Лекция 4

2.5. Теорема Умова – Пойнтинга

Вектора электромагнитного поля удовлетворяют выражению, называемому теоремой Умова – Пойнтинга. При принятой в электродинамике дедуктивной системе изложения удобнее начинать рассмотрение теоремы не с ее формулировки, а с доказательства, с вывода выражения из основополагающей системы уравнений Максвелла. Вывод основан на применении тождества из математической теории поля

$$div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\equiv\vec{H}\cdot rot\,\vec{E}-\vec{E}\cdot rot\,\vec{H}. \qquad (2.25)$$

запишем два первых уравнения из (2.6) и домножим их скалярно в соответствии с правой частью тождества

$$rot\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\quad\Big|\cdot\vec{E},$$

$$rot\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\quad\Big|\cdot\vec{H}.$$

Вычтем почленно первое уравнение из второго

$$\vec{H}\cdot rot\vec{E}-\vec{E}\cdot rot\vec{H}=-\vec{J}\cdot\vec{E}-\vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}-\vec{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}.$$

Преобразуем левую часть в соответствии с указанным выше тождеством и сразу учтем, что полный ток в среде состоит из стороннего и наведенного токов, или в терминах объемных плотностей $\vec{J}=\vec{J}_{н}+\vec{J}_{cm}$.

$$div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=-\vec{J}_{\text{í}}\cdot\vec{E}-\vec{J}_{\text{ñò}}\cdot\vec{E}-\vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}-\vec{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}.$$

Выделим в пространстве, в котором существует электромагнитное поле, односвязный объем *V*, ограниченный замкнутой поверхностью *S* и проинтегрируем полученное выражение по этому объему

$$\int\limits_V div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dv=-\int\limits_V\vec{J}_{\text{í}}\cdot\vec{E}\,dv-\int\limits_V\vec{J}_{\text{ñò}}\cdot\vec{E}dv-\int\limits_V(\vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}+\vec{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{B})dv$$

Здесь два однотипных члена в правой части объединены в один интеграл. Левую часть полученного выражения можно преобразовать в соответствии с теоремой Остроградского-Гаусса (2.5), получим

$$\oint\limits_S(\vec{E}\times\vec{H})d\vec{s}+\int\limits_V\vec{J}_{н}\vec{E}\,dv+\int\limits_V(\vec{E}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}+\vec{H}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B})dv=-\int\limits_V\vec{J}_{cm}\vec{E}\,dv. \qquad (2.26)$$

Это выражение называется теоремой Умова – Пойнтинга. Рассмотрим его физический смысл, используя ряд упрощающих моделей.

2.5.1. Пусть в пространстве существует электромагнитное поле, которое слабо изменяется в окрестности некоторой точки. Выделим вблизи этой точки малый объем цилиндрической формы, как показано на рис. 2.4.

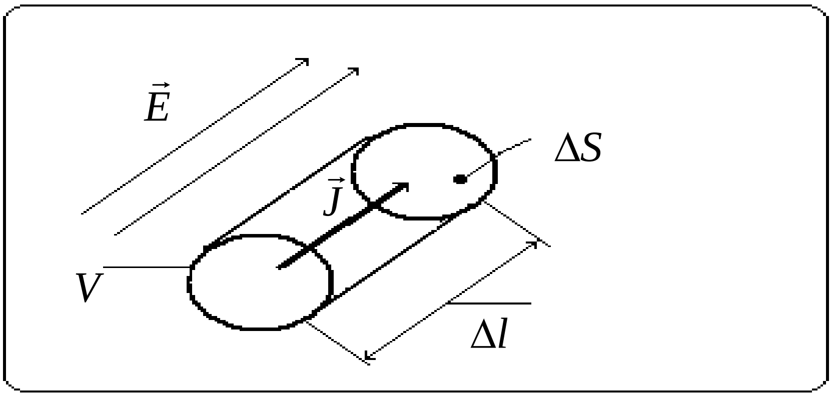

Рис.2.4 Модель объема в проводящей среде

Образующую цилиндра разместим параллельно силовым линиям напряженности электрического поля в среде. Вычислим значение второго интеграла в левой части (2.26) для выбранного объема. При этом учтем, что в изотропной среде в силу материального соотношения (1.7) вектора $\vec{J}$ и $\vec{E}$ параллельны, поэтому скалярное произведение равно произведению модулей векторов. Пользуясь условием малости объема вычислим интеграл по теореме о среднем.

$$\int\limits_V \vec{J}_н \cdot \vec{E}\,dv = J \cdot \Delta S \cdot E \cdot \Delta l = I \cdot U = P_{пот}\,. \qquad (2.27)$$

Таким образом, второй интеграл численно равен мощности потерь электромагнитного поля $P_{пот}$, которая затрачивается на нагрев среды в пределах объема. Значит и другие составляющие в (2.26) являются мощностями.

