Криволинейные ортогональные системы координат

Наряду с декартовыми координатами часто удобно пользоваться *криволинейными координатами* q_1, q_2, q_3. Каждой точке (M) соответствует совокупность чисел q_1, q_2, q_3, определяющих положение этой точки в пространстве.

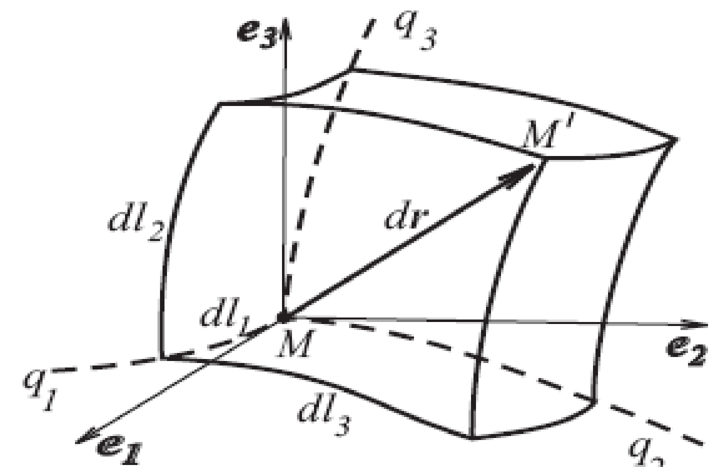


Рис. 23. Криволинейные ортогональные системы координат

Уравнения $q_1(x, y, z) = C_1$, $q_2(x, y, z) = C_2$, $q_3(x, y, z) = C_3$ определяют поверхности уровня для скалярных функции $q_1(x, y, z)$, $q_2(x, y, z)$, $q_3(x, y, z)$. Придавая C_1, C_2, C_3 различные значения, получаем три семейства поверхностей, которые называются *координатными*

◇ Если направления $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ остаются постоянными для декартовой системы координат, то в криволинейной направления $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ меняются от точки к точке.

Система криволинейных координат называется *ортогональной*, если ее базисные векторы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0;$$
$$\hat{e}_1 = \hat{e}_2 \times \hat{e}_3, \quad \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2.$$

малое смещение точки M в точку M' ($d\boldsymbol{r} = \overrightarrow{MM'}$):

$$d\boldsymbol{r} = dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y + dz\,\hat{e}_z \quad \text{и} \quad d\boldsymbol{r} = dl_1\,\hat{e}_1 + dl_2\,\hat{e}_2 + dl_3\,\hat{e}_3,$$

где dl_1, dl_2, dl_3 — элементы дуг соответствующих координатных линий.

базисные векторы $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ можно выразить так:

$$\hat{e}_m = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l_m}, \quad \text{где} \quad m = 1, 2, 3.$$

Так как при изменении координаты q_m на величину dq_m конец вектора перемещается вдоль координатной линии (q_m), а сам вектор $\boldsymbol{r}$ получает приращение $d\boldsymbol{r}$ $(x = x(q_m),\ y = y(q_m),\ z = z(q_m))$, получим

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial x}{\partial q_m} dq_m \hat{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_m} dq_m \hat{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_m} dq_m \hat{e}_z =$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial q_m}\hat{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_m}\hat{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_m}\hat{e}_z \right) dq_m.$$

Отсюда следует, что

$$dl_m = |dr| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_m}\right)^2}\, dq_m = H_m\, dq_m,$$

где

$$H_m = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_m}\right)^2}, \quad m = 1, 2, 3.$$

Производная по координатам q_m равна

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_m} = H_m \hat{e}_m, \quad m = 1, 2, 3.$$

Вектор $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_m}$ направлен по касательной к координатной линии q_m, его величина H_m является функцией координат q_1, q_2, q_3. Очевидно, что

$$H_m^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_m}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_m}\right)^2 .$$

Величины H_m $(m = 1, 2, 3)$ называются метрическими коэффициентами или *коэффициентами Ламэ* данной ортогональной криволинейной системы координат.

$$(d\mathbf{r})^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_1^2\, dq_1^2 + H_2^2\, dq_2^2 + H_3^2\, dq_3^2.$$

$$dS_1 = dl_2\, dl_3 = H_2 H_3\, dq_2\, dq_3;$$

$$dS_2 = dl_1\, dl_3 = H_1 H_3\, dq_1\, dq_3;$$

$$dS_3 = dl_1\, dl_2 = H_1 H_2\, dq_1\, dq_2;$$

$$dV = dl_1\, dl_2\, dl_3 = H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3.$$

Основные дифференциальные операции в криволинейных ортогональных координатах

Основные физические понятия теории поля — градиент, дивергенция и ротор ($\operatorname{grad} u(M)$, $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M)$) — имеют определенный физический смысл и не зависят от выбора системы координат.

