Лекция 2. Основные теоремы теории вероятностей

Условная вероятность. Независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Производящие функции. Пуассоновский предел. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

2.1. Теорема сложения вероятностей

Как было доказано в лекции 1 (теорема 1.2) вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей (формула 1.16). Из этой теоремы следует очевидное следствие:

Следствие 2.1. *Вероятность суммы n попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей:*

$$P(A_1+\ldots+A_n) = P(A_1)+\ldots+P(A_n), \text{ если } A_iA_j = V \text{ при } i \neq j. \quad (2.1)$$

В общем случае верна следующая теорема:

Теорема 2.1 (Теорема сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их произведения:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.2)$$

Доказательство. Обозначим n — общее число возможных элементарных исходов, m_1 — число исходов, благоприятствующих событию A, m_2 — число исходов, благоприятствующих событию B, m — число исходов, благоприятствующих одновременному наступлению событий A и B (см. рис. 2).

Как видно из рис. 2, количество исходов, благоприятствующих событию A+B, равно m_1+m_2-m.

Следовательно:

$$P(A+B) = \frac{m_1+m_2-m}{n} =$$
$$= \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Пример 2.1. *Найти вероятность появления карты пиковой масти или туза при однократном вынимании карты из колоды в 36 карт.*

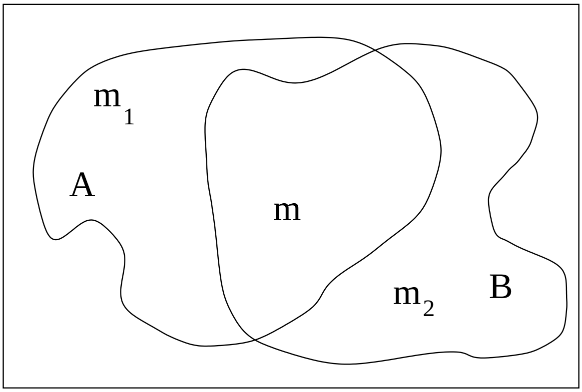

Рис. 2. *Иллюстрация теоремы сложения вероятностей*

►Обозначим A — появление карты пиковой масти,
B — появление туза и найдем вероятность $P(A+B)$. Очевидно:

$$P(A)=\frac{1}{4},\quad P(B)=\frac{1}{9},\quad P(A\cdot B)=\frac{1}{36}.$$

В соответствии с формулой (2.2), получаем:

$$P(A+B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{36}=\frac{1}{3}\approx 0{,}333.◄$$

2.2. Теорема произведения вероятностей

Определение 2.1. *Условной вероятностью $P(A/B)=P_B(A)$ называют вероятность события A, вычисленную в предположении того, что событие B уже наступило.*

Пример 2.2. *В урне 3 белых и 3 чёрных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие A) при условии, что в первом испытании появился чёрный шар (событие B).*

►После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая вероятность равна:

$$P(A/B)=3/5=0{,}6.$$

Отметим, что безусловная вероятность события A меньше условной:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5,$$

т.к. в последнем случае отсутствует информация относительно исхода первого испытания.◀

Теорема 2.2 (Теорема произведения вероятностей). *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{2.3}$$

Доказательство. Обозначим n — общее количество возможных элементарных исходов, m_1 — число исходов, благоприятствующих событию A, m — число исходов из числа m_1, благоприятствующих событию B (рис. 2).

Очевидно: $P(A) = m_1/n, \quad P(A \cdot B) = m/n, \quad P(B/A) = m/m_1.$

Таким образом:

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m}{m_1} = P(A) \cdot P(B/A).$$

Следствие 2.2. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятностей одного из них на условные вероятности всех остальных:*

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \tag{2.4}$$

Определение 2.2. *Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятность события B:*

$$P(B/A) = P(B). \tag{2.5}$$

Легко показать, что свойство независимости событий взаимно. Действительно, в соответствии с (2.3) и с учётом формулы (2.5):
$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$. С другой стороны,
$P(A \cdot B) = P(B \cdot A) = P(B) \cdot P(A/B)$, откуда, $P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A/B)$ и $P(A/B) = P(A)$, т.е. в этом случае событие A независимо от события B и их называют *независимыми.*

Для независимых событий, с учётом определения 2.2, теорема произведения вероятностей 2.3 принимает следующий вид.

Теорема 2.3. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей.*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{2.6}$$

Определение 2.3. *Несколько событий называют независимыми в совокупности, если каждое событие независимо со всеми остальными событиями и их возможными произведениями.*

Отметим, что если каждые два события в группе независимы, это ещё не означает их независимости в совокупности. В этом смысле требование независимости в совокупности сильнее требования попарной независимости.

С учётом следствия 2.2 получаем следующее утверждение:

Следствие 2.3. *Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей:*

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n).$$

Теорема 2.4. *Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности единицы и произведения вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2, \dots,$ $\bar{A}_n$:*

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\dots P(\bar{A}_n).$$

Доказательство. Обозначим $\bar{A}$ — противоположное к А событие, состоящее в ненаступлении ни одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots, \bar{A}_n.$$

В силу независимости событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots \bar{A}_n$ будут так же независимы в совокупности и

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\dots P(\bar{A}_n), \quad \text{откуда}$$
$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\dots P(\bar{A}_n).$$

Следствие 2.4. *Если события A_1, A_2, $\dots$, A_n независимы в совокупности и имеют одинаковую вероятность появления p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий (событие A) равна:*

$$P(A) = 1 - (1-p)^n. \tag{2.7}$$

Пример 2.3. *Из колоды в 36 карт сразу вынимают 2 карты. Какова вероятность того, что среди них не будет карты пиковой масти (Событие A)?*

►Для того, чтобы произошло искомое событие A, необходимо чтобы одновременно произошли два события: A_1 – первая вынутая карта не пиковая; A_2 – вторая вынутая карта не пиковая. Эти события зависимы, поэтому

$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)$.

$P(A_1) = 24/36$. Так как событие A_1 произошло, т.е. вынули карту не пиковой масти. Поэтому в колоде уже не 36, а 35 карт, причём карт не пиковой масти осталось 23. Поэтому $P(A_2/A_1) = 23/35$.

Следовательно, $P(A) = \dfrac{24}{36} \cdot \dfrac{23}{35} = \dfrac{24 \cdot 23}{36 \cdot 35} = \dfrac{46}{105} \approx 0{,}438$.◄

Ответ: $\dfrac{46}{105} \approx 0{,}438$.

Эту задачу можно решить другим способом, используя классическое определение вероятностей и формулы для сочетаний.

►$P(A) = \dfrac{m}{n}$, где $n = C_{36}^2$ — число всевозможных исходов данного испытания, а $m = C_{24}^2$ — число исходов благоприятствующих появлению события A.

$$P(A) = \frac{C_{24}^2}{C_{36}^2} = \frac{24! \quad 2! \cdot 34!}{2! \cdot 22! \quad 36!} = \frac{24 \cdot 23}{36 \cdot 35} = \frac{46}{105} \approx 0{,}438.◄$$

Пример 2.4. *Из партии, содержащей 100 одинаковых деталей, для контроля партии извлекаются 5 деталей. Условием непригодности всей партии является появление хотя бы одной бракованной детали среди контролируемых. Какова вероятность того, что партия будет принята, если она содержит 5% неисправных деталей?*

► Пусть A — искомое событие. A_i – событие, состоящее в том, что i – ая проверяемая деталь исправна, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Очевидно, $A = A_1A_2A_3A_4A_5$.

