Лекция №4

§3. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D. Рассмотрим кусочно-гладкую ориентированную кривую L, лежащую в D, т.е. будем предполагать, что на L задано направление от начальной точки z_0 к конечной точке z.

Введем <u>*определение интеграла от функции комплексного переменного*</u>.

Разобьем кривую L произвольным образом на n элементарных частей $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ точками $z_0, z_1, \ldots, z_n = z$. Составим интегральную сумму $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta z_k$, где $\xi_k \in \gamma_k$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $k=0,1,\ldots,n-1$. Предел интегральной суммы σ_n при $\lambda = \max_k |\Delta z_k| \to 0$, если он существует и конечен, называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой (вдоль кривой) L :

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta z_k .$$

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u(x,y)$, $v(x,y)$ – действительные функции переменных x и y. Тогда можно показать, что интеграл от функции $f(z)$ равен сумме двух криволинейных интегралов, а именно

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy +$$

$$+i\int_L u(x,y)dy + v(x,y)dx.$$

Интеграл от функции комплексного переменного обладает следующими *свойствами.*

1. Свойство линейности.

$$\int_L [c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)]\, dz = c_1 \int_L f_1\,(z)dz \pm c_2 \int_L f_2\,(z)dz,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

2. Свойство аддитивности.

$$\int_{L_1 \bigcup L_2} f\,(z)dz = \int_{L_1} f\,(z)dz + \int_{L_2} f\,(z)dz,$$

где $L_1 \bigcup L_2$ – кривая, составленная из кривых L_1 и L_2.

3. $\int_L f\,(z)dz = -\int_{L^-} f\,(z)dz,$

где L^- – кривая, совпадающая с L, но проходимая в противоположном направлении.

4. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f\,(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\,|_{z_0}^{z_1},$$

где $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

5. Если кривая L задана параметрическими уравнениями

$x = x(t)$, $y = y(t)$

начальная и конечная точки дуги L соответствуют значениям параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int_L f\,(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f\,[z(t)]z'(t)dt,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_L (2\overline{z} - i)\,dz$ по параболе $y = x^2$, соединяющей точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

Решение. Перепишем подынтегральную функцию в виде $2\overline{z} - i = 2x - 2yi - i = 2x - i(2y + 1)$, т.е. $u(x,y) = 2x$, $v(x,y) = -(1 + 2y)$.

Используем для вычисления интеграла формулу $\int_L (2\overline{z} - i)\,dz = \int_L 2\,xdx + (1 + 2y)dy + i\int_L 2\,xdy - (1 + 2y)dx$.

Для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2xdx$ $(0 \le x \le 1)$. Тогда

$$\int_L (2\overline{z} - i)\,dz = \int_0^1 [2x + (1 + 2x^2)2x]\,dx +$$

$$+i\int_0^1 [2x \cdot 2x - (1 + 2x^2)]\,dx =$$

$$= \left(\frac{4x^2}{2} + \frac{4x^4}{4}\right)\Big|_0^1 + i\left(\frac{2x^3}{3} - x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 3 + i\left(\frac{2}{3} - 1\right) = 3 - \frac{1}{3}i.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_i^{2i}(3z^2+1)\,dz$.

Решение. Подынтегральная функция аналитическая всюду (достаточно проверить все условия теоремы 2.2), можно применить формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_i^{2i}(3z^2+1)\,dz=(z^3+z)\,\Big|_i^{2i}=(2i)^3+2i-i^3-i=$$

$$=-8i+2i+i-i=-6i.$$

Более сложные вопросы возникают при вычислении так называемых «контурных» интегралов.

Теорема 3.1. *(теорема Коши для односвязной области)*.

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D , а контур C – замкнутый контур, принадлежащий области D, то интеграл

$$\oint_C f\,(z)dz=0.$$

Отметим, что линия называется связной, если из любой ее точки можно пройти по этой линии в любую другую ее точку.

Порядком связности ограниченной области D называется число n связных частей, на которое разбивается ее граница.

Напомним, что область называется односвязной, если любую замкнутую кривую, лежащую в этой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.

Например, круг $|z|\le 3$ – односвязная область. Встречаются *n-связные* (многосвязные, *n>1*) области, например, кольцо $1\le|z|\le 3$ – двусвязная область (*n=2)*.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{|z|=0,5} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{(z+2)^2(z^2+1)}$ является аналитической внутри области D, ограниченной контуром C: $|z| = 0{,}5$. Область D – односвязная, контур C – замкнутый контур, принадлежащий области D.

