ДИСЦИПЛИНА	**Радиотехнические цепи и сигналы часть 2**
	полное название дисциплины без аббревиатуры
ИНСТИТУТ	**Радиотехнических и телекоммуникационных систем**
КАФЕДРА	**радиоволновых процессов и технологий**
	полное название кафедры
ГРУППА/Ы	**РРБО-1-3-18; РССО-1-3-18**
	номер групп/ы, для которых предназначены материалы
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	**Лекция №9**
	лекция; материал к практическим занятиям; контрольно-измерительные материалы к практическим занятиям; руководство к КР/КП, практикам
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	**Исаков Владимир Николаевич**
	фамилия, имя, отчество
СЕМЕСТР	**6**
	указать номер семестра обучения

Лекция 9
Цифровые фильтры и методы их анализа
9.1. Методы анализа преобразования сигналов цифровыми фильтрами

В задаче анализа преобразования сигналов цифровыми фильтрами известен сигнал на входе $x[n]$, структура цифрового фильтра и его коэффициенты (что однозначно определяет характеристики цифрового фильтра). Воздействие на цифровой фильтр имеет место не ранее $n = 0$ при нулевых начальных условиях. Требуется найти сигнал на выходе цифрового фильтра $y[n]$.

Задача анализа может быть решена различными методами. Рассмотрим основные из них:

1. Составление и решение разностного уравнения.
2. Метод наложения. Сигнал на входе цифрового фильтра представляется в виде линейной комбинации сигналов, реакции на которые известны или могут быть легко определены. Решение задачи анализа записывается с учётом принципа суперпозиции. В случае, когда выбор вспомогательных сигналов затруднён используется универсальное представление сигнала на входе в виде линейной комбинации запаздывающих единичных отсчётов и на выходе имеем свёртку сигнала на входе и импульсной характеристики цифрового фильтра.
3. Операторный метод. Находится изображение сигнала на входе и записывается системная функция цифрового фильтра. Изображение сигнала на выходе находится как произведение:

$$Y(z) = H(z)X(z). \tag{9.1}$$

Для нахождения сигнала на выходе следует обратить $Y(z)$.

4. Спектральный метод. Спектральная плотность дискретного сигнала на выходе находится как произведение спектральной плотности сигнала на входе и комплексной частотной характеристики цифрового фильтра:

$$Y_{\text{д}}(\omega) = H_{\text{д}}(\omega)X_{\text{д}}(\omega) \tag{9.2}$$

Поиск общего выражения для дискретного сигнала на выходе через $Y_{\text{д}}(\omega)$ может оказаться затруднительным, однако (9.2) будет полезным, когда сигнал на выходе должен быть описан своей спектральной функцией.

9.2. Последовательная и параллельная цифровая фильтрация

В ряде задач возникает необходимость рассматривать последовательное применение процедур цифровой фильтрации ЦФ1 и ЦФ2 на рис.9.1, как одну единую процедуру. Найдём характеристики результирующего цифрового фильтра.

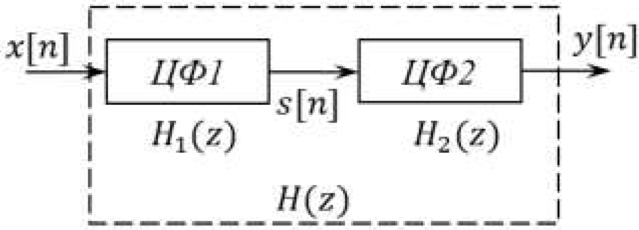

Рис.9.1. Последовательная цифровая фильтрация

Операторным методом получим изображение сигнала на выходе ЦФ1 и на входе ЦФ2:

$$S(z) = X(z)H_1(z),$$

Тогда для изображения сигнала на выходе ЦФ2 запишем:

$$Y(z) = S(z)H_2(z) = X(z)H_1(z)H_2(z).$$

С другой стороны, он же и на выходе результирующего фильтра

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

откуда

$$H(z) = H_1(z)H_2(z). \qquad (9.3)$$

Системные функции при последовательной цифровой фильтрации перемножаются.

Учитывая взаимосвязь комплексной частотной характеристики и системной функции, получим:

$$H_д(\omega) = H_{д1}(\omega)H_{д2}(\omega). \qquad (9.4)$$

Учитывая взаимосвязь между импульсной характеристикой и системной функцией, а также теорему о свёртке для Z – преобразования, найдём:

$$h[n] = h_1 * h_2[n]. \qquad (9.5)$$

Полученные формулы показывают, что при замене очерёдности процедур последовательной фильтрации результирующие характеристики не изменяются, то есть и сами процедуры можно выполнять в любой последовательности получая при этом один и того же результат.

