7. Дискретные случайные величины

Случайная величина, функция распределения, её свойства. Дискретная случайная величина, ряд распределения, функция распределения. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, их свойства.

7.1. Дискретные случайные величины

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Кроме случайных событий и вероятностей их появления, в теории вероятностей нас обычно интересуют некоторые величины, связанные со случайными событиями и называемые случайными величинами.

Определение 7.1. ***Случайной*** *называют величину, которая в результате испытания принимает то или иное значение в зависимости от исхода испытания.*

Случайные величины будем изображать греческими буквами: ξ (кси), ζ (дзета), η (эта), θ (тета) и т.д., а их возможные значения строчными латинскими буквами: x, y, z и т.д.

Определение 7.2. ***Дискретной*** *называют случайную величину, которая принимает отдельные значения из конечного или бесконечного счётного множества.*

Т.е. все эти значения можно «пересчитать» — поставить им в соответствие натуральные числа.

Говорят, что все возможные значения случайной величины составляют ее спектр.

Определение 7.3. ***Непрерывной*** *называют случайную величину которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.*

Дискретная случайная величина полностью определяется своим ***законом (рядом) распределения*** — таблицей, в которой перечислены все значения, принимаемые случайной величиной и соответствующие им вероятности (см. табл. 7.1.) Графическое изображения закона распределения называется многоугольником распределения.

Таблица 7.1

Закон распределения				
ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

При этом сумма вероятностей должна быть равна 1.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Определение 7.4. *Случайные величины ξ и η называются **независимыми**, если являются независимыми события $\xi = x_i$ и $\eta = y_j$ при любых сочетаниях значений $i = 1, 2, \cdots, k, \quad j = 1, 2, \cdots, n$.*

Определение 7.5. ***Произведением** случайной величины ξ на постоянное число α называется случайная величина $\alpha\xi$, принимающая возможные значения αx_i с теми же вероятностями, с какими ξ принимает значения x_i.*

Определение 7.6. ***Возведение в степень.** Случайная величина ξ^k (k – натуральное число) определяется как случайная величина с возможными значениями x_i^k и вероятностями вероятностям случайной величины ξ.*
$P(x_i^k) = P(x_i), i = \overline{1, n}$.

Определение 7.7. ***Суммой** (разностью) случайных величин ξ и η будет случайная величина $\zeta = \xi \pm \eta$, которая принимает все возможные значения $x_i \pm y_j$ с вероятностями*
$p_{ij} = P\{(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j)\} = p_i \cdot p'_j, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}$.

Определение 7.8. ***Произведением** независимых случайных величин ξ и η будет случайная величина $\zeta = \xi \cdot \eta$ возможные значения которой равны произведениям возможных значений случайных величин ξ и η — $x_i \cdot y_j$, а соответствующие вероятности перемножаются.*

Ряд распределения случайной величины $\zeta = \xi \cdot \eta$ будет иметь вид

$\zeta = \xi\eta$	x_1y_1	$\cdots$	x_1y_n	$\cdots$	x_ky_1	$\cdots$	x_ky_n
P	$p_1p'_1$	$\cdots$	$p_1p'_n$	$\cdots$	$p_kp'_1$	$\cdots$	$p_kp'_n$

Пример 7.1. *Дискретная случайная величина задана следующим законом распределения:*

ξ	4	6	7	10	11
p	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

Построить многоугольник распределения.

►Возьмём прямоугольную систему координат, причём по оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i, а по оси ординат — соответствующие вероятности p_i. Нанесем точки

$$M_1(4; 0{,}1), M_2(6; 0{,}3), M_3(7; 0{,}2), M_4(10; 0{,}3), M_5(11; 0{,}1)$$

и соединим их отрезками прямых. С учётом боковых ординат получим замкнутый многоугольник. ◄

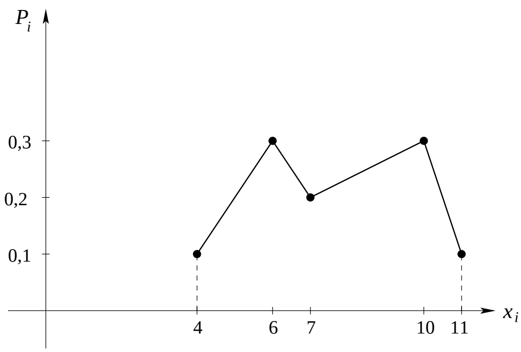

Рис. 26. *Многоугольник распределения примера 6.1*

Пример 7.2. *Случайная величина ξ – число появлений цифры 5 при однократном бросании игральной кости. Найти ряд распределения этой случайной величины.*

