



МИРЭА – Российский технологический университет

Институт Радиотехнических и телекоммуникационных систем

кафедра радиоволновых процессов и технологий

дисциплина Разработка и эксплуатация радиотелеметрических систем 1

презентация к лекции №2

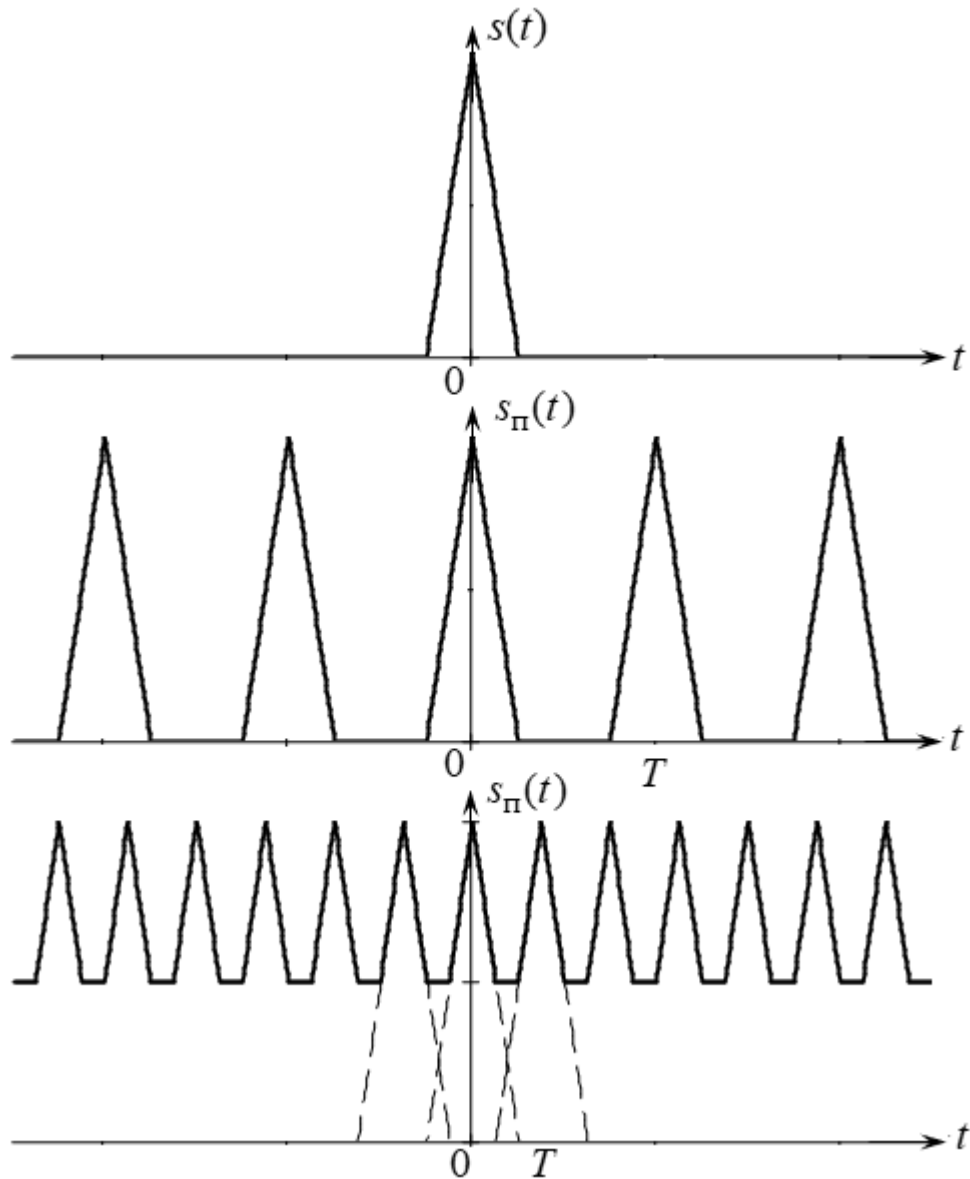
СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

ст. пр. каф. РПТ Исаков В.Н.

circuits-signals@yandex.ru

Москва 2021

1. Основные характеристики периодических сигналов



Периодический сигнал

Периодический сигнал можно рассматривать как результат периодического повторения непериодического сигнала $s(t)$ через определённый интервал времени, называемый периодом.

