11. Двумерные случайные величины

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Определение 11.1. n *-**мерным случайным вектором** называется набор $\xi = (\xi_1, \xi_2 \dots, \xi_n)$ случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, A, P).*

Фактически случайный вектор ξ есть отображение $\xi : \Omega \to R^n$

Определение 11.2. ***Законом распределения** дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, т.е. пар чисел $(x_i; y_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, и их вероятностей $p_{ij} = P\{\xi = x_i; \zeta = y_j\}$.*

Закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом, в которой указывают все значения x_i, y_i и вероятности p_{ij}.

$\xi \backslash \zeta$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nm}

Таблица 11.1

Распределение двумерной дискретной случайной величины						
$\xi \backslash \zeta$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	$P\{\xi = x_i\}$
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}	$p_{1\,*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}	$p_{i\,*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nm}	$p_{n\,*}$
$P\{\zeta = y_j\}$	$p_{*\,1}$	$\dots$	$p_{*\,j}$	$\dots$	$p_{*\,m}$	1

Зная двумерный закон распределения, можно найти закон распределения каждой составляющей (но не наоборот).

$$P\{\xi = x_i\} = P\{\xi = x_i, \zeta = y_1\} + P\{\xi = x_i, \zeta = y_2\} + \dots$$
$$\dots + P\{\xi = x_i, \zeta = y_m\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{i\,*}. \tag{11.1}$$

Аналогично

$$P\{\zeta = y_i\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{*j}. \tag{11.2}$$

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i*}, \qquad M(\zeta) = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{*j}. \tag{11.3}$$

Определение 11.3. *Точка с координатами $\big(M(\xi); M(\zeta)\big)$ называется* ***центром распределения.***

$$P\{\zeta = y_j/\xi = x_i\} = \frac{P\{\xi = x_i, \zeta = y_j\}}{P\{\xi = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i*}}. \tag{11.4}$$

$$P\{\xi = x_i/\zeta = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{*j}}. \tag{11.5}$$

Вероятности $P\{\zeta = y_j/\xi = x_i\}$ для $j = 1, \ldots, m$ образуют условное распределение случайной величины ζ при фиксированном значении ξ. В частности, можно найти условное математическое ожидание ζ при фиксированном значении ξ:

$$M(\zeta/\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j P\{\zeta = y_j/\xi = x_i\} \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n \tag{11.6}$$

и условное математическое ожидание ξ при фиксированном значении ζ:

$$M(\xi/\zeta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i P\{\xi = x_i/\zeta = y_j\} \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, m. \tag{11.7}$$

Для независимых дискретных случайных величин ξ и ζ

$$P\{\zeta = y_j/\xi = x_i\} = P\{\zeta = y_j\} \quad \text{и} \quad P\{\xi = x_i/\zeta = y_j\} = P\{\xi = x_i\}.$$

$$P\{\zeta = y_j/\xi = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i*}} = \frac{p_{i*} \cdot p_{*j}}{p_{i*}} = p_{*j}\ .$$

$$P\{\xi = x_i/\zeta = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{*j}} = \frac{p_{i\cdot} \cdot p_{*j}}{p_{*j}} = p_{i*}\ .$$

Определение 11.4. ***Плотностью распределения*** *двумерной непрерывной случайной величины $(\xi; \zeta)$ называется вторая смешанная частная производная функции распределения:*

$$f(x; y) = \frac{\partial^2 F(x; y)}{\partial x \partial y}. \tag{11.8}$$

Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами:

(1) $f(x;y) \geqslant 0$;
(2) $f(-\infty;y) = f(x;-\infty) = f(\pm\infty;\pm\infty) = 0$;
(3) $F(x;y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(s;t)dsdt$;
(4) Вероятность попадания двумерной случайной величины $(\xi;\zeta)$ в область G равна:

$$P\{(\xi;\zeta) \in G\} = \iint\limits_{G} f(x;y)dxdy;$$

(5) $\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxdy = 1$.

