Линейная алгебра и аналитическая геометрия. РТС.
Лектор: Морозова Т.А.

Лекция 5. Линейные операторы и их матрицы. *Понятие линейного оператора. Его свойства и примеры. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.*

1. Понятие линейного оператора. Его свойства и примеры

Пусть L-линейное пространство;

Определение $\hat{A}: L \to L$ называется отображением**,** если каждому $\vec{x} \in L$ ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y} \in L$;

$\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$; $\vec{y}$- образ вектора $\vec{x}$; $\vec{x}$- прообраз $\vec{y}$.

Определение Отображение $\hat{A}$, действующее в L, называется ***линейным оператором***, если выполняются следующие условия:

1) $\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$; $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in L$
2) $\hat{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\hat{A}\vec{x}$; $\forall\ \vec{x} \in L, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

Свойства линейного оператора **:**

$\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in L;\ \ \alpha; \beta \in \mathbb{R}$.

1) $\hat{A}(\vec{0}) = \vec{0}$
2) $\hat{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\hat{A}\,\vec{x} + \beta\hat{A}\vec{y}$
3) $\hat{A}(-\vec{x}) = -\hat{A}\vec{x}$
4) $\hat{A}(\alpha\vec{x} - \beta\vec{y}) = \alpha\,\hat{A}\,\vec{x} - \beta\,\hat{A}\,\vec{y}$
5) $\hat{A}$ переводит линейно-зависимые векторы в линейно-зависимые.

   Доказательство: Пусть векторы $\overline{x}_1; \dots \overline{x}_n$ линейно зависимы, тогда существует их нетривиальная линейная комбинация ($\exists \alpha_i \neq 0$), $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{x}_i = \overline{0}$; $\alpha_i \in \mathbb{R}$.Подействуем линейным оператором: $\hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{x}_i\right) = \hat{A}\left(\overline{0}\right) = \vec{0}$; с другой стороны $\hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{A}\overline{x}_i$=> $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{A}\overline{x}_i = \vec{0}$ => получили нетривиальную линейную комбинацию образов векторов, равную нулевому вектору=> образы линейно-зависимых векторов линейно -зависимы.

   Линейный оператор будем сокращенно обозначать л.о.

Примеры линейных операторов:

1) В V_2(пространстве свободных векторов на плоскости) - поворот вектора на заданный угол φ против часовой стрелки;

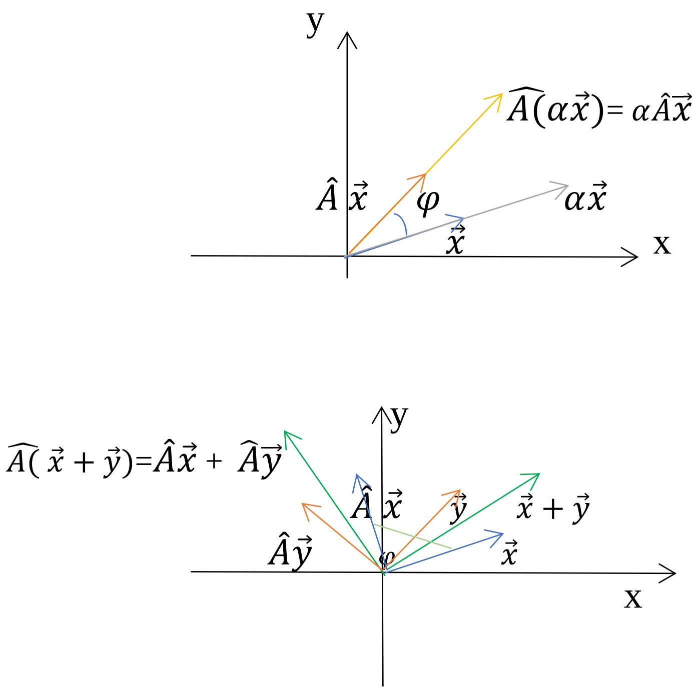

Рисунок 7

Свойства линейности выполняются , следовательно $\hat{A}$ - линейный оператор.

2) В P_n (линейном пространстве многочленов степени не выше n) – оператор дифференцирования : $\hat{A}\big(p(t)\big) = p'(t)$

$\hat{A}$: $P_n \to P_n$; $(p_1(t) + p_2(t))'$=$(p_1(t))' + (p_2(t))'$

$(\alpha p(t))'$=$\alpha(p(t))'$, => $\hat{A}$- линейный оператор;

3) $\hat{A}$: $R^n \to R^n$ – гомотетия с коэффициентом k: $\hat{A}\vec{x} = k\vec{x}$

$\hat{A}(\vec{x}+\vec{y})$ = k$(\vec{x}+\vec{y})$ = k$\vec{x} + k\vec{y}$ =$\hat{A}\vec{x}$ + $\hat{A}\vec{y}$;

$\hat{A}(\alpha\vec{x}\,) = k(\alpha\vec{x}) = \alpha k\vec{x} = \alpha\hat{A}\vec{x}$; => $\hat{A}$- линейный оператор;

<u>Не является линейным оператором:</u> $\hat{A}$: $R^n \to R^n$, $\hat{A}\vec{x} = \vec{x} + \vec{a}$;

$\hat{A}(\vec{x}+\vec{y})$ = $\vec{x}+\vec{y}+\vec{a} \neq \hat{A}\,\vec{x}$ + $\hat{A}\vec{y}$ – не выполняется свойство линейности;

2. ***<u>Матрица линейного оператора . Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.</u>***

Пусть L - конечномерное линейное пространство. ***Матрица линейного оператора $\hat{A}$*** в базисе S- это матрица, составленная из координат образов базисных векторов, записанных по столбцам.

