Лекция 5. Нормальное распределение.

Нормальное распределение непрерывной случайной величины. Плотность и функция распределения. Вероятность попадания в интервал. Вероятность заданного отклонения. Стандартная нормальная случайная величина. Законы больших чисел. Центральная предельная теорема.

5.1. Плотность и функция распределения

Рассмотрим ещё одно распределение непрерывной случайной величины, имеющее большое теоретическое и прикладное значение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. *Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, если её плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{5.1}$$

Этот факт будем записывать так: $\xi \sim N(a;\sigma)$.

Нормальное распределение определяется двумя параметрами a и σ.

Докажем, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Действительно:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{c} \frac{(x-a)}{\sigma} = t \implies x = \sigma t + a \\ dx = \sigma dt \end{array}\right] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Полученный интеграл называется интегралом Пуассона и его значение равно $\sqrt{2\pi}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}. \tag{5.2}$$

Подставив этот результат в последнее выражение, получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$ 1.

Найдем функцию распределения:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Выразим функцию распределения нормального закона $F(x)$ через функцию Лапласа, введённую в п. 2.3 (формула 2.16), для чего сделаем замену переменных:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left[\begin{array}{c} \frac{(t-a)}{\sigma} = z \implies z = \sigma z + a \\ dt = \sigma dz \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz == \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{x-a}{0}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Здесь использовался тот факт, что из четности подынтегральной функции в интеграле Пуассона следует:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Итак, для функции распределения нормального закона получим выражение:

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{5.3}$$

Отметим, что при $a = 0$ и $\sigma = 1$

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\big(x\big). \tag{5.4}$$

Найдём математическое ожидание нормально распределённой случайной величины.

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \left[\begin{array}{cc} \frac{(x-a)}{\sigma} = t \implies & x = \sigma\sigma t + a \\ & dx = \sigma t \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t + a)e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0 + a = a.$$

Самостоятельно докажите, что дисперсия равна σ^2, т.е.

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx - a^2 = \sigma^2.$$

Итак, для случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение, параметры a и σ имеют простой вероятностный смысл:

$$M(\xi) = a; \quad D(\xi) = \sigma^2; \quad \sigma(\xi) = \sigma. \tag{5.5}$$

Графики плотности и функции распределения нормального закона приведены на рис. 21. График плотности нормального распределения иногда называют кривой Гаусса.

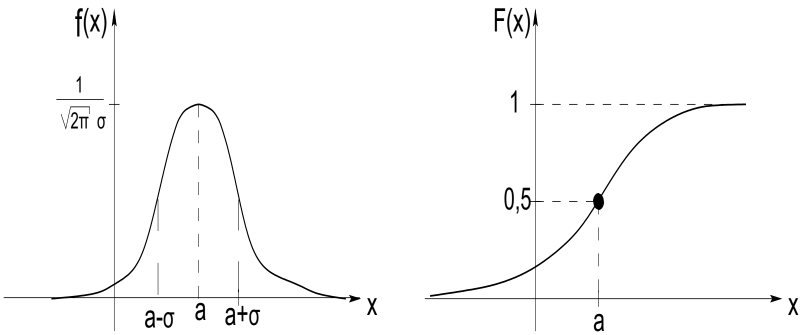

Рис. 21. *Плотность и функция распределения нормального распределения*

В соответствии со свойством 2 функции распределения получаем формулу для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в заданный интервал:

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right)\right) -$$

$$-\left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right),$$

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \quad (5.6)$$

В частности, если интервал полубесконечный, учитывая тот факт, что $\Phi(+\infty) = 0{,}5$, $\Phi(-\infty) = -0{,}5$, получаем:

$$P\{\xi < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) + 0{,}5,$$

$$P\{x \leqslant \xi\} = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

5.2. Вероятность заданного отклонения для нормального распределения

Пользуясь формулой (5.6), можно получить формулу для вычисления вероятности заданного отклонения нормальной случайной величины от математического ожидания:

$$P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = P\{-\varepsilon < \xi - a < \varepsilon\} = P\{a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Окончательно имеем:

$$P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \quad (5.7)$$

Замечание 5.1. *Познакомившись с нормальным распределением, заметим, что локальная и интегральные теоремы Лапласа дают приближения для вероятностей биномиально распределённой случайной величины через соответствующие вероятности нормально распределённой случайной величины. Аналогично, с помощью формулы (5.6) получается приближённая формула (2.19) для вероятности отклонения частоты от вероятности в испытаниях Бернулли.*

Пример 5.1. $\xi \sim N(20; 10)$. *Найти* $P\{|\xi - 20| < 3\}$ *и* $P\{|\xi - 10| < 3\}$.

