Лекция №2

§ 2. Функции комплексного переменного

Сформулируем ряд основных определений, которые далее будут часто использоваться.

Определение 2.1. $\boldsymbol{\delta}$-*окрестностью точки* $\boldsymbol{z_0}$ *называется множество точек* $\boldsymbol{z}$*, лежащих внутри круга радиуса* $\boldsymbol{\delta}$ *с центром в точке* $\boldsymbol{z_0}$*, т. е. множество точек, удовлетворяющих неравенству* $|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_0}|<\boldsymbol{\delta}$.

Определение 2.2. *Областью комплексной плоскости называется множество точек* $\boldsymbol{D}$*, обладающее следующими свойствами:*

1. *вместе с каждой точкой из D этому множеству принадлежит и некоторая окрестность этой точки, то есть некоторый круг без границы с центром в этой точке (свойство открытости);*
2. *две любые точки из D можно соединить ломаной, состоящей из точек D (свойство связности).*

Определение 2.3. *Область называется односвязной, если любую замкнутую кривую, лежащую в этой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.*

Определение 2.4. *Граничной точкой области* $\boldsymbol{D}$ *называют такую точку, которая сама не принадлежит* $\boldsymbol{D}$*, но в любой окрестности которой лежат точки этой области.*

Определение 2.5. *Совокупность граничных точек области* $\boldsymbol{D}$ *называют границей этой области Г(*$\boldsymbol{D}$*).*

Определение 2.6. *Область* $\boldsymbol{D}$ *с присоединенной к ней границей* $\Gamma(\mathbf{D})$ *называется замкнутой областью и обозначается* $\overline{\boldsymbol{D}}$.

Проиллюстрируем некоторые понятия геометрически.

Изображение множеств на комплексной плоскости

Рассмотрим задачи, связанные с изображением на комплексной плоскости линий или областей, заданных уравнениями и неравенствами.

Пример. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством $\mathrm{Re}\, z \leq 3$.

Решение. $\mathrm{Re}\, z = x$, тогда неравенство можно переписать так: $x \leq 3$. На

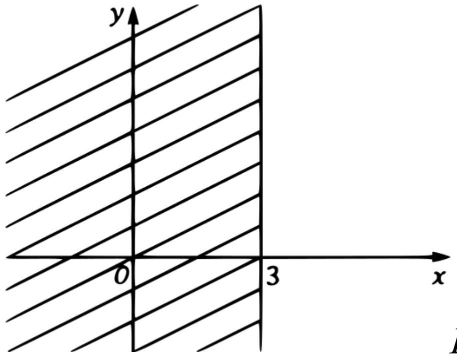

Рис. 6

плоскости xOy это определяет полуплоскость левее прямой $x = 3$ (см. рис. 6).

Пример. Изобразить на комплексной плоскости линию, заданную $|z| = 4$.

Решение. По определению, $|z|$ – это расстояние от начала координат до точки z, т.е. $|z| = 4$ – это геометрическое множество точек, равноудаленных от начала координат. Таким геометрическим местом является окружность с центром в начале координат радиуса $R = 4$.

Также можно вывести уравнение кривой алгебраическим способом. Из (1.1) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. уравнение переписывается в виде $\sqrt{x^2 + y^2} = 4$, или $x^2 + y^2 = 4^2$ – это и есть уравнение окружности с центром в точке O и $R = 4$.

Пример. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством $1 < |z - 1 + i| \leq 2$.

Решение. $|z - 1 + i| = |z - (1 - i)| \leq 2$

Это множество точек z, расстояние которых от точки $1 - i$ не больше 2, то есть круг с центром в $1 - i$ радиуса 2. Множество точек z таких, что $1 < |z - (1 - i)|$ представляет собой внешность круга радиуса 1 с центром в точке $1 - i$. Таким образом, исходное множество – кольцо с центром в точке $1 - i$ (см. рис. 7).

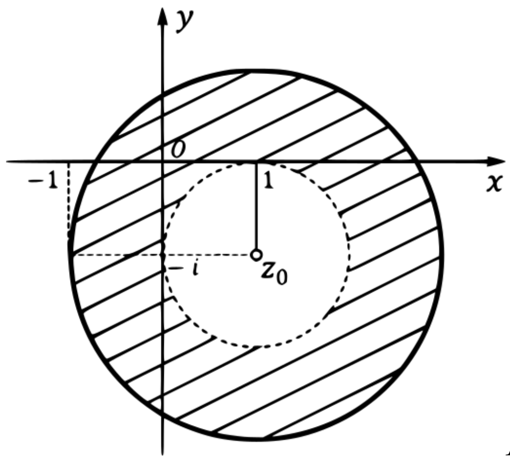

Рис. 7

Пример. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством $2 < |z + 3 + 2i| \leq 4$.

