Р. В. Шамин

Дифференциальные уравнения в частных производных в пространствах Соболева

Lector.ru

«Грин Принт»

Москва — 2019

УДК 517.98
ББК 22.16
Ш19

Рецензенты:
Ведущий научный сотрудник отдела теоретической физики
Математического института им. В.А.Стеклова РАН,
доктор физико-математических наук *В.П. Павлов*

Главный научный сотрудник Института прикладной физики РАН,
лауреат Государственной премии РФ, доктор физико-математических
наук, профессор *Е.Н. Пелиновский*

Шамин Роман Вячеславович
Ш19 Дифференциальные уравнения в частных производных в пространствах Соболева. — М.: «Грин Принт», 2019. —180 с.
ISBN 978-5-6043404-0-0

Книга представляет собой учебник по современной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Рассматриваются уравнения в пространствах Соболева, что отличает настоящий учебник от классического изложения уравнений в частных производных. Подробно со всеми доказательствами изложена теория пространств Соболева в ограниченных областях. Кроме того, приведены основные факты функционального анализа, который существенно используется в книге.

Учебник можно использовать для первоначального изучения дифференциальных уравнений в частных производных, но он будет полезен и для углубленного изучения, поскольку содержит материал, который обычно не включают в учебники, например, полугруппы операторов и абстрактные системы Коши-Ковалевской. Предполагается, что настоящий учебник подготовит читателя к профессиональной литературе (монографиям и статьям) по уравнения в частных производных.

Книга будет полезна студентам и аспирантам, а также всем желающим познакомится с современной теорией дифференциальных уравнений в частных производных.

УДК 517.98
ББК 22.16

ISBN 978-5-6043404-0-0

Памяти Ольги Александровны Ладыженской

Оглавление

Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных представляют собой важное и актуальное направление в современной математике. Эта область математики считается одной из самых сложных, но в тоже время и очень интересной. Именно дифференциальным уравнениям отводится центральное место в математической и теоретической физики. Уравнениями этого типа описываются динамика жидкости и газа. Не секрет, что одним из факторов, который существенно продвинул дифференциальные уравнения в частных производных, является необходимость использования этих уравнений при создании атомной и водородной бомб. Далее, современные поиски решения управляемого термоядерного синтеза также связаны и с развитием методов дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме того, развитие современной авиации и ракетостроения было бы невозможно без уравнений в частных производных. Можно найти и приземленные применения этих уравнений в задачах сопротивления материалов, расчета колебаний строений, а также в задачах геологоразведки, сейсмологии, особенно океанологии и т.д.

Очень замечательно и важно, что дифференциальные уравнения в частных производных являются полигоном для развития и приложения большого числа других математических дисциплин: функциональный анализ, геометрия и топология, случайные процессы, алгебраические методы и др. При этом возникает интересный симбиоз — дифференциальные уравнения являются во многом заказчиками и потребителями новых методов смежных наук, а также стимулирующие развитие этих областей. В тоже время некоторые разделы таких наук, как теория случайных процессов, геометрия и другие сами используют результаты теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Современная теория дифференциальных уравнений в частных производных является относительно молодой наукой. Ее бурное развитие и основные результаты были получены с середины XX века. Хотя постановки этих уравнений и частные методы их решения были известны с XVIII века, начиная с работ Л. Эйлера и Ж.Л. Даламбера. В XIX веке существенное продвижение в области дифференциальных уравнений в частных производных было в работах Ж.-Б.Ж. Фурье.

Современный облик дифференциальных уравнений в частных производных начал вырисовываться в работах Р. Куранта и Д. Гильберта, но поворотным пунктом всей теории стали работы С.Л. Соболева, в которых были введены пространства Соболева и понятия обобщенных решений дифференциальных уравнений в частных производных. Дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений в частных производных показало, что именно пространства Соболева позволяют получить полноценный облик теории дифференциальных уравнений в частных производных.

В настоящее время дифференциальные уравнения в частных производных представляют собой динамично развивающуюся современную математическую дисциплину, как в части теоретической (чистой) математики, так и в части прикладной математики, поскольку результаты в области дифференциальных уравнений в частных производных являются ключевыми для разработки и реализации вычислительных процедур.

Настоящий учебник имеет определенные отличия от ряда других, ставших уже классическими учебников, посвященных дифференциальным уравнениям в частных производных. Мы рассматриваем дифференциальные уравнения в пространствах Соболева, при этом практически полностью игнорируем классические решения дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующие результаты. Далее, при рассмотрении эволюционных уравнений (параболические, гиперболические) мы изучаем только начально-краевые постановки задач, избегая задачу Коши.

Систематическое использование пространств Соболева обуславливает рассмотрение обобщенных решений для всех рассматриваемых типов уравнений, кроме систем Коши-Ковалевской. Такой подход имеет много преимуществ по сравнению с классическим изложением дифференциальных уравнений в частных производных. Надо сказать, что во многих учебниках используется аналогичный подход (см. [2, 4, 10, 11]).

В первой главе мы кратко даем классификацию линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и приводим модельные примеры основных уравнений в частных производных.

Во второй и третьих главах излагаются необходимые основы функционального анализа. Современная теория дифференциальных уравнений в частных производных основана на языке функционального анализа. Поэтому мы две главы отводим для изложения основ функционального анализа, который используется в дальнейшем. Мы рассматриваем основные виды абстрактных пространств и линейные ограниченные операторы, включая неограниченные. Эти главы являются выжимками из нашего учебника по функциональному анализу [9], который мы рекомендуем для дальнейшего изучения.

Четвертая глава является принципиальной для всего учебника. В этой главе изложены основы пространств Соболева. Вводится понятие обобщенных производных, на основании которого определяются пространства Соболева. Доказывается цикл теорем о свойствах пространств Соболева, включая теоремы о продолжении, различные теоремы вложения, а также понятия следа функций из пространств Соболева.

Пятая глава является центральной в учебнике, поскольку в ней мы детально рассматриваем эллиптические уравнения, которые являются основой для и для уравнений других типов. При рассмотрении эллиптических уравнений мы используем коэрцитивные формы и формулируем основные результаты для абстрактных эллиптических уравнений. Такой подход позволяет одновременно рассматривать как задачу Дирихле, так и задачу Неймана. Отметим также, что при изложении спектральных задач мы рассматриваем неограниченные операторы, порождаемые эллиптическими уравнениями.

Параболическим уравнениям мы посвящаем две главы. В шестой главе мы рассматриваем вопросы существования и единственности обобщенных решений для первой смешанной задачи для параболического уравнения. Существование решения мы доказываем методов Фурье. Для исследования гладкости решений параболических задач мы используем аппарат аналитических полугрупп операторов.

В седьмой главе мы подробно рассматриваем теорию полугрупп операторов, которая имеет самостоятельный интерес, но, главное, полугруппы операторов имеют органическую связь с параболическими задачами. Более того, именно полугруппы операторов позволяют выяснить суть параболических уравнений.

Восьмая глава посвящена гиперболическим уравнения, которые мы рассматриваем в более сокращенном варианте в отличии от параболических уравнений. При этом для доказательства существования и единственности обобщенных решений мы используем энергетическое неравенство, которое дает необходимые априорные оценки. Для существования мы используем для разнообразия метод Галеркина.

Девятая глава посвящена системам Коши-Ковалевской. В этой главе мы рассматриваем абстрактные дифференциальные уравнения в шкале банаховых пространств. Причем только в этой главе мы рассматриваем нелинейные дифференциальные уравнения.

На мое мировоззрение на дифференциальные уравнения в частных производных существенное влияние оказали лекции профессора А.Л. Скубачевского, учеником которого мне посчастливилось быть. Также автор выражает глубокую благодарность профессору Л.Е. Россовскому, многочисленные обсуждения с которым позволили существенно улучшить настоящий учебник.

Глава I

Уравнения в частных производных

1. Классификация линейных уравнений второго порядка

Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка имеют следующий вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x), \tag{I.1}$$

где $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, функции $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $f(x)$ заданы, а функция $u(x)$ является неизвестной. Здесь предполагается, что не все функции $a_{ij}(x)$ тождественны нулю в Q.

Важным отличием уравнений в частных производных от обыкновенных дифференциальных уравнений является то обстоятельство, что, вообще говоря, решение не всегда можно «подставить» в уравнение. Дело в том, что для определения решения уравнения в частных производных необходимо фиксировать класс функций (функциональное пространство), которому должно принадлежать решение.

Исследование уравнений в частных производных необходимо проводить в зависимости от типа уравнения. Тип уравнения полностью определяется матрицей

$$A(x) = \left(\begin{array}{cccc} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{array} \right).$$

Поскольку для частных производных имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i},$$

то без ограничения общности можно считать, что матрица $A(x)$ является симметрической $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$.

Фиксируем какую-либо точку $x^* \in Q$. Симметрическая матрица $A(x^*)$ имеет n вещественных собственных значений с учетом кратности. Мы рассмотрим три случая:

1. Матрица $A(x^*)$ имеет n положительных собственных значений. В этом случае мы будем говорить, что уравнение (I.1) является эллиптическим в точке x^*.

2. Матрица $A(x^*)$ имеет одно нулевое собственное значение и $n-1$ положительных собственных значений. В этом случае мы будем говорить, что уравнение (I.1) является параболическим в точке x^*.

3. Матрица $A(x^*)$ имеет одно отрицательное собственное значение и $n - 1$ положительных собственных значений. В этом случае мы будем говорить, что уравнение (I.1) является гиперболическим в точке x^*.

Заметим, что если матрица $A(x^*)$ имеет n отрицательных значений, то уравнение (I.1) можно считать эллиптическим, после умножения этого уравнения на -1.

Мы будем рассматривать всегда ситуацию, когда уравнение имеет одинаковый тип для всех $x \in Q$. Поэтому будем говорить об эллиптических, параболических и гиперболических уравнениях.

Мы знаем, что для обыкновенных дифференциальных уравнений нужно рассматривать начальные или краевые условия для того, чтобы выделить единственное решение из общего решения. В случае уравнений в частных производных нам также потребуется рассматривать наряду с уравнением начальные и/или краевые условия, но в отличии от обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве этих условий будут фигурировать не числа, а функции.

2. Основные уравнения в частных производных

Для каждого типа уравнения существует простейший вариант уравнения, который имеет хорошо известный физический смысл.

Простейшим эллиптическим уравнением является уравнение Пуассона

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n^2} = f(x).$$

Если $f(x) = 0$, то это уравнение называется уравнением Лапласа. С эллиптическими уравнениями рассматриваются различные краевые условия, которые фиксируют значения неизвестной функции на границе области Q, в которой рассматривается уравнение. В частности, будем рассматривать условие Дирихле

$$u|_{\partial Q} = \varphi(x), \quad x \in \partial Q.$$

В главе, посвященной эллиптическим уравнениям, мы рассмотрим и другое краевое условие.

Физический смысл уравнения Пуассона состоит в том, что решение $u(x)$ описывает прогиб упругой пластины, фиксированной на уровне $\varphi(x)$ на границе области под воздействием внешней силы, описываемой функцией $f(x)$.

Другой физический смысл, который может иметь уравнение Пуассона, связан с электростатикой — при описании электростатического поля, с гидродинамикой — при описании поля скоростей при стационарном обтекании идеальной жидкости, а также для стационарного распределения температуры.

Эллиптические уравнения относятся к стационарным уравнениям, а параболические и гиперболические уравнения являются эволюционными уравнениями, поскольку их физический смысл предполагает, что одна из переменных является временем.

Эволюционные уравнения мы будем рассматривать в области Q_T, которое является цилиндрическим множеством

$$(t, x) \in Q_T = (0, T) \times Q,$$

где $Q \subset \mathbb{R}^n$, причем возможен случай, когда $n = 1$.

Простейшим видом параболического уравнения является уравнение теплопроводности, которое имеет вид

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta u(t,x) + f(t,x).$$

Для эволюционных уравнений необходимо ставить начально-краевые задачи, когда по временной переменной фиксируется начальные условия, а по пространственными — краевые. Для уравнения теплопроводности эти условия выглядят следующим образом

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q$$

и

$$u|_{(t,x)\in(0,T\times\partial Q)} = \gamma(t,x).$$

Иногда для эволюционных уравнений рассматривается задача Коши. В этом случае уравнение рассматривается в области $(0,T) \times \mathbb{R}^n$, а краевое условие не налагается. Однако требование принадлежности решения к нужному функциональному пространству, как правило, включает в себя краевые условия такие, как убывание с нужной скоростью при $|x| \to \infty$. В нашем учебнике мы будем рассматривать только начально-краевые задачи для эволюционных уравнений.

Как и следует из названия, уравнение теплопроводности описывает распределение температуры в области Q во времени. При этом начальное условие — это есть начальное распределение температуры, а краевое условие — это температура на границе области. Наконец, функция $f(t,x)$ описывает тепловые источники внутри области.

Третье уравнение, которое мы рассмотрим — это волновое уравнение. Волновое уравнение — это уравнение гиперболического типа. Оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \Delta u(t,x) + f(t,x).$$

Краевое условие для волнового уравнения такое же, как и для уравнения теплопроводности

$$u|_{(t,x)\in(0,T\times\partial Q)} = \gamma(t,x),$$

а в качестве начальных условий используется два условия, поскольку по временной переменной волновое уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in Q.$$

Волновое уравнение описывает распространение волн, в частности, колебание упругой мембраны (струны в случае $n = 1$). Под воздействием внешней силы, описываемой функцией $f(t, x)$.

Среди дифференциальных уравнений второго порядка возможны и другие типы уравнений, например, ультрагиперболические, но мы уравнения такого типа рассматривать не будем.

Глава II

Абстрактные пространства

1. Метрические пространства

Пространством мы будем называть множества, элементы которых объединены каким-либо свойством.

Важнейшими пространствами являются метрические пространства. Непустое множество X называется метрическим пространством, если для любых элементов $x, y \in X$ определена числовая функция $\varrho(x, y)$, называемая метрикой, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. $\varphi(x, y) \geq 0$, причем $\varrho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$.

3. $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$, для любых $x, y, z \in X$.

Метрика является абстрактным понятием расстояния между двумя элементами. Покажем, что все эти условия, которые еще называются аксиомами метрики, характеризуют свойства обычного расстояния.

Во-первых, расстояние всегда неотрицательное, при этом нулевое расстояние возможно только для совпадающих точек. Поэтому для метрики есть первое условие.

Во-вторых, расстояние от первого объекта до второго равно расстоянию от второго до первого. Для этого у нас есть второе условие для метрики.

В-третьих, дойти из пункта A в пункт B не может быть дольше чем дойти из A сначала в пункт C, а потом в пункт B. Это свойство расстояние учитывается в третьем условии. Это условие называется неравенством треугольника.

В метрическом пространстве можно ввести понятие шара, которое отрывает новые горизонты в метрических пространствах. Рассмотрим какое-либо метрическое пространство, которое будем обозначать через X. Для любого элемента $x^0 \in X$ открытым шаром (или просто шаром) с радиусом $R > 0$ в центре в x^0 назовем множество

$$B_R(x^0) = \{x \in X : \varrho(x^0, x) < R\}.$$

Сразу же дадим определения замкнутого шара с этим же радиусом и тем же центром

$$\overline{B}_R(x^0) = \{x \in X : \varrho(x^0, x) \leq R\}.$$

Понятие шара дает возможность определить открытое множество в метрическом пространстве, которое имеет принципиальное значение в функциональном анализе. Множество $A \subset X$ называется открытым, если для любой точки $x \in A$ существует такое $r = r(x) > 0$, что шар с радиусом r в центре x полностью принадлежит множеству A

$$B_r(x) \subset A.$$

Также по определению будем считать открытым множеством пустое множество $\varnothing$.

Вместо шара можно использовать понятие окрестности точки. Окрестностью точки x называется любое открытое множество, содержащее эту точку.

Покажем, что понятие открытого множества в метрическом пространстве обобщает понятие открытого множества в $\mathbb{R}^n$. В качестве метрического пространства будем рассматривать $\mathbb{R}$ с метрикой $\varrho(x, y) = |x - y|$. Тогда интервал $(0, 1)$ является открытым множеством в смысле метрического пространства. Действительно, рассмотрим любую точку $x \in (0, 1)$, тогда шар с радиусом

$$r < \min\left\{\frac{x}{2}, \frac{1-x}{2}\right\}$$

в центре точке x представляет собой интервал

$$B_r(x) = (x - r, x + r).$$

По выбранному радиусу имеет место

$$(x - r, x + r) \subset (0, 1).$$

При этом множество $[0, 1]$ в этом же метрическом пространстве уже не будет отрытым. Для доказательства выберем в качестве $x = 0$, тогда любой шар будет представлять собой множество $(-r, r)$, которое при любом $r > 0$ будет содержать отрицательные числа, которые не входят в множество $[0, 1]$.

Докажем простые, но важные теоремы.

Теорема 1.1. *Любое объединение открытых множеств является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть

$$Q = \bigcup_{s \in S} Q_s$$

объединение открытых множеств Q_s, где S есть множество (конечное или нет) индексов.

Рассмотрим произвольную точку $x \in Q$, следовательно существует (возможно не единственный) индекс $s \in S$ такой, что $x \in Q_s$. Поскольку Q_s является открытым множеством, то существует шар такой, что $B_r(x) \subset Q_s$, а следовательно имеет место и $B_r(x) \subset Q$. $\square$

Теорема 1.2. *Конечное пересечение открытых множеств является открытым множеством.*

Доказательство. Пусть

$$Q = \bigcap_{k=1}^{N} Q_k$$

объединение открытых множеств Q_k.

Рассмотрим произвольную точку $x \in Q$, тогда для каждого Q_k существует такой радиус $r_k > 0$, что

$$B_{r_k}(x) \subset Q_k.$$

Следовательно, для $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_N\}$ имеет место

$$B_r(x) \subset Q.$$

$\square$

Для любого множества $A \subset X$ мы определим множество граничных точек. Это множество состоит из всех таких точек $x \in X$, что для любого шара $B_r(x)$

$$B_r(x) \cap A \neq \varnothing$$

и

$$B_r(x) \cap \overline{A} \neq \varnothing.$$

То есть любой шар содержит точки, принадлежащие множеству A, так и не принадлежащие этому множеству. Множество всех граничных точек называется границей множества и обозначается следующим образом ∂A.

Вместе с отрытыми множествами в метрическом пространстве рассматриваются замкнутые множества. Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

Очевидно, что открытое множество не может содержать ни одной граничной точки. Поэтому дополнение к открытому множеству является замкнутым множеством, а дополнение к замкнутому — открытым.

Множество A может не быть ни открытым, ни замкнутым. Например, полуинтервал $[0, 1)$. При этом в любом метрическом пространстве есть два множества, которые одновременно и открыты и замкнуты. Это пустое множество $\varnothing$ и все пространство X.

Для любого множества можно определить операцию замыкания. Для множества A замыканием назовем следующее множество

$$[A] = A \cup \partial A.$$

Мы будем использовать обозначение $[A]$ для замыкания. Очевидно, что замыкание любого множества является замкнутым множеством. При этом можно сказать, что замыкание — это минимальное замкнутое множество, содержащее исходное множество.

Главный смысл метрических пространств — это возможность определить сходимость в этом пространстве по заданной метрике. Прежде всего дадим определение предела последовательности в метрическом пространстве. Это определение полностью совпадет с определением предела числовой последовательности, если модуль разности заменить на метрику.

Последовательность x_n называется сходящейся к точке x при $n \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполнено неравенство

$$\varrho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Мы будем писать $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ или $x_n \to x$, при $n \to \infty$.

Можно дать и несколько другое определение, основанное опять-таки на понятии открытого множества (точнее, окрестности). Последовательность x_n сходится к точке x если *для любой* окрестности точки x, начиная с некоторого номера (зависящего от этой окрестности) все члены последовательности принадлежат этой окрестности.

Определим еще несколько важных понятий метрических пространств, связанных со сходимостью. Рассмотрим некоторое множество в метрическом пространстве $M \subset X$. Замыкание этого множества $[M]$ состоит из пределов всех сходящихся последовательностей $\{x_n\} \subset M$. Действительно, пусть $x_n \in M$ сходится к элементу $x \notin M$. Покажем, что $x \in \partial M$. В самом деле любая окрестность точки x содержит элементы множества M — члены x_n с достаточно большим номером, так и элементы не принадлежащие M — саму точку x.

Множество A называется плотным в множестве B, где оба множества принадлежат одному метрическому пространству, если замыкание $[A]$ совпадает с множеством B. Другими словами, для любого элемента $b \in B$ существует сходящаяся последовательность a_n такая, что

$$a_n \in A, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

Множество, плотное во всем метрическом пространстве X, называется всюду плотным. Если $Y \subset X$ есть всюду плотное множество, то любой элемент $x \in X$ можно аппроксимировать *в метрике* X с любой точностью элементами из Y. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $y_\varepsilon \in Y$, что

$$\varrho(x, y_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество. Таким образом, любой элемент сепарабельного пространства можно приблизить счетным множеством, что важно в приложениях. Как мы в дальнейшем увидим, свойство сепарабельности играет важную роль в функциональных пространствах.

С понятием сходящейся последовательности тесно связано понятие фундаментальности последовательности. Последовательность x_n метрического пространства X называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n, m > N$ выполнено неравенство

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Теорема 1.3. *Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда из сходимости последовательности можно найти N такой, что $\varrho(x_n, x) < \varepsilon/2$ и $\varrho(x_m, x) < \varepsilon/2$ при $n, m > N$.

Тогда, используя неравенство треугольника, имеем

$$\varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(x, x_m) < \varepsilon.$$

□

В курсе математического анализа для числовых последовательностей верно и обратное — любая фундаментальная последовательность сходится. В общем случае в метрическом пространстве это не так. Для сходимости в метрическом пространстве необходимо, чтобы предел сам принадлежал этому пространству. Однако может оказаться так, что «предел» фундаментальной последовательности не принадлежит исходному метрическому пространству. Такое бывает для неполных метрических пространств. Впрочем отчаиваться не стоит, в этом случае всегда возможно пополнить метрическое пространство, но обо всем этом в следующем параграфе.

Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Существует критерий полноты метрического пространства — теорема о вложенных шарах.

Теорема 1.4. *Пусть X — метрическое пространство, $r_n > 0$ стремящаяся к нулю последовательность. Рассмотрим последовательность замкнутых шаров $B_n = \overline{B}_{r_n}(x_n)$ такую, что*

$$B_n \subset B_m, \quad n > m.$$

Тогда пространство X является полным тогда и только тогда, когда эти шары имеют не пустое пересечение

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing. \tag{II.1}$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть X есть полное метрическое пространство. Последовательность центров шаров x_n является фундаментальной, поскольку

$$\varrho(x_n, x_m) < r_n,$$

при $m > n$, при этом $r_n \to 0$. В силу полноты пространства X эта последовательность сходится к элементу, который мы обозначим x. Поскольку шар B_n содержит все точки последовательности, кроме, быть может, первых $n-1$, то

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Поэтому любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку для любого множества B_n, а в силу замкнутости множеств B_n следует, что $x \in B_n$ для всех n.

Теперь докажем достаточность. Рассмотрим фундаментальную последовательность x_n. В предположении, что имеет место (II.1) докажем, что эта последовательность имеет предел. В силу фундаментальности последовательности, существует такой номер n_k, что имеет место

$$\varrho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}, \quad n > n_k.$$

Без ограничения общности можно считать, что $n_{k+1} > n_k$. Обозначим через B_k замкнутый шар $\overline{B}_{\frac{1}{2^k}}(x_{n_k})$. По построению эти шары являются вложенными, а по предположению (II.1) имеют общую точку x. Более того, эта точка являются пределом подпоследовательности x_{n_k}. При этом если фундаментальная последовательность содержит в себе сходящуюся подпоследовательность, то она и сама сходится к этому пределу. Этим доказывается полнота пространства X. □

Важнейшим фактом в теории метрических пространств является возможность пополнения любого метрического пространства.

Метрическое пространство $\tilde{X}$ называется пополнением метрического пространства X, если $X \subset \tilde{X}$, X всюду плотно в $\tilde{X}$, и $\tilde{X}$ является полным пространством.

Докажем лемму, которая будет использоваться в доказательстве теоремы о пополнении метрического пространства.

Лемма 1.1. *Пусть $X \subset \tilde{X}$, X всюду плотно в $\tilde{X}$ и, каждая фундаментальная последовательность в X имеет предел в $\tilde{X}$, тогда $\tilde{X}$ есть пополнение пространства X.*

Доказательство. В условиях леммы нам необходимо доказать только полноту пространства $\tilde{X}$. Пусть $\tilde{x}_n$ — фундаментальная в $\tilde{X}$ последовательность. В силу плотности пространства X в $\tilde{X}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность элементов $x_n \in X$, что

$$\varrho(x_n, \tilde{x}_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Покажем, что эта последовательность фундаментальна, действительно,

$$\varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_n, \tilde{x}_n) + \varrho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) + \varrho(x_m, \tilde{x}_m) \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

По условию теоремы последовательность x_n имеет предел $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Остается показать, что $\tilde{x}$ является пределом для последовательности $\tilde{x}$. В самом деле

$$\varrho(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \leq \varrho(x_n, \tilde{x}_n) + \varrho(x_n, \tilde{x}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

□

Теорема 1.5. *Всякое метрическое пространство может быть пополнено.*

Доказательство. Пусть X некоторое метрическое пространство. Идея пополнения этого пространства состоит в том, чтобы построить метрическое пространство классов фундаментальных последовательностей и рассматривать это пространство, как более широкое пространство исходного пространства. При этом те фундаментальные последовательности, которые не имеют предела в пространстве X отождествить с элементом пространства $\tilde{X}$.

Рассмотрим две фундаментальные последовательности x_n и y_n в X. Введем расстояние для этих последовательностей по следующей формуле

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \to \infty} \varrho(x_n, y_n). \tag{II.2}$$

Этот предел всегда существует, действительно,

$$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x_m, y_m)| \le \varrho(x_n, x_m) + \varrho(y_n, y_m) \to \quad n, m \to \infty.$$

Это означает, что числовая последовательность $\{\varrho(x_n, y_n)\}$ фундаментальная, а следовательно по критерию Коши имеет предел.

Введенное расстояние между фундаментальным последовательностями обладает следующими свойствами. Во-первых, если обе последовательности x_n и y_n являются сходящимися $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to \infty$, то имеет место

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \varrho(x, y).$$

Во-вторых, если эти последовательности сходятся к одному и тому же элементу, то, как следует из предыдущей формулы, расстояние между ними равно нулю $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0$. Поэтому мы будем говорит, что две последовательности (фундаментальные) являются эквивалентными, если расстояние между ними равно нулю. При этом расстояние между классами эквивалентности не зависит от выбора конкретных последовательностей.

Таким образом, мы введем пространство $\tilde{X}$, как множество всех классов эквивалентности фундаментальных в X последовательностей. Это пространство является метрическим с метрикой, задаваемой по формуле (II.2).

Любому элементу $x \in X$ всегда соответствует, как минимум, одна фундаментальная последовательность $x_n = x$, поэтому имеет место

$$X \subset \tilde{X}.$$

Далее, каждая фундаментальная в X последовательность x_n имеет предел в $\tilde{X}$, который является классом эквивалентности всех фундаментальных последовательностей, эквивалентных x_n.

