Вар 8

№1

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^n}{n}=2\right)\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N})\left(\forall n>n_\varepsilon\to\left|\frac{2n+(-1)^n}{n}-2\right|<\varepsilon\right)$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$.

$$\left|\frac{2n+(-1)^n}{n}-2\right|=\left|\frac{\cancel{2n}+(-1)^n-\cancel{2n}}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow$$

$$n>\frac{1}{\varepsilon};\quad \underline{n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1}$$

$$\varepsilon=10^{-2}\Rightarrow n_{10^{-2}}=[100]+1=\underline{101}.$$

Т.о., по определению $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^n}{n}=2$.

№2

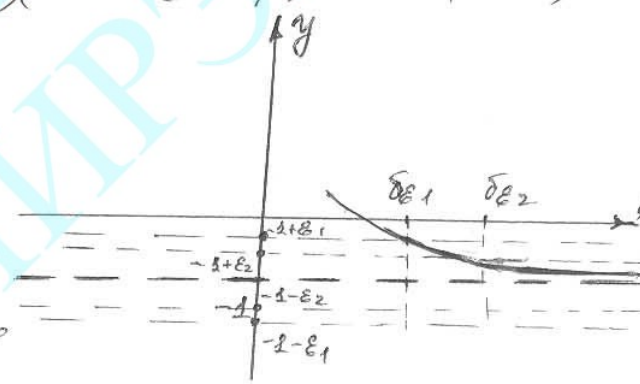
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n\cos(n!)}{\sqrt[3]{n^4+5n-9}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(3\cos(n!))}{n^{4/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^3}-\frac{9}{n^4}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{3\cos(n!)}^{огр}}{\underbrace{n^{\frac{1}{3}}}_{бб}\underbrace{\left(\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^3}-\frac{9}{n^4}}\right)}_{\to1}}=$$

$=0.$

№3

$$\left(\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1\right)\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta_\varepsilon>0)\left(x>\delta_\varepsilon\to|f(x)+1|<\varepsilon\right)$$

Геометрически:



№4

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5^x+6^x}{5^x-6^x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{6^x}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^x+1\right)}{\cancel{6^x}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^x-1\right)}=\begin{cases}-1, & x\to+\infty\\ 1, & x\to-\infty\end{cases}$$

№5

$$\lim_{x\to3}\frac{1-\cos(x-3)}{(x-3)\,tg\frac{(x-3)}{2}}=\left|\begin{matrix}1-\cos(x-3)\sim\frac{(x-3)^2}{2}\\ tg\frac{(x-3)}{2}\sim\frac{(x-3)}{2}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to3}\frac{\frac{(x-3)^2}{2}}{(x-3)\cdot\frac{(x-3)}{2}}=1.$$

№6

а) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+2^x}{1+3^x}\right)^{1/x}=[1^\infty]=\lim_{x\to0}\overbrace{\left(1+\frac{2^x-3^x}{1+3^x}\right)^{\frac{1+3^x}{2^x-3^x}}}^{\to e}{}^{\frac{2^x-3^x}{x(1+3^x)}}=$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{\overset{\to1}{3^x}\overbrace{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right)}^{\to\ln\frac{2}{3}}}{x\underbrace{(1+3^x)}_{\to1}}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}}=\frac{4}{9}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2^x}{1+3^x}\right)^{\frac{2x+3}{2x+1}} = [1^3] = 1$

II з.п. применять нельзя, т.к. нет неопределенности вида $[1^\infty]$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2^x}{1+3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{\left(1+\frac{2^x-3^x}{1+3^x}\right)^{\frac{1+3^x}{2^x-3^x}}}_{\to e}\right)^{\frac{2^x-3^x}{x^2(1+3^x)}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{3^x\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right)}{x^2(1+3^x)}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{3^x\cdot x\cdot \ln\frac{2}{3}}{x^2(1+3^x)}} = \left[e^{\frac{1\cdot\ln\frac{2}{3}}{0\cdot 2}}\right.$

$= \begin{cases} +\infty, & x\to 0^+ \\ 0, & x\to 0^- \end{cases}$

№7

$\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 3x)^{\frac{1}{tg 5x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{(1-\sin 3x)^{-\frac{1}{\sin 3x}}}_{\to e}\right)^{\frac{-\sin 3x}{tg 5x}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{\sin 3x}{tg 5x}} = e^{-\frac{3}{5}}$

№8

$y = \sin\frac{\pi}{x}$. Во всех точках кроме $x=0$ функция непрерывна как композиция элементарных. Определим характер разрыва в точке $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}\ \nexists \Rightarrow$ имеем точку разрыва II рода

№9

$y = \sqrt{\cos^2 x - 2\sin^2 x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\cos^2 x - 2\sin^2 x}}\cdot(2\cos x(-\sin x) -$

$- 4\sin x\cdot\cos x) = -\frac{3\cos x\sin x}{\sqrt{\cos^2 x - 2\sin^2 x}}$.

