Лекция 6

4 ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

4.1 Решение волнового уравнения для плоской волны, распространяющейся вдоль координатной оси

Рассмотрим решение волнового уравнения (3.5) для плоской волны, учитывая первичное понятие из 3.1. Введем декартовы координаты. Вектор $\dot{\vec{H}}_0$ в общем случае имеет вид

$$\dot{\vec{H}}_0 = \dot{H}_{0x}\vec{x}_0 + \dot{H}_{0y}\vec{y}_0 + \dot{H}_{0z}\vec{z}_0, \tag{4.1}$$

где $\dot{H}_{0x}, \dot{H}_{0y}, \dot{H}_{0z}$ - компоненты вектора, а $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ - единичные орты декартовой системы координат. Оператор Лапласа в декартовых координатах имеет вид

$$\overline{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{4.2}$$

Для анализа основных свойств воспользуемся первичным понятием плоской волны, как простейшего решения волнового уравнения. Отбросим ряд составляющих в (4.1) и (4.2), тогда волновое уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^2\dot{H}_{0x}}{dz^2} + k^2\dot{H}_{0x} = 0. \tag{4.3}$$

Граничными условиями являются граничные условия на бесконечности. Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Из курса математического анализа известно, что в качестве общего решения такого уравнения можно взять одно из следующих выражений:

$$H_{0x} = A\cos az + B\cos az;$$

$$H_{0x} = A\cos(az + \varphi);$$

$$H_{0x} = Ae^{bz},$$

где A, B, a, b, φ – константы, постоянные интегрирования.

Выбранный вид решения влияет на удобство и простоту последующего анализа. В данном случае удобнее взять третью форму решения. Подставим это выражение в исходное уравнение для определения постоянных интегрирования

$$Ab^2e^{bz} + k^2Ae^{bz} = 0;$$

Отбрасывая тривиальное решение, т.е. полагая $A \neq 0$, имеем

$$b^2 = -k^2, \quad \text{или} \quad b_{1,2} = \pm jk.$$

Тогда общее решение волнового уравнения (4.3) будет иметь вид

$$H_{0x} = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz} \tag{4.4}$$

Используя (3.1) получим общее решение для комплексной амплитуды электрического поля

$$\dot{\vec{E}}_0 = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon} rot\vec{H}_0 = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon} \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_{0x} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \tag{4.5}$$

$$= \frac{-\vec{y}_0(jkA_1 e^{-jkz} - jkA_2 e^{jkz})}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon} = -\frac{k}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}(A_1 e^{-jkz} - A_2 e^{jkz})\vec{y}_0.$$

Выражение (4.4) и (4.5) относятся к одному и тому же полю и используются совместно, поэтому их удобнее записывать в едином виде, или скалярном, или векторном. Из курса общей физики следует, что решения (4.4),(4.5) описывают две электромагнитные волны, двигающиеся в противоположных направлениях вдоль оси z, запишем эти волны по отдельности

$$\begin{cases} \dot{H}_{0x} = A_1 e^{-jkz} \\ \dot{E}_{0y} = -\dfrac{k}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} A_1 e^{-jkz} \end{cases} \text{ – прямая волна;}$$

$$\begin{cases} \dot{H}_{0x} = A_2 e^{jkz} \\ \dot{E}_{0y} = \dfrac{k}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} A_2 e^{jkz} \end{cases} \text{ – обратная волна.} \tag{4.6}$$

Источники, как бы создающие эти волны, пространственно разделены. Для прямой волны они удалены на бесконечность в направлении, противоположном оси *z*, а для обратной волны, удалены на бесконечность в направлении оси *z*. Поэтому волны могут существовать раздельно. В дальнейшем будем рассматривать в основном только прямую волну.