►Случайная величина ξ может принять значение 0, если при бросании игральной кости цифра 5 не появится, и 1, если цифра 5 появится. Их вероятности

$$P\{\xi = 0\} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \qquad P\{\xi = 1\} = \frac{1}{6}.$$

Таблица распределения имеет вид:

ξ	0	1
p	5/6	1/6

◄

Усложним немножко предыдущую задачу.

Пример 7.3. *Случайная величина* ξ *– число появлений цифры 5 при трёхкратном бросании игральной кости. Найти ряд распределения этой случайной величины.*

►В данном опыте случайная величина ξ может принять четыре значения: 0, 1, 2 или 3. Найдём их вероятности.

Если все три раза не выпала цифра пять, тогда $\xi = 0$

$$P(\xi = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}.$$

Если все три раза выпала цифра пять, тогда $\xi = 3$

$$P(\xi = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

Для вычисления вероятностей $P(\xi = 1)$ и $P(\xi = 2)$ применяем формулу повторных испытаний Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

$$P(\xi = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}.$$

$$P(\xi = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}.$$

Закон распределения примет вид:

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Отметим, что $\sum\limits_{i=0}^{3} p_i = 1$. ◄

Пример 7.4. *В группе из* 15 *туристов* 10 *человек из Москвы. Наудачу отобраны* 3 *туриста. Составить закон распределения числа туристов из Москвы среди отобранных.*

► Дискретная случайная величина ξ – число туристов из Москвы среди отобранных – принимает следующие возможные значения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Вероятности возможных значений ξ найдутся здесь по формуле гипергеометрического распределения:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k} / C_N^m,$$

где N – общее число туристов, n – количество туристов из Москвы, m – число отобранных туристов, k – число туристов из Москвы среди отобранных. Тогда

$$P\{\xi = 0\} = \frac{C_{10}^0 \cdot C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}, \quad P\{\xi = 1\} = \frac{C_{10}^1 \cdot C_5^2}{C_{15}^3} = \frac{20}{91},$$

$$P\{\xi = 2\} = \frac{C_{10}^2 \cdot C_5^1}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \quad P\{\xi = 3\} = \frac{C_{10}^3 \cdot C_5^0}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}.$$

Закон распределения примет вид:

ξ	0	1	2	3
p	2/91	20/91	45/91	24/91

Отметим, что, как и положено,сумма всех вероятностей равна единице. ◀

Пример 7.5. *В пакете имеются* 4 *карточки с номерами от* 0 *до* 3. *Наудачу достали две карточки. Принять за случайную величину* ξ *сумму номеров выбранных карточек. Построить ряд распределения.*

►Из четырёх чисел можно составить всего шесть сумм:

$$0+1,\ 0+2,\ 0+3,\ 1+2,\ 1+3,\ 2+3.$$

Вероятности получения каждой суммы одинаковы и равны 1/6, но сумма, определяемая числом 3, встречается два раза. Таким образом, получаем следующий ряд распределения для случайной величины ξ:

ξ	1	2	3	4	5
p	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

◀

Пример 7.6. *Автомобиль отправляется из пункта A в пункт B. На пути движения автомашины* 4 *светофора, каждый из которых либо разрешает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью* 0,3, *либо запрещает с вероятностью* 0,7. *Пусть случайная величина* ξ *– число пройденных машиной светофоров до первой остановки. Построить таблицу распределения вероятностей.*

►Случайная величина ξ может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4. Найдем вероятности, с которыми она принимает эти значения. Здесь имеет место геометрическое распределение, где $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. $P\{\xi = 0\}$ — вероятность, что автомашина не пройдет ни одного светофора, т.е. остановится перед первым. Но эта вероятность, согласно условию, равна 0,7.

$$P\{\xi = 0\} = 0{,}7.$$

С другой стороны, $P\{\xi = 1\}$ есть вероятность совмещения двух независимых событий: машина пройдет первый светофор и остановится перед вторым.

