Лекция 2

Уравнение теплопроводности

Количество теплоты dQ, протекающее за dt через площадку dS, пропорционально скорости изменения температуры в направлении нормали $\boldsymbol{n}$ к площадке,

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \operatorname{grad} T \cdot \boldsymbol{n},$$

$$dQ = -\kappa\, dS\, dt\, (\operatorname{grad} T \cdot \boldsymbol{n}),$$

где κ — коэффициент *теплопроводности*

за время dt из некоторого объема V выделяется

$$Q = -\kappa\, dt \oint_S (\operatorname{grad} T \cdot \boldsymbol{n})\, dS = -\kappa\, dt \int_V \operatorname{div} \operatorname{grad} T\, dV,$$

по теореме Остроградского – Гаусса

Если внутри нет источников тепла, то выделение тепла из объема ведет к охлаждению.

$$dQ' = -c_p\, dm\, dT\,,$$

где c_p — удельная теплоемкость среды, $dm = \rho\, dV$

Если *dt* мало, то

$$dT = T(t + dt) - T(t) = \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Общее количество теплоты выделяемое из объема *V*

$$Q' = -c_p\, \rho\, dt \int\limits_V \frac{\partial T}{\partial t}\, dV\,.$$

Если источников тепла нет, то

$$Q = Q'$$

или

$$\cancel{dt}\; c_p\, \rho \int\limits_V \frac{\partial T}{\partial t} dV = \kappa\, dt \int\limits_V \operatorname{div} \operatorname{grad} T\, dV$$

Уравнение теплопроводности *или* **уравнение диффузии**

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \, \Delta T,$$

$$\Delta T - \frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{\kappa}{c_\rho \rho}.$$

Если в объеме ***V*** имеются источники теплоты мощности ***q***, то получим ***неоднородное уравнение теплопроводности.***

$$\Delta T - \frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa} q.$$

Потенциалы электромагнитного поля φ *и* $\boldsymbol{A}$.

Возьмем уравнения Максвелла: $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$,

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ и

$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ $\qquad$ $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = 0$

Можно ввести неизвестную векторную функцию ***A*,**

такую, что $\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0.$ $\qquad$ $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0$

А так как

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}.$$

То $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,f$ $\qquad$ $\varphi' = \varphi - \dfrac{\partial f}{\partial t}$ $\qquad$ *калибровка*

Есть неоднозначность выбора $\qquad$ $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \varepsilon\mu\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$

Уравнение Пуассона

Стационарная или квазистационарная задача

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi \qquad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$$

то для потенциалов получаем

уравнения Пуассона, или

неоднородные уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon};$$

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu\mathbf{j}.$$

Точечный заряд в вакууме создает поле

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

При стационарном распределении температур $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$ уравнение теплопроводности принимает вид

$$\Delta T = -\frac{q}{\kappa}$$

Установившиеся колебания

Волновое уравнение $u_{tt} = \operatorname{div}(k(M) \operatorname{grad} u) + f(M, t)$

Если на систему с непрерывными и распределенными параметрами действует внешняя периодическая сила $f(M, t)$ с частотой ω, то с течением времени в системе устанавливаются колебания с частотой ω .

Ищем решение в виде $u = \exp(-i\omega t)$ и получим

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + \omega^2 u = -f(M).$$

Для однородной среды

$$\Delta u + \omega^2 u = -f(M)$$

Эти уравнения называются ***приведенными волновыми уравнениями*** или ***уравнениями Гельмгольца***

Электромагнитные установившиеся колебания

Пусть в системе установились электромагнитные колебания с частотой ω. Тогда подставим решения в виде $\boldsymbol{E}(M,t) = \boldsymbol{E_0}(M)\exp(-i\omega t)$ и $\boldsymbol{B}(M,t) = \boldsymbol{B_0}(M)\exp(-i\omega t)$ в уравнения для электромагнитного поля

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0;$$

$$\Delta \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0$$

и получим *векторные уравнения Гельмгольца*

$$\Delta \boldsymbol{E_0} + k^2 \boldsymbol{E_0} = 0;$$

$$\Delta \boldsymbol{B_0} + k^2 \boldsymbol{B_0} = 0,$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число.

Определение. *Дифференциальным уравнением в частных производных* называется уравнение, связывающее неизвестную функцию $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и частные производные функции Ψ.

Порядком уравнения называют порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Линейным уравнением называется уравнение, в котором все производные и сама неизвестная функция входят в это уравнение в первой степени.

Всякая функция, подставленная в уравнение и обращающая его в тождество, называется *решением уравнения*.