Плотности распределения составляющих двумерной непрерывной случайной величины получаются из её плотности $f(x;y)$ по формулам (11.9):

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dy; \qquad f_\zeta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx. \tag{11.9}$$

Определение 11.5. ***Условной плотностью*** $f(y/\xi = x)$ *распределения* ζ *при условии, что* $\xi = x$*, называется:*

$$f(y/\xi = x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & f_\xi(x) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\xi(x)}, & f_\xi(x) \neq 0. \end{array}\right. \tag{11.10}$$

Условной плотностью $f(x/\zeta = y)$ *распределения* ξ *при условии, что* $\zeta = y$*, называется:*

$$f(x/\zeta = y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & f_\zeta(y) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\zeta(y)}, & f_\zeta(y) \neq 0. \end{array}\right. \tag{11.11}$$

Определение 11.6. ***Условным математическим ожиданием*** ζ *при условии, что* $\xi = x$*, называется:*

$$M(\zeta/\xi = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(y/\xi = x)dy. \tag{11.12}$$

Условным математическим ожиданием ξ при условии, что $\zeta = y$, называется:

$$M(\xi/\zeta = y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x/\zeta = y)dx. \tag{11.13}$$

Определение 11.7. *Функцию $f_{\zeta/\xi}(x)$ называют* ***регрессией*** *ζ на ξ. Другими словами, регрессией ζ на ξ называется условное математическое ожидание ζ при фиксированном $\xi = x$. Аналогично $\psi_{\xi/\zeta}(y)$ называется регрессией ξ на ζ.*

Теорема 11.13. *Для независимости непрерывных случайных величин ξ и ζ необходимо и достаточно, чтобы $f(x;y) = f_\xi(x) \cdot f_\zeta(y)$.*

Для независимых непрерывных случайных величин ξ и ζ

$f(y/\xi = x) = f_\zeta(y)$ и $f(x/\zeta = y) = f_\xi(x)$ при $f_\xi(x) \neq 0,\ f_\zeta(y) \neq 0$.

Т.е. закон распределения каждой из них не зависит от значений, принимаемых другой.

$$f(y/\xi = x) = \frac{f(x;y)}{f_\xi(x)} = \frac{f_\xi(x) \cdot f_\zeta(y)}{f_\xi(x)} = f_\zeta(y).$$

Определение 11.8. ***Корреляционным моментом*** *$K_{\xi\zeta}$ случайных величин ξ и ζ называют:*

$$K_{\xi\zeta} = M\left(\big(\xi - M(\xi)\big)\big(\zeta - M(\zeta)\big)\right).$$

$$K_{\xi\zeta} = M(\xi \cdot \zeta) - M(\xi) \cdot M(\zeta). \tag{11.14}$$

Вычисление корреляционного момента по формуле (13.1) для дискретных случайных величин сводится к вычислению суммы:

$$K_{\xi\zeta} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i y_j - M(\xi) \cdot M(\zeta),$$

а для непрерывных — интеграла:

$$K_{\xi\zeta} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(xy)dxdy - M(\xi) \cdot M(\zeta).$$

Теорема 11.14. *Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.*

Пример 11.1. *Задана дискретная двумерная случайная величина* (ξ, ζ)*:*

$\xi\backslash\zeta$	*4*	*7*	*8*
3,4	*0,05*	*0,11*	*0,15*
5,1	*0,32*	*0,13*	*0,24*

Найти законы распределения составляющих ξ *и* ζ*, безусловное и условное математическое ожидание* ξ *при условии* $\zeta = 7$*, а также безусловное и условное математическое ожидание* ζ *при* $\xi = 5,1$*.*

►Сложив вероятности по строкам, получим закон распределения составляющей ξ:

ξ	3,4	5,1
p	0,31	0,69

Если сложим вероятности по столбцам, то придем к закону распределения составляющей ζ:

ζ	4	7	8
p	0,37	0,24	0,39

С помощью последних таблиц легко найдем безусловные математические ожидания:

$$M(\xi) = 3{,}4 \cdot 0{,}31 + 5,1 \cdot 0{,}69 = 4{,}573,$$

$$M(\zeta) = 4 \cdot 0{,}37 + 7 \cdot 0{,}24 + 8 \cdot 0{,}39 = 6{,}280.$$

Вероятность $P(\zeta = 7) = 0{,}11 + 0{,}13 = 0{,}24$. Согласно (11.5), условные вероятности

$$P(\xi = 3,4|\zeta = 7) = 0{,}11/0{,}24 = 11/24,$$

$$P(\xi = 5,1|\zeta = 7) = 0{,}13/0{,}24 = 13/24.$$

Условный закон распределения ξ примет вид:

ξ	3,4	5,1
$P(\xi = x_i \vert \zeta = 7)$	11/24	13/24

Соответствующее условное математическое ожидание

$$M(\xi|\zeta = 7) = 3{,}4 \cdot 11/24 + 5{,}1 \cdot 13/24 \approx 4{,}321.$$

Вероятность $P(\xi = 5{,}1) = 0{,}32 + 0{,}13 + 0{,}24 = 0{,}63$. Далее по формуле (11.4) вычисляем условные вероятности

$$P(\zeta = 4|\xi = 5{,}1) = 0{,}32/0{,}69 = 32/69,$$

$$P(\zeta = 7|\xi = 5{,}1) = 0{,}13/0{,}69 = 13/69,$$

$$P(\zeta = 8|\xi = 5{,}1) = 0{,}24/0{,}69 = 24/69.$$

По условному закону распределения ζ

ζ	4	7	8
$P(\zeta = y_i \mid \xi = 5,1)$	32/69	13/69	24/69

найдем математическое ожидание
$M(\zeta \mid \xi = 5{,}1) = 4 \cdot 32/69 + 7 \cdot 13/69 + 8 \cdot 24/69 \approx 5{,}957.$◄
Ответ: 4,321; 5,957.

Пример 11.2. *Дано распределение двумерного случайного вектора $(\xi;\zeta)$ с дискретными компонентами.*

$\xi \backslash \eta$	*1*	*2*	*4*
3	*0,1*	*0,1*	*0,2*
5	*0,15*	*0,15*	*0,3*

Требуется:

1) Найти одномерные распределения случайных величин ξ и η, их математические ожидания $M(\xi)$ и $M(\eta)$ и дисперсии $D(\xi)$ и $D(\eta)$.

2) Доказать независимость случайных величин ξ и η. Вычислить непосредственно их корреляционный момент $K(\xi\eta)$.

►

$\xi \backslash \eta$	1	2	4	$P(\xi = x_i)$
3	0,1	0,1	0,2	0,4
5	0,15	0,15	0,3	0,6
$P(\eta = y_j)$	0,25	0,25	0,5	1

► Выпишем отдельно ряды распределения случайных величин ξ, η и $\xi\eta$.

ξ	3	5
P	0,4	0,6

η	1	2	4
P	0,25	0,25	0,5

$\xi\eta$	3	5	6	10	12	20
P	0,1	0,15	0,1	0,15	0,2	0,3

Найдём математические ожидания $M(\xi)$, $M(\eta)$ и $M(\xi\eta)$.

$M(\xi) = 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}6 = 4{,}2.$

$M(\eta) = 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}5 = 2{,}75.$

$M(\xi\eta) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}15 + 12 \cdot 0{,}2 + 20 \cdot 0{,}3 = 11{,}55.$

Найдём дисперсии $D(\xi)$, $D(\eta)$ и $D(\xi\eta)$.

$D(\xi) = 3^2 \cdot 0{,}4 + 5^2 \cdot 0{,}6 - 4{,}2^2 = 0{,}96.$

$D(\eta) = 1^2 \cdot 0{,}25 + 2^2 \cdot 0{,}25 + 4^2 \cdot 0{,}5 - 2{,}75^2(\eta) = 1{,}6875.$

$D(\xi\eta) = 3^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}15 + 6^2 \cdot 0{,}1 + 10^2 \cdot 0{,}15 + 12^2 \cdot 0{,}2 + 20^2 \cdot 0{,}3 - M^2(\xi\eta) = 38{,}6475.$

2) Доказать независимость случайных величин ξ и η. Вычислить непосредственно их корреляционный момент $K(\xi\eta)$.