Следовательно,

$$P\{\xi = 1\} = p \cdot q = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21.$$

Аналогично рассуждая, найдем, что

$$P\{\xi = 2\} = p \cdot q^2 = 0{,}063, \qquad P\{\xi = 3\} = p \cdot q^3 = 0{,}0189,$$

Случайная величина $\xi = 4$, если автомобиль проехал без остановок все 4 светофора и остановился только в пункте B

$$P\{\xi = 4\} = q^4 = 0{,}0081.$$

Таким образом, таблица распределения имеет вид:

ξ	0	1	2	3	4
p	0,7000	0,2100	0,0630	0,0189	0,0081

Отметим, что, как и положено,сумма всех вероятностей равна единице. ◄

Пример 7.7. *Автоматическая линия выпускает годное изделие с вероятностью p. Найти ряд распределения числа изделий, изготовленных до выпуска первой бракованной детали.*

►Здесь будет также геометрическое распределение, так как линия работает до тех пор, пока не появится бракованное изделие. Вероятность выпуска первого же изделия бракованным равна $1 - p = q$, т.е. $P\{\xi = 1\} = q$. Линия выпустит два изделия, если первое изделие будет годным, а второе бракованным. Тогда по теореме умножения $P\{\xi = 2\} = p \cdot q$. Аналогично

$$P\{\xi = 3\} = p^2 \cdot q, ..., P\{\xi = m\} = p^{m-1} \cdot q, ...$$

Окончательно таблица распределения имеет вид:

ξ	1	2	3	$\dots$	m	$\dots$
p	q	pq	p^2q	$\dots$	$p^{m-1}q$	$\dots$

◀

7.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Рассмотрим числовые характеристики дискретных случайных величин.

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Закон распределения полностью определяет дискретную случайную величину. Однако иногда удобнее характеризовать её с помощью нескольких числовых характеристик, каждая из которых определяет одно из свойств этой случайной величины. Одной из таких числовых характеристик является математическое ожидание.

Определение 7.9. ***Математическим ожиданием*** *$M(\xi)$ дискретной случайной величины ξ называется сумма произведений всех её значений на соответствующие вероятности:*

$$M(\xi) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ \dots + x_np_n. \tag{7.1}$$

свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание константы равно константе:
$$M(C) = C.$$
2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания:
$$M(C \cdot \xi) = C \cdot M(\xi).$$
3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:
$$M(\xi + \zeta) = M(\xi) + M(\zeta). \tag{7.2}$$

Замечание 7.1. *Свойства 2 и 3 позволяют для любого конечного числа случайных величин $\xi_1, \ \dots, \xi_n$ и чисел $C_1, \ \dots, C_n$ написать:*

$$M(C_1\xi_1 + \ \dots + C_n\xi_n) = C_1M(\xi_1) + \ \dots + C_nM(\xi_n).$$

Поскольку рассматриваемые величины случайные, кроме среднего значения, полезно было бы знать характеристику степени их разброса вокруг среднего значения. В качестве такой характеристики нельзя рассматривать отклонение случайной величины от математического ожидания $\xi - M(\xi)$, т.к. оно случайно. В среднем это отклонение равно нулю:

$$M(\xi - M(\xi)) = M(\xi) - M(M(\xi)) = M(\xi) - M(\xi) = 0.$$

Поэтому в качестве характеристики разброса случайной величины вокруг её среднего значения рассматривают математическое ожидание квадрата отклонения.

Определение 7.10. ***Дисперсией*** *случайной величины называется математическое ожидание квадрата её отклонения от математического ожидания:*

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2. \tag{7.3}$$

Для дискретной случайной величины дисперсия вычисляется по формуле:

$$D(\xi) = \sum_i (x_i - M(\xi))^2 \cdot p_i. \tag{7.4}$$

Иногда для вычисления дисперсии удобнее пользоваться формулой:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2. \tag{7.5}$$

Свойства дисперсии.

(1) $D(\xi) \geqslant 0$.

(2) $D(C) = 0$.

(3) $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D(\xi)$.

(4) Для независимых случайных величин ξ и ζ:
$D(\xi + \zeta) = D(\xi) + D(\zeta)$.