Если функция Ψ — решение и $C\Psi$ (C — произвольная константа) — тоже решение одного и того же уравнения, то данное уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*. Иногда дают следующее определение: если функция, тождественно равная нулю ($\Psi = 0$), является решением, то данное уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Решения линейных однородных уравнений обладают следующим свойством: если каждая из функций $\Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\Psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ..., $\Psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является решением, то и их линейная комбинация $C_1\Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + C_1\Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + C_k\Psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — произвольные постоянные) также является решением этого уравнения.

Оператором называется правило, по которому одной функции $\psi(x)$ ставится в соответствие другая функция $f(x)$ тех же независимых переменных, т. е. $\hat{L}\psi = f(x)$.

Оператор называется *линейным*, если он удовлетворяет условию $\hat{L}\left(\sum\limits_i C_i\psi_i\right) = \sum\limits_i C_i\left(\hat{L}\psi_i\right)$.

Типы уравнений

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_{k=1}^{n} b_k\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}+c\Psi=f,$$

.

здесь $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i\partial x_k}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k\partial x_i}$ $a_{ik}=a_{ki}$

Заменой переменных $x_i\to y_i$

их можно привести к ***каноническому виду***

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_i^2}+F\left(y_1,y_2,\ldots,y_n,\Psi,\frac{\partial\Psi}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial\Psi}{\partial y_n}+f\right)=0.$$

Свойства решения существенно зависят от коэффициентов, стоящих при старших производных

$$a_{11}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+a_{22}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+2a_{12}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}+b_1\frac{\partial\Psi}{\partial x}+b_2\frac{\partial\Psi}{\partial y}+c_0\Psi=f$$

$$\lambda_1\frac{\partial^2\Psi}{\partial x'^2}+\lambda_2\frac{\partial^2\Psi}{\partial y'^2}+b'_1\frac{\partial\Psi}{\partial x'}+b'_2\frac{\partial\Psi}{\partial y'}+c'_0\Psi=f,$$

по аналогии с квадратичной формой

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+fy+g=0,$$

– два положительных корня $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

эллиптический тип уравнения;

— корни уравнения имеют разные знаки $(\lambda_1 < 0,\ \text{а}\ \lambda_2 > 0)$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

гиперболический тип уравнения;

— один корень равен нулю $(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0)$

$$y^2=2px.$$

параболический тип уравнения.

Уравнения гиперболического типа

Волновое уравнение

$$\Delta\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \Box_a\psi = 0.$$

одномерное волновое уравнение,

или ***уравнение свободных колебаний струны***:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

уравнение Д'Аламбера, или неоднородное волновое уравнение:

$$\Delta\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \Box_a\psi = f(x, y, z, t).$$

Решения этих уравнений имеют колебательный характер.

Уравнения параболического типа

Уравнение теплопроводности (уравнение диффузии):

$$\Delta\psi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{q}{\kappa},$$

где κ — коэффициент теплопроводности (диффузии).

Описывают ***«диффузионные»*** процессы, т.е. **необратимые** (***«апериодические»***).

Общая тенденция, свойственная явлению теплопроводности (и этих уравнений), состоит в ***сглаживании*** разностей температур,

в ***отличие от волнового уравнения***, где неоднородности не сглаживаются, а ***переносятся*** в другое место.

Уравнения эллиптического типа

Уравнение Пуассона
(неоднородное уравнение Лапласа):

$$\Delta\psi = f$$

и ***уравнение Лапласа***:

$$\Delta\psi = 0, \text{ где } \psi = \psi(x, y, z).$$

Уравнения этого типа описывают ***стационарные*** и ***квазистационарные*** процессы.

Общее уравнение Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

имеет не действительные, а комплексные коэффициенты!!

решение этого уравнения имеет ***волновой*** характер.

Дифференциальные уравнения с обыкновенными

и тем более частными производными

имеют бесконечное множество решений.

Задавая дополнительные условия, нужно обеспечить единственность и существование решения

(***корректная постановка задачи***).

Для этого нужно убедится в том, что:

- дополнительные условия достаточны для выделения однозначного решения —

  доказывается ***теорема единственности решения***;

- дополнительные условия не переопределяют задачу,

  т. е. среди них нет несовместимых условий —

  доказывается ***теорема существования решения***

НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим ***дополнительные условия*** (***начальные*** и ***граничные***) на примере задачи о продольных колебаниях упругого стержня

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \bar{f}$$

Начальные условия определяют состояние системы в некоторый выделенный («начальный») момент времени $t=t_0$. Пусть для определенности это будет $t_0=0$.

нужно задать:

1) положение каждой точки стержня $u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l$

(если $\varphi(x) \neq 0$, то в $t= t_0=0$ стержень был не в равновесии);

2) скорость каждой точки стержня $u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l$

(если $\psi(x) \neq 0$, , то в $t= t_0=0$ каждой точке стержня была сообщена начальная мгновенная скорость,

например, двигающийся стержень остановился).