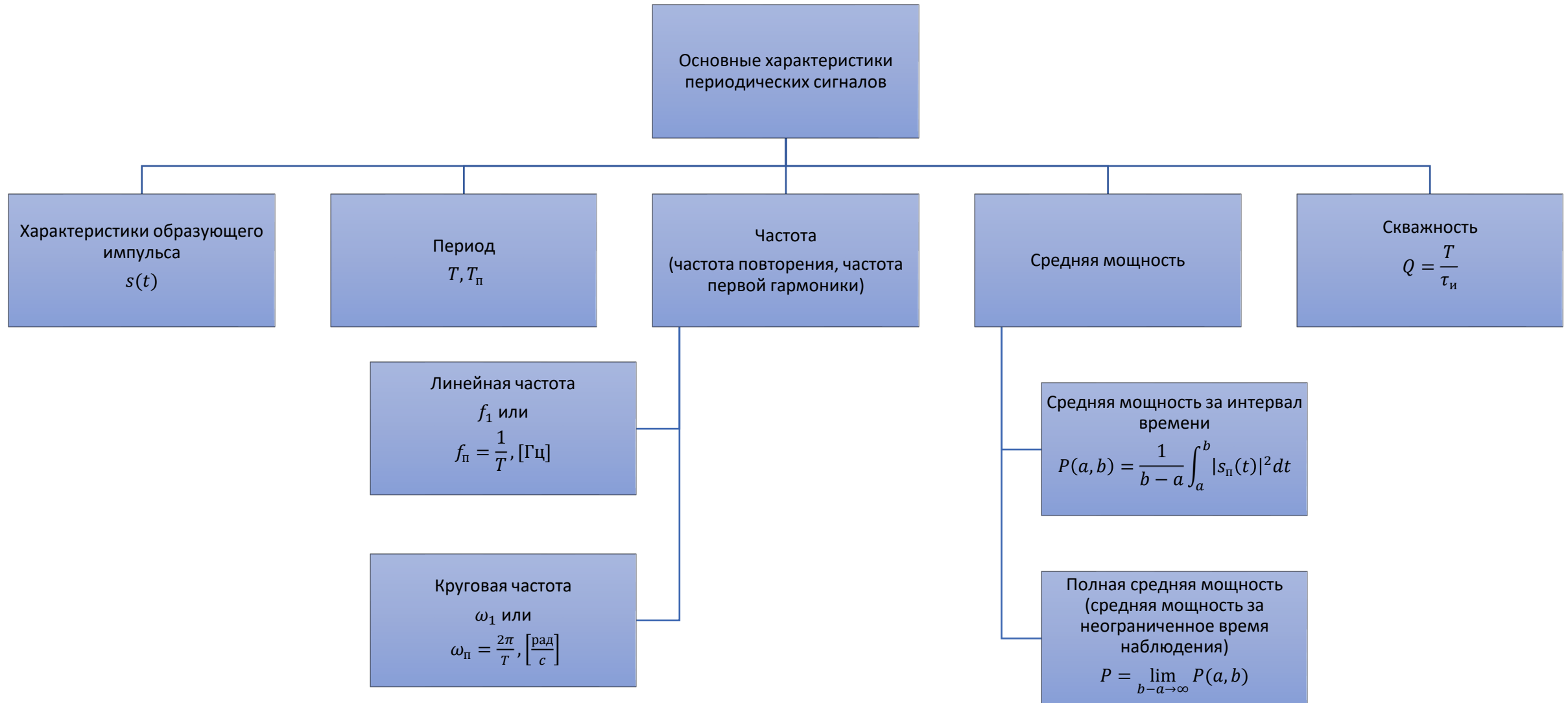
Периодизация

С наложением

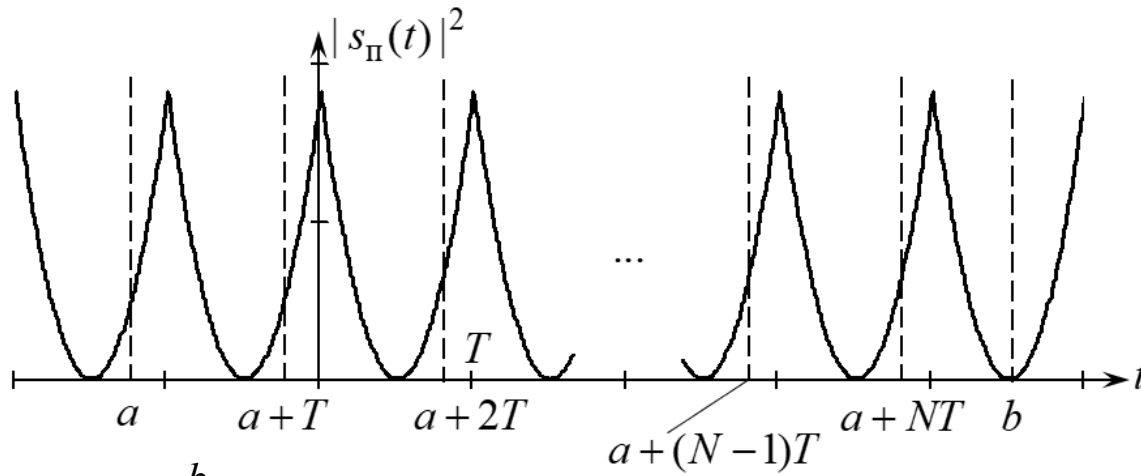
Без наложения

$$s_{\Pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t - nT) \quad (1)$$

2. Основные характеристики периодических сигналов



3. Полная средняя мощность периодического сигнала



$$P = \lim_{b-a \rightarrow \infty} \frac{E(a,b)}{b-a} = \lim_{b-a \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b |s_{\Pi}(t)|^2 dt}{b-a} \quad (2)$$

$$P(a,b) = \frac{\int_a^b |s_{\Pi}(t)|^2 dt}{b-a} = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^{a+T} |s_{\Pi}(t)|^2 dt + \int_{a+T}^{a+2T} |s_{\Pi}(t)|^2 dt + \dots + \int_{a+(N-1)T}^{a+NT} |s_{\Pi}(t)|^2 dt + \int_{a+NT}^b |s_{\Pi}(t)|^2 dt \right)$$

$$b-a = NT + \Delta t, \quad 0 < \Delta t < T \quad \Rightarrow \quad \int_{a+NT}^b |s_{\Pi}(t)|^2 dt = \mu \Delta t \quad \Rightarrow \quad \min |s_{\Pi}(t)|^2 \leq \mu \leq \max |s_{\Pi}(t)|^2$$

$$0 < \mu \Delta t < \max |s_{\Pi}(t)|^2 T \quad \Rightarrow \quad P(a,b) = \frac{1}{NT + \Delta t} (NE(a, a+T) + \mu \Delta t)$$