Вероятностный смысл дисперсии заключается в том, что она характеризует степень рассеяния случайной величины около её среднего значения (математического ожидания).

Однако, если среднее значение $M(\xi)$ имеет ту же размерность, что и сама случайная величина, то $D(\xi)$ имеет другую размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Это не всегда удобно, поэтому ввели другую характеристику рассеяния, имеющую ту же размерность, что и сама случайная величина.

Определение 7.11. *Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называют квадратный корень из её дисперсии:*

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \tag{7.6}$$

Пример 7.8. *Случайная величина ξ определяется следующим рядом распределения:*

ξ	1,2	1,6	2,3	3,2	4,5
p	0,2	0,4	0,1	0,2	0,1

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение данной случайной величины.

►Математическое ожидание равно сумме произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

или

$$M(\xi) = 1{,}2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6 \cdot 0{,}4 + 2{,}3 \cdot 0{,}1 + 3{,}2 \cdot 0{,}2 + 4{,}5 \cdot 0{,}1 = 2{,}2.$$

Дисперсию найдём двумя способами.

1) По формуле (7.4)

$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 p_i =$
$= (1{,}2 - 2{,}2)^2 \cdot 0{,}2 + (1{,}6 - 2{,}2)^2 \cdot 0{,}4 + (2{,}3 - 2,2)^2 \cdot 0{,}1 +$
$+ (3{,}2 - 2{,}2)^2 \cdot 0{,}2 + (4{,}5 - 2{,}2)^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}074.$

2) Для нахождения дисперсии по формуле (7.5)

$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 .$$

Сначала найдем $M(\xi^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$:

$M(\xi^2) = 1{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}4 + 2{,}3^2 \cdot 0{,}1 + 3{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 4{,}5^2 \cdot 0{,}1 =$
$= 1{,}44 \cdot 0{,}2 + 2{,}56 \cdot 0{,}4 + 5{,}29 \cdot 0{,}1 + 10{,}24 \cdot 0{,}2 + 20{,}25 \cdot 0{,}1 = 5{,}914.$

Таким образом, дисперсия

$$D(\xi) = 5{,}914 - 2{,}2^2 = 1{,}074.$$

Среднее квадратичное отклонение найдем как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{1{,}074} \approx 1{,}036.$$

Ответ: $M(\xi) = 2{,}2$; $D(\xi) = 1{,}074$; $\sigma(\xi) \approx 1{,}036$. ◄

Пример 7.9. *Найти математическое ожидание случайной величины ζ, если*

$$\zeta = 4\xi + 3\eta, \quad M(\xi) = 11, \quad M(\eta) = 8.$$

►Поскольку математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин и постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, то

$$M(\zeta) = M(4\xi + 3\eta) = M(4\xi) + M(3\eta) =$$
$$= 4 \cdot M(\xi) + 3 \cdot M(\eta) = 4 \cdot 11 + 3 \cdot 8 = 68.$$

Ответ: $M(\xi) = 68$. ◄

Пример 7.10. *Случайные величины ξ и η независимы. Найти дисперсию случайной величины $\zeta = 5\xi - 6\eta$, если $D(\xi) = 3$, $D(\eta) = 2$.*

►С учётом того, что дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых и что постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат, получим:

$$D(\zeta) = D(5\xi - 6\eta) = D(5\xi) + D(6\eta) =$$
$$= 25 \cdot D(\xi) + 36 \cdot D(\eta) = 25 \cdot 3 + 36 \cdot 2 = 147.$$

Ответ: $D(\xi) = 147$. ◄

Пример 7.11. *Дискретная случайная величина ξ принимает три возможных значения: x_1 с вероятностью p_1; $x_2 = 5$ с вероятностью $p_2 = 0{,}4$ и $x_3 = 4$ с вероятностью $p_3 = 0{,}5$. Найти x_1 и p_1, зная, что математическое ожидание $M(\xi) = 6$.*

►Так как в любом законе распределения сумма вероятностей равна 1, то $p_1 = 1 - p_2 - p_3 = 0{,}1$. Подставляя в равенство

$$M(\xi) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

числовые данные, получим $6 = x_1 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}5$. Отсюда найдем $x_1 = 20$.◄

Ответ: $x_1 = 20$; $p_1 = 0{,}1$.