При параллельной цифровой фильтрации (рис.9.2) входной сигнал подаётся на два цифровых фильтра ЦФ1 и ЦФ2, сигналы $y_{1,2}[n]$ с выхода которых складываются:

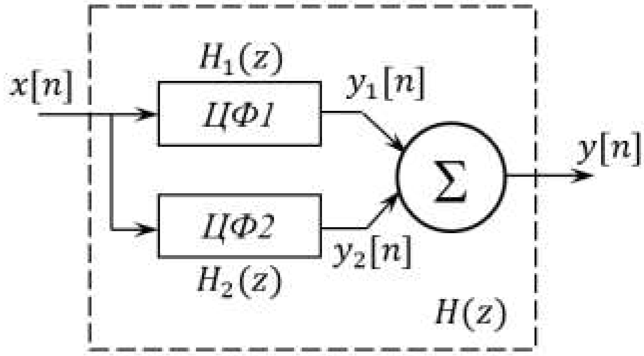

Рис.9.2. Параллельная цифровая фильтрация

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n],$$

откуда для результирующих характеристик получим:

$$\begin{gathered} h[n] = h_1[n] + h_2[n], \\ H(z) = H_1(z) + H_2(z), \\ H_д(\omega) = H_{д1}(\omega) + H_{д2}(\omega). \end{gathered} \tag{9.6}$$

9.3. Каноническая схема цифрового фильтра

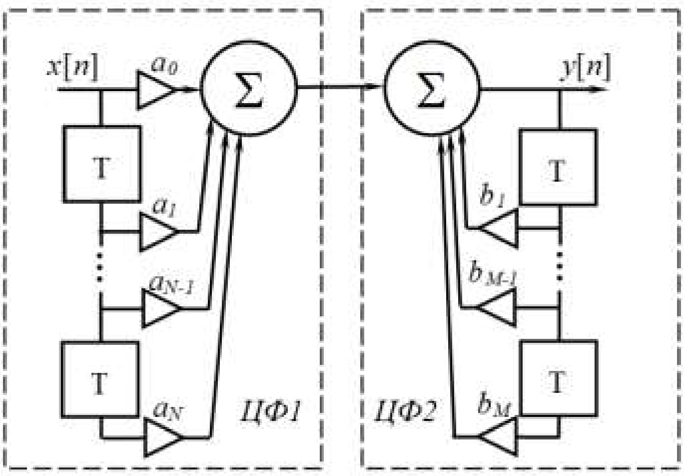

Рис.9.3. Выделение последовательных звеньев

Перерисуем схему цифрового фильтра в виде, показанном на рис.9.3. При этом формально можно выделить два последовательных звена ЦФ1 и ЦФ2. Изменим порядок последовательной фильтрации и придём к схеме, показанной на рис.9.4. В элемен-

