

ДИСЦИПЛИНА	<b>Радиотехнические цепи и сигналы часть 1</b> полное название дисциплины без аббревиатуры
ИНСТИТУТ	<b>Радиотехнических и телекоммуникационных систем</b>
КАФЕДРА	<b>радиоволновых процессов и технологий</b> полное название кафедры
ГРУППА/Ы	<b>РРБО-1-3-18; РССО-1-3-18</b> номер групп/ы, для которых предназначены материалы
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	<b>Лекция №6</b> лекция; материал к практическим занятиям; контрольно-измерительные материалы к практическим занятиям; руководство к КР/КП, практикам
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	<b>Исаков Владимир Николаевич</b> фамилия, имя, отчество
СЕМЕСТР	<b>5</b> указать номер семестра обучения

## Лекция 6

### 6. Корреляционный анализ сигналов

#### 6.1. Коэффициент взаимной корреляции сигналов

Одной из задач, решаемых при обработке сигналов, является их различение. В качестве примера рассмотрим различение детерминированных сигналов с одинаковой энергией (рис.6.1). На известном временном интервале  $t \in [0, T_c]$  на входе устройства различения сигналов (различителя) действует сигнал  $s_k(t)$  из ансамбля детерминированных сигналов  $\{s_i(t)\}_{i=0}^{N-1}$  с одинаковыми энергиями

$$E = E_i = \int_0^{T_c} |s_i(t)|^2 dt, \quad i = 0, \dots, N-1$$

Сигналы равны нулю вне интервала  $t \in [0, T_c]$ .

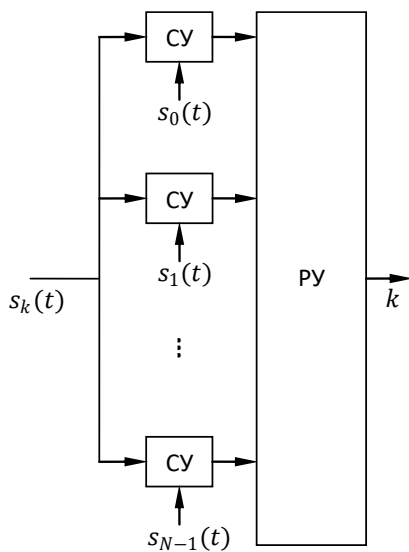


Рис.6.1. Структурная схема различителя сигналов с одинаковой энергией

От различителя сигналов требуется определить какой из известных сигналов поступил на его вход. Различитель располагает эталонами (образцами) сигналов и сравнивает сигнал, поступивший на вход, с каждым из эталонов. По результатам сравнения, осуществляемом в сравнивающих устройствах (СУ), в решающем устройстве (РУ) принимается решение о том, какой из сигналов действует на входе.

В основу различения сигналов, таким образом, положено их сравнение. При сравнении сигналов устанавливается степень их взаимного соответствия по форме. Для действительных сигналов сравнение означает выявление равномасштабного подобия временных диаграмм сравниваемых сигналов.

Мерой степени подобия двух сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  принимается энергия разностного сигнала:

$$E_{\Delta} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta(t)|^2 dt,$$

где  $\Delta(t) = s_1(t) - s_2(t)$ . В случае, когда сигналы совпадают, разностный сигнал равен нулю и равна нулю его энергия. Чем меньше значение энергии разностного сигнала, тем больше сигналы «похожи» друг на друга.

Рассмотрим подробнее структуру записанного выражения:

$$\begin{aligned} E_{\Delta} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (s_1(t) - s_2(t))(s_1(t) - s_2(t))^* dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |s_2(t)|^2 dt - \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)s_1^*(t)dt = \\ &= E_{s_1} + E_{s_2} - R_{s_1s_2} - R_{s_2s_1}, \end{aligned}$$

где  $E_{s_1}, E_{s_2}$  - энергии сигналов;

$$R_{s_1s_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt \text{ - коэффициент взаимной корреляции между}$$

сигналами (КВК). Выражение, определяющее коэффициент взаимной корреляции называется корреляционным интегралом.