2.5.2. Интеграл, стоящий в правой части (2.26) имеет такой же вид, как рассмотренный в предыдущем пункте интеграл. Но плотность тока проводимости относится не к наведенному за счет электромагнитного поля току в среде, а к стороннему току, создающему электромагнитное поле. Поэтому ясно, что рассматриваемый интеграл численно равен мощности, отдаваемой сторонними источниками (сторонними токами) на создание электромагнитного поля в пределах объема, фигурирующего в интеграле.

2.5.3. Рассмотрим физический смысл третьего интеграла в левой части (2.26). Для этого представим модель в виде бесконечного объема, граница которого удалена на бесконечное расстояние. Тогда в силу граничного условия на бесконечности подынтегральное выражение в первом члене (2.26) равно нулю, поэтому весь первый интеграл обращается в нуль. Кроме того будем считать что в данной модели отсутствует проводимость среды во всем объеме. Тогда и второй интеграл, рассмотренный в 2.5.1, обращается в нуль, так как будет равна нулю объемная плотность наведенного тока проводимости в среде. Для этой модели выражение (2.26) примет вид

$$\int\limits_V (\vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{B})dv = -\int\limits_V \vec{J}_{ст}\vec{E}\,dv\,.$$

Согласно этому выражению для данной модели левый интеграл численно равен мощности электромагнитного поля, которое накапливается в объеме за счет работы сторонних источников. Для этого интеграла часто применяют другие формы записи

$$\int_V (\vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}+\vec{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{B})dv=\int_V \vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}dv+\int_V \vec{H}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}dv=P_{эл}+P_{магн}. \quad (2.28)$$

Мощность накапливания энергии электромагнитного поля в среде складывается из мощности накапливания энергии в электрическом поле $P_{эл}$ и в магнитном поле $P_{магн}$.

Для изотропной среды (2.28) принимает вид

$$\int_V \vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}dv+\int_V \vec{H}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}dv=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\int_V \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}^2dv+\frac{1}{2}\int_V \mu\mu_0\vec{H}^2dv),$$

в соответствии с определением мощности, члены, стоящие в скобках, представляют накопленную энергию электрического и магнитного поля в пределах объема V.

2.5.4. Введем новую модель для разъяснения физического смысла первого интеграла в (2.26). Рассмотрим конечный ограниченный объем, расположенный на конечном расстоянии от сторонних источников, создающих электромагнитное поле. Внутри выделенного объема сторонние источники отсутствуют. Пусть в начальный момент времени сторонние источники выключены, и электромагнитное поле в среде отсутствует. Тогда все выражение (2.26) для выделенного объема равно нулю. После включения сторонних источников они начинают создавать электромагнитное поле, которое начинает распространяться в разные стороны, и через какое-то время проникает во весь выделенный объем. При этом электромагнитные процессы в объеме начинают описываться выражением

$$\oint_S (\vec{E}\times\vec{H})d\vec{s}+\int_V \vec{J}_н\cdot\vec{E}\,dv+\int_V (\vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}+\vec{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{B})dv=0.$$

В этом выражении второй член не отрицателен, третий член также не может быть отрицательным из-за введенного ранее условия отсутствия поля в начальный момент времени. Значит и мощность потерь в среде и мощность накапливания энергии электромагнитного поля обусловлены первым членом, в котором фигурируют вектора поля на границе S объема V. И потери, и накопление энергии электромагнитного поля в объеме, рассматриваемом в данной модели, происходят из-за проникновения внешнего электромагнитного поля внутрь выделенного объема. Значит первый член в (2.26) численно равен мощности электромагнитного поля, проходящей через границу объема. Если мощность проходит внутрь объема, выражение

$$P_{прох}=\oint_S (\vec{E}\times\vec{H})d\vec{s} \quad (2.29)$$

отрицательно, и меняет знак, если мощность излучается наружу из объема.

