Лекция 6

Несобственные интегралы.

Понятие определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ было введено в предположении, что промежуток интегрирования $[a,b]$ конечен и подинтегральная функция $f(x)$ ограничена. Отказ от этих предположений приводит к понятию несобственного интеграла с бесконечными пределами или несобственного интеграла от неограниченной функции.

Введём понятие несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом. Пусть функция $y=f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ для любого $b>a$.

<u>Определение</u>. Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом называется $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. Обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, несобственный интеграл называется сходящимся. Если этот предел не существует или равен бесконечности, несобственный интеграл называется расходящимся. Если $f(x)>0$ при $x\geq a$, несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом можно интерпретировать как площадь под бесконечной кривой, а сходимость интеграла означает конечность этой площади (рис. 11).

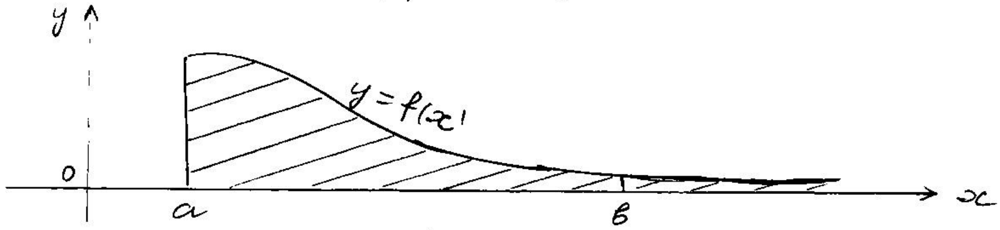

рис. 11

Если $\mathcal{F}(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ при $x \geq a$, то по формуле Ньютона - Лейбница

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \mathcal{F}(x)\Big|_a^{+\infty} = \mathcal{F}(+\infty) - \mathcal{F}(a),$$

где $\mathcal{F}(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{F}(x)$.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом и с обоими бесконечными пределами:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$$

Рассмотрим примеры.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty$ - интеграл расходится.

3. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{+\infty}$.

Т. к. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ не существует, то данный интеграл также расходится.

4. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\Big|_1^{+\infty} =$

$= 0 - \ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2}$.

В последнем примере воспользовались следующим пределом:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right) = \ln 1 = 0.$$

При вычислении несобственных интегралов можно применять метод замены переменной и метод интегрирования по частям. Например:

1. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln^2 x} = \left[\begin{matrix} t = \ln x, & t\in[1,+\infty) \\ dt = \frac{dx}{x} & \end{matrix}\right] = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_1^{+\infty} = 1.$

2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\cdot\ln x \Big|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1.$

Применено правило Лопиталя для вычисления предела:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

3. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\cos x\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\sin x\,dx =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot\sin x\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot\cos x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot\cos x\,dx.$$

Относительно искомого интеграла получено уравнение. Решение этого уравнения даёт следующий результат:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot\cos x\,dx = \frac{2}{5}.$$

Кроме того использованы пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{-2x}\cdot\sin x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}(e^{-2x}\cdot\cos x) = 0.$$

В некоторых случаях исследовать несобственный интеграл на сходимость можно, не вычисляя первообразную, а пользуясь признаками сходимости. Сформулируем эти признаки.

I. Если $0 \le f(x) \le g(x)$ для любого $x \ge a$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

II. Если $f(x) \ge 0$ и $g(x) > 0$ для любого $x \ge a$ и существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ оба сходятся или оба расходятся.

Сформулированные теоремы позволяют при исследовании на сходимость несобственных интегралов заменять подинтегральные функции на более простые. Например, для сравнения часто используют $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, который сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Рассмотрим примеры.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{3x+1}{5x^3+2}dx$ сходится, т.к.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{5x^3+2}:\frac{1}{x^2}\right)=\frac{3}{5}, \text{ а } \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} \text{ сходится.}$$

2. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ сходится, т.к. $e^{-x^2}\le e^{-x}$ для любого $x\ge 1$, а $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{e}$ сходится.

<u>Определение.</u> Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

<u>Определение.</u> Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется условно сходящимся, если сам интеграл сходится, а $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится.

Верно следующее утверждение: если

$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится, т.е. из абсолютной сходимости следует сходимость. Рассмотрим примеры.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ сходится абсолютно, т.к.

$\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ для любого $x \geqslant 1$, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ - сходится.

