

Лекция №16

В заключительной лекции подведем некоторые итоги.

Список теоретических вопросов по курсу

1. Основные элементарные функции комплексного переменного, их свойства. Примеры.
2. Предел, непрерывность, дифференцируемость функции комплексного переменного.
3. Определение аналитической функции, ее свойства. Условия Коши-Римана. Примеры аналитических и неаналитических функций.
4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Конформное отображение. Примеры.
5. Определение интеграла функции комплексного переменного вдоль кусочно-гладкой кривой, свойства.
6. Теоремы Коши для односвязной и многосвязной области.
7. Степенной ряд, область его сходимости. Ряд Тейлора аналитической функции, основные разложения.
8. Ряд Лорана аналитической функции. Примеры разложения в ряд Лорана.

9. Изолированные особые точки (и.о.т.). Классификация и.о.т. по главной части ряда Лорана и на основе поведения функции в окрестности особой точки.

10. Нуль аналитической функции, его кратность. Связь полюса с нулем обратной функции. Примеры.

11. Вычет аналитической функции в и. о. т. Нахождение вычета по ряду Лорана. Примеры.

12. Формулы для вычисления вычета в простом и кратном полюсе. Примеры.

13. Основная теорема о вычетах. Примеры вычисления контурных интегралов с помощью вычетов.

14. Вычисление несобственных интегралов по прямой и полупрямой. Лемма Жордана. Примеры использования леммы Жордана.

15. Теорема Руше и ее применение.

16. Использование теории вычетов при решении задачи Коши операторным методом в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений (теорема о нахождении оригинала для заданного изображения с помощью вычетов). Примеры.

17. Интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Интегралы Эйлера.

18. Определение Гамма-функции, ее свойства.

19. Определение Бета-функция, ее свойства.

20. Взаимосвязь Гамма-функции и Бета-функции. Примеры применения этих функций к вычислению интегралов.

Основные типы заданий по курсу

Для успешного усвоения курса математического анализа, 4 семестр студент должен правильно и аргументированно решать перечисленные ниже типовые задания. Все выделенные типы заданий рассмотрены в данном курсе лекций.

1. Функции комплексного переменного

1. Вычислить:

а) $(-5 + 5i)^{100}$; б) $(3 - i\sqrt{3})^{-2i}$.

2. Решить уравнения:

а) $z^3 + 27i = 0$;

б) $\sin 2z = 2$;

в) $e^{2z} + 5e^z + 6 = 0$

Ответы (решение уравнений) изобразить на комплексной плоскости.

3) Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством

а) $\operatorname{Re}(2/z) > 1$;

б) $|z - 5 + 2i| \geq 4$

2. Аналитические функции

1. Исследовать функцию $f(z)$ на дифференцируемость и аналитичность. Указать область аналитичности функции. Найти производную функции в точке z_0 .

а) $f(z) = (z+1)\operatorname{Im}(iz)$, $z_0 = -1$

б) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$, $z_0 = \pi i$

2. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = f(z)$ в точке z_0 :

а) $f(z) = 4z^2$, $z_0 = 1 - i$

б) $f(z) = 2e^{iz}$, $z_0 = -\frac{\pi}{4}$

3. Аналитические функции. Связь аналитических и гармонических функций

1) Исследовать следующие функции на аналитичность:

а) $f(z) = iz^2 + 27i + 3\bar{z}$;

б) $f(z) = e^{iz} + 2i$;

в) $f(z) = |ie^{3z}|$

2) Восстановить аналитическую функцию $f(z)$, если задана гармоническая функция $v = \operatorname{Im} f(z) = x^2 - y^2 + x$.

3) Восстановить аналитическую функцию $f(z)$, если задана гармоническая функция $u = \operatorname{Re} f(z) = e^{2x} \cos(2y + 1)$.

Найти константу c при условии, что $f(-i/2) = 1$.

4. Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек (и.о.т). Вычеты

1. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{2z+5}$ в ряд Лорана в области $|z| > 5/2$.

2. Получить все разложения функции $f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}$

в ряд по степеням z .

3. Найти изолированные особые точки функции, указать их тип. Вычислить вычеты в этих точках:

а) $f(z) = (z-3)^3 \cdot e^{\frac{7}{z-3}};$

б) $f(z) = \frac{e^{3z} - 1}{z^2(z^2 + 4)};$

в) $f(z) = \left(\frac{5}{z-2} + z - 2\right) \cdot e^{\frac{6}{z-2}}$

5. Основная теорема о вычетах

1. Вычислить интегралы, используя основную теорему о вычетах:

а) $\int_L \frac{\cos 5z - 1}{z^2(z^2 + 1)} dz, \quad L: |z + i| = 1,5.$

б) $\int_L \frac{z}{\sin z} dz, \quad L: |z + 2| = 3.$

6. Приложение теории вычетов

1. Вычислить интеграл

$$\int_L \frac{\cos 9z - 1}{z^3(z^2 - 4)} dz, \quad L: |z - i| = 2.$$

2. Вычислить несобственный интеграл на основе теории вычетов

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dz \quad ;$$

$$\text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 5x}{x^2+4} dx .$$

3. С помощью теоремы Руше найти количество корней уравнения

$$z^5 - 5z^2 + 2z + 1 = 0 \quad \text{в области } 1 < |Z| < 2 .$$

4. С помощью вычетов найти оригинал изображения

$$F(p) = \frac{P}{p^4 - 1} .$$

5. Решить задачу Коши на основе преобразования Лапласа и теории вычетов

$$\text{a) } y'' + 5y' - 6y = e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$\text{б) } y'' + 2y' - 3y = 1 \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$$

$$\text{в) } y'' - y' - 2y = 2x - 1 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

7. Применение интегралов Эйлера

Вычислить интегралы с помощью Гамма и Вета – функций

$$\text{a) } \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \quad ;$$

$$\text{б) } \int_0^{+\infty} x^4 \cdot e^{-x^2} dx$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx .$$

Задачи для самостоятельного решения в полном объеме представлены в учебно-методическом пособии по курсу математического анализа, 4 семестр (ТФКП). Пособие выложено на сайта кафедры высшей математики-2 МИРЭА.

Приведем типовые задания для подготовки к сдаче зачета по курсу.

Вариант №1.

1. Вычислить $(-2\sqrt{3} - 2i)^{30}$.

2. Решить уравнение: $e^{2z} + 2ie^z + 3 = 0$.

3. Установить, является ли функция аналитической: $f(z) = ie^{5z} + 6$.

4. Указать особые точки, их тип, найти вычеты в особых точках:

$$f(z) = (z + 5)^3 \cdot e^{\frac{8}{z+5}}.$$

5. Вычислить: $\int_L \frac{e^{4z} - 1}{z^2(z^2 + 4)} dz$, $L: |z + 2i| = 3$.

6. Вычислить: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx$.

7. Вычислить $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$.

8. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения

$$2z^4 + 4z^3 - 17z^2 + 3z - 7 = 0 \quad \text{в области } 1 < |z| < 5.$$

9. Гама-функция и ее свойства. Вычислить $\Gamma(89)$.

Вариант №2.

1. Вычислить $(3\sqrt{3} - 3i)^{100}$.

2. Решить уравнение: $sh 2z = -4i$.

3. Установить, является ли функция аналитической: $f(z) = iz^2 + 9i + \operatorname{Im}(4z)$

4. Указать особые точки, их тип, найти вычеты в особых точках:

$$f(z) = (z + 9)^6 \cdot \sin\left(\frac{2}{z + 9}\right).$$

5. Вычислить: $\int_L \frac{\cos 8z - 1}{z^2(z^2 + 1)} dz$, $L: |z + i| = 1,5$.

6. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 25)^2} dx$.

7. Вычислить $\int_0^1 \ln^2(1/x) dx$.

8. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения

$$z^6 - 7z^5 + 3z^3 + z - 1 = 0 \quad \text{в области } 1 < |z| < 2.$$

9. Вета-функция и ее свойства. Вычислить $\Gamma(105)$.

Вариант №3.

1. Решить уравнение:

а) $z^3 + 27i = 0$; б) $\sin z = 3$.

2. Установить, является ли функция аналитической: $f(z) = ie^{3z} + 5$.

3. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$, если $v = \operatorname{Im} f(z) = x^2 - y^2 + 2x$

4. Указать особые точки, их тип, найти вычеты в особых точках:

$$f(z) = (z+1)^3 \cdot e^{\frac{2}{z+1}}.$$

5. Вычислить: $\int_L \frac{\cos 5z - 1}{z^3(z^2 - 4)} dz$. $L: |z - i| = 2$.

6. Вычислить: $\int_0^{+\infty} \frac{5}{(x^2 + 9)^2} dx$.

7. С помощью вычетов найти оригинал изображения: $F(p) = \frac{p}{p^4 - 1}$.

8. Вычислить $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$.