Проекция вектора $\operatorname{grad} u(q_1, q_2, q_3)$ на направление единичного вектора $\hat{e}_m$ есть производная функции $u(q_1, q_2, q_3)$ по этому направлению:

$$\operatorname{grad}_m u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial l_m} = \frac{1}{H_m} \frac{\partial u(M)}{\partial q_m} \quad (m = 1, 2, 3).$$

Поток вектора $\boldsymbol{a}(M)$ в криволинейных координатах через замкнутую поверхность криволинейного элементарного параллелепипед запишется в виде

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 H_1 a_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 H_2 a_3) \right].$$

Вихрь векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M) =$$

$$= \frac{1}{H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3a_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(H_2a_2)\right)\hat{e}_1 + \frac{1}{H_3H_1}\left(\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1a_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(H_3a_3)\right)\hat{e}_2 +$$

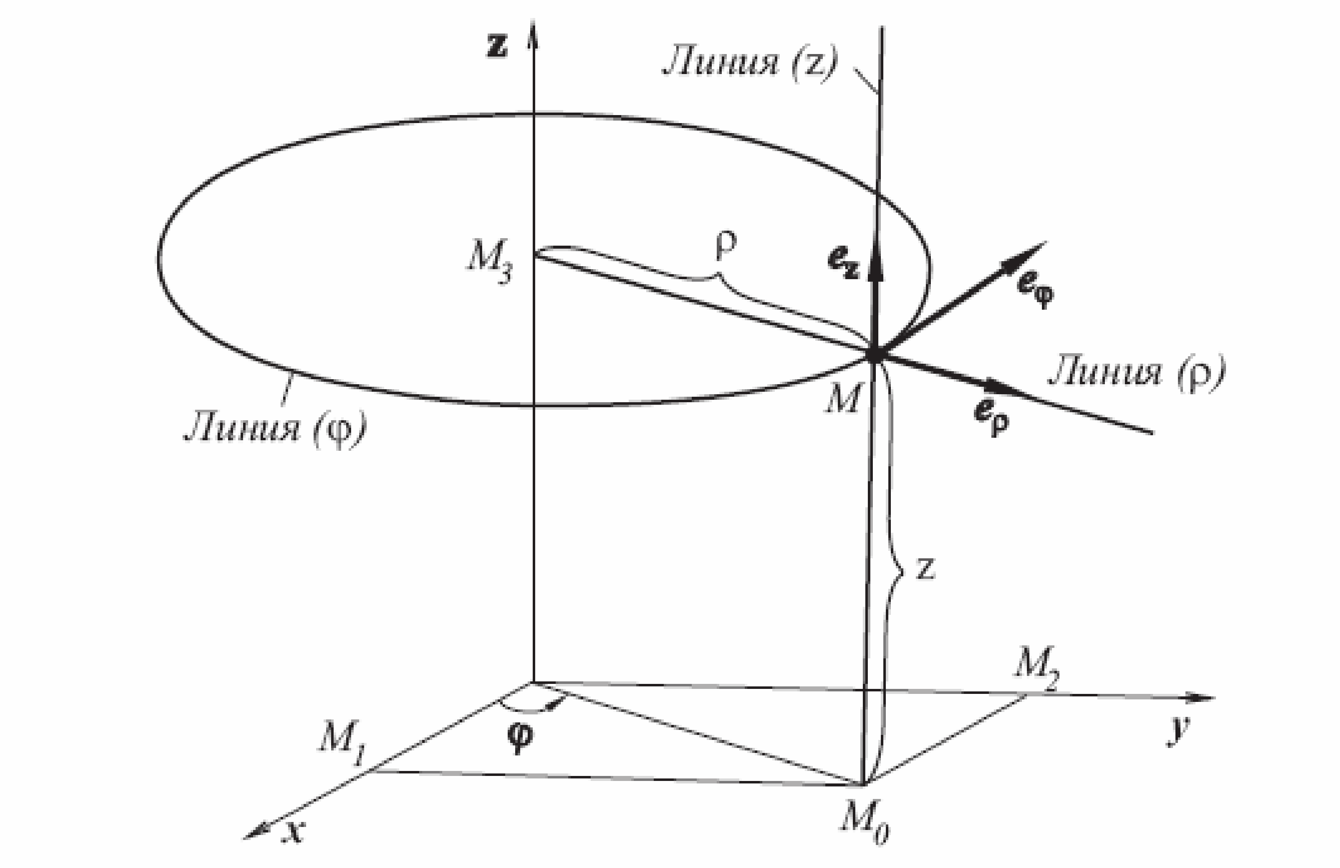
$$+ \frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2a_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1a_1)\right)\hat{e}_3 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{pmatrix} H_1\hat{e}_1 & H_2\hat{e}_2 & H_3\hat{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1a_1 & H_2a_2 & H_3a_3 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u =$$