Применяем теорему о произведении вероятностей для n событий (2.4)

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_2/A_1A_2) \cdot P(A_3/A_1A_2A_3) \cdot P(A_4/A_1A_2A_3A_4) \times$$
$$\times P(A_5/A_1A_2A_3A_4) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{93}{97} \cdot \frac{91}{96} = \frac{8277217}{10755360} \approx 0{,}7696.◄$$

Ответ: $\dfrac{8277217}{10755360} \approx 0{,}7696$.

Пример 2.5. *В урне 2 белых и 4 черных шара. Два игрока поочередно извлекают шар (без возвращения). Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар*

►Возможные исходы данного опыта заканчиваются вытаскиванием белого шара – событие $A_б$:
$A_б,\ A_ч A_б,\ A_ч A_ч A_б,\ A_ч A_ч A_ч A_ч A_б,\ A_ч A_ч A_ч A_ч A_б.$

Исходы в которых выиграет первый участник (событие A_1):
$A_1 = A_б + A_ч A_ч A_б + A_ч A_ч A_ч A_ч A_б.$

Исходы в которых выиграет второй участник (событие A_2):
$A_2 = A_ч A_б + A_ч A_ч A_ч A_б.$

Найдём вероятности этих событий.

$$P(A_1) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5}.$$
$$P(A_2) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2}{5}.◄$$

Ответ: $P(A_1) = \dfrac{3}{5}$; $P(A_2) = \dfrac{2}{5}$.

Пример 2.6. *На пути движения автомашины до конечного пункта 3 светофора, каждый из которых либо разрешает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью $p = 0{,}3$, либо запрещает с вероятностью $q = 0{,}7$. Найти вероятность, что число остановок автомобиля на светофорах равно: а) 0; б) 1; в) 2 г) 3?*

►Обозначим: A – события состоящие в том, что автомобиль без остановки проезжает текущий светофор.

По условию задачи $P(A) = p = 0{,}3 \Rightarrow P(\overline{A}) = q = 0{,}7$;
A_i – события состоящие в том, что автомобиль проедет первые i светофоров без остановки. Найдем вероятности $P(A_i)$, происхождения данных событий.

а) Событие A_0 означает, что автомобиль проехал все три светофора без остановок. Это можно записать следующей формулой: $A_0 = A \cdot A \cdot A$. Так как события независимы, то применяем формулу (2.3). Получаем $P(A_0) = P(A)\cdot P(A)\cdot P(A) = p^3 = 0{,}027$.

б) Событие A_1 означает, что автомобиль проехал два светофора без остановок и один с остановкой (остановился на первом, втором или третьем светофорах). Это можно записать следующей формулой: $A_1 = \overline{A}\cdot A\cdot A + A\cdot\overline{A}\cdot A + A\cdot A\cdot\overline{A}$.

Получаем $P(A_1) = q\cdot p\cdot p + p\cdot q\cdot p + p\cdot p\cdot q = 3\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3^2 = 0{,}189$.

в) Событие A_2 означает, что автомобиль проехал один светофор без остановки и на двух останавливался (не остановился на первом, втором или третьем светофорах). Это можно записать следующей формулой: $A_2 = A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} + \cdot\overline{A} \cdot A \cdot \overline{A} + \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot A$.

Получаем $P(A_2) = p \cdot q \cdot q + q \cdot p \cdot q + q \cdot q \cdot p = 3 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}441$.

г) Событие A_3 означает, что автомобиль останавливался на всех трёх светофорах, т.е. $A_3 = \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \overline{A}$. $P(A_3) = q^3 = 0{,}7^3 = 0{,}343$.

Сумма независимых событий A_0, A_1, A_2, A_3 образуют полную группу. Поэтому
$P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}027 + 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 1$.◀

Ответ: а) 0,027; б) 0,189; в) 0,441; г) 0,343.

Пример 2.7. *Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз.*

▶Обозначим A — событие: «при n выстрелах стрелок попадает в цель хотя бы один раз». В силу независимости отдельных попаданий применима формула (2.7):

$$P(A) = 1 - (1 - 0{,}4)^n.$$

Приняв во внимание условие $P(A) \geqslant 0{,}9$, получаем неравенство: $1 - 0{,}6^n \geqslant 0{,}9$, откуда: $n \ln 0{,}6 \leqslant \ln 0{,}1$ и, т.к. $\ln 0{,}6 < 0$, получаем: $n \geqslant \ln 0{,}1 / \ln 0{,}6$. Поскольку $\ln 0{,}1 / \ln 0{,}6 \approx 4{,}5$ получаем: $n \geqslant 5$.◀

Ответ: $\geqslant 5$.

2.3. Надёжность схем

Пример 2.8. *Релейная схема состоит из 10 элементов трёх типов A_1, A_2 и A_3, рис. 3,а). Вероятность того, что за время T элементы не выйдут из строя известна и равна: $P(A_1) = 0{,}7$, $P(A_2) = 0{,}6$, $P(A_3) = 0{,}9$. Найти вероятность безотказной работы схемы.*

▶ Событие состоящее в том, что схема работает безотказно в течении времени T обозначим A. Вероятность такого события A называется надёжностью схемы. Обозначим надёжности элементов $P(A_1) = p_1 = 0{,}7, P(A_2) = p_2 = 0{,}6$, $P(A_3) = p_3 = 0{,}9$.

Тогда вероятности отказа элементов $q_i = 1 - p_i$ будут равны $P(\overline{A_1}) = q_1 = 0{,}3, P(\overline{A_2}) = q_2 = 0{,}4, P(\overline{A_3}) = q_3 = 0{,}1$.

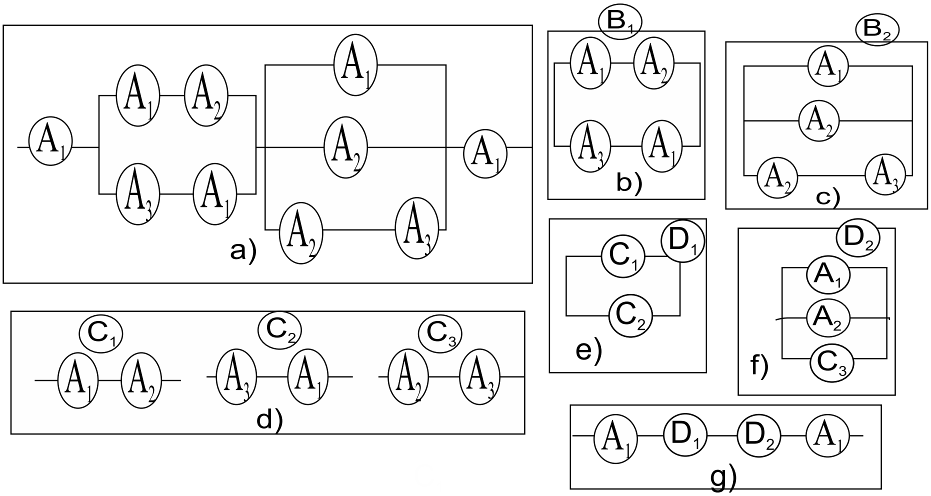

Рис. 3. *Пример 2.8*

Выделим из исследуемой схемы блоки B_1 рис. 3,b) и B_2, рис. 3,c). Найдём их надёжность. Блок B_1 в свою очередь состоит их двух параллельно соединённых блоков содержащих по два последовательных элемента, назовём их C_1 и C_2, рис. 3,d). В блоке B_2 также выделим аналогичный блок C_3.