Пример 7.12. *Возможные значения дискретной случайной величины равны: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$. Кроме того, известны математические ожидания этой величины и её квадрата: $M(\xi) = 4{,}4$; $M(\xi^2) = 22$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие значениям x_1, x_2, x_3.*

►С учётом заданных условий можно составить систему следующих трёх уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 2 \cdot p_1 + 5 \cdot p_2 + 6 \cdot p_3 = 4{,}4 \\ 2^2 \cdot p_1 + 5^2 \cdot p_2 + 6^2 \cdot p_3 = 22. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем искомые вероятности:

$$p_1 = 0{,}3 \quad p_2 = 0{,}4, \quad p_3 = 0{,}3.$$◄

Ответ: $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}3$.

Пример 7.13. *В ящике лежит n изделий, из которых одно бракованное. Из ящика извлекают изделия одно за другим до тех пор, пока не будет вынуто бракованное изделие. Составить ряд распределения числа вынутых изделий. Найти $M(\xi)$ и $D(\xi)$ этой случайной величины ξ.*

►Вероятность того, что первое вынутое изделие будет бракованным, равна $p_1 = 1/n$. Вероятность того, что первое изделие будет годным, а второе бракованным, по теореме умножения равна

$$p_2 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

Если два первых изделия годные, а третье – нет, то

$$p_3 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$$

и т.д. Таким образом, получаем закон распределения

ξ	1	2	3	...	n
p	1/n	1/n	1/n	...	1/n

Для решения задачи воспользуемся известными суммами:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Тогда

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + ... + n) = \frac{n+1}{2}.$$

$$M(\xi^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = \frac{1}{n}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$D(\xi) = \tfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - (\tfrac{n+1}{2})^2 = \tfrac{n^2-1}{12}. \blacktriangleleft$$

Ответ: $M(\xi) = \dfrac{n+1}{2}$; $D(\xi) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Пример 7.14. *Брошены три игральные кости. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы числа очков, которые выпадут на всех трёх гранях.*

►Обозначим через ξ_i дискретную случайную величину – число очков, выпавших на грани i-ой кости, а через ξ – сумму числа очков, которые выпадут на всех гранях. Тогда $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и

$$M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + M(\xi_3).$$

Кроме того, поскольку случайные величины ξ_i независимы, то

$$D(\xi) = D(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + D(\xi_3).$$

Случайные величины ξ_i имеют одинаковое распределение, а следовательно, и одинаковые числовые характеристики. С учётом этого получим:

$$M(\xi) = 3 \cdot M(\xi_1), \qquad D(\xi) = 3 \cdot D(\xi_1).$$

Вероятности выпадения любого числа очков равны, поэтому закон распределения для ξ_1 имеет вид:

ξ_1	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Так как математическое ожидание

$$M(\xi_1) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2},$$

то $M(\xi) = 3 \cdot (7/2) = 21/2$.

Математическое ожидание для квадрата одной случайной величины

$$M(\xi_1^2) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6},$$

а соответствующая дисперсия

$$D(\xi_1) = M(\xi_1^2) - M^2(\xi_1) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Дисперсия суммы числа очков на всех гранях
$D(\xi) = 3 \cdot 35/12 = 35/4$.◄

Ответ: $M(\xi) = 21/2$; $D(\xi) = 35/4$.

7.3. Функция распределения случайной величины

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Дискретная случайная величина полностью определяется своим законом распределения — таблицей 7.1. Однако наряду с дискретными случайными величинами, принимающими отдельные значения, существуют другие, принимающие все значения из некоторого промежутка. Их невозможно задать перечислением всех принимаемых ими значений, поэтому был предложен универсальный способ задания случайной величины, пригодный во всех случаях.