Покажем плотность X в $\tilde{X}$, тогда в силу леммы 1.1 пространство $\tilde{X}$ будет пополнением X. Для этого выберем произвольный элемент $\tilde{x} \in \tilde{X}$ и фундаментальную последовательность x_n, входящую в класс $\tilde{x}$. Согласно фундаментальности последовательности x_n для любого $\varepsilon > 0$ существует такой N, что при $n, m > N$

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Следовательно, при любом достаточно большом n имеем

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x_m) \le \varepsilon.$$

По нашему определению метрики в $\tilde{X}$ имеем

$$d(\tilde{x}, \tilde{x}_n) \le \varepsilon,$$

где через $\tilde{x}_n$ мы обозначили стационарную последовательность, где все члены равны x_n. Следовательно, любой элемент $\tilde{x} \in X$ можно приблизить с любой точностью элементами из X, поэтому X всюду плотно в $\tilde{X}$. $\square$

Хотя теорема о пополнении не является конструктивной, но она подсказывает, как следует понимать «идеальные» элементы — пределы фундаментальных последовательностей. Собственно, сама рассматриваемая фундаментальная последовательность и есть этот элемент.

В полных метрических пространствах выполнен широко известный принцип сжимающих отображений, который находит очень частое применение во многих задачах математики, в частности, при доказательстве теорем о существовании решений и для численного нахождения приближенных решений.

Рассмотрим полное метрическое пространство X и отображение

$$A : X \to X.$$

Решения уравнения

$$Ax = x$$

называются неподвижными точками отображения A.

Существует класс отображений, которые всегда имеют неподвижную точку, причем единственную. Отображение A называется сжимающим или сжатием[1], если существует такое $\alpha < 1$, что для всех $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$\varrho(Ax, Ay) \le \alpha \varrho(x, y). \tag{II.3}$$

Если $x_n \to x$, то имеем

$$\varrho(Ax_n, Ax) \le \varrho(x_n, x)$$

и поэтому отображение A является непрерывным отображением.

Принцип сжимающих отображений формулируется следующей теоремой.

[1] Тогда говорят о принципе сжатых отображений.

Теорема 1.6. *Пусть X — полное метрическое пространство. При этом отображение*

$$A : X \to X$$

есть сжимающее отображение, удовлетворяющее (II.3)*, тогда отображение A имеет единственную неподвижную точку $x^* \in X$, являющейся пределом*

$$x^* = \lim_{n\to\infty} A^n x_0,$$

существующим при любом $x_0 \in X$. Кроме того, существует константа $c = c(\alpha, x_0) > 0$ такая, что

$$\varrho(x^*, x_n) \le c\alpha^n, \tag{II.4}$$

где $x_n = A^n x_0$.

Доказательство. Покажем, что последовательность $x_n = A^n x_0$ является фундаментальной. Без ограничения общности, будем считать $m \le n$ тогда имеем

$$\begin{gathered}\varrho(x_n, x_m) = \varrho(A^n x_0, A^m, x_0) \le \alpha^n \varrho(x_0, A^{m-n} x_0) \le \\ \le \alpha^n [\varrho(x_0, x_1) + \varrho(x_1, x_2) + \dots + \varrho(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \le \\ \le \alpha^n \varrho(x_0, x_1)[1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}] \le \alpha^n \varrho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}.\end{gathered} \tag{II.5}$$

Поскольку $\alpha < 1$, то

$$\varrho(x_n, x_m) \to 0, \quad n \to \infty.$$

В силу полноты X последовательность x_n имеет предел

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Покажем, что x^* есть неподвижная точка. В силу непрерывности отображения A имеем

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

Итак, мы доказали существование неподвижной точки, покажем теперь единственность этой точки. Предположим, что $Ax = x$ и $Ay = y$ тогда имеем

$$\varrho(x, y) \le \alpha\varrho(x, y),$$

но поскольку $\alpha < 1$, то отсюда следует, что $\varrho(x, y) = 0$ или $x = y$.

Оценка (II.4) следует из (II.5). $\square$

2. Нормированные пространства

Пусть N есть линейное пространство. Нормой в этом пространстве называется числовая (вещественная[2]) функция обозначаемая $\|x\|$ для $x \in N$, которая удовлетворяет следующим условиям нормы

1. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, для всех чисел λ;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, для всех $x, y \in N$.

Будем также писать $\|x\|_N$ для указания в каком пространстве берем норму в N.

Любое нормированное пространство мы будем рассматривать как метрическое с метрикой, порожденной нормой по следующей формуле

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|.$$

Соответственно, в любом нормированном пространстве вводится понятия сходимости, полноты и т.д.

Сама норма, как отображение нормированного пространства в $\mathbb{R}$ является непрерывной. Этот факт следует из простой, но важной теоремы.

Теорема 2.1. *Для любых $x, y \in N$ имеет место неравенство*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|. \tag{II.6}$$

Доказательство. Используя неравенство треугольника, мы имеем

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| - \|y\|.$$

Отсюда получаем

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|,$$

но меняя местами x и y, получаем

$$\|x - y\| \geq \|y\| - \|x\|.$$

Совокупность этих неравенств дает (II.6). □

[2]Даже если пространство N над полем комплексных чисел.

Полное нормированное пространство называется банаховым[3] пространством. Банаховы пространства играют важнейшую роль в функциональном анализе.

Банахово пространство часто является обобщением векторного пространства $\mathbb{R}^n$, поэтому многие результаты математического анализа для векторнозначных функций могут быть обобщены и на случай функций, принимающих значения в произвольном банаховом пространстве. Эти функции играют большую роль во многих приложениях.

Зафиксируем абстрактное банахово пространство X. На числовом отрезке $[0, T]$[4] рассмотрим функции $x(t)$, принимающие значения в пространстве X. Это означает, что для каждого фиксированного $t \in [0, T]$ имеем $x(t) \in X$.

Функция $x(t)$ называется непрерывной в точке $t_0 \in [0, T]$, если для любой числовой последовательности $t_n \in [0, T]$, сходящейся к t_0 имеет место

$$\|x(t_0) - x(t_n)\|_X \to 0, \quad n \to \infty.$$

Функция, непрерывная в каждой точке $[0, T]$ называется непрерывной на $[0, T]$.

Теорема 2.2. *Пусть $x(t)$ есть непрерывная функция на $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве X, тогда числовая функция $f(t) = \|x(t)\|_X$ будет непрерывной на $[0, T]$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $t_0 \in [0, T]$ и последовательность t_n из этого отрезка, сходящуюся к t_0. Имеем по теореме 2.1

$$|f(t_0) - f(t_n)| = |\|x(t_0)\|_X - \|x(t_n)\|_X| = \|x(t_0) - x(t_n)\|_X \to 0$$

при $n \to \infty$. □

Мы можем ввести новое банахово пространство, состоящее из функций, непрерывных на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве X, которое обозначим через $C([0, T]; X)$. Норма

[3]Названные в честь С. Банаха, который ввел эти пространства и систематически их изучал. Однако уместно вспомнить, что эти же пространства были независимо использованы в работах Н. Винера, и ранее назывались пространствами Банаха-Винера.

[4]Мы взяли отрезок $[0, T]$ для простоты, но все результаты верны для произвольного $[a, b]$.

в этом пространстве выглядит следующим образом

$$\|x\|_{C([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|_X.$$

В случае, когда X есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, это пространство совпадает с $C[0,T]$.

Для любого $t_0 \in (0,T)$ рассмотрим Δt такую, что $(t+\Delta t) \in (0,T)$, если существует такой элемент $y \in X$, что

$$\left\| \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} - y \right\|_X \to 0,$$

при $\Delta t \to 0$, то функция $x(t)$ называется дифференцируемой в точке t_0 и для нее существует производная

$$x'(t_0) = \frac{dx(t_0)}{dt} = y.$$

Для случая, когда $t_0 = 0$ или $t_0 = T$ следует рассматривать односторонние производные.

Функция, дифференцируемая во всех точках, называется непрерывно дифференцируемой на $[0,T]$, если ее производная, как функция t со значениями в X, является непрерывной.

Аналогично вводится понятие и k раз непрерывно дифференцируемой функции со значениями в банаховом пространстве. Соответственно, будем рассматривать банахово пространство функций, непрерывно дифференцируемых k раз со значениями в банаховом пространстве X, которое обозначаем $C^k([0,T];X)$ с нормой

$$\|x\|_{C^k([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|_X + \cdots + \max_{t\in[0,T]} \|x^{(k)}(t)\|_X.$$

Для непрерывной функции $x(t)$ со значениями в банаховом пространстве можно распространить понятие определенного интеграла Римана. Интеграл будем рассматривать на отрезке $[a,b]$, для этого рассмотрим разбиение

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b, \quad \lambda_N = \max_{i=0,\ldots,N-1} \{(t_{i+1} - t_i)\}.$$

Если для непрерывной на $[a,b]$ функции существует такой элемент $S \in X$, что имеет место

$$\lim_{\lambda_N \to 0} \left\| \sum_{k=1}^{N} x(t_k)\Delta t_k - S \right\|_X = 0,$$

где $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, то мы будем говорить, что S есть интеграл от функции x на $[a, b]$ и писать

$$\int_a^b x(t)dt = S.$$

Аналогично, как это делается в курсе математического анализа, можно показать, что для любой непрерывной функции со значениями в банаховом пространстве существует определенный интеграл.

3. Гильбертовы пространства

Чтобы дать определение гильбертова пространства, необходимо дать определение для абстрактного скалярного произведения[5]. Рассмотрим линейное пространство H. Скалярным произведением в H является комплекснозначная[6] функция, определенная на паре элементов $x, y \in H$, и обозначаемая (x, y), которая удовлетворяет следующим аксиомам скалярного произведения

1. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ только тогда, когда $x = 0$;
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого числа λ;
4. $(x + z, y) = (x, y) + (x, y)$.

Из этих аксиом следует, что

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z), \quad (x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y).$$

Пространство, в котором можно ввести скалярное произведение, называется предгильбертовым пространством. Прежде чем привести примеры покажем, что любое предгильбертово пространство является нормированным с нормой, индуцируемой скалярным пространством

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

[5]В английском языке «inner product», поэтому иногда скалярное произведение называется внутренним произведением.

[6]Если пространство H над полем вещественных чисел, то скалярное произведение будет вещественным.

Поскольку для любого $x \in H$ число (x, x) неотрицательное, то эта формула корректна. Проверим основные свойства нормы. Неотрицательность нормы и равенство нулю только при нулевом x очевидны. Для произвольных $x \in H$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(x, y)} = \sqrt{|\lambda|^2}\sqrt{(x, x)} = |\lambda|\|x\|.$$

Прежде чем доказывать выполнение для нормы неравенства треугольника, докажем важнейшее неравенство Коши-Буняковского[7]. Рассмотрим любые $x, y \in H$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, предполагая, что $y \neq 0$ имеем

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2(y, y) \geq 0.$$

Положим $\lambda = -\frac{(x,y)}{y,y}$, получаем

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0.$$

Отсюда получаем неравенство Коши-Буняковского

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Если $y = 0$, то это неравенство тривиально.

Теперь покажем, что для введенной нормы выполняется неравенство треугольника. Действительно,

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2.$$

Это неравенство означает, что

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

При рассмотрении различных предгильбертовых пространств мы будем пользоваться обозначением для скалярного произведения $(x, y)_H$ в пространстве H.

Рассматривая предгильбертово пространство, мы всегда будем иметь в виду норму в этом пространстве, которая будет определена скалярным произведением. Далее, поскольку любое нормированное пространство является и метрическим, то метрическим является и предгильбертово пространство. Соответственно, мы будем говорить о сходимости в предгильбертовом пространстве.

[7] Иногда еще называемое неравенство Шварца, или Коши-Буняковского-Шварца.

Теорема 3.1. *Скалярное произведение есть непрерывная функция двух аргументов.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to \infty$ в пространстве H. Имеем

$$|(x_n, y_n)_H - (x, y)_H| = |(x_n, y_n)_H - (x_n, y)_H + (x_n, y)_H - (x, y)_H| \leq$$

$$\leq |(x_n, y_n)_H - (x_n, y)_H| + |(x_n, y)_H - (x, y)_H| =$$

$$= |(x_n, y_n - y)_H| + |(x_n - x, y)_H| \leq$$

$$\leq |\|x_n\|_H \|y_n - y\|_H + \|y\|_H \|x_n - x\|_H \leq$$

$$\leq C(\|y_n - y\|_H + \|x_n - x\|_H) \to 0, \quad n \to \infty,$$

где $C = C(x, y)$, но не зависит от n. □

Полное предгильбертово пространство называется гильбертовым пространством.

Конечномерные гильбертовы пространства полностью исчерпываются пространствами $\mathbb{R}^n$ для вещественных и $\mathbb{C}^n$ для комплексных пространств[8]. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ мы уже вводили, а в $\mathbb{C}^n$ оно выглядит следующим образом

$$(x, y)_{\mathbb{C}^n} = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n.$$

Пространство l_2 является примером бесконечномерного гильбертова пространства. Скалярное произведение в этом пространстве вводится по следующей формуле

$$(x, y)_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k.$$

Другим классическим гильбертовым пространством является пространство Лебега $L_2(Q)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{L_2(Q)} = \int\limits_Q f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Кроме того, гильбертовыми пространствами являются пространства Соболева, о которых пойдет речь в будущих главах.

[8]Позже мы докажем это утверждение.

Рассмотрим гильбертово пространство H. Будем говорит, что два элемента $x, y \in H$ ортогональны, если выполнено условие

$$(x, y)_H = 0.$$

Система элементов $\{e_k\} \subset H$ называется ортогональной, если имеет место

$$(e_k, e_m) = 0, \quad k \neq m.$$

Если при этом все вектора e_k имеют норму равную единице, то такая система называется ортонормированной

$$(e_k, e_m) = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Ортонормированные системы играют важную роль во многих приложениях, поэтому необходимо иметь процедуру для построения ортонормированных систем. Исходным материалом для построения таких систем будут выступать линейно независимые элементы. Этот процесс называется процессом ортогонализации Шмидта.

Пусть задана система[9] линейно независимых элементов $\{x_k\}$. Положим

$$y_1 = x_1$$

и

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|_H}.$$

Очевидно, что $\|e_1\|_H = 1$. Далее, следующий элемент y_2 ищем в виде

$$y_2 = x_2 - \lambda_{21} e_1,$$

где скаляр λ_{21} выбираем так, чтобы $(y_2, e_1)_H = 0$. Именно

$$0 = (x_2 - \lambda_{21} e_1, e_1)_H = (x_2, e_1)_H - \lambda_{21},$$

то есть $\lambda_{21} = (x_2, e_1)_H$ или $y_2 = x_2 - \lambda_{21} e_1$. При этом $y_2 \neq 0$, поскольку это бы противоречило линейной независимости x_k. Положим

$$e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|_H}.$$

[9] Конечная или бесконечная.

Воспользуемся доказательством с помощью математической индукции. Предположим, что $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ уже построены, тогда ищем y_k в виде

$$y_k = x_k - \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_{kl} e_l.$$

Коэффициенты λ_{kl} найдем из условий

$$(y_k, e_l) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, k-1.$$

Легко видеть, что $\lambda_{kl} = (x_k, e_l)_H$, при этом $y_k \neq 0$ и положим

$$e_k = \frac{y_k}{\|y_k\|_H}.$$

Таким образом, мы получаем ортонормированную систему $\{e_k\}$. Разумеется, максимальное количество ортонормированных элементов совпадает с размерностью гильбертова пространства. При этом лишь в бесконечномерных пространствах существует счетная система ортонормированных элементов.

В пространстве l_2 самой простой ортонормированной системой является набор векторов

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots); \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots); \quad e_3 = (0, 0, 1, \dots); \quad \dots.$$

Рассмотрим пример ортонормированной системы в гильбертовом пространстве $L_2(0, \pi)$. Ортонормированной системой в этом пространстве будет, например, система функций

$$e_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Если $k \neq m$, то

$$(e_k, e_m)_{L_2(0,\pi)} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \sin kx \sin mx dx = 0.$$

Однако

$$(e_k, e_k)_{L_2(0,\pi)} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \sin^2 kx dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{1 - \cos 2kx}{2} dx = 1.$$

Для вещественного гильбертова пространства можно определить угол φ между двумя элементами x и y

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}.$$

Неравенство Коши-Буняковского гарантирует, что

$$|\cos\varphi| \le 1.$$

При этом ортогональность ненулевых элементов означает, что угол между этими элементами равен 90°.

Как известно, любое скалярное произведение порождает соответствующую норму, при этом гильбертова норма обладает важным эксклюзивным свойством — равенством параллелограмма. Для любых $x, y \in H$ имеет место равенство

$$\|x+y\|_H^2 + \|x-y\|_H^2 = 2(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2). \tag{II.7}$$

Действительно,

$$\begin{gathered}
\|x+y\|_H^2 + \|x-y\|_H^2 = (x+y, x+y)_H + (x-y, x-y)_H = \\
= (x,x)_H + (x,y)_H + (y,x)_H + (y,y)_H + \\
+ (x,x)_H - (x,y)_H - (y,x)_H + (y,y)_H = \\
= 2(\|x\|^2 + \|y\|_H^2).
\end{gathered}$$

С помощью этого равенства можно решить важный вопрос о расстоянии точки до замкнутого выпуклого множества. Пусть в гильбертовом пространстве H фиксировано выпуклое замкнутое множество $M \subset H$, тогда для любого элемента $x \in H$ расстояние между x и M определяется по формуле

$$\varrho(x, M) = \inf_{u \in M} \|x - u\|_H.$$

Теорема 3.2. *Если $x \notin M$, тогда $\varrho(x, M) > 0$.*

Доказательство. Докажем это утверждение от противного. Предположим, что $\varrho(x, M) = 0$, тогда для любого n должен существовать $u_n \in M$ такой, что

$$\|x - u_n\|_H \le \frac{1}{n}.$$

Отсюда следует, что $u_n \to x$ при $n \to \infty$. Вследствие замкнутости M мы получаем, что $x \in M$. Это противоречие доказывает теорему. □

Более сильный результат говорит о существовании вектора гильбертова пространства на котором достигается расстояние до множества M.

Теорема 3.3. *Для любого $x \notin M$ существует единственный $y \in M$ такой, что*

$$\varrho(x, M) = \|x - y\|_H.$$

Доказательство. В силу теоремы 3.2 величина $\varrho(x, M) = d > 0$, поэтому для любого n существует $u_n \in M$ такое, что

$$d \le \|x - u_n\|_H < d + \frac{1}{n}. \tag{II.8}$$

Согласно равенству параллелограмма имеем

$$2(\|x - u_n\|_H^2 + \|x - u_m\|_H^2) = \|u_n - u_m\|_H^2 + \|2x - u_n - u_m\|_H^2.$$

Запишем

$$\|2x - u_n - u_m\|_H^2 = 4\left\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\right\|_H^2.$$

Поскольку в силу выпуклости M имеем $\frac{u_n+u_m}{2} \in M$, то

$$\left\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\right\|_H^2 \ge d^2.$$

Согласно неравенству (II.8) мы имеем

$$\|x - u_n\|_H^2 < \left(d + \frac{1}{n}\right)^2;$$

$$\|x - u_m\|_H^2 < \left(d + \frac{1}{m}\right)^2.$$

Таким образом, получаем

$$\|u_n - u_m\|_H^2 = 2\|x - u_n\|_H^2 + 2\|x - u_m\|_H^2 - 4\left\|x - \frac{u_n - u_m}{2}\right\|_H^2 <$$

$$\le 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 = \frac{4d}{n} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Следовательно, при достаточно больших n и m величина $\|u_n - u_m\|_H$ меньше любого $\varepsilon > 0$, что означает фундаментальность последовательности u_n. Эта последовательность в силу полноты H и замкнутости M сходиться к $y \in M$.

Переходя в неравенстве (II.8) к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\|x-y\|_H = d$. Покажем единственность этого элемента. Предположим, что для некоторого $z \in M$ выполнено равенство $\|x-z\| = d$. Согласно равенству параллелограмма имеем

$$4d^2 = 2\|x-y\|_H^2 + 2\|x-z\|_H^2 = \|y-z\|_H^2 + 4\left\|x - \frac{y+z}{2}\right\|_H^2 \geq$$

$$\geq \|y-z\|_H^2 + 4d^2.$$

Из этого следует, что $\|y-z\|_H = 0$ или $y = z$. □

Смысл этой теоремы состоит в том, что для любого элемента $x \in H$ существует единственное *наилучшее* приближение элементами из M.

Аналогично можно ввести понятие расстояния от заданной точки до подпространства. Пусть $L \subset H$ есть подпространство в гильбертовом пространстве H. Для любого $x \in H$ такого, что $x \notin L$ определим расстояние по формуле

$$\varrho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|_H.$$

Поскольку по определению подпространства L есть замкнутое и выпуклое множество в H, то для расстояние до подпространства верны теоремы 3.2 и 3.3.

Введем еще пару важных понятий для гильбертова пространства. Пусть L есть подпространство в гильбертовом пространстве H элемент $y \in L$ называется проекцией элемента $x \in H$, если

$$x = y + z,$$

где z ортогонален всем элементам множества L. Покажем, что для любого x проекция на L единственная. Пусть существует два представления

$$x = y + z, \quad x = y' + z',$$

где $y, y' \in L$, а z, z' ортогональны всем элементам множества L. Тогда

$$y - y' = z - z',$$

соответственно

$$\|y-y'\|_H = (z'-z, y-y')_H = 0,$$

поскольку $y-y' \in L$, а $z'-z$ ортогонален L. Следовательно, $y=y'$.

Множество элементов M, ортогональных всем элементам множества L, является также подпространством H. Из непрерывности скалярного произведения следует, что M является замкнутым множеством, то есть линейным многообразием. Это многообразие называется ортогональным дополнением к L, и используется обозначение

$$M = H \ominus L.$$

Декартово произведение, позволяющее ввести прямоугольную систему координат сыграло выдающуюся роль в развитии геометрии (и не только). Обобщение этого метода — использование базисных элементов, позволяющих проводить «разложение» любого элемента по базису — является мощным средством в алгебре, анализе и многочисленных приложениях, и не только в математике. Использование рядов Фурье в физике, механике и других науках является очень распространенным.

Ряды Фурье для периодических числовых функций используются в бесконечномерном случае в качестве базисов. А до каких пределов возможно обобщение идей Декарта и Фурье? В известном смысле это обобщение получается в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Будем рассматривать гильбертово пространство H, которое будем предполагать бесконечномерным, поэтому в этом пространстве существует бесконечное множество линейно независимых элементов $x_1, x_2, \ldots$. Согласно процедуре ортогонализации Шмидта существует ортонормированная система элементов, которую мы будем обозначать $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и для нее будет верно

$$(e_k, e_m)_H = 0,\ k \neq m; \quad \|e_k\|_H = 1.$$

По аналогии с тригонометрическим рядом мы будем формальный[10] ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \quad a_k \in \mathbb{C}$$

[10] То есть без вопроса о его сходимости.

называть рядом по ортогональной системе e_k. Для любого $x \in H$ набор чисел

$$c_k = (x, e_k)_H, \quad k = 1, 2, \dots$$

называется коэффициентами Фурье элемента x по системе e_k.

Линейной оболочкой для конечной системы элементов

$$y_1, \dots, y_N \in H$$

называется N-мерное подпространство L_N, состоящее из всех комбинаций

$$y = \sum_{k=1}^{N} a_k y_k.$$

Рассмотрим вопрос о возможности наилучшего приближения любого элемента $x \in H$ подпространствами L_N. Как мы помним, этот вопрос связан с вычислением расстояния от x до L_N. Ответ содержится в следующей теореме.

Теорема 3.4. *Для любого $x \in H$ имеет место*

$$\varrho(x, L_N) = d_N = \left\| x - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k \right\|_H, \tag{II.9}$$

$$d_N^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2, \tag{II.10}$$

где $c_k = (x, e_k)_H$ суть коэффициенты Фурье элемента x по системе e_k.

Доказательство. Для любого элемента L, представляемого в виде $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k e_k$, рассмотрим

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\|_H^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{N} a_k e_k, x - \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right)_H =$$

$$= (x, x)_H - \sum_{k=1}^{N} a_k (e_k, x)_H - \sum_{k=1}^{N} \overline{a}_k (x, e_k)_H + \sum_{k=1}^{N} a_k \overline{a}_k.$$

Пользуясь обозначением для коэффициентов Фурье $c_k = (x, e_k)_H$, $(e_k, x)_H = \overline{(x, e_k)}_H = \overline{c}_k$, имеем

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{k=1}^{N} a_k \overline{c}_k - \sum_{k=1}^{N} \overline{a}_k c_k + \sum_{k=1}^{N} a_k \overline{a}_k.$$

Кроме того, имеем

$$|a_k - c_k|^2 = (a_k - c_k)(\overline{a}_k - \overline{c}_k) = a_k \overline{a}_k - a_k \overline{c}_k - c_k \overline{a}_k + |c_k|^2,$$

следовательно

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{N} |a_k - c_k|^2.$$

Вычислим $\varrho(x, L_N)$

$$d_N = \varrho(x, L_N) = \inf_{a_1, \ldots, a_N} \left\| x - \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\|_H =$$

$$= \left(\|x\|_H^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \right)^{1/2},$$

при этом $a_k = c_k$. □

Из этой теоремы следует, что наилучшее приближение элемента $x \in H$ элементом из L_N есть

$$\sum_{k=1}^{N} c_k e_k, \quad c_k = (x, e_k)_H.$$

Поскольку $\varrho(x, L_N) \geq 0$, то для любого N имеет место оценка

$$\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \leq \|x\|_H^2.$$

В силу неотрицательности слагаемых ряда можно перейти к пределу при $N \to \infty$ и получить

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|_H^2.$$

Это неравенство называется неравенством Бесселя. Из неравенства Бесселя следует, что для любого элемента гильбертова пространства, модуль коэффициентов Фурье стремится к нулю, как общий член абсолютно сходящегося числового ряда.

Если для выбранной ортонормированной системы $\{e_k\}$ ряд Фурье для любого $x \in H$ сходится к x, то есть

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)_H e_k,$$

то такая система называется полной, или ортонормированным базисом в H.

В силу теоремы 3.4 мы имеем равенство

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k \right\|_H^2 = \|x\|_H^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2.$$

Для базиса в этом равенстве можно перейти к пределу при $N \to \infty$. Тогда мы получаем равенство

$$\|x\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2,$$

которое называется равенством Парсеваля. Равенство Парсеваля обобщает теорему Пифагора.

Теорема 3.5. *Ортонормальная система $\{e_k\}$ является базисом тогда и только тогда, когда не существует ненулевого $x_0 \in H$ такого, что*

$$(x_0, e_k)_H = 0, \quad k = 1, 2 \ldots$$

то есть ортогонального всем e_k.

Доказательство. Пусть система e_k есть базис, тогда

$$0 < \|x_0\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x_0, e_k)_H|^2$$

следовательно существует $(x_0, e_{k_0}) \neq 0$, и x_0 не ортогонален всем e_k.

