ДИСЦИПЛИНА	**Разработка и эксплуатация радиотелеметрических систем часть 1**
	полное название дисциплины без аббревиатуры
ИНСТИТУТ	**Радиотехнических и телекоммуникационных систем**
КАФЕДРА	**радиоволновых процессов и технологий**
	полное название кафедры
ГРУППА/Ы	**РССО-1,2,3-19; РРБО-1,2-19; РИБО-1,2,3,4-19**
	номер групп/ы, для которых предназначены материалы
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	**Лекция №4**
	лекция; материал к практическим занятиям; контрольно-измерительные материалы к практическим занятиям; руководство к КР/КП, практикам
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	**Исаков Владимир Николаевич**
	фамилия, имя, отчество
СЕМЕСТР	**5**
	указать номер семестра обучения

Лекция 4
Свойства преобразования Фурье
1. Свойство линейности

Пусть $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ - произвольные комплексные постоянные, тогда

$$F\{k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t)\} = k_1 F\{s_1(t)\} + k_2 F\{s_2(t)\},$$

$$F^{-1}\{k_1 S_1(\omega) + k_2 S_2(\omega)\} = k_1 F^{-1}\{S_1(\omega)\} + k_2 F^{-1}\{S_2(\omega)\}.$$

Доказательство:

$$F\{k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t)\right) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= k_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) e^{-j\omega t} dt + k_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) e^{-j\omega t} dt = k_1 F\{s_1(t)\} + k_2 F\{s_2(t)\}.$$

Для обратного преобразования Фурье доказывается аналогично.

2. Опережение/запаздывание сигнала

Пусть $t_0 > 0$ - параметр сдвига, $s_{t_0}(t) = s(t \pm t_0)$ - сигнал с запаздыванием/опережением, тогда

$$F\{s(t \pm t_0)\} = F\{s(t)\} e^{\pm j\omega t_0},$$

или

$$S_{t_0}(\omega) = S(\omega) e^{\pm j\omega t_0}.$$

Доказательство:

$$F\{s(t \pm t_0)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t \pm t_0) e^{-j\omega t} dt = \begin{bmatrix} t' = t \pm t_0 \\ dt' = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t') e^{-j\omega(t' \mp t_0)} dt' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t') e^{-j\omega t'} dt' e^{\pm j\omega t_0} = F\{s(t)\} e^{\pm j\omega t_0}.$$

Из доказанного для амплитудного и фазового спектров немедленно следует:

$$\left|S_{t_0}(\omega)\right| = \left|S(\omega)\right|, \qquad \varphi_{S_{t_0}}(\omega) = \varphi_S(\omega) \pm \omega t_0.$$

При запаздывании/опережении амплитудный спектр сигнала не изменяется. К фазовому спектру прибавляется $\pm\omega t_0$.

3. Спектр комплексно-сопряжённого сигнала

$$F\left\{s^*(t);\omega\right\} = F^*\left\{s(t);-\omega\right\}.$$

Действительно $F\left\{s^*(t);\omega\right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)e^{-j\omega t}dt = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s^*(t)e^{-j\omega t}dt\right)^{**} =$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j(-\omega)t}dt\right)^{*} = F^*\left\{s(t);-\omega\right\}.$$

4. Спектр зеркально-симметричного сигнала

$$F\left\{s^*(-t)\right\} = F^*\left\{s(t)\right\}.$$

Доказательство:

$$F\left\{s^*(-t)\right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s^*(-t)e^{-j\omega t}dt = \begin{bmatrix} t' = -t \\ dt' = -dt \end{bmatrix} = -\int\limits_{+\infty}^{-\infty} s^*(t')e^{j\omega t'}dt' =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s^*(t')e^{j\omega t'}dt'\right)^{**} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t')e^{-j\omega t'}dt'\right)^{*} = F^*\left\{s(t)\right\}.$$

5. Дифференцирование сигнала

Пусть сигнал убывает на бесконечности $\lim\limits_{t\to\pm\infty} s(t) = 0$, тогда

$$F\left\{\frac{ds(t)}{dt};\omega\right\} = j\omega\, F\left\{s(t);\omega\right\}.$$

Доказательство:

$$F\left\{\frac{ds(t)}{dt};\omega\right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds(t)}{dt}e^{-j\omega t}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}ds(t) =$$

$$= s(t)e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)de^{-j\omega t} = j\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt = j\omega F\left\{s(t);\omega\right\}.$$