Найдём надёжность блоков C_1, C_2 и C_3, состоящих из двух последовательных элементов. Эти блоки будут работоспособны, когда работают оба элемента. Так как они работают независимо друг от друга, поэтому можно применить теорему о вероятности произведения двух независимых событий.

$P(C_1) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}42$, $P(C_2) = P(A_1) \cdot P(A_3) =$ $= p_1 \cdot p_3 = 0{,}63$, $P(C_3) = P(A_2) \cdot P(A_3) = p_2 \cdot p_3 = 0{,}54$.

Найдём теперь надёжность блоков B_1 и B_2. С учётом обозначений рис. 3,d), получаем схемы параллельно соединённых элементов, рис. 3,e) и f).

При параллельном соединении элементов схема работоспособна, когда работает хотя бы один элемент. Для определения надёжности параллельного блока находим сначала вероятность противоположного события — вероятность того, что блок вышел из строя, т.е. что все элементы неработоспособны, а затем применяем формулу для противоположного события.

$P(D_1) = 1-P(\overline{C_1})\cdot P(\overline{C_2}) = 1-(1-P(C_1))\cdot(1-P(C_2)) = 1-0{,}58\cdot 0{,}37 =$
$= 1 - 0{,}2146 = 0{,}7854.$
$P(D_2) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{C_3}) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \times$
$\times (1 - P(C_3)) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}46 = 1 - 0{,}0552 = 0{,}9448.$

Наконец, заменяем блоки B_1 и B_2 элементами D_1 и D_2, получаем схему четырёх последовательных блоков, рис. (3,g). Используя теорему о произведении вероятностей для несовместных событий, получаем $P(A) = P(A_1) \cdot P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(A_1) = 0{,}7^2 \cdot 0{,}7854 \cdot 0{,}9448 = 0{,}3636.$◄

Замечание 2.1. *Для определения вероятности отказа схемы $Q = P(\overline{A})$,находим сначала надёжность схемы $P = P(A)$, а затем находим вероятность противоположного события $Q = P(\overline{A}) = = 1 - P(A)$.*

Для тех кто не понял решения примера (2.8) рассмотрим более простые задачи на электрические цепи.

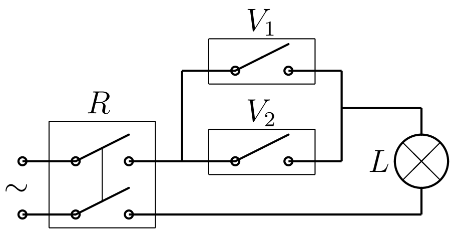

Рис. 4. К примеру 2.9

Пример 2.9. *В электрической цепи (рис. 4) выключатели V_1 и V_2 независимо замкнуты с вероятностями $p_1 = 0{,}2$ и $p_2 = 0{,}6$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника R лампочка L: а) загорится б)не загорится?*

Пусть A_1 – событие состоящее в том, что лампочка загорится. Тогда противоположное событие $\overline{A_1} = A_2$ — лампочка не загорится.

а) ►При параллельной коммутации выключателей лампочка L загорается, если замкнут хотя бы один выключатель, и не загорается, если все они одновременно разомкнуты.

Поэтому находим вероятность того, что оба выключатели разомкнуты

$P(A_2) = P(\overline{A_1}) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32.$

$P(A_1) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}32 = 0{,}68.$◄

б) Задача решена в процессе решения задачи а).

Ответ: а) 0,68; б) 0,32.

Пример 2.10. *В электрической цепи (рис. 4) выключатели V_1 и V_2 независимо разомкнуты с вероятностями $q_1 = 0{,}2$ и $q_2 = 0{,}6$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника R лампочка L: а) загорится б)не загорится?*

►Обозначим A_1, A_2 — искомые события для задачи а) и б), соответственно.

В данном примере заданы вероятности q_1 и q_2 разомкнутости выключателей. Вероятности замкнутости выключателей равны $p_1 = 1 - q_1 = 0{,}8$ и $p_2 = 1 - q_2 = 0{,}4$. Но для решения данной задачи они не понадобятся.

а)►Лампочка загорится когда будет замкнут хотя бы один выключатель. Следовательно, применяем формулу $P(A_1) = 1 - P(\overline{A_1})$.
$P(\overline{A_1}) = q_1 \cdot q_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12. \Rightarrow P(A_1) = 0{,}88.$◄

б) ►$P(A_2) = q_1 \cdot q_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12.$ ◄◄

Ответ: а) 0,88) 0,12.

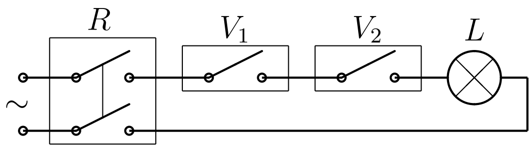

Рис. 5. Последовательное соединение двух элементов

Пример 2.11. *В электрической цепи (рис. 5) выключатели V_1 и V_2 независимо разомкнуты с вероятностями $q_1 = 0{,}3$ и $q_2 = 0{,}1$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника R лампочка L: а) загорится (событие A_1) б)не загорится (событие A_2)?*

► В данном примере заданы вероятности разомкнутости выключателей (q_1 и q_2). Вероятности замкнутости выключателей равны $p_1 = 1 - q_1 = 0{,}7$ и $p_2 = 1 - q_2 = 0{,}9$.

а) ►Очевидно, что лампочка загорится когда оба выключателя замкнуты. Следовательно,

$P(A_1) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63.$◄

б) ►Лампочка не загорится когда хотя бы один выключателя разомкнут. Поэтому найдём вероятность противоположного события которым является событие состоящее в том, что оба выключателя замкнуты.

$P(\overline{A_2}) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63.$

$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}63 = 0{,}37.$◄◄

Ответ: а) 0,63 б) 0,37.

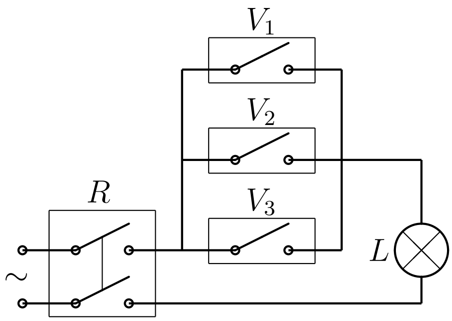

Рис. 6. Параллельное соединение трёх элементов

Пример 2.12. *В электрической цепи (рис. 6) выключатели V_1, V_2 и V_3 независимо замкнуты (или разомкнуты) с вероятностями $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}6$ и $p_3 = 0{,}3$ соответственно. С какой вероятностью при включении рубильника R лампочка L: а) загорится; б) не загорится?*

►Введём события: A_1 — лампочка загорится, а A_2 — лампочка не загорится.