Теперь предположим, что не существует элемента, ортогонального всем e_k. Рассмотрим L — подпространство, определенное по формуле

$$L = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_N.$$

Если предположить, что $\overline{L} \neq H$, тогда по теореме 3.3 существуют такие $x_0 \notin \overline{L}$ и $y_0 \in \overline{L}$, что

$$\|x_0 - y_0\|_H > 0.$$

Покажем, что для $z = x_0 - y_0$ имеет место

$$(z, y)_H = 0, \quad y \in \overline{L}.$$

Пусть $y \in \overline{L}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, тогда имеем

$$\|z + \lambda y\|_H \geq \|z\|_H.$$

Распишем это неравенство

$$(z + \lambda y, z + \lambda y)_H \geq (z, z)_H.$$

или

$$\lambda(y, z)_H + \overline{\lambda}(z, y)_H + |\lambda|^2 \|y\|_H^2 \geq 0.$$

Полагая

$$\lambda = -\frac{(z, y)_H}{\|y\|_H^2},$$

получаем

$$-\frac{|(z, y)_H|^2}{\|y\|_H^2} \geq 0,$$

что возможно только, если $(z, y) = 0$. Это означает, что элемент $z \neq 0$ ортогонален всем e_k, и это противоречие говорит о том, что $\overline{L} = H$.

Наконец, покажем, что любой элемент $x \in H$ может быть разложен по системе e_k в ряд Фурье. Поскольку L плотна в H, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $x_\varepsilon \in L$, что $\|x - x_\varepsilon\|_H < \varepsilon$, при этом x_ε есть конечная линейная комбинация e_k. По теореме 3.4 мы имеем оценку

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k \right\|_H \leq \|x - x_\varepsilon\|_H < \varepsilon,$$

для $N > N_\varepsilon$, где c_k суть коэффициенты Фурье. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = x.$$

$\square$

Вопрос о существовании ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве решается в следующей теореме.

Теорема 3.6. *В любом сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. В бесконечномерном сепарабельном пространстве H существует счетное всюду плотное множество $g_1, g_2, \ldots$. Без ограничения общности, можем считать, что все $g_k \neq 0$, тогда полагаем

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|_H}.$$

Пусть L_1 есть подпространство в H, порожденное e_1. Далее, перебирая элементы g_k, найдем g_{n_2} такой, что $g_{n_2} \notin L_1$. Обозначим через h_2 проекцию элемента g_{n_2} на $H - L_1$, поскольку эта проекция ненулевая, то положим

$$e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|_H}.$$

Через L_2 обозначим подпространство, порожденное элементами e_1, e_2. Продолжая аналогично, построим счетную систему

$$e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots.$$

Поскольку каждый элемент g_k принадлежит некоторому подпространству L_m, то подпространство порожденное системой e_k совпадает с H. $\square$

Рассмотрим пример базиса в гильбертовом пространстве $L_2(0, 2\pi)$, состоящего из тригонометрических функций

$$(2\pi)^{-1/2}, \pi^{-1/2}\cos x, \pi^{-1/2}\sin x, \pi^{-1/2}\cos 2x, \pi^{-1/2}\sin 2x, \ldots \quad \text{(II.11)}$$

Непосредственно проверяется, что эти функции являются ортонормированной системой. Покажем их полноту. Возьмем произвольную $f \in L_2(0, 2\pi)$. Для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такая $f_1 \in C[0, 2\pi]$, что

$$\|f - f_1\|_{L_2(0,2\pi)} < \varepsilon_1.$$

Далее, для любого $\varepsilon_2 > 0$ построим непрерывную на $[0, 2\pi]$ функцию f_2 такую, что

$$\|f_1 - f_2\|_{L_2(0,2\pi)} < \varepsilon_2$$

и

$$f_2(0) = f_2(2\pi),$$

то есть функция f_2 есть непрерывная 2π-периодическая функция. Такую функцию всегда можно построить с помощью линейной интерполяции на достаточно малом сегменте $[0, \delta]$. По теореме Вейерштрасса любую непрерывную 2π-периодическую функцию с любой точностью можно приблизить тригонометрическим многочленом, то есть конечной линейной комбинацией функций из (II.11). Таким образом, замыкание в $L_2(0, 2\pi)$ множества линейных комбинаций (II.11) совпадает с $L_2(0, 2\pi)$, что в свою очередь говорит о том, что только нулевой элемент может быть ортогонален всем (II.11), поэтому по теореме 3.5 рассматриваемая система тригонометрических функций есть ортонормированный базис в $L_2(0, 2\pi)$.

Мы видели, что при наличии ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве любой элемент этого пространства можно разложить по базису. С другой стороны, с помощью базиса возможно и конструировать любые элементы гильбертова пространства.

Теорема 3.7 (Рисс-Фишер). *Для любого гильбертова пространства H и ортонормированного базиса e_k и любой числовой последовательности $c = \{c_k\} \in l_2$ существует такой элемент $f \in H$, что*

$$c_k = (f, e_k)_H$$

и

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|c\|_{l_2}^2.$$

Доказательство. Построим

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k.$$

Покажем, что эта последовательность фундаментальна в H. Действительно,

$$\|f_{n+p} - f_n\|_H^2 = \sum_{k=n+p}^{n+p} |c_k|^2.$$

Поскольку последовательность c из l_2, то $\sum\limits_{k=n+p}^{n+p} |c_k|^2 \to 0$, при $n \to \infty$, что доказывает фундаментальность последовательности f_n и соответственно ее сходимость к некоторому $f \in H$. Покажем, что коэффициенты Фурье у f совпадают с последовательностью c. Для этого при любом k рассмотрим

$$(f, e_k)_H = (f_n + f - f_n, e_k)_H = (f_n, e_k)_H + (f - f_n, e_k)_H. \qquad \text{(II.12)}$$

Для любого $\varepsilon >$ существует такой $n > k$, что $\|f - f_n\|_H < \varepsilon$. Следовательно, имеем

$$|(f - f_n, e_k)_H| \leq \|f - f_n\|_H < \varepsilon.$$

Поскольку правая часть в (II.12) не зависит от n, то после перехода к пределу при $n \to \infty$ получаем

$$(f, e_k)_H = (f_n, e_k)_H = c_k.$$

Остается показать, что $\|f\|_H = \|c\|_{l_2}$. Действительно,

$$\|f - f_n\|_H^2 = (f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, f - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k)_H = \|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \to 0$$

при $n \to \infty$. $\square$

Рассмотрим важнейшую теорему о гильбертовых пространствах, которая устанавливает изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

Глава III

Линейные операторы

1. Ограниченные линейные операторы

Для двух банаховых пространств (возможно, совпадающих) X и Y линейным оператором, действующим из X в Y, называется отображение

$$A : X \to Y,$$

удовлетворяющее следующему условию

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A x_1 + \mu A x_2,$$

для всех $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим простейшие примеры линейных операторов. Для случая, когда $X = Y$ через I будем обозначать единичный оператор, который действует по формуле

$$Ix = x, \quad x \in X.$$

Для любой пары банаховых пространств рассматривается нулевой оператор

$$Ox = 0,$$

где 0 есть нулевой элемент пространства Y.

Все линейные операторы, действующие из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ представляют собой $n \times m$ матрицы, а действие оператора — умножение на эту матрицу.

Рассмотрим оператор дифференцирования, который действует в пространствах
$$D : C^1[a,b] \to C[a,b]$$
по формуле
$$Dx(t) = \frac{dx}{dt}(t).$$

Среди линейных операторов принципиальное значение имеют ограниченные или непрерывные линейные операторы. Оператор[1] A называется непрерывным в x_0, если для любой последовательности $x_n \to x_0$ имеет место
$$\|Ax_n - Ax_0\|_Y \to 0, \quad n \to \infty.$$
Оператор непрерывный для всех $x \in X$ называется непрерывным оператором.

Лемма 1.1. *Линейный оператор A непрерывный в нуле является непрерывным.*

Доказательство. Возьмем любое $x_0 \in X$ и любую последовательность $x_n \to x_0$, тогда $z_n = x_0 - x_n \to 0$, при $n \to \infty$. В силу непрерывности оператора A в нуле имеем
$$\|Ax_0 - Ax_n\|_Y = \|A(x_0 - x_n)\|_Y = \|Az_n\|_Y \to 0.$$
$\square$

Оператор A называется ограниченным, если для любого $x \in X$ выполнено неравенство
$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X, \tag{III.1}$$
где константа $C > 0$ не зависит от x. Поэтому ограниченный оператор отображает ограниченное множество в X в ограниченное множество Y.

Замечательный результат состоит в том, что в банаховых пространствах непрерывность и ограниченность линейных операторов эквивалентны.

Теорема 1.1. *Линейный оператор A ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен.*

[1] Если не оговорено отличное, все операторы у нас будут линейные.

Доказательство. Пусть оператор A непрерывен. Предположим, что он не является ограниченным. Тогда образ замкнутого шара $\overline{B}_1(0)$ в X есть неограниченное множество в Y. Следовательно, существует такая последовательность $x_n \in \overline{B}_1(0)$, что

$$\|Ax_n\|_Y \geq n.$$

Возьмем $x' = x_n/n$, тогда имеем

$$\|x'_n\|_X = \frac{1}{n}\|x_n\|_X \leq \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

В силу непрерывности оператора A должно быть $\|Ax'_n\|_Y \to 0$ при $n \to \infty$. В тоже время,

$$\|Ax'_n\|_Y = \frac{1}{n}\|Ax_n\|_Y \geq 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что из непрерывности следует ограниченность.

Пусть теперь оператор A ограничен. Тогда из неравенства (III.1) следует, что

$$\|Ax_n\|_Y \to 0, \quad n \to \infty,$$

если $\|x_n\|_X \to 0$, $n \to \infty$. Это означает, что оператор A непрерывен в нуле, но линейный оператор, непрерывный в нуле, непрерывен по лемме 1.1. $\square$

Для ограниченных операторов можно определить норму оператора по следующей формуле

$$\|A\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y.$$

Покажем, что сумма $A + B$ двух ограниченных операторов, действующая в одних и тех же пространствах, является ограниченным оператором причем

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Действительно, для всех $x \in X$ имеем

$$\|(A + B)x\|_Y = \|Ax + Bx\|_Y \leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \leq$$
$$\leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|_X.$$

Поэтому можно ввести новое нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$, состоящее из всех ограниченных операторов, действующих из X в Y с операторной нормой. В дальнейшем мы увидим, что это пространство является банаховым.

2. Принципы линейных операций

Первым мы рассмотрим принцип равномерной ограниченности, который выражается в виде теоремы Банаха-Штейнгауза. Будем рассматривать линейные ограниченные операторы, отображающие нормированное пространство X в нормированное пространство Y. Для таких операторов ранее мы определяли норму оператора. Поскольку очевидно, что сумма двух таких операторов и умножение на скаляр есть снова линейный ограниченный оператор в тех же пространствах, то можно говорить о нормированном пространстве линейных ограниченных операторов

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{A : X \to Y : \|A\| < \infty\}.$$

Следовательно, в этом пространстве можно определить сходимость по операторной норме. Мы будем говорить, что последовательность линейных ограниченных операторов $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ сходится равномерно к оператору $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, если

$$\|A - A_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Для последовательности операторов $\{A_n\}$ можно также определить и другую сходимость — поточечную. Будем говорит, что последовательность A_n поточечно сходится к оператору A, если

$$\|Ax - A_n x\|_Y \to 0, \quad n \to \infty,$$

для всех $x \in X$.

Теорема 2.1. *Пусть пространство Y является банаховым пространством, тогда $\mathcal{L}(X,Y)$ также является банаховым пространством.*

Доказательство. Возьмем в $\mathcal{L}(X,Y)$ произвольную фундаментальную последовательность операторов A_n. Для любого $x \in X$ рассмотрим последовательность $A_n x$ в Y. Имеем

$$\|A_{n+m}x - A_n x\|_Y = \|(A_{n+m} - A_n)x\|_Y \le \|A_{n+m} - A_n\|\|x\|_X,$$

следовательно, эта последовательность фундаментальная в Y. В силу полноты Y имеем $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = y$. Таким образом, каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие элемент $y \in Y$, то есть задано отображение $A : X \to Y$. Оператор A является линейным. Действительно, для любых $x_1, x_2 \in X$ и $a, b \in \mathbb{C}$ имеем

$$A(ax_1 + bx_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(ax_1 + bx_2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} aA_n x_1 + \lim_{n\to\infty} bAx_2 =$$

$$= a \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + b \lim_{n\to\infty} A_n x_2 = aAx_1 + bAx_2.$$

Здесь мы воспользовались свойством линейности предела.

Теперь покажем, что оператор A является ограниченным. Поскольку

$$|\|A_{n+m}\| - \|A_n\|| \leq \|A_{n+m} - A_n\|,$$

то числовая последовательность $\|A_n\|$ также является фундаментальной, и, следовательно, ограниченной

$$\|A_n\| \leq C, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Имеем

$$\|A_n x\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

Переходя в этой неравенстве к пределу, получаем

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

$\square$

Теорема 2.2 (Банаха-Штейнгауза). *Пусть X — банахово пространство, а Y есть нормированное пространство и $\{A_s\}_{s\in S}$ семейство линейных ограниченных операторов*

$$A_s : X \to Y$$

такое, что для каждого $x \in X$ имеет место оценка

$$\|A_s x\|_Y \leq C(x), \quad s \in S,$$

где C зависит от x, но не зависит от индекса s. Тогда семейство операторов A_s ограничено в совокупности

$$\|A_s\| \leq C_1, \quad s \in S.$$

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что данное семейство неограничено ни в каком шаре $\overline{B}_r(x)$, $r > 0$. Построим последовательность шаров $\overline{B}_{r_n}(x_n)$ и последовательность индексов s_n таких, что

1. $\overline{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \overline{B}_{r_n}(x_n)$,
2. $r_{n+1} \le r_n/2$,
3. $\|A_{s_n}x\|_Y \ge n$, для всех $x \in \overline{B}_{r_n}(x_n)$.

Положим $x_0 = 0$, $r_1 = 1$, поскольку семейство операторов неограничено, в частности, на шаре $\overline{B}_{r_0}(x_0)$, то существует такой индекс $s_1 \in S$ и $x_1 \in B_{r_0}(x_0)$, что $\|A_{s_1}x_1\|_Y > 1$. В силу непрерывности оператора A_{s_1} существует такое $0 < r_1 < r_0/2$, что $\overline{B}_{r_1}(x_1) \subset \overline{B}_{r_0}(x_0)$ и выполнена оценка

$$\|A_{s_1}x\|_Y \ge 1, x \in \overline{B}_{r_1}(x_1).$$

Пусть таким образом выбраны шары $\overline{B}_{r_k}(x_k)$ и индексы s_k для $k < n$. Тогда поскольку семейство A_s неограничено на $\overline{B}_{r_{n-1}}(x_{n-1})$, то существует такой индекс s_n и элемент $x_n \in B_{r_{n-1}}(x_{n-1})$, что $\|A_{s_n}x_n\|_Y > n$. По непрерывности A_{s_n} существует такое $r_n < r_{n-1}/2$, что $\overline{B}_{r_n}(x_n) \subset \overline{B}_{r_{n-1}}(x_{n-1})$ и имеет место оценка

$$\|A_{s_n}x\|_Y \ge n, \quad x \in \overline{B}_{r_n}(x_n).$$

Поскольку пространство X полное, то в силу теоремы 1.4 о вложенных шарах существует элемент x^*, общий для всех шаров $\overline{B}_{r_n}(x_n)$. При этом будем иметь

$$\|A_{s_n}x^*\|_Y \ge n,$$

для любого n, что противоречит условию теоремы. □

Из теоремы Банаха-Штейнгауза следует, в частности, следующая важная для функционального анализа теорема.

Теорема 2.3. *Пусть A_n — последовательность операторов из $\mathcal{L}(X, Y)$ такая, что*

1. $\|A_n\| \le M$,
2. $\|Ax - A_nx\|_Y \to 0$, *при* $n \to \infty$ *для всех* $x \in D$, *где* $D \subset X$ *всюду плотно в* X.

Тогда последовательность операторов A_n поточечно сходится к оператору $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Доказательство. Если $D = X$, то доказательства не требуется. Поэтому пусть $x' \in X$, но $x' \notin D$. В силу плотности множества D для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x \in D$ такой, что

$$\|x' - x\|_X < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Имеем

$$\|A_n x' - Ax'\|_Y \leq \|A_n x' - A_n x\|_Y + \|A_n x - Ax\|_Y + \|Ax - Ax'\|_Y \leq$$

$$\leq \|A_n x - Ax\|_Y + (\|A_n\| + \|A\|)\|x - x'\|_X < \|A_n x - Ax\|_Y + 2\varepsilon.$$

Поскольку имеет место сходимость $A_n x \to Ax$, то найдется такой номер N, что для $n > N$ имеем

$$\|A_n x - Ax\| < \varepsilon.$$

Следовательно, имеем

$$\|A_n x' - Ax'\|_Y \leq 3\varepsilon.$$

Поэтому последовательность A_n сходится поточечно к A на всем X. $\square$

Вторым принципом линейных операторов является принцип открытости отображения, выраженный в виде теоремы Банаха от открытости отображения.

Дадим определение обратного оператора. Пусть X и Y суть два линейных пространства. Рассмотрим линейный оператор

$$A : X \to Y.$$

Предположим, что оператор является взаимно однозначным. Тогда существует обратное отображение

$$A^{-1} : Y \to Y.$$

Это отображение называется обратным оператором к оператору A, если для любого $x \in X$

$$A^{-1}Ax = x,$$

и для любого $y \in Y$
$$AA^{-1}y = y.$$
Если оператор A имеет обратный оператор A^{-1}, то этот обратный оператор тоже имеет обратный и имеет место

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

Теорема 2.4. *Оператор, обратный к линейному, сам является линейным.*

Доказательство. Пусть A^{-1} есть обратный оператор. Для любых $y_1, y_2 \in Y$ положим

$$A^{-1}(y_1 + y_2) - A^{-1}y_1 - A^{-1}y_2 = x,$$

тогда в силу линейности A имеем

$$Ax = AA^{-1}(y_1 + y_2) - AA^{-1}y_1 - AA^{-1}y_2 = 0.$$

Следовательно,
$$x = A^{-1}Ax = A^{-1}0 = 0,$$
то есть
$$A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2,$$
что означает аддитивность оператора A^{-1}. Покажем однородность обратного оператора. Для любых $y \in Y$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ положим

$$x = A^{-1}(\lambda y) - \lambda A^{-1}y.$$

Далее
$$Ax = AA^{-1}(\lambda y) - \lambda AA^{-1}y = \lambda y - \lambda y = 0.$$
Поэтому $x = A^{-1}Ax = A^{-1}0 = 0$, следовательно,

$$A^{-1}(\lambda y) = \lambda A^{-1}.$$

□

Ограниченность обратного оператора будет простым следствием теоремы Банаха об открытости отображения. В начале докажем необходимую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть X и Y суть линейные топологические пространства, и A линейный оператор $A : X \to Y$. Если область значений $R(A)$ является множеством второй категории в Y, тогда для любой окрестности нуля U в X существует такая окрестность нуля V в Y, что*

$$V \subset \overline{A[U]}.$$

Доказательство. Пусть фиксирована окрестность нуля U в X. Выберем такую окрестность нуля W в X, что $W + W \subset U$ и $W = -W$. Для любого $x \in X$ существует такой n, что $x \in nW$. Это следует из того, что $x/n \to 0$, при $n \to \infty$. Поэтому имеем

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (nW)$$

и

$$R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(nW).$$

Поскольку $R(A)$ — множество второй категории в Y, то существует такое целое положительное n_0, что $\overline{A[n_0 W]}$ содержит некоторое непустое открытое множество. С другой стороны поскольку

$$\overline{A[nW]} = n\overline{A[W]},$$

и множества $n\overline{A[W]}$ и $\overline{A[W]}$ гомеоморфны, то множество $\overline{A[W]}$ тоже содержит некоторое непустое открытое множество. Пусть y_0 есть точка этого множества, тогда имеем $y_0 = Ax_0$, где $x_0 \in W$. Поскольку отображение

$$T : X \to X, \quad Tx = -x_0 + x$$

является гомеоморфизмом, то существует такая окрестность нуля V в Y, что $V \subset -y_0 + \overline{A[W]}$. При этом элементы множества $-y_0 + A[W]$ представимы в виде

$$-y_0 + A[W] = A[w - x_0],$$

где $w \in W$. С другой стороны, $w - x_0 \in W + W \subset U$ по выбору множества W. Поэтому $-y_0 + A[W] \subset A[U]$, и, следовательно, переходя к замыканиям, получаем

$$-y_0 + \overline{A[W]} \subset \overline{A[U]}.$$

Таким образом,
$$V \subset -y_0 + \overline{A[W]} \subset \overline{A[U]},$$
что доказывает лемму. □

Теперь мы готовы доказать основную теорему.

Теорема 2.5 (Теорема Банаха об открытости отображения)**.** *Пусть X, Y суть банаховы пространства, и $A : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор такой, что $R(A) = Y$. Тогда оператор A отображает каждое открытое множество пространства X на открытое множество пространства Y.*

Доказательство. Поскольку полное метрическое пространство Y является множеством второй категории, то согласно лемме 2.1 замыкание образа при отображении A всякой окрестности нуля пространства X содержит некоторую окрестность нуля пространства Y.

Для краткости обозначим $X_r = B_r(0)$, $Y_r = B_r(0)$ и $\varepsilon_i = 2^{-i}\varepsilon$, для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, существует такая последовательность положительных чисел b_i сходящаяся к нулю, что
$$Y_{b_i} \subset \overline{AX_{\varepsilon_i}}, \quad i = 0, 1, 2 \ldots . \tag{III.2}$$

Выберем произвольную точку $y \in Y_{b_0}$ покажем, что существует такая точка $x \in X_{2\varepsilon_0}$, что $Ax = y$. Из (III.2) при $i = 0$ следует существование такой точки $x_0 \in X_{\varepsilon_0}$, что
$$\|y - Ax_0\|_Y < b_1.$$

Поскольку $(y - Ax_0) \in Y_{b_1}$, то из (III.2) при $i = 1$ получаем существование точки $x_1 \in X_{\varepsilon_1}$, для которой
$$\|y - Ax_0 - Ax_1\|_Y < b_2.$$

Продолжая это процесс, мы получаем последовательность $x_i \in X_{\varepsilon_i}$ такую, что
$$\left\| y - A\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\right\| < b_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots .$$

Имеем
$$\left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\|_X \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|_X \le \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k \le \left(\sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k}\right)\varepsilon_0.$$

Следовательно последовательность $z_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ фундаментальная, поэтому в силу полноты пространства X имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x \in X.$$

Далее,

$$\|x\|_X = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|_X \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_X \leq \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 2\varepsilon_0.$$

Поскольку $y = Ax$, то мы получаем, что всякий шар $X_{2\varepsilon_0}$ отображается на некоторое множество, содержащее шар Y_{b_0}.

Выберем непустое открытое множество Q в X и $x \in Q$. Пусть U — окрестность нуля пространства X такая, что $x + U \in Q$. Через V обозначим окрестность нуля пространства Y, удовлетворяющую условию

$$V \subset A[U],$$

тогда

$$V + Ax \subset Ax + A[U] = A[x + U] \subset A[Q].$$

Следовательно, множество $A[Q]$ содержит окрестность каждой своей точки, поэтому оператор A отображает открытые множества пространства X на открытые множества пространства Y. $\square$

Из этой важной теоремы непосредственно следует следующий принципиальный результат.

Теорема 2.6. *Если линейный ограниченный оператор A взаимно однозначно отображает банахово пространство X на банахово пространство Y, тогда существует обратный линейный оператор A^{-1} и этот оператор ограничен.*

Третьим принципом линейных операций является принцип, выраженный теоремой Хана-Банаха.

Пусть X — нормированное пространство, а f — линейный функционал над элементами этого пространства. Будем также использовать следующие обозначения для значения этого функционала на элементе $x \in X$

$$f(x) = \langle x, f \rangle.$$

Будем говорить об ограниченных и непрерывных функционалах, понимая эти термины, как для линейных ограниченных и непрерывных операторов.

Теорема 2.7 (Хан, Банах)**.** *Пусть X — вещественное нормированное пространство, тогда если на линейном многообразии $D \subset X$ задан линейный ограниченный функционал f, то существует линейный ограниченный функционал $\tilde{f}$, определенный на всем X такой, что*

$$\tilde{f}(x) = f(x), \quad x \in D$$

и

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

Доказательство. Естественно, можно считать, что $D \neq X$. Пусть $x_0 \notin D$. Через D_1 обозначим линейное многообразие в X элементов вида $y + tx_0$, где $y \in D$, $t \in \mathbb{R}$. Покажем, что существует линейный ограниченный функционал f_1, определенный на D_1, совпадающий с f на D и $\|f_1\| = \|f\|$.

Каждый $x \in D_1$ представим в виде $x = y + tx_0$ единственным образом. Действительно, из $y + tx_0 = y' + t'x_0$ следует, что

$$y - y' = (t' - t)x_0.$$

Если предположить, что $t \neq t'$, то получаем, что $x_0 \in D$, поэтому $t = t'$, но тогда и $y = y'$.

Для любых $y_1, y_2 \in D$ имеем

$$f(y_1) - f(y_2) = f(y_1 - y_2) \leq \|f\| \|y_1 - y_2\|_X \leq$$

$$\leq \|f\| \|y_1 + x_0 - x_0 - y_2\|_X \leq \|f\| (\|y_1 + x_0\|_X + \|y_2 + x_0\|_X).$$

Отсюда следует, что

$$f(y_1) - \|f\| \|y_1 + x_0\|_X \leq f(y_2) + \|f\| \|y_2 + x_0\|_X.$$

Поскольку y_1 и y_2 произвольные элементы из D, то имеем

$$\sup_{y \in D} \{f(y) - \|f\| \|y + x_0\|_X\} \leq c \leq \inf_{y \in D} \{f(y) + \|f\| \|y + x_0\|_X\}. \quad \text{(III.3)}$$

Возьмем произвольный $z \in D_1$, тогда имеет место единственное представление $z = y + tx_0$. Определим новый функционал φ по формуле

$$\varphi(z) = f(y) - tc,$$

где c вещественное число, удовлетворяющее (III.3). По построению функционалы f и φ совпадают на D. В силу единственности представления $x = y + tx_0$ функционал φ является линейным. Покажем, что он ограничен. Сначала рассмотрим ситуацию, когда $t > 0$

$$|\varphi(z)| = t\left|f\left(\frac{y}{t}\right) - c\right| \leq$$

$$\leq t(\|f\|\|y/t + x_0\|_X) = \|f\|\|y + tx_0\|_X = \|f\|\|z\|_X.$$

Следовательно,

$$|\varphi(z)| \leq \|f\|\|z\|_X. \tag{III.4}$$

Для случая $t < 0$ имеем

$$f\left(\frac{y}{t}\right) - c \geq -\|f\|\|y/t + x_0\|_X =$$

$$= -\frac{1}{|t|}\|f\|\|y + tx_0\|_X = \frac{1}{t}\|f\|\|z\|_X.$$

Отсюда получаем

$$\varphi(z) = t\left(f\left(\frac{y}{t}\right) - c\right) \leq t\frac{1}{t}\|f\|\|z\|_X = \|f\|\|z\|_X.$$

Таким образом, равенство (III.4) справедливо для всех $z \in D_1$ и имеем оценку для нормы

$$\|\varphi\| \leq \|f\|.$$

Поскольку функционал φ есть продолжение функционала f с D на D_1, то

$$\|\varphi\| \geq \|f\|.$$

Следовательно функционал φ ограничен и его норма равна $\|f\|$.