Коэффициент корреляции, очевидно, обладает сопряжённой симметрией относительно своих индексов, то есть  $R_{s_1s_2} = R_{s_2s_1}^*$ , с учётом которого для энергии разностного сигнала запишем:

$$E_{\Delta} = E_{s_1} + E_{s_2} - 2 \operatorname{Re} R_{s_1s_2}.$$

Полученное выражение показывает, что среди всех возможных сигналов с энергиями  $E_{s_1}, E_{s_2}$  наиболее близки друг к другу те два, для которых действительная часть коэффициента взаимной корреляции  $\operatorname{Re} R_{s_1s_2}$  максимальна.

С этой точки зрения, сравнение сигналов может осуществляться и на основе анализа значения действительной части коэффициента взаимной корреляции.

Отметим основные свойства КВК:

1. Свойство сопряжённой симметрии

$$R_{s_1 s_2} = R_{s_2 s_1}^*.$$

2. Неравенство Коши-Буняковского (оно немедленно следует из такового, записанного для корреляционного интеграла):

$$|R_{s_1 s_2}| \leq \sqrt{E_{s_1} E_{s_2}},$$

где равенство достигается тогда и только тогда, когда сигналы линейно-связаны, то есть  $s_2(t) = k s_1(t)$ ,  $k \in \mathbb{C}$ . Учитывая также, что и мнимая и действительная части коэффициента взаимной корреляции не могут превосходить модуля, для них также может быть записано:  $\operatorname{Re} R_{s_1 s_2} \leq \sqrt{E_{s_1} E_{s_2}}$ ,  $\operatorname{Im} R_{s_1 s_2} \leq \sqrt{E_{s_1} E_{s_2}}$ .

3. КВК сигналов и их спектральных характеристик связаны полученным ранее равенством Парсеваля:

$$R_{s_1 s_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega) S_2^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} R_{S_1 S_2}.$$

Учитывая свойства КВК, вернёмся к примеру с ансамблем сигналов одинаковой энергии, в котором, очевидно, гарантируется, что максимальное значение действительной части коэффициента корреляции будет получено только в том канале устройства различения сигналов (рис.6.1), где произошло совпадение по форме обрабатываемого и эталонного сигналов. Номер этого канала будет установлен решающим устройством различителя по максимальному отклику.

Свойства модуля коэффициента корреляции аналогичны свойствам его действительной части, поэтому при сравнении сигналов может использоваться и модуль коэффициента корреляции.

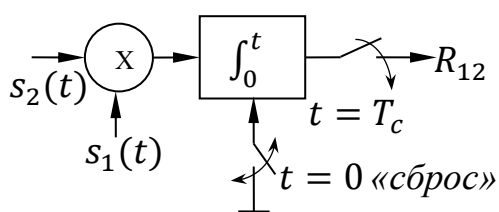


Рис.6.2. Структурная схема коррелятора

Структурная схема устройства для получения корреляционного интеграла (коррелятора) в случае действительных сигналов показана на рис.6.2. В момент  $t = 0$ , когда начинают действовать сигналы, осуществляется сброс интегратора. Значение коэффициента корреляции снимается с выхода интегратора по окончании действия сигналов в момент времени  $t = T_c$ .

Один из входов коррелятора можно условно считать опорным. На второй вход поступает тестируемый сигнал. При формировании отклика коррелятора вычисляется произведение опорного и тестируемого сигналов, и интегратор определяет площадь под графиком этого произведения. На интервалах времени, когда сигналы имеют одинаковую полярность, результат интегрирования увеличивается. На интервалах времени, когда один из сигналов принимает малые значения, результат интегрирования изменяется незначительно. На интервалах времени, где опорный и тестируемый сигнал имеют разные полярности, результат их перемножения отрицательный и происходит уменьшение результата интегрирования.