Решение: по аналогии с предыдущим примером получим кольцо с центром в точке $(-3 - 2i)$, радиус внутренней окружности равен 2 (линия обозначается пунктиром), радиус второй окружности равен 4 (линия сплошная.

Пример. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную

$|z| < 4$.

Решение: по аналогии с предыдущими примерами получим, что задана внутренняя часть круга с центром в точке 0, радиус равен 4, причем граница области – окружность – обозначается пунктиром.

Заметим, что для случая $|z| > 4$, получим внешнюю часть круга.

Пример. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \geq 1.$

Решение: Пусть z не равно (-1). Умножим обе части неравенства на положительное число $|z+1|$, получим $|z-1| \geq |z+1|$.

Положим $z = x + iy$.

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

Возведем в квадрат:

$$(x-1)^2 + y^2 \geq (x+1)^2 + y^2.$$

Перенося в левую часть все слагаемые, получим $(x-1)^2 - (x+1)^2 \geq 0$ или $-4x \geq 0$, или $x \leq 0$ – это левая полуплоскость вместе с границей $x = 0$, причем выкалывается точка $z = -1$.

Определение 2.7. *Говорят, что в области* $\boldsymbol{D}$ *определена функция* $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ *с множеством значений E, если каждой точке* $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{D}$ *поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или целое множество (многозначная функция) значений* $\omega \in E$ **.**

Например, $\omega = |z|$ – однозначная функция, $\omega = \sqrt[n]{z}$ – n-значная функция, т.к. имеет n корней, $\omega = Arg\, z$ – бесконечнозначная функция, т.к. слагаемое $2\pi k$, входящее в $Arg\, z$, принимает бесконечное число значений при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пусть $z = x + iy$, тогда

$$\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

где $u(x,y) = \mathrm{Re} f(z)$ – действительная часть функции, $v(x,y) = \mathrm{Im} f(z)$ – мнимая часть функции.

Пример. Найти действительную и мнимую части функции

$$\omega = 5z + 3.$$

Решение. Положим $z = x + iy$, тогда $\omega = 5(x + iy) \quad + 3 = (5x + 3) + 5iy$.

Получаем

$u(x,y) = 5x + 3$ – действительная часть функции,

$v(x,y) = 5y$ – мнимая часть функции.

Пример. Найти действительную и мнимую части функции

$$\omega = z^2 + i\overline{z}.$$

Решение. Положим $z = x + iy$, тогда $\omega = (x + iy)^2 + i(x - iy) = x^2 + 2xyi - y^2 + ix + y = (x^2 - y^2 + y) + i(2xy + x)$. Получаем

$u(x,y) = x^2 - y^2 + y$ – действительная часть функции,

$v(x,y) = 2xy + x$ – мнимая часть функции.

Теперь перейдем к изучению функций комплексного переменного. Начнем с рассмотрения элементарных функций комплексного переменного и их свойств.

Элементарные функции комплексного переменного

Основные элементарные функции комплексного переменного определяются следующими формулами (здесь $z = x + iy$).

1. ***Дробно-рациональная функция***

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + a_m}.$$

В частности, рациональной функцией является многочлен $\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$.

2. ***Показательная функция e^z*** при $z = x + i \cdot y \in \mathbf{C}$ определяется равенством

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y).$$

В частности, при $z \in \mathbf{R}$ (т.е. при $y=0$) функция e^z совпадает с обычной экспонентой, а при $x=0$ получаем формулу Эйлера:

$$e^{i \cdot y} = \cos y + i \cdot \sin y.$$

Свойства показательной функции:

а) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$, где z_1, z_2 – комплексные числа,

в) $e^{z + 2\pi k i} = e^z (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, т.е.

e^z – периодическая функция с периодом $2\pi i$.

3. ***Тригонометрические функции***

Из формулы Эйлера следует, что $\forall x \in \mathbf{R}$

$$\cos x = \frac{e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x}}{2},\ \sin x = \frac{e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x}}{2i}.$$

По аналогии с этими равенствами введем функции комплексного переменного cosz и sinz $\forall z \in \mathbf{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2},\quad \sin z = \frac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2i}. \qquad (2.1)$$

Функции $sinz$ и $cosz$ – периодические с периодом $T = 2\pi$. Справедливо основное тригонометрическое тождество: $\cos^2 z+\sin^2 z=1$.

Функции tgz и $ctgz$ определяются равенствами $tgz = \frac{sinz}{cosz}$, $ctgz = \frac{cosz}{sinz}$. Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все формулы тригонометрии.

4. ***Гиперболические функции***

Гиперболические функции shz, chz, thz, $cthz$ определяются равенствами

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$thz = \frac{shz}{chz}, cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Основное гиперболическое тождество $ch^2 z - sh^2 z = 1$.