Мы показали, что существует (вообще говоря, не единственное) продолжение функционала f с сохранением нормы. Рассмотрим всевозможные продолжения Φ с сохранением нормы функционала f. На множестве Φ введем частичный порядок, полагая, что

$$f' \prec f'',$$

если линейное многообразие D' на которое продолжен f' является частью многообразия D'', на которое продолжен функционал f'' и $f'(x) = f''(x)$ при всех $x \in D'$.

Выберем произвольное упорядоченное множество $\{f_s\} \subset \Phi$. Это множество имеет верхнюю грань (относительно введенного порядка), то есть функционал $f_\star$, определенный на линейном многообразии

$$D_\star = \bigcup_s D_s,$$

где D_s есть область определения f_s, причем $f_\star(x) = f_{s_0}(x)$, если $x \in D_{s_0}$. Таким образом, $f_\star$ является линейным ограниченным функционалом и $\|f_\star\| = \|f\|$, следовательно, $f_\star \in \Phi$. Применяя лемму Цорна (эквивалентную аксиоме выбора), получаем, что Φ имеет максимальный элемент $\tilde{f}$. Этот функционал определен на всем X, поскольку в противном случае его можно было бы продолжить, что противоречило бы его максимальности. □

Теорема Хана-Банаха доказана нами в случае вещественных нормированных пространств. В 1938 году Г.А. Сухомлиновым эта теорема была обобщена на случай комплексных нормированных пространств.

Теорема 2.8 (Сухомлинов)**.** *Пусть X — комплексное нормированное пространство, тогда если на линейном многообразии $D \subset X$ задан линейный ограниченный функционал f, то существует линейный ограниченный функционал $\tilde{f}$, определенный на всем X такой, что*

$$\tilde{f}(x) = f(x), \quad x \in D$$

и

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \tag{III.5}$$

где $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$. Функционалы f_1 и f_2 суть вещественные линейные функционалы, рассматриваемые на D, как вещественном многообразии. Это следует из того, что

$$f_1(ax + by) = a f_1(x) + b f_1(y),$$

$$f_2(ax + by) = a f_2(x) + b f_2(y).$$

Кроме этого,

$$f(ix) = f_1(ix) + i f_2(ix) = i f_1(x) - f_2(x) = i f(x),$$

поэтому

$$f_1(ix) = -f_2(x), \quad f_2(ix) = f_1(x).$$

Отсюда и из (III.5) следует, что

$$\|f_1\| = \|f_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|.$$

Будем рассматривать f_1 как вещественный функционал на D. По теореме Хана-Банаха существует его продолжение $\tilde{f}_1$ на X с сохранением нормы. Определим функционал $\tilde{f}_2$ на X по следующей формуле

$$\tilde{f}_2(x) = -\tilde{f}_1(ix), \quad x \in X.$$

Далее, $\tilde{f}$ определим следующим образом

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) + i f_2(x).$$

Имеем

$$\tilde{f}(ix) = \tilde{f}_1(ix) + i\tilde{f}_2(ix) = -\tilde{f}_2(x) + i\tilde{f}_1(x) = i\tilde{f}(x).$$

Следовательно, $\tilde{f}$ комплексно линеен.

Если $x \in D$, то $\tilde{f}_1(x) = f_1(x)$ и

$$f_2(x) = -\tilde{f}_1(ix) = -f_1(ix) = f_2(x).$$

Таким образом, $\tilde{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in D$. Учитывая, что $|f_i(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|\|x\|_X$, $i = 1, 2$, то получаем

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\tilde{f}(x)| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \sqrt{|\tilde{f}_1(x)|^2 + |\tilde{f}_2(x)|^2} \leq \|f\|.$$

$\square$

В дальнейшем мы будем говорить о теореме Хана-Банах, как для вещественных, так и для комплексных нормированных пространств, без дополнительных уточнений.

Из теоремы Хана-Банаха следует несколько важных результатов.

Теорема 2.9. *Пусть X — нормированное пространство. Для любого $x \in X$ такого, что $x \neq 0$ существует линейный ограниченный функционал f на X такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|_X$.*

Доказательство. Рассмотрим линейное многообразие D, состоящее из элементов вида

$$y = tx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

На этом многообразии определим функционал по формуле

$$f(tx) = t\|x\|_X.$$

Ясно, что $f(x) = 1$, для $y \in D$ имеем

$$|f(y)| = |t|\|x\|_X = \|tx\|_X = \|y\|_X.$$

Следовательно, $\|f\| = 1$. Применяя теорему Хана-Банаха, получаем необходимое продолжение. $\square$

Важный для приложений результат о существовании функционалов, разделяющих элемент нормированного пространства от линейного многообразия.

Теорема 2.10. *Пусть в нормированном пространстве X выделено линейное многообразие L и элемент $x_0 \in X$ такой, что $x_0 \notin L$ и расстояние $d = \inf\limits_{x \in L} \|x_0 - x\|_X > 0$. Тогда существует всюду определенный в X линейный ограниченный функционал f такой, что*

1. $f(x) = 0, \quad x \in L;$
2. $f(x_0) = 1.$

Доказательство. Определим L_1 как линейное многообразие элементов, представимых в виде $y = x + tx_0$, где $x \in L$, $t \in \mathbb{R}$. Определим функционал f на L_1 по следующей формуле

$$f(y) = t.$$

Условие 1) выполнено, поскольку для $y \in L$ имеем $f(y) = 0$. Если $y = x_0$, то $f(x_0) = 1$ и выполнено условие 2).

Оценим норму этого функционала

$$|f(y)| = |t| = \frac{|t|\|y\|_X}{\|y\|_X} = \frac{\|y\|_X}{x/t + x_0} \leq \frac{\|y\|_X}{d},$$

поскольку $\|x/t + x_0\|_X = \left\|x_0 - \left(-\frac{x}{t}\right)\right\|_X \geq d$, учитывая, что $-x/t \in L$.

Для завершения доказательства продолжим f с L на все X по теореме Хана-Банаха. $\square$

3. Функционалы и сопряженные пространства

Мы уже говорили, что множество линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y само является банаховым пространством. Если в качестве пространства Y взять банахово пространство $\mathbb{C}$, то пространство линейных ограниченных функционалов на X называется сопряженным к X пространством и обозначается через X^* или X'.

Поскольку пространство $\mathbb{C}$ всегда полное, то в силу теоремы 2.1 любое сопряженное пространство X^* является банаховым пространством вне зависимости от полноты X.

Понятие сопряженного пространства можно ввести и для любого линейного топологического пространства L. Множество всех линейных непрерывных функционалов на L называется сопряженным пространством, которое обозначается L'. Ясно, что такое пространство является линейным.

Важнейшее понятие функционального анализа и его приложения связано с определением слабой сходимости элементов. Мы будем говорит, что последовательность $\{x_n\} \subset X$ слабо сходится к элементу $x \in X$, если *для любого* $f \in X^*$ имеет место

$$\langle x_n, f\rangle \to \langle x, f\rangle.$$

Также будем говорит о слабом пределе. Поскольку, как мы увидим, слабая сходимость не для всякой последовательности совпадает со сходимостью по норме (будем говорит о сильной сходимости), то введем обозначение для слабой сходимости

$$x = \mathrm{w} - \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Прежде всего нужно убедиться в единственности слабого предела. Пусть $x' = \mathrm{w} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $x'' = \mathrm{w} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда для любого $f \in X^*$ имеем $\langle x', f\rangle = \langle x'', f\rangle$ откуда

$$\langle x' - x'', f\rangle = 0.$$

Согласно теореме 2.9 возможно только $x' - x'' = 0$.

Из сильной сходимости вытекает слабая сходимость.

Теорема 3.1. *Если* $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *то* $x = \mathrm{w} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Доказательство. Для любого $f \in X^*$ имеем

$$|\langle x, f\rangle - \langle x_n, f\rangle| = |\langle x - x_n, f\rangle| \leq \|x - x_n\|_X \|f\|.$$

Отсюда следует слабая сходимость. $\square$

В случае гильбертова пространства имеет место следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть X есть гильбертово пространство, и последовательность $x_n \in X$ слабо сходится к $x \in X$. Тогда эта последовательность сильно сходится к x тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X = \|x\|_X.$$

Доказательство. Из непрерывности нормы следует, необходимость. Для доказательства достаточности нужно рассмотреть равенства

$$\|x_n - x\|_X^2 = (x_n - x, x_n - x)_X =$$

$$= \|x\|_X^2 - (x_n, x)_X - (x, x_n)_X + \|x\|_X^2,$$

в котором предел в правой части равен

$$\|x\|_X^2 - \|x\|_X^2 - \|x\|_X^2 + \|x\|_X^2 = 0.$$

$\square$

Поскольку X^* является банаховым пространством, то можно рассматривать пространство, сопряженное к X^*, которое будем обозначать X^{**}.

Теорема 3.3. *Если последовательность x_n слабо сходящаяся, то она ограничена.*

Доказательство. Для любого $f \in x^*$ последовательность $\langle x_n, f\rangle$ ограничена, при этом x_n можно рассматривать как элемент пространства X^{**}, то есть линейный ограниченный функционал. Согласно принципу равномерной ограниченности $\|x_n\|_X$ будет ограниченной. $\square$

Вообще в любом нормированном пространстве X можно ввести слабую топологию, в которой система окрестностей нуля задается следующим образом

$$U_\varepsilon^f = \{x \in X : |\langle x, f\rangle| < \varepsilon\}, \quad f \in X^*, \varepsilon > 0.$$

Соответственно, можно говорить не только о слабой сходимости, но и о слабой ограниченности и слабой компактности.

Теорема 3.4. *В любом гильбертовом пространстве H всякое ограниченное множество является слабо компактным.*

Доказательство. Выберем произвольную ограниченную последовательность g_k в H

$$\|g_h\|_H \le C, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Образуем числовую последовательность

$$(g_1, g_k)_H, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что эта последовательность ограничена

$$|(g_1, g_k)_H| \le \|g_1\|_H \|g_k\|_H \le C^2.$$

Следовательно из этой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, то есть существует последовательность g_{1k} такая, что

$$(g_1, g_{1k})_H \to h_1, \quad k \to \infty.$$

Далее, из ограниченной последовательности g_{1k} можно извлечь подпоследовательность g_{2k} такую, что

$$(g_2, g_{2k})_H \to h_2, \quad k \to \infty.$$

Аналогично можно построить последовательности g_{nk} такие, что

$$(g_n, g_{nk})_H \to h_n, \quad k \to \infty.$$

Рассмотрим диагональную последовательность g_{kk}. При любом p существует предел

$$\lim_{k \to \infty} (g_p, g_{kk})_H.$$

Обозначим через L линейную оболочку для множества $\{g_k\}$ и положим

$$F = H \ominus \overline{L}.$$

Тогда для любого $g \in \overline{L}$ существует предел

$$\lim_{k \to \infty} (g, g_{kk})_H.$$

Если $f \in F$, то
$$(f, g_{kk})_H, \quad k = 1, 2, \dots$$
и, следовательно, предел
$$\lim_{k\to\infty} (h, g_{kk})_H$$
существует при всех $h \in H$, поэтому подпоследовательность g_{kk} слабо сходится к некоторому элементу. $\square$

Чтобы выяснить структуру пространства X^{**} введем понятие изометрического вложения. Пусть X и Y нормированные пространства и существует линейный оператор $J : X \to Y$. Если этот оператор удовлетворяет условию
$$\|Jx\|_Y = \|x\|_X,$$
будем говорить, что пространство X изометрично вложено в Y.

Теорема 3.5. *Пусть X — банахово пространство, тогда X изометрично вложено в X^{**}.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ фиксировано, поэтому каждому $f \in X^*$ ставится в соответствие число $\langle x, f\rangle$. При этом функционалу $af_1 + bf_2$ ставится в соответствие число
$$\overline{\langle x, \lambda f_1 + \mu f_2\rangle} = \overline{\overline{\lambda}\langle x, f_1\rangle + \overline{\mu}\langle x, f_2\rangle} = \lambda\overline{\langle x, f_1\rangle} + \mu\overline{\langle x, f_2\rangle}.$$
Поскольку $|\langle x, f\rangle| \le \|x\|_X\|f\|_{X^*}$, то $\overline{\langle x, f\rangle}$ определяет заданный всюду на X^* линейный ограниченный функционал. Обозначим через x^{**} этот функционал. Имеем
$$|x^{**}(f)| = |\overline{\langle x, f\rangle}| \le \|x\|_X\|f\|_{X^*},$$
следовательно, $\|x^{**}\|_{X^{**}} \le \|x\|_X$, тогда в силу теоремы 2.9 для всякого $x \in X$ существует $f_0 \in X^*$ такой, что $\|f_0\|_{X^*} = 1$ и $\langle x, f_0\rangle = \|x\|_X$. Поэтому
$$|\langle f_0, x^{**}\rangle| = |\overline{\langle x, f_0\rangle}| = \|x\|_X\|f_0\|_{X^*}.$$
Что означает $\|x^{**}\|_{X^{**}} = \|x\|_X$. $\square$

В этом случае мы будем использовать запись $X \subset X^{**}$. Если все линейные ограниченные функционалы на сопряженном пространстве исчерпываются элементами X, то есть $X^{**} = X$, то пространство X называется рефлексивным пространством.

Кроме сходимости по метрике, которую мы называем сильной сходимостью, мы ввели понятие слабой сходимости. Для элементов сопряженного пространства можно ввести еще понятие слабой$*$[2] сходящейся последовательности. Пусть X нормированное пространство, тогда последовательность $\{f_n\} \subset X^*$ сходится слабо$*$ к элементу $f \in X^*$, если для всех $x \in X$ имеет место

$$\langle x, f_n \rangle \to \langle x, f \rangle, \quad n \to \infty.$$

При этом пишут $\mathrm{w}*\!-\!\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Разумеется, в сопряженном пространстве можно ввести и сильную сходимость по норме. При этом имеем простой факт.

Теорема 3.6. *Пусть последовательность $f_n \in X^*$ сходиться сильно к $f \in X^*$, тогда имеет место*

$$\mathrm{w}*\!-\!\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

Доказательство. Для любого $x \in X$ имеем

$$|\langle x, f_n \rangle - \langle x, f \rangle| \leq \|f_n - f\|_{X^*} \|x\|_X.$$

$\square$

Для банахова пространства нельзя произвольно задавать линейный ограниченный функционал, поскольку он должен быть элементом сопряженного пространства. Вообще говоря, описание сопряженного пространства задача сложная, но в случае гильбертова пространства этот вопрос может быть решен полностью. Фундаментальная теорема Ф. Рисса[3] имеет важные приложения.

Теорема 3.7 (Рисс)**.** *Пусть H — гильбертово пространство. Для любого линейного ограниченного функционала f на H существует единственный элемент $y_f \in H$ такой, что*

$$f(x) = (x, y_f)_H,$$

[2] Говорят, «слабой со звездой».

[3] Не путать с его братом М. Риссом, который был тоже известным венгерским математиком.

для всех $x \in H$, причем $\|f\| = \|y_f\|_H$.

Обратно, любой элемент $y \in H$ определяет линейный ограниченный функционал f_y на H по формуле

$$f_y(x) = (x, y)_H,$$

для всех $x \in H$, причем $\|f_y\| = \|y\|_H$.

Доказательство. Рассмотрим линейное многообразие

$$N(f) = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

В силу непрерывности функционала это многообразие будет замкнутым. Действительно, пусть $x_n \in N(f)$ такая что $x_n \to x_\infty$, тогда

$$f(x_\infty) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0,$$

поэтому $x_\infty \in N(f)$.

Если $N(f) = H$, то очевидно, что $y_f = 0$. Предположим, что $N(f) \neq H$. Тогда существует такой элемент $y_0 \neq 0$, $y_0 \in H \ominus N(f)$. Пусть x пробегает все H тогда рассмотрим элементы вида

$$z = f(x)y_0 - f(y_0)x.$$

Очевидно, что такие элементы принадлежат $N(f)$ поскольку

$$f(z) = f(x)f(y_0) - f(y_0)f(x) = 0.$$

Следовательно,

$$(f(x)y_0 - f(y_0)x, y_0)_H = 0$$

или

$$f(x)\|y_0\|_H^2 = (x, \overline{f(y_0)}, y_0)_H.$$

Построим элемент y_f по следующей формуле

$$y_f = \frac{\overline{f(y_0)}}{\|y_0\|_H^2} y_0.$$

Тогда получаем, что

$$f(x) = (x, y_f)_H.$$

Покажем единственность. Предположим, что одному функционалу соответствуют два элемента y' и y''. Тогда имеем

$$(x, y')_H = (x, y'')_H.$$

В случае, когда $x = y' - y''$ получаем $\|y' - y''\|_H = 0$.

Вычислим норму функционала. Имеем

$$|f(x)| \leq \|x\|_H \|y_f\|_H,$$

следовательно, $\|f\| \leq \|y_f\|_H$. Возьмем $x = y_f$ получаем $f(x) = \|y_f\|_H^2$. Следовательно, имеем в точности $\|f\| = \|y_f\|_H$.

Пусть теперь фиксирован элемент $y \in H$. Для любого $x \in H$ определим функционал

$$f(x) = (x, y)_H.$$

Из свойств скалярного произведения следует, что этот функционал является линейным. Его ограниченность следует из неравенства Коши-Буняковского. Ясно также, что

$$\|f\| \leq \|y\|_H,$$

снова беря $x = y$, получаем, что $f(x) = \|y\|_H^2$, поэтому $\|f\| = \|y\|_H$. $\square$

Теорема Рисса показывает, что сопряженное пространство в гильбертовом случае совпадает с самим пространством $H^* = H$, соответственно, любое гильбертово является рефлексивным.

Сопряженные пространства играют важную роль еще и потому, что позволяют сформулировать понятия сопряженных (и самосопряженных) операторов. Пусть X, Y суть банаховы пространства. Рассмотрим линейный ограниченный оператор

$$A : X \to Y.$$

Для фиксированного $f \in Y^*$ рассмотрим элемент $\varphi \in X^*$, определенный по следующей формуле

$$\varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle = \langle Ax, f \rangle.$$

Линейность этого функционала следует из линейности оператора A и линейности функционала f, и может быть проверена непосредственно. Несложно проверить и ограниченность функционала φ

$$|\varphi(x)| = |\langle Ax, f \rangle| \leq \|Ax\|_Y \|f\|_{Y^*} \leq \|A\| \|x\|_X \|f\|_{Y^*} \leq c\|x\|_X. \tag{III.6}$$

Таким образом, мы получили линейный ограниченный оператор

$$A^* : Y^* \to X^*,$$

который мы будем называть сопряженнным оператором к оператору A.

Теорема 3.8. *Для сопряженного оператора имеем*

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Доказательство. Из (III.6) следует

$$\|\varphi\| \leq \|A\| \|f\|_{Y^*},$$

отсюда следует, что $\|A^*\| \leq \|A\|$.

В силу теоремы Хана-Банаха для каждого $x_0 \in X$ и $Ax_0 \neq 0$ существует функционал $f_0 \in Y^*$ такой, что $\|f_0\|_{Y^*} = 1$ и

$$\langle Ax_0, f_0 \rangle = \|Ax_0\|_Y = |\langle x_0, A^* f_0 \rangle| \leq \|A^*\| \|f_0\|_{Y^*} \|x_0\|_X.$$

Следовательно, $\|A\| \leq \|A^*\|$, поэтому $\|A^*\| = \|A\|$. □

Сопряженные операторы наиболее интересно рассматривать в гильбертовом пространстве. Пусть H — гильбертово пространство. Для линейного ограниченного оператора

$$A : H \to H$$

сопряженным оператором называется оператор $A^* : H \to H$ такой, что

$$(Ax, y)_H = (x, A^* y)_H,$$

для всех $x, y \in H$. Использование скалярного произведение оправдывается теоремой Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

Оператор A называется самосопряженным оператором, если

$$A^* = A,$$

то есть

$$(Ax, y)_H = (x, Ay)_H$$

для всех $x, y \in H$. Мы будем уделять большое внимание самосопряженным операторам, поскольку они обладают рядом замечательных свойств, и, главное, возникают во многих задачах, где применяется функциональный анализ.

Докажем несколько простых, но важных результатов относительно самосопряженных операторов.

Теорема 3.9. *Для любых двух самосопряженных операторов A и B и вещественных чисел a и b оператор $aA + bB$ самосопряжен.*

Доказательство. Для $x, y \in H$ имеем

$$((aA + bB)x, y)_H = a(Ax, y)_H + b(Bx, y)_H =$$

$$= (x, aAy)_H + (x, bBy)_H = (x, (aA + bB)y)_H.$$

□

Вообще говоря, скалярное произведение является комплексным числом, но для самосопряженного оператора имеет место следующая теорема.

Теорема 3.10. *Пусть A самосопряженный оператор, тогда число $(Ax, x)_H$ вещественное.*

Доказательство. Для любого $x \in H$ имеем

$$(Ax, x)_H = (x, Ax)_H = \overline{(Ax, x)}_H,$$

следовательно число $(Ax, x)_H$ совпадает со своим комплексным сопряжением, что может быть только для вещественных чисел. □

Если для самосопряженного оператора имеет место неравенство

$$(Ax, x)_H \geq 0,$$

для всех $x \in H$, то такой оператор называется неотрицательным, и мы будем писать $A \geq 0$.

4. Неограниченные операторы

До этого момента мы рассматривали ограниченные операторы, которые были определены на всем нормированном пространстве. Однако широкий класс операторов, возникающих в задачах математической физики, состоит из неограниченных операторов. При этом они определены, вообще говоря, лишь на некотором подмножестве. Перейдем к определениям. Пусть X и Y суть банаховы пространства. Рассмотрим линейное многообразие D в X. Линейным оператором, действующем из X в Y с областью определения D называется линейное отображение

$$Au = f,$$

где $u \in D$, $f \in Y$. Для области определения будем использовать обозначения $D(A)$. При этом мы будем сохранять запись

$$A : X \to Y$$

Иногда пишут $A : D(A) \subset X \to Y$ или даже $A : X \supset D(A) \to Y$. Множество

$$R(A) = \{f \in Y : f = Au, u \in D(A)\}$$

называется образом оператора A. Через $N(A)$ обозначим ядро оператора A, то есть множество таких $u \in D(A)$, что $Au = 0$.

Можно, конечно, рассматривать всюду определенный оператор $A : D \to Y$, но обычно множество D не является замкнутым в X и не является банаховым в интересующей нас норме X.

Если $D(A)$ плотно в X, то оператор называется плотно определенным. Пусть на ряду с оператором A мы рассматриваем оператор $A_1 : X \to Y$ при этом, если $D(A) \subset D(A_1)$ и $Au = A_1 u$ для всех $u \in D(A)$, то оператор A_1 называется продолжением или расширением оператора A. В свою очередь оператор A называется сужением оператора A_1. Будем использовать обозначения

$$A \subset A_1, \quad A_1 \supset A.$$

Если оператор A взаимно однозначный, то можно определить обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$. При этом имеем

$$D(A^{-1}) = R(A), \quad R(A^{-1}) = D(A).$$

По определению обратного оператора имеем

$$A^{-1}Au = u, \quad u \in D(A)$$

и

$$AA^{-1}f = f, \quad u \in R(A).$$

Оператор, для которого существует обратный, называется обратимым оператором.

Рассмотрим два оператора A и B, действующих из X в Y. Суммой этих операторов называется оператор $A+B$ с областью определения

$$D(A+B) = D(A) \cap D(B).$$

При этом по определению умножение оператора на число (даже на ноль) не меняет область определения оператора. Из этого следует, что нужно проявлять осторожность с использованием линейной комбинации неограниченных операторов, поскольку легко получит в результате оператор с тривиальной (то есть содержащей только ноль) областью определения.

Неограниченные операторы представляют собой слишком общие объекты, не удобные в приложениях. Определенным компромиссом является использования замкнутых операторов, как аналог непрерывных операторов. Оператор $A : X \to Y$ с областью определения $D(A)$ называется замкнутым, если из условий

$$u_n \in D(A),$$

$$\|u_n - u\|_X \to 0,$$

$$\|Au_n - y\|_Y$$

следует, что $u \in D(A)$ и $Au = y$.

Можно дать другое эквивалентное определение замкнутости с использованием понятия графика оператора. Введем новое банахово пространство $Z = X \times Y$, в котором определим норму следующим образом

$$\|(x, y)\|_Z = \left(\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2\right)^{1/2}.$$

Графиком оператора A называется следующее множество $\Gamma(A)$ в пространстве Z

$$\Gamma(A) = \{(u, Au) : u \in D(A)\}.$$

Оператор A замкнут тогда и только тогда, когда его график — замкнутое множество. Если график является замкнутым, то замкнутость оператора A очевидна. С другой стороны, если оператор замкнут, то последовательность $\{(u_n, Au_n)\} \subset Z$, $u \in D(A)$ имеет предел $(u, Au) \in \Gamma(A)$, что означает замкнутость графика.

Для оператора A^{-1} обратного к A график будем рассматривать в том же пространстве $X \times Y$, как подмножество $(A^{-1}v, v)$, $v \in R(A)$. В этом случае график обратного оператора $\Gamma(A^{-1})$ совпадает с графиком $\Gamma(A)$. Из этого сразу же следует, что оператор, обратный к замкнутому оператору, сам замкнут.

Если оператор незамкнут и его график — незамкнутое множество, то график можно замкнуть как множество в $X \times Y$, однако эта процедура не обязательно приведет к замкнутому оператору, поскольку не любое подмножество в $X \times Y$ является графиком. Поэтому мы будем говорить, что оператор A замыкаем (допускает замыкание), если замыкание его графика является графиком. При процедуре замыкания, то есть при переходе к замыканию мы получаем наименьшее замкнутое продолжение оператора A. Пусть оператор A_1 есть замыкание оператора A. Тогда элемент $u \in D(A_1)$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $u_n \in D(A)$ такая, что $u_n \to u$ и $Au_n \to A_1 u$.

Мы уже упоминали о важности самосопряженных операторов. Однако в приложениях часто возникают неограниченные самосопряженные операторы. Определения для сопряженных и самосопряженных операторов в неограниченном случае имеет существенные нюансы в отличии от случая ограниченных операторов.

Для плотно определенного оператора $A : X \to Y$ сопряженным называется оператор $A^* : Y^* \to X^*$, если

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle,$$

для всех $u \in D(A)$ и $v \in D(A^*)$ и этот оператор не имеет собственных расширений.

Покажем существование сопряженного оператора. Область определения $D(A^*)$ состоит из всех таких $v \in Y^*$, что для некоторого $f \in X^*$

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, f\rangle$$

верно для всех $u \in D(A)$. В силу плотности $D(A)$ в X элемент f определяется однозначно. При этом оператор $A^* : Y^* \to X^*$ определяется равенством $A^*v = f$. Линейность оператора A^* проверяется непосредственно.

В дальнейшем в этом параграфе мы рассмотрим частный, но принципиально важный случай, когда $X = Y = H$, где H есть гильбертово пространство.

Оператор $A : H \to H$ с областью определения $D(A)$ называется самосопряженным, если $A = A^*$. При этом предполагается, что

$D(A) = D(A^*)$ и для всех $u, v \in D(A)$ имеет место

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H.$$

Существенным моментом является то обстоятельство, что оператор A не имеет в H собственных замкнутых расширений.