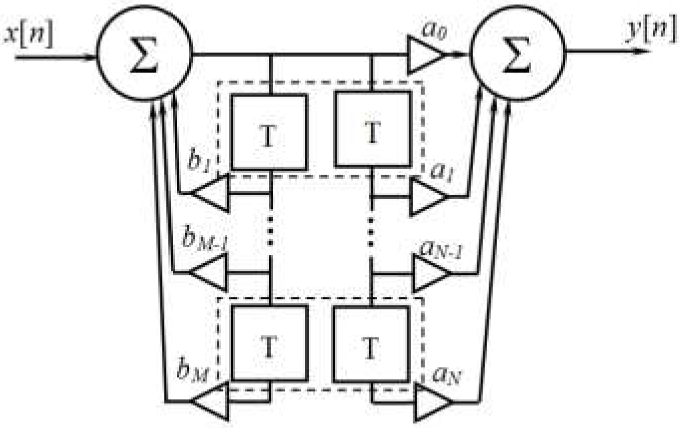

Рис.9.4. Перестановка звеньев

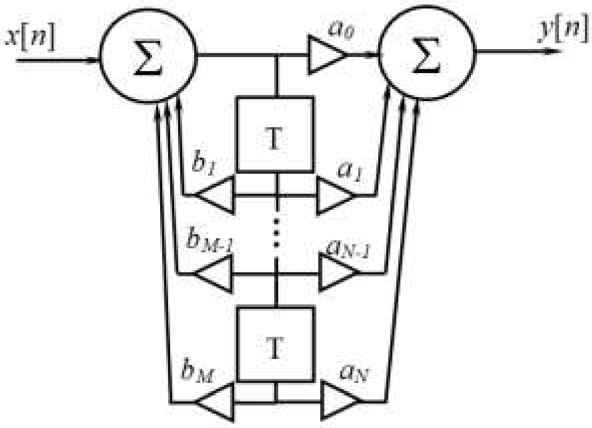

Рис.9.5 Каноническая схема цифрового фильтра

тах задержки, объединённых пунктирными прямоугольниками, хранятся одинаковые числа, однако, нет никакой необходимости дублировать данные, поэтому эти элементы можно заменить одним, что и сделано на рис.9.5. Полученная схема называется канонической схемой цифрового фильтра и оказывается эффективной при его программной реализации, поскольку позволяет экономно использовать память, требуя в два раза меньший её объём, чем в прямой схеме рис. 9.3.

9.4. Представление цифрового фильтра в виде последовательного соединения элементарных звеньев

Перепишем выражение для системной функции следующим образом:

$$H(z)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{1-\sum\limits_{k=1}^{N} b_k z^{-k}}=\underbrace{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}_{H_{\text{нер}}}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{N} b_k z^{-k}}}_{H_{\text{р}}}=H_{\text{нер}}(z)H_{\text{р}}(z)\,.$$

Как видно, цифровой фильтр можно представить в виде последовательного соединения нерекурсивного и чисто рекурсивного цифровых фильтров с системными функциями $H_{\text{нер}}(z)$ и $H_{\text{р}}(z)$

соответственно.

Рассмотрим системную функцию рекурсивного цифрового фильтра:

$$H_{\text{р}}(z)=\frac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{N}b_k z^{-k}}=\frac{z^N}{z^N-b_1z^{N-1}-b_2z^{N-2}-\ldots-b_N}.$$

Рассмотрим многочлен в знаменателе

$$p(z)=z^N-b_1z^{N-1}-b_2z^{N-2}-\ldots-b_N.$$

Это многочлен с действительными коэффициентами и может иметь действительные и комплексные корни, при этом каждому комплексному корню соответствует комплексно-сопряжённый. Выпишем корни этого многочлена так, что каждый корень будет выписан столько раз сколько этого потребует его кратность:

$$\underbrace{z_1,z_2,z_3,}_{\substack{\textit{действительные}\\ \textit{корни}}}\quad\ldots\quad\underbrace{z_k,z_k^*,z_{k+1},z_{k+1}^*\ \ldots\ z_M,z_M^*}_{\substack{\textit{комплексные}\\ \textit{корни}}},\quad M<N.$$

Тогда рассматриваемый многочлен может быть представлен в виде

$$p(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ \ldots\ (z-z_k)(z-z_k^*)\ \ldots\ (z-z_M)(z-z_M^*).$$

Преобразуем каждую пару сомножителей, соответствующую комплексно-сопряжённым корням, следующим образом:

$$(z-z_k)(z-z_k^*)=z^2-2z\,\mathrm{Re}\,z_k+|\,z_k\,|^2,$$

Тогда системную функцию рекурсивного фильтра можно представить в виде:

$$H_{\text{р}}(z)=\frac{z}{z-z_1}\frac{z}{z-z_2}\ \ldots\ \frac{z^2}{z^2-2z\,\mathrm{Re}\,z_k+|\,z_k\,|^2}\ \ldots$$

$$\ldots\ \frac{z^2}{z^2-2z\,\mathrm{Re}\,z_M+|\,z_M\,|^2}=$$

$$=\frac{1}{1-z_1z^{-1}}\frac{1}{1-z_2z^{-1}}\ \ldots\ \frac{1}{1-2z^{-1}\,\mathrm{Re}\,z_k+z^{-2}\,|\,z_k\,|^2}\ \ldots$$

$$\ldots\ \frac{1}{1-2z^{-1}\,\mathrm{Re}\,z_M+z^{-2}\,|\,z_M\,|^2}=$$

$$=\underbrace{H_1^{(1)}(z)H_2^{(1)}(z)\ \dots}_{\textit{звенья 1-го порядка}}\ \underbrace{H_k^{(2)}(z)\ \dots\ H_M^{(2)}(z)}_{\textit{звенья 2-го порядка}},$$

где $H_i^{(1)}(z)=\dfrac{1}{1-z_i z^{-1}}$, $i=1,\dots,k-1$ - системные функции, описывающие звенья - цифровые фильтры первого порядка;

$H_i^{(2)}(z)=\dfrac{1}{1-2z^{-1}\operatorname{Re}z_i+z^{-2}\,|\,z_i\,|^2}$, $i=k,\dots,M$ - системные функции, описывающие звенья - цифровые фильтры второго порядка.