а, б) Лампочка загорится при включении рубильника R когда будет замкнут хотя бы один выключатель. Поэтому находим вероятность того, что все выключатели разомкнуты. Это и будет решением задачи б). $P(A_2) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}224.$

Теперь находим вероятность противоположного события означающего, что лампочка загорится.

$P(A_1) = 1 - F(A_2) = 0{,}776.$◄

Ответ: а) 0,77 б) 0,224.

2.4. Схема гипотез. Формула полной вероятности

Теорема 2.5 (Формула полной вероятности). *Вероятность события A, которое может наступить только вместе с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2 \dots H_n$, называемых гипотезами, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:*

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \dots \\ \dots + P(H_n)P(A/H_n). \tag{2.8}$$

Кратко эту формулу можно записать в виде

$$P(A) = \sum_{i=k}^{n} P(H_k)P(A/H_k).$$

Доказательство. По условию, появление события A означает осуществление одного из попарно несовместных событий: $H_1A,\ H_2A, \dots, H_nA$. Пользуясь следствием 2.1 из теоремы сложения и теоремой произведения вероятностей, получаем:

$$P(A) = P(H_1A + \dots + H_nA) = P(H_1A) + \dots + P(H_nA) = \\ = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \dots + P(H_n)P(A/H_n).$$

Пример 2.13. *Пять экзаменаторов принимают экзамен. Известно, что вероятность сдать экзамен двум из них («строгим» равна 0,6, а трём остальным («нестрогим») 0,8 . Найти вероятность сдать экзамен произвольному экзаменатору.*

►Обозначим A — событие «экзамен сдан». Экзамен может быть сдан либо «строгому» экзаменатору (гипотеза H_1), либо «нестрогому» (гипотеза H_2):

$$P(H_1) = 2/5 = 0{,}4; \qquad P(H_2) = 3/5 = 0{,}6.$$

Условные вероятности сдать экзамен:

$$P(A/H_1) = 0{,}6; \qquad P(A/H_2) = 0{,}8.$$

Искомая вероятность определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0{,}72.◄$$

Ответ: 0,72.

Пример 2.14. *Детали с трёх конвейеров поступают на общий склад. Вероятности брака на первом, втором и третьем конвейерах равны* $p_1 = \dfrac{1}{3}$, $p_2 = \dfrac{5}{7}$ *и* $p_3 = \dfrac{2}{5}$. *Отношение производительностей линий* $V_1 : V_2 : V_3 = 4 : 7 : 3$. *С какой вероятностью наугад взятая деталь будет бракованной?*

► Искомое событие A наблюдается на фоне трёх гипотез $H_i = \{$деталь с i-го конвейера$\}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Из отношения производительности конвейеров $4 : 7 : 3$ следует, что из каждых $4+7+3 = 14$ деталей в среднем 4 сходят с 1-го конвейера, 7 — со второго и 3 — с третьего.
Значит, $P(H_1) = \dfrac{4}{14}$, $P(H_2) = \dfrac{7}{14}$, $P(H_3) = \dfrac{3}{14}$.

Данные вероятности $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}7$ и $p_3 = 0{,}4$ есть не что иное, как $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$ и $P(A/H_3)$. Подставим все значения в формулу (2.8):

$$P(A) = \frac{4}{14}\cdot\frac{1}{3} + \frac{7}{14}\cdot\frac{5}{7} + \frac{3}{14}\cdot\frac{2}{5} = \frac{113}{210}.◄$$

Ответ: $\dfrac{113}{210}$.

2.5. Формула Байеса

Теорема 2.6 (Формула Байеса)**.** *В условиях формулы полной вероятности для* $i = 1, \ldots, n$*:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n)}. \qquad (2.9)$$

Доказательство. По теореме произведения вероятностей:

$$P(H_i \cdot A) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i),$$

откуда с использованием формулы полной вероятностей для $P(A)$ получаем:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}.$$

Формула Байеса позволяет пересчитывать вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого произошло событие A.

Пример 2.15. *В условиях примера 2.13 известно, что студент сдал экзамен. Найти вероятность того, что он сдавал «нестрогому» экзаменатору.*

►По формуле Байеса:
$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2)} =$$
$$= \frac{0{,}6\cdot 0{,}8}{0{,}4\cdot 0{,}6 + 0{,}6\cdot 0{,}8} = \frac{2}{3}.◄$$

Пример 2.16. *В двух урнах находятся шары: в первой – 4 белых и 6 черных, во второй – 5 белых и 3 черных. Из первой урны во вторую наудачу переложили два шара, а затем из второй урны наудачу извлекли один шар. 1) Найти вероятность того, что этот шар белый. 2) Шар, извлеченный из второй урны, оказался белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара.*

1) ►Пусть A – искомое событие: из второй урны извлечен белый шар. Возможны 3 гипотезы: H_1 – из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара; H_2 – из первой урны во вторую были переложены один белый и один чёрный шар; H_3 – из первой урны во вторую были переложены 2 чёрных шара. Вероятности осуществления гипотез равны

$$P(H_1) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}, \quad P(H_2) = \frac{C_4^1\cdot C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}, \quad P(H_3) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}.$$

Если гипотезы выполняются, то условные вероятности осуществления события A будут равны

$$P(A/H_1) = \frac{5+2}{5+3+2} = 0{,}7, \quad P(A/H_2) = 0{,}6, \quad P(A/H_3) = 0{,}5.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= \frac{2}{15}\cdot 0{,}7 + \frac{8}{15}\cdot 0{,}6 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}5 = 0{,}58.◄$$

2) ►Во втором случае необходимо уточнить вероятность наступления гипотезы H_1. По формуле Байеса находим

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{(2/15)\cdot 0{,}7}{0{,}58} = 0{,}16.◄$$

Ответ: 1)0,58, 2) 0,16.

Пример 2.17. *Всхожесть моркови составляет* 60%, *свёклы —* 80%. *В лаборатории посадили по одному семени каждого овоща. Пророс один росток. Какова вероятность, что это:* (1) *морковь;* (2) *свёкла?*

(1)►Сформулируем набор гипотез, на фоне которых наблюдается событие $A = \{$взошёл один росток$\}$. Пусть

$$H_1 = \{\text{морковь взошла}\},\ P(H_1) = 0{,}6,$$

$$H_2 = \{\text{морковь не взошла}\},\ P(H_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

В условиях гипотезы H_1 событие A равносильно тому, что свёкла не взошла, и $P(A/H_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. В условиях гипотезы H_2 для выполнения события A надо, чтобы взошла свёкла; $P(A/H_2) = 0{,}8$. По формуле (2.9)

$$P(H_1/A) = \frac{0{,}6\cdot 0{,}2}{0{,}6\cdot 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}8} = \frac{3}{11}.◄$$

Ответ: $\frac{3}{11}$.

(2) ►$P(H_2/A) = \frac{0{,}4\cdot 0{,}8}{0{,}6\cdot 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}8} = \frac{0{,}32}{0{,}44} = \frac{8}{11}$.◄

Ответ: $\frac{8}{11}$.

