ПРАКТИКА №9
УГЛОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Угловая модуляция может быть разделена на два вида: частотную и фазовую модуляции, т.е. модулирующее колебание влияет на изменение фазового угла несущего колебания. Частота и фаза колебания жёстко связаны между собой, т.к. частота, это скорость изменения фазы, поэтому частотную и фазовую модуляции можно разделить так: в первом варианте частота, а соответственно и фаза изменяется непрерывно и плавно, во втором случае фаза или частота несущего сигнала изменяется с резко, скачками.

Благодаря своей высокой помехоустойчивости, УМ широко применяется в беспроводных системах связи, телеметрии, управления, некоторых системах навигации и радиолокации.

Выражение для сигнала с угловой модуляцией (рис. 1) в общем виде:

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t)) = A_0 \cos(\Phi(t)).$$

где $\varphi(t)$ – изменение фазы за счёт угловой модуляции, $\Phi(t)$ - полная фаза.

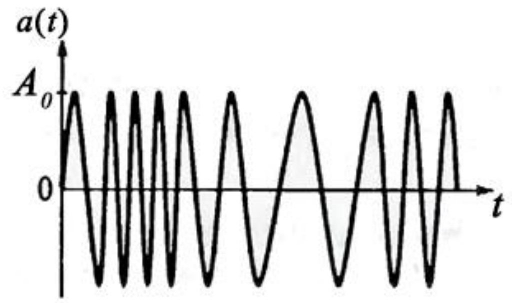

Рис. 1 – Сигнал с угловой модуляцией

Можно записать:

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \Delta\omega(t),$$

где $\Delta\omega(t) = \dfrac{d\varphi}{dt}$ – изменение мгновенной частоты за счёт угловой модуляции. Тогда с из выражения следует, что:

$$\Phi(t)=\int_0^t \omega(t)dt+\varphi_0,\ \varphi(t)=\int \Delta\omega(t)dt.$$

Т.е. при угловой модуляции связанно изменяются фаза $\varphi(t)$ и частота $\Delta\omega(t)$

9.1. Фазовая модуляция

При фазовой модуляции фаза несущего сигнала изменяется пропорционально модулирующему колебанию:

$$\varphi(t)=k\cdot s(t),$$

где k – коэффициент пропорциональности. Тогда общее выражение для фазомодулированного сигнала можно записать:

$$a_{\text{фм}}(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0+k\cdot s(t)).$$

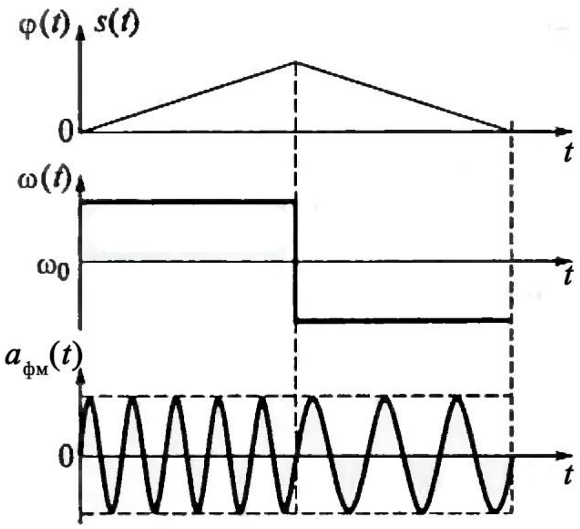

Рис. 2 – Временные диаграммы для ФМ-радиосигнала

На рис. 9 приведены временные диаграммы модулирующего сигнала $s(t)$ и фазы $\varphi(t)$. Изменяющемуся с постоянной скоростью уровню информационного сообщения соответствует постоянная частота, при смене "направления" изменения модулирующего сигнала, скачком изменяется и частота $\omega(t)$ несущего сигнала.

$$\omega(t)=\omega_0+k\frac{ds(t)}{dt}.$$

9.2. Частотная модуляция (ЧМ)