№10

$y = \frac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}} \Rightarrow y' = \frac{4\sqrt{4x-x^2} - (x-2)\cdot 4\cdot\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}}{16(4x-x^2)} =$

$= \frac{4x-x^2-(x-2)(2-x)}{4(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}} = \frac{\cancel{4x}-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}-\cancel{4x}+4}{4(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}} = \frac{1}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}$

№11

$y = (\arcsin x)^{x^2} \Rightarrow \ln y = x^2\cdot\ln\arcsin x$

$\frac{y'}{y} = 2x\ln\arcsin x + x^2\cdot\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$

$y' = (\arcsin x)^{x^2}\left(2x\ln\arcsin x + \frac{x^2}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

№12

$$\begin{cases} x = \ln tg\frac{t}{2} + \cos t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x'_t = \frac{1}{tg\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \sin t \\ y'_t = \cancel{\sin t} + t\cos t - \cancel{\sin t} \end{matrix}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t\cos t}{\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} - \sin t} = \frac{t\cos t \cdot \sin t}{\cos^2 t} = t \cdot tg t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'_x = t \cdot tg t \\ x = \ln tg\frac{t}{2} + \cos t \end{cases}$$

№13

$F(x,y): e^x - e^y - xy$

$$F'_x = e^x - y; \quad F'_y = -e^y - x; \quad y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^x - y}{-e^y - x} = \underline{\underline{\frac{e^x - y}{e^y + x}}}$$

№14

$y = xe^{\frac{1}{x-2}}$; $M_1(3; 3e)$, $M_2(2-0; 0)$

$$y' = e^{\frac{1}{x-2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) \cdot e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{(x-2)^2}\right)$$

Укас: $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Унорм: $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

M_1: $x_0 = 3$; $y_0 = 3e$; $y'(x_0) = e\left(1 - \frac{3}{1}\right) = -2e$

$\Rightarrow$ Укас: $y - 3e = -2e(x - 3)$

Унорм: $y - 3e = \frac{1}{2e}(x - 3)$

M_2: $x_0 = 2-0$; $y_0 = 0$; $y'(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ Укас: $y = 0$

Унорм: $x - 2 = 0$.

№15

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{2 \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\overset{\to 1}{\sin x}}{2x\cos x} =$$

$= \frac{1}{2}$.

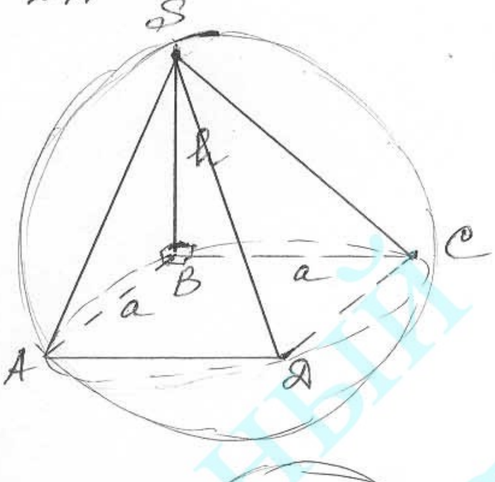
№16

$$\lim_{x\to+\infty} (x + 2^x)^{1/x} = A; \quad \ln A = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x + 2^x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+2^x} \cdot (1 + 2^x \cdot \ln 2)}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + 2^x \ln 2}{x + 2^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \cdot \ln^2 2}{1+2^x \cdot \ln 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \cdot \ln^3 2}{2^x \cdot \ln^2 2} = \ln 2.$$

№17



$V = 72$

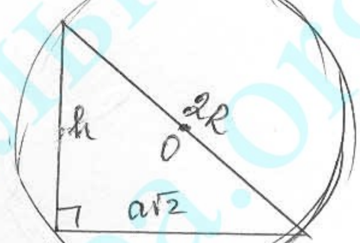
$h - ?$

$R \to min$

$V = \frac{1}{3}a^2 h \Rightarrow a^2 = \frac{3V}{h}$

Рассмотрим сечение плоскостью SBD: $\triangle SBD$ – прямоугольный $\Rightarrow$ $\angle B$ опирается на диаметр $\Rightarrow$