2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{-\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$

Оба слагаемых в правой части конечны, следовательно, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится. Исследуем данный интеграл на абсолютную сходимость. Для этого воспользуемся неравенством:

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x \text{ для любого } x.$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx.$$

Первый из двух интегралов в правой части расходится, а второй сходится, в чём можно убедиться, применяя для его вычисления формулу интегрирования по частям. Разность двух интегралов, один из которых равен бесконечности, а другой имеет конечное значение, равна бесконечности, следовательно $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится условно.

Перейдём к несобственным интегралам от неограниченных функций. Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b-a$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$ (рис. 12).

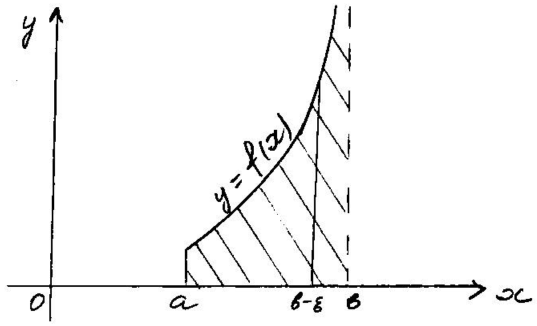

рис. 12

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

называется несобственным интегралом от неограниченной функции. Если предел конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся. Если предел не существует или равен бесконечности, то интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл от неограниченной функции в случае, когда точкой разрыва является левый конец отрезка интегрирования или внутренняя точка c отрезка $[a, b]$ (рис. 13, 14).

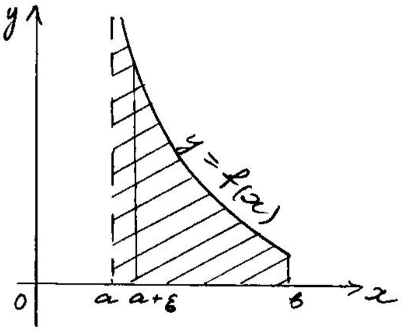

рис. 13

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

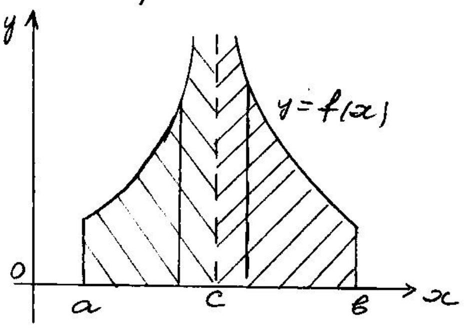

рис. 14

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В последнем случае сходимость интеграла предполагает сходимость обоих интегралов в правой части равенства.

При вычислении несобственных интегралов от неограниченных функций можно применять те же приёмы, что и при вычислении определённых интегралов. Рассмотрим примеры.

1. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}\,\Big|_1^5 = 4.$

2. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\cdot \ln x\,\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -4\sqrt{x}\,\Big|_0^1 = -4.$

Использован следующий предел, вычисленный по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+0}\sqrt{x}\cdot\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0+0}(-2\sqrt{x})=0.$$

3. $$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}=\left[\begin{array}{l}t=\arcsin x,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\end{array}\right]=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}\,\Big|_0^{\pi/2}=2\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2\pi}.$$

При исследовании на сходимость интегралов от неограниченных функций применяются признаки сравнения, которые формулируются так же, как и для несобственных интегралов с бесконечными пределами. Для сравнения используют следующие интегралы:

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\alpha},\quad \int_a^b\frac{dx}{(b-x)^\alpha},$$ которые сходятся

при $\alpha<1$ и расходятся при $\alpha\geq 1$. Рассмотрим примеры.

1. $$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$ сходится, т.к.

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}:\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2},$$

а $$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$ сходится.

2. $$\int_0^2\frac{x\,dx}{(x^2-1)^2}$$ расходится, т. к. подинтегральная

функция терпит разрыв во внутренней точке $x=1$ отрезка интегрирования, и согласно определению

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^2} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^2} + \int_1^2 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^2}.$$

Оба интеграла в правой части являются расходящимися. Действительно, сравним подинтегральную функцию с функцией $g(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ при условии $x\to 1$:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{(x^2-1)^2} : \frac{1}{(x-1)^2}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x\cdot(x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{1}{4}$$

и учтём, что $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ и $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ расходятся. Кроме того, в расходимости интегралов $\int_0^1 \frac{x}{(x^2-1)^2}dx$ и $\int_1^2 \frac{x}{(x^2-1)^2}dx$

можно убедиться непосредственно. Например,

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2-1)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2-1)}\Big|_0^1 = \infty.$$

Ошибочным является следующее решение:

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{2(x^2-1)}\Big|_0^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right) = -\frac{2}{3},$$

т. к. при таком решении не учитывается, что подинтегральная функция терпит разрыв во внутренней точке отрезка $[0,2]$.