4. Полная средняя мощность периодического сигнала

$$P(a, b) = \frac{1}{NT + \Delta t} (NE(a, a + T) + \mu \Delta t)$$

$$b - a \rightarrow \infty \Rightarrow N \rightarrow \infty$$

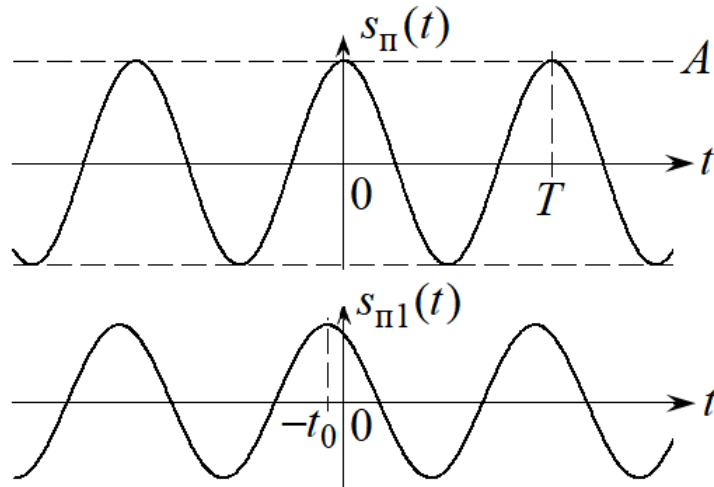
$$P = \frac{E(a, a + T)}{T}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |s_{\Pi}(t')|^2 dt' \quad (3)$$

**(Полная) средняя
мощность
периодического сигнала**

(Полная) средняя
мощность
периодического
сигнала численно равна
его средней мощности
за один период.

5. Гармонический сигнал



ω – (круговая) частота гармонического сигнала, $\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$. Параметр масштаба времени.

Гармонический сигнал
 $s_{\Pi}(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

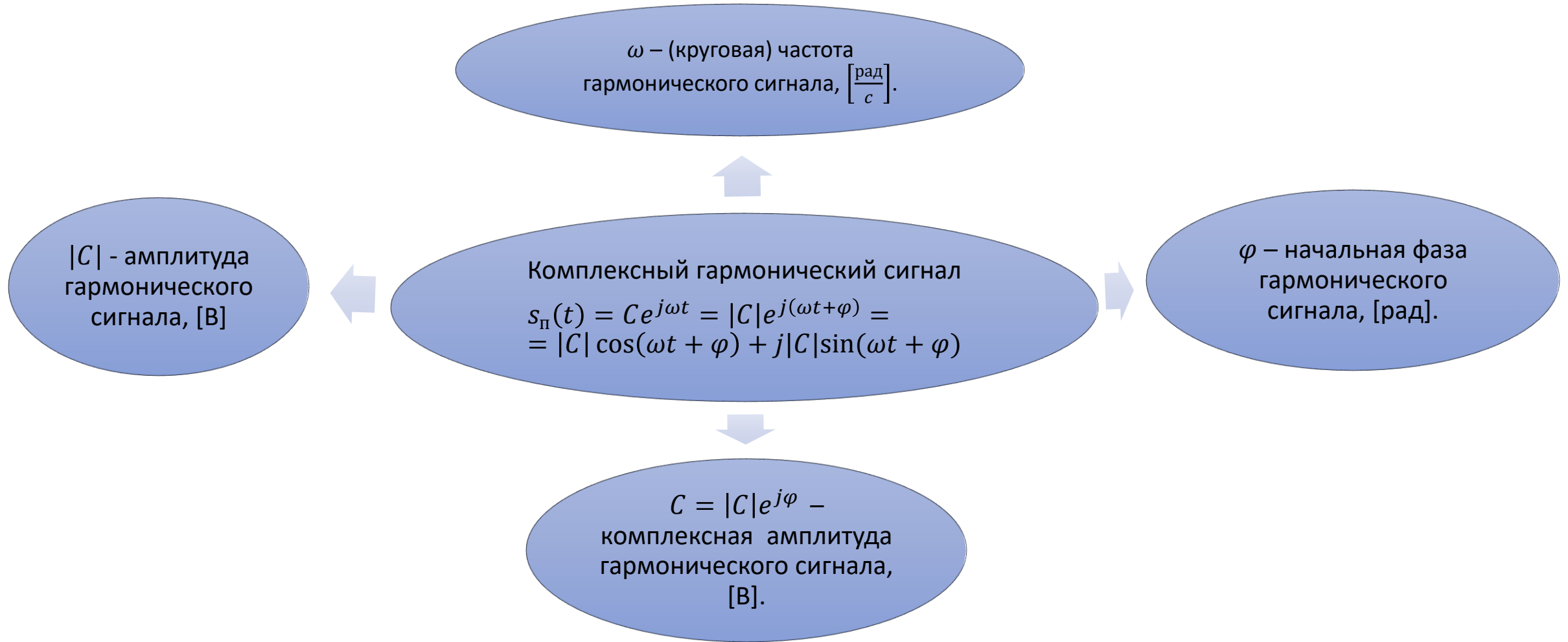
A – амплитуда гармонического сигнала, [В]. Максимальное отклонение гармонического сигнала от среднего значения