6. Свойство изменения масштаба времени

Пусть $a > 0$ - параметр масштаба, $s_a(t) = s(at)$, тогда

$$F\{s(at);\omega\}=\frac{1}{a}F\left\{s(t);\frac{\omega}{a}\right\},$$

или

$$S_a(\omega)=\frac{1}{a}S\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Доказательство:

$$F\{s(at);\omega\}=\int_{-\infty}^{+\infty}s(at)e^{-j\omega t}dt=\begin{bmatrix} t'=at \\ dt=\dfrac{dt'}{a}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}s(t')e^{-j\frac{\omega}{a}t'}dt'=\frac{1}{a}F\left\{s(t);\frac{\omega}{a}\right\}.$$

Доказанное свойство показывает, что если для сигнала параметром масштаба по времени является a, то для его спектра параметром масштаба по частоте является $1/a$ (см. рис.5.1). Параметры масштаба по времени и частоте обратно-пропорциональны. Если один из них принимает значения меньшие единицы, то другой – большие единицы и наоборот. Иными словами увеличение длительности сигнала приводит к уменьшению ширины его спектра и наоборот. Если обозначить $\Delta\omega$ - ширину спектра при единичном параметре масштаба $a=1$, а также $\tau_и$ - длительность импульса при единичном параметре масштаба, и $\Delta\omega(a)$, $\tau_и(a)$ - их соответствующие значения при некотором параметре $a\neq 1$, то из рис. 5.1, запишем

$$\Delta\omega(a)\tau_и(a)=a\Delta\omega\frac{\tau_и}{a}=\Delta\omega\tau_и.$$

То есть произведение ширины спектра на длительность импульса не зависит от параметра масштаба и называется базой сигнала. База сигнала представляет собой число, определяемое только формой сигнала:

$$B_\omega=\Delta\omega\tau_и.$$

На практике часто удобнее оказывается другое определение базы:

$$B_f=\Delta f\tau_и=\frac{1}{2\pi}B_\omega,$$

где $\Delta f = \Delta\omega / 2\pi$ - ширина спектра в единицах линейной частоты.