►По формуле (5.6) определяем

$$P\{|\xi - 20| < 3\} = 2\Phi\Big(\frac{3}{10}\Big) \approx 2 \cdot 0{,}1179 = 0{,}2358.$$

Значение $\Phi(0{,}3) = 0{,}1179$ находим по таблице приложения 2.

Для нахождения $P\{|\xi - 10| < 3\}$ нельзя применить формулу (5.6), т.к. $a = 20 \neq 10$. Эту вероятность найдём по формуле (5.5):

$$P\{|\xi - 10| < 3\} = P\{-3 < \xi - 10 < 3\} = P\{7 < \xi < 13\} =$$
$$= \Phi\Big(\frac{13 - 20}{10}\Big) - \Phi\Big(\frac{7 - 20}{10}\Big) = \Phi(1,3) - \Phi(0{,}7) \approx$$
$$\approx 0{,}4032 - 0{,}2580 = 0{,}1452.$$

Ответ: $P\{|\xi - 20| < 3\} \approx 0{,}236$; $P\{|\xi - 10| < 3\} \approx 0{,}145$.

Применим формулу (5.6) для вычисления вероятности отклонения при $\varepsilon = 3\sigma$.

$$P\{|\xi - a| < 3\sigma\} = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Мы получили известное в технике «правило трёх сигм»: *для нормально распределённой случайной величины практически невозможно её отклонение от математического ожидания по абсолютной величине более трёх σ.*

На практике в менее ответственных случаях можно также применять аналогичное «правило двух сигм» т.к.

$$P\{|\xi - a| < 2\sigma\} \approx 0{,}9544.$$

5.3. Стандартная нормальная случайная величина

Теорема 5.1. *Если $\xi \sim N(a;\sigma)$, то $\zeta = k\xi + b \sim N(ka + b;\ |k|\ \sigma)$.*

Доказательство. Найдём функцию распределения $F_\zeta(x)$ случайной величины ζ при $k > 0$:

$$F_\zeta(x) = P\{\zeta < x\} = P\{k\xi + b < x\} = P\Big\{\xi < \frac{x - b}{k}\Big\} =$$
$$= 0{,}5 + \Phi\left(\frac{\frac{x-b}{k} - a}{\sigma}\right) = 0{,}5 + \Phi\Big(\frac{x - (ka + \sigma)}{k\sigma}\Big).$$

Таким образом, доказано, что $\zeta \sim N(ka+\sigma;\ k\sigma)$ при $k>0$. Проведем аналогичные выкладки при $k<0$:

$$F_\zeta(x) = P\{\zeta < x\} = P\{k\xi + b < x\} = P\Big\{\xi > \frac{x-b}{k}\Big\} =$$

$$= 1 - P\Big\{\xi < \frac{x-b}{k}\Big\} = 1 - 0{,}5 - \Phi\bigg(\frac{\frac{x-b}{k} - a}{\sigma}\bigg) =$$

$$= 0{,}5 - \Phi\Big(\frac{x-(ka+b)}{k\sigma}\Big) = 0{,}5 + \Phi\Big(\frac{x-(ka+b)}{-k\sigma}\Big),$$

т.е. при $k<0$ $\zeta \sim N(ka+\sigma;\ -k\sigma)$. Обобщая эти два вывода, получим утверждение теоремы.

Теорема 5.2. *Если $\zeta \sim N(a;\ \sigma)$, то $\xi_{cm} = \dfrac{\zeta - a}{\sigma} \sim N(0;1)$.*

Действительно, так как $\xi_{\text{ст}} = \dfrac{\zeta}{\sigma} - \dfrac{a}{\sigma}$, то по теореме 5.1 для $k = \dfrac{1}{\sigma}$, $b = -\dfrac{a}{\sigma}$, получаем, что $\xi_{\text{ст}}$ имеет нормальное распределение с параметрами

$$\frac{1}{\sigma}\cdot a - \frac{a}{\sigma} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sigma}\cdot\sigma = 1.$$

Определение 5.2. *Случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами $a=0$ и $\sigma=1$, называется стандартной (нормированной) нормальной случайной величиной , а её распределение — стандартным (нормированным) нормальным.*

Плотность и функция стандартного нормального распределения даются формулами:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad F_{\text{ст}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 0{,}5 + \Phi(x). \qquad (5.8)$$

5.4. Предельные теоремы теории вероятностей

Законы больших чисел

Теперь познакомимся с разделом теории вероятностей, посвящённым получению приближённых формул для вероятностей суммы большого числа случайных величин.