φ – начальная фаза гармонического сигнала, [рад]. Связана с параметром временного сдвига
 $\varphi = \omega t_0$

$$s_{\Pi 1}(t) = A \cos(\omega(t + t_0)) = A \cos(\omega t + \omega t_0) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{A^2}{2T} \int_0^T dt + \frac{A^2}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi) dt = \frac{A^2}{2} \quad (5)$$

6. Комплексный гармонический сигнал



$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |Ce^{j\omega t}|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T |C|^2 dt = |C|^2 \quad (6)$$

7. Ряд Фурье в комплексной форме

$$L_2[-T/2; T/2] \Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow (s_1, s_2) = \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) s_2^*(t) dt \Rightarrow \left\{ f_n(t) = e^{j\omega_n t} \right\}_{n=-\infty}^{+\infty}, \omega_n = n\omega_1, \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$(f_n, f_k) = \int_{-T/2}^{T/2} f_n(t) f_k^*(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\omega_n t} e^{-j\omega_k t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(\omega_n - \omega_k)t} dt =$$

$$= \begin{cases} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\frac{2\pi}{T}(n-k)t} dt, n \neq k \\ \int_{-T/2}^{T/2} dt, n = k \end{cases} = \begin{cases} \frac{e^{j\frac{2\pi}{T}(n-k)t}}{j2\pi(n-k)/T} \Big|_{-T/2}^{T/2}, n \neq k \\ T, n = k \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{e^{j\frac{2\pi}{T}(n-k)\frac{T}{2}} - e^{-j\frac{2\pi}{T}(n-k)\frac{T}{2}}}{j2\pi(n-k)/T}, n \neq k \\ T, n = k \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sin[\pi(n-k)]}{\pi(n-k)/T}, n \neq k \\ T, n = k \end{cases} = \begin{cases} 0, n \neq k \\ T, n = k \end{cases} \Rightarrow \|f_n\| = \sqrt{T}$$

8. Ряд Фурье в комплексной форме (продолжение)

