

Лекция №5

§ 4. Ряды с комплексными членами. Ряды Тейлора и Лорана

Еще раз напомним понятие ряда с комплексными членами.

Определение. Последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, называется сходящейся, если сходятся соответствующие последовательности действительной части $\{x_n\}$ и мнимой части $\{y_n\}$.

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Составленное из членов этой последовательности выражение

$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется числовым рядом с комплексными членами,

z_n - общий член ряда.

Сумма $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ называется n -ой частичной суммой ряда.

Частичные суммы образуют новую числовую последовательность $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$.

Определение. Числовой ряд с комплексными членами называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда.

Числовой ряд называется расходящимся, если предел последовательности частичных сумм равен бесконечности или не существует.

Исследование ряда с комплексными членами сводится к исследованию двух вещественных рядов на основании следующего утверждения.

Сходимость ряда с комплексными членами $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$ к сумме

$S = A + iB$ равносильна сходимости двух вещественных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ соответственно к суммам A и B .

Определение. Ряд с комплексными членами называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + iy_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

Теорема. Если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам ряд с комплексными членами.

4.2 Степенные ряды с комплексными членами. Ряд Тейлора

Пусть дана последовательность функций комплексной переменной

$$u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z), \dots,$$

определенных на некотором множестве D комплексной плоскости: $D \subset C$.

Выражение вида

$$u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

называется функциональным рядом с комплексными членами.

Определение 4.4. Множество значений переменной z , при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда.

Определение 4.5. Степенным рядом с комплексными членами называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

Здесь z - комплексная переменная, c_n и z_0 - комплексные числа. При $z_0 = 0$ степенной ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Теорема 4.2. (теорема Абеля). Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$. Тогда этот ряд абсолютно сходится в

круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0| = R$.

Следствие. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ расходится в некоторой

точке $z_1 \neq z_0$, то этот ряд расходится в области $|z - z_0| > |z_1 - z_0| = R$, т.е. вне

круга $|z - z_0| \leq |z_1 - z_0| = R$.

Следствие. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ существует число R ,

$0 \leq R \leq \infty$, называемое *радиусом сходимости* степенного ряда, такое, что

внутри круга $|z - z_0| < R$ ряд сходится, а вне этого круга, т.е. в области

$|z - z_0| > R$, ряд расходится.

Если R - радиус сходимости, то область $|z - z_0| < R$ называется *кругом сходимости* степенного ряда. В точках границы $|z - z_0| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. В этом случае требуется дополнительное исследование.

Напомним определение аналитической функции.

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z . Пусть точки z и $z + \Delta z$ принадлежат области D . Обозначим

$$\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Определение. Однозначная функция $\omega = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz , стремящемся к нулю. Этот предел называется производной функции $f(z)$ в данной точке z и обозначается $f'(z)$ или ω' , т.е.

$$\omega' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}.$$

Обычные правила дифференцирования функций действительного переменного остаются справедливыми для функций комплексного переменного.

Определение. Однозначная функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0 , если она дифференцируема в самой точке z_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x, y) и чтобы в этой точке имели место равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

называемые условиями Коши-Римана. При этом формулы для производной функции $f'(z)$ имеют вид:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ряд Тейлора

Перейдем к изучению рядов Тейлора для функции комплексного переменного.

Теорема 4.3. Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z - z_0| < R$, представляется в нем единственным образом в виде сходящегося к ней степенного ряда – ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

коэффициенты которого c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Здесь L – окружность с центром z_0 , целиком лежащая в круге сходимости $|z - z_0| < R$.

Предполагается, что окружность проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Имеют место следующие разложения в ряд Тейлора
в окрестности точки $z_0 = 0$.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.1)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.2)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots, \quad |z| < 1$$

при $\alpha = -1$, получаем

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1 \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Пример. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{7-2z}$

по степеням $(z - 2)$.

Решение. Введем новую переменную $t = z - 2$, выразим $z = t + 2$ и подставим в функцию $f(z)$

$$f(t) = \frac{1}{7-2(t+2)} = \frac{1}{3-2t} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}t}$$

Воспользуемся формулой (4.4), подставляя вместо $z \rightarrow \frac{2}{3}t$:

$$f(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}t} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3}t + \left(\frac{2}{3}t\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}t\right)^n + \dots \right).$$

Сделаем обратную замену

$$f(z) = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{2}{3}(z-2) + \frac{2^2}{3^2}(z-2)^2 + \dots + \frac{2^n}{3^n}(z-2)^n + \dots \right].$$

Этот ряд сходится при условии $\left| \frac{2}{3}(z-2) \right| < 1$, или $|z-2| < \frac{3}{2}$.

Пример. Разложить функцию $f(z) = z^3 \sin 2z$ по степеням (z) .

Решение. Используем стандартное разложение

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Выпишем разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням z

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \left(2z - \frac{8z^3}{3!} + \frac{2^5 z^5}{5!} - \frac{2^7 z^7}{7!} + \dots \right) = \\ &= 2z^4 - \frac{8z^6}{3!} + \frac{2^5 z^8}{5!} - \frac{2^7 z^{10}}{7!} + \dots \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{C}$

4.3 Ряд Лорана

Определение 4.6. Рядом Лорана называется ряд вида

$$\begin{aligned} & \dots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \\ & + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \end{aligned}$$

где z_0, c_n – комплексные постоянные, z – комплексная переменная.

Определение 4.7. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

называется главной частью ряда Лорана.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

называется правильной частью ряда Лорана.

Ряд Лорана сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots \text{ и} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Областью сходимости первого из этих рядов является внешность круга $|z - z_0| > r$. Областью сходимости второго ряда является внутренность круга $|z - z_0| < R$.

Если $r < R$, то ряд Лорана сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$. Здесь $r \geq 0$, $0 < R < +\infty$.

Теорема 4.4. *Функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ (не исключаются случаи $r = 0$ и $R = +\infty$) представляется в этом кольце единственным образом в виде ряда Лорана*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

где коэффициенты c_n находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Здесь L – произвольная окружность с центром в точке z_0 , лежащей внутри данного кольца.