При частотной модуляции пропорционально информацонному сообщению изменяется частота несущего колебания:

$$\Delta\omega(t)=k\cdot s(t),$$

где k – коэффициент пропорциональности. Тогда фаза изменяется согласно выражению:

$$\varphi(t)=\int \Delta\omega(t)dt=k\int s(t)dt.$$

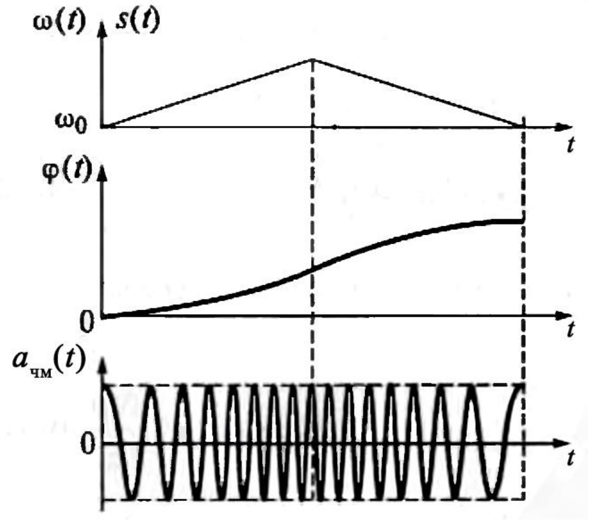

Рис. 3 – Временные диаграммы для ЧМ-радиосигнала

Подставив это выражение в общее выражение получим для частотно-модулированного сигнала (рис. 3):

$$a_{\text{чм}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + k\int s(t)dt).$$

В этом случае частота несущего сигнала изменяется в соответствии с модулирующим колебанием, поэтому фаза сигнала изменяется плавно.

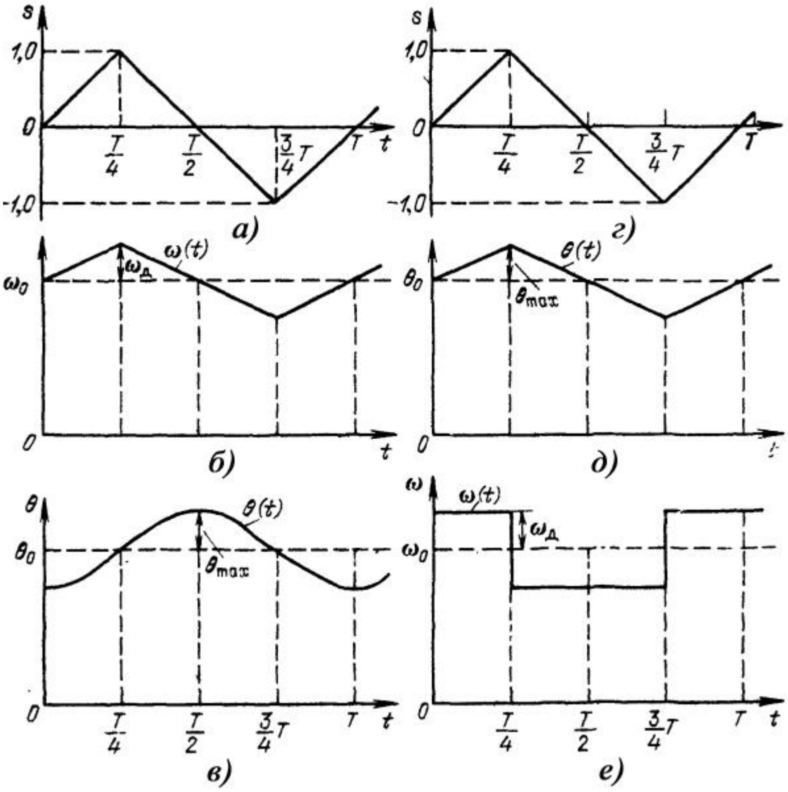

Рис. 4 - Сравнение функций частоты и фазы при ЧМ (слева) и ФМ (справа) при пилообразном модулирующем колебании

9.3. Тональная УМ

Радиосигналы с угловой модуляцией достаточно сложны с математической точки зрения. Поэтому свойства будут рассматриваться на примере тональной угловой модуляции, когда модулирующий сигнал – гармоническое колебание. Тональный ФМ сигнал имеет вид:

$$a_{\text{фм}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\varphi \cos(\Omega t)),$$

где $\Delta\varphi$ – девиация фазы.

