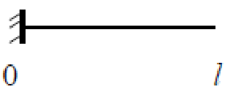
Решение задачи о нахождении колебаний струны с закреплённым концом (x=0) и свободным концом (x=l), когда начальное отклонение совпадает с собственной функцией

Задача. Найти поперечные колебания струны, один конец (x=0) которой жестко закреплен, а другой конец (x=l) – свободен. Если в начальный момент струна имеет форму $f_1(x) = A\sin\left(\dfrac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)$, где A=5, n=3; и все точки струны имеют начальную скорость $f_2(x)$=0.

1. Запишем уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2. Графически изобразим заданные граничные (краевые) условия.



Запишем граничные условия:
$$u(x,t)|_{x=0} = u(0,t) = 0,$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0.$$

3. Запишем начальные условия задачи

$$u(x,t)|_{t=0} = u(x,0) = A\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

4. Используя метод Фурье (метод разделения переменных) запишем общее решение уравнения в виде произведения:
$u(x,t) = X(x)T(t)$ и найдём нетривиальные решения $u(x,t) \neq 0$

5. Подставим общее решение в уравнение и разделим переменные

$$\frac{\partial^2\left(X(x)T(t)\right)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2\left(X(x)T(t)\right)}{\partial x^2},$$

$$X(x)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = a^2 T(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2},$$

$$X(x)T''(t) = a^2 T(t)X''(x),$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad \textit{уравнение справедливо для } \forall x,t, \quad \textit{когда}$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = C, \quad \textit{где} \quad C = const$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = C \quad \textit{и} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = C$$

$$T''(t) - a^2CT(t) = 0 \quad X''(x) - C\,X(x) = 0$$

Подставим общее решение в граничные условия

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{\partial X(l)T(t)}{\partial x} = T(t)\frac{\partial X(l)}{\partial x} = 0,$$

$$\textit{Если} \quad T(t)=0, \quad \textit{то} \quad \textit{для} \quad \forall x,t \quad u(x,t)=0 \quad -\textit{тривиальное решение} \Rightarrow$$

$$X(0)=0,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial X(l)}{\partial x} = 0.$$

6. Представив $C=\lambda^2$, получим

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ \dfrac{\partial X(l)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad \textit{одномерную} \quad \textit{задачу} \quad \textit{Штурма} - \textit{Лиувилля}$$

7. Решение будем искать в виде $X(\underline{x}) = e^{\alpha x}$. Для решения этой задачи необходимо найти собственные значения $C=\lambda^2$ и собственные функции задачи, соответствующие нетривиальным решениям. Подставим это общее решение в уравнение и получим характеристическое уравнение:

$$(e^{\alpha x})'' - \lambda^2 e^{\alpha x} = 0,$$

$$\alpha(e^{\alpha x})' - \lambda^2 e^{\alpha x} = 0,$$

$$\alpha^2 e^{\alpha x} - \lambda^2 e^{\alpha x} = 0,$$

$$e^{\alpha x}(\alpha^2 - \lambda^2) = 0,$$

$$e^{\alpha x} \neq 0 \,\textit{для} \quad \forall \alpha, x \Rightarrow \quad \alpha^2 - \lambda^2 = 0$$

1) Если $C=\lambda^2>0$, то

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x},$$

найдём частные решения, подставив в граничные условия

$$X(0) = c_1 e^{\lambda \cdot 0} + c_2 e^{-\lambda \cdot 0} = 0, \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2$$

$$\frac{\partial X(l)}{\partial x} = \lambda c_1 e^{\lambda \cdot l} + \lambda c_1 e^{-\lambda \cdot l} = 0,$$

$$\lambda c_1 (e^{\lambda \cdot l} + e^{-\lambda \cdot l}) = 0,$$

$$\textit{так} \quad \textit{как} \quad l, \lambda \neq 0, \quad \textit{то} \quad \textit{и} \quad e^{\lambda \cdot l} + e^{-\lambda \cdot l} \neq 0, \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$

В этом случае нет нетривиальных решений.