Пример 2.18. *В первой урне 5 белых и 8 чёрных шаров, во второй — 7 белых и 6 чёрных. Из каждой урны вынимают по шару. Они оказались разноцветными. Найти вероятность того, что белый шар вынут:*

(1) *из первой урны;* (2) *из второй урны.*

► Примем

$H_1 = \{$шар, вынутый из первой урны, белый$\}$, $P(H_1) = \frac{5}{13}$,

$H_2 = \{$шар, вынутый из второй урны, белый$\}$, $P(H_2) = \frac{7}{13}$,

$A = \{$шары, вынутые из обеих урн, разноцветные$\}$.

Заметим, что $A = H_1 \cdot \bar{H}_2 + \bar{H}_1 \cdot H_2$.

(1) $$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P(\bar{H}_2)}{P(H_1)\cdot P(\bar{H}_2) + P(\bar{H}_1)\cdot P(H_2)} =$$
$$= \frac{(5/13)\cdot(6/13)}{(5/13)\cdot(6/13) + (8/13)\cdot(7/13)} = \frac{30}{30+56} = \frac{15}{43}.$$

Ответ: $\dfrac{15}{43}$.

(2) $$P_A(H_2) = \frac{P(\bar{H}_1)\cdot P(H_2)}{P(H_1)\cdot P(\bar{H}_2) + P(\bar{H}_1)\cdot P(H_2)} =$$
$$= \frac{(8/13)\cdot(7/13)}{(5/13)\cdot(6/13) + (8/13)\cdot(7/13)} = \frac{56}{30+56} = \frac{28}{43}.$$

Ответ: $\dfrac{28}{43}$. ◀

Пример 2.19. *В первой урне 9 белых и 7 чёрных шаров, во второй — 5 белых и 8 чёрных. Из каждой урны вынули по шару. Шары оказались одного цвета. Какова вероятность того, что они:*
(1) *белые;* (2) *чёрные?*

►Пусть $A = \{$оба шара одного цвета$\}$;
$H_1 = \{$оба шара белые$\}$; $H_2 = \{$оба шара чёрные$\}$.
Заметим, что $A = H_1 + H_2$; $P(A/H_1) = P(A/H_2) = 1$;
$P(H_1) = \dfrac{9}{16}\cdot\dfrac{5}{13} = \dfrac{45}{208}$; $\quad P(H_2) = \dfrac{7}{16}\cdot\dfrac{5}{13} = \dfrac{35}{208}$;

$$P(A) = P(H_1 + H_2) = P(H_1) + P(H_2) = \frac{45}{208} + \frac{35}{208} = \frac{80}{208}.$$

По формуле Бейеса:

(1) $$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{45}{208} : \frac{80}{208} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}.$$

Ответ: $\dfrac{9}{16}$.

(2) $$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{35}{208} : \frac{80}{208} = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}.$$

Ответ: $\dfrac{7}{16}$. ◀

Пример 2.20. *В первой урне* 8 *белых и* 7 *чёрных шаров, во второй — * 4 *белых и* 6 *чёрных, в третьей —* 9 *белых и* 5 *чёрных. Наугад из* *одной из урн вынимается шар. Найти вероятность того, что он белый.*

►Искомое событие A наблюдается на фоне трёх гипотез:
$H_1 = \{$выбрана первая урна$\}$,
$H_2 = \{$выбрана вторая урна$\}$,
$H_3 = \{$выбрана третья урна$\}$.

Вероятности всех гипотез равны между собой и в сумме составляют 1, откуда $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \dfrac{1}{3}$.

В условиях каждой из них вероятность искомого события A ищется по формуле классического определения вероятности
$P(A) = m/n$.

$P(A/H_1) = \dfrac{8}{8+7} = \dfrac{8}{15}$; $P(A/H_2) = \dfrac{4}{4+6} = \dfrac{2}{5}$;
$P(A/H_3) = \dfrac{9}{9+5} = \dfrac{9}{14}$.

Воспользовавшись формулой полной вероятности
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)$.

Подставим сюда найденные значения:
$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{15} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{14} = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{15} + \frac{2}{5} + \frac{9}{14}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{331}{210} = \frac{331}{630}.◄$$

Ответ: $\dfrac{331}{630}$.

2.6. Повторные испытания. Случайные величины.

2.7. Формула Бернулли

Предположим, что производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может наступить или не наступить некоторое событие A. Обозначим $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ и определим $P_n(m)$ — вероятность того, что событие A произойдет m раз в n испытаниях.

Будем записывать возможные результаты испытаний в виде комбинаций букв A и $\bar{A}$; например, запись $A\bar{A}\bar{A}A$ означает, что событие A осуществилось в 1-м и 4-м испытаниях и не осуществилось во 2-ом и 3-м. Всякую комбинацию, в которой A встречается m раз, а $\bar{A}$ встречается $n-m$ раз, назовем благоприятной. Количество благоприятных комбинаций равно количеству способов, которыми можно выбрать m мест из n, чтобы разместить буквы A (буквы $\bar{A}$ на оставшихся местах разместятся однозначно), т.е. числу сочетаний из n по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Вероятности всех благоприятных комбинаций одинаковы, в каждой из них событие A (также, как и $\bar{A}$) происходит одинаковое количество раз, поэтому посчитаем вероятность комбинации
$B_1 = AA\ldots A\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}$, в которую A входит m раз, а $\bar{A}$ — $(n-m)$ раз.

Вероятность этой комбинации в силу независимости испытаний на основании теоремы умножения вероятностей, равна

$$P(B_1) = p^m q^{n-m},$$

также как и для остальных комбинаций:

$$P(B_2) = \cdots = P(B_k) = p^m q^{n-m},$$

где количество комбинаций $k = C_n^m$.

Все благоприятные комбинации являются несовместными, поэтому по теореме сложения:

$$P_n(m) = P(B_1+\cdots+B_k) = P(B_1)+\cdots+P(B_k) = kp^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Мы получили формулу Бернулли[3]:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{2.10}$$

[3]Якоб Бернулли (27.12.1654 – 16.08.1705) – швейцарский математик

Для вычисления вероятности по формуле Бернулли (2.10), в пакет Maxima встроена функция pdf_binomial(m,n,p).

Пример 2.21. *Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна* 0,6. *Какова вероятность того, что* 8 *выстрелов дадут* 5 *попаданий?*

►Здесь $n = 8$, $m = 5$, $p = 0{,}6$, $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
По формуле (2.10) имеем:

$$P_8(5) = \frac{8!}{5!(8-5)!} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}279. \blacktriangleleft$$

Maxima-программа решения данной задачи имеет вид:
(%i1) load(distrib);
(%i2) pdf_binomial(5, 8, 0.6);
(%o2) 0.27869184
Ответ: $P \approx 0{,}279$.

