Лекция №1

Основное содержание курса составляет теория функций комплексного переменного (ТФКП):

- комплексные числа и действия над ними,
- функции комплексного переменного,
- интеграл от функции комплексного переменного и его свойства,
- ряды Тейлора и Лорана,
- теория вычетов функции,
- приложения теории вычетов,
- интегралы Эйлера.

Для усвоения программы курса ТФКП необходимы полноценно сформированные знания и умения по курсам математического анализа (в объеме первых трех семестров), алгебры и геометрии (в объеме 1 и 2 семестров), дифференциальных уравнений. Требуется владение математическими методами (дифференцирование, интегрирование, представление функции рядом, исследование ряда на сходимость и др.), способностью анализировать условие задачи и подбирать для ее решения адекватный математический аппарат.

Каждая лекция включает теоретическое изложение материала по ТФКП и разбор типовых задач курса. Все лекции взаимосвязаны, для полноценного усвоения материала необходимо последовательное изучение каждой лекции, начиная с первой.

§1. Комплексные числа и действия с ними: *алгебраическая форма комплексного числа, модуль и аргумент комплексного числа*

1.1 Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 1.1. *Комплексным числом* z *называется выражение вида*

$$z = x + iy,$$

где x *и* y *– действительные числа,* i *– мнимая единица, определяемая условием* $i^2 = -1$.

Числа x *и* y *называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа* z *и обозначаются* $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Такое представление комплексного числа z называется алгебраической формой комплексного числа.

Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + iy$.

Определение 1.2. *Комплексные числа* $\boldsymbol{z_1 = x_1 + iy_1}$ *и* $\boldsymbol{z_2 = x_2 + iy_2}$ *считаются равными тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{x_1 = x_2}$, $\boldsymbol{y_1 = y_2}$.

Пример.

Решить уравнение $(3 + 2i)x + (2 - i)y = -1 + 4i$.

Решение. Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:

$$(3x + 2y) + (2x - y)i = -1 + 4i.$$

Из определения равенства двух комплексных чисел получаем

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = 1$, $y = -2$.

1.2 Геометрическое представление комплексного числа

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости xOy точкой M с координатами (x, y), либо вектором, начало которого находится в точке $O(0,0)$, а конец в точке $M(x, y)$ (см. рис.1).

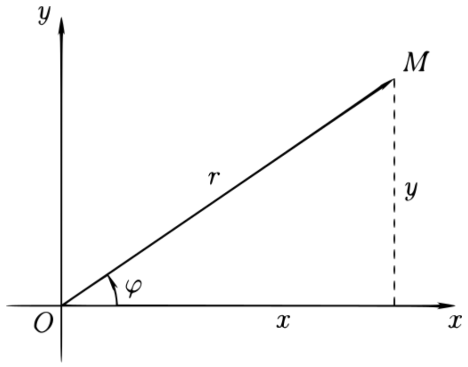

Рис. 1

Если $y = 0$, то $z = x + i \cdot 0 = x$, то есть получаем обычное действительное, расположенное на оси OX, число. Если $x = 0$, то $z = iy$. Такие числа называются чисто мнимыми. Они изображаются точками на оси OY.

Определение 1.3. *Длина вектора* $\boldsymbol{z}(\overline{\boldsymbol{OM}})$ *называется модулем комплексного числа и обозначается*

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.1}$$

Определение 1.4. *Угол, образованный вектором* $\overrightarrow{OM}$ *с положительным направлением оси* Ox*, называется аргументом комплексного числа* z *и обозначается* $Arg\ z$ *:*

$$Arg\ z = arg\ z + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

где $\varphi = arg\ z$ *- это главное значение* $Arg\ z$*, определяемое условиями*

$-\pi < \varphi \le \pi$.

В зависимости от положения точки на комплексной плоскости, аргумент комплексного числа можно находить, используя соотношения

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}. \tag{1.2}$$

Отметим, что аргумент числа $z = 0$ не определен.

Пример.

Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Решение. Модуль комплексного числа вычислим по формуле (1.1)

$$|z| = r = \left|-1 + \sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Для нахождения аргумента определим положение числа на комплексной плоскости: $z = -1 + \sqrt{3}i$ лежит в II четверти. Используя формулы (1.2)

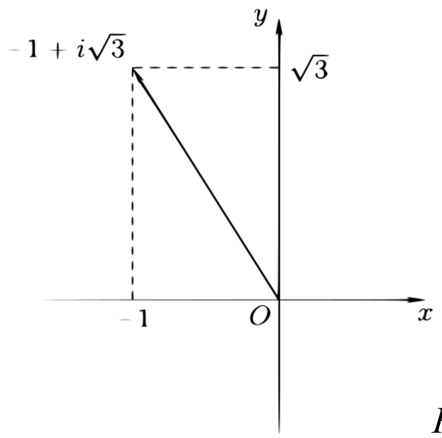

Рис. 2

найдем (см. рис. 2) $\varphi = argz = \frac{2\pi}{3}$.

Отметим, что

$$Arg\, z = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Пример.

Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -5i$.

Решение. Число $z = -5i$ находится на мнимой оси: $x = 0$, $y = -5 < 0$.

Модуль z по формуле (1.1) $|z| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$.

$arg\, z = -\frac{\pi}{2}$ из (1.2), при этом $Arg\, z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1.3 Действия над комплексными числами (в алгебраической форме) (сложение, вычитание, умножение и деление)

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Определение 1.5. *Суммой* $\mathbf{z_1 + z_2}$ *комплексных чисел* $\mathbf{z_1}$ *и* $\mathbf{z_2}$ *называется комплексное число*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Определение 1.6. *Разностью* $\mathbf{z_1 - z_2}$ *комплексных чисел* $\mathbf{z_1}$ *и* $\mathbf{z_2}$ *называется комплексное число*

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Определение 1.7. *Произведением* $z_1 z_2$ *комплексных чисел* z_1 *и* z_2 *называется комплексное число*

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Определение 1.8. *Частным* $\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}}$ *от деления комплексного числа* $\mathbf{z_1}$ *на комплексное число* $\mathbf{z_2 \neq 0}$ *называется такое комплексное число* $\mathbf{z}$, *которое удовлетворяет уравнению* $\mathbf{z z_2 = z_1}$.

Для частного имеет место формула

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример.

Вычислить $(3-i)(2+5i)$.

Решение. Раскрывая скобки и учитывая $i^2=-1$, получим

$$(3-i)(2+5i)=6+15i-2i-5i^2=6+5+13i=11+13i.$$

Пример.

Вычислить $\frac{-2-3i}{1+4i}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю $1-4i$.

$$\frac{-2-3i}{1+4i}\cdot\frac{1-4i}{1-4i}=\frac{-2-12-3i+8i}{1+16}=\frac{-14+5i}{17}=-\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i.$$

Пример.

Вычислить i^{27}.

Решение. Поскольку $i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i, i^4=1$, и т. д., имеем

$$i^{27}=(i^4)^6\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i.$$

Комплексные числа и действия с ними: *тригонометрическая и показательная формы комплексного числа*

1.4 Тригонометрическая форма комплексного числа

Любое комплексное число $z=x+iy$ $(z\neq 0)$ можно записать в тригонометрической форме (см. рис. 1)

$$z=r(cos\varphi+isin\varphi), \tag{1.3}$$

где $r=|z|, \varphi-$ аргумент z.

Пример.

Записать в тригонометрической форме $z = -\sqrt{3} - i$.

Решение. Модуль z найдем по формуле (1.1)

$$|z| = r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$$

Для нахождения аргумента определим положение z на комплексной плоскости: z лежит в III четверти (см. рис.3), тогда по (1.2)

$$\varphi = arg\ z = -\frac{5\pi}{6}.$$

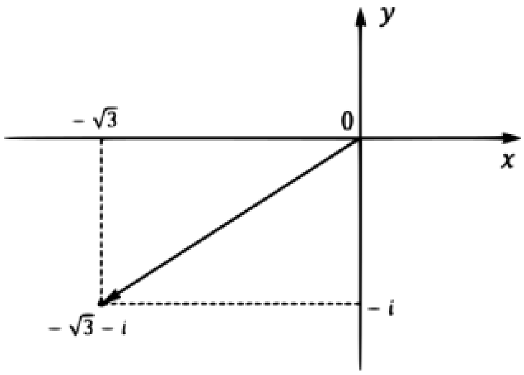

Рис. 3

Подставляя значения модуля и аргумента в формулу (1.3), получим

$$z = -\sqrt{3} - i = 2\left[cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

1.5 Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 даны в тригонометрической форме $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$.

1. **Произведение** z_1z_2 комплексных чисел z_1 и z_2 находится по формуле

$$z_1z_2 = r_1r_2[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

2. **Частное двух комплексных** чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

3. **Возведение** комплексного числа $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ **в натуральную степень** $\boldsymbol{n}$ производится по формуле

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + isin(n\varphi)), \tag{1.4}$$

Часто формулу (1.4) также называют формулой Муавра.