2.5.5. Вектор $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$ называется вектором Пойнтинга. Его модуль численно равен плотности мощности электромагнитного поля в точке, в которой определены вектора напряженностей поля, а его направление указывает направление переноса энергии в данный момент времени. Важным является то, что перенос мощности обусловлен только тангенциальными к границе поверхности *S* составляющими векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Покажем это, рассматривая подынтегральное выражение в (2.29). Учтем, что $d\vec{s} = \vec{N}_0 \cdot ds$, где $\vec{N}_0$ вектор внешней нормали к поверхности S в каждой ее точке. Разложим вектора поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ каждый на нормальную и тангенциальную составляющую

$$\vec{E} = \vec{E}_N + \vec{E}_\tau, \qquad \vec{H} = \vec{H}_N + \vec{H}_\tau$$

и образуем подынтегральное выражение (2.29)

$$(\vec{E} \times \vec{H})d\vec{s} = \left[(\vec{E}_N + \vec{E}_\tau) \times (\vec{H}_N + \vec{H}_\tau)\right] \cdot \vec{N}_0 \cdot ds =$$

$$= \left[\ (\vec{E}_N \times \vec{H}_N)\vec{N}_0 + (\vec{N}_0 \times \vec{E}_N)\vec{H}_\tau + \vec{E}_\tau(\vec{H}_N \times \vec{N}_0) + \right.$$

$$\left. + (\vec{E}_\tau \times \vec{H}_\tau)\vec{N}_0\ \right] \cdot ds = (\vec{E}_\tau \times \vec{H}_\tau)\vec{N}_0,$$

здесь в преобразованиях использованы правила векторной алгебры для смешанного произведения трех векторов и тождественное равенство нулю векторного произведения коллинеарных векторов.

Таким образом, резюмируя соотношение (2.26) и анализ, приведенный в п.п. 2.5.1 – 2.5.4, теорему Умова-Пойнтинга можно сформулировать следующим образом. Мощность, затрачиваемая сторонними источниками в некотором объеме на создание электромагнитного поля численно равна сумме мощности электромагнитного поля, излучаемой через границы объема, мощности потерь, затрачиваемой на нагрев среды в пределах объема, и мощности накапливания энергии электромагнитного поля в объеме.

Фактически эта формулировка является законом сохранения энергии электромагнитного поля. Интересным является то, что закон сохранения энергии получен из системы уравнений Максвелла. Это говорит о степени общности системы уравнений Максвелла.

2.6. Теорема Умова – Пойнтинга для комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля

В подразделе 2.4 рассматривались преимущества применения комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля вместо мгновенных значений векторов поля в случае монохроматических полей. Поэтому необходимо закон сохранения энергии электромагнитного поля записать, используя комплексные амплитуды. Непосредственно ввести комплексные амплитуды в соотношение (2.26), используя комплексное продолжение, нельзя, так как выражения, стоящие под интегралами в теореме Умова – Пойнтинга являются нелинейными. Другим, корректным с точки зрения математики способом, связывающим мгновенное значение гармонического колебания с его комплексной амплитудой, является следующее представление

$$\vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}_0(x,y,z)\cos(\omega t + \varphi) = (\dot{\vec{H}}_0 e^{j\omega t} + \dot{\vec{H}}_0^* e^{-j\omega t})/2. \quad (2.30)$$

Здесь с правой стороны стоит полусумма комплексно-сопряженных чисел. Используя теорему Эйлера легко показать, что равенство выполняется. При этом мгновенное значение вектора напряженности магнитного поля представляется через комплексную амплитуду без применения логического оператора вычисления вещественной части комплексного числа. Заметим, что такой же подход мог быть использован и в подразделе 2.4. Таким же образом можно представить все вектора электромагнитного поля, входящие в (2.26), например $\vec{E} = (\dot{\vec{E}}_0 e^{j\omega t} + \dot{\vec{E}}_0^* e^{-j\omega t})/2$, тогда их комбинации, входящие в подынтегральные выражения (2.26), можно вычислить, например

$$\begin{aligned}&\vec{E}\times\vec{H} = \\ &= ((\dot{\vec{E}}_0 \times \dot{\vec{H}}_0)e^{j2\omega t} + (\dot{\vec{E}}_0^* \times \dot{\vec{H}}_0^*)e^{-j2\omega t} + (\dot{\vec{E}}_0 \times \dot{\vec{H}}_0^*) + (\dot{\vec{E}}_0^* \times \dot{\vec{H}}_0))/4\end{aligned} \quad (2.31)$$