Для доказательства независимость случайных величин ξ и η проверим выполнения условий

$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j), i = 1, 2; j = 1, 2, 3.$

$P(\xi = x_1) \cdot P(\eta = y_1) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1.$

$P(\xi = x_1) \cdot P(\eta = y_2) = 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}15.$

$P(\xi = x_2) \cdot P(\eta = y_1) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1.$

$P(\xi = x_2) \cdot P(\eta = y_2) = 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}15.$

$P(\xi = x_3) \cdot P(\eta = y_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2.$

$P(\xi = x_3) \cdot P(\eta = y_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3.$

Все условия выполняются, следовательно случайных величин ξ и η независимы.

Найдём корреляционный момент

$K(\xi\eta) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) = 11{,}55 - 4{,}2 \cdot 2{,}75 = 0.$ ◄

Пример 11.3. *Задана дискретная случайная величина $\Theta = 10\xi - 3\eta$, где ξ и η — дискретные случайные величины из примера 11.2. Вычислить математическое ожидание $M(\Theta)$ и дисперсию $D(\Theta)$ случайной величины Θ двумя способами: на основании свойств математического ожидания и дисперсии и используя ряд распределения этой случайной величины.*

► Используем два свойства математическое ожидания $M(C\xi) = CM(\xi)$ и $M(\xi + \zeta) = M(\xi) + M(\zeta)$.

$M(\Theta) = 10 \cdot M(\xi) - 3 \cdot M(\eta) = 10 \cdot 4{,}2 - 3 \cdot 2{,}75 = 33{,}75.$

Запишем ряды распределения случайных величин $10 \cdot M(\xi)$ и $-3 \cdot M(\eta)$:

10ξ	30	50
P	0,4	0,6

-3η	-3	-6	-12
P	0,25	0,25	0,5

Получаем ряд распределения случайной величины Θ:

Θ	27	24	18	47	44	38
P	$0{,}4 \cdot 0{,}25$	$0{,}4 \cdot 0{,}25$	$0{,}4 \cdot 0{,}5$	$0{,}6 \cdot 0{,}25$	$0{,}6 \cdot 0{,}25$	$0{,}6 \cdot 0{,}5$

Θ	27	24	18	47	44	38
P	0,1	0,1	0,2	0,15	0,15	0,3

Находим $M(\Theta)$

$M(\Theta) = 27 \cdot 0{,}1 + 24 \cdot 0{,}1 + 18 \cdot 0{,}2 + 47 \cdot 0{,}15 + 44 \cdot 0{,}15 + 38 \cdot 0{,}3 = 33{,}75$ и $D(\Theta)$

$D(\Theta) = 27^2 \cdot 0{,}1 + 24^2 \cdot 0{,}1 + 18^2 \cdot 0{,}2 + 47^2 \cdot 0{,}15 + 44^2 \cdot 0{,}15 + 38^2 \cdot 0{,}3 - 33{,}75^2 = 111{,}1875.$

Найдём теперь первым способом дисперсию $D(\Theta)$. Используем два свойства дисперсии ожидания $D(C\xi) = C^2 D(\xi)$ и для независимых случайных величин $D(\xi + \zeta) = D(\xi) + D(\zeta)$.

$D(\Theta) = 10^2 \cdot D(\xi) + (-3)^2 \cdot D(\eta) = 100 \cdot 0{,}96 + 9 \cdot 1{,}6875 =$
$= 111{,}1875.$

Оба способа дали один и то же результат. ◀

Пример 11.4. *Задана функция распределения двумерной случайной величины*

$$F(x, y) = \begin{cases} \cos x \cdot \cos y \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2, \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, ζ) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \pi/4,\ x = \pi/2,\ y = 0,\ y = \pi/4$.