Определение 7.12. ***Функцией распределения*** *$F(x)$ случайной величины ξ называется вероятность того, что ξ приняла значение меньшее x:*

$$F(x) = P\{\xi < x\}. \tag{7.7}$$

Пример 7.15. *Случайная величина ξ – число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график.*

►Возможные значения данной случайной величины – числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. При этом, вероятность того, что ξ примет любое из этих значений, одна и та же и равна $1/6$. Таблица распределения имеет вид:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

При $x \leqslant 1$ функция $F(x) = 0$, так как ξ не принимает значений, меньших единицы. Если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 1) = 1/6$. Если $2 < x \leqslant 3$, то событие, заключающееся в том, что случайная величина ξ удовлетворяет неравенству $\xi < x$, можно представить как сумму двух несовместных событий: $\xi < 2$ и $2 \leqslant \xi < 3$. Поэтому по теореме сложения имеем:

$$F(x) = P(\xi < x) = P\{(\xi < 2) + (2 \leqslant \xi < 3)\} = P(\xi < 2) + P(2 \leqslant \xi < 3).$$

Но $P(\xi < 2) = 1/6$, а $P(2 \leqslant \xi < 3)$ также равно $1/6$, так как полуинтервалу $2 \leqslant x < 3$ принадлежит только одно возможное значение, принимаемое ξ, а именно 2. Таким образом, если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = 1/6 + 1/6 = 1/3$.

Аналогично, если $3 < x \leqslant 4$, то

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 3) + P(3 \leqslant \xi < 4) = 1/3 + 1/6 = 1/2.$$

Для $4 < x \leqslant 5$

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < x) + P(4 \leqslant \xi < 5) = 1/2 + 1/6 = 2/3,$$

а для $5 < x \leqslant 6$ $F(x) = 2/3 + 1/6 = 5/6$. Наконец, если $x \geqslant 6$, то

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 6) + P(6 \leqslant \xi < x) = 5/6 + 1/6 = 1.$$

График этой функции $F(x)$ оказывается ступенчатой линией со скачками в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, равными 1/6, рис. 27.

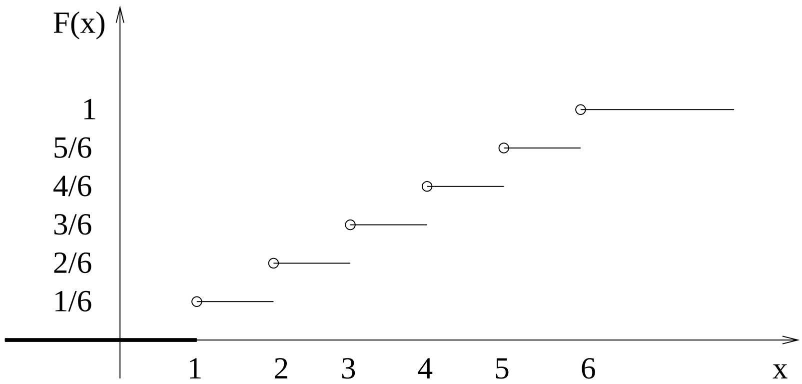

Рис. 27. *Решение примера 7.15*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 1, \\ 1/6, & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 1/3, & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 1/2, & \text{при} \quad 3 < x \leqslant 4, \\ 2/3, & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 5, \\ 5/6, & \text{при} \quad 5 < x \leqslant 6, \\ 1, & \text{при} \quad 6 < x. \end{cases}$$

◀

Рассмотрим решение двух примерных задач 1.7 из типового расчёта.

Пример 7.16. *Стрелку дали 5 патронов для поражения мишени. Мишень поражается первым попаданием. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле постоянна и равна* $p = 0{,}6$. *Найдите ряд распределения случайной величины* ξ *числа оставшихся патронов, постройте график функции распределения случайной величины* ξ*, найдите* $M(\xi)$ *и* $D(\xi)$.

►Возможные значения данной случайной величины ξ – числа $0, 1, 2, 3, 4$. При этом случайная величина ξ принимает значение 0, когда либо цель не будет поражена, т.е. совершено 5 промахов, либо цель поражена только пятым выстрелом. Пусть $q = 1-p = 0{,}4$ вероятность промаха.

Тогда $P(\xi = 0) = qqqqq + qqqqp = 0{,}4^5 + 0{,}4^4 \cdot 0{,}6 = 0{,}0256$.
$P(\xi = 1) = qqqp = 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}0384$.
$P(\xi = 2) = qqp = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$.
$P(\xi = 3) = qp = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}25$.
$P(\xi = 4) = 0{,}6$.