Если использовать подобные соотношения в теореме Умова – Пойнтинга, то кроме наращивания громоздкости ничего не происходит. Смыслом введения комплексных амплитуд было избавление от временной зависимости, а в (2.31) эта зависимость присутствует. Ее можно устранить, если усреднить соотношение (2.31) по времени по периоду колебания. Раскладывая экспоненты в первых двух членах в правой части (2.31) по теореме Эйлера легко убедиться, что эти два члена имеют сомножители с гармонической зависимостью от времени. Известно, что среднее значение любой гармонической функции равно нулю. Поэтому при усреднении (2.31) первые два члена исчезнут, вторые два члена сохранятся неизменными, так как не имеют сомножителей, зависящих от времени. Поэтому

$$\overline{\vec{E}\times\vec{H}} = (\dot{\vec{E}}_0 \times \dot{\vec{H}}_0^* + \dot{\vec{E}}_0^* \times \dot{\vec{H}}_0)/4 = \mathrm{Re}\{\dot{\vec{E}}_0 \times \dot{\vec{H}}_0^*\}/2. \quad (2.32)$$

Подобным образом можно преобразовать все подынтегральные выражения (2.26), если записать это соотношение для средних значений мощностей. Определенная проблема возникает при преобразовании подынтегрального выражения в третьем члене в левой части (2.26), поэтому покажем преобразование подробнее

$$\begin{aligned}\vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} &= ((\dot{\vec{E}}_0 e^{j\omega t} + \dot{\vec{E}}_0^* e^{-j\omega t})\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\vec{D}}_0 e^{j\omega t} + \dot{\vec{D}}_0^* e^{-j\omega t}))/4 = \\ &= ((\dot{\vec{E}}_0 e^{j\omega t} + \dot{\vec{E}}_0^* e^{-j\omega t})\cdot j\omega(\dot{\vec{D}}_0 e^{j\omega t} - \dot{\vec{D}}_0^* e^{-j\omega t}))/4 = \\ &= j\omega(\dot{\vec{E}}_0\cdot\dot{\vec{D}}_0\cdot e^{j2\omega t} - \dot{\vec{E}}_0^*\cdot\dot{\vec{D}}_0^* e^{-j2\omega t} - \dot{\vec{E}}_0\cdot\dot{\vec{D}}_0^* + \dot{\vec{E}}_0^*\cdot\dot{\vec{D}}_0)/4.\end{aligned}$$

Тогда среднее значение будет равно

$$\overline{\vec{E}\cdot\partial\vec{D}/\partial t} = j\omega(-\dot{\vec{E}}_0\cdot\dot{\vec{D}}_0^* + \dot{\vec{E}}_0^*\cdot\dot{\vec{D}}_0)/4 = -\omega\cdot\mathrm{Im}(\dot{\vec{E}}_0\cdot\dot{\vec{D}}_0^*)/2, \quad (2.33)$$

где Im – оператор вычисления мнимой части комплексного числа.

Используя формы выражений (2.32) и (2.33) выражение теоремы Умова – Пойнтинга (2.26) для средних за период колебаний значений мощностей можно записать в виде (2.34)

$$\frac{1}{2}Re(\oint_S(\dot{\vec{E}}_0 \times \dot{\vec{H}}_0^*)d\vec{s} + \frac{1}{2}Re(\int_V \dot{\vec{J}}_{0н} \cdot \dot{\vec{E}}_0^* dv) - \frac{\omega}{2}Im(\int_V(\dot{\vec{E}}_0 \cdot \dot{\vec{D}}_0^* + \dot{\vec{H}}_0 \cdot \dot{\vec{B}}_0^*)dv) =$$

$$= -\frac{1}{2}Re(\int_V \dot{\vec{J}}_{0ст} \cdot \dot{\vec{E}}_0^* dv).$$

Это выражение часто применяется при решении задач при рассмотрении электромагнитных полей и волн.