$SD = 2R$. $R = \sqrt{h^2 + 2a^2}$



Исследуем на минимум функцию

$R^2 = h^2 - 2a^2 = h^2 + \frac{6 \cdot 72}{h}$

$(R^2)' = 2h - \frac{432}{h^2} = \frac{2h^3 - 432}{h^2}$

$(R^2)' = 0$: $h^3 = 216$

$h = 6.$

Покажем, что при $h = 6$ R^2 достигает минимума:

h	$(0;6)$	6	$(6;+\infty)$
$(R^2)'$	$-$	0	$+$
R^2	$\searrow$	min	$\nearrow$

Очевидно что R достигает минимума в той же точке что и R^2.

Т.о., $h = 6$.

№18

$y = (x^2 + x) \cdot \ln(2x+1)$, $x_0 = 0$, $n = 5$

$$y \approx y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{y^{IV}(0)}{4!} x^4 + \frac{y^{V}(0)}{5!} \cdot x^5 + o(x^5).$$

$y(0) = 0.$

$y' = (2x+1)\ln(2x+1) + (x^2+x) \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot 2 \Rightarrow y'(0) = 0$

$y'' = 2\ln(2x+1) + (2x+1) \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot 2 + (2x+1) \cdot \frac{2}{2x+1} + (x^2+x) \cdot \frac{-2}{(2x+1)^2}$

$y''(0) = 4$

$$y''' = \frac{4}{2x+1} - 2\cdot\left(\cancel{(2x+1)}\cdot\frac{1}{(2x+1)^2} + (x^2+x)\cdot\frac{-2}{(2x+1)^3}\right)$$

$$y'''(0) = 2$$

$$y^{IV} = \frac{-2\cdot 2}{(2x+1)^2} + \cancel{(2x+1)}\cdot\frac{-2}{(2x+1)^{\cancel{3}\,2}} + (x^2+x)\frac{6}{(2x+1)^4}$$

$$y^{IV}(0) = -6$$

$$y^{V} = \frac{(-6)(-2)}{(2x+1)^3} + 6\cdot\cancel{(2x+1)}\cdot\frac{1}{(2x+1)^{\cancel{4}\,3}} + \frac{6\cdot(-4)(x^2+x)}{(2x+1)^5}$$

$$y^{V}(0) = -6$$

$$\Rightarrow y \sim 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + o(x^5).$$

N 19

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x^2 - \ln(1-3x^2)}{1-\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{G(x)} = L$$

$$\sin 4x^2 \sim 4x^2 - \frac{1}{3!}(4x^2)^3 + \dots$$

$$\ln(1-3x^2) \sim -3x^2 - \frac{(-3x^2)^2}{2} + \dots$$

$$\Rightarrow F(x) \sim 7x^2 + \frac{9}{2}x^4 + \dots$$

$$\cos\frac{x}{2} \sim 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots$$

$$\Rightarrow G(x) \sim \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}x^4 + \dots$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to 0}\frac{7x^2 + \frac{9}{2}x^4 + \dots}{\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4!\,2^4}x^4 + \dots} = 56$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{100} - \sqrt{1+200x}}{\ln(1+10x) - \sin 10x} = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{G(x)} = L$$

$$(1+x)^{100} \sim 1 + 100x + \frac{1}{2!}(100\cdot 99)\cdot x^2 + \dots$$

$$(1+200x)^{\frac{1}{2}} \sim 1 + \frac{1}{2}\cdot 200x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(200x)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow F(x) \sim \left(\frac{9900}{2} + \frac{40000}{8}\right)x^2 + \dots = 9950x^2 + \dots$$

$$\ln(1+10x) \sim 10x - \frac{100x^2}{2} + \frac{1000x^3}{3} + \dots$$

$$\sin 10x \sim 10x - \frac{1000x^3}{3!} + \dots \Rightarrow G(x) \sim -50x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow L = \lim \frac{9950x^2+\ldots}{-50x^2+\ldots} = \underline{-199}.$$

№20

$$y = \frac{-x^3}{x^2+2x+1}$$

1. $D(y): x \neq -1$

2. Область определения не симметрична относительно начала координат $\Rightarrow$ функция ни четная ни нечетная.