Для тонального ЧМ сигнала частота и фаза определяются как:

$$\Delta\omega(t) = \Delta\omega \cdot \cos(\Omega t);$$

$$\varphi(t) = \Delta\omega \int \cos(\Omega t) dt = \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin(\Omega t),$$

где $\Delta\omega$ – девиация частоты. Тогда модулированный ЧМ сигнал запишем:

$$a_{\text{чм}}(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin(\Omega t)\right).$$

Для сигнала с УМ аналогом глубины модуляции АМ является *индекс угловой модуляции m*. Для ФМ это девиация фазы, для ЧМ это отношение $\Delta\omega/\Omega$ Тогда для сигнала с УМ можно получить общее выражение с индексом угловой модуляции:

$$a_{\text{ум}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + m \cdot \sin(\Omega t)).$$

9.4. Спектр сигнала с тональной УМ

Для получения спектр радиосигнала с тональной УМ нужно разложить предыдущее выражение в ряд. Сначала раскроем выражение через тригонометрическую формулу косинуса суммы аргументов:

$$a(t) = A_0 \cos(m \cdot \sin(\Omega t)) \cos(\omega_0 t) - A_0 \sin(m \cdot \sin(\Omega t)) \sin(\omega_0 t) = a_c(t) + a_s(t),$$

т.е. при УМ колебание можно рассматривать как сумму двух квадратурных составляющих: косинусной $a_c(t)$ и синусной $a_s(t)$, каждое из которых модулировано только по амплитуде. Для нахождения спектра сигнала, описываемого этим выражением, достаточно сдвинуть на частоту несущего колебания ω_0 спектры квадратурных составляющих.

Затем применим соотношения:

$$\cos(m \cdot \sin(\Omega t)) = J_0(m) + 2J_2 \cos(2\Omega t) + \ldots;$$

$$\sin(m \cdot \sin(\Omega t)) = 2J_1(m) \sin(\Omega t) + 2J_3 \sin(3\Omega t) + \ldots.$$

Здесь $J_n(m)$ – функции Бесселя первого рода *n*-ого порядка от аргумента *m*. Представление функции Бесселя в виде ряда Тейлора.

$$J_n(m) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^x}{x!\Gamma(x+n+1)} \left(\frac{m}{2}\right)^{2x+n}$$

где **Г**(…) – гамма-функция Эйлера, обобщение факториала.

Эти соотношения подставляются в выражения для модулированного сигнала:

$$a(t) = A_0 J_0(m)\cos(\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_0 J_n(m)\cos(\omega_0 + n\Omega)t +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1^n) A_0 J_n(m)\cos(\omega_0 - n\Omega)t.$$

Это выражение описывает спектральную плотность тонального УМ колебания. Т.е. такой сигнал содержит бесконечное число гармонических составляющих с частотами $\omega_0 + n\Omega$ и $\omega_0 - n\Omega$, n = 1, 2, …, которые образуют две боковые полосы, т.е. попарно симметричные относительно частоты несущего колебания.

Амплитуды составляющих спектра равны $A_n = A_0 |J_n(m)|$, т.е. вклад каждой составляющей определяется индексом модуляции. Для вычисления значений амплитуд гармонических составляющих A_n необходимо знать функции Бесселя $J_n(m)$ при заданных значениях m и n. Эти функции известны, и их можно найти в математических справочниках. На рис. 5 приведены графики функции Бесселя для n = 1, 2, …, 9 и $0 \le m \le 12$.

