a/l.$$

нерезонансный и резонансный. ??

Нерезонансный случай.

$$v(x,t)=\frac{4lA}{(2k+1)^2\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\frac{\omega_{2k+1}\sin\nu_0 t-\nu_0\sin\omega_{2k+1}t}{\omega_{2k+1}^2-\nu_0^2}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

Резонансный случай.

$$-\frac{2lA}{(2k+1)^2\pi^2 a}\frac{\omega_{2k+1}t\cos\omega_{2k+1}t-\sin\omega_{2k+1}t}{\omega_{2k+1}}=$$

$$=\frac{2l^2A}{(2k+1)^3\pi^2a^2}\left(\sin\omega_{2k+1}t-\omega_{2k+1}t\cos\omega_{2k+1}t\right).$$

Колебания прямоугольной мембраны

Рассмотрим свободные колебания прямоугольной мембраны длины l_1 и ширины l_2, которая жестко закреплена со всех сторон.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u(x,y,t)|_{x=0} = u(0,y,t) = 0,$$

$$u(x,y,t)|_{x=l_1} = u(l_1,y,t) = 0,$$

$$u(x,y,t)|_{y=0} = u(x,0,t) = 0,$$

$$u(x,y,t)|_{y=l_2} = u(x,l_2,t) = 0$$

и начальными условиями:

$$u(x,y,t)|_{t=0} = f(x,y), \quad \left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x,y).$$

Применим метод разделения переменных. Найдем нетривиальные решения уравнения, удовлетворяющие нашим однородным граничным условиям и представимые в виде $u(x,y,t) = u(M,t) = V(M)T(t) \neq 0.$

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Delta V(M)}{V(M)}$$

так как выполняется для любых $M \in D$ и $t > 0$, то правая и левая части равны $\mathrm{const} = -\lambda^2$

Уравнение для временной части будет выглядеть следующим образом:

$$\ddot{T}(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0.$$

Координатная часть: $V(M) = X(x)Y(y)$

и $$\frac{\Delta V(M)}{V(M)} = \frac{X''}{X(x)} + \frac{Y''}{Y(y)} = \text{const} = -\lambda^2.$$ – это возможно тогда и только тогда, когда каждый член суммы равен константе:

$$\lambda^2 = \nu^2 + \mu^2; \quad X''(x) + \nu^2 X(x) = 0; \quad Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0.$$

Граничные условия: $X(0) = 0; X(l_1) = 0,\ Y(0) = 0$ и $Y(l_2) = 0.$

Из решения координатной части

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{l_1}\right), \qquad \nu_k = \frac{k\pi}{l_1} \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right), \qquad \mu_n = \frac{n\pi}{l_2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

И тогда уравнение для временной части $T(t)$ для всех λ_{kn}, т. е. для каждой пары ν_k и μ_n (все значения k и n):

$$\ddot{T}_{kn}(t) + a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2}\right) T_{kn}(t) = 0.$$

Решение этого уравнения $T_{kn}(t) = a_{kn}\cos(\omega_{kn}t) + b_{kn}\sin(\omega_{kn}t)$,

где $\omega_{kn} = \pi a\sqrt{k^2/l_1^2 + n^2/l_2^2}$ — собственные частоты мембраны.

собственные колебания мембраны

$$u_{kn}(x, y, t) = [a_{kn}\cos(\omega_{kn}t) + b_{kn}\sin(\omega_{kn}t)]\sin(\nu_k x)\sin(\mu_n y),$$

или $u_{kn}(x, y, t) = F_{kn}\sin(\omega_{kn}t + \varphi_{kn})\sin(\nu_k x)\sin(\mu_n y)$,

где $F_{kn} = \sqrt{a_{kn}^2 + b_{kn}^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi_{kn} = b_{kn}/a_{kn}$.