Рассмотрим пример. В качестве H возьмем пространство $L_2(0,1)$ вещественнозначных функций[4]. Рассмотрим, дифференциальный оператор $L = \frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения

$$D(L) = \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}.$$

Для любых двух $u, v \in D(A)$ имеем

$$(Lu, v)_{L_2(0,1)} = \int\limits_0^1 u''(x)v(x)dx.$$

Интегрируем по частям (в силу гладкости функций u и v это можно сделать безболезненно) и, учитывая краевые условия, получаем

$$\int\limits_0^1 u''(x)v(x)dx = u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int\limits_0^1 u'(x)v'(x)dx =$$

$$= -\int\limits_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$(Lu, v)_{L_2(0,1)} = \int\limits_0^1 u(x)v''(x)dx = (u, Lv)_{L_2(0,1)}.$$

Однако отсюда не следует, что $A = A^*$, поскольку оператор A не является замкнутым.

Для изучения сопряженных операторов в гильбертовом пространстве рассмотрим метод графика. Введем пространство $\mathcal{H} = H \times H$. В этом случае графиком оператора A называется множество

$$\Gamma(A) = \{(u, Au) : u \in D(A)\} \subset \mathcal{H}.$$

[4]Это предположение только для сокращения письма.

Определим оператор $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ следующим образом

$$U(u, v) = (v, -u).$$

Легко проверить, что $U\mathcal{H} = \mathcal{H}$ и $U^2 = -I$.

Для любых $u \in D(A)$ и $v, v^* \in H$ имеем

$$(Au, v)_H - (u, v^*)_H = ((Au, -u), (v, v^*))_{\mathcal{H}} =$$

$$= (U(u, Au), (v, v^*))_{\mathcal{H}}.$$

Следовательно,

$$(Au, v)_H = (u, v^*)_H$$

тогда и только тогда, когда элемент $(v, v^*) \in \mathcal{H}$ ортогонален множеству $U\Gamma(A)$. А это означает, что для графика сопряженного оператора $\Gamma(A^*)$ выполняется следующее соотношение

$$\Gamma(A^*) = \mathcal{H} \ominus \overline{U\Gamma(A)}. \tag{III.7}$$

Поскольку в гильбертовом пространстве ортогональное дополнение к замкнутому многообразию само является замкнутым многообразием, то график $\Gamma(A^*)$ сопряженного оператора всегда является замкнутым множеством, следовательно, оператор являющийся сопряженным — замкнут, даже если исходный оператор A не является замкнутым. Заметим, что этот факт верен и для операторов в банаховых пространствах.

Связь между сопряженным и обратным операторами устанавливается в следующей теореме.

Теорема 4.1. *Пусть линейный оператор A имеет обратный A^{-1} и пусть области определения $D(A)$ и $D(A^{-1})$ плотны в H. Тогда имеет равенство*

$$(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*.$$

Доказательство. Пусть $u \in D(A)$, $v \in D((A^{-1})^*)$ — произвольные элементы. Тогда имеем

$$(u, v)_H = (A^{-1}Au, v)_H = (Au, (A^{-1})^*v)_H,$$

но это означает, что $(A^{-1})^*v \in D(A^*)$ и

$$A^*(A^{-1})^*v = v. \tag{III.8}$$

С другой стороны, если f пробегает все $D(A^{-1})$, а h пробегает все $D(A^*)$, то мы имеем

$$(f, h)_H = (AA^{-1}f, h)_H = (A^{-1}f, A^*h)_H,$$

следовательно,

$$A^*h \in D((A^{-1})^*)$$

и

$$(A^{-1})^*A^*h = h$$

отсюда и из (III.8) следует, что

$$(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*.$$

□

Для сопряженного оператора можно также рассматривать сопряженный оператор A^{**}. Что из себя представляет этот оператор?

Теорема 4.2. *Пусть плотно определенный оператор A допускает замыкание, тогда оператор A^{**} существует и имеет место равенство*

$$A^{**} = \overline{A}.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда оператор A замкнут, тогда множество $\Gamma(A)$ — замкнуто, а значит замкнуто и множество $U\Gamma(A)$, тогда имеем представление

$$\mathcal{H} = U\Gamma(A) \oplus \Gamma(A).$$

В силу линейности оператора A имеем $\Gamma(A) = -\Gamma(A)$, поэтому, применяя оператор U, получим

$$\mathcal{H} = \Gamma(A) \oplus U\Gamma(A^*),$$

или

$$\mathcal{H} \ominus U\Gamma(A^*) = \Gamma(A).$$

Теперь из (III.7) следует, что существует A^{**}, и он совпадает с A.

Пусть теперь оператор A только замыкаем, тогда по доказанному выше

$$(\overline{A})^{**} = \overline{A}.$$

Однако

$$(\overline{A})^{**} = ((\overline{A})^*)^* = (A^*)^* = A^{**},$$

следовательно

$$A^{**} = \overline{A}.$$

$\square$

Теперь докажем теорему, которая кажется очевидной, но весьма важна при доказательстве ограниченности операторов.

Теорема 4.3. *Замкнутый оператор A с областью определения $D(A) = H$ является ограниченным.*

Доказательство. Рассмотрим сопряженный оператор A^*. Предположим, что он неограничен. Тогда существует последовательность $v_n \in D(A^*)$ такая, что $\|v_n\|_H = 1$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|A^* v_n\|_H = \infty.$$

Построим последовательность функционалов f_n по формуле

$$f(v_n) = (u, A^* v_n)_H = (Au, v_n)_H.$$

Поскольку при каждом $u \in H$ числовая последовательность $f_n(u)$ ограниченна, то по принципу равномерной ограниченности и вся последовательность функционалов ограничена

$$\|f_n\| \leq M.$$

Это противоречие устанавливает ограниченность оператора A^*. В силу его замкнутости область определение $D(A^*)$ также замкнутое множество. Более того, это множество плотно в H, поскольку в силу замкнутости оператора A и теоремы 4.2 оператор A^* допускает замыкание. Поэтому $D(A^*) = H$. В тоже время поскольку $A^{**} = A$, то по доказанному оператор A является ограниченным. $\square$

Вернемся к вопросу о построении самосопряженных операторов. Отправной точкой для построения самосопряженных операторов, как правило, является понятие симметричного оператора. Рассмотрим плотно определенный оператор A в гильбертовом пространстве H. Этот оператор называется симметричным, если для любых $u, v \in D(A)$ выполняется равенство

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H.$$

Сразу же это означает, что для симметричного оператора A для всех $u \in D(A)$ выражение $(Au, u)_H$ вещественно. Действительно,

$$\overline{(Au, u)_H} = (u, Au)_H = (Au, u)_H,$$

что может быть только для вещественной величины.

Из определения симметричного оператора получаем, что

$$A \subset A^*,$$

поэтому симметричный оператор всегда допускает замыкание, и это замыкание есть самосопряженный оператор.

Введенный выше дифференциальный оператор L является симметричным оператором, и следовательно, его замыкание будет самосопряженным оператором. Впрочем, для описания области определения самосопряженных дифференциальных операторов пространств непрерывных функций недостаточно.

Итак, допустим, что мы построили симметричный оператор. Как узнать будет ли он самосопряженным? Кроме непосредственной проверки его замкнутости, есть еще удобное достаточное условие.

Теорема 4.4. *Пусть оператор A является симметричным оператором и $R(A) = H$, тогда этот оператор самосопряженный.*

Доказательство. Пусть A^* сопряженный оператор. Покажем, что $D(A^*) \subset D(A)$. Возьмем любой $v \in D(A^*)$. Положим $v^* = A^*v$. Поскольку образ оператора A есть все пространство, то существует $w \in D(A)$ такой, что $Aw = v^*$. Следовательно, при любом $u \in D(A)$ имеем

$$(Au, v)_H = (u, A^*v)_H = (Au, Aw)_H = (Au, w)_H.$$

Когда u пробегает все $D(A)$, то Au пробегает все H по условию теоремы, поэтому отсюда следует, что $v = w$ и $v \in D(A)$. $\square$

Обратный оператор к самосопряженному оператору тоже является самосопряженным. Более точно, имеет место следующий результат.

Теорема 4.5. *Если самосопряженный оператор A имеет обратный оператор A^{-1}, то оператор A^{-1} является также самосопряженным.*

Доказательство. Проверим, что область определение оператора A^{-1} плотна в H. Поскольку $D(A^{-1}) = R(A)$, то покажем, что область значений $R(A)$ плотна в H. Действительно, в противном случае существовал бы нетривиальный элемент $f \in H$ такой, что

$$(Au, f)_H = 0$$

для всех $u \in D(A)$. Что невозможно, поскольку тогда $f \in D(A)$ и $Af = 0$, а это противоречит существованию обратного оператора.

Таким образом, существует $(A^{-1})^*$, далее по теореме 4.1 имеем

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}.$$

□

Спектр линейного оператора A, действующего в банаховом пространстве X является непосредственным обобщением понятия собственных значений для квадратных матриц. Понятие спектра играет важнейшую роль в теории линейных операторов их приложениях. В частности, при построении численных методов, в квантовой механике и многих других фундаментальных и прикладных вопросах.

В этом параграфе будем рассматривать линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в *одном и том же* банаховом пространстве X *над полем комплексных чисел.* Помимо этого оператора рассмотрим семейство операторов

$$(A - \lambda I) : X \to X,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, с областью определения $D(A)$. Необходимость обязательно рассматривать комплексные значения параметра имеет тот мотив, что любая квадратная матрица (с вещественными элементами) всегда имеет собственные значения, но в общем случае эти собственные значения будут комплексными — как следствие основной теоремы алгебры о существовании корней из любого полинома.

Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется регулярной или резольвентной, если оператор $(A - \lambda I)$ имеет ограниченный обратный. Множество всех регулярных точек называется резольвентным множеством и обозначается $\varrho(A)$. Для $\lambda \in \varrho(A)$ оператор

$$R(A; \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$$

называется резольвентой[5].

Резольвента, если она существует, удовлетворяет равенству, устанавливаемому следующей теоремой.

Теорема 4.6 (Соотношение Гильберта). *Выберем произвольные числа $\lambda, \mu \in \varrho(A)$, тогда*

$$R(A;\lambda) - R(A;\mu) = (\lambda - \mu) R(A;\lambda) R(A;\mu).$$

В частности, резольвенты коммутируют между собой.

Доказательство. Для произвольного $x \in X$ имеем

$$R(A;\lambda)x = R(A,\mu)(A - \mu I) R(A;\lambda)x$$

и

$$R(A;\mu)x = R(A,\mu)(A - \lambda I) R(A;\lambda)x.$$

Вычитая из первого соотношения второе — получаем соотношение Гильберта для резольвент. □

Для дальнейшего нам потребуется важная и в дальнейшем очень полезная теорема.

Теорема 4.7. *Пусть ограниченный оператор $A : X \to X$ такой, что $\|A\| < 1$. Тогда существует ограниченный обратный $(I - A)^{-1}$ и*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Доказательство. Поскольку пространство линейных ограниченных оператор $\mathcal{L}(X, X)$ является банаховым пространством, то в нем можно рассматривать последовательности и ряды элементов. Рассмотрим ряд

$$I + A + A^2 + A^3 + \dots.$$

Поскольку $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, то норма частичной суммы нашего ряда оценивается следующим образом

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} A^k \right\| \leq \sum_{k=p}^{q} \|A\|^k. \qquad \text{(III.9)}$$

[5] По одной из легенд, «Резольвента» — это испанское женское имя.

Поскольку $\|A\| < 1$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|A\|^k$ как сумма геометрической прогрессии сходится. Поэтому из (III.9) сходиться и ряд

$$S_N = I + \sum_{k=1}^{N} A^k \to S,$$

где $S \in \mathcal{L}(X, X)$ некоторый линейный ограниченный оператор. Имеем

$$(I - A)S_N = S_N(I - A) = I - A^{N+1}.$$

Поскольку $A^{N+1} \to 0$, при $N \to \infty$, то, переходя к пределу, получаем

$$(I - A)S = S(I - A) = I.$$

Следовательно, $(I - A)$ имеет обратный и $(I - A)^{-1} = S$. Далее, имеем

$$\|S\| \leq 1 + \|A\| + \|A\|^2 + \|A\|^3 + \cdots \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

□

Теорема 4.8. *Резольвентное множество всегда открыто.*

Доказательство. Поскольку пустое множество по определению открыто, то можно считать, что существует $\lambda_0 \in \varrho(A)$ и оператор $(A - \lambda_0 I)$ непрерывно обратим. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем

$$A - \lambda I = A - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I = (A - \lambda_0 I)[I - (\lambda - \lambda_0)R(A; \lambda_0)].$$

Следовательно, оператор $A - \lambda I$ обратим, если обратим оператор $I - (\lambda - \lambda_0)R(A; \lambda_0)$, поскольку оператор $(A - \lambda_0 I)$ обратим по предположению. Согласно теореме 4.7 оператор $I - (\lambda - \lambda_0)R(A; \lambda_0)$ будет обратим, если выполнено условие

$$|\lambda - \lambda_0| \|R(A; \lambda_0)\| < 1.$$

Следовательно вместе с λ_0 резольвентному множеству принадлежит и открытый шар $B_{\lambda+0}(r)$, $r = \|R(A; \lambda_0)\|$, что означает открытость множества $\varrho(A)$. □

Спектром оператора A, обозначаемым $\sigma(A)$, называется дополнение к резольвентному множеству. Из теоремы 4.8 следует, что спектр оператора всегда замкнут.

Теорема 4.9. *Пусть оператор A ограничен, тогда для его спектра имеет место следующее включение*

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \|A\|\}.$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $|\lambda| > \|A\|$. Поскольку

$$A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A),$$

то оператор $(I - \lambda^{-1}A)$ обратим по теореме 4.8, учитывая, что $\|\lambda^{-1}A\| < 1$. Следовательно, $\lambda \notin \sigma(A)$. $\square$

Спектр оператора можно разделить на три класса. Множество $\lambda \in \sigma(A)$ называется точечным спектром, если оператор $(A - \lambda I)$ не имеет обратного оператора.

Множество $\lambda \in \sigma(A)$ называется непрерывным спектром, если для оператора $(A - \lambda I)$ существует обратный с плотной областью определения, но оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ не является ограниченным. Далее, множество $\lambda \in \sigma(A)$ называется остаточным спектром, если существует обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, но этот оператор имеет неплотную область определения.

Нас больше всего будет интересовать точечный спектр. Для того, чтобы точка $\lambda \in \sigma(A)$ принадлежала точечному спектру необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$Ax = \lambda x$$

имело ненулевое решение $x \in \mathcal{D}(A)$. В этом случае число λ называется собственным значением оператора A, а все решения этого уравнения (их, очевидно, бесконечное число, поскольку ax, $a \neq 0$ тоже решение, если x — решение), называются собственными векторами[6]. Далее, ядро оператора $(A - \lambda I)$ называется собственным подпространством оператора A, соответствующим собственному значению λ, а размерность $\dim N(A - \lambda I)$ называется кратностью собственного значения.

Приведем примеры спектров неограниченных операторов.

Рассмотрим банахово пространство $C[0, T]$. В качестве оператора рассмотрим оператор дифференцирования

$$Ly = y'(x),$$

[6] Если X функциональное пространство, то говорят о собственных функциях.

с областью определения $D(L) = C^1[0,T]$. Поскольку для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнение

$$y'(x) = \lambda y(x)$$

имеет нетривиальные решения $y(x) = Ce^{\lambda x}$, $C \neq 0$, то $\sigma(L) = \mathbb{C}$, то есть спектр данного оператора есть вся комплексная плоскость.

Для неограниченного оператора принципиальное значение имеет область определения. Действительно, рассмотрим этот же оператор с начальным условием. Пусть

$$L_0 y = y'(x),$$

с областью определения $D(L_0) = \{y \in C^1[0,T] : y(0) = 0\}$. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ рассмотрим уравнение

$$L_0 y = \lambda y, \quad y \in D(L_0).$$

Это соответствует задаче Коши для однородного уравнения

$$y'(x) = \lambda y(x),$$

$$y(0) = 0.$$

Однако эта задача Коши имеет единственное нулевое решение $y(x) = 0$. Поэтому резольвентное множество есть вся комплексная плоскость, а спектра пуст: $\sigma(L_0) = \varnothing$.

Рассмотрим теперь пространство $X = C[0,\pi]$ и в этом пространстве оператор двойного дифференцирования

$$Ly = -y''(x),$$

с областью определения $D(L) = \{y \in C^2[0,2\pi] : y(0) = y(\pi) = 0\}$. Рассмотрим уравнение

$$Ly = \lambda y, \quad y \in D(L).$$

Этому уравнению соответствует краевая задача

$$-y''(x) = \lambda y(x)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Для $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, \ldots$ эта задача имеет нетривиальные решения

$$y_k = \sin\sqrt{\lambda_k} x, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

в чем можно убедиться непосредственно. Причем это единственные значения λ для которых рассматриваемое уравнение имеет нетривиальные решения. Следовательно по альтернативе Фредгольма для краевых задач для линейных обыкновенных уравнений, при $\lambda \neq \lambda_k$ задача

$$-y''(x) - \lambda y(x) = f(x),$$
$$y(0) = y(\pi) = 0$$

имеет единственное решение для всех $f \in C[0, \pi]$. Таким образом, мы имеем дискретный спектр

$$\sigma(L) = \{k^2 : k = 1, 2, \dots\},$$

состоящий из собственных значений.

В качестве примера остаточного спектра рассмотрим оператор в гильбертовом пространстве l_2. Определим оператор следующим образом

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots),$$

с областью определения все l_2. Число $\lambda = 0$ принадлежит остаточному спектру, поскольку область значений $R(T)$ не является плотным в l_2.

Хорошо известно, что симметричная квадратная матрица имеет только вещественные собственные значения. Обобщением этого факта является следующая теорема.

Теорема 4.10. *Пусть в гильбертовом пространстве H задан самосопряженный оператор A с областью определения $D(A)$. Тогда имеем*

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R},$$

то есть самосопряженный оператор может иметь только вещественный спектр.

Доказательство. Возьмем $x \in D(A)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ с помощью неравенства Коши-Буняковского будем иметь

$$\|(A - \lambda I)x\|_H \|x\|_H \geq |((A - \lambda I)x, x)_H| \geq |(Ax, x)_H - \lambda \|x\|_H^2| \geq$$
$$\geq |\operatorname{Im}((Ax, x)_H - \lambda \|x\|_H^2)| = |\operatorname{Im} \lambda| \|x\|_H^2.$$

Здесь использовано, что $(Ax, x)_H$ вещественно в силу самосопряженности оператора A. Следовательно, имеем

$$\|(A - \lambda I)x\|_H \leq |\operatorname{Im} \lambda| \|x\|_H. \qquad \text{(III.10)}$$

Отсюда при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ из $(A-\lambda I)x = 0$ следует, что $x = 0$, поэтому существует обратный $(A-\lambda I)^{-1}$.

Покажем, что при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ область значений $R(A-\lambda I)$ плотна в H. В противном случае существовал бы элемент $y \neq 0$, ортогональный к $R(A-\lambda I)$ и такой, что при всех $x \in D(A)$ выполнялось бы

$$((A-\lambda I)x, y)_H = 0. \tag{III.11}$$

Отсюда следует, что $y \in D(A)$, действительно, в силу плотности $D(A)$ в H существует такая последовательность $y_k \in D(A)$, что $\|y - y_k\|_H \to 0$, при $k \to \infty$. Имеем

$$((A-\lambda I)x, y_k)_H = (x, (A-\overline{\lambda})y_k)_H \to 0,\ k \to \infty.$$

Из (III.11) получаем, что

$$(x, (A-\overline{\lambda})y)_H = 0.$$

В силу плотности области определения самосопряженного оператора имеем

$$(A-\overline{\lambda})y = 0$$

или

$$Ay = \overline{\lambda}y.$$

Однако это противоречит вещественности $(Ay, y)_H$, поэтому область значений $R(A-\lambda I)$ плотна в H. Покажем, что $R(A-\lambda I) = H$. Пусть для последовательности $x_k \in D(A)$ существует предел

$$\lim_{k\to\infty}(A-\lambda I)x_k = y.$$

Тогда из неравенства (III.10) следует, что существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. В силу замкнутости оператора A имеем

$$(A-\lambda I)x = y.$$

Далее, в силу плотности $R(A-\lambda I)$ в H для любого $f \in H$ существует такая последовательность $y_p \in R(A-\lambda I)$, что $y_p \to f$, $p \to \infty$. Кроме того, существует $x_p \in D(A)$ такое, что

$$(A-\lambda I)x_p = y_p.$$

Переходя к пределу при $p \to \infty$ получаем, что $f \in R(A-\lambda I)$.

Наконец, из теорем 4.1 и 4.3 следует, что $(A-\lambda I)^{-1}$ ограничен, когда $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. $\square$

Рассмотрим самосопряженный оператор A с областью определения $D(A)$. В этом множестве введем скалярное произведение по следующей формуле

$$(u, v)_{D(A)} = (Au, Av)_H + (u, v)_H,$$

для всех $u, v \in D(A)$. В силу замкнутости оператора A пространство $D(A)$ является гильбертовым пространством. Предположим, что любое ограниченное множество в $D(A)$ является предкомпактным в H, тогда если оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1}, тогда оператор A имеет счетное множество собственных значений λ_k (для бесконечномерного гильбертова пространства H), а соответствующие им собственные элементы φ_k образуют базис в H. Это утверждение мы докажем в следующей главе, посвященной компактным операторам.

В этом случае, каждый элемент $x \in H$ может быть представлен в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k)_H \varphi_k.$$

Кроме того, элемент $x \in D(A)$ тогда и только тогда, когда в H сходится ряд

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \lambda_k (x, \varphi_k)_H \varphi_k - f \right\|_H \to 0, \quad N \to \infty.$$

При этом имеет место

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, \varphi_k)_H \varphi_k = f.$$

Приведенные формулы имеют глубокий смысл, поскольку позволяют свести задачу вычисления оператора к простому умножению. Но еще более важно, что с помощью этих формул во многих случаях можно находить и обратный оператор. На этом подходе построены методы Фурье для нахождения приближенных решений. Также спектральные методы часто используются для доказательства существования решений дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных уравнений и т.д.

Глава IV

Пространства Соболева

1. Пространства непрерывных функций

Мы будем рассматривать функции, определенные на областях в конечномерных пространствах $\mathbb{R}^n$. Это пространство состоит из n-мерных векторов

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Как обычно это пространство является линейным с по координатными операциями сложения векторов и умножения на число. Кроме того, это пространство является банаховым с евклидовой нормой, которую будем обозначать и называть модулем вектора

$$|x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}.$$

Разумеется, что для пространства $\mathbb{R}^n$ определена сходимость векторов согласно этой норме. Элементы пространства $\mathbb{R}^n$ будем также называть точками.

Для любого $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и положительного $r > 0$ определим открытый шар $B_r(x^0)$ по следующей формуле

$$B_r(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x^0 - x| < r\}.$$

Множество Q называется ограниченным, если существует такое $R > 0$, что $Q \subset B_R(0)$.

Множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если для любого $x \in Q$ существует такое $r > 0$, что

$$B_r(x) \subset Q.$$

Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется граничной для множества Q, если для любого $r > 0$ существует точка $x' \in B_r(x)$ такая, что $x' \in Q$ и существует такая точка $x'' \in B_r(x)$, что $x'' \notin Q$. Границей множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ называется множество ∂Q, состоящее из всех граничных точек. Замыканием множества Q называется множество

$$\overline{Q} = Q \cap \partial Q.$$

Множество Q называется замкнутым, если $\overline{Q} = Q$.

Множество Q называется связным, если для любых двух точек $x', x'' \in Q$ существует непрерывная кривая $\Gamma \subset Q$, соединяющая эти точки.

Открытое и связное множество называется областью.

Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, тогда через $C(\overline{Q})$ обозначим пространство непрерывных в $\overline{Q}$ комплексных функций. В этом пространстве можно ввести норму

$$\|f\|_{C(\overline{Q})} = \max_{x \in \overline{Q}} |f(x)|.$$

В силу теоремы Вейерштрасса это пространство будет полным, т.е. банаховым пространством.

Для определения пространства дифференцируемых функций введем понятие мультииндекса. Мультииндексом будем называть вектор, состоящий из неотрицательных целых чисел

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ \ \alpha_k \geq 0.$$

Модуль мультииндекса определяется по формуле

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Для двух мультииндексов α, β мы будем писать $\alpha \leq \beta$, если

$$\alpha_k \leq \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

С помощью мулитииндексов удобно записывать частные производные

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Иногда мы будем использовать обозначение D_x^α, если нужно подчеркнуть, что дифференцирование идет по x.

Введем пространство непрерывных функций, имеющих k непрерывных производных, которое обозначим через $C^k(\overline{Q})$. Норма в этом пространстве выглядит следующим образом

$$\|f\|_{C^k(\overline{Q})} = \sum_{|\alpha|\le k} \max_{x\in\overline{Q}} |D^\alpha f(x)|.$$

Для функции $f(x)$, определенной в области Q, носителем функции $f(x)$ называется множество в $\mathbb{R}^n$

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in Q : f(x) \neq 0\}}.$$

Если

$$\operatorname{supp} f \subset Q,$$

то функция f называется финитной в Q. Также говорят, что финитная функция имеет компактный носитель в Q.

В теории дифференциальных уравнений в частных производных, как правило, рассматриваются области с гладкой границей. Дадим соответствующее определение.

Будем считать, что $n \ge 2$, тогда введем обозначение

$$x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Таким образом, имеем $x = (x', x_n)$.

Будем говорить, что область $Q \subset \mathbb{R}^n$ имеет границу класса C^k, если для любой точки $x^0 \in \partial Q$ после некоторого поворота декартовой системы координат существует такая функция

$$\varphi(x') \in C^k(\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x'| \le R\}),\ R > 0,$$

что вблизи точки x^0 граница представляется графиком

$$x_n = \varphi(x').$$

Кроме того, при переходе точки x через границу ∂Q разность $x_n - \varphi(x')$ меняет знак. В этом случае, если $x_n - \varphi(x')$ переобозначить через x_n, то вблизи точки x^0 граница будет иметь вид $\{x : x_n = 0\}$. Такую процедуру будем называть выпрямлением (или распрямлением) границы в окрестности точки x^0. Для границы области класса C^k будем использовать обозначение $\partial Q \in C^k$. Если функция φ

будет бесконечно дифференцируемой, то будем говорить о бесконечно гладкой границе и писать $\partial Q \in C^\infty$.

Через $\dot{C}^\infty(Q)$ обозначим множество бесконечно дифференцируемых финитных в Q функций. Это пространство является линейным, но в нем нельзя ввести норму таким образом, чтобы это пространство было банаховым. Заметим, что если $f, g \in \dot{C}^\infty(Q)$, то $fg \in \dot{C}^\infty(Q)$.

Очевидно, что нулевая функция принадлежит пространству $\dot{C}^\infty(Q)$, но возникает вопрос о существовании нетривиальных элементов пространства $\dot{C}^\infty(Q)$. Тем более, что никакая аналитическая функция не равная нулю не может быть элементом $\dot{C}^\infty(Q)$. Сначала приведем пример нетривиальной бесконечно дифференцируемой функции с компактным носителем.

Для любого $y \in \mathbb{R}^n$ и $h > 0$ рассмотрим функцию

$$\omega_h(x) = \begin{cases} c_h e^{-\frac{h^2}{h^2 - |x-y|^2}}, & |x-y| < h \\ 0, & |x-y| \geq h. \end{cases}$$

Здесь $c_h > 0$ такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x)dx = 1.$$

Ясно, что эта функция является финитной в $\mathbb{R}^n$, и не равной нулю. Элементарными вычислениями можно убедиться, что эта функция является бесконечно дифференцируемой.