4. **Корень *n-й* степени из комплексного числа** $z \neq 0$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{1.5}$$

где $\varphi = argz, k = 0,1,2,\ldots,n-1.$

<u>Пример.</u>

Вычислить $(2-2i)^{10}$.

Решение. Представим число $z = 2 - 2i$ в тригонометрической форме (1.3):

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Применяя формулу (1.4), получим

$$(2-2i)^{10} = \left(2\sqrt{2}\right)^{10}\left[cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2^{15}(cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) - isin\left(\frac{5\pi}{2}\right)) = -2^{15} \cdot i.$$

<u>Пример.</u>

Вычислить $\sqrt[4]{-16}$.

Решение. Представим число $z = -16$ в тригонометрической форме. Число лежит на действительной оси: $x < 0, y = 0$.

Модуль $|-16| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16$, аргумент $\varphi = \pi$.

По формуле (1.5)

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\left(cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + isin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) =$$

$$= 2\left(cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + isin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3.$$

Полагая последовательно $k = 0,1,2,3$, выпишем все корни

$$k = 0: z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$k = 1: z_1 = 2\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$k = 2: z_2 = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right),$$

$$k = 3: z_3 = 2\left(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}\right).$$

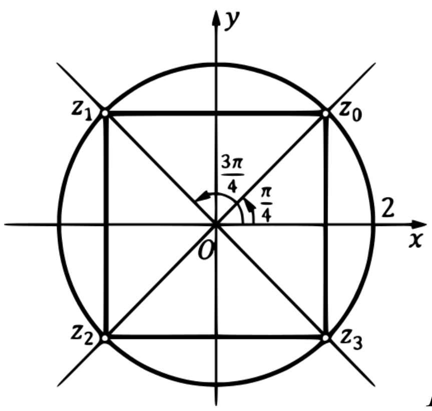

Рис.4

На плоскости корни располагаются на окружности радиуса 2 в вершинах правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (см. рис. 4).

Решение уравнений

<u>Пример.</u>

Решить уравнение $z^2 + 4 = 0$.

Решение. $z = \sqrt{-4}$ следовательно, $z_1 = 2i$ $z_2 = -2i$. Оба корня являются мнимыми числами.

<u>Пример.</u>

Решить уравнение $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Решение. Обозначим $t = z^2$. Уравнение примет вид $t^2 - 2t + 4 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $t_2 = 1 - \sqrt{3}i$, откуда $z_{1,2} = \sqrt{t_1}$, $z_{3,4} = \sqrt{t_2}$.
Пусть $z = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$. Находим модуль и аргумент комплексного числа

$$\left|1 + \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2, \quad arg\left(1 + \sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Далее по формуле (1.5) получаем

$$z_{1,2} = \sqrt{1 + \sqrt{3}i} = \sqrt{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} + isin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right), \qquad k = 0{,}1.$$

Откуда $z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6}\right)$

По аналогии находим $z = \sqrt{1 - \sqrt{3}i}$,

т.е. $z_3 = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $z_4 = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

Все корни находятся на окружности радиуса $R = \sqrt{2}$ (см. рис.5).

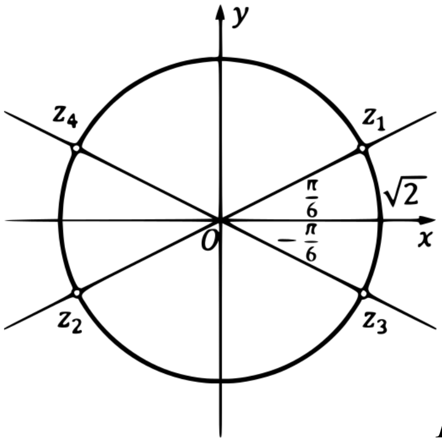

Рис. 5

1.6 Показательная форма записи комплексного числа

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi,$$

перепишем комплексное число в виде

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi) = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$, $\varphi -$ аргумент z.

Отметим, что

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Пример. Записать комплексное число $z = -3 - 3i$ в тригонометрической и показательной форме.

Решение. Число z находится в III четверти. Найдем модуль и аргумент

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}, \qquad \varphi = arg\, z = -\frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма записи z

$$z = 3\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

Показательная форма записи $z = 3\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.