Теорема 5.3. ***(Неравенство Чебышева.)*** *Для случайной величины ξ при $\forall\ \varepsilon > 0$ верно неравенство:*

$$P\{|\xi - M(\xi)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство проведём для непрерывной случайной величины ξ с плотностью $f(x)$, хотя теорема верна и для дискретных случайных величин. Оценим вероятность противоположного события:

$$P\{|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon\} = P\{\xi \geqslant M(\xi)+\varepsilon \text{ или } \xi \leqslant M(\xi)-\varepsilon\} =$$

$$= P\{\xi \leqslant M(\xi)-\varepsilon\} + P\{\xi \geqslant M(\xi)+\varepsilon\} = \int\limits_{-\infty}^{M(\xi)-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{M(\xi)+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{M(\xi)-\varepsilon} \frac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx + \int\limits_{M(\xi)+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{M(\xi)} \frac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx + \int\limits_{M(\xi)}^{+\infty} \frac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(\xi)\big)^2 f(x)dx = \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Первое неравенство в этой цепочке объясняется тем, что подынтегральные функции умножили на выражение $\dfrac{\big(x - M(\xi)\big)^2}{\varepsilon^2}$, которое больше или равно 1, т.к. в области интегрирования x удовлетворяет неравенству $|x - M(\xi)| \geqslant \varepsilon$. Второе неравенство верно, т.к. при увеличении интервала интегрирования интеграл от неотрицательной функции не уменьшается.

Из полученного неравенства:

$$P\{|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2},$$

переходя к вероятности противоположного события, получаем неравенство Чебышева.

Пример 5.2. *В партии 10 лампочек вероятность отказа каждой из которых* 0,05. *Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения числа отказавших ламп от математического ожидания меньше одного.*

►Пусть ξ — число отказавших лампочек; эта случайная величина имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 10$, $p = 0{,}05$.

$$M(\xi) = np = 0{,}5;\ D(\xi) = npq = 0{,}475.$$

По теореме 5.3 имеем:

$$P\{|\xi - 0{,}5| < 1\} \geqslant 1 - \frac{0{,}475}{1}.$$

Другими словами: $P\{|\xi - 0{,}5| < 1\} \geqslant 0{,}525$.

Замечание 5.2. *Неравенство Чебышева используется при доказательстве ряда теорем (иногда его называют лемма Чебышева), однако оно даёт довольно грубую оценку для приведённой вероятности. Так, в примере 5.2, раскрывая модуль, мы получили неравенство:*

$$P\{-0{,}5 < \xi < 1{,}5\} \geqslant 0{,}525.$$

Однако приведённый интервал может быть заведомо уменьшен, т.к. $\xi \geqslant 0$*:*

$$P\{-0{,}5 < \xi < 1{,}5\} = P\{0 \leqslant \xi < 1{,}5\}.$$

Теорема 5.4. ***(Закон больших чисел в форме Чебышева.)*** *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *— независимые случайные величины с равномерно ограниченными дисперсиями* $\Big(D(\xi_i) \leqslant C, i = 1, 2, \ldots\Big)$*, то для* $\forall\ \varepsilon > 0$ *будет:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i)\ \right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доказательство. Обозначим $\zeta_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, получаем:

$$M(\zeta_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M(\xi_i)}{n}, \quad D(\zeta_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} D(\xi_i)}{n^2} \leqslant \frac{n\cdot C}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

На основании неравенства Чебышева для ζ_n получаем:

$$P\{|\zeta_n - M(\zeta_n)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{D(\zeta_n)}{\varepsilon^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 1 \geqslant P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M(\xi_i)}{n}\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, поскольку пределы левой и правой частей равны 1, получаем утверждение теоремы.

Закон больших чисел в форме Чебышева утверждает, что для большого числа независимых случайных величин практически невозможны значительные отклонения их среднего арифметического от среднего арифметического их математических ожиданий.