Можно написать программу которая вычисляет значения вероятностей для всех значений k и построить график функции $P_n(m)$, рис.7.
kill(all)$ load(distrib);fpprintprec:4$; n:8$ p:0.6$
P:makelist(pdf_binomial(k, n, p),k,0,n);
plot2d([discrete,P],[x,1,9],[style,points],[gnuplot_postamble,"set grid"])$ (P)
[0.000655,0.007864,0.04129,0.1239,0.2322,0.2787,0.209,0.08958,0.0168]

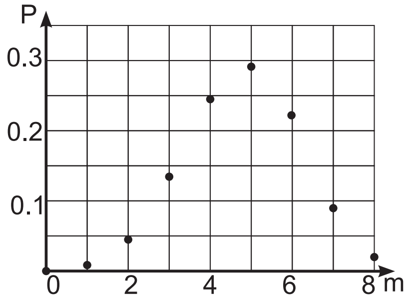

Рис. 7. *Пример 2.21*

Пример 2.22. *В условиях примера 2.21 найти вероятность того, что число попаданий будет не больше* 5 *и не меньше* 3-*х*.

►Обозначим искомую вероятность $P_8(3 \leqslant m \leqslant 5)$. Эта вероятность в соответствии с формулой (2.10) представляется в виде суммы вероятностей попарно несовместных событий:

$$P_8(3 \leqslant m \leqslant 5) = P_8(3) + P_8(4) + P_8(5).$$

Находя по формуле Бернулли каждое слагаемое, получаем:
$P_8(3 \leqslant m \leqslant 5) = C_8^3 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^5 + C_8^4 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^4 + C_8^5 \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 \approx$
$\approx 0{,}124 + 0{,}232 + 0{,}279 = 0{,}635.$◄
Maxima-команда имеет вид:
P:sum(pdf_binomial(m, n, p),m,3,5);

Замечание 2.2. *Формулу (2.7), полученную в предыдущей лекции, можно получить, используя формулу Бернулли. Действительно, по формуле Бернулли получим:*

$$P(\bar{A}) = C_n^0 p^0 q^n = (1-p)^n \implies P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1-p)^n.$$

Пример 2.23. *В условии примера 2.21 найти вероятность хотя бы одного попадания в цель при 8 выстрелах.*

►Сначала найдем вероятность противоположного события, т.е. вероятность ни разу не попасть в цель при 8 выстрелах:

$$P(\bar{A}) = (1-p)^n = 0{,}4^8 \approx 0{,}001 \implies P(A)1 - P(\bar{A}) \approx 0{,}999.$$ ◄

Замечание 2.3. *Формула Бернулли обобщается на тот случай, когда в результате каждого опыта возможны не два исхода A и $\bar{A}$, а несколько. Пусть производится n независимых опытов в одинаковых условиях, в каждом из которых может произойти только одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, причём*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Тогда вероятность того, что в k_1 опытах появится событие $A_1, \ldots,$ в k_m опытах — событие A_m $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} k_j = n\right)$, определяется формулой полиномиального распределения

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}. \tag{2.11}$$

2.8. Наивероятнейшее число появления события А

Часто необходимо знать значение m, при котором вероятность $P_n(m)$ максимальна. Это значение m называется наивероятнейшим числом (обозначается m^*) наступления события A в n испытаниях.

Можно показать, что

$$(n+1)p - 1 \leqslant m^* \leqslant (n+1)p. \tag{2.12}$$

Если неравенству (2.12) удовлетворяют два целых значения m^*, тогда имется два наивероятнейших числа m_1^* и m_2^*.

Так, в примере 2.21 имеем $9 \cdot 0{,}6 - 1 \leqslant m^* \leqslant 9 \cdot 0{,}6$. Этому неравенству удовлетворяет единственное целое значение $m^* = 5$.

Пример 2.24. *Найти наивероятнейшее число выпадений орла при 11 бросаниях монеты.*

►Здесь $n = 1$, $p = \dfrac{1}{2}$. В соответствии с неравенством (2.12) получаем:

$$12 \cdot \frac{1}{2} - 1 \leqslant m^* \leqslant 12 \cdot \frac{1}{2}.$$

Этому неравенству удовлетворяют два значения $m_1^* = 5$ и $m_2^* = 6$. В данном примере два наивероятнейших значения с одинаковыми вероятностями:

$$P_{11}(5) = P_{11}(6) = C_{11}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = C_{11}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0{,}226. \blacktriangleleft$$

2.9. Производящие функции

Рассмотрим разложение многочлена $(q+px)^n$ по формуле Бинома Ньютона

$$(q+px)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 q^{n-1} p^1 x + C_n^2 q^{n-2} p^2 x^2 + \ldots + C_n^n q^0 p^n x^n. \qquad (2.13)$$

Можно заметить, что коэффициенты этого многочлена равны вероятностям $P_n(m)$, вычисленным по формуле Бернулли (2.10). Поэтому массив вероятностей $P_n(m)$, вычисленный по формуле Бернулли (2.10), называют *биномиальным распределением*, а функцию $\varphi_n(x) = (q+px)^n$ — производящей функцией для последовательности независимых испытаний.

Если в каждом из независимых испытаниях вероятности наступления событий разные, то вероятности того, что в n опытах событие A наступит m раз, равна коэффициенту при m-й степени многочлена

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \cdots (q_n + p_n z). \qquad (2.14)$$

Функция $\varphi_n(z)$, называется производящей функцией.

Пример 2.25. *Производится три выстрелов по мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равно 0,5, а при каждом последующем выстреле производится корректировка прицела, поэтому вероятность попадания увеличивается на 10%. Какова вероятность: а) промаха; б) одного попадания; в) двух попаданий; г) трёх попаданий.*

► Подсчитываем вероятности попаданий при каждом выстреле. Для этого используем формулу сложных процентов: $p_k = 0{,}5(1+0{,}1)^k$, $k = 0, 1, 2, 3$. Получаем следующие значения массивов попаданий в цель p и промахов $q = 1 - p$:

$(p)[0.5, 0.55, 0.605]$ $(q)[0.5, 0.45, 0.395]$

Применяем формулу (2.14) для $n = 3$ и полученных массивов p и q.

$\varphi_3(z) = (0{,}5 + 0{,}5z)(0{,}55z + 0{,}45)(0{,}605z + 0{,}395)$.

После раскрытия скобок получаем

$\varphi_3(z) = 0{,}166375z^3 + 0{,}411125z^2 + 0{,}333625z + 0{,}088875$.

Искомыми вероятностями будут коэффициенты при соответствующих степенях данного многочлена.

$P_3(0) = 0{,}088875$; $P_3(1) = 0{,}333625$; $P_3(2) = 0{,}411125$; $P_3(3) = 0{,}166375$.

Для контроля проверим, что сумма этих вероятностей равна 1.◄

2.10. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Вычисления по формуле Бернулли при больших n громоздки и приводят к значительным погрешностям. Локальная теорема Лапласа даёт асимптотическую формулу, позволяющую приближённо найти вероятность появления события ровно m раз в n испытаниях, если n достаточно велико.