Таким образом, в случае, когда графики сигналов различаются, например, один сигнал принимает большие значения, когда близок к нулю второй сигнал, или могут встречаться интервалы, на которых сигналы имеют различную полярность, реакция коррелятора будет мала, либо отрицательна. В случае, когда графики сигналов подобны, их полярность и интервалы больших значений совпадают, и результат интегрирования их произведения даёт большие значения.

## 6.2. Взаимная корреляционная функция сигналов

В радиотехнических системах при решении задач измерения дальности возникает необходимость сравнения сигналов с различными параметрами запаздывания (рис.6.3).

В каждом канале измерителя осуществляется сравнение принятого и задержанного сигнала. На выходе каждого коррелятора «К» обобщённо имеем

$$R_{s_1 s_2}(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t - \tau_1) s_2^*(t - \tau_2) dt,$$

где  $s_1(t - \tau_1)$ ,  $s_2(t - \tau_2)$  - сигналы на входе коррелятора, каждый со своим параметром запаздывания  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ . Преобразуем выражение для КВК:

$$R_{s_1 s_2}(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t - \tau_1) s_2^*(t - \tau_2) dt = \left[ \begin{array}{l} t' = t - \tau_1 \\ dt' = dt \end{array} \right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t') s_2^*(t' + \tau_1 - \tau_2) dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t') s_2^*(t' - \tau) dt',$$

где  $\tau = \tau_2 - \tau_1$  - разность параметров сигналов (взаимное запаздывание).

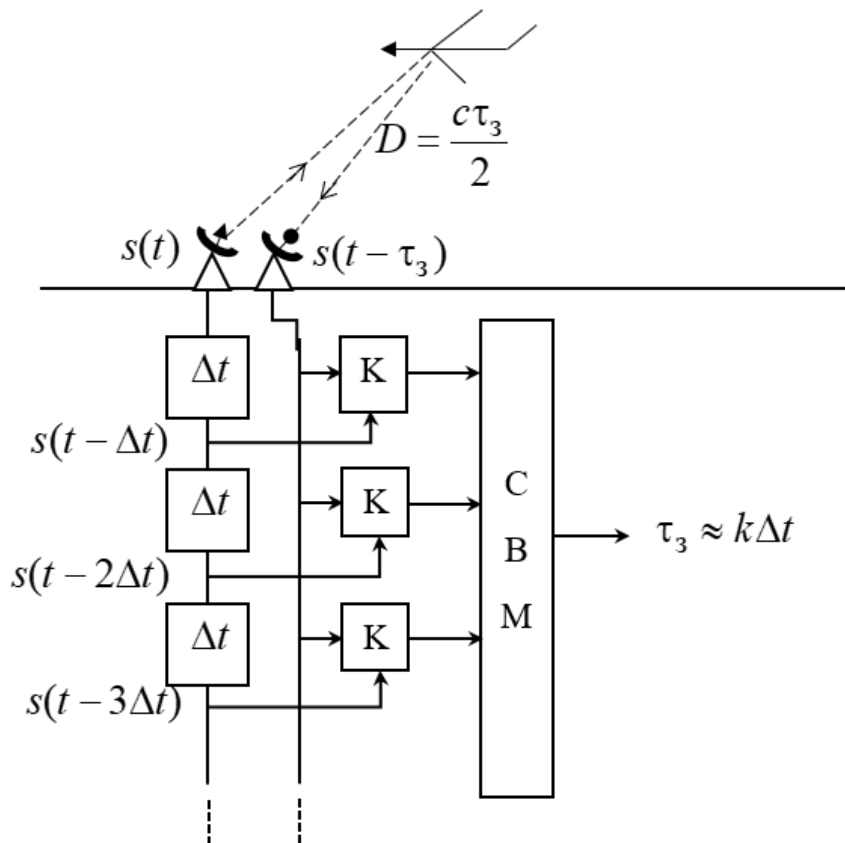


Рис.6.3. Измерение времени запаздывания

Таким образом коэффициент взаимной корреляции сигналов с параметрами запаздывания  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  зависит только от разности  $\tau = \tau_2 - \tau_1$  этих параметров запаздывания сигналов и называется взаимной корреляционной функцией сигналов (ВКФ):

$$R_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t') s_2^*(t' - \tau) dt'.$$