Полученное решение (4.6) представляет поперечную волну, т.к. векторы электромагнитного поля перпендикулярны друг другу и направлению распространения. Из предыдущего понятно, что полученное решение является не единственным представлением поля плоской волны, в исходном выражении (4.1) можно было оставить компоненту $\dot{H}_{0y}$, и тогда из уравнения получили бы соответствующую ей компоненту $\dot{E}_{0x}$. Запишем также выражение для мгновенных значений составляющих поля прямой волны

$$H_x = |A_1|\cos(\omega t - kz + \varphi);$$

$$E_y = -\frac{k}{\omega\varepsilon_0\varepsilon}|A_1|\cos(\omega t - kz + \varphi), \tag{4.7}$$

где φ – аргумент комплексной амплитуды $\dot{A}_1$, являющийся начальной фазой колебаний при $z=0$.

Прямая волна распространяется в направлении координаты z. Из курса физики известно, что волна характеризуется рядом понятий и величин:

-фазовый фронт, это геометрическое место точек, в которых фаза колебания имеет постоянное значение, т.е. $\omega t - kz + \varphi = const$, фазовый фронт плоской волны представляет плоскость, перпендикулярную направлению распространения, в данном случае, плоскость, перпендикулярную координате z;

-фазовая скорость, это скорость перемещения фазового фронта, очевидно $V_ф = \dfrac{\omega}{k}$;

-волновое сопротивление среды для плоской волны, отношение амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей

$$W = \left|\frac{E_y}{H_x}\right| = \frac{k}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\omega\sqrt{\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}; \qquad (4.8)$$

-длина волны, путь, который проходит фазовый фронт за период колебаний

$$\lambda = \frac{V_ф}{T} = \frac{2\pi}{k}. \qquad (4.9)$$

4.2. Поляризация электромагнитных волн

Рассмотрим понятие поляризации на примере плоской монохроматической электромагнитной волны.

Для плоской электромагнитной волны распространяющейся в положительном направлении оси Z декартовой системы координат, решение волнового уравнения Гельмгольца для комплексных амплитуд напряженностей электрического поля имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= E_{0x}\, exp[\, j(-kz+\varphi_x)], \\ \dot{E}_y &= E_{0y}\, exp[\, j(-kz+\varphi_y)], \end{aligned} \qquad (4.10)$$

где E_{0x}, E_{0y} – амплитудные значения напряженностей электрического поля;

φ_x, φ_y – начальные фазы напряженностей электрического поля.

Суммарный вектор напряженности электрического поля равен

$$\dot{\vec{E}} = \dot{E}_{0x}\, exp[\, j(-kz+\varphi_x)]\vec{x}_0 + \dot{E}_{0y}\, exp[\, j(-kz+\varphi_y)\vec{y}_0\,], \qquad (4.11)$$

а его мгновенное значение, при каком – либо значении координаты z (для удобства полагаем $z=0$), имеет вид:

$$\vec{E} = E_{0x} cos(\,\omega t + \varphi_x)\vec{x}_0 + E_{0x} cos(\,\omega t + \varphi_y)\vec{y}_0\,], \qquad (4.12)$$

где ω – угловая частота электромагнитной волны.

Мгновенное значение напряженности поля электромагнитной волны в фиксированной плоскости на пути распространения волны является функцией времени и зависит также от амплитуд и фаз ортогональных составляющих напряженности электрического поля. С течением времени будут периодически изменяться величины ортогональных составляющих E_x и E_y а так же соотношения между ними, за счет этого будет изменяться величина суммарного вектора напряженности и его направлении в плоскости *z=0*. Поэтому конец вектора $\vec{E}$ будет описывать на плоскости фигуру, которая является годографом вектора $\vec{E}$. Исключая из (4.12) время, можно получить уравнение годографа $\vec{E}$ в виде

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2}+\frac{E_y^2}{E_{0y}^2}-2\frac{E_xE_y}{E_{0x}E_{0y}}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi, \qquad (4.13)$$

где обозначено $\Delta\varphi=\varphi_x-\varphi_y$. В общем случае это соотношение является уравнением эллипса, а в частных случаях вырождается в уравнение отрезка прямой линии или окружности.