Для исходного цифрового фильтра теперь можем записать:

$$H(z)=\underbrace{H_{\text{нер}}(z)}_{\substack{\textit{нерекурсивный}\\ \textit{ЦФ}}}\ \underbrace{H_1^{(1)}(z)H_2^{(1)}(z)\ \dots}_{\textit{звенья 1-го порядка}}\ \underbrace{H_k^{(2)}(z)\ \dots\ H_M^{(2)}(z)}_{\textit{звенья 2-го порядка}}, \qquad (9.7)$$

то есть любой цифровой фильтр с действительными коэффициентами можно представить в виде последовательного соединения нерекурсивного цифрового фильтра с системной функцией $H_{\text{нер}}(z)$, чисто рекурсивных звеньев 1-го порядка с системными функциями $H_i^{(1)}(z),\ i=1,\dots,k-1$ и чисто рекурсивных звеньев второго порядка с системными функциями $H_i^{(2)}(z),\ i=k,\dots,M$. При этом все полюсы системной функции исходного цифрового фильтра являются полюсами системных функций его элементарных звеньев и наоборот. Системные функции элементарных звеньев первого порядка имеют один полюс. Системные функции элементарных звеньев второго порядка имеют два комплексно-сопряжённых полюса.

9.5. Устойчивость цифровых фильтров

Дискретный сигнал $\{x[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ называется ограниченным, если существует действительное положительное число $M_x>0$ превосходящее абсолютные значения всех элементов сигнала, то есть $|x[n]|\le M_x,\ n\in\mathbb{Z}$.

Цифровой фильтр называется устойчивым, если его реакция на ограниченный дискретный сигнал ограничена.

Поскольку единичный отсчёт является ограниченной последовательностью, то импульсная характеристика устойчивого цифрового фильтра ограничена.

Рассмотрим реакцию устойчивого цифрового фильтра на некоторый ограниченный дискретный сигнал, учтём, что модуль суммы всегда меньше суммы модулей

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} x[n-k]h[k]\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |x[n-k]||h[k]|.$$

В последней сумме заменим каждое значение $|x[n-k]|$ заведомо бо́льшим M_x, тогда

$$|y[n]| \le M_x \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|.$$

Наконец, поскольку реакция устойчивого цифрового фильтра на ограниченный дискретный сигнал ограничена, получим

$$|y[n]| \le M_x \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]| \le M_y,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]| \le \frac{M_y}{M_x} < \infty. \qquad (9.8)$$

Таким образом, ряд, составленный из элементов импульсной характеристики устойчивого цифрового фильтра сходится абсолютно. При этом (в виду необходимого условия сходимости числового ряда) сама импульсная характеристика является убывающей:

$$\lim_{n\to\infty} h[n] = 0. \qquad (9.9)$$

Для устойчивого цифрового фильтра выполняется принцип транспозиции.

Анализ устойчивости цифрового фильтра сводится к анализу сходимости числового ряда, что не всегда удобно. Представив цифровой фильтр в виде последовательного соединения элементарных звеньев (см.п.9.4), установим, что цифровой фильтр является устойчивым, если каждое его звено устойчиво, поскольку при этом ограниченному воздействию будет соответствовать ограниченный отклик каждого звена.

Нерекурсивный цифровой фильтр всегда устойчив, так как является КИХ-фильтром, а ряд по значениям импульсной характеристики – конечной суммой.

На практических занятиях будет показано, что цифровой фильтр первого или второго порядка устойчив, когда полюсы его системной функции находятся внутри единичной окружности z-плоскости. Но полюсы системных функций звеньев совпадают с полюсами системной функции исходного цифрового фильтра, поэтому условием устойчивости является расположение всех полюсов системной функции внутри единичной окружности, иначе

$$\left| z_{\substack{полюс\\СФ}} \right| < 1. \qquad (9.10)$$

При наличии только одного полюса системной функции на единичной окружности, цифровой фильтр называется условно-устойчивым. У такого цифрового фильтра реакция на убывающее воздействие ограничена.