Взаимная корреляционная функция сигналов является обобщением коэффициента корреляции и инкапсулирует его основные свойства:

1. Свойство сопряжённой симметрии:

$$R_{s_1 s_2}(\tau) = R_{s_2 s_1}^*(-\tau)$$

2. Неравенство Коши – Буняковского:

$$|R_{s_1 s_2}(\tau)| \leq \sqrt{E_{s_1} E_{s_2}},$$

с равенством только при  $s_2(t - \tau) = k s_1(t)$ .

3. Равенство Парсеваля:

$$R_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega) S_2^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Функцию  $W_{s_1 s_2}(\omega) = S_1(\omega) S_2^*(\omega)$  называют взаимной спектральной плотностью энергии сигналов. Записанное выше равенство Парсеваля показывает, что взаимная плотность энергии сигналов и их взаимная корреляционная функция являются Фурье-парой:

$$R_{s_1 s_2}(\tau) \leftrightarrow W_{s_1 s_2}(\omega).$$

### 6.3. Автокорреляционная функция сигнала

В частном случае, когда  $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$  взаимная корреляционная функция приобретает вид:

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) s^*(t - \tau) dt.$$

Функция  $R_s(\tau)$  называется автокорреляционной функцией (АКФ) сигнала  $s(t)$ , определяется как коэффициент взаимной корреляции между копиями сигнала с взаимным сдвигом  $\tau$  и характеризует степень их равномасштабного подобия.

Свойства АКФ непосредственно следуют из свойств ВКФ:

1. Свойство сопряжённой симметрии:

$$R_s(\tau) = R_s^*(-\tau)$$

2. Неравенство Коши – Буняковского:

$$|R_s(\tau)| \leq E_s,$$

с равенством только при  $s(t - \tau) = k s(t)$ , которое может иметь место только при  $\tau = 0$  (и  $k = 1$ ), то есть максимума, равного энергии сигнала, модуль АКФ обязательно достигает в нуле.

3. Равенство Парсеваля:

$$R_s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s^*(t-\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)S^*(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.$$

Функцию  $W_s(\omega) = S(\omega)S^*(\omega) = |S(\omega)|^2$  называют спектральной плотностью энергии сигнала. Записанное равенство Парсеваля показывает, что автокорреляционная функция сигнала и его спектральная плотность энергии являются Фурье-парой:

$$R_s(\tau) \leftrightarrow W_s(\omega).$$

АКФ сигнала полностью определяется его амплитудным спектром. Поэтому все сигналы, имеющие одинаковые амплитудные спектры имеют и одинаковые АКФ. При изменении полярности импульсов, введении опережения/запаздывания, при зеркальном отражении относительно оси ординат АКФ не изменяется.

#### 6.4. Автокорреляционная функция суммы сигналов

Пусть сигнал представлен в виде суммы

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t),$$

для его АКФ получим:

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (s_1(t) + s_2(t))(s_1(t-\tau) + s_2(t-\tau))^* dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_1^*(t-\tau)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)s_2^*(t-\tau)dt + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2^*(t-\tau)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)s_1^*(t-\tau)dt = \\ &= R_{s_1}(\tau) + R_{s_2}(\tau) + R_{s_1s_2}(\tau) + R_{s_2s_1}(\tau). \end{aligned}$$



## Литература

### Основная литература

1. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов / О. А. Стеценко. — М.: Высш. шк., 2007.
2. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Дрофа, 2006.
3. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Радио и связь, 1986.
4. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 2000.

### Дополнительная литература

5. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.: ил. — Библиогр.: с. 804 (15 назв.)
6. Сигналы. Теоретическая радиотехника: Справ. пособие / А. Н. Денисенко. — М.: Горячая линия - Телеком, 2005. — 704 с.
7. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М.: Наука, 1998. — 608 с.