5. ***Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями***

$$sinz = -ish(iz), cosz = ch(iz), tgz = -ith(iz),$$

$$ctgz = icth(iz), shz = -isin(iz), chz = \cos(iz),$$

$$thz = -itg(iz), cthz = ictg(iz).$$

6. ***Логарифмическая функция Ln z***, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\operatorname{Ln} z = ln|z| + iArg\, z = ln|z| + i(arg\, z + 2\pi k),$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{2.2}$$

Функция $\omega = \operatorname{Ln} z$ является многозначной.

Главным значением Ln $\boldsymbol{z}$ *называется значение, получаемое при* $\boldsymbol{k = 0}$

$$lnz = ln|z| + iargz.$$

Свойства функции $Ln\, z$:

$$\text{a) } \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\text{b) } \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

7. ***Общая показательная функция*** определяется равенством

$$a^z = e^{z\operatorname{Ln} a}, \tag{2.3}$$

где a – любое комплексное число, $a \neq 0$.

8. ***Общая степенная функция*** $w = z^a$, где a – любое комплексное число, $z \neq 0$

$$z^a = e^{a\operatorname{Ln} z}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим типовые задачи с использованием указанных функций.

Пример. Вычислить $sin(3-i)$.

Решение. Используя формулы (2.1) получаем

$$sin(3-i) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(3-i)} - e^{-i(3-i)}\right] = -\frac{i}{2}\left[e^{1+3i} - e^{-1-3i}\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\left[e(cos3 + isin3) - e^{-1}(cos3 - isin3)\right] =$$

$$= -i\left[cos3\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right) + isin3\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)\right] =$$

$$= sin3ch1 - icos3sh1.$$

Пример. Вычислить $\mathrm{Ln}(-1)$.

Решение. Из формулы (2.2) получаем

$$\mathrm{Ln}(-1) = ln|-1| + i(arg(-1) + 2\pi k) = i(\pi + 2\pi k) =$$

$$= (2k+1)\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Пример. Вычислить i^{2i}.

Решение. Положим $a = i, z = 2i$ и воспользуемся формулой (2.4)

$$i^{2i} = e^{2i\mathrm{Ln}i}.$$

Вычислим отдельно $\mathrm{Ln}(i)$. Используя формулу (2.2), получим:

$$\mathrm{Ln}(i) = ln|i| + i(argi + 2\pi k) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

$$|i| = \sqrt{0+1^2} = 1,\ ln|i| = ln1 = 0, argi = \frac{\pi}{2},$$

$$i^{2i} = e^{2i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} = e^{-\pi-4\pi k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Решение уравнений

Пример. Решить уравнение $sinz = 3$, корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Решение. Используя формулу (2.1), уравнение можно переписать в виде $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 3$ или $e^{2iz} - 6ie^{iz} - 1 = 0$ – это квадратное уравнение относительно e^{iz}. Его корни

$$e^{iz} = 3i \pm 2\sqrt{2}i = i\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$$

Прологарифмируем полученное равенство

$$iz = \mathrm{Ln}\left(i\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)\right) = ln\left|i\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)\right| +$$

$$+i\left(arg\left(i\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)\right) + 2\pi k\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Вычислим $\left|i\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)\right| = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $arg\left(i\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$, получим

$$iz = ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

отсюда вычислим

$$z = \frac{1}{i} ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right).$$

Получили две серии корней

$$z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln\left(3 + 2\sqrt{2}\right), z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln\left(3 - 2\sqrt{2}\right).$$

Преобразуем z_2.

$$-ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = ln\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right),$$

поэтому

$$z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + iln\left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

Корни находятся на двух прямых, параллельных оси Ox и отстоящих от нее на расстояние $ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$ (см. рис. 8).

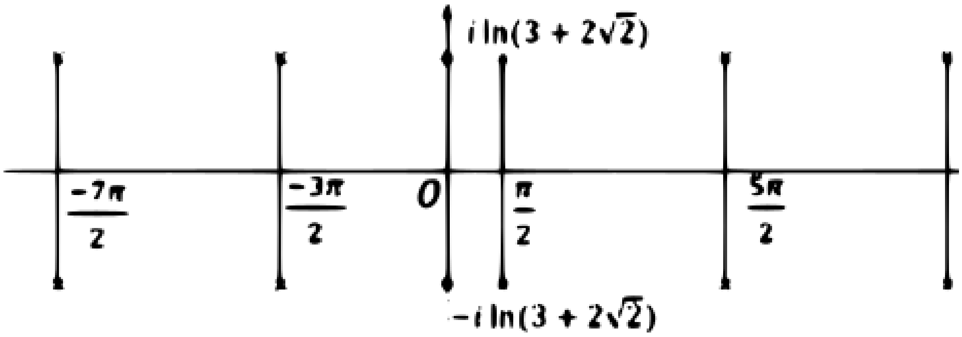
$i\ln(3+2\sqrt{2})$
$\frac{-7\pi}{2}$
$\frac{-3\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{2}$
$-i\ln(3+2\sqrt{2})$

Рис. 8