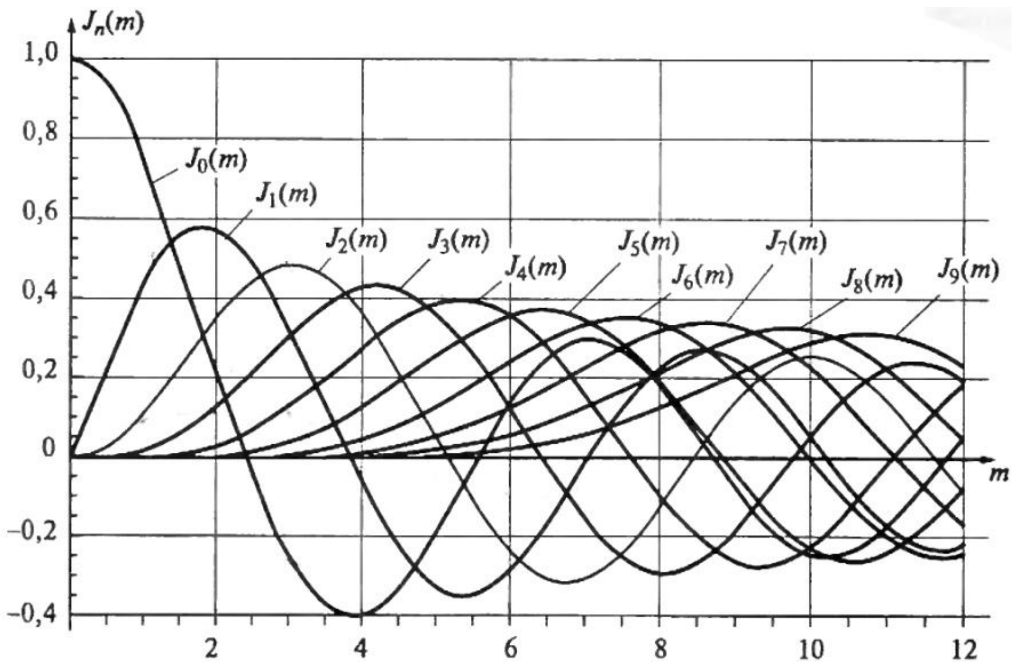

Рис. 5 – Графики функций Бесселя

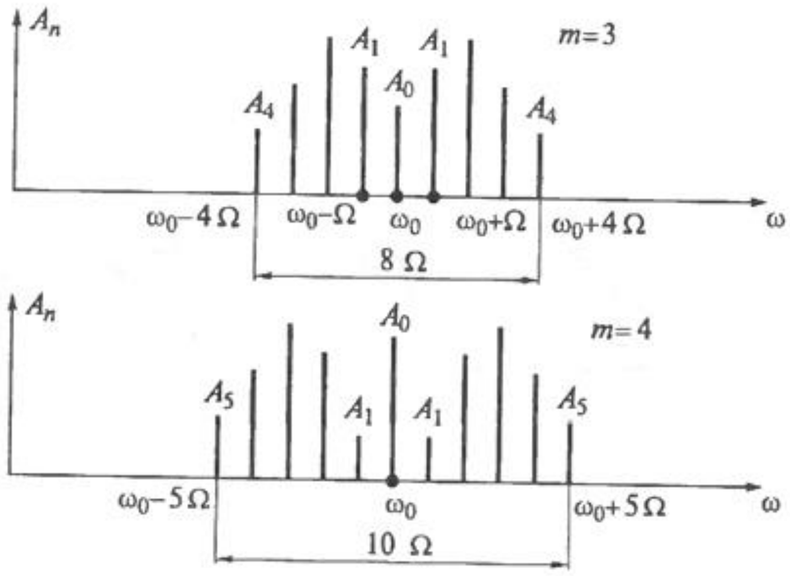

Рис. 6 – Амплитудный спектры радиосигналов с УМ при двух значения индекса m.

Видно, что структура спектра довольно сложна и зависит от индекса m. Для примера определения значения компоненты спектра запишем: $A_2 = A_0 \left| J_2(3) \right| = 0{,}5 A_0,$ индекс модуляции m = 3, номер гармоники n = 2. Т.е. $\left| J_n(m) \right|$ - масштабный коэффициент, которые также масштабирует саму A_0.ы

Для получения фазового спектра (рис. 7) нужно учитывать наличие нечётного множителя (-1) ^{n} и то, что функции $J_n(m)$ могут принимать отрицательные значения.

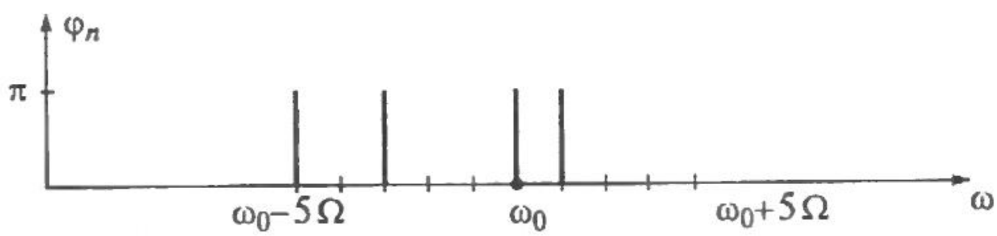

Рис. 7 – Фазовый спектр радиосигнала при индексе m=4.