Под поляризацией понимают свойство векторных электромагнитных монохроматических волн при произвольном фиксированном значении расстояния описывать концом векторов $\vec{E}$ или $\vec{H}$ какую-то определённую фигуру. Непосредственно по виду годографа различают эллиптическую, линейную и круговую поляризации. Вид годографа, а следовательно, и вид поляризации в соответствии с (4.13) определяется лишь соотношением между амплитудами E_{0x}, E_{0y} ортогональных составляющих волны и разностью фаз между ними. Рассмотрим различные возможные случаи.

4.2.1. Пусть $\Delta\varphi=0$ или $\Delta\varphi=\pi$.

Тогда из (4.13) получаем

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2}+\frac{E_y^2}{E_{0y}^2}\mp 2\frac{E_xE_y}{E_{0x}E_{0y}}\cos\Delta\varphi=0 \qquad (4.14)$$

или

$$\frac{E_x}{E_{0x}}\mp\frac{E_y}{E_{0y}}=0\,. \qquad (4.15)$$

Это соотношение представляет собой уравнение прямой линии.

Таким образом, годографом вектора $\vec{E}$ будет являться отрезок прямой линии относительно координат *X, Y* ориентация которого зависит от амплитудных соотношений ортогональных составляющих волны. Линейная поляризация, очевидно, будет получаться и в случаях, когда E_{0x}=0 или E_{0y} =0, тогда вектор $\vec{E}$ будет совпадать с отличной от нуля компонентной. При линейной поляризации вектор $\vec{E}$, изменяясь по величине, колеблется вдоль линии, являющейся годографом, с частотой волны $f=\omega/2\pi$.

4.2.2. Пусть $\Delta\varphi=\pm\pi/2$, $E_{0x}=E_{0y}=E_0$.

Из (4.13) получаем

$$E_x^2+E_y^2=E_0^2 \tag{4.16}$$

Это соотношение является уравнением окружности, а поляризация в этом случае является круговой, следовательно, для получения круговой поляризации необходимо существование двух ортогональных в пространстве, сдвинутых по фазе на $\pm\pi/2$, имеющих равные амплитуды линейно – поляризованных когерентных волн, распространяющихся в одном направлении. При круговой поляризации вектор $\vec{E}$ оставаясь неизменным по величине и равным по амплитуде ортогональным составляющим, вращается в пространстве с угловой частотой ω. Направление вращения зависит от знака $\Delta\varphi$.

4.2.3. Пусть $\Delta\varphi\pm\pi/2,\ E_{x0}\neq E_{y0}$

В этом случае получаем из (4)

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2}+\frac{E_y^2}{E_{0y}^2}=1. \tag{4.17}$$

Это соотношение является уравнением эллипса, оси которого совпадают по направлению с осями декартовой системы координат *x, y.* Поляризация при этом будет эллиптической. Вектор $\vec{E}$ вращается в плоскости *X0Y* с угловой частотой ω, изменяясь по величине. Направление вращения зависит от знака $\Delta\varphi$. Эллиптическая поляризация будет также наблюдаться в случаях:

$$E_{x0}=E_{y0},\ \Delta\varphi\neq\pm\pi/2;$$

При этом годограф $\vec{E}$ имеет вид поляризационного эллипса, повернутого относительно осей координат (рис. 4.1).