Следствие 5.1. *Если в условиях теоремы 5.4 $M(\xi_1) = M(\xi_2) = \ldots = a$, то для $\forall\ \varepsilon > 0$ будет:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum \xi_i}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Действительно, в этом случае $M(\zeta_n) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} M(\xi_i)}{n} = \dfrac{na}{n} = a.$

Замечание 5.3. *На практике закон больших чисел в форме Чебышева применяют, например, в теории ошибок. Следует отметить, что результат любого измерения есть случайная величина. При этом различают грубые ошибки измерения, которые можно устранить, основываясь на физической природе измеряемого объекта, Так, если в ряду измерения роста группы людей встретилось значение* 17,8 *м. — это, очевидно, грубая ошибка измерения. Данный результат следует изъять, если нельзя его уточнить. Далее, бывают систематические ошибки измерения. Эти ошибки, как правило, вызываются* *неисправностью измерительного прибора; они не являются случайными и их можно устранить, проверив прибор и внеся поправку в измерения. Так, например, если часы спешат на 5 минут, то от измеренной величины нужно отнять 5 минут, чтобы получить верное время. Наконец, все остальные ошибки — случайные ошибки измерения, вызываются множеством различных факторов: дрожание стрелки прибора, неточное считывание показаний («косо взглянул» на стрелку), отклонения в условиях измерения и проч. Таким образом, результат измерения можно считать случайной величиной, равной сумме большого числа других случайных величин. В соответствии с теоремой 5.4 для уточнения результата нужно произвести n независимых измерений и усреднить их результат. Следует, однако, заметить, что все равно результат будет получен с точностью, не превышающей точности самого измерительного прибора, которая обычно указывается в технической документации на него.*

Теорема 5.5. ***(Закон больших чисел в форме Бернулли.)*** *В независимых испытаниях Бернулли с вероятностью p появления события A в каждом для $\forall\ \varepsilon > 0$ будет:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

здесь m — число появлений события A в n испытаниях.

Доказательство. Представим относительную частоту $\dfrac{m}{n}$ в виде отношения $\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$, где случайная величина $\xi_i = 1$, если в i-м испытании появилось событие A (см. п. 91.1). Для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ выполняется следствие 5.1, т.к. $M(\xi_1) = M(\xi_2) = \ldots =$, $= p$, $D(\xi_1) = D(\xi_2) = \ldots = pq \leqslant 1$. На основании следствия 5.1 получаем утверждение теоремы 5.5.

Теорема 5.5 даёт теоретическое обоснование статистическому определению вероятности, т.к. утверждает, что при большом числе независимых испытаний практически невозможны значительные отклонения относительной частоты события A от вероятности p его появления в каждом испытании.

Из законов больших чисел не следует, что при $n \to \infty$ предел последовательности случайных величин равен какому-то числу (среднему арифметическому математических ожиданий). Обычное понятие предела неприменимо к последовательности случайных величин.

Определение 5.3. *Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ сходится по вероятности к числу a, если для $\forall\ \varepsilon > 0$ будет:*

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - a| < \varepsilon\} = 1.$$

Итак, закон больших чисел в форме Чебышева утверждает, что при выполнении определённых условий среднее арифметическое n независимых случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий при $n \to \infty$.

Самостоятельно сформулируйте закон больших чисел в форме Бернулли, используя сходимость по вероятности.

5.5. Центральная предельная теорема

Известно, что нормальные случайные величины широко распространены на практике, что и объясняет их название. В чём причина этого? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема, доказанная русским математиком А.М. Ляпуновым.

Теорема 5.6. *(Центральная предельная теорема.) Если случайная величина ζ_n является суммой большого числа n независимых случайных величин, удовлетворяющих условию Ляпунова, то ζ_n имеет распределение, близкое к нормальному:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\zeta_n - A_n}{B_n} < x\right\} = 0{,}5 + \Phi(x),$$

$$\text{где} \quad \zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad A_n = M(\zeta_n) = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$B_n^2 = D(\zeta_n) = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Условие Ляпунова заключается в следующем:

(1) Все случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одинаковое распределение.

(2) Все дисперсии $D(\xi_1), D(\xi_2), \ldots$ конечны и отличны от нуля.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M\big|\xi_i - M(\xi_i)\big|^{2+\delta}}{\left(\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\right)^{\frac{2+\delta}{2}}} = 0$ для некоторого $\delta > 0$.

Условия Ляпунова приводят к тому, что в сумме $\dfrac{\zeta_n - A_n}{B_n}$ каждое слагаемое оказывает на сумму малое влияние. Мы примем эту теорему без доказательства.