$$= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right].$$

Цилиндрические координаты

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z;$$
$$\hat{e}_1 = \hat{e}_\rho, \quad \hat{e}_2 = \hat{e}_\varphi, \quad \hat{e}_3 = \hat{e}_z,$$



$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z;$$
$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1.$$

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{\partial u}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{e}_z;$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\rho) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho a_z)\right) =$$
$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}\right)\hat{e}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_z,$$

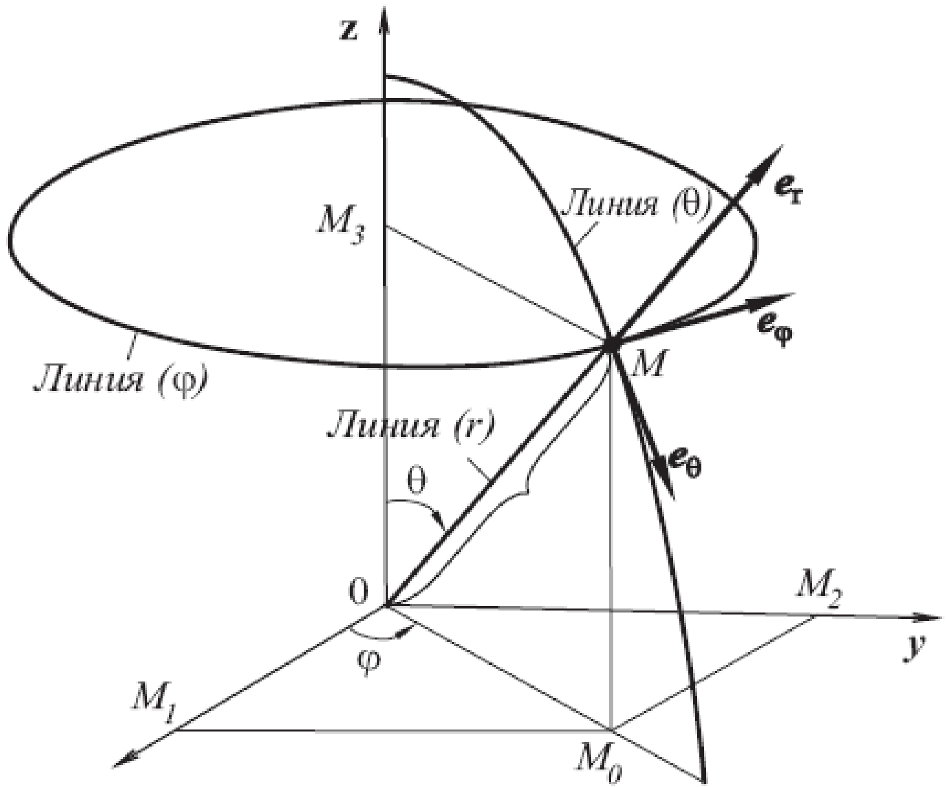
$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Сферические координаты

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi;$$
$$\hat{e}_1 = \hat{e}_r, \quad \hat{e}_2 = \hat{e}_\theta, \quad \hat{e}_3 = \hat{e}_\varphi,$$

$0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$



$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta;$$
$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta.$$

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{\partial u}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi;$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta r\sin\theta) + r\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right);$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M) = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\hat{e}_r +$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r a_\varphi)\right)\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\hat{e}_\varphi;$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$