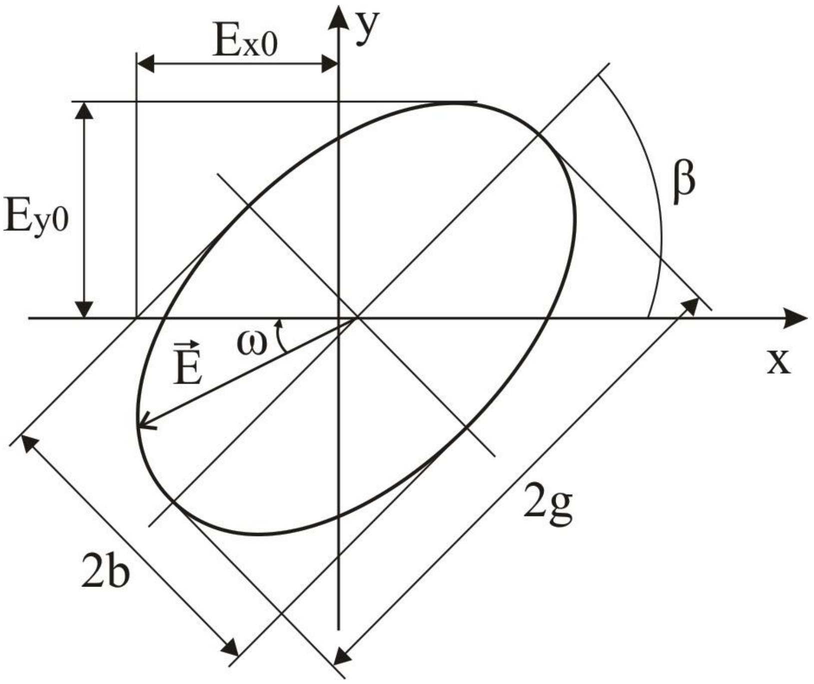

Рис.4.1 Поляризационный эллипс

Для количественного определения вида поляризации электромагнитной волны вводят следующие параметры:

r- коэффициент эллиптичности, равный отношению малой оси поляризационного эллипса к большой оси, в обозначениях рис. 4.1

$$r = \frac{b}{g}; \tag{4.18}$$

для линейной поляризации $r=0$, для круговой $r=1$, а для эллиптической поляризации $0<r<1$;

β – угол ориентации поляризационного эллипса, равный углу между осью абсцисс и большой осью поляризационного эллипса, для линейной эллиптической поляризации угол β лежит в пределах 0-180°; а для круговой поляризации β является не определенным;

- направление вращения вектора $\vec{E}$ в плоскости $X0Y$. Если при наблюдении вдоль распространения волны вектор $\vec{E}$ обходит поляризационный эллипс по часовой стрелке, то волна называется правополяризованной, если же вращение вектора $\vec{E}$ происходит против часовой стрелки, то волна называется левополяризованной. Направление вращения вектора $\vec{E}$ определяется лишь для эллиптической и круговой поляризации. Формально направление вращения учитывается знаком перед коэффициентом эллиптичности, для левополяризованной волны -r, а для правополяризованной +r.

Все поляризационные параметры связаны с амплитудами и разностью фаз ортогональных составляющих E_x и E_y. Если обозначить $E_{y0} / E_{xO} = P$, то выполняются следующие соотношения:

$$P = \left(\frac{r^2 + tg^2\beta}{r^2 + r^2 tg^2\beta} \right), \tag{4.19}$$

$$\Delta\varphi = arctg\left[\frac{2r}{(1-r^2)\sin 2\beta} \right].$$

Как было показано, электромагнитные волны с эллиптической и круговой поляризацией можно математически представить в виде суперпозиции волн линейной поляризации. Это правило можно расширить так, что волна, описывается любой комбинацией поляризационных параметров может быть представлена в виде суперпозиции волн, имеющих другие поляризационные параметры, например, линейно-поляризационные волна может быть представлена в виде комбинации волн круговой поляризации так, как показано в (4.20).