Теорема 2.7 (Локальная теорема Муавра-Лапласа)**.** *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появиться m раз в n испытаниях, приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \not\approx 0$, $p \not\approx 1$):*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\dfrac{x^2}{2}}. \tag{2.15}$$

Значения функции $\varphi(x)$, называемой функцией Гаусса , а её график — кривой вероятностей, рис. 8. Табличные значение этой функции имеются в учебниках по теории вероятностей (см. приложение 1) и вычисляются в математических и статистических программах для компьютеров (например, в Excel, MathCad, Maxima, MathLab и прочих). Пользуясь очевидными свойствами функции $\varphi(x)$, можно найти её значения при любых x:

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \varphi(+\infty) = \varphi(-\infty) = 0.$$

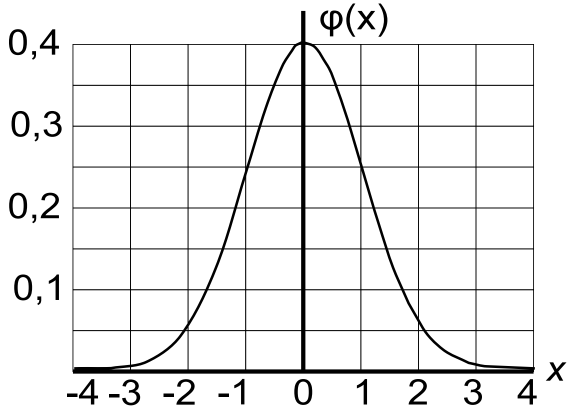

Рис. 8. *График функции Гаусса $\varphi(x)$*

Пример 2.26. *Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна* 0,6. *Найти вероятность того, что* 100 *выстрелов дадут* 50 *попаданий.*

►По условию $n = 100$, $m = 50$, $p = 0{,}6$. Воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_{100}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}} \cdot \varphi\left(\frac{50 - 100\cdot 0{,}6}{\sqrt{100\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}\right) \approx$$
$$\approx 0{,}2041 \cdot \varphi(2,04) \approx 0{,}2041 \cdot 0{,}0498 = 0{,}010.$$

Для решения такой трудоемкой задачи лучше использовать компьютерные математические пакеты.

Рассмотрим решение примера 2.26 в рамках пакета Maxima.

(%i1) load(distrib); numer:true;

/**Задаём функцию, соответствующую локальной теореме Лапласа**/

(%i2) L_Lapl(m, n, p):=(y:1/sqrt(n*p*(1−p)),
sqrt2*%pi* exp(−0.5*((m−n*p)*y)^ 2));

/**Вычисляем значение функции при* $n = 100$, $m = 50$ *и* $p = 0{,}6$*/

(%i2) PL:L_Lapl(50, 100, 0.6);

(%o2) 0.01014

В первой строке загружается библиотека distrib. В этой библиотеке собраны многочисленные функции, предназначенные для решения задач теории вероятностей и математической статистики. Во второй строке программируется формула локальной теоремой Лапласа, а в третьей строке вычисляется значение по этой формуле.

Функцию pdf_binomial, вычисляющую вероятность по формуле Бернулли, можно применять и при больших значениях числа испытаний. Используем формулу Бернулли для нашей задачи:

/**Решаем пример 2.26 используя точную формулу Бернулли**/

(%i3) PB:pdf_binomial(50, 100, 0.6);

(%o3) 0.010338

(%i4) PB−PL;

(%o4) $1.9783067 * 10^{-4}$

Таким образом, точность локальной теоремы Лапласа для примера 2.26 $\approx 0{,}0002$.

$dLapl(50, 100, 0.6) = 0.01$

Для вычисления суммарной («интегральной») вероятности того, что число появлений события A находится в заданных пределах (см. пример 2.27) при больших n также используется асимптотическая формула, позволяющая вычислять эту вероятность приближённо.

Для пользования этой формулой познакомимся с функцией Лапласа.

Определение 2.4. *Функцией Лапласа* $\Phi(x)$ *называется:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{2.16}$$

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

(1) $\Phi(x)$ непрерывная, возрастающая функция,
(2) Её область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$,
(3) $\Phi(0) = 0$,

(4) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$,

(5) $\Phi(+\infty) = 0{,}5, \quad \Phi(-\infty) = -0{,}5$.

Примем свойства 1 и 2 без доказательства. Для доказательства свойства 3 заметим, что

$$\Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.$$

Для доказательства свойства 4 произведём замену переменных в определённом интеграле:

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left\langle \begin{array}{c} t = -u \\ dt = -du \end{array} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = -\Phi(x).$$

Свойство 5 вытекает из известного равенства для интеграла Пуассона:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} \implies \Phi(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ в силу чётности подынтегральной функции.

Значения функции Лапласа также имеются в таблицах в учебниках по теории вероятностей (см. приложение 2) и вычисляются в математических и статистических программах для компьютеров (например, в EXCEL, Maxima, MathCad, MathLab). Пользуясь приведёнными свойствами $\Phi(x)$, можно найти её значения при любых x.

Теорема 2.8 (Интегральная теорема Лапласа)**.** *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ того, что событие A появится не менее m_1, но не более m_2 раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \not\approx 0, p \not\approx 1$):*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{2.17}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа.

Теоремы 2.7 и 2.8 примем без доказательства.

В пакетах Maxima и MathCad для вычисления функции Лапласа применяется функция cdf_normal(x,a,σ) и pnorm(x,a,σ), соответственно, которые определяют функцию распределения для нормального закона равную интегралу $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$

Тогда функция Лапласа вычисляется по формуле:
$\Phi(x) = cdf\_normal(x,0,1) - 0{,}5$ в пакета Maxima и
$\Phi(x) = pnorm(x,0,1) - 0{,}5$ – в пакете MathCad.

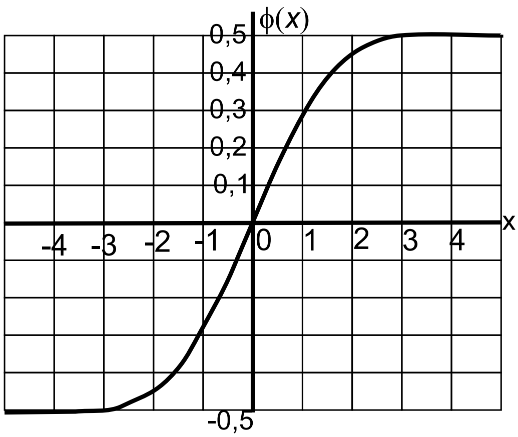

Рис. 9. *Функция Лапласа (2.16)*

Нарисуем график функции Лапласа, рис. 9.

```
numer:true$ load(distrib)$
Phi(x):= cdf_normal(x,0 , 1 )-0.5;
plot2d([Phi(x)], [x,-4,4], [gnuplot_postamble, "set grid;"])$
```

Пример 2.27. *Доля изделий продукции завода высшего качества составляет* 40%. *Найти вероятности того, что из отобранных 300 изделий окажется высшего качества: а) от* 110 *до* 140 *изделий, б) не менее* 110 *изделий, в) не более* 109 *изделий.*

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа. Здесь $n = 300$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$.