С помощью функции ω_h, которая называется ядром усреднения, можно строить и другие функции из пространства $\dot{C}^\infty(Q)$.

Пусть Q некоторая конечная область. Возьмем произвольную функцию $u \in L_2(Q)$. Доопределим эту функцию нулем во все $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функцию

$$u_h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_h(|x-y|)u(y)dy,$$

где $h > 0$. Эту функцию будем называть осреднением функции $u(x)$. Из финитности в $\mathbb{R}^n$ функции $u(x)$ следует и финитность функции $u_h(x)$. Поскольку для любого мультииндекса α имеем

$$D^\alpha u_h(x) = \int\limits_Q D_x^\alpha \omega_h(|x-y|)u(y)dy,$$

то функция $u_h(x)$ бесконечно дифференцируемая, т.е. $u_h \in \dot{C}^\infty(Q)$.

В теории дифференциальных уравнений в частных производных большую роль играют срезающие функции для ограниченной области Q. Срезающей функцией называется такая функция $\xi_h \in \dot{C}^\infty(Q)$, что

1. $\xi_\varepsilon(x) = 1, \quad x \in \overline{Q}$,
2. $\xi_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x : \varrho(x, \overline{Q}) < \varepsilon\}$,
3. $0 \le \xi_\varepsilon(x) \le 1, \quad x \in \mathbb{R}^n$.

Такую функцию можно построить по формуле

$$\xi_\varepsilon(x) = \int\limits_Q \omega_h(|x-y|)dy$$

для достаточно малого h.

С помощью усреднений можно приближать негладкие функции финитными бесконечно гладкими функциями.

Теорема 1.1. *Пусть* $u \in L_2(Q)$, *тогда*

$$\|u_h - u\|_{L_2(Q)} \to 0, \quad h \to 0.$$

Доказательство. Фиксируем какое-либо значение $h > 0$, тогда имеем

$$|u_h(x) - u(x)|^2 =$$

$$= \left| \int\limits_{|x-y|<h} u(y)\omega_h(|x-y|)dy - u(x) \int\limits_{|x-y|<h} \omega_h(|x-y|)dy \right|^2.$$

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского, получаем оценку

$$|u_h(x) - u(x)|^2 \le \int\limits_{|x-y|<h} \omega_h^2(|x-y|)dy \int\limits_{|x-y|<h} |u(y) - u(x)|^2 dy \le$$

$$\le C(h) \int\limits_{|z|<h} |u(x+z) - u(x)|^2 dz,$$

где $C(h) > 0$ некоторая константа, зависящая от h.

В силу теоремы Фубини последнее неравенство можно проинтегрировать по Q и получить следующую оценку

$$\|u_h - u\|^2_{L_2(Q)} \le C(h) \int\limits_{|z|<h} dx \int\limits_Q |u(x+z) - u(x)|^2 dx.$$

Поскольку функции из пространства $L_2(Q)$ непрерывны в среднем, т.е. для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\|u(x+z) - u(x)\|_{L_2(Q)} < \varepsilon,$$

если $|z| < \delta$, то для $h < \delta$ мы получаем оценку

$$\|u_h - u\|_{L_2(Q)} < \mathrm{const}\, \varepsilon.$$

Следовательно, $u_h \to u$ в $L_2(Q)$ при $h \to 0$. □

Из этой теоремы следует, что множество $\dot{C}^\infty(Q)$ является плотным в пространстве $L_2(Q)$.

2. Обобщенные производные

Представление о производной, как о пределе отношения приращения функции к приращению аргумента, оказывается недостаточным для изучения дифференциальных уравнений в частных производных. Сейчас мы рассмотрим принципиально новое определение производной функции.

Пусть α некоторый мультииндекс. Мы будем говорить, что функция $f^\alpha \in L_{2,loc}(Q)$ является α-обобщенной производной функции $f \in L_{2,loc}(Q)$, если для любой функции $g \in \dot{C}^\infty(Q)$ имеет место интегральное равенство

$$\int\limits_Q f^\alpha(x)\overline{g(x)}dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_Q f(x)\overline{D^\alpha g(x)}dx.$$

Обобщенные производные будем записывать с помощью тех же обозначений: $D^\alpha f(x)$, $D^\alpha_x f(x)$ или $f_{x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ для частной обобщенной производной по переменной x_i.

Прежде чем рассматривать свойства обобщенных производных покажем, что если функция имеет обычную производную, то она имеет и обобщенную, причем эти производные совпадают. Пусть функция $f \in C^{|\alpha|}(oQ)$, тогда равенство

$$f^{\alpha}(x) = D^{\alpha} f(x)$$

умножим на $\overline{g(x)}$ и проинтегрируем по Q

$$\int\limits_Q f^{\alpha}(x)\overline{g(x)}dx = \int\limits_Q D^{\alpha} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

В правой части этого равенства проинтегрируем по частям $|\alpha|$ раз, учитывая, что $g \in \dot{C}^{\infty}(Q)$ и поверхностные интегралы при этом будут равны нулю. Тогда получаем

$$\int\limits_Q f^{\alpha}(x)\overline{g(x)}dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_Q f(x)\overline{D^{\alpha} g(x)}dx.$$

Таким образом, в этом случае обычная производная $D^{\alpha} f(x)$ является и обобщенной производной.

Рассмотрим теперь основные свойства обобщенных производных. Первым делом необходимо убедиться, что обобщенная производная, если она существует, является единственной.

Предположим, что функция f имеет две обобщенные производные f_1^{α} и f_2^{α}. Это означает, что для любой функции $g \in \dot{C}^{\infty}(Q)$ имеют место равенства

$$\int\limits_Q f_1^{\alpha}(x)\overline{g(x)}dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_Q f(x)\overline{D^{\alpha} g(x)}dx$$

и

$$\int\limits_Q f_2^{\alpha}(x)\overline{g(x)}dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_Q f(x)\overline{D^{\alpha} g(x)}dx.$$

Вычитая одно равенство из другого, мы получаем

$$\int\limits_Q (f_1^{\alpha}(x) - f_2^{\alpha}(x))\overline{g(x)}dx = 0.$$

Поскольку это равенство верно для любой функции $g \in \dot{C}^{\infty}(Q)$, то по основной лемме вариационного исчисления функции $f_1^{\alpha}(x)$ и $f_2^{\alpha}(x)$ равны почти всюду в Q', такой, что $\overline{Q}' \subset Q$, а значит и в Q.

Далее, из определения обобщенной производной следует линейность этой операции:

$$D^\alpha(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 D^\alpha f_1(x) + c_2 D^\alpha f_2(x).$$

Если функция $f(x)$ имеет обобщенную производную в области Q, то эта функция будет иметь обобщенную производную в любой области $Q' \subset Q$, поскольку любая функция из $\dot{C}^\infty(Q')$, продолженная нулем в Q, принадлежит пространству $\dot{C}^\infty(Q)$.

Рассмотрим связь обобщенных производных с осреднением.

Теорема 2.1. *Пусть функция $f \in L_{2,loc}(Q)$ имеет в области Q α-обобщенную производную $D^\alpha f \in L_{2,loc}(Q)$, для любой точки $x \in Q$ при достаточно малом $h > 0$ имеем*

$$(D^\alpha f)_h(x) = D^\alpha f_h(x). \tag{IV.1}$$

Доказательство. По построению осреднения имеем

$$D^\alpha f_h(x) = \int\limits_Q f(y) D_x^\alpha \omega_h(x-y)dy = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_Q f(y) D_y^\alpha \omega_h(x-y)dy.$$

По определению обобщенной производной от сюда имеем

$$D^\alpha f_h(x) = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_Q f(y) D_y^\alpha \omega_h(x-y)dy =$$

$$= \int\limits_Q D_y^\alpha f(y) \omega_h(x-y)dy = (D^\alpha f)_h(x).$$

$\square$

Теорема 2.2. *В условиях теоремы 2.1 для любой области Ω такой, что $\overline{\Omega} \subset Q$, имеет место*

$$\|D^\alpha f_h - D^\alpha f\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad h \to 0. \tag{IV.2}$$

Доказательство. Для любой области Ω существует такое достаточно малое $h > 0$, что для всех $x \in \Omega$ верна теорема 2.1, следовательно, (IV.2) следует из теоремы 1.1. $\square$

Для функции, имеющей непрерывные классические производные, известно, что если в какой-либо области у этой функции градиент равен нулю, то эта функция равна в этой области. Аналогичная теорема имеет место и для обобщенных производных.

Теорема 2.3. *Пусть функция $f \in L_2(Q)$ имеет обобщенные*

$$f_{x_i}(x) = 0, \quad x \in Q,$$

тогда $f(x) = \text{const}$ п.в. на Q.

Доказательство. Для любой области $\Omega \subset Q$ в силу (IV.1) для достаточно малого $h > 0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_h(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_h (x) = 0,\ x \in \Omega.$$

Поскольку осреднение является гладкой функцией, то $f_h(x) = C(h)$ при $x \in \Omega$, где $C(h)$ некоторая константа, зависящая только от h. Имеем

$$\|f_{h_1} - f_{h_2}\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f_{h_1} - f\|_{L_2(\Omega)} + \|f - f_{h_2}\|_{L_2(\Omega)} \to 0,\ h_1, h_2 \to 0.$$

Следовательно,

$$\|C(h_1) - C(h_2)\|_{L_2(\Omega)} \to 0,\ h_1, h_2 \to 0,$$

поэтому $C(h) \to C(0)$ при $h \to 0$ как элементы пространства $L_2(\Omega)$. Таким образом, $f(x) = C(0)$ в пространстве $L_2(\Omega)$, а значит, что $f(x) = \text{const}$ п.в. в Ω. □

3. Пространства Соболева $H^k(Q)$

Пространством Соболева $H^k(Q)$ будем называть множество функций u из $L_2(Q)$, имеющих обобщенные производные $D^\alpha u \in L_2(Q)$ для всех $|\alpha| \leq k$.

Очевидно, что множество $H^k(Q)$ является линейным пространством. На самом деле, это пространство является гильбертовым пространством со скалярным произведением, определенным по формуле

$$(u, v)_{H^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(Q)}.$$

Тот факт, что это пространство является гильбертовым, т.е. полным по метрике, индуцируемой введенным скалярным произведением, доказывается в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пространство Соболева $H^k(Q)$ является полным пространством.*

Доказательство. Возьмем произвольную фундаментальную последовательность $\{u_s\} \subset H^k(Q)$ такую, что

$$\|u_s - u_p\|_{H^k(Q)} \to 0, \quad s, p \to \infty.$$

Для любого мультииндекса α такого, что $|\alpha| \leq k$ б имеем

$$\|D^\alpha u_s - D^\alpha u_p\|_{L_2(Q)} \to 0, \quad s, p \to \infty,$$

что означает фундаментальность последовательностей $\{\mathcal{D}^\alpha u_s\}$ в $L_2(Q)$. В силу полноты пространства $L_2(Q)$ эти последовательности имеют пределы

$$\lim_{s\to\infty} D^\alpha u_s = u_\alpha, \quad |\alpha| \leq k.$$

Покажем, что функции u_α суть обобщенные производные функции u, которая есть предел последовательности $\{u_s\}$ в $L_2(Q)$. Фиксируем произвольную $\varphi \in \dot{C}^\infty(Q)$. Имеем

$$(u_s, D^\alpha \varphi)_{L_2(Q)} = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha u_s, \varphi)_{L_2(Q)}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $s \to \infty$, получаем

$$(u, D^\alpha \varphi)_{L_2(Q)} = (-1)^{|\alpha|}(u_\alpha, \varphi)_{L_2(Q)},$$

а это означает, что $u_\alpha = D^\alpha u$. Следовательно,

$$\|D^\alpha u - D^\alpha u_s\|_{L_2(Q)} \to 0, \quad s \to 0, \ |\alpha| \leq k.$$

Таким образом,

$$\|u_s - s\|_{H^k(Q)} \to 0, \quad s \to \infty.$$

$\square$

Для случая, когда $Q = \mathbb{R}^n$ в пространстве Соболева $H^k(\mathbb{R}^n)$ можно ввести эквивалентную норму следующим образом

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\hat{u}(\xi) d\xi \right)^{1/2},$$

где $\hat{u}$ — это преобразование Фурье функции $u(x)$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx.$$

Действительно, используя равенство Парсеваля, имеем

$$\|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha u(x)|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\le k} |(-i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Здесь через ξ^α, где α является мультииндексом, обозначается

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Элементарно устанавливается, что существуют такие константы C_1 и C_2, не зависящие от ξ, что верны неравенства

$$C_1 \le (1 + |\xi|^2)^{-k} \sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|^2 \le C_2.$$

Важным фактом является следующая теорема, которая имеет большое значение для дифференциальных уравнений в частных производных.

Теорема 3.2. *Рассмотрим область $Q \subset \mathbb{R}^n$, которая взаимно однозначно отображается на область Ω отображением $y : Q \to \Omega$*

$$y = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Если $y \in C(\overline{Q})$, то для любой функции $u(y) \in H^k(\Omega)$ функция $v(x) = u(y(x))$ принадлежит пространству $H^k(Q)$ и

$$\|v\|_{H^k(Q)} \le C \|u\|_{H^k(\Omega)}, \tag{IV.3}$$

где $C > 0$ не зависит от u.

Доказательство. В силу теоремы о замене переменных в интеграле Лебега и формулы для вычисления сложной функции

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(y(x))}{\partial y_j} \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_j}, \; i = 1, \dots, n \tag{IV.4}$$

следует, что функция $v \in H^k(Q)$.

Для $k = 1$ неравенство (IV.3) следует из формулы (IV.4) и ограниченности на $\overline{\Omega}$ функций $\frac{\partial y_i(x)}{\partial xj}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Пусть теперь $k = 2$, тогда имеем

$$\frac{\partial u(y(x))}{\partial y_i} \in H^1(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Поэтому можно оценить

$$\left\| \frac{\partial u(x)}{\partial y_j} \right\|_{H^1(Q)} \leq \left\| \frac{\partial u(y)}{\partial y_j} \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Поскольку функции $\frac{\partial y_m(x)}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 y_m(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ непрерывны в $\overline{\Omega}$, то существует такая константа C_1, что

$$\left\| \frac{\partial u(y(x))}{\partial y_i} \frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j} \right\|_{H^1(Q)} \leq C_1 \left\| \frac{\partial u(y(x))}{\partial y_i} \right\|_{H^1(Q)}.$$

Теперь из предыдущего неравенства и формулы (IV.4) следует, что (IV.3) верно и при $k = 2$.

Аналогично можно убедиться, что формула (IV.3) верна для любого k. $\square$

Рассмотрим область, являющуюся кубом в $\mathbb{R}^n$ с ребром $2a$, $a > 0$:

$$K_a = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < a, i = 1, \ldots, n\}.$$

Теорема 3.3. *Пространство $C^\infty(K_a)$ всюду плотно в пространстве $H^k(K_a)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $f \in H^k(K_a)$ и покажем, что существует последовательность функций из $C^\infty(K_a)$, которая сходится по норме пространства $H^k(K_a)$ к f.

Выберем произвольное $\tau > 1$ и построим функцию $f_\tau \in H^k(K_{\tau a})$, определенную по формуле

$$f_\tau(x) = f\left(\frac{x}{\tau}\right), \quad x \in K_{\tau a}.$$

Введем осреднения этой функции $(f_\tau)_h$, которые будут бесконечно гладкими. Имеем оценку

$$\|f - (f_\tau)_h\|_{H^k(K_a)} \leq \|f - f_\tau\|_{H^k(K_a)} + \|f_\tau - (f_\tau)_h\|_{H^k(K_a)}.$$

Когда h стремиться к нулю при фиксированном τ, второе слагаемое тоже стремиться к нулю, поскольку замыкание области K_a принадлежит области $K_{\tau a}$. Рассмотрим первое слагаемое в правой части. Фиксируем мультииндекс α такой, что $|\alpha| \le k$. Поскольку множество непрерывных функций плотно в пространстве $L_2(K_a)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $g_\alpha \in C(\overline{K}_a)$, что

$$\|\mathcal{D}^\alpha f - g_\alpha\|_{L_2(K_a)} < \varepsilon.$$

Аналогично функции f_τ введем функцию $g_{\alpha\tau} = g_\alpha(x/\tau)$, $x \in K_{\tau a}$. Тогда имеем оценку

$$\|\mathcal{D}^\alpha f - D^\alpha f_\tau\|_{L_2(K_a)} \le$$

$$\le \|\mathcal{D}^\alpha f - g_\alpha\|_{L_2(K_a)} + \|g_\alpha - g_{\alpha\tau}\|_{L_2(K_a)} + \|g_{\alpha\tau} - D^\alpha f_\tau\|_{L_2(K_a)}.$$

В силу равномерной непрерывности функции g_α второе слагаемое может быть сделано произвольно малым при соответствующем выборе τ близкого к 1. Рассмотрим третье слагаемое

$$\|g_{\alpha\tau} - D^\alpha f_\tau\|^2_{L_2(K_a)} = \int\limits_{K_a} |g_{\alpha\tau}(x) - D^\alpha f_\tau(x)|^2 dx \le$$

$$\le \int\limits_{K_{\tau a}} |g_\alpha(x/\tau) - D^\alpha(f(x/\tau))|^2 dx = \tau^n \int\limits_{K_\tau} |g_\alpha(y) - \tau^{-|\alpha|} D^\alpha f(y)|^2 dy.$$

Поэтому имеем

$$\|g_{\alpha\tau} - D^\alpha f_\tau\|_{L_2(K_a)} \le \tau^{n/2} \|g_\alpha - \tau^{-|\alpha|} D^\alpha f\|_{L_2(K_a)} \le$$

$$\le \tau^{n/2} \|g_\alpha - D^\alpha f\|_{L_2(K_a)} + \tau^{n/2}(1 - \tau^{-|\alpha|}) \|D^\alpha f\|_{L_2(K_a)}.$$

От сюда достаточно малого $\tau > 1$ можно обеспечить оценку

$$\|g_{\alpha\tau} - D^\alpha f_\tau\|_{L_2(K_a)} < \varepsilon.$$

Поскольку норма в $H^k(K_a)$ имеет представление

$$\|f\|^2_{H^k(K_a)} = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha f\|^2_{L_2(K_a)},$$

то из доказанного следует, что функция $(f_\tau)_h$, являясь бесконечно гладкой, с любой точностью (при достаточно малых τ и h) приближает функцию f по норме пространства $H^k(K_a^)$. $\square$

4. Теорема о продолжении

В конце предыдущего параграфа мы доказали плотность гладких функций в пространстве Соболева, когда область представляет собой куб в $\mathbb{R}^n$. Однако нам необходимо иметь аналогичную теорему и для более общих областей. Оказывается для этого необходимо доказать теорему о продолжении функций для пространств Соболева. Речь идет о том, что для любой функции $f \in H^k(Q)$ существует продолжение этой функции в любую область Ω такую, что $\overline{Q} \subset \Omega$. Таким образом продолжением называется функция $F \in H^k(\Omega)$ такая, что

$$F(x) = f(x), \quad x \in Q.$$

Теорема о продолжении играет фундаментальную роль в пространствах Соболева их их приложениях в дифференциальных уравнений в частных производных. Теорема о продолжении требует определенной гладкости границы для области Q.

Сначала докажем лемму о продолжении непрерывно дифференцируемых функций для области специального вида. Введем некоторые обозначения

$$x = (x', x_n), \quad x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

$$K_a^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < a, i = 1, \dots, n-1; x_n \in (0, a)\},$$
$$K_a^- = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < a, i = 1, \dots, n-1; x_n \in (-a, 0)\},$$

Лемма 4.1. *Для любой функции $f \in C^k(\overline{K_a^+})$ существует такая функция $F \in C^k(\overline{K_a})$, что*

$$F(x) = f(x), \quad x \in K_a^+$$

и

$$\|F\|_{C^k(\overline{K_a})} \le C\|f\|_{C^k(\overline{K_a^+})}, \tag{IV.5}$$

где $C > 0$ не зависит от функции f.

Доказательство. Относительно набора действительных чисел

$$A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$$

рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{k+1} (-1/i)^s A_i = 1, \quad s = 0, 1, \dots, k. \tag{IV.6}$$

Определитель этой системы является детерминантом Вандермонда, который, как известно, не равен нулю, поэтому искомый набор чисел $\{A_i\}$ существует. Используем его для построения продолжения функции с помощью метода отражения. Определим функцию $F(x)$, при $x \in K_a$ следующим образом

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overline{K_a^+}, \\ \sum\limits_{i=1}^{k+1} f(x', -x_n/i)^s A_i, & x \in K_a^-. \end{cases}$$

По построению видно, что $F \in C^k(\overline{K_a^-})$. Далее, непосредственной проверкой, с учетом (IV.6), можно убедиться, что

$$\lim_{\substack{x \to (y', 0), \\ x_n < 0}} D^\alpha F(x', x_n) = D^\alpha f(y', 0), \quad |a| \leq k.$$

Следовательно, $F \in C^k(\overline{K_a})$, кроме того, существует такая константа $C > 0$, что

$$\|F\|_{C^k(\overline{K_a})} \leq C\|f\|_{\overline{K_a^+}}.$$

□

Аналогичная лемма имеет место для функций из пространства Соболева.

Лемма 4.2. *Для любой функции $f \in H^k(K_a^+)$ существует такая функция $F \in H^k(K_a)$, что*

$$F(x) = f(x), \quad x \in K_a^+$$

и

$$\|F\|_{H^k(K_a)} \leq C\|f\|_{H^k(K_a^+)},$$

где $C > 0$ не зависит от функции f.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f \in H^k(K_a^+)$. Согласно теореме 3.3 существует такая последовательность $\{f_k\} \subset C^\infty(\overline{K_a^+})$, что

$$\|f_k - f\|_{H^k(K_a^+)} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Согласно предыдущей лемме существует продолжение $F_k \in C^k(\overline{K_a})$. Кроме того, несложно видеть, что имеет место оценка

$$\|F_k\|_{H^k(K_a)} \leq C\|f_k\|_{H^k(K_a^+)}.$$

Поэтому имеем

$$\|F_k - F_m\|_{H^k(K_a)} \le C\|f_k - f_m\|_{H^k(K_a^+)} \to 0, \quad k, m \to \infty.$$

Это означает, что последовательность $\{F_k\}$ фундаментальна в пространстве $H^k(K_a)$, поэтому имеет предел, который мы обозначим через $F \in H^k(K_a)$. Поскольку

$$F_k(x) = f_k(x), \quad x \in K_a^+,$$

то

$$F(x) = f(x), \quad x \in K_a^+.$$

Следовательно, функция F, действительно, является продолжением в K_a функции f. Наконец, перейдем к пределу в неравенстве

$$\|F_k\|_{H^k(K_a)} \le C\|f_k\|_{H^k(K_a^+)}$$

и получим необходимую оценку для продолжения. □

Для доказательства теоремы о продолжении функций из пространства Соболева в случае области общего вида нам понадобится еще одна лемма.

Лемма 4.3. *Пусть область Q ограниченная, и функция $f \in H^k(Q)$ такая, что для любой точки $\xi \in \partial Q$ существует такая функция $F_\xi \in H^k(B_r(\xi))$, где шар $B_r(\xi)$ с радиусом, зависящим от ξ, что $F_\xi(x) = f(x)$ при $x \in Q \cap B_r(\xi)$. Кроме того, потребуем выполнения неравенств*

$$\|F_\xi\|_{H^k(B_r(\xi))} \le C\|f\|_{H^k(Q)}.$$

Тогда для любого $\rho > 0$ существует продолжение $F(x)$ в область Q^ρ, где $Q^\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \rho, y \in Q\}$ такое, что $F \in H^k(Q^\rho)$, $F(x) = 0$ при $x \in Q^\rho \setminus Q^{\rho/2}$ и

$$\|F\|_{H^k(Q^\rho)} \le C_1\|f\|_{H^k(Q)},$$

где $C_1 > 0$ не зависит от f.

Доказательство. Для любой точки $\xi \in oQ$ существует такой шар $B_r(\xi)$ с радиусом $r = r(\xi)$, в котором определена функция $F \in H^k(B_r(\xi))$, которая совпадает с $f(x)$, если $x \in Q$. В случае необходимости уменьшим радиусы $r(\xi)$ таким образом, чтобы $r(\xi) < \rho$.

Имеем покрытие множества $\overline{Q}$

$$\overline{Q} \subset \bigcup_{\xi \in \overline{Q}} B_{r(\xi)/3}(\xi).$$

Поскольку множество $\overline{Q}$ является компактным, то существует конечное покрытие этого множества

$$\overline{Q} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{r(x^i)/3}(x^i).$$

Зафиксируем эти точки $\{x^i\}$ и обозначим $r_i = r(x^i)$.

Возьмем функции $g_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $g_i(x) = 1$, при $x \in B_{r_i/3}(x^i)$ и $g_i(x) = 0$ вне шара $B_{r_i/2}(x^i)$, $i = 1, \ldots, N$. Рассмотрим функции

$$h_i(x) = 1 - g_i(x), \quad i = 1, \ldots, N$$

и построим функции

$$\varphi_1(x) = g_1(x), \varphi_2(x) = h_1(x) g_2(x), \ldots,$$

$$\varphi_i(x) = h_1(x) \ldots h_{i-1}(x) g_i(x), \quad i \leq N.$$

По построению мы имеем

$$\varphi_i(x) = 0, \quad \bigcup_{j=1}^{i-1} B_{r_j/3}(x^j)$$

и

$$\varphi_i(x) = 0, \quad x \in (\mathbb{R}^n \setminus B_{r_i/2}(x^i)).$$

Далее, легко видеть, что

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_i(x) = 1, \quad x \in B_{r_i/3}(x^i).$$

Теперь построим функции $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, определенные при всех $x \in \mathbb{R}^n$ следующим образом. Во-первых, в $B_{r_i}(x^i)$ функция $f_i(x)$ совпадает с $f(x)$ или ее продолжением. Во-вторых, вне $B_{r_i}(x^i)$ функция $f_i(x)$ равна $f(x)$, если $x \in Q$, и нулю, если $x \notin Q$.

Определим функция в Q^ρ

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \varphi_i(x).$$

По построению эта функция принадлежит пространству $H^k(Q^\rho)$.

Покажем, что функция $F(x) = f(x)$ при $x \in Q$. Возьмем любую точку $x \in Q$. Пусть l первый индекс (в выбранной нумерации покрытия) такой, что $x \in B_{r_l/3}(x^l)$. Поскольку $f_i(x) = f(x)$, то

$$\varphi_i(x)f(x) = 0, \quad i > l.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{l} \varphi_i(x)f(x) = F(x) = f(x).$$

По построению функций φ_i мы получаем, что $F(x) = 0$ вне $Q^{\rho/2}$.

Неравенство

$$\|F\|_{H^k(Q^\rho)} \leq C_1\|f\|_{H^k(Q)}$$

следует из неравенства $\|F_\xi\|_{H^k(B_r(\xi))} \leq C\|f\|_{H^k(Q)}$ и построения функции $F(x)$. □

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать основную теорему о продолжении функций из пространств Соболева.