Выражения, заключенные в фигурные скобки, представляют собой две волны круговой поляризации с равными амплитудами но с противоположными направлениями вращения.

$$\begin{gathered}\vec{E} = E_0 \exp(-jkz)\vec{x}_0 = \frac{E_0}{2}\exp(-jkz)\vec{x}_0 + \frac{E_0}{2}\exp(-jkz)\vec{x}_0 + \\ + \frac{E_0}{2}\exp\left[j\left(-kz + \frac{\pi}{2} \right) \right]\vec{y}_0 - -\frac{E_0}{2}\exp\left[j\left(-kz + \frac{\pi}{2} \right) \right]\vec{y}_0 = \\ \left\{ \frac{E_0}{2}\exp(-jkz)\vec{x}_0 + \frac{E_0}{2}\exp\left[j\left(-kz + \frac{\pi}{2} \right) \right]\vec{y}_0 \right\} + \\ \left\{ \frac{E_0}{2}\exp(-jkz)\vec{x}_0 - \frac{E_0}{2}\exp\left[j\left(-kz + \frac{\pi}{2} \right) \right]\vec{y}_0 \right\}.\end{gathered} \tag{4.20}$$

Понятие поляризации, введенное для плоской электромагнитной волны распространяется и на волны, имеющие другую структуру. Необходимо отметить, что в волнах простой структуры плоской, сферической, цилиндрической вид поляризации одинаков для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. В волнах сложной структуры поляризация векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ может отличаться (например, в полях волн в волноводах), кроме того, вид поляризации может изменяться при перемещении точки наблюдения по фронту волны.

Электромагнитные волны, распространяющиеся в свободном пространстве и имеющие определенную поляризацию, создаются антеннами соответствующего вида поляризации. Так антеннами линейной поляризации часто являться рупорные антенны, имеющие прямоугольный раскрыв. Но поскольку другие виды поляризации могут быть представлены через волны линейной поляризации, то и антенны линейной поляризации могут быть преобразованы в антенны эллиптической или круговой поляризации. Для этого используются устройства, размещаемые в свободном пространстве перед антеннами, называемые поляризационными решетками или устройствами, располагаемые в фидерном тракте антенн, называемые поляризаторами.

Поляризационная решетка простейшей конструкции состоит из тонких металлических пластин ориентированных параллельно друг другу на расстояние α, и имеющих ширину *d* (рис. 4.2).

