Практическое занятие №4

Рассмотрим еще задачи на исследование аналитичности функции.

<u>Пример</u>. Исследовать функцию $f(z) = 3iz^2 + 6$ на аналитичность.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции, подставив вместо $z = x + iy$:

$$f(z) = 3i(x + iy)^2 + 6 = 3i(x^2 - y^2) - 6xy + 6,$$

т. е.

$$\mathrm{Re}f(z) = u(x,y) = -6xy + 6, \ \ \mathrm{Im}f(z) = v(x,y) = 3x^2 - 3y^2.$$

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы во всех точках (x,y). Проверим выполнение теоремы 2.2.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6y, \frac{\partial v}{\partial y} = -6y, \frac{\partial u}{\partial y} = -6x, \frac{\partial v}{\partial x} = 6x.$$

Условия Коши-Римана выполнены во всех точках (x,y), т.е. выполнены условия теоремы 2.2, следовательно, $f(z) = 3iz^2 + 6$ аналитическая функция на всей комплексной плоскости.

<u>Пример.</u> Исследовать функцию $f(z) = 9\overline{z} + 20z + i$ на аналитичность.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции, подставим вместо $\overline{z} = x - iy$

$$f(z) = 9(x - iy) + 20(x - y) + i = (29x - 20y) + i(-9y + 1)$$

т.е.

$$\mathrm{Re}f(z) = u(x,y) = 29x - 20y, \mathrm{Im}f(z) = v(x,y) = -9y + 1.$$

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы во всех точках (x,y), проверим выполнение условий теоремы 2.2

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 29, \frac{\partial v}{\partial y} = -9, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ - первое условие Коши-Римана не выполнено ни в одной точке комплексной плоскости. Значит, функция $\omega(z) = 9\overline{z} + 20z + i$ нигде не дифференцируема, а следовательно, не является аналитической.

<u>Пример.</u> Исследовать функцию $f(z) = ie^{3z}$ на аналитичность.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции

$f(z) = ie^{3z} = ie^{3x}cos3y - e^{3x}sin3y$, т.е.

$\mathrm{Re}f(z) = u(x,y) = -e^{3x}sin3y$ – действительная часть функции,

$\mathrm{Im}f(z) = v(x,y) = e^{3x}cos3y$ - мнимая часть функции.

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы во всех точках (x,y), проверим выполнение условий теоремы 2.2

$\frac{\partial u}{\partial x} = -3e^{3x}sin3y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -3e^{3x}sin3y$, получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ во всех точках (x,y)

$\frac{\partial u}{\partial y} = -3e^{3x}cos3y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 3e^{3x}cos3y$, получаем $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ во всех точках (x,y)

Таким образом, $f(z) = ie^{3z}$ дифференцируема во всех точках z и аналитическая на всей комплексной плоскости.

2.5 Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Примеры конформных отображений

Рассмотрим функцию $\omega = f(z)$, аналитическую в точке z_0 , $f'(z_0) \neq 0$. Тогда $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $\omega = f(z)$ плоскости z на плоскость ω:

при $|f'(z_0)| > 1$ имеет место растяжение,

при $|f'(z_0)| < 1$ имеет место сжатие.

Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости z, проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $\omega_0 = f(z_0)$ к образу этой кривой на плоскости ω при отображении $\omega = f(z)$.

Определение. *Отображение окрестности точки* z_0 *на окрестность точки* ω_0, *осуществляемое функцией* $\omega = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$ *и обладающее в точке* z_0 *свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжений, называется конформным в точке* z_0.

<u>Свойство сохранения углов означает:</u> если при отображении $\omega = f(z)$ кривые γ_1 и γ_2 переходят соответственно в кривые Γ_1 и Γ_2, то угол φ между касательными k_1 и k_2 к кривым γ_1 и γ_2 в точке z_0 будет равен угла Φ между соответствующими касательными K_1 и K_2 к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке ω_0, т.е. $\Phi = \varphi$.