▶ Используем формулу (11.8):

$P(x_1 < \xi < x_2,\ y_1 < \zeta < y_2) = (F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1)) -$
$- (F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1))$.

Положив $x_1 = \pi/4,\ x_2 = \pi/2,\ y_1 = 0,\ y_2 = \pi/4$, получим

$P = (\cos\dfrac{\pi}{2} \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{2} \cdot \cos 0) - (\cos\dfrac{\pi}{4} \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{4} \cdot \cos 0) =$
$= \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} \approx 0{,}207.$◀

Ответ: $\approx 0{,}207$.

Пример 11.5. *Задана функция распределения двумерной случайной величины*

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by})\ , \text{при } x > 0,\ y > 0, \\ 0\ , \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности (ξ, ζ).

▶ Согласно (11.8), плотность вероятности есть вторая смешанная частная производная функции распределения. Производная по y отличной от нуля части равна:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = b(1 - e^{-ax})e^{-by}.$$

Дифференцируя это выражение по x, получим

$$f(x, y) = abe^{-ax-by}$$

при $x > 0,\ y > 0$ и, кроме того, $f(x, y) = 0$ при $x < 0$ или $y < 0$.◀

Ответ: $f(x, y) = \begin{cases} abe^{-ax-by} \text{ при } x > 0,\ y > 0, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Пример 11.6. *Задана двумерная плотность вероятности системы двух случайных величин:* $f(x,y) = (1/2)\cos(x+y)$ *в квадрате* $-\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$, $-\pi/4 \leqslant y \leqslant \pi/4$*; вне этого квадрата* $f(x,y) = 0$*. Найти функцию распределения системы* (ξ, ζ)*.*

► Для решения задачи воспользуемся формулой:

$$F(x,y) = \int\limits_{-\pi/4}^{x} \int\limits_{-\pi/4}^{y} f(x,y)dxdy.$$

Тогда: а) при $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}$

$$F(x,y) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/4}^{x} dx \int\limits_{-\pi/4}^{y} \cos(x+y)dy = \frac{1}{2}(\cos(x-\pi/4) + \cos(y-\pi/4) -$$

$$-\cos(x+y)).$$

б) при $x < -\dfrac{\pi}{4}$ или $y < -\dfrac{\pi}{4}$

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} dx \int\limits_{-\infty}^{y} 0dy = 0.$$

в) при $x > \dfrac{\pi}{4}$, $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{4}$

$$F(x,y) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx \int_{-\pi/4}^{y} \cos(x+y)dy = \frac{1}{2}(1+\cos(y-\pi/4)-\cos(y+\pi/4)).$$

г) при $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, $y > \dfrac{\pi}{4}$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x-\pi/4) - \cos(x+\pi/4)).$$

д) при $x > \dfrac{\pi}{4}$ и $y > \frac{\pi}{4}$

$$F(x,y) = 1.$$

◄

Пример 11.7. *Задана двумерная плотность вероятности* $f(x,y) = a/(x^2+y^2+2)^4$ *системы двух случайных величин* (ξ, η)*. Найти постоянную* a*.*

►Воспользуемся свойством 5 плотности вероятности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Для вычисления интегралов удобнее перейти к полярным координатам. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{(x^2+y^2+2)^4}dxdy = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{1}{(r^2+2)^4} rdr = 1.$$

После вычисления независимых интегралов по φ и r получим: $\pi a/24 = 1 \Rightarrow a = 24/\pi \approx 7{,}639$.◄

Ответ: $a = 24/\pi \approx 7{,}639$.