3. $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3}{x^3+2x^2+x} = -1 = k$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^3}{x^2+2x+1}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2+2x+1} =$$
$$= 2 = b$$

$\Rightarrow y = -x+2$ - наклонная асимптота при $x\to\infty$

4. $$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to-1-}\frac{-x^3}{x^2+2x+1} = \left[\frac{-(-1)^3}{(-1-0-1)^2}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1+} f(x) = \lim_{x\to-1+}\frac{-x^3}{(x+1)^2} = \left[\frac{-(-1)^3}{(-1+0+1)^2}\right] = +\infty$$

$\Rightarrow x=-1$ - точка разрыва II рода, а прямая $x=-1$ - вертикальная асимптота.

5. $$y' = \frac{-3x^2(x^2+2x+1)+(2x+2)\cdot x^3}{(x+1)^4} =$$
$$= \frac{-3x^2(x+1)+2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^2(-3x-3+2x)}{(x+1)^3} = \frac{-x^2(x+3)}{(x+1)^3}$$

$y'=0$: $x=0$; $x=-3$; $y' \nexists$: $x=-1 \notin D(y)$

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$-$
y	↘	min	↗	↘	↘	↘

$y(0)=0$

$y(-3) = \frac{27}{4}$

6. $$y'' = \frac{(-2x(x+3)-x^2)\cdot(x+1)^3 + x^2\cdot(x+3)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} =$$
$$= \frac{(3-3x^2)(x+1)+3x^2(x+3)}{(x+1)^4} = \frac{3x-\cancel{3x^3}+3-3x^2+\cancel{3x^3}+9x^2}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{6x^2+3x+3}{(x+1)^4} = \frac{(2x^2+x+1)\cdot 3}{(x+1)^4}$$

$y''>0 \ \forall x \in D(y) \Rightarrow$ функция выпукла вниз на всей области определения.

На основании проведенного исследования строим график

№21

$$y = -\sqrt[3]{(x^2-2)^4} = -(x^2-2)^{4/3}$$

1. $D(y): x \in R$
2. Область определения симметрична относительно начала координат и
$y(-x) = -\sqrt[3]{(x^2-2)^4} = y(x) \Rightarrow$ функция четная
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} -\sqrt[3]{\frac{(x^2-2)^4}{x^3}} = \infty \Rightarrow$
наклонных и горизонтальных асимптот нет.
4. Функция определена $\forall x \in R \Rightarrow$ вертикальных асимптот нет
5. $y' = -\frac{4}{3}(x^2-2)^{1/3}\cdot 2x = -\frac{8}{3}x\cdot(x^2-2)^{1/3}$

$y'=0;\ x=0,\ x=\pm\sqrt{2}$

x	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2};0)$	0	$(0;\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};+\infty)$
y'	+	0	−	0	+	0	−
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$f(0) = -2\sqrt[3]{2}$

$f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 0$

6. $y'' = -\frac{8}{3}(x^2-2)^{\frac{1}{3}} - \frac{8}{3}x\cdot\frac{1}{3}(x^2-2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x =$

$$= \frac{-24(x^2-2)-16x^2}{\sqrt[3]{(x^2-2)^2}} = \frac{-40x^2+48}{\sqrt[3]{(x^2-2)^2}} = -40\,\frac{x^2-1{,}2}{\sqrt[3]{(x^2-2)^2}}$$

$y''=0:\ x=\pm\sqrt{1{,}2}\,;\ y''\ \nexists:\ x=\pm\sqrt{2}$

x	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2};-\sqrt{1{,}2})$	$-\sqrt{1{,}2}$	$(-\sqrt{1{,}2};\sqrt{1{,}2})$	$\sqrt{1{,}2}$	$(\sqrt{1{,}2};\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};+\infty)$
y''	−	$\nexists$	−	0	+	0	−	$\nexists$	−
y	$\frown$	−	$\frown$	$\sim$	$\smile$	$\sim$	$\frown$	−	$\frown$

На основании проведенного исследования строим график (рис 2. f_{21})

№22

$y = x^2 - \ln|x|$

1. $D(y): x \neq 0$
2. Область определения симметрична относительно начала координат и $y(-x) = x^2 - \ln|x| = y(x) \Rightarrow$ функция четная.

Построим график для $x>0$, а потом отобразим симметрично на $x<0$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x - \frac{1}{x}}{1} = +\infty \Rightarrow$ наклонных и горизонтальных асимптот нет
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 - \ln x) = +\infty \Rightarrow x=0$ - точка разрыва II рода, прямая $x=0$ - верт. асимптота
5. $y' = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$

$y'=0: x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $y' \nexists: x = 0 \notin D(y)$

x	$(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$

$y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln 2$

6. $y'' = \dfrac{4x\cdot x - 2x^2 + 1}{x^2} = \dfrac{2x^2+1}{x^2}$

$y''>0 \ \forall x \in D(y) \Rightarrow$ функция выпукла вниз $\forall x \in D(y)$.