основной тон мембраны

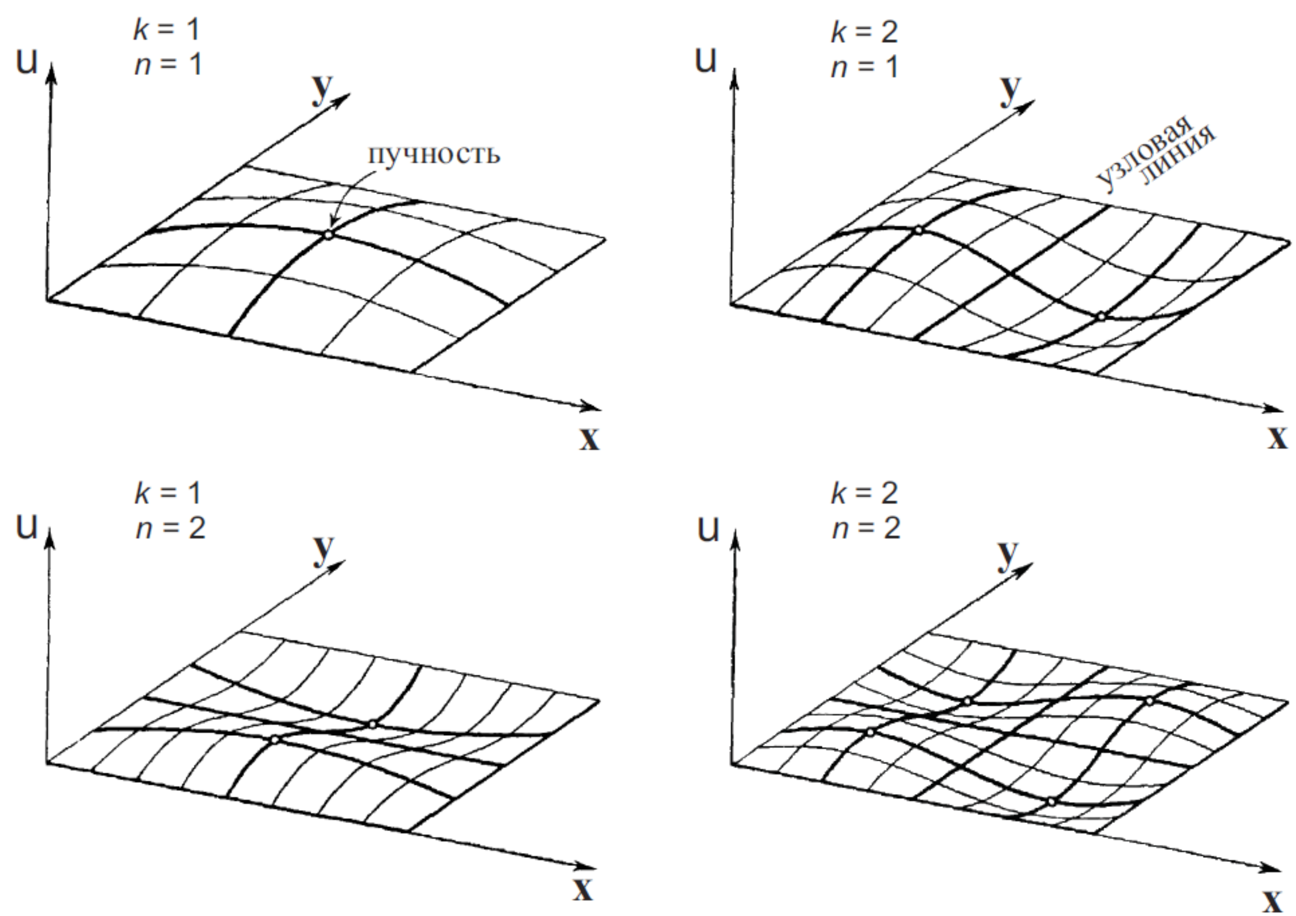
$$\omega_{11} = \pi a\sqrt{1/l_1^2 + 1/l_2^2}$$

узловые прямые

$$\sin(\pi x/l_1) = 0$$

и

$$\sin(\pi y/l_2) = 0$$



Полное решение задачи:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}u_{kn}(x,y,t)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}[a_{kn}\cos(\omega_{kn}t)+b_{kn}\sin(\omega_{kn}t)]\sin\left(\frac{k\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right)$$

Подставим это решение в начальные условия и найдем коэффициенты a_n и b_n

$$u(x,y,t)|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{kn}\sin\left(\frac{k\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right)=f(x,y),$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\omega_{kn}b_{kn}\sin\left(\frac{k\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right)=F(x,y).$$

$$a_{kn}=\frac{4}{l_1\,l_2}\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}f(x,y)\sin\left(\frac{k\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right)dx\,dy,$$

$$b_{kn}=\frac{4}{l_1\,l_2\,\omega_{kn}}\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}F(x,y)\sin\left(\frac{k\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{l_2}\right)dx\,dy.$$