2) Если $C=\lambda^2=0$, то

$$X(x) = c_1 + c_2 x,$$

найдём частные решения, подставив в граничные условия

$$X(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 0$$

$$\frac{\partial X(l)}{\partial x} = c_2 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad X(x) = 0$$

В этом случае нет нетривиальных решений.

3) Если $C=\lambda^2<0$, то корни характеристического уравнения чисто мнимые

$$X(x) = Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x} = c_1 cos(\lambda x) + c_2 sin(\lambda x),$$

найдём частные решения, подставив в граничные условия

$$X(0) = c_1 cos(\lambda \cdot 0) + c_2 sin(\lambda \cdot 0) = c_1 = 0, \qquad c_1 = 0$$

$$\frac{\partial X(l)}{\partial x} = -0 \cdot \lambda sin(\lambda \cdot l) + c_2 \lambda cos(\lambda \cdot l) = c_2 \lambda cos(\lambda \cdot l) = 0,$$

$$c_2 \lambda cos(\lambda \cdot l) = 0,$$

при $c_2 \neq 0$ получим

$$\lambda l = \frac{\pi(2n-1)}{2},$$

$$\lambda = \frac{\pi(2n-1)}{2l}, \qquad n = 1, 2, 3...$$

$$X(x) = c_2 \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x\right)$$

8. Таким образом

$$X_n = A_n \varphi_n(\lambda_n, x),$$

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2l}, \qquad n = 1, 2, 3... \text{ – собственные значения,}$$

$$\varphi_n = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x\right), \qquad n = 1, 2, 3... \text{ – собственные функции}$$

Решение имеет вид

$$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x\right).$$

Проверим ортогональность собственных функций

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi(2m-1)x}{2l}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) dx = \frac{l}{2} \cdot \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

9. Решим уравнение для $T(t)$ и найдём решения $T_n(t)$, каждое из которых соответствует одному собственному значению

$$T''(t)\ \text{€}a^2CT(t)\ =\ 0, \qquad =\lambda^2=\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2,$$

$$T''(t)\ -\left(\frac{\pi(2na-1)}{2l}\right)^2 T(t)\ =0$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$T_n(t)=c_{1n}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)+c_{2n}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right),$$

где c_{1n}, c_{2n} – произвольные постоянные

10. Представим общее решение задачи в виде

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=A_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\cdot\left(c_{1n}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)+c_{2n}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right),$$

внесём A_n в скобку и получим

$$u_n(x,t)=\left(a_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),$$

где $\frac{\pi(2n-1)a}{2l}=\omega_n$ – собственные частоты колебаний струны,

а соответствующие этим частотам колебания – собственные колебания.

$\omega_1=\frac{\pi a}{2l}=\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$,– частота основного тона колебаний, где T – натяжение струны, ρ – линейная плотность струны.

Разложим функцию $u(x,t)$ в сходящийся ряд по собственным функциям:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),$$ – ряд Фурье, a_n,b_n – коэффициенты ряда Фурье.

11. Найдём коэффициенты a_n и b_n,, чтобы удовлетворить начальным условиям задачи

$$u(x,t)\big|_{t=0}=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot 0\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot 0\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=A\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=A\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=5\sin\left(\frac{5\pi}{2l}x\right),$$

$$\frac{2}{l}\int_0^l 5\sin\left(\frac{5\pi}{2l}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx=\frac{2}{l}\cdot 5\cdot\frac{l}{2}\cdot 1=5,$$

при $n=3$ *по условию ортогональности*

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot\left(-a_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot 0\right)+b_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot 0\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot b_n\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=0,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot b_n\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=0,$$
$$b_n=0$$

12. В итоговом ответе необходимо записать решение задачи с подстановкой найденных в пункте 11 кооэфициентов a_n и b_n.
Так как коэфициент n=3, при поиске нетривиального решения, то общее решение записывается без разложения в ряд

$$u(x,t)=5\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),$$