На основании проведенного исследования строим график (рис3.jpg)

№23

$\rho = 5(1-\cos 2\varphi)$, $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$1 - \cos 2\varphi \geq 0 \ \forall \varphi \Rightarrow$ дополнительных ограничений на φ нет.

$\varphi: 0 \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho: 0 \to 10$

$\varphi: \frac{\pi}{2} \to \pi \Rightarrow \rho: 10 \to 0$

$\varphi: \pi \to \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \rho: 0 \to 10$

$\varphi: \frac{3\pi}{2} \to 2\pi \Rightarrow \rho: 10 \to 0$.

Строим график: рис4.jpg.

№24

$$z=\ln tg(x-y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{tg(x-y)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x-y)}=\frac{2}{\sin 2(x-y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{tg(x-y)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x-y)}\cdot(-1)=\frac{-2}{\sin 2(x-y)}$$

№25

$$z=e^x(x\sin y+y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x(x\sin y+y^2+\sin y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=e^x(x\cos y+2y+\cos y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^x(x\cos y+2y) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x(x\cos y+2y+\cos y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

№26

$$u=2x^2+y^2+3z^2+xy+xz-4x-2y+z$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=4x+y+z-4=0\\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y+x-2=0\\ \frac{\partial u}{\partial z}=6z+x+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x+\frac{2-x}{2}-\frac{x+1}{6}-4=0\\ y=\frac{2-x}{2}\\ z=\frac{-x-1}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 24x+6-3x-x-1-24=0$$