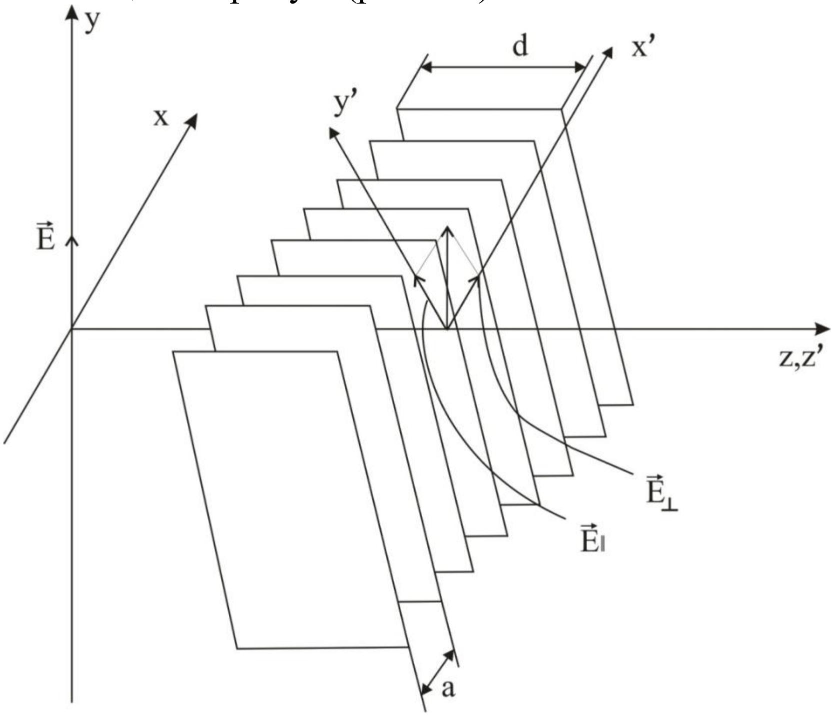

Рис.4.2 Поляризационная решетка

При падении на решетку линейно-поляризованной плоской волны, вектор $\vec{E}$ которой ориентирован перпендикулярно пластинам, происходит небольшое уменьшение амплитуды проходящей волны по сравнению с падающем за счет затухания и отражения от пластин решетки Фазовая скорость волны при распространении в решетке не отличается от фазовой скорости в свободном пространстве и на выходе решетки волна имеет дополнительный фазовый сдвиг, равный

$$\varphi_{\perp} = \frac{360^0 d}{\lambda_0}\ , \tag{4.21}$$

где λ_0 - длина волны в свободном пространстве.

Если вектор $\vec{E}$ падающей волны ориентирован параллельно пластинам решетки, то кроме уменьшения амплитуды волны происходит изменение фазовой скорости волны, при распространении в решетке, за счет этого дополнительный фазовый сдвиг равен

$$\varphi_{||} = \frac{360^0 d}{\lambda_0}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2\alpha}\right)^2}\ . \tag{4.22}$$

Фазовая скорость в этом случае определяется как фазовая скорость в плоско параллельной линии. Расстояние между пластинами решетки должно выбираться из условия существования между пластинами волны основного типа, при этом $\lambda_0 / 2 < \alpha < \lambda_0$.

Если линейно- поляризованная электромагнитная волна распространяется нормально к решетке так, что вектор $\vec{E}$ составляет с пластинами решетки угол ψ, то волна разлагается на две ортогональные составляющие

$$E_{0||} = E_0 \cos\psi, \quad E_{0\perp} = E_0 \sin\psi \tag{4.23}$$

которые распространяются в решетке с различными фазовыми скоростями. Поляризация волны на выходе решетки в системе координат x', y', z' удовлетворяет в соответствии с (4.4), соотношению

$$\frac{E^2_{0\perp}}{(E_0 \sin\psi)^2} + \frac{E_{0||}^2}{(E_0 \cos\psi)^2} - 2\frac{E_{0\perp}}{(E_0 \sin\psi)}\frac{E_{0||}}{(E_0 \cos\psi)}\cos(\varphi_\perp - \varphi_{||}) = \sin^2(\varphi_\perp - \varphi_{||}) \tag{4.24}$$

здесь $E_\perp = E_{x'}, E_{||} = E_{y'}$, и в общем случае будет эллиптической. Поляризационная решетка изготавливается таким образом, что на частоте $f_0 \, |(\varphi_\perp - \varphi_{||}| = 90^0$. В этом случае

$$\frac{E^2{}_\perp}{(E_0 \sin\psi)^2} + \frac{E_{||}^2}{(E_0 \cos\psi)^2} = 1 \tag{4.25}$$

Из (14.16) видно, что поляризация на выходе решетки имеет следующие параметры:

$$r = \left|\frac{\sin\psi}{\cos\psi}\right| = |tg\,\psi|, \text{ при } 0^0 \le \psi \le 45^0, \tag{4.26}$$

$$r = \left|\frac{\cos\psi}{\sin\psi}\right| = |ctg\,\psi|, \text{ при } 45^0 \le \psi \le 90^0,$$

$$\beta = 90^0 - \psi, \text{ при } 0^0 \le \psi \le 45^0. \tag{4.27}$$

Условие (4.27) изменяется при изменении направления отсчета угла при ψ. При этом также изменяется направление вращения вектора $\vec{E}$, то есть знак поляризации. При $\psi = 45^0$ достигается круговая поляризация, в соответствии с (4.16). Но при выводе (4.16) не учитывались дополнительные затухания волн, распространяющихся в поляризационной решетке. С учетом дополнительных затуханий соотношение (4.16) преобразуется в следующее

$$\frac{E^2{}_\perp}{(E_0 \sin\psi)^2} + \frac{E_{||}^2}{(E_0 L \cos\psi)^2} = 1, \tag{4.28}$$

где L- отношение амплитуд электромагнитного поля на выходе решетки в случаях, когда пластины ориентированы параллельно и перпендикулярно вектору $\vec{E}$ падающего линейно-поляризованной волны.