Неустойчивость цифровых фильтров приводит к переполнению разрядной сетки вычислителя, алгоритм обработки сигналов становится нелинейным, может давать результаты трудно предсказуемые на этапе проектирования.

9.6. Пример программы на С++ для реализации цифрового фильтра

Листинг 1. Текст программы для реализации цифрового фильтра порядка не более 100 (используется синтаксис С++)

```
//Описание класса ЦФ
class CDigatalFilter
{
 public:
          // переменные
          int N;              // порядок ЦФ
          double Line[110]; // линия задержки
          double a[110];
          double b[110];    // коэффициенты ЦФ
 // методы класса
 void ClearLine(void);     // установка нулевых нну
 void InLine(double x);    // ввод элемента в линию
 double Out(double x);     // сигнал на выходе ЦФ
 CDigatalFilter(void);     // конструкор
};
```

```
// конструктор
CDigitalFilter::CDigatalFilter(void)
{
 N=100;
 ClearLine();
 for(int i=0; i<=N; i++)
 {a[i]=0.0; b[i]=0.0;}
 a[0]=1.0;
}

// установка нулевых нну
void CDigitalFilter::ClearLine(void)
{
 for(int i=0; i<N; i++)
  Line[i]=0.0;
}

// ввод элемента в линию задержки
void CDigitalFilter::InLine(double x)
{
 for(int i=N-1; i>0; i--)
  Line[i]=Line[i-1];
 Line[0]=x;
}
// сигнал на выходе фильтра
double CDigitalFilter::Out(double x)
{
 double LeftSum=x; // левый сумматор
 for(int i=1; i<=N; i++)
  LeftSum += b[i]*Line[i-1];
 double RightSum = a[0]*LeftSum; // правый сумматор
 for(int i=1; i<=N; i++)
  RightSum += a[i]*Line[i-1];
 InLine(LeftSum); // подготовка к следующему такту
 return RightSum; // результат
}
```

Пример использования класса лист.1 для программирования цифрового фильтра 2-го порядка с коэффициентами $a_0 = 0,5$; $b_1 = 0,6$; $b_2 = -0,2$ приведён на лист.2.

Листинг 2. Текст программы реализации цифрового фильтра второго порядка (используется синтаксис C++)

```
double InSignal[1010];   // массив значений сигнала на входе
double OutSignal[1010];  // массив значений сигнала на выходе
CDigitalFilter Filter;   // объект цифрового фильтра

…

void SomeFunction(void)
```

```
{
 // инициализация фильтра
 Filter.N=2;
 Filter.a[0]=1; Filter.a[1]=0.5;
 Filter.b[1]=0.6; Filter.b[2]=-0.2;
 // установка нулевых нну
 Filter.ClearLine();
 // собственно цифровая фильтрация
 for(int n=0; n<1000; n++)
  OutSignal[n]=Filter.Out(InSignal[n]);
}
```

Литература

Основная литература

1. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов / О. А. Стеценко. — М.: Высш. шк., 2007. — 432 с. https://library.mirea.ru/books/39991

2. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Радио и связь, 1986. — 512 с. https://library.mirea.ru/books/6969

3. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 2005. — 462 с. https://library.mirea.ru/books/875

4. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие / Д. В. Васильев, М. Р. Витоль, Ю. Н. Горшенков, и др.; К. А. Самойло. — М.: Радио и связь, 1982. — 528 с. https://library.mirea.ru/books/19694

Дополнительная литература

5. Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров: учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1982.

6. Основы цифровой обработки сигналов: Учеб. пособие для вузов / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 753 с. https://library.mirea.ru/books/831

7. Сигналы. Теоретическая радиотехника: Справ. пособие / А. Н. Денисенко. — М.: Горячая линия - Телеком, 2005. — 704 с. https://library.mirea.ru/books/45

8. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.: ил. — Библиогр.: с. 804 (15 назв.) https://library.mirea.ru/books/9447

9. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М.: Наука, 1998. — 608 с. https://library.mirea.ru/books/4829

Пособия и методические указания

10. Радиотехнические цепи и сигналы. Ч. 2 [Электронный ресурс]: метод. указания по выполнению лаб. работ / В. Н. Исаков, Д. Р. Барский. — М.: РТУ МИРЭА, 2019. — Электрон. опт. диск (ISO) https://library.mirea.ru/share/3274