Ряд распределения случайной величины ξ имеет вид:

ξ	0	1	2	3	4
p	qqqqq+qqqqp	qqqp	qqp	qp	p

Или

ξ	0	1	2	3	4
p	0,0256	0,0384	0,096	0,24	0,6

Функция распределения данной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ 0{,}0256, & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}0256 + 0{,}0384 = 0{,}064, & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}064 + 0{,}096 = 0{,}16, & \text{при} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}16 = 0{,}24 = 0{,}4, & \text{при} \quad 3 < x \leqslant 4, \\ 0{,}4 + 0{,}6 = 1, & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Графиком данной функции будет кусочно постоянная функция имеющая такой же вид как и для предыдущего примера, см. рис. 28.

Найдём числовые характеристики случайной величины ξ.

$M(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{4} kP_k = 0 \cdot 0{,}0256 + 1 \cdot 0{,}0384 + 2 \cdot 0{,}096 + 3 \cdot 0{,}24 + 4 \cdot 0{,}6 =$
$= 3{,}3504$.

$D(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{4} k^2 P_k - M^2\xi =$
$= 1^2 \cdot 0{,}0384 + 2^2 \cdot 0{,}096 + 3^3 \cdot 0{,}24 + 4^2 \cdot 0{,}6 - 3{,}3504^2 = 0{,}9572$. ◄

Пример 7.17. *Карлсону на день рождения подарили 5 банок с вишнёвым, 4 банки с малиновым и 7 банок со сливовым вареньем. Карлсон сразу же съел 3 банки варенья. 1) Найдите ряд распределения случайной величины ξ — число банок со сливовым вареньем, оставшихся на следующий день после дня рождения. 2) Найдите*

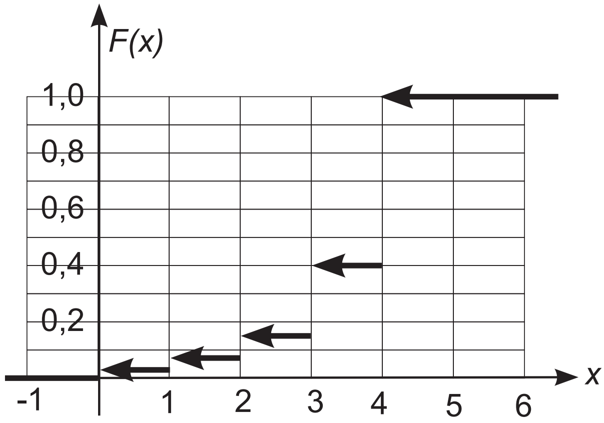

Рис. 28. *Функция распределения примера 7.16*

функцию функции распределения $F(x)$ случайной величины ξ и постройте её график. 3) Найдите числовые характеристики случайной величины ξ: $M(\xi)$, $D(\xi)$ и $\sigma(\xi)$.

► 1) Очевидно, что на следующий день осталось 13 банок с вареньем. При этом случайная величина ξ может принимать следующие значения: 4, 5, 6, 7. Найдем вероятности, с которыми она принимает эти значения.

Случайная ξ принимает значение 4, если в день рождения Карлсон съел три банки со сливовым вареньем.

$P(\xi = 4) = \dfrac{C_7^3}{C_{16}^3} = \dfrac{5}{80}$.

Аналогично, $\xi = 5$, если в день рождения Карлсон съел две банки со сливовым и одну не со сливовым вареньем.

$P(\xi = 5) = \dfrac{C_7^2 \cdot C_9^1}{C_{16}^3} = \dfrac{27}{80}$.

Аналогично:

$P(\xi = 6) = \dfrac{C_7^1 \cdot C_9^2}{C_{16}^3} = \dfrac{36}{80}$.

$P(\xi = 7) = \dfrac{C_9^3}{C_{16}^3} = \dfrac{12}{80}$.

Проверим сумму вероятностей

$$P(\xi = 4) + P(\xi = 5) + P(\xi = 6) + P(\xi = 7) = \frac{5 + 27 + 36 + 12}{80} = 1.$$

Таким образом, таблица распределения имеет вид:

ξ	4	5	6	7
p	$5/80$	$27/80$	$36/80$	$12/80$

2) Функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$ данной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant 4, \\ 5/80, & \text{при} \quad 4 < x \leqslant 5, \\ 5/80 + 27/80 = 32/80, & \text{при} \quad 5 < x \leqslant 6, \\ 32/80 + 36/80 = 68/80, & \text{при} \quad 6 < x \leqslant 7, \\ 68/80 + 12/80 = 1, & \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$$

На рис. 29 изображён график функции распределения.