Теорема 4.1 (о продолжении)**.** *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область с границей $\partial Q \in C^k$. Для любой ограниченной области Q' такой, что $\overline{Q} \subset Q'$ и любой функции $f \in H^k(Q)$ существует финитное в Q' продолжение $F \in H^k(Q')$ такое, что*

$$\|F\|_{H^k(Q')} \leq C\|f\|_{H^k(Q)},$$

где $C > 0$ не зависит от f.

Доказательство. Для любой точки $\xi \in \partial Q$ существует такая окрестность U_ξ, что уравнение для границы может быть записано в виде[1]

$$x_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

где функция φ является из класса C^k. Без ограничения общности можно считать, что $x_n > \varphi$. Совершим замену переменных

$$y_i = x_i - \xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$y_n = x_n - \varphi(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}).$$

[1]Возможно потребуется перенумеровать переменные.

Отображение $y = y(x)$ является гладким отображением области U_ξ на некоторую окрестность V начала координат в переменных y. Возьмем такой куб $K_a \subset V$. Через L_ξ обозначим прообраз этого куба. Тогда имеем
$$y : Q \cap L_\xi \to K_a^+.$$
Соответственно, функция $f(x)$ на множестве $Q \cap L_\xi$ перейдет в функцию $g(y)$ следующим образом
$$g(y) = f(y_1 + \xi_1, y_2 + \xi_2, \ldots, y_n + \varphi(y_1 + \xi_1, \ldots, y_{n-1} + \xi_{n+1})).$$
Поскольку преобразование $y(x)$ гладкое, то по теореме 3.2 имеем $g \in H^k(K_a^+)$. По лемме 4.2 существует продолжение G в куб K_a. Поскольку отображение y взаимно однозначное, то существует и продолжение F_ξ функции f_ξ из $Q \cap L_\xi$ в L_ξ, а значит и в некоторый шар $B_r(\xi)$ с радиусом $r = r(\xi) > 0$. При этом
$$\|F_\xi\|_{H^k(B_r(\xi))} \le C\|f\|_{H^k(Q)}.$$

Возьмем теперь $\rho > 0$ таким, что $\rho < \operatorname{dist}(\partial Q, \partial Q')$, тогда утверждение теоремы будет следовать из леммы 4.3. $\square$

Заметим, что условие гладкости на границу области можно сильно ослабить, например, потребовав, чтобы граница имела липшецеву гладкость, но соответствующее доказательство будет весьма сложным (см. [6]). Однако вообще убрать условие гладкости границы нельзя — существуют такие области, для которых теорема о продолжении не верна.

Замечание 4.1. Условие гладкости границы $\partial C \in C^k$ для любого $k \ge 1$ исключает области, представляющие собой прямоугольники или, более обще, цилиндрические области[2], которые, как раз, очень часто встречаются в приложениях и модельных примерах. На самом деле доказательство не сложно модифицировать, на случай, когда область Q представляет собой цилиндрическую область, у которой область Ω имеет гладкую границу.

Теорема о продолжении позволяет доказать следующую принципиальную теорему.

Теорема 4.2. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^k$, тогда множество функций $C^\infty(\overline{Q})$ всюду плотно в $H^k(Q)$.*

[2] Область Q называется цилиндрической, если $Q = (a, b) \times \Omega$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f \in H^k(Q)$. Выберем какую-либо ограниченную область $Q' \subset \mathbb{R}^n$ такую, что $\overline{Q} \subset Q'$. По теореме о продолжении существует такая финитная в Q' функция $F(x)$, являющаяся продолжением функции $f(x)$. Осреднение функции F будет бесконечно гладкой в функцией, и мы имеем

$$\|(F)_h - f\|_{H^k(Q)} = \|(F)_h - F\|_{H^k(Q)} \to 0, \ h \to 0.$$

Следовательно, мы можем любую функцию из $H^k(Q)$ приблизить в норме $H^k(Q)$ с любой точностью бесконечно дифференцируемой функцией. □

Теорема 4.3. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^k$, тогда пространство Соболева $H^k(Q)$ является сепарабельным пространством.*

Доказательство. Поскольку в пространстве $H^k(Q)$ множество непрерывных функций $C(\overline{Q})$ всюду плотно, то сепарабельность пространства $H^k(Q)$ следует из сепарабельности пространства $C(\overline{Q})$, которое сепарабельно в силу теоремы Вейерштрасса, утверждающей, что в пространстве $C(\overline{Q})$ плотно множество всех многочленов. В множестве многочленов, очевидно, плотным являются многочлены с рациональными коэффициентами, множество которых счетно. □

5. Теоремы вложения пространств Соболева

Сначала докажем принципиальную теорему о компактности вложения пространств Соболева в пространства Лебега. Эта теорема называется теоремой Реллиха-Гординга.

Для доказательства этой теоремы Реллиха-Гординга нам потребуется доказать неравенство Пуанкаре. Пусть K — единичный куб

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < 1, i = 1, \dots, n\}.$$

Разобьем этот куб на элементарные кубы ω_i со стороной $1/N$ и гранями, параллельными координатным плоскостям. Для функции $u \in H^1(\omega_i)$ имеет место неравенство Пуанкаре

$$\int\limits_{\omega_i} u^2(x)dx \le \frac{1}{|\omega_i|}\left(\int\limits_{\omega_i} u(x)dx\right)^2 + \frac{n}{2N^2}\int\limits_{\omega_i}\sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2(x)dx, \qquad \text{(IV.7)}$$

где через $|\omega_i|$ обозначен объем куба ω_i.

В силу плотности гладких функций в пространствах Соболева, неравенство (IV.7) достаточно доказать только для функций из $C^1(\overline{\omega_i})$. Возьмем любую функцию $u \in C^1(\overline{\omega_i})$. Неравенство (IV.7) будет эквивалентно неравенству

$$\int\limits_K u^2(x)dx \leq \left(\int\limits_K u(x)dx\right)^2 + \frac{n}{2}\int\limits_K \sum_{k=1}^n u_{x_k}^2(x)dx, \tag{IV.8}$$

в чем можно убедиться с помощью замены переменных.

Возьмем произвольные две точки $y, y' \in K$ и рассмотрим набор точек

$$y^0 = y,\ y^1 = (y_1', y_2, \ldots, y_n),\ y^2 = (y_1', y_2', y_3, \ldots, y_n)\ \ldots, y^n = y'.$$

Поскольку $u(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то по формуле Ньютона-Лейбница мы имеем

$$u(y') - u(y) = \int\limits_y^{y^1} u_{s_1}(s_1, y_2, \ldots, y_n)ds_1 +$$

$$\int\limits_{y^1}^{y^2} u_{s_2}(y_1', s_2, \ldots, y_n)ds_2 + \cdots + \int\limits_{y^{n-1}}^{y^n} u_{s_n}(y_1', y_2', \ldots, s_n)ds_n.$$

Возводя обе части этого неравенства в квадрат, после несложных преобразований получаем

$$u^2(y') - 2u(y')u(y) + u^2(y) \leq n\left(\int\limits_0^1 u_{s_1}^2 ds_1 + \cdots + \int\limits_0^1 u_{s_n}^2 ds_n\right).$$

Проинтегрируем это неравенство по $y \in K$ и $y' \in K$, тогда получаем

$$2\int\limits_K u^2(y)dy - \left(2\int\limits_K u(y)dy\right)^2 \leq n\int\limits_K \sum_{k=1}^n u_{y_k}^2 dy.$$

Отсюда элементарно получаем неравенство (IV.8), эквивалентное (IV.7).

Теперь мы готовы доказать теорему о компактности вложения.

Теорема 5.1 (теорема Реллиха-Гординга)**.** *Пусть* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченная область с границей* $\partial Q \in C^1$*. Тогда вложение* $H^1(Q)$ *компактно в* $L_2(Q)$*.*

Доказательство. Утверждение теоремы означает, что любое ограниченное в $H^1(Q)$ множество является предкомпактным в $L_2(Q)$ или что из любой ограниченной в $H^1(Q)$ последовательности можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в $L_2(Q)$.

Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность $\{u^k\} \subset H^1(Q)$.

Без ограничения общности, можно считать, что $\overline{Q} \subset K$, поэтому существует финитное в K продолжение функций u^k. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем сразу считать, что $\operatorname{supp} u^k \subset K$ и

$$\|u^k\|_{H^1(K)} \leq M.$$

Поскольку отсюда следует, что эта последовательность ограничена и в $L_2(K)$, а, следовательно, является слабо предкомпактной, то есть существует такая подпоследовательность, которая слабо сходится в $L_2(K)$. Для сокращения письма, без ограничения общности, можно считать, что изначальная последовательность слабо сходится в $L_2(K)$.

Из неравенства (IV.7) следует неравенство

$$\int\limits_K u^2(x)dx \leq \sum_{i=1}^{N^n} \frac{1}{|\omega_i|} \left(\int\limits_{\omega_i} u(x)dx \right)^2 + \frac{n}{2N^2} \int\limits_K \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2(x)dx.$$

Используя это неравенство, имеем

$$\|u^p - u^q\|_{L_2(K)}^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N^n} \frac{1}{|\omega_i|} \left(\int\limits_{\omega_i} (u^p - u^q)dx \right)^2 + \frac{n}{2N^2} \sum_{k=1}^{n} \|u_{x_k}^p - u_{x_k}^q\|_{L_2(K)}^2. \quad \text{(IV.9)}$$

Из ограниченности последовательности в $H^1(K)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое большое N, что

$$\frac{n}{2N^2} \sum_{k=1}^{n} \|u_{x_k}^p - u_{x_k}^q\|_{L_2(K)}^2 < \varepsilon$$

для всех p, q. Покажем, что

$$\int_{\omega_i} (u^p(x) - u^q(x))dx \to 0, \quad p, q \to \infty,$$

тогда из IV.9 будет следовать, что последовательность $\{u^k\}$ сходится в $L_2(K)$ и теорема доказана. Действительно, введем в пространстве $L_2(K)$ линейные ограниченные функционалы f_i действующие по формуле

$$\langle u, f_i \rangle = \int_{\omega_i} u(x)dx.$$

Но поскольку последовательность $\{u^k\}$ слабо сходиться, и соответственно слабо фундаментальна, то для всех i

$$\int_{\omega_i} (u^p - u^q)dx = \langle u^p - u^q, f_i \rangle \to 0, \quad p, q \to \infty.$$

$\square$

Оказывается, что пространство Соболева достаточно высокого порядка имеет вложение в пространство непрерывных функций более низкого порядка, зависящего от размерности пространства. Эта связь устанавливается теоремой вложения Соболева.

Теорема 5.2 (теорема вложения Соболева)**.** *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^k$, где $k > n/2$. Тогда любая функция $f \in H^l(Q)$, где $l < k - 2/n$, почти всюду в Q совпадает с некоторой функцией $g \in C^l(\overline{Q})$, при этом выполняется неравенство*

$$\|g\|_{C^l(\overline{Q})} \le C\|f\|_{H^k(Q)}.$$

Доказательство. Для любой финитной в $\mathbb{R}^n$ и бесконечно дифференцируемой функции h выполняется неравенство

$$\sum_{|\alpha| \le l} \max_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha h(x)| \le C_1 \|h\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}. \tag{IV.10}$$

Используя обратное преобразование Фурье, имеем

$$h(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{h}(\xi) d\xi.$$

Поскольку наша функция h бесконечно дифференцируемая, то для любого m выполняется неравенство

$$|\hat{h}(\xi)| \leq C(m)(1+|\xi|)^{-m},$$

где константа $C(m)$ не зависит от ξ. Это дает нам право дифференцировать

$$D^\alpha h(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(i\xi)^\alpha \hat{h}(\xi) d\xi.$$

Далее имеем оценки

$$|D^\alpha h(x)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi\alpha||\hat{h}(xi)| d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\hat{h}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{k/2}|\xi^\alpha|(1+|\xi|^2)^{-k/2} d\xi \leq$$

$$\leq C_1 (2\pi)^{-n/2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\hat{h}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^k d\xi \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left((2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi\alpha|^2 (1+|\xi|^2)^{-k} d\xi \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C_2 \|h\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi\alpha|^2 (1+|\xi|^2)^{-k} d\xi \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq\leq C_2 \|h\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{|\alpha|-k} d\xi \right)^{1/2}.$$

Поскольку в условиях теоремы $|\alpha| \leq l$, то имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{|\alpha|-k} d\xi < \infty.$$

Поэтому

$$|D^\alpha h(x)| \leq C_\alpha \|h\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда, очевидно, следует (IV.10).

Пусть теперь $Q' \subset \mathbb{R}^n$ такая область, что $\overline{Q} \subset Q'$. Через $F \in H^k(Q')$ обозначим финитное продолжение функции f в Q', при чем

$$\|F\|_{H^k(Q')} \leq C_3 \|f\|_{H^k(Q)}.$$

Рассмотрим такую последовательность $\{\varphi_k\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ финитных функций, что

$$\|F - \varphi_k\|_{H^k(Q')} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поскольку последовательность $\{\varphi_k\}$ является фундаментальной в $H^k(Q')$, то в силу оценки (IV.10) имеем

$$\|\varphi_k - \varphi_m\|_{C^l(\overline{Q}')} = \sum_{|\alpha| \leq l} \max_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi_k - D^\alpha \varphi_m| \leq$$

$$C_1 \|\varphi_k - \varphi_m\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} = C_1 \|\varphi_k - \varphi_m\|_{H^k(Q')} \to 0, \ k, m \to \infty.$$

Следовательно, эта последовательность сходится в $C^l(\overline{Q}')$ к некоторой функции $g \in C^l(\overline{Q}')$.

Покажем, что функции f и g совпадают почти всюду в Q. Из сходимости последовательности в $C^l(\overline{Q}')$ к g, то эта последовательность сходится к g и в $L_2(Q)$. С другой стороны, эта же последовательность сходится к f в $L_2(Q)$. Поэтому $f = g$ в $L_2(Q)$, следовательно, $f(x) = g(x)$ п.в. в Q.

Поскольку имеет место оценка

$$\|\varphi_k\|_{C^l(\overline{Q}')} \leq C_1 \|\varphi_k\|_{H^k(Q')},$$

то отсюда следует

$$\|g\|_{C^l(\overline{Q}')} \leq C_1 \|F\|_{H^k(Q')}.$$

Следовательно,

$$\|g\|_{C^l(\overline{Q})} \leq C_1 \|f\|_{H^k(Q)}.$$

$\square$

6. Пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ и следы

Функции из пространства Соболева, как элементы пространств $L_2(Q)$, представляют собой классы функций, определенные с точностью до множества меры нуль. Поэтому нельзя говорить о значении этих функций в отдельной точке. С другой стороны краевые задачи математической физики требуют вычисления значений функции на заданных множествах. Для корректного определения значений функций на подмножествах используется понятие следа функции.

Через $\Gamma \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим замкнутое ограниченное гладкое многообразие размерности $n-1$. В частности, в качестве Γ может выступать граница области ∂Q.

Пусть функция $f \in C(\overline{Q})$, тогда эта функция определена в каждой точке. Следом этой функции на Γ называется сужение на множестве Γ. След функции обозначается $f|_\Gamma$.

Чтобы ввести понятие следа для функции из пространства Соболева докажем следующую теорему.

Теорема 6.1. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей, $f \in H^1(Q)$, $\Gamma \subset \overline{Q}$ — гладкая, ограниченная $n-1$-мерная поверхность. Для любой последовательности $\{f^m\} \subset C^1(\overline{Q})$ такой, что*

$$\|f^m - f\|_{H^1(Q)} \to 0, m \to \infty,$$

Последовательность $\{f^m|_\Gamma\}$ сходится в $L_2(\Gamma)$. При этом

$$\|\varphi\|_{L_2(\Gamma)} \le C\|f\|_{H^1(Q)},$$

где φ является пределом последовательности $\{f^m|_\Gamma\}$ Кроме того, функция φ не зависит от выбора последовательности $\{f^m|_\Gamma\}$.

Доказательство. Поверхность Γ можно разбить на конечное число поверхностей Γ_i, каждая из которых представляется в виде однозначного графика функции[3]

$$x_n = \varphi(x'), \quad \varphi \in C^1(\overline{D}),$$

где D — однозначная проекция Γ_i на плоскость $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Потому без ограничения общности, будем считать, что сама поверхность Γ удовлетворяет этому условию.

В силу ограниченности множества Q существует такой куб

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < a, i = 1, 2 \ldots, n\},$$

что $\overline{Q} \subset K$. Для функции $f \in H^1(Q)$ существует такая последовательность финитных в K функций $\{f^m\} \subset C^1(\overline{K})$, что

$$\|f^m - f\|_{H^1(Q)} \to 0, \quad m \to \infty.$$

[3]Разумеется, что в случае необходимости нужно изменить номера переменных

Обозначим $g(x) = f^m(x) - f^l(x)$. Функция $g \in C^1(\overline{K})$ финитная в K, конечно, зависит от m и l.

Используя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$g|_\Gamma(x) = g(x', \varphi(x')) = \int\limits_{-a}^{\varphi(x')} \frac{\partial g(x', s_n)}{\partial s_n} ds_n.$$

Отсюда получаем

$$|g|_\Gamma(x)|^2 \leq (\varphi(x') - a) \int\limits_{-a}^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial g(x', s_n)}{\partial s_n} \right|^2 ds_n \leq 2a \int\limits_{-a}^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial g(x', s_n)}{\partial s_n} \right|^2 ds_n.$$

Умножим это неравенство на функцию $\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \cdots + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ и проинтегрируем по множеству D. В результате получаем оценку

$$\|g|_\Gamma\|_{L_2(\Gamma)}^2 \leq C_1 \|g\|_{H^1(Q)}^2.$$

или

$$\|f^m|_\Gamma - f^l|_\Gamma\|_{L_2(\Gamma)}^2 \leq C_1 \|f^m - f^l\|_{H^1(Q)}^2 \to 0, \ m, l \to \infty.$$

Следовательно существует предел

$$\lim_{m \to \infty} f^m|_\Gamma = h \in L_2(\Gamma)$$

и

$$\|h\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_1 \|f\|_{H^1(Q)}.$$

Покажем теперь, что этот предел не зависит от аппроксимирующей последовательности. Возьмем любую другую последовательность $\{\tilde{f}^m\} \subset C^1(\overline{K})$, которая аналогична последовательности $\{f^m\}$. Предел последовательности $\{\tilde{f}^m\}$ обозначим через $\tilde{h}$. Имеем

$$\|h - \tilde{h}\|_{L_2(\Gamma)} = \|h - f^m + f^m - \tilde{f^m} + \tilde{f}^m - \tilde{h}\|_{L_2(\Gamma)} \leq$$

$$\|h - f^m|_\Gamma\|_{L_2(\Gamma)} + \|f^m|_\Gamma - \tilde{f^m}|_\Gamma\|_{L_2(\Gamma)} + \|\tilde{f}^m|_\Gamma - \tilde{h}\|_{L_2(\Gamma)} \leq$$

$$\leq C_2 (\|f - f^m\|_{H^1(Q)} + \|f^m - \tilde{f^m}\|_{H^1(Q)} + \|\tilde{f}^m - \tilde{f}\|_{H^1(Q)}) \to 0, \ m, l \to \infty.$$

Следовательно, $h = \tilde{h}$ в $L_2(\Gamma)$. $\square$

Теперь следом функции $f \in H^1(Q)$ на поверхности Γ называется функция $h \in L_2(\Gamma)$, определенная в предыдущей теореме. Будем использовать обозначение

$$f|_\Gamma = h(x), \quad x \in \Gamma.$$

Заметим, что для функции $f \in L_2(\Gamma)$ след не определяется. Также для функции $f \in H^1(Q)$, где Q — область в n-мерном пространстве, след не определяется на множествах $n-2$. На пример для функции двух переменных нельзя, вообще говоря, определить след в точке.

Введем важнейшее в теории дифференциальных уравнений в частных производных пространство $\mathring{H}^1(Q)$ как пополнение множества $\dot{C}^\infty(Q)$ по норме $H^1(Q)$. Это пространство не совпадает с $H^1(Q)$, потому что для любой $u \in \mathring{H}^1(Q)$ имеем[4]

$$u|_{\partial Q} = 0.$$

На самом деле, верно и обратное, поэтому пространство $\mathring{H}^1(Q)$ можно определить и следующим образом

$$\mathring{H}^1(Q) = \{u \in H^1(Q) : u|_{\partial Q} = 0\}.$$

Понятие следа функции позволяет доказать формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_Q u_{x_i} v dx = \int\limits_{\partial Q} u|_{\partial Q} v|_{\partial Q} n_i dS - \int\limits_Q u v_{x_i} dx,$$

где $n_i = \cos(n, x_i)$ — косинус угла внешней нормали n к поверхности ∂Q и осью x_i.

Эта формула хорошо известна в случае, когда $u, v \in C^1(\overline{Q})$. При $u, v \in H^1(Q)$ эта формула следует из плотности множества $C^1(\overline{Q})$ в пространстве $H^1(Q)$ и определения следа функции.

7. Связь с конечными разностями

Мы определили обобщенные производные минуя предельный переход отношения приращения функции к приращению аргумента.

[4]Мы полагаем, что область Q является ограниченной с гладкой границей.

Однако между обобщенными производными и конечно-разностными отношениями существует тесная связь. Результаты настоящего параграфа представляют самостоятельный интерес и будут использованы при исследовании гладкости обобщенных решений.

Будем рассматривать функции, определенные в области $Q \subset \mathbb{R}^n$. Через e_i обозначим единичный орт i-ой оси. Для $h \neq 0$ определим конечно-разностное отношение в направлении i-ой оси по следующей формуле

$$\Delta_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}.$$

Теорема 7.1. *Пусть $u \in H^1(Q)$, тогда для любой $Q' \subset Q$ такой, что $\overline{Q}' \subset Q$, при $h < \operatorname{dist}(Q', \partial Q)$ имеет место оценка*

$$\|\Delta_k^h u\|_{L_2(Q')} \leq \|u_{x_k}\|_{L_2(Q)}. \tag{IV.11}$$

Доказательство. Пусть дополнительно $u \in C(\overline{Q})$. Тогда

$$\Delta_k^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_0^h u_{x_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, x + s, x_{k+1}, \dots, x_n) ds.$$

Далее имеем

$$|\Delta_k^h u(x)| \leq \frac{1}{h} \sqrt{\int\limits_0^h ds} \sqrt{\int\limits_0^h |u_{x_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, x + s, x_{k+1}, \dots, x_n)|^2 ds}.$$

Возводя это неравенство в квадрат получаем

$$|\Delta_k^h u(x)|^2 \leq \frac{1}{h} \int\limits_0^h |u_{x_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, x + s, x_{k+1}, \dots, x_n)|^2 ds.$$

Проинтегрируем это неравенство по множеству Q' и получим

$$\int\limits_{Q'} |\Delta_k^h u(x)|^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} \int\limits_0^h \int\limits_{B_h(Q')} |u_{x_k}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x+s, x_{k+1}, \ldots, x_n)|^2 dxds,$$

где $B_h(Q') = \{x : \mathrm{dist}(x, Q') < h\}$. Последний интеграл оценивается через $\int\limits_Q |u_{x_k}|^2 dx$. В итоге получаем (IV.11).

В общем случае, когда $u \in H^1(Q)$ этот результат обобщается в силу плотности гладких функций в $H^1(Q)$. □

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 7.2. *Пусть* $u \in L_2(Q)$. *Если для всех областей* $Q' \subset Q$, $\overline{Q}' \subset Q$ *и* $h > 0$ *таких, что* $h < \mathrm{dist}(Q', \partial Q)$ *существует такая константа* C, *что*

$$\|\Delta_k^h u\|_{L_2(Q)} \leq C,$$

тогда $u_{x_k} \in L_2(Q)$ *и*

$$\|u_{x_k}\|_{L_2(Q)} \leq C. \tag{IV.12}$$

Доказательство. Выберем какую-либо числовую последовательность $\{h_m\}$ такую, что $0 < h_m < h$ и $h_m \to 0$ и построим последовательность функций

$$\{\Delta_k^{h_m} u\} \subset L_2(Q').$$

Эта последовательность будет слабо предкомпактной в $L_2(Q')$, поэтому без ограничения общности можно считать, что эта последовательность слабо сходится к $v \in L_2(Q)$. Следовательно, для всех $\varphi \in \dot{C}^\infty(Q)$ имеет место

$$\int\limits_Q \varphi \Delta_k^{h_m} u dx \to \int\limits_Q \varphi v dx, \quad m \to \infty.$$

В тоже время имеем

$$\int\limits_Q \varphi \Delta_k^{h_m} u dx = -\int\limits_Q u \Delta_k^{-h_m} \varphi dx \to -\int\limits_Q u \varphi_{x_k} dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_Q \varphi v = -\int\limits_Q u \varphi_{x_k} dx,$$

а это означает $v = u_{x_k}$. □

Глава V

Эллиптические уравнения

1. Постановка задачи

В этой главе мы будем рассматривать эллиптические уравнения второго порядка в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial Q \in C^1$, допуская также и цилиндрические области, в которых также верны все теоремы относительно пространств Соболева, доказанные в предыдущей главе.

Основное уравнение, которое мы будем исследовать выглядит следующим образом

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + c_0(x) u(x) = f(x), \tag{V.1}$$

где $x \in Q$, $a_{ij}, b_i, c_0 \in C(\overline{Q})$ — вещественные коэффициенты уравнения, $f \in L_2(Q)$ — правая часть уравнения, известная вещественнозначная функция[1]. Функция $u(x)$ *обозначает* искомое решение уравнения. Мы пока не называем функцию $u(x)$ решением, поскольку для этого нужно определить, что мы будем понимать под решением этой задачи.

[1] Для простоты мы будем рассматривать вещественнозначные решения.

Для уравнения (V.1) нужно задать краевые условия. Уравнение, рассматриваемое вместе с краевыми условиями, будем называть краевой задачей. Мы рассмотрим две краевые задачи:

Задача Дирихле, которая также называется первой краевой задачей

$$u|_{\partial Q}(x) = 0, \quad x \in \partial Q, \tag{V.2}$$

и задачу Неймана, которая называется второй краевой задачей

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial Q}(x) = 0, \quad x \in \partial Q, \tag{V.3}$$

где n — вектор внешней нормали к границе области, $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$.

Рассматривают также и третью краевую задачу, которая является комбинацией первой и второй краевых задач

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial Q}(x) + \sigma(x) u|_{\partial Q} = 0,$$

где $\sigma(x)$ — известная функция.

Мы будем рассматривать только первую и вторую краевые задачи.

Для того, чтобы уравнение (V.1) было эллиптическим уравнением, нам необходимо наложить определенные условия на его коэффициенты. Для эллиптичности роль играют только коэффициенты при старших членах a_{ij}. Мы будем предполагать, что $a_{ij} = a_{ji}$ и существует такая константа $C_A > 0$, что выполнено условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C_A|\xi|^2, \quad x \in \overline{Q}, \tag{V.4}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, при этом константа C_A не зависит от x и от ξ. Уравнения, для которых выполнено условие (V.4) называются сильно эллиптическими.

Подход к изучению дифференциальных уравнений в частных производных с помощью пространств Соболева подразумевает использование обобщенных решений.

Определение 1.1. Обобщенным решением задачи Дирихле (V.1),(V.2) называется функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i u v_{x_i} + c_0 u v \right) dx = \int\limits_Q f v dx \tag{V.5}$$

для любой $v \in \mathring{H}^1(Q)$.

Аналогичное определение для задачи Неймана.