По теореме 3.1 получаем

$$\int_{|z|=0,5} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 0.$$

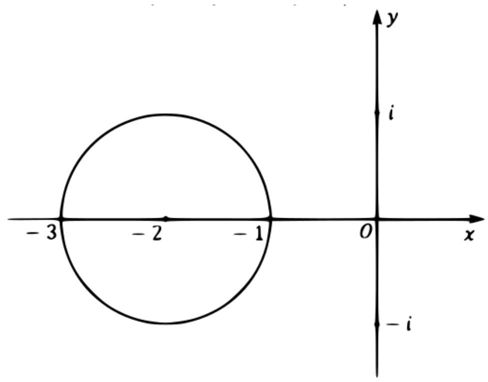
Теорема 3.2. (*теорема Коши для многосвязной области*).

Пусть D - n-связная область (n>1) и ее граница состоит из n замкнутых кусочно-гладких линий $L_0, L_1, \ldots, L_n$, *причем контур* L_0 *охватывает* $L_1, \ldots, L_n$, *а каждый из* $L_1, \ldots, L_n$ *расположен вне остальных. Пусть* $f(z)$ *– аналитическая функция в области* D *и непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$. *Тогда интеграл от* $f(z)$ *по внешнему контуру* L_0 *равен сумме интегралов по внутренним контурам при условии, что обход всех контуров совершается в одном направлении*

$$\int_{L_0} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \ldots + \int_{L_n} f(z)dz. \qquad (3.5)$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{(z+2)^2(z^2+1)}$ является аналитической за исключением точек $z_1 = -2$ и $z_{2,3} = \pm i$. Внутри области D, ограниченной контуром C: $|z+2| = 1$, находится точка $z_1 = -2$.



В этом случае нужно применять теорему 3.2. В последующих лекциях будет построена теория для вычисления таких интегралов: теория вычетов.

Теория вычетов предполагает изучение рядов с комплексными членами, рядов Тейлора и Лорана, изучение классификации изолированных особых точек аналитической функции.

§ 4. Ряды с комплексными членами

4.1 Числовые ряды с комплексными членами

Определение 4.1. *Последовательность комплексных чисел* $\{z_n = x_n + iy_n\}$, $n = 1,\ 2, \ldots,$ *называется сходящейся, если сходятся соответствующие последовательности действительной части* $\{x_n\}$ *и мнимой части* $\{y_n\}$.

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$, $n = 1,\ 2, \ldots$. Составленное из членов этой последовательности выражение $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называется *числовым рядом с комплексными членами*, z_n - общий член ряда.

Сумма $S_n = z_1 + z_2 + ... + z_n$ называется n-ой *частичной суммой* ряда. Частичные суммы образуют новую числовую последовательность $S_1, S_2, ..., S_n, ...$.

Определение 4.2. *Числовой ряд с комплексными членами называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е.* $\exists \lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$. *Число* S *называется суммой ряда.*

Числовой ряд называется расходящимся, если предел последовательности частичных сумм равен бесконечности или не существует.

Исследование ряда с комплексными членами сводится к исследованию двух вещественных рядов на основании следующего утверждения.

Сходимость ряда с комплексными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$ к сумме $S = A + iB$ равносильна сходимости двух вещественных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ соответственно к суммам A и B.

Определение 4.3. *Ряд с комплексными членами называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | z_n | = \sum_{n=1}^{\infty} | (x_n + iy_n) | = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^{\ 2} + y_n^{\ 2}} \ .$$

Теорема4.1. *Если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам ряд с комплексными членами.*

4.2 Степенные ряды с комплексными членами

Пусть дана последовательность функций комплексной переменной

$$u_1(z),\ u_2(z),\ ...,\ u_n(z),\ ...\ ,$$

определенных на некотором множестве D комплексной плоскости: $D \subset C$. Выражение вида

$$u_1(z)+u_2(z)+...+u_n(z)+...=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

называется *функциональным* рядом с комплексными членами.

Определение 4.4. *Множество значений переменной z, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда.*

Определение 4.5. *Степенным рядом с комплексными членами называется функциональный ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + ...$$

Здесь z - комплексная переменная, c_n и z_0 - комплексные числа. При $z_0 = 0$ степенной ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ...$$

Теорема 4.2. (теорема Абеля). *Пусть степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + ...$$

сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$. Тогда этот ряд абсолютно сходится в круге $|z-z_0| < |z_1 - z_0| = R$.

Следствие. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ расходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то этот ряд расходится в области $|z-z_0| > |z_1-z_0| = R$, т.е. вне круга $|z-z_0| \leq |z_1-z_0| = R$.

Следствие. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ существует число R, $0 \leq R \leq \infty$, называемое *радиусом сходимости* степенного ряда, такое, что внутри круга $|z-z_0| < R$ ряд сходится, а вне этого круга, т.е. в области $|z-z_0| > R$, ряд расходится.

Если R - радиус сходимости, то область $|z-z_0| < R$ называется *кругом сходимости* степенного ряда. В точках границы $|z-z_0| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. В этом случае требуется дополнительное исследование.