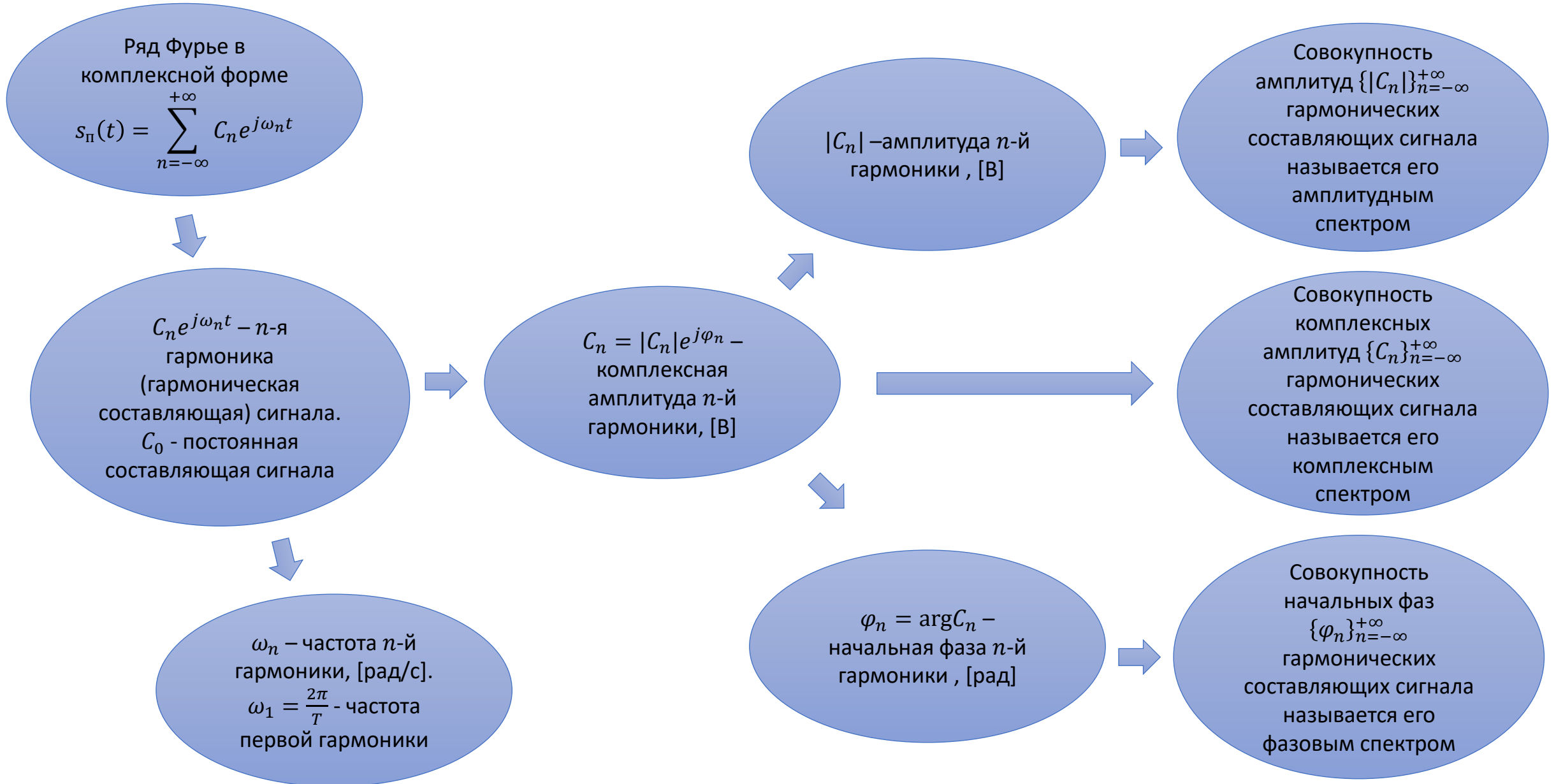
$$s_{\Pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n f_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\omega_n t} \quad (7)$$

$$C_n = \frac{1}{\|f_n\|^2} (s_{\Pi}, f_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_{\Pi}(t) f_n^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_{\Pi}(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (8)$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$s_{\Pi}(t + kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\omega_n(t+kT)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\omega_n t} e^{j\frac{2\pi n}{T}kT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\omega_n t} = s_{\Pi}(t) \quad (9)$$

9. Ряд Фурье в комплексной форме (продолжение)



10. Ряд Фурье в комплексной форме (продолжение)

$$\begin{array}{ccc} s_{\Pi}(t) \in \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & C_{-n} = C_n^* \\ & \searrow & \\ & & \varphi_{-n} = -\varphi_n \end{array} \quad \begin{array}{l} |C_{-n}| = |C_n| \\ \\ \end{array} \quad (10)$$

$$C_{-n} = \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_{\Pi}(t) e^{-j\omega_{-n}t} dt \right)^{**} = \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_{\Pi}(t) e^{-j\omega_n t} dt \right)^* = C_n^* \quad (11)$$

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_{\Pi}(t) dt \in \mathbb{R} \quad \varphi_0 \in \{0, \pm\pi\} \quad \varphi_0 = \begin{cases} 0, & C_0 > 0 \\ \pm\pi, & C_0 < 0 \end{cases} \quad (12)$$