$$20x=19 \Rightarrow x=\frac{19}{20}$$

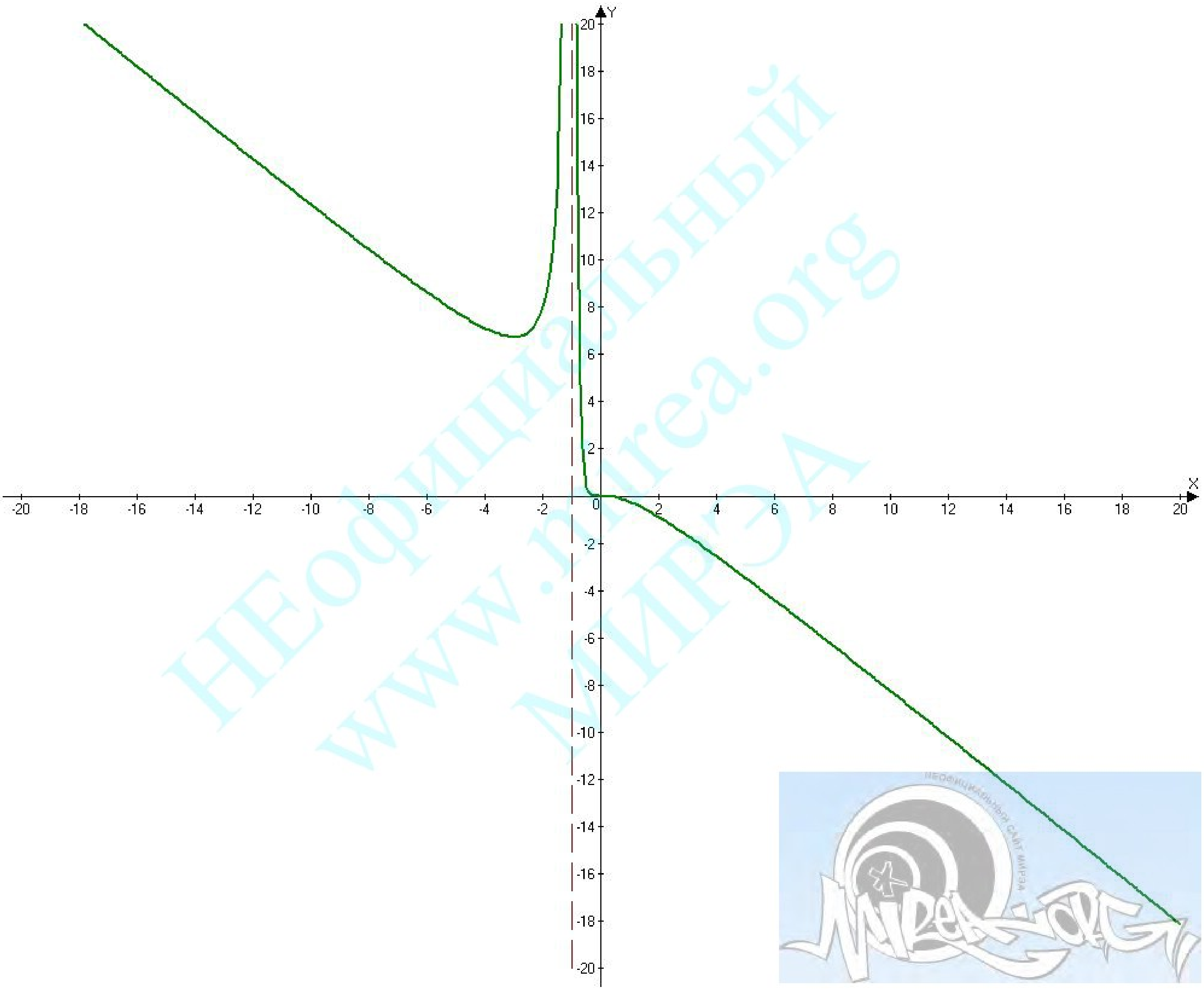
$$y=\frac{21}{40};\ z=-\frac{39}{120}$$

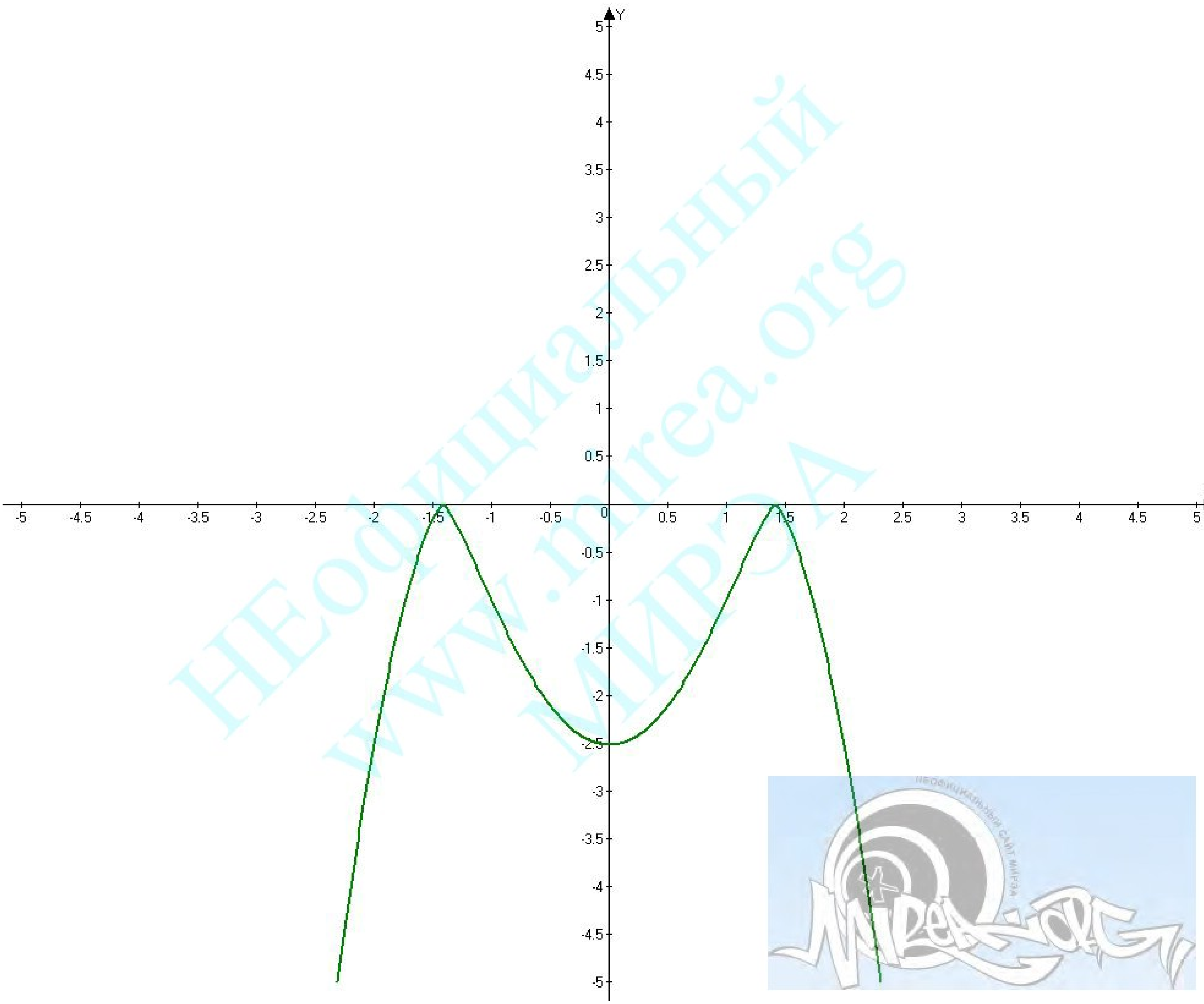
Найдем

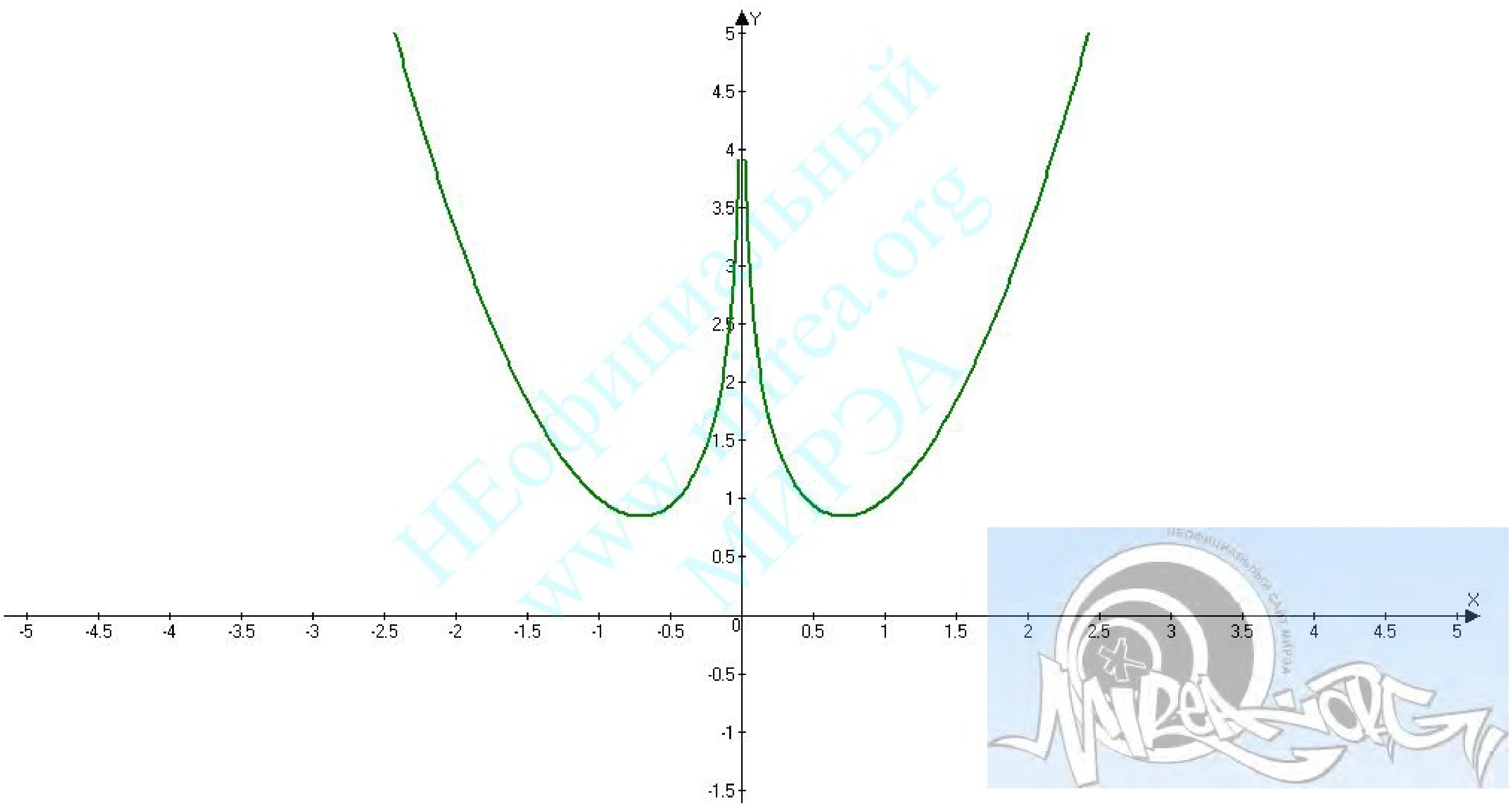
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2;\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=6;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=1;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0$$