Число составляющих спектра бесконечно велико, однако их амплитуды с ростом n уменьшатся. Обычно считают, что можно не учитывать составляющие с номерами $n > m + 1$.

Эффективная ширина спектра при этом определяется как:

$$\Delta\omega_{\text{c}} = 2(m+1)\Omega.$$

В случае когда $m \ll 1$ и $m \gg 1$. В первом случае ширина спектра равна $\Delta\omega_{\text{c}} = 2\Omega,$ во втором случае $\Delta\omega_{\text{c}} = 2m\Omega,$ т.е. в m раз больше, поэтому УМ при $m \ll 1$ называют узкополосной, а при $m \gg 1$ – широкополосный.

При $m \ll 1$ можно считать, что:
$J_0(m) = 1$; $J_1(m) = m/2$; $J_n(m) = 0$ при $n \geq 2$. И тогда:

$$a(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

Это выражение отличается от предыдущего лишь противоположной фазой составляющей на частоте $\omega_0 - \Omega$. При этом амплитуды боковых составляющих при $m \ll 1$ малы по сравнению с амплитудой несущей.

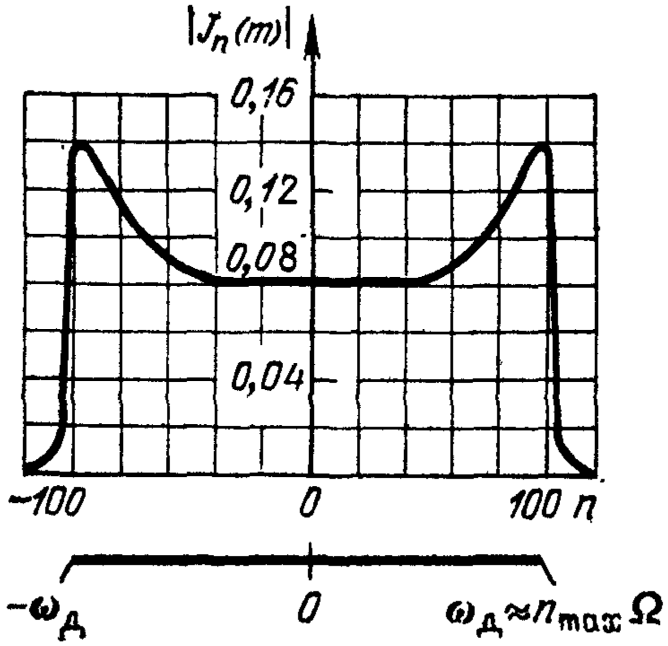

Рис. 8 – Ширина спектра ЧМ колебания при больших индексах модуляции

При $m \gg 1$ вопрос сводиться к выяснению характера функций Бесселя при больших значениях m и порядкового номера n. В этом случае $|J_n(m)|$ более или менее равномерна при всех целых n, меньших, чем аргумент m. При n близких к m образуется "всплеск", а при дальнейшем увеличении n функция $|J_n(m)|$ быстро убывает до нуля. Общий вид зависимости показан на рис. 8 для m = 100. Т.е. наивысший номер n, который ещё необходимо принимать в расчёт, приблизительно равен индексу модуляции.

Приведенный анализ показывает, что при одном и том же передаваемом сообщении, даже в простейшем случае тональной угловой модуляции, спектр при УМ оказывается сложным и протяженным по частоте, в отличии от АМ. Кроме того, при угловой модуляции не происходит просто переноса спектра модулирующего сигнала в область несущей ω_0, как это было при амплитудной модуляции. Это происходит, т.к. квадратурные составляющие $a_c(t)$ и $a_s(t)$ – нелинейные функции своего аргумента. При нелинейных преобразованиях спектра возможно возникновение кратных и комбинационных частот.