Граничные или краевые условия

Ограничимся только ***линейными граничными условиями***.

Разберем граничные условия на левом конце стержня $x = 0$ (правый $x = l$).

1. Стержень жестко закреплен (вбит в стену) или же двигается по определенному закону (жестко прикреплен к плите, которая совершает заданное движение): $u(0, t) = \mu(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Это условие называется *граничным условием первого рода*, или *условием Дирихле*.

Если $\mu(t) = 0$, то граничное условие — *однородное условие Дирихле*.

2. Задан закон изменения силы $f(t)$, приложенной к левому концу $x = 0$ стержня и действующей в продольном направлении: $k(0)\, u_x(0, t) = f(t)$, где k — коэффициент упругости; $u_x(0, t) = \nu(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant T)$, где $\nu(t) = f(t)/k$ — заданная функция. Это условие называется *граничным условием второго рода*, или *условием Неймана*.

Если $\nu(t) = 0$, то граничное условие — *однородное условие Неймана*. Однородное условие Неймана означает, что левый конец стержня свободен и к нему не приложена никакая сила: $f(t) = k \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$.

3. Пусть левый конец стержня закреплен упруго, например, с помощью пружины, коэффициент жесткости которой равен α. По закону Гука $k(0)\,u_x(0,t) = \alpha u(0,t)$, или $u_x(0,t) - h\,u(0,t) = 0$ — *однородное граничное условие третьего рода.*

Возможны комбинации упругого закрепления и смещения. Например, стержень с помощью пружины прикреплен к плите, которая перемещается по некоторому закону, определенному функцией $\nu(t)$, параллельно стержню: $u_x(0,t) = h[u(0,t) - \nu(t)]$, или $u_x(0,t) - hu(0,t) = \mu(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (где $\mu(t) = -h\nu(t)$ — заданная функция) — *неоднородное граничное условие третьего рода.*

Рассмотрим уравнения диффузии или теплопроводности

$$c\beta u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F.$$

Если все коэффициенты постоянные, то $u_t = a^2 \Delta u + f.$

Рассмотрим граничные условия на левом ($x = 0$) конце стержня в задаче теплопроводности одномерного стержня:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f,$$

где a — коэффициент температуропроводности,

а f — плотность источников тепла.

1. Граничное условие первого рода, или условие Дирихле: $u(0,t) = \mu(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, т. е. задана температура.
2. Граничное условие второго рода, или условие Неймана: $u_x(0,t) = \nu(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, если задана величина теплового потока $Q(0,t) = -ku_x(0,t)$.
3. Граничное условие третьего рода: $u_x(0,t) = -\lambda[u(0,t) - \theta(t)]$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, если задан теплообмен с окружающей средой с температурой θ:

$$\begin{cases} Q = h(u - \theta), \\ Q = -ku_x. \end{cases}$$

Существуют задачи, в которых нас интересует характер явления для моментов времени, достаточно удаленных от начального момента $t = 0$ (задачи на установившийся режим). В этих случаях решение определяется граничными значениями, поскольку влияние начальных условий благодаря трению, присущему всякой реальной системе, с течением времени ослабевает. Такие задачи называются задачами *без начальных условий*.

Если же нас интересуют явления в течение малого промежутка времени, когда влияние границ еще несущественно, то вместо полной задачи можно рассмотреть задачу с начальными условиями для неограниченной области — эту задачу часто называют *задачей Коши*.

Полная постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим полную постановку начально-краевой задачи:

$$\rho P_t[u] = \hat{L}u + f(M,t); \qquad \text{в } Q = D \times (0,T];$$

$$\left. \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right|_S = \mu(p,t)|_{p \in S}, \qquad |\alpha| + |\beta| \neq 0;$$

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|_{t=0} = \varphi_k(M), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1$$

$$\hat{L} = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} u) - q(M)u;$$

$$P_t[u] = \sum_{i=1}^{m} a_i(t) \frac{\partial^i u}{\partial t^i},$$

Тогда *решением задачи*

называется единственная функция

$$u(M,t)$$

- определена и непрерывна вместе со всеми производными, входящими в уравнение (в области Q, и удовлетворяет уравнению (в этой области;
- непрерывна вместе с первыми производными[1] по M и $(n-1)$-ми производными по t при $M \in \bar{D} = D + S$ и $t \in [0,T]$;
- удовлетворяет граничным и начальным условиям.

[1] В случае граничного условия Дирихле ($\alpha = 0$) непрерывность первых производных по M в замкнутой области $\bar{D}$ не требуется.