Т.е., если в L существует некоторый базис S=$\{\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n}\}$, и

$\hat{A}\overrightarrow{e_1}$ =$a_{11}\overrightarrow{e_1} + \dots + a_{n1}\overrightarrow{e_n}$
....
$\hat{A}\overrightarrow{e_n}$ =$a_{1n}\overrightarrow{e_1} + \dots + a_{nn}\overrightarrow{e_n}$

то A=$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

<u>Пример</u>: $\hat{A}$: $R^3 \to R^3$ – гомотетия с коэффициентом k= -2. $\hat{A}\vec{x} = -2\vec{x}$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Теорема 1</u>: Пусть A - матрица линейного оператора $\hat{A}$: $L \to L$ в некотором базисе ,dim L=n. Тогда $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$ = A$\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

<u>Доказательство</u>: Пусть в л.п. L задан базис S={e_1, ... e_n};
$\overline{y} = \hat{A}(\vec{x}) = \hat{A}(x_1\overline{e_1} + \dots + x_n\overline{e_n}) = x_1\hat{A}\overline{e_1} + \dots + x_n\hat{A}\overline{e_n}$=$x_1\overline{f_1} + \dots +$ $x_n\overline{f_n} =$ (запишем в координатах)= $x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} x_1a_{11} + \dots + x_na_{1n} \\ \dots \\ x_1a_{n1} + \dots + x_na_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix};$$

<u>Теорема 2</u> (без доказательства)
Пусть в л.п. L (dim L=n) отражение $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$ задается формулой $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, где $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - координаты векторов в базисе S. Тогда $\hat{A}$ – линейный оператор и его матрица в базисе S совпадает с матрицей A.

<u>Примеры:</u>

1) $\hat{O}$: $L \to L$; dim L=n; A=$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
2) $\hat{A}$: $R^n \to R^n$ – гомотетия с коэффициентом k; $\hat{A}\vec{x} = k\vec{x}$

$$A=\begin{pmatrix} k & 0\ldots & 0 \\ 0.. & k & 0 \\ 0.. & 0.. & k \end{pmatrix}$$

3) $\hat{A}: V_2 \to V_2$ – оператор поворота на угол φ против часовой стрелки;

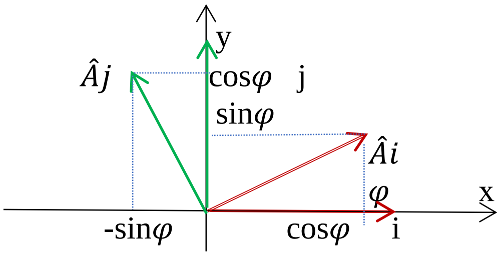

Рисунок 8.

$$A=\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$$

4) $\hat{A}: P_3 \to P_3$ – оператор дифференцирования;

$$\hat{A}(\overline{e}_0) = \hat{A}(1) = (1)' = 0 = (0000)$$
$$\hat{A}(\overline{e}_1) = \hat{A}(t) = (t)' = 1 = (1000)$$
$$\hat{A}(\overline{e}_2) = \hat{A}(t^2) = (t^2)' = 2t = (0200)$$
$$\hat{A}(\overline{e}_2) = \hat{A}(t^3) = (t^3)' = 3t^2 = (0030)$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача : Оператор $\hat{A}$ действует в пространстве R^3, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$. Проверить, является ли оператор $\hat{A}$ линейным. В случае линейности записать матрицу оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства R^3.

а) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1 - 5x_2+3x_3, -2x_1 + 3x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$

б) $\hat{B}\vec{x}=(x_1 - 5x_2+3x_3, -2x_1 + 3x_2 - x_3, x_2 + 2)$

а) $\widehat{A}: R^3 \to R^3$, т.е $\widehat{A}$ вектор из R^3 переводит в R^3.

Проверим линейность оператора

1. $\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = (x_1 + y_1 - 5(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3), -2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3), (x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3)) =$
   $= (x_1 - 5x_2+3x_3 , -2x_1 + 3x_2 - x_3, x_2 + 2x_3) +$
   $(y_1 - 5y_2+3y_3, -2y_1 + 3y_2 - y_3, y_2 + 2y_3) = \hat{A}\,\vec{x} + \hat{A}\vec{y};$
2. $\widehat{A}(\alpha\vec{x})=(\alpha x_1 - 5\alpha x_2+3\alpha x_3, -2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 - \alpha x_3, \alpha x_2 + 2\alpha x_3)=$
   $= \alpha(x_1 - 5x_2+3x_3, -2x_1 + 3x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)=\alpha\,\widehat{A}\vec{x}$

Условия линейности выполняются => $\widehat{A}$ – линейный оператор.