Пример 11.8. *Система случайных величин* (ξ,η) *имеет плотность вероятности* $f(x,y) = a/((1+x^2)(4+y^2))$. *Определить коэффициент* a*; найти функцию распределения* $F(x,y)$*; вычислить вероятность попадания случайной точки* (ξ,η) *в прямоугольник* G : $x \in [0,1],\ y \in 0,2]$*; установить, являются ли величины* ξ *и* η *зависимыми.*

►Коэффициент a найдем также с помощью свойства 5 плотности:

$$a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{4+y^2} = 1, \quad a\cdot\left(\operatorname{arctg} x\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\cdot\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1,$$

$$a\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad a\cdot\frac{\pi^2}{2} = 1, \quad a = \frac{2}{\pi^2}.$$

Таким образом,

$$f(x,y) = \frac{2}{\pi^2(1+x^2)(4+y^2)}.$$

Согласно свойству 3 двумерной плотности, функция распределения

$$F(x,y) = \frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{4+y^2} = \frac{2}{\pi^2}\cdot\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Вероятность попадания в прямоугольник G определим с помощью найденной функции распределения:

$$P((\xi,\eta)\in G) = F(1,2) - F(0,2) - (F(1,0) - F(0,0)) =$$
$$= \frac{2}{\pi^2}\Bigg(\left(\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{4}\right) -$$
$$- \left(\left(\operatorname{arctg} 1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{4}\right)\Bigg) = \frac{1}{16}.$$

Заметим, что эту же вероятность можно непосредственно найти с помощью плотности распределения согласно её свойству 4.

Плотности распределения составляющих найдем по формулам (11.9):

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{2}{\pi^2(1+x^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{4+y^2} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Аналогично найдем, что

$$f_\eta(y) = \frac{2}{\pi(4+y^2)}.$$

Поскольку здесь $f(x,y) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$, то делаем вывод о том, что случайные величины ξ и ζ независимы. ◄

Пример 11.9. *Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины $f(x,y) = a(x^2+xy)$ при $0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$ и $f(x,y) = 0$ вне указанного квадрата. Вычислить значение постоянной a и математические ожидания составляющих или центр распределения.*

►Постоянную a найдем из условия

$$\int_0^2\int_0^2 f(x,y)dxdy = 1.$$

Тогда

$$a\int_0^2 dx\int_0^2 (x^2+xy)dy = 1$$

и после интегрирования по y получим:

$$a\int_0^2\left(2x + \frac{8}{3}\right)dx = 1.$$

Вычисляя определённый интеграл, придем к уравнению: $a \cdot 28/3 = 1$. Отсюда получим значение $a = 3/28$. Таким образом, отличное от нуля значение плотности распределения будет $f(x,y) = (3/28)(x^2 + xy)$. Математические ожидания случайных величин ξ и η определятся как

$$M(\xi) = \int_0^2 \int\limits_0^2 xf(x,y)dxdy = \frac{3}{28}\int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^2 (x^2+xy)dy = \frac{10}{7},$$

$$M(\eta) = \int\limits_0^2 \int\limits_0^2 yf(x,y)dxdy = \frac{3}{28}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^2 y(x^2+xy)dy = \frac{8}{7}.$$

Таким образом, центром распределения является точка $(10/7; 8/7)$. ◄

Пример 11.10. *Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины* (ξ, η)

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}e^{-(x^2+2xy+2y^2)}.$$

Найти плотности распределения составляющих и условные плотности распределения этих составляющих.

►Плотности распределения составляющих определяются формулами (11.9). Тогда

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\pi}e^{-x^2/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(y+x/2)^2}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

Здесь интеграл по y был вычислен с помощью интеграла Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2\pi} \text{ и подстановки } t = 2(y + x/2).$$

Во втором случае

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\pi}e^{-y^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+y)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}.$$

Условная плотность распределения η при условии, что $\xi = x$

$$f(y/\xi = x) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(1/2)\ (x+2y)^2}.$$

Условная плотность распределения ξ при условии, что $\eta = y$

$$f(x/\eta = y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(x+y)^2}.$$

◄

Пример 11.11. *Случайный вектор (ξ, η) распределён равномерно внутри прямоугольного треугольника G с вершинами $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(6,0)$.*

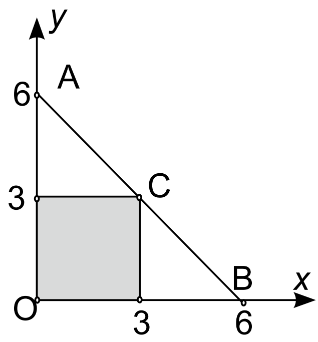

Рис. 36. *Пример 11.11*

1) Найти плотность распределения вероятностей компонент случайного вектора.