а) ►Найдем аргументы функции Лапласа при $m_1 = 110$ и $m_2 = 140$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = -\frac{5}{3\sqrt{2}} \approx -1{,}18,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{140 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}36.$$

Тогда

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx \Phi(2{,}36) - \Phi(-1,18) \approx 0{,}491 + 0{,}381 = 0{,}872.$$

Эта вероятность оказалась довольно высокой вследствие того, что были просуммированы вероятности вблизи наивероятнейшего числа $m^* = 120$.◄

б)►В этой части задачи нужно положить $m_1 = 110$, а $m_2 = 300$. Значение x_1 было найдено в пункте а, другой параметр

$$x_2 = \frac{300 - 120}{\sqrt{72}} = \frac{180}{6\sqrt{2}} \approx 21{,}21.$$

Соответствующая вероятность

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx \Phi(21{,}21) - \Phi(-1{,}18) \approx 0{,}5 + 0{,}381 = 0{,}881. \blacktriangleleft$$

в) ►Так как сумма вероятностей

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \quad \text{и} \quad P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300)$$

равна 1, то

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) = 1 - P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 1 - 0{,}881 = 0{,}119. \blacktriangleleft$$

Ответ: $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx 0{,}872$; $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 0{,}881$; $P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \approx 0{,}119$. ◄

2.11. Формула Пуассона

Если вероятность p появления события A в испытании Бернулли близка к 0 или 1, то теоремы 2.7 и 2.8 дают большие погрешности и, следовательно неприменимы. В этом случае следует пользоваться приближённой формулой Пуассона для вычисления $P_n(m)$ при больших n.

Теорема 2.9. *Если число испытаний неограниченно увеличивается ($n \to \infty$) и вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний неограниченно уменьшается ($p \to 0$), но* *так, что произведение np является постоянной величиной ($np = \lambda$), то вероятность $P_n(m)$ удовлетворяет предельному равенству*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}. \tag{2.18}$$

Выражение (2.18) называется *асимптотической формулой Пуассона.*

Из данной теоремы вытекает формула Пуассона (2.19)

Следствие. *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и близка к нулю, а n велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \to 0$, $\lambda = np \to a$):*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \tag{2.19}$$

Замечание 2.4. *Случай, когда $p \approx 1$, сводится к рассмотренному, если вместо $P_n(m)$ вычислять равную ей вероятность $P_n(n-m)$ появления $n-m$ раз противоположного события $\bar{A}$, вероятность появления которого в одном испытании $q = 1 - p \approx 0$.*

Пример 2.28. *Вероятность появления опечатки на одной странице книги равна* 0,01. *Найти вероятность того, что в книге из* 100 *страниц имеется более одной опечатки.*

►Найдём вероятность противоположного события, т.е. вероятность $P(\bar{B})$ того, что в книге не более одной опечатки (0 или 1 опечатка).

Так как $np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$, то

$$P(\bar{B}) = P_{100}(0) + P_{100}(1) \approx \frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} e^{-1} \approx 0{,}736.$$

Искомая вероятность равна $P(B) \approx 1 - 0{,}736 = 0{,}264$.◄

Пример 2.29. *На предприятии изготовлено 100000 деталей. Вероятность, что деталь может оказаться бракованной, равна* 0,0001. *Найти вероятность, а) что ровно три детали будут бракованными; б) что более 20 деталей окажутся бракованными.*

►а) Используя пакет Maxima, решим данную задачу по трём формулам: точной формуле Бернулли (PB) и приближённым формулам (2.15) (PL – локальной теореме Лапласа) и (2.19) (PP — формуле Пуассона).

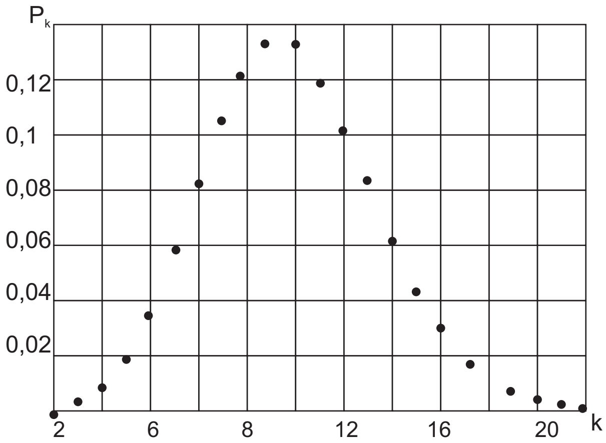

Рис. 10. *К примеру 2.29*

n:100000$ m:3$p:0.0001$ q:1-p$ L:n*p;
PB:binomial(n,m)*p^m*q^(n-m);
(PB) 0.007564914689311556
npq:sqrt(L*q);
x:(m-L)/npq;
PL:1/(npq*sqrt(2*%pi))*exp(-x^2/2);
(PL) 0.01088438482539428
PP:L^m*exp(-L)/m!;
(PP) 0.007566654960414142
По формуле Пуассона (PP= 0.010884) получили близкие к точным результатам PB=0.0075649, полученным по формуле Бернулли. Локальная теорема Лапласа дала неприемлемые результаты (PL=0.01088.)

Решим теперь задача б). Найдём теперь сумму вероятностей
(%i14) S:1-sum(P[k],k,1,21);
(S) 0.001587

Построим график изменения вероятностей от числа бракованных деталей k, рис.10. Из графика видно, что число бракованных деталей, расположено в диапазоне от 2 до 20.

P:makelist(binomial(n,k)*p^k*q^(n-k),k,0,25);
plot2d ([discrete, P],[x,2,22],[style,points], [gnuplot_postamble, " set grid"])$
◄

2.12. Отклонение частоты от вероятности

Пусть проводятся испытания Бернулли с постоянной вероятностью p появления события A в каждом из них; событие A появилось m раз в n испытаниях. Найдем вероятность того, что отклонение относительной частоты $\dfrac{m}{n}$ от вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа ε, т.е. найдем $P\left\{\left|\dfrac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right\}$. Заменяя неравенство равносильным и применяя интегральную теорему Лапласа, получим в условиях теоремы 2.8:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right\}=P\left\{-\varepsilon\leqslant\frac{m}{n}-p\leqslant\varepsilon\right\}=$$
$$=P\Big\{np-n\varepsilon\leqslant m\leqslant np+n\varepsilon\Big\}\approx\Phi\left(\frac{np+n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)-$$
$$-\Phi\left(\frac{np-n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)=\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

В последнем равенстве мы воспользовались нечётностью функции Лапласа. Итак, мы получили, что при $n\to\infty,\ p\not\approx 0,\ p\not\approx 1$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right\}\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).\tag{2.20}$$

Пример 2.30. *Вероятность того, что лампочка бракованная* $p=0{,}1$. *Определить, сколько лампочек нужно отобрать для проверки, чтобы с вероятностью* 0,9544 *можно было утверждать, что относительная частота бракованных лампочек отличается от вероятности* p *по абсолютной величине не более, чем на* 0,03.

►Здесь $p=0{,}1$; $q=0{,}9$; $\varepsilon=0{,}03$;

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-0{,}1\right|\leqslant 0{,}03\right\}=0{,}9544.$$

Найдём n. По формуле (2.20):

$$2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right)=0{,}9544\implies\Phi(0{,}1\cdot\sqrt{n})=$$
$$=0{,}4772\implies 0{,}1\sqrt{n}=2\implies n=400.$$

Полученный результат означает, что в партии из 400 лампочек количество m бракованных будет с вероятностью близкой к 1 заключено в пределах от $400 \cdot 0{,}1 - 400 \cdot 0{,}03 = 28$ до $400 \cdot 0{,}1 + 400 \cdot 0{,}03 = 52$.◀