Найдем матрицу линейного оператора в каноническом базисе.

$\vec{e}_1$=(1,0,0); $\vec{e}_2$=(0,1,0); $\vec{e}_3$=(0,0,1)

$\widehat{A}\,\vec{e}_1 = (1,-2,0)$

$\widehat{A}\,\vec{e}_2 = (-5,-3,1)$

$\widehat{A}\,\vec{e}_3 = (3,-1,2)$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

б) $\widehat{B}: R^3 \to R^3$, т.е $\widehat{B}$ вектор из R^3 переводит в R^3.

$\widehat{B}(\vec{x}+\vec{y})$ = $(x_1 + y_1 - 5(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3), -2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3),\ (x_2 + y_2) + 2)$;

$\widehat{B}\vec{x} + \widehat{B}\vec{y}$ =$(x_1 - 5x_2 + 3x_3\ , -2x_1 + 3x_2 - x_3, x_2 + 2)$+$(y_1 - 5y_2 + 3y_3, -2y_1 + 3y_2 - y_3, y_2 + 2)$ = $(x_1 + y_1 - 5(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3), -2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3), (x_2 + y_2) + 4) \neq \widehat{B}(\vec{x}+\vec{y})$

Условие линейности оператора не выполняется, => $\widehat{B}$ не является линейным оператором.

<u>Теорема 3</u> Матрицы A и A'линейного оператора $\widehat{A}: L \to L$, записанные в базисах S_1 и S_2 соответственно, связаны формулой: $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$, где P-матрица перехода от базиса S_1 к базису S_2.

<u>Доказательство:</u> $\vec{y}$=$\hat{A}\,\vec{x}$.

В координатах в базисе S_1: $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}_{s_1} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{s_1}$

В координатах в базисе S_2: $\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2} = A'\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{s_1} = P\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2}$; $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}_{s_1} = P\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2}$

Тогда $P\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2} = A\cdot P\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2}$

Умножим слева на P^{-1}

$P^{-1}P\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2}$ => $\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2}$, так как $P^{-1}P=E$; =>

$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$; ч.т.д.

<u>Утверждение.</u> Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

<u>Доказательство:</u> $\det(P^{-1}\cdot A\cdot P)=\det P^{-1}\cdot\det A\cdot\det P=\det A$

<u>Задача.</u> Линейный оператор $\hat{A}$ в базисе $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ задан матрицей А. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},\overrightarrow{f_3}\}$.

A$=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$;

$\vec{f_1}=\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3$; $\vec{f_2}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$; $\overrightarrow{f_3}=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$

P$=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $P^{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -3 & 2\\ -2 & -4 & 3\end{pmatrix}$ Проверка: $P\cdot P^{-1}=E$ (единичная матрица).

$$A'=P^{-1}\cdot A\cdot P,$$

$$A'=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & -3 & 2\\ -2 & -4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & 6 & -8\\ 11 & -9 & 12\\ 15 & -16 & 19\end{pmatrix}$$

<u>Задача.</u> $\hat{A}$ в V_2- оператор проектирования на прямую y=x. Составить матрицу линейного оператора в удобном базисе и в базисе $\{i,j\}$.

Ответ: $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$;

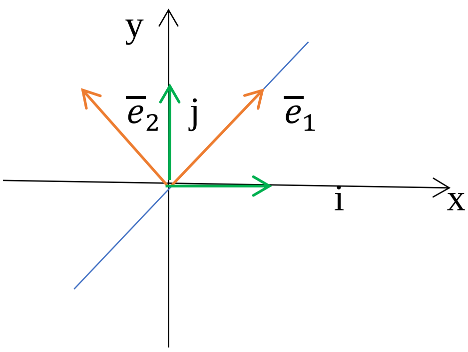

Рисунок 9.

базис канонический S_2: {i, j}
удобный базис S_1: $\overline{e}_1=i+j=(1,1)_{S_1}$; $\overline{e}_2=-i+j=(-1,1)_{S_1}$

$$P_{S_2\to S_1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ P_{S_1\to S_2}={P_{S_2\to S_1}}^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}5, & 0{,}5\\ -0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix};$$

$A_{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, так как $\hat{A}\overline{e}_1 = (1,0)_{S_1}$; $\hat{A}\overline{e}_2 = (0,0)_{S_1}$

$A_{S_2} = (P_{S_1 \to S_2})^{-1} A_{S_1} P_{S_1 \to S_2} == P_{S_2 \to S_1} A_{S_1} (P_{S_1 \to S_2})^{-1} =$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5, & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5, & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Дополнительная литература:

А.Н. Канатников; А.П. Крищенко; Линейная алгебра; Глава 4. Линейные операторы. Издательство МГТУ им. Баумана.