2) Исследовать зависимость компонент случайного вектора.

3) Выяснить коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η).

4) Найти $P\{(\xi, \eta) \in D\}$, где $D = \{(x, y) |\quad 0 \leqslant x \leqslant 3, \quad 0 \leqslant y \leqslant 3\}$.

►1) Распределение двумерной непрерывной случайной величины называют равномерным, если в области, которой принадлежат все возможные значения (x, y), плотность вероятности сохраняет постоянное значение, т.е. $f(x, y) = c$. Уравнение прямой AB есть $y = 6 - x$. Постоянную a найдем с помощью свойства 5 двумерной плотности. Тогда

$$\int_0^6 dx \int_0^{6-x} c dy = 1, \quad c\int_0^6 (6-x)dx = c\left(6x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^6 = c \cdot 18 = 1.$$

$\Rightarrow 18a = 1,\ a = 1/18,\ f(x,y) = 1/18$ внутри треугольника; вне этой области плотность равна нулю. Площадь треугольника OAB можно было найти по формуле: $S = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 18$.

$$f(x,y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & (x,y) \notin G, \\ \dfrac{1}{18}, & (x,y) \in G. \end{array}\right.$$

Согласно (11.10), плотности составляющих двумерной величины будут равны:

$$f_\xi(x) = \int_0^{6-x} \frac{1}{18}\, dy = \frac{6-x}{18}\ (0 < x < 6),$$

$$f_\eta(y) = \int_0^{6-y} \frac{1}{18}\, dx = \frac{6-y}{18}\ (0 < y < 6).$$

Вне указанных интервалов эти функции равны нулю.

2) Теперь займёмся исследованием зависимости компонент случайного вектора (ξ, η).

Для этого найдём условные плотности компонент по формулам (11.10) и (11.11).

$$f(y/\xi = x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & f_\xi(x) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\xi(x)}, & f_\xi(x) \neq 0. \end{array}\right. \Rightarrow f(y/\xi = x) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{6-x}, & x \in [0;6], \\ 0, & x \notin [0;6]. \end{array}\right.$$

$$f(x/\eta = y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & f_\eta(y) = 0, \\ \dfrac{f(x;y)}{f_\eta(x)}, & f_\eta(y) \neq 0. \end{array}\right. \Rightarrow f(x/\eta = x) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{6-y}, & y \in [0;6], \\ 0, & y \notin [0;6]. \end{array}\right.$$

В рассмотренном примере условные плотности распределения $f(x/\eta = y)$ и $f(y/\xi = x)$ не совпадают с безусловными плотностями $f_\eta(y)$ и $f_\xi(x)$. Это имеет место тогда и только тогда, когда случайные величины ξ и η *зависимы.*

3) Выяснить коррелированы ли компоненты случайного вектора (ξ, η). По вычисленным плотностям распределения компонент случайного вектора найдём их математические ожидания.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int\limits_0^1 x \frac{6-x}{18} dx = \frac{1}{18} \cdot \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^6 =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot (3 \cdot 6^2 - \frac{6^3}{3}) = 2.$$

$$M(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y) dy = \int\limits_0^6 y \frac{6-y}{18} dy = 2.$$

Следовательно, математическое ожидание случайного вектора (ξ, η) равно вектору $(2; 2)$.