11. Ряд Фурье в тригонометрической форме

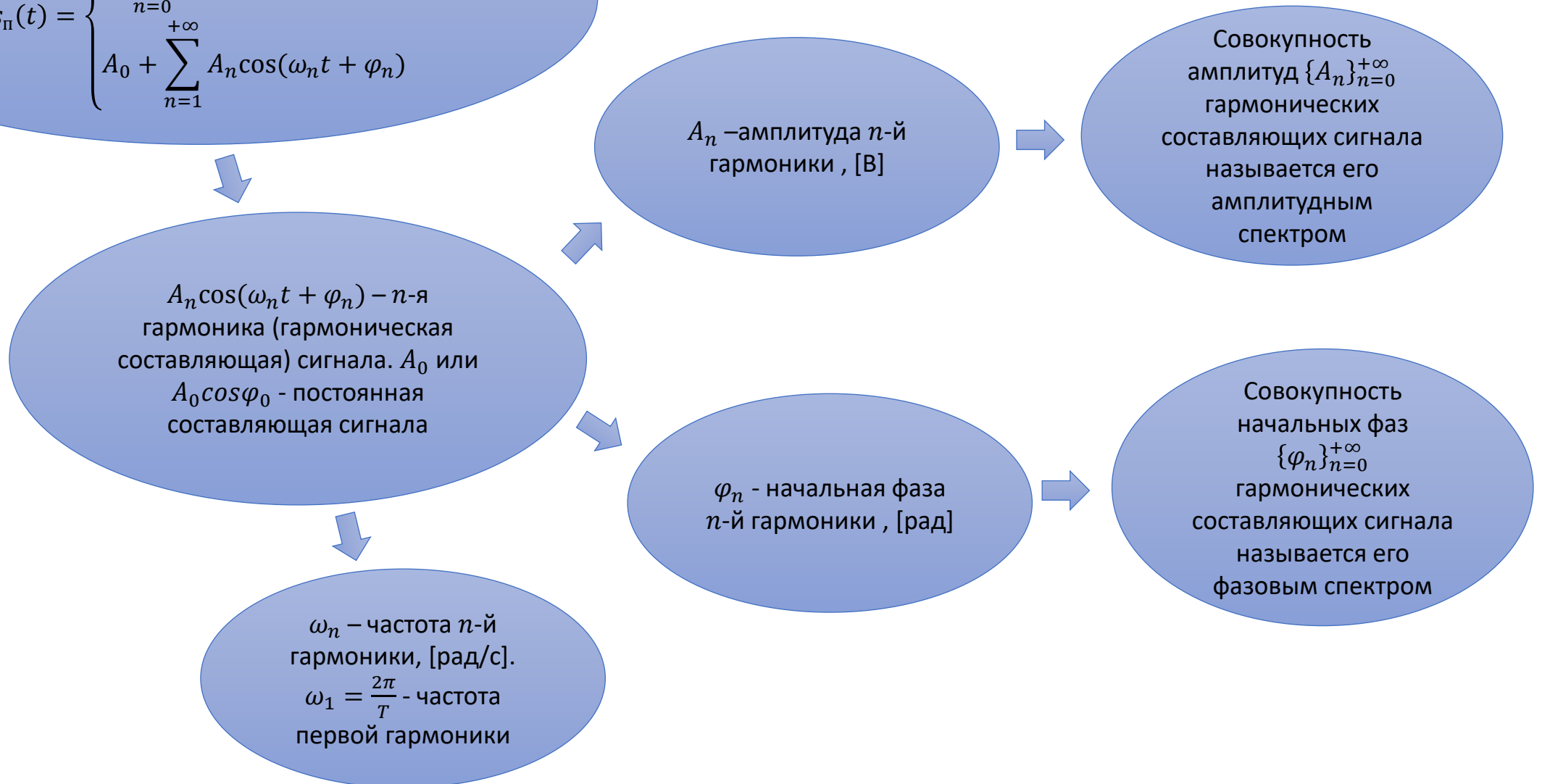
$$s_{\Pi}(t) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} s_{\Pi}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| e^{j(\omega_n t + \varphi_n)} = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|C_n| e^{j(\omega_n t + \varphi_n)} + |C_{-n}| e^{j(\omega_{-n} t + \varphi_{-n})} \right) = \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|C_n| e^{j(\omega_n t + \varphi_n)} + |C_n| e^{-j(\omega_n t + \varphi_n)} \right) = \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \operatorname{Re} |C_n| e^{j(\omega_n t + \varphi_n)} = |C_0| \cos \varphi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 |C_n| \cos(\omega_n t + \varphi_n) = \\ &= \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), & A_0 = |C_0| \geq 0, A_n = 2 |C_n| \\ A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), & A_0 = C_0, A_n = 2 |C_n| \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