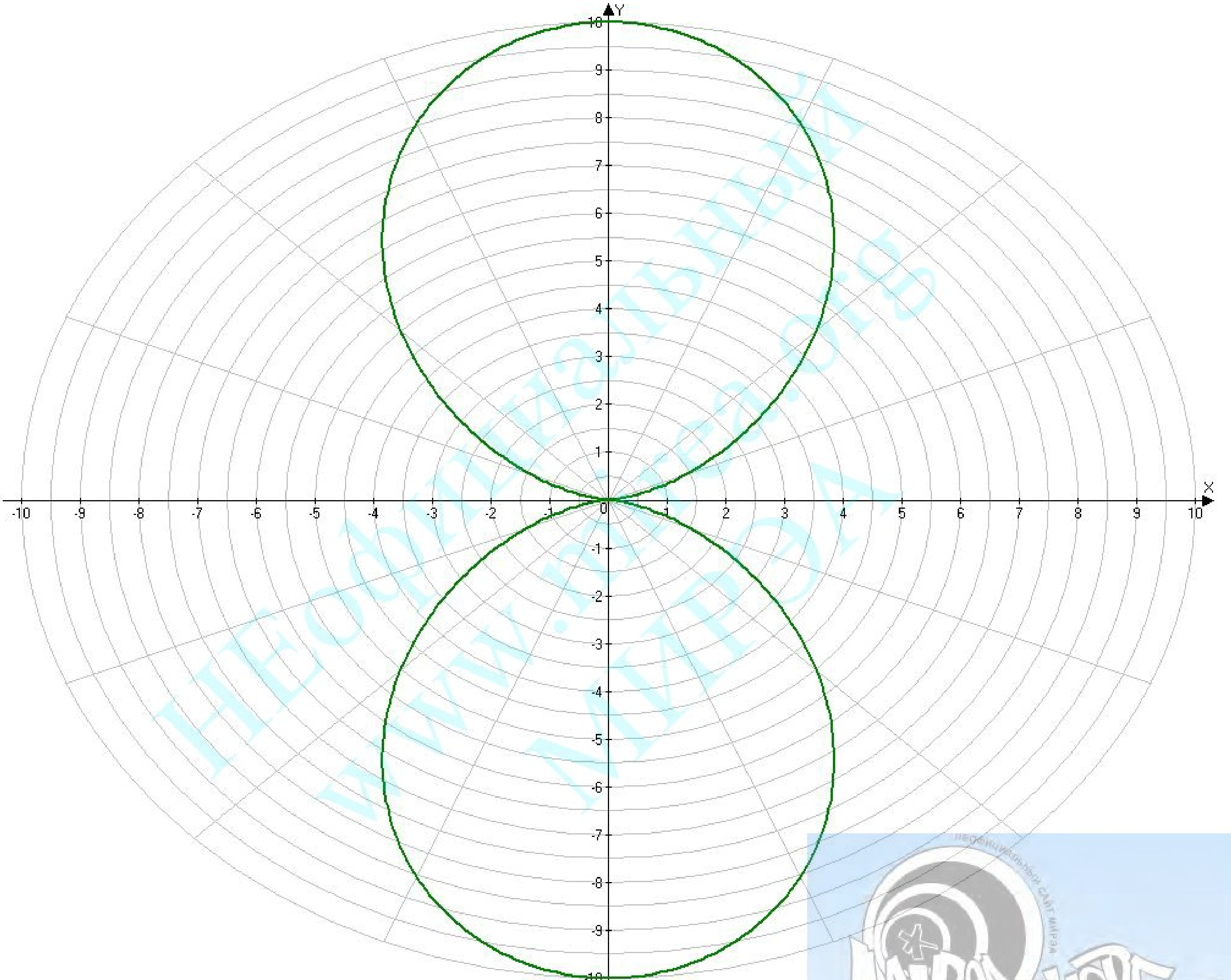
$$\Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}4&1&1\\1&2&0\\1&0&6\end{vmatrix};\quad \Delta_1=4>0;\quad \Delta_2=8-2=6>0;\quad \Delta_3=-2+6(8-2)=34>0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{19}{20};\frac{21}{40};-\frac{39}{120}\right)$$ – точка минимума функции $u(x,y,z)$.


Y
X
-20 -18 -16 -14 -12 -10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
20 18 16 14 12 10 8 6 4 2 -2 -4 -6 -8 -10 -12 -14 -16 -18 -20


Y
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-4.5
-5
-5 -4.5 -4 -3.5 -3 -2.5 -2 -1.5 -1 -0.5 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5


Y
X
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-5 -4.5 -4 -3.5 -3 -2.5 -2 -1.5 -1 -0.5 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5


Y
X
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10