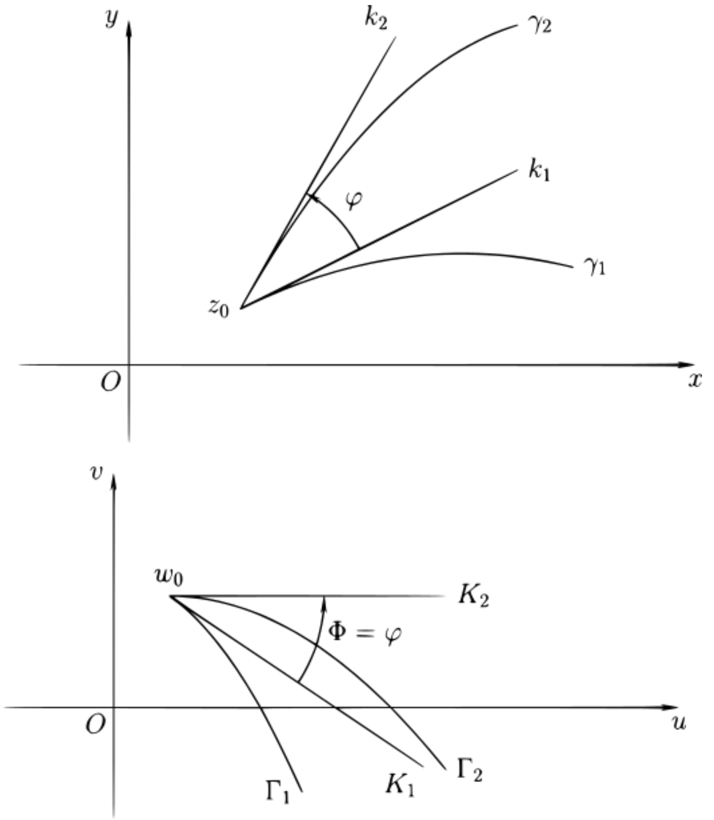


Рис. 9

<u>Свойство постоянства растяжений:</u> при отображении, осуществляемом аналитической функцией, $f'(z_0) \neq 0$ «малые элементы» в окрестности точки z_0 преобразуются подобным образом с коэффициентом $k = |f'(z_0)|$.

Рассмотрим примеры конформных отображений, осуществляемые линейной функцией $\omega = az + b$ и степенной $\omega = z^n$.

1. ***<u>Линейная функция</u>*** $\boldsymbol{\omega = az + b}$, где a и b – постоянные комплексные числа $(a \neq 0)$. Пусть $a = re^{i\alpha}$, $z = |z|e^{i\psi}$. Рассмотрим два преобразования, составляющие функцию ω:

$$\omega_1 = az,$$

$$\omega = \omega_1 + b,$$

$$\omega_1 = re^{i\alpha} \cdot |z|e^{i\psi} = r|z|e^{i(\alpha+\psi)},$$

т.е. $\omega_1 = r|z|$, $arg\omega_1 = \psi + \alpha$. Значит, функция ω_1 осуществляет преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом, равным r и поворот вокруг начала координат на угол α.

Преобразование $\omega = \omega_1 + b$ – параллельный перенос на вектор, соответствующего комплексному числу b.

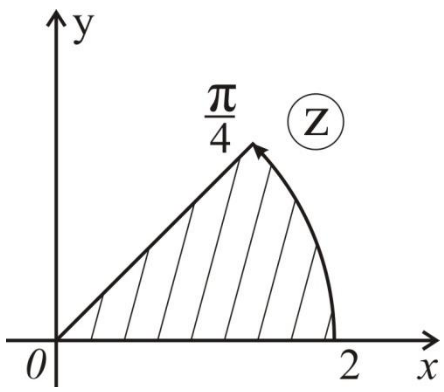
Таким образом, при отображении $\omega = az + b$ нужно вектор z повернуть на угол $\alpha = arga$, изменить его длину в $r = |a|$ раз и параллельно перенести на вектор b.

Пример. Определить область D_2 плоскости ω, на которую отобразится область D_1 плоскости z функцией $\omega = (1-i)z + \omega_1$.

Область D_1: $|z| \leq 2,\ 0 \leq argz \leq \frac{\pi}{4}$.

Решение. Представим функцию $\omega = (1-i)z + 2i = \omega_1 + 2i$, где $\omega_1 = (1-i)z$. Коэффициент $a = 1 - i$, $|a| = \sqrt{2}$, $arga = -\frac{\pi}{4}$, т.е. ω_1 осуществляет поворот области D_1 на угол $-\frac{\pi}{4}$ (поворот по часовой стрелке на $\frac{\pi}{4}$) и растяжение с коэффициентом $|a| = \sqrt{2}$.

В результате получаем, что область D_1 перешла в область D. Заключительный шаг: $\omega_2 = \omega_1 + 2i$ – это параллельный перенос полученной области D на вектор $b = 2i$ (все этапы показаны на рис. 10).