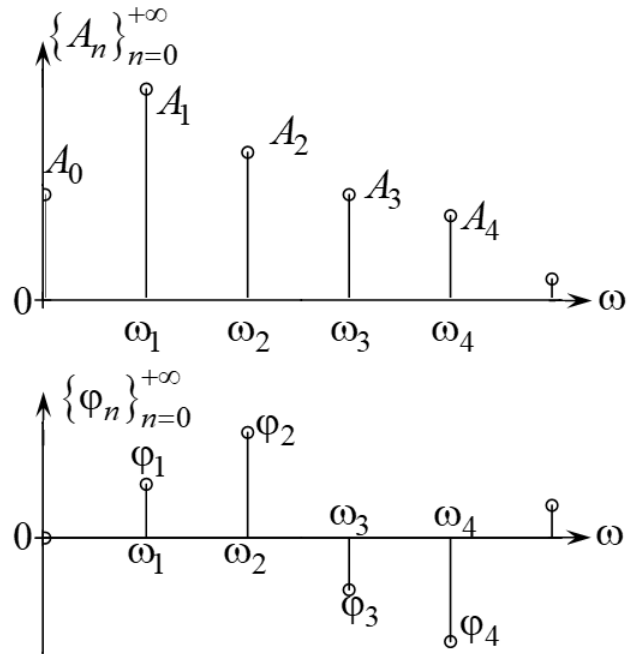
12. Ряд Фурье в тригонометрической форме (продолжение)

Ряд Фурье в тригонометрической форме

$$s_{\Pi}(t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \\ A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \end{cases}$$



13. Ряд Фурье в тригонометрической форме (продолжение)



Спектральные диаграммы

Амплитудный и фазовый спектр сигнала изображают посредством так называемых спектральных диаграмм. На амплитудную спектральную диаграмму наносят линии высотой A_n на частотах ω_n . На фазовую спектральную диаграмму наносят линии на частотах ω_n , той высоты и полярности, которая соответствует φ_n

Постоянная составляющая

График постоянной составляющей сигнала проходит относительно графика самого сигнала так, что совокупная площадь фигуры, ограниченной на периоде графиком постоянной составляющей и графиком сигнала под постоянной составляющей равна таковой же над постоянной составляющей

$$\int_{-T/2}^{T/2} (s_{\Pi}(t) - C_0) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) dt = 0$$

14. Средняя мощность периодического сигнала

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s_{\Pi}(t)|^2 dt = \frac{1}{T} (s_{\Pi}, s_{\Pi}) = \frac{\|s_{\Pi}\|^2}{T}$$

$$P = \frac{\|s_{\Pi}\|^2}{T} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \|f_n\|^2}{T} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 T}{T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = A_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n^2}{4} = A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n^2}{2}$$

**Средняя мощность
периодического
сигнала**

Средняя мощность
периодического
сигнала равна
сумме средних
мощностей его
гармонических
составляющих.

Список литературы

Основная литература

1. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов / О. А. Стеценко. — М.: Высш. шк., 2007.
2. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Дрофа, 2006.
3. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Радио и связь, 1986.
4. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 2000.

Дополнительная литература

5. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.: ил. — Библиогр.: с. 804 (15 назв.)
6. Сигналы. Теоретическая радиотехника: Справ. пособие / А. Н. Денисенко. — М.: Горячая линия - Телеком, 2005. — 704 с.
7. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М.: Наука, 1998. — 608 с.