Определение 1.2. Обобщенным решением задачи Неймана (V.1),(V.4) называется функция $u \in H^1(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству (V.5) для любой $v \in H^1(Q)$.

Термин «обобщенное решение» означает, что если функция $u \in C^2(\overline{Q})$ удовлетворяет уравнению (V.1) и соответствующему краевому условию, то такая функция будет и обобщенным решением, в чем несложно убедиться умножением уравнения (V.1) на любую функцию $\mathring{H}^1(Q)$, интегрированием по области Q и интегрированием по частям.

Основная особенность обобщенных решений состоит в том, что они обладают гладкостью меньшей, чем порядок дифференциального уравнения. При этом возникает вопрос — возможно ли еще уменьшить необходимую гладкость для обобщенных решений? Технически это возможно, для этого необходимо проинтегрировать по частям еще раз, перебросив все производные на пробную функцию v, потребовав большей гладкости от этой функции. Однако в этом случае невозможно будет удовлетворить краевым условиям и доказать теоремы о единственности обобщенных решений.

Заметим, что для задачи Дирихле краевое условие «зашито» в функциональном пространстве $\mathring{H}^1(Q)$, которому принадлежит обобщенное решение по определению, а функции из этого пространства, как раз, имеют нулевой след на границе области.

Более интересная ситуация для задачи Неймана. Здесь обобщенное решение принадлежит пространству $H^1(Q)$, а функции из этого пространства, вообще говоря, не удовлетворяют условию (V.3). Однако при интегрировании по частям (в случае гладкого решения) возникает интеграл от следа пробной функции и нормальной производной от решения. Если решение не будет удовлетворять условию (V.3), то не для всех пробных функций этот интеграл будет равен нулю. Поэтому обобщенное решение задачи Неймана будет удовлетворять краевому условию, но только в обобщенном смысле, поскольку нормальная производная от функции из пространства $H^1(Q)$, вообще говоря, не имеет след на границе.

2. Коэрцитивные формы

Для доказательства однозначной разрешимости нам потребуется аппарат коэрцитивных билинейных форм. Используемая нами абстракция позволит нам отделить технические сложности от идеологии дифференциальных уравнений в частных производных.

Пусть V — гильбертово пространство над полем действительных чисел. Числовой функционал, заданный на прямом произведении пространств V

$$a : V \times V \to \mathbb{R}$$

называется билинейной формой, если для любых $u, v, w \in V$ выполнены равенства

$$a(u + v, w) = a(u, w) + a(v, w),$$

$$a(u, v + w) = a(u, v) + a(u, w).$$

Кроме того, для любых $u, v \in V$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено

$$a(\lambda u, v) = \lambda a(u, v),$$

$$a(u, \lambda v) = \lambda a(u, v).$$

Билинейная форма называется симметрической, если для любых $u, v \in V$

$$a(u, v) = a(v, u).$$

Под формой мы всегда будем понимать билинейную форму.

Мы будем рассматривать только ограниченные формы, не оговаривая это специально. Форма называется ограниченной, если существует такая константа $M > 0$, что

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|,$$

для всех $u, v \in V$, причем константа M от u и v не зависит.

Форма называется коэрцитивной, если для всех $u \in V$ существует константа $m > 0$ такая, что

$$a(u, u) \geq m\|u\|_V^2.$$

Примером коэрцитивной формы является скалярное произведение

$$a(u, v) = (u, v)_V.$$

Для установления связи между коэрцитивными формами и эллиптическими уравнениями рассмотрим билинейную форму в пространстве $H^1(Q)$[2]

$$a(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{Q}a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j}dx+\int\limits_{Q}b(x)uvdx+\int\limits_{\partial Q}c(x)u|_{\partial Q}v|_{\partial Q}dS,$$

где $a_{ij}, b\in C(\overline{Q})$, $c\in C(\overline{Q})$.

Очевидно, что эта форма является билинейной. Покажем, что при некоторых условиях эта форма является коэрцитивной.

Теорема 2.1. *Пусть коэффициенты a_{ij} удовлетворяют условию (V.4) и $b(x)\geq 0$, $c(x)\geq 0$, причем $b\not\equiv 0$ при $x\in\overline{Q}$ или $c\equiv 0$ при $x\in\partial Q$. Тогда форма a является ограниченной, коэрцитивной формой в пространстве $H^1(Q)$.*

Доказательство. Ограниченность формы следует из неравенств Коши-Буняковского и очевидных оценок $\|u_{x_i}\|_{L_2(Q)}\leq\|u\|_{H^1(Q)}$

$$|a(u,v)|^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}\|^2_{L_2(Q)}\|u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}\|v_{x_j}\|^2_{L_2(Q)}+$$

$$+\|b\|^2_{L_2(Q)}\|u\|^2_{L_2(Q)}\|v\|^2_{L_2(Q)}+\|c\|^2_{L_2(\partial Q)}\|u\|^2_{L_2(\partial Q)}\|v\|^2_{L_2(\partial Q)}\leq$$
$$\leq C_1\|u\|^2_{H^1(Q)}\|v\|^2_{H^1(Q)}.$$

Докажем коэрцитивность формы a. Предположим, что форма не является коэрцитивной. Это означает, что существует такая последовательность $\{u^k\}\subset H^1(Q)$, что

$$0\leq ka(u^k,u^k)<\|u^k\|^2_{H^1(Q)}.$$

Построим новую последовательность $v^k=u^k\|u^k\|_{H^1(Q)}$, для которой верно $\|v^k\|_{H^1(Q)}=1$ и

$$a(v^k,v^k)<\frac{1}{k}.$$

В форме a каждое из слагаемых неотрицательно, поэтому

$$C_A\int\limits_{Q}|\nabla v^k|^2dx\leq\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{Q}a_{ij}v^k_{x_i}v^k_{x_j}dx<\frac{1}{k}.$$

[2]Напомним, что здесь и далее везде область $Q\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей, если не оговорено отличное.

Кроме того,

$$\int\limits_Q b|v^k|^2dx < \frac{1}{k}, \quad \int\limits_{\partial Q} c|v^k|^2dS < \frac{1}{k}.$$

Поскольку последовательность элементов $\{v^k\}$ является ограниченной в $H^1(Q)$, то по теореме Реллиха-Гординга из этой последовательности можно извлечь сходящуюся в $L_2(Q)$ подпоследовательность. Без ограничения общности, можно считать, что сама последовательность $\{v^k\}$ сходится в $L_2(Q)$. Имеем

$$\|v^k - v^m\|^2_{H^1(Q)} = \|v^k - v^m\|^2_{L_2(Q)} + \||\nabla(v^k - v^m)|\|^2_{L_2(Q)} \leq$$

$$\leq \|v^k - v^m\|^2_{L_2(Q)} + 2\||\nabla v^k|\|^2_{L_2(Q)} + 2\||\nabla v^m|\|^2_{L_2(Q)} \leq$$

$$\leq \|v^k - v^m\|^2_{L_2(Q)} + \frac{C_2}{k} + \frac{C_3}{m} \to 0, \quad k, m \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $\{v^k\}$ фундаментальна в $H^1(Q)$ и, соответственно имеет предел $v \in H^1(Q)$.

С помощью предельного перехода мы получаем следующие равенства

$$\begin{gathered} \|v\|_{H^1(Q)} = 1, \quad \int\limits_Q |\nabla v|^2dx = 0, \\ \int\limits_Q b|v|^2dx = 0, \quad \int\limits_{\partial Q} c|v|_{\partial Q}|^2dS = 0. \end{gathered} \tag{V.6}$$

Из второго равенства следует, что $|\nabla v| = 0$ почти всюду в Q, поэтому функция v является константой в Q. В этом случае из первого равенства получаем, что

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{|Q|}}.$$

Поэтому и след этой функции равен

$$v|_{\partial Q} = \frac{1}{\sqrt{|Q|}}.$$

Однако если $b \not\equiv 0$, то возникает противоречие с третьим равенством в (V.6), а если $c \not\equiv 0$, то с четвертым равенством в (V.6).

Полученное противоречие показывает, что в условиях теоремы форма a является коэрцитивной. $\square$

В условиях теоремы 2.1 для некоторой формы a в пространстве $H^1(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение

$$(u,v)'_{H^1(Q)} = a(u,v).$$

Кроме того, в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение

$$(u,v)'_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_Q a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j}\, dx + \int\limits_Q b(x) uv dx.$$

В частности,

$$(u,v)'_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} = \int\limits_Q \nabla u \nabla v dx.$$

От сюда следует неравенство

$$\|u\|^2_{H^1(Q)} \leq C \int\limits_Q |\nabla u|^2 dx,$$

верное для $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, которое называется неравенство Фридрихса.

3. Существование и единственность обобщенных решений

Введем понятие абстрактной эллиптической задачи с помощью коэрцитивных форм. Пусть V, H — гильбертовы пространства, причем

$$V \subset H,$$

где вложение плотное и непрерывное.

Пусть $a(u,v)$ коэрцитивная форма на пространстве V. Для любого фиксированного $f \in H$ рассмотрим абстрактную эллиптическую задачу, которая состоит в нахождении элемента $u \in V$ такого, что

$$a(u,v) = (f,v)_H,$$

для всех $v \in V$.

Теорема 3.1. *Пусть a — коэрцитивная форма. Тогда для любого $f \in H$ существует единственное решение $u \in V$ абстрактной эллиптической задачи. Причем*

$$\|u\|_V \leq C\|f\|_H.$$

Доказательство. Поскольку форма a, являясь коэрцитивной, задает эквивалентное скалярное произведение в V, то решением абстрактной эллиптической задачи будет функция $u \in V$, которая удовлетворяет равенству

$$(u, v)_V = (f, v)_H$$

для любой $v \in V$.

При фиксированном $f \in H$ мы имеем линейный по v функционал $(f, v)_H$, заданный на V. Этот функционал ограничен

$$|(f, v)_H| \leq \|f\|_H \|v\|_H \leq C_1 \|f\|_H \|v\|_V \leq C_2 \|v\|_V.$$

Здесь мы использовали неравенство $\|\cdot\|_H \leq C_1\|\cdot\|_V$, следующее из непрерывного вложения V в H.

Согласно теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве существует единственный элемент $F \in V$, такой что

$$(f, v)_H = (F, v)_V$$

для всех $v \in V$. Таким образом, существует ограниченный оператор

$$A : H \to V$$

такой, что

$$(Af, v)_V = (f, v)_H.$$

Поэтому $u = Af$ есть единственное решение абстрактной эллиптической задачи и

$$\|u\|_V = \|Af\|_V \leq C_3 \|f\|_H.$$

$\square$

Далее, в этом разделе мы рассмотрим эллиптическое уравнение (V.1) в котором $b_i = 0$ и $c(x) \geq 0$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) + c_0(x) u(x) = f(x),$$

которое будем рассматривать с краевыми условиям Дирихле или Неймана.

Теорема 3.2. *Пусть $c(x) \geq 0$, тогда для любой $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(Q)$ задачи Дирихле. Причем*
$$\|u\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leq C\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Доказательство. В условиях теоремы форма на $\mathring{H}^1(Q)$

$$a(u,v) = \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}(x)v_{x_j}(x)dx + \int\limits_Q c_0(x)u(x)v(x)dx$$

является коэрцитивной и задает эквивалентное в $\mathring{H}^1(Q)$ скалярное произведение.

Рассматриваемая задача может быть переформулирована как абстрактная эллиптическая задача для формы a, к которой применима теорема 3.1. □

Аналогично доказывается и теорема о разрешимости задачи Неймана.

Теорема 3.3. *Пусть $c(x) \geq 0$ и $c \not\equiv 0$, тогда для любой $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u \in H^1(Q)$ задачи Неймана. Причем*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leq C\|f\|_{L_2(Q)}.$$

4. Фредгольмова разрешимость

В предыдущем разделе мы доказали однозначную разрешимость задач Дирихле и Неймана, но при этом наложили определенные ограничения на коэффициенты, в частности, положили $b_i = 0$. Сейчас мы рассмотрим эллиптические задачи, без ограничений на коэффициенты, кроме принадлежности их $C(\overline{Q})$. Правда, в этом случае у нас вместо однозначной разрешимости получится фредгольмова разрешимость.

В начале рассмотрим обобщение абстрактных эллиптических задач. Пусть на гильбертовы пространства H, V наложим условие: оператор вложения V в H будем предполагать вполне непрерывным, то есть ограниченное в V множество будет предкомпактным в H.

Пусть a — коэрцитивная форма на V. Дополнительно рассмотрим еще одну билинейную форму b на V, которую мы не будем предполагать коэрцитивной. Относительно этой формы мы будем предполагать выполненной оценку

$$|b(u,v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_V.$$

Рассмотрим следующую абстрактную эллиптическую задачу: для любого фиксированного $f \in H$ найти такой элемент $u \in V$, что

$$a(u,v) + b(u,v) = (f,v)_H \tag{V.7}$$

для каждой $v \in V$.

Теорема 4.1. *Если абстрактная эллиптическая задача* (V.7) *не может иметь более одного решения, то она имеет решение.*

Доказательство. Доказательство теоремы сводится к альтернативе Фредгольма.

Введем в пространстве V эквивалентное скалярное произведение с помощью коэрцитивной формы a

$$(u,v)_V = a(u,v).$$

Пусть $u \in H$, рассмотрим функционал над пространством V

$$\Phi_u(v) = b(u,v).$$

Согласно теореме Рисса существует такой элемент $w \in V$, что

$$\Phi_u(v) = (w,v)_V.$$

Поэтому мы имеем ограниченный оператор

$$B : H \to V$$

такой, что

$$b(u,v) = (Bu,v)_V.$$

Поскольку вложение $V \subset H$ компактно, то оператор

$$B : V \to V$$

является компактным оператором.

Далее, для фиксированного $f \in H$ существует такой элемент $F \in V$, что

$$(f, v)_H = (F, v)_V.$$

Уравнение

$$a(u, v) + b(u, v) = (f, v)_H$$

эквивалентно следующему уравнению

$$(u, v)_V + (Bu, v)_V = (F, v)_V$$

или операторному уравнению

$$u + Bu = F$$

в пространстве V. Последнее уравнение удовлетворяет альтернативе Фредгольма, поскольку мы имеем сумму единичного и компактного операторов. Следовательно, из теоремы Фредгольма мы получаем утверждение теоремы. $\square$

Применим теперь полученный абстрактный результат для задачи Дирихле и Неймана.

Рассмотрим задачу Дирихле для эллиптического уравнения. Положим $H = L_2(Q)$, $V = \mathring{H}^1(Q)$. Коэрцитивную форму введем по следующей формуле

$$a(u, v) = a(u, v) = \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i}(x) v_{x_j}(x) dx.$$

Форму b следующим образом

$$b(u, v) = -\int\limits_Q \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u(x) v_{x_i}(x) dx + \int\limits_Q c(x) u(x) v(x) dx.$$

Обобщенное решение задачи Дирихле будет эквивалентно абстрактной эллиптической задачи, и имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2. *Если задача Дирихле* (V.1),(V.2) *не может имеет более одного обобщенного решения, она имеет обобщенное решение.*

Для задачи Неймана мы положим $H = L_2(Q)$, $V = H^1(Q)$. Формы a и b вводятся аналогично, и наша задача сводится к абстрактной эллиптической задаче.

Теорема 4.3. *Если задача Неймана* (V.1),(V.3) *не может имеет более одного обобщенного решения, она имеет обобщенное решение.*

5. Гладкость обобщенных решений

Мы уже отмечали, что обобщенные решения априорно принадлежать пространству Соболева первого порядка тогда, как мы дифференциальные уравнения второго порядка. На самом деле в случае определенной гладкости границы области можно доказать, что обобщенные решения принадлежат пространству Соболева второго порядка.

Мы рассмотрим задачу Дирихле для следующего эллиптического уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right) = f(x), \quad x \in Q,$$

где коэффициенты a_{ij} являются вещественными числами такими, что выполнено условие эллиптичности (V.4).

Сначала мы установим гладкость обобщенного решения внутри области, а затем и вплоть до границы области.

Теорема 5.1. *Пусть u — обобщенное решение задачи Дирихле. Тогда для любой области Q' такой, что $\overline{Q}' \subset Q$*

$$u \in H^2(Q').$$

Доказательство. В интегральном тождестве, определяющем обобщенное решение

$$\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}(x)v_{x_j}(x)dx = \int\limits_Q f(x)v(x)dx$$

мы можем взять $v \in C^1(Q)$, $\operatorname{supp} v = \overline{Q}'$. Для ненулевой величины h такой, что

$$2|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \partial Q)$$

заменим функцию v ее конечной разностью

$$v \mapsto \Delta_k^{-h}v \quad k = 1, \dots, n.$$

Получаем в интегральном тождестве

$$\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}\Delta_k^{-h}v_{x_j}dx = -\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Delta_k^{h}u_{x_i}v_{x_j}dx = \int\limits_Q f\Delta_k^{-h}vdx.$$

Отсюда получаем оценку

$$\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\Delta_k^h u)_{xi} v_{x_j} dx \le C_1 \|f\|_{L_2(Q)} \||\nabla v|\|_{L_2(Q)}. \qquad \text{(V.8)}$$

Пусть $\xi \in \dot{C}^\infty(Q)$ такая, что $0 \le \xi \le 1$. Положим $v = \xi^2 \Delta_k^h u$. Используя (V.4) получаем

$$C_A \int\limits_Q |\xi \nabla(\Delta_k^h u)|^2 dx \le \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n \xi^2 a_{ij}(\Delta_k^h u)_{xi} \Delta_k^h u_{x_j} dx =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\Delta_k^h u)_{x_i}(v_{x_j} - 2\Delta_k^h u \xi \xi_{x_j}) dx =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\Delta_k^h u)_{x_i} v_{x_j} dx - \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\Delta_k^h u)_{x_i} 2\Delta_k^h u \xi \xi_{x_j}) dx.$$

Используя оценку (V.8) и теорему 7.1, получаем

$$\int\limits_Q |\xi \nabla(\Delta_k^h u)|^2 dx \le C_2 \|f\|_{L_2(Q)} (\||\xi \nabla \Delta_k^h u|\|_{L_2(Q)} + \||\Delta_k^h u \nabla \xi|\|_{L_2(Q)})$$

Обозначим через $\Lambda = \||\xi \nabla \Delta_k^h u|\|_{L_2(Q)}$. Тогда имеем

$$\Lambda^2 \le \alpha\Lambda + \beta,$$

где $\alpha = C_2 \|f\|_{L_2(Q)}$, $\beta = \alpha \||\Delta_k^h u \nabla \xi|\|_{L_2(Q)}$. Из элементарного неравенства

$$\alpha\Lambda \le \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2$$

следует, что

$$\frac{1}{2}\Lambda^2 \le \frac{1}{2}\alpha^2 + \beta.$$

В итоге получаем

$$\||\xi \nabla \Delta_k^h u|\|_{L_2(Q)} \le \Phi(\|f\|_{L_2(Q)}, \||\Delta_k^h u \nabla \xi|\|_{L_2(Q)}) \le$$

$$\le \Phi(\|f\|_{L_2(Q)}, \||\nabla u|\|_{L_2(Q)} \||\nabla \xi|\|_{L_2(Q)}).$$

где Φ некоторая квадратичная функция.

Пусть теперь ξ такая, что $\xi(x) = 1$ при $x \in Q'$. При этом градиент этой функции может быть оценен

$$\||\nabla\xi|\|_{L_2(Q)} \le C_3 d,$$

где $d = \mathrm{dist}(\partial Q, \overline{Q}')$.

Учитывая, что $u \in H^1(Q)$ мы в итоге получаем оценку

$$\||\xi\nabla\Delta_k^h u|\|_{L_2(Q)} \le C_4,$$

где $C_4 > 0$ не зависит от h, поэтому в силу теоремы 7.2 мы получаем, что

$$u \in H^2(Q').$$

$\square$

Если граница области Q обладает нужной гладкостью, то можно доказать гладкость обобщенных решений вплоть до границы.

Теорема 5.2. *Пусть u — обобщенное решение задачи Дирихле в области Q, имеющей границу $\partial Q \in C^2$, тогда $u \in H^2(Q)$.*

Доказательство. В силу теоремы 5.1 нам необходимо показать, что для любой точки $x^0 \in \partial C$ существует такой шар $B = B_r(x^0)$, что в области $B \cap Q$ функция u принадлежит пространству $H^2(B \cap Q)$.

В силу гладкости границы существует такое взаимно однозначное отображение ψ шара B на некоторое открытое множество $D \subset \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\psi(B \cap Q) \subset \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\},\ \psi(B \cap \partial Q) \subset \partial\mathbb{R}^n_+,$$

причем $\psi \in C^2(B)$ и $\psi^{-1} \in C^2(D)$.

Выберем такое $R > 0$, что $\overline{B}_R(x^0) \subset B$. Введем обозначения

$$B^+ = B_R(x^0) \cap Q,$$

$$D' = \psi(B_R(x^0)),\ D^+ = \psi(B^+).$$

Обозначим $v(y) = u(x(y))$. В силу правила дифференцирования сложной функции имеем

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} v_{y_k}(y_k)_{x_i},$$

$$u_{x_ix_j}=\sum_{k,m=1}^{n} v_{y_ky_m}(y_k)_{x_i}(y_m)_{x_j}+\sum_{k=1}^{n} v_{y_k}(y_k)_{x_ix_j}.$$

При отображении $y=\psi(x)$ уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j}=f(x)$$

перейдет в уравнение

$$\sum_{k,m=1}^{n} \tilde{a}_{km}(x(y))v_{y_ky_m}+\cdots=\tilde{f}(y),$$

где многоточием обозначены члены, не зависящие от вторых производных, $\tilde{f}(y)=f(x(y))$ и

$$\tilde{a}_{k,m}(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y_k)_{x_i}(y_m)_{x_j}.$$

При этом условия эллиптичности для нового уравнения сохранятся, поскольку матриц $\tilde{A}(x)=\|\tilde{a}_{ij}(x)\|$ и $A=\|a_{ij}\|$ имеет место соотношение

$$\tilde{A}=JAJ^{-1},$$

где J — якобиан преобразования $J(x)=\left\|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right\|$, $\det J(x)\neq 0$.

Далее, поскольку $u\in \mathring{H}^1(Q)$, то $v\in H^1(D^+)$ и для всех $\xi\in \dot{C}^1(D')$ имеем $\xi v\in \mathring{H}^1(D^+)$. Поэтому можно считать, что функция $u\in H^1(D^+)$ удовлетворяет эллиптическому уравнению в D^+ и $\xi u\in \mathring{H}^1(D^+)$. Следовательно, для $|h|<\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\xi,\partial D')$ и для $1\leq k<n$ мы имеем

$$\xi^2\Delta_k^h u\in \mathring{H}^1(D^+).$$

Рассуждениями, аналогичными в доказательстве теоремы 5.1[3] мы получаем, что

$$u_{x_ix_j}\in L_2(\psi(B\rho(x^0)\cap Q)),$$

для любого $\rho<R$ в случае, когда i или j отличны от n.

[3]Теорема 5.1 нами была доказана для случая постоянных коэффициентов и без членов первого и нулевого порядка, но в результате преобразования мы получили эллиптическое уравнение с переменным коэффициентами и младшими членами. Однако доказательство теоремы 5.1 сохраняется с дополнительными техническими трудностями и в этом случае.

Вторая производная $u_{x_n x_n}$ может быть выражена из уравнения

$$u_{x_n x_n} = L(x, u_{x_i x_j}, u_{x_i}, f)$$

с помощью линейной комбинации (возможно, с гладкими коэффициентами) от функций из $L_2(\psi(B\rho(x^0) \cap Q))$, поэтому

$$u_{x_n x_n} \in L_2(\psi(B\rho(x^0) \cap Q)).$$

С помощью обратного преобразования $\psi^{-1} \in C^2$ получаем, что

$$u \in H^2(B_\rho(x^0) \cap Q).$$

Поскольку $x^0 \in \partial Q$ произвольная, то с учетом теоремы 5.1 мы получаем, что $u \in H^2(Q)$. $\square$

Аналогичные результаты имеют место для задачи Неймана.

Теорема 5.3. *Пусть u — обобщенное решение задачи Неймана в области Q, имеющей границу $\partial Q \in C^2$, тогда $u \in H^2(Q)$.*

Доказательство этой теоремы аналогично теореме 5.2.

6. Эллиптические операторы и спектральные задачи

Рассматривая эллиптические задачи, мы по сути рассматривали интегральные тождества вместо операторных уравнений. Сейчас мы рассмотрим неограниченные линейные операторы, которые соответствуют эллиптическим уравнениям.

Напомним, что мы рассматриваем ограниченную область $Q \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial Q \in C^2$. В пространстве $L_2(Q)$ введем неограниченный линейный оператор

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j}, \quad u \in \mathcal{D}(A),$$

где коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ удовлетворяют условиям эллиптичности. Область определения мы зададим следующей формулой

$$\mathcal{D}(A) = \mathring{H}^1(Q) \cap H^2(Q).$$

Очевидно, что оператор A определен на любом элементе $u \in \mathcal{D}(A)$.

Возьмем любую функцию $f \in L_2(Q)$. Тогда задача Дирихле для уравнения

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j}(x) = f(x),\ x \in Q$$

имеет единственное обобщенное решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$. Согласно теореме 5.2 мы имеем $u \in H^2(Q)$, то есть $u \in \mathcal{D}(A)$. Следовательно, оператор A взаимно однозначно отображает область определения $\mathcal{D}(A)$ на пространство $L_2(Q)$.

Покажем, что так определенный оператор является симметричным оператором. Действительно, для любых $u, v \in \mathcal{D}(A)$ имеем

$$(Au, v)_{L_2(Q)} = -\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} v dx = \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} v_{x_i} dx =$$

$$= -\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} u a_{ij} v_{x_i x_j} dx = (u, Av)_{L_2(Q)}.$$

Поскольку, как мы видели, образ этого оператора $R(A)$ совпадает с H, то наш оператор A является самосопряженным оператором

$$A = A^*.$$

Это уже серьезное утверждение, которое открывает большие возможности для исследования эллиптических уравнений.

Поскольку имеют место оценки

$$\|u\|^2_{L_2(Q)} \leq C_1 \|u\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \leq C_2 \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx = C_2 (Au, u)_{L_2(Q)},$$

то оператор A является положительным оператором.

Рассмотрим обратный оператор

$$A^{-1} : L_2(Q) \to L_2(Q).$$

Этот оператор является непрерывным, поскольку для каждого $f \in L_2(Q)$ существует единственное решение $u \in \mathcal{D}(A)$ и имеет место оценка

$$\|u\|_{L_2(Q)} \leq C_3 \|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \leq C_4 \|f\|_{L_2(Q)}.$$

Более того, поскольку по теореме Реллиха вложение $\overset{\circ}{H}{}^1(Q) \subset L_2(Q)$ компактно, то оператор A^{-1} является компактным, и как обратный к сопряженному, сопряженным. Следовательно, вследствие теоремы Гильберта-Шмидта оператор A имеет счетный спектр конечной кратности

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots, \quad \lambda_k \to \infty, \ k \to \infty,$$

а собственные функции $\{v_k\}$, нормированные $\|v_k\|_{L_2(Q)} = 1$, образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(Q)$.

Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$Au(x) = f(x), \quad x \in Q.$$

Пусть $\{\lambda_k\}$ — собственные значения, а $\{v_k(x)\}$ — