Практическое занятие №8

Классификация изолированных особых точек на основе вычисления предела функции

Нули аналитической функции

Определение. *Точка z_0 называется нулем n-го порядка аналитической в окрестности z_0 функции $f(z)$, если*

$$f(z_0) = 0, f'^{(z_0)} = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0,$$

$$f^{(n)}(z_0) \quad \neq 0.$$

Если $n = 1$, то точка z_0 называется простым нулем.

Теорема. *Точка z_0 является нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$$

где $\varphi(z)$ аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

<u>Пример.</u> Найти нули функции $f(z) = cosz - 1$, определить порядок нуля.

Решение. Приравняем $f(z)$ нулю, получим $cosz = 1$, откуда $z_n = 2\pi n$ $(n = 0, \pm 1, \dots)$ – нули данной функции.

Найдем

$$f'(z)\,|_{z=z_n} = -sinz\,|_{z=2\pi n} = 0,$$

$$f''(z)\,|_{z=z_n} = -cosz\,|_{z=2\pi n} = -1 \neq 0.$$

Согласно определению (5.1), $z_n = 2\pi n$ являются нулями второго порядка.

<u>Пример.</u> Найти нули функции $f(z) = z^8 - 9z^7$,

определить порядок нуля.

Решение. Приравняем $f(z)$ нулю, получим $z^7(z-9) = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 9$. Можно воспользоваться определением (5.1), однако проще использовать теорему 5.1. Функция $f(z)$ представима в виде

$f(z) = z^7(z-9)$, но тогда $z = 0$ является нулем порядка 7, функцией $\varphi(z)$ является сомножитель $\varphi(z) = z - 9$, $\varphi(0) = -9 \neq 0$; $z = 9$, является нулем порядка 1, функцией $\varphi(z)$ в данном случае является $\varphi(z) = z^7$,

$\varphi(9) = 9^7 \neq 0$.

Изолированные особые точки, их классификация

Определение. *Точка z_0 называется <u>изолированной особой точкой</u> функции$f(z)$, если $f(z)$ аналитическая в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки z_0, а в точке z_0 функция не определена или не дифференцируема.*

Определение 1. *Точка z_0 называется <u>устранимой особой точкой</u> функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = C.$$

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1-e^{3z}}{2z}$ и установить их тип.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ - это $z_0 = 0$. Вычислим

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{3z}}{2z} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{-3z}{2z} = -\frac{3}{2}.$$

т.е. $z_0 = 0$ – устранимая особая точка (определение 1).

Определение 2. *Точка z_0 называется <u>полюсом</u> функции $f(z)$, если* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Теорема. *Для того, чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

Теорема. *Пусть $f(z)$ является аналитической в окрестности точки z_0. Если точка z_0 – нуль порядка n для $f(z)$, то точка z_0 –полюс порядка n для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

Замечание. Если точка z_0 – полюс порядка n для $f(z)$, то точка z_0 – нуль порядка n для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ при условии $\frac{1}{f(z_0)} = 0$.

Отметим, что без последнего условия $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ утверждение становится неверным. В самом деле, если $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, то z=0 – полюс первого порядка. Однако функция $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{z^2}{\sin z}$ не определена при z=0.

Теорема. *Если функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитическая функция в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$, то точка z_0 является полюсом порядка n функции $f(z)$.*

Замечание. Теорема остается справедливой, если z_0 – устранимая особая точка функции $\varphi(z)$ и существует $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) \neq 0$.

Например, если $\varphi(z) = \frac{sinz}{z}$, а $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z}$, то z_0=0 – полюс первого порядка функции $f(z)$.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{2z+1}{z^4-2z^3}$ и установить их тип.

Решение. Найдем нули функции $\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2-2z^3}{2z+1}$. Поскольку

$z^4 - 2z^3 = z^3(z-2)$, то для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка $z = 0$ – это нуль третьего порядка согласно теореме 5.1, а $z = 2$ – нуль первого порядка. Пользуясь теоремой 5.2, имеем: $z = 0$ – это полюс третьего порядка функции $f(z)$, а $z = 2$ – полюс первого порядка.

Определение 3. *Точка z_0 называется <u>существенно особой</u> точкой, если в этой точке не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$ при $z \to z_0$.*

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{(z^2+9)z^3}$

и установить их тип.

Решение: Изолированные особые точки функции $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$ и $z_3 = 0$.

Для нахождения типа каждой особой точки нужно вычислить предел функции в каждой особой точке. При этом используем определения, приведенные в данной лекции, и теорему 5.5.

$$\lim_{z \to 3i} \frac{e^z - 1}{(z^2+9)z^3} = \lim_{z \to 3i} \frac{e^z - 1}{(z-3i)(z+3i)z^3} = \infty,$$ следовательно

получаем $z_1 = 3i$ полюс первого порядка.

Рассмотрим следующую иот. $z_2 = -3i$.

$$\lim_{z \to -3i} \frac{e^z - 1}{(z^2+9)z^3} = \lim_{z \to -3i} \frac{e^z - 1}{(z-3i)(z+3i)z^3} = \infty,$$ следовательно

$z_2 = -3i$ полюс первого порядка.

Рассмотрим следующую иот. $z_3 = 0$.

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{(z^2+9)z^3} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{(z^2+9)z^3} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{(z^2+9)z^2} = \infty$$

Отметим, что при вычислении предела использовались эквивалентности.

Получаем, что

$z_3 = 0$ полюс второго порядка.

Ответ. Заданная функция имеет 3 иот. Тип каждой иот следующий:

$z_1 = 3i$ полюс первого порядка

$z_2 = -3i$ полюс первого порядка

$z_3 = 0$ полюс второго порядка.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \dfrac{e^{5z} - 1}{(z^2+9)z}$

и установить их тип.

Решение: Изолированные особые точки функции $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$ и $z_3 = 0$.

Для нахождения типа каждой особой точки нужно вычислить предел функции в каждой особой точке.

$$\lim_{z \to 3i} \frac{e^{5z} - 1}{(z^2+9)z} = \lim_{z \to 3i} \frac{e^{5z} - 1}{(z-3i)(z+3i)z} = \infty$$

Получаем $z_1 = 3i$ полюс первого порядка.

$$\lim_{z \to -3i} \frac{e^{5z} - 1}{(z^2+9)z} = \lim_{z \to -3i} \frac{e^{5z} - 1}{(z-3i)(z+3i)z} = \infty\text{, тогда}$$

$z_2 = -3i$ полюс первого порядка.

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{5z}-1}{(z^2+9)z}=\lim_{z\to 0}\frac{5z}{(z^2+9)z}=\frac{5}{9}$$

Получаем, что $z_3=0$ устранимая особая точка. Заметим, что здесь при вычислении предела были применены эквивалентности.

Ответ. Заданная функция имеет 3 иот. Тип каждой иот следующий:

$z_1=3i$ полюс первого порядка

$z_2=-3i$ полюс первого порядка

$z_3=0$ устранимая особая точка.

Классификация изолированных особых точек по виду главной части ряда Лорана

Теорема 1. *Точка z_0 является устранимой особой точкой, если в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 отсутствует главная часть, т.е.*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n.$$

Теорема 2. *Точка z_0 является полюсом n-го порядка функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит конечное число слагаемых, т.е.*

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,(z-z_0)^k \text{ , где } c_{-n}\neq 0.$$

Теорема 3. *Точка z_0 является существенно особой точкой для функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности z_0 содержит бесконечное количество членов.*

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{sin9z}{z}$.

Определить тип особой точки.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ $z_0 = 0$. Используя разложение в ряд Тейлора для функции $sinz$ (4.2) в окрестности точки $z_0 = 0$, т.е.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathrm{C}$$

Получим разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[(9z) - \frac{(9z)^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{(9z)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right] =$$

$$= 9 - \frac{9^3 z^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{(9z)^{2n} \cdot 9}{(2n+1)!} + \ldots$$

Это разложение не содержит главной части.

Поэтому точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой (теорема 1).

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции

$f(z) = (z-3)^4 cos\frac{1}{z-3}$ и определить тип особой точки.

Решение. Особая точка функции $z_0 = 3$.

Используя разложение (4.3), получим

$$cos\frac{1}{z-3} = 1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \frac{1}{8!\,(z-3)^8} - \ldots,$$

тогда

$$f(z) = (z-3)^4\left(1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8!\,(z-3)^8} - \ldots\right) = (z-3)^4 - \frac{(z-3)^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!\,(z-3)^2} + \frac{1}{8!\,(z-3)^4} - \ldots$$

Разложение справедливо в кольце $0 < |z-3| < +\infty$.

Это ряд Лорана, его главная часть

$$-\frac{1}{6!\,(z-3)^2}+\frac{1}{8!\,(z-3)^4}-\ldots.$$

Главная часть полученного ряда Лорана имеет бесконечное количество членов (слагаемых). Особая точка $z_0 = 3$ является существенно особой точкой (теорема 3).

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{e^z-1}{z^3}$.

Определить тип особой точки.

Решение. Используя разложение в ряд Тейлора для функции e^z (4.1) в окрестности точки $z_0 = 0$, т.е.

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\quad z \in \mathrm{C}$

Заданная функция $f(z) = \frac{e^z-1}{z^3}$.

Получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left[1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z2!} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{5!} + \frac{z^3}{6!} + \ldots$$

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является полюсом третьего порядка, т. к. наибольший показатель степени z, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, равен трем (теорема 2).

Домашнее задание.

Учебно-методическое пособие «Теория функций комплексного переменного», часть 1. Задачи №№ 1.15.

Часть 2, задачи №№2.1, 2.2 (выполнение типового расчета).

Пособие размещено на сайте кафедры ВМ-2
http://vm-2.mozello.ru
раздел «Математический анализ. 4 семестр».