Из (4.19) следует, что круговая поляризация будет достигаться при угле ψ равном

$$\psi = arctgL\,. \tag{4.29}$$

Поляризаторы, устанавливаемые в фидерном тракте антенн, работают по принципу, аналогичному описанию выше. Часто поляризаторы представляют собой тонкую диэлектрическую пластину, размещенную вдоль цилиндрического волновода с волной основного типа под углом 45^0 к плоскости, в которой находиться максимум $\vec{E}$ поля в волноводе (рис.4.3). Для преобразовании вида поляризации также используются турникетные устройства и щелевые излучатели, расположенные на широкой стене прямоугольного волновода с волной основного типа (4.2).

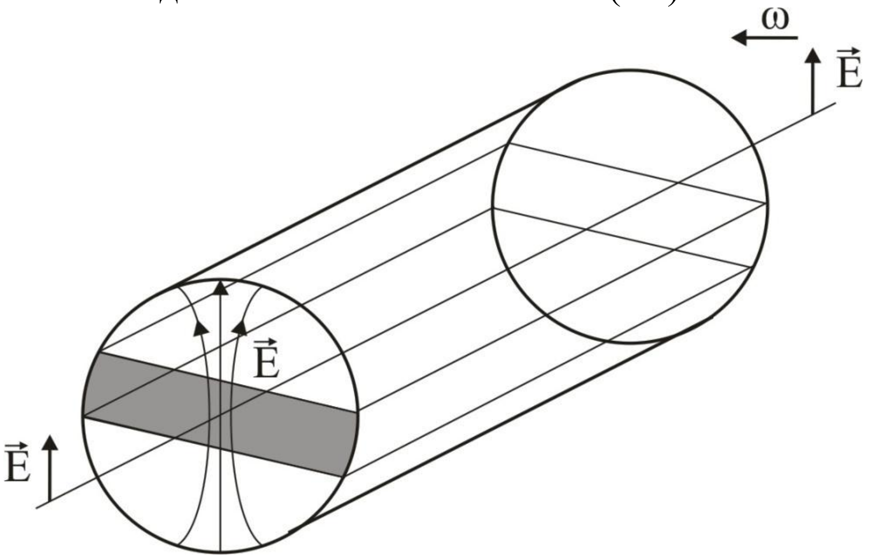

Рис.4.3 Волноводный поляризатор для кругового волновода с волной типа H_{11}

Для определения поляризационных параметров электромагнитных волн применяться несколько методов измерения, основными из которых являться:

-метод поляризационной диаграммы;

-компенсационный метод;

-метод разложения волны на ортогонально-поляризованные компоненты;

-модуляционный метод;

-метод нескольких антенн.

Рассмотрим метод поляризационной диаграммы с приемной антенной линейной поляризации. В общем случае, принятый сигнал на выходе антенны эллиптической поляризации при падении на нее эллиптически поляризованной волны равен:

$$E_0 = A\left[1 \mp \frac{2r_1}{\left(1+r_1^2\right)}\frac{2r_2}{\left(1+r_2^2\right)} + \frac{\left(1-r_1^2\right)\left(1-r_2^2\right)}{\left(1+r_1^2\right)\left(1+r_2^2\right)}\cos 2\alpha\right]^{1/2}, \quad (4.30)$$

где *A* - постоянный коэффициент;

$\alpha = \beta_2 - \beta_1$

r_1, β_1- коэффициент эллиптичности и угол ориентации поляризационного эллипса волны, которую излучала бы приемная антенна при работе на передачу;

r_2, β_2- коэффициент эллиптичности и угол ориентации поляризационного эллипса падающей волны;