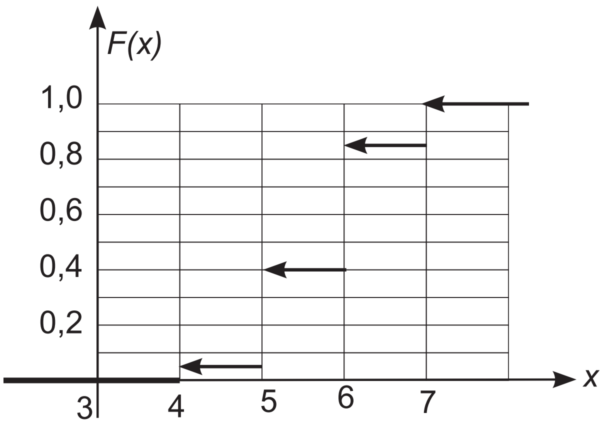

Рис. 29. *Функция распределения примера 7.17*

3) Найдём числовые характеристики случайной величины ξ.

$$M(\xi) = \sum_{k=4}^{7} kP_k = 4 \cdot \frac{5}{80} + 5 \cdot \frac{27}{80} + 6 \cdot \frac{36}{80} + 7 \cdot \frac{12}{80} = \frac{91}{16} = 5{,}6875.$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \sum_{k=4}^{7} k^2 P_k - M^2(\xi) = 4^2 \cdot \frac{5}{80} + 5^2 \cdot \frac{27}{80} + 6^2 \cdot \frac{36}{80} + 7^2 \cdot \frac{12}{80} - \left(\frac{91}{16}\right)^2 = \frac{2639}{80} - \frac{6964321}{6400} = \frac{819}{1280} = 0{,}639844.$$

$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{0{,}639844} \approx 0{,}8.$

◀

Задания для самостоятельной работы

Пример 7.18. *Дискретная случайная величина задана следующим законом распределения:*

ξ	2	5	6	10	12
p	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Пример 7.19. *Дискретная случайная величина ξ задана следующим законом распределения:*

ξ	4	6	10	12
p	0,4	0,1	0,2	0,3

Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Пример 7.20. *В урне имеются четыре шара с номерами от 1 до 4. Вынули три шара. Случайная величина ξ – сумма номеров шаров. Найти закон распределения случайной величины ξ.*

Пример 7.21. *В лаборатории имеются* 15 *приборов, среди которых* 4 *требуют ремонта. Студент случайным образом берет* 3 *прибора, не зная, какие из них пригодны к работе. Составить закон распределения случайного числа непригодных к работе приборов, содержащихся в выборке.*

Пример 7.22. *На пути движения автомашины три светофора. Вероятность, что светофор запрещает дальнейшее движение автомашины* 0,4*, а что разрешает* 0,6*. Пусть случайная величина ξ – число светофоров, пройденных машиной. Составить таблицу распределения вероятностей.*

Пример 7.23. *Найти закон распределения дискретной случайной величины ξ, которая может принимать только два значения: x_1 с вероятностью $p_1 = 0{,}1$ и x_2, причём $x_1 < x_2$. Математическое ожидание $M(\xi)$ и дисперсия $D(\xi)$ известны: $M(\xi) = 3{,}9$, $D(\xi) = 0{,}09$.*

Пример 7.24. *Возможные значения дискретной случайной величины равны: $-2, 1, 4$. При условии, что заданы математическое* *ожидание* $M(\xi) = 1{,}9$, *а также* $M(\xi^2) = 7{,}3$, *найти вероятности* p_1, p_2, p_3, *которые соответствуют дискретным значениям случайной величины.*

Пример 7.25. *Брошены три игральные кости. Найти математическое ожидание суммы квадратов числа очков, которые выпадут на всех гранях.*

Пример 7.26. *Дискретная случайная величина задана законом распределения*

ξ	3	5	6	9
p	0,3	0,4	0,2	0,1

Найти функцию распределения $F(x)$ и начертить её график.

Домашнее задание.

Выполнить задание 1.7 типового расчёта.