Корреляционный момент (ковариация) $K_{\xi\eta}$ вычисляется по формуле (13.1)

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta).$$

Вычислим $M(\xi\eta)$

$$M(\xi\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\, dy = \frac{1}{18} \int\limits_G xy\, dxdy = \frac{1}{18} \int\limits_0^6 x\, dx \int\limits_0^{-x+6} y\, dy =$$

$$= \frac{1}{18} \int\limits_0^6 x \cdot \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^{-x+6} dx = \frac{1}{36} \int\limits_0^6 (x^3 - 12x^2 + 36x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{36} \left(\frac{x^4}{4} - 4x^3 + 18x^2 \right) \Big|_0^6 = \frac{1}{36} 6^2 \left(\frac{36}{4} - 4 \cdot 6 + 18 \right) = 9 - 24 + 18 = 3.$$

Теперь найдем корреляционный момент

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) = 3 - 4 = -1.$$

Следовательно случайные величины ξ и η находятся в корреляционной зависимости.

4) Найти $P\{(\xi, \eta) \in D\}$, где $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 3; 0 \leqslant y \leqslant 3\}$.

$$P\{(\xi, \eta) \in D\} = \frac{9}{18} = 0{,}5.$$

◀

Пример 11.12. *Дана плотность двумерной случайной величины*

$$f(x,y)=\begin{cases}\ln^2 4\cdot 4^{-x-y} \text{ при } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ 0 \text{ при } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

▶В данном случае

$$M(\xi)=\int_0^\infty\int_0^\infty x\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^\infty\int_0^\infty x\cdot\ln^2 4\cdot 4^{-x-y}dxdy=$$

$$=\ln 4\int_0^\infty x\cdot 4^{-x}dx=\frac{1}{\ln 4}.$$

Здесь последний интеграл по x был вычислен по частям. Аналогично найдем

$$M(\eta)=\int_0^\infty\int_0^\infty y\cdot f(x,y)dxdy=\frac{1}{\ln 4}.$$

Дисперсия

$$D(\xi)=\int_0^\infty\int_0^\infty x^2\cdot f(x,y)dxdy-M^2(\xi).$$

Подставляя сюда значение плотности вероятности и проводя два раза интегрирование по частям, получим:
$D(\xi)=1/\ln^2 4$. Очевидно, $D(\eta)=1/\ln^2 4$. ◀

Задания для самостоятельной работы

Пример 11.13. *Задана дискретная двумерная случайная величина* (ξ,ζ)*:*

$\xi\backslash\zeta$	9	11	12	15
2	0,01	0,08	0,21	0,12
4	0,07	0,15	0,23	0,04

Найти математические ожидания $M(\xi),\ M(\zeta)$.

Пример 11.14. *Задана функция распределения двумерной случайной величины*

$$F(x,y)=\begin{cases}1+5^{-x-y} \text{ при } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ 0 \text{ при } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (ξ,ζ) *в прямоугольник, ограниченный прямыми* $x_1=2,\ x_2=3,\ y_1=1,\ y_2=2$.

Пример 11.15. *Дана функция распределения системы двух случайных величин*

$$F(x,y) = k(1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2}), (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0);$$

Вне первой четверти $F(x,y)$ *равняется нулю. Найти выражение для плотности вероятности и коэффициент* k. *Определить вероятность попадания случайной точки в область* D, *которая представляет собой четверть круга радиуса* R $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

Пример 11.16. *Двумерная случайная величина* (ξ, ζ) *имеет плотность*

$$f(x,y) = \frac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

Найти коэффициент a *и одномерные плотности случайных величин* ξ *и* ζ.

Пример 11.17. *Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины имеет следующий вид:*

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x+y) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x, \\ 0 \text{ вне указанной области.} \end{cases}$$

Определить константу a *и вычислить центр распределения.*

Пример 11.18. *Дана плотность вероятности двумерной случайной величины* (ξ, ζ):

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y), \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ y \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ 0 \text{ вне этой области.} \end{cases}$$

Определить функцию распределения системы и математические ожидания величин ξ *и* ζ.

Пример 11.19. *Двумерная случайная величина распределена равномерно внутри квадрата со стороной* a *и диагоналями, совпадающими с осями координат. Найти выражение для плотности вероятности* $f(\xi, \zeta)$.

Домашнее задание.

Выполнить задание 1.15, 1.16, 1.17 и 1.18 типового расчёта.