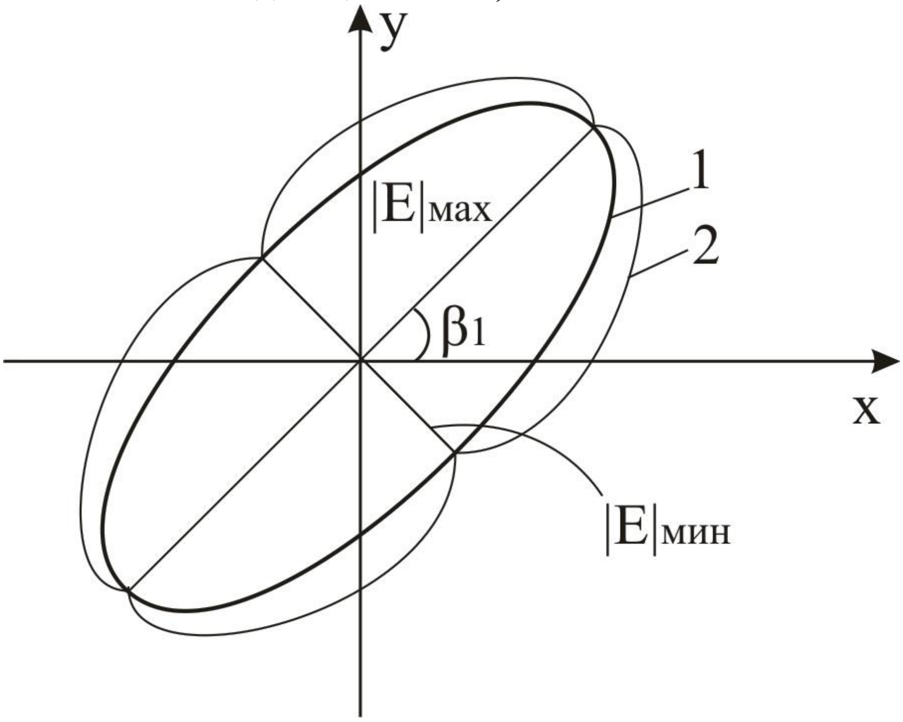

Рис. 4.4 Измерение поляризации
1-поляризованнный эллипс, 2-поляризованная диаграмма

Здесь следует брать знак (+), когда принимаемая волна и волна, излучаемая приемной антенной в режиме передачи, имеют одинаковое направление вращения, и знак (-) в обратном случае. При использовании приемной антенны линейной поляризации принятый сигнал равен:

$$E_0 = A\left[1 - \frac{1-r_1^2}{1+r_2^2}\cos 2\alpha\right]^{1/2}. \quad (4.31)$$

Если приемную антенну поворачивать вдоль оси и строить в полярных координатах график зависимости выходного сигнала от угла β_1, то получим поляризационную диаграмму, которая в общем случае имеет вид, показанный на рис.4.4. Поляризационная диаграмма позволяет определить r_2, β_2. Действительно, из (4.22) получается

$$r_2 = \frac{E_{0мин}}{E_{0макс}}, \qquad (4.32)$$

$$\beta_2 = \beta_1, \quad \text{при } E_0 = E_{0макс},$$

где $E_{0макс}$- максимальная величина принятого сигнала;

$E_{0мин}$- максимальная величина принятого сигнала.

На основе поляризационной диаграммы можно построить поляризационный эллипс.

Поляризация является важной характеристикой электромагнитных волн, позволяющей, например, получить дополнительную информацию о цели радиолокации. Процессы, происходящие при распространении электромагнитных волн в намагниченных ферритах и плазме, также могут быть пояснены лишь при рассмотрении поляризации распространяющихся волн.

Не монохроматические электромагнитные поля кроме названных видов поляризации могут быть не поляризованными и частично поляризованными.