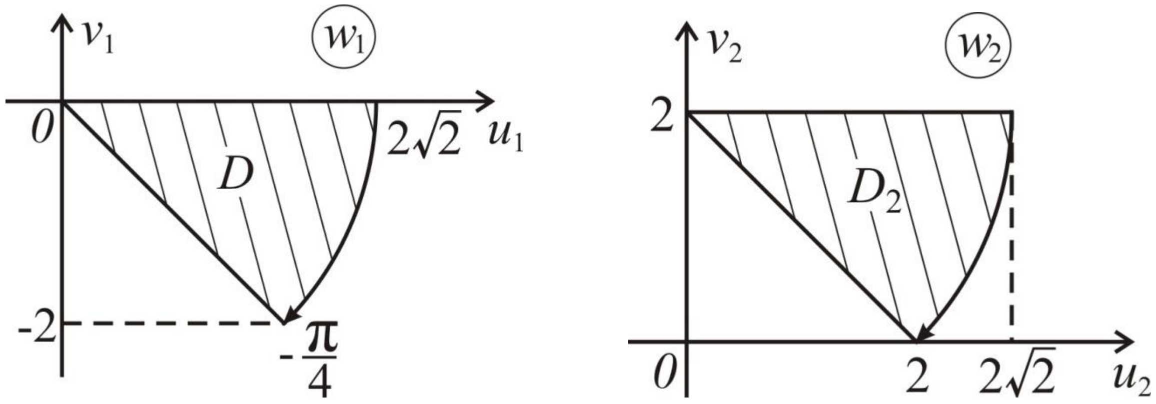


Рис. 10

2. ***Степенная функция*** $\boldsymbol{\omega = z^n}$, $n \geq 2$ – целое положительное число.

Отображает взаимно-однозначно и конформно внутренность угла с вершиной в начале координат, раствор которого θ не превосходит $\frac{2\pi}{n}$ на внутренность угла с вершиной в начале координат раствора $n\theta$.

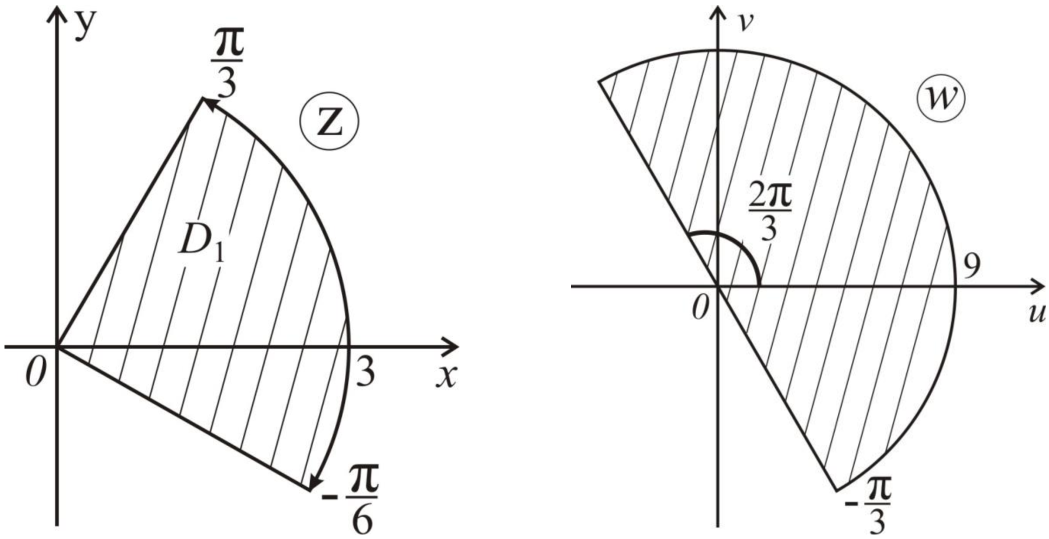
Пример. Определить область D_2 плоскости ω, на которую отобразится область D_1 плоскости z функцией $\omega = z^2$. Область D_1:

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{6} \leq argz \leq \dfrac{\pi}{3}, \\ |z| \leq 3. \end{cases}$$

Решение. При отображении $\omega = z^2$ луч $argz = -\frac{\pi}{6}$ перейдет в луч $arg\omega = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$, луч $argz = \frac{\pi}{3}$ перейдет в луч $argz = \frac{2\pi}{3}$.

$|\omega| = |z|^2 = 9$, т. е. получим область D_2 (все этапы показаны на рис. 11):

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{3} \leq arg\omega \leq \dfrac{2\pi}{3}, \\ |z| \leq 9. \end{cases}$$



(область D_2)

Рис. 11

Домашнее задание.

Учебно-методическое пособие «Теория функций комплексного переменного», часть 1. Задачи №№ 1.9, 1.11.

Пособие размещено на сайте кафедры ВМ-2
http://vm-2.mozello.ru
раздел «Математический анализ. 4 семестр».