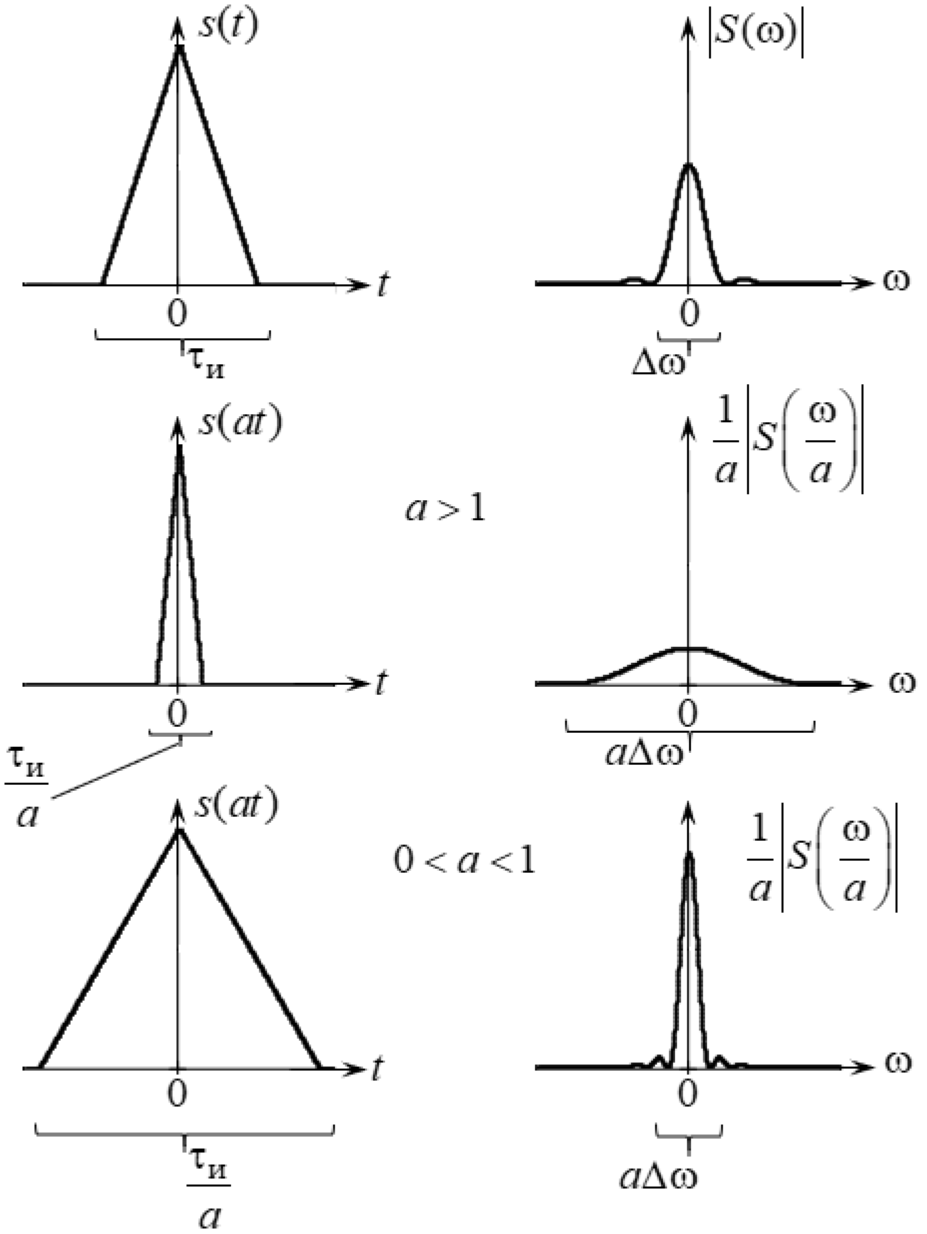

Рис.5.1. Сигнал и его амплитудный спектр при различных значениях параметра масштаба

7. Смещение спектра сигнала

Пусть $\omega_0 > 0$ - положительный параметр смещения спектра, обозначим $s_{\omega_0}(t) = s(t)e^{\pm j\omega_0 t}$. Тогда

$$F\left\{s(t)e^{\pm j\omega_0 t};\omega\right\} = F\left\{s(t);\omega \mp \omega_0\right\},$$

или

$$S_{\omega_0}(\omega) = S(\omega \mp \omega_0).$$

Доказательство:

$$F\left\{s(t)e^{\pm j\omega_0 t};\omega\right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{\pm j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j(\omega\mp\omega_0)t}dt = F\left\{s(t);\omega \mp \omega_0\right\}.$$

8. Теорема о свёртке

$$F\left\{s_1 * s_2(t)\right\} = F\left\{s_1(t)\right\}F\left\{s_2(t)\right\}.$$

Доказательство:

$$F\left\{s_1 * s_2(t)\right\} = F_t\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_1(t')s_2(t-t')dt'\right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_1(t')F_t\left\{s_2(t-t')\right\}dt' =$$

$$= F_t\left\{s_2(t)\right\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_1(t')e^{-j\omega t'}dt' = F\left\{s_1(t)\right\}F\left\{s_2(t)\right\}.$$

9. Произведение сигналов

$$F\left\{s_1(t)s_2(t)\right\} = \frac{1}{2\pi}F\left\{s_1(t)\right\} * F\left\{s_2(t)\right\}(\omega),$$

или

$$F\left\{s_1(t)s_2(t)\right\} = \frac{1}{2\pi}S_1 * S_2(\omega).$$

Доказательство:

$$F_\omega^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}S_1 * S_2(\omega)\right\} = F_\omega^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega')S_2(\omega-\omega')d\omega'\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega')F_\omega^{-1}\left\{S_2(\omega-\omega')\right\}d\omega' = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega')s_2(t)e^{j\omega' t}d\omega' =$$

$$= s_2(t)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega')e^{j\omega' t}d\omega' = s_1(t)s_2(t).$$

Выполнив прямое преобразование Фурье от левой и правой частей записанного равенства получим доказываемое утверждение.

10. Симметрия преобразования Фурье

$$s(t) \leftrightarrow S(\omega) \Leftrightarrow S^*(t) \leftrightarrow 2\pi s^*(\omega).$$

Доказательство:

$$s(t) \leftrightarrow S(\omega)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$S^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi s^*(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$S^*(t) \leftrightarrow 2\pi s^*(\omega).$$

Литература

Основная литература

1. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов / О. А. Стеценко. — М.: Высш. шк., 2007.

2. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Дрофа, 2006.

3. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Радио и связь, 1986.

4. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 2000.

Дополнительная литература

5. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.: ил. — Библиогр.: с. 804 (15 назв.)

6. Сигналы. Теоретическая радиотехника: Справ. пособие / А. Н. Денисенко. — М.: Горячая линия - Телеком, 2005. — 704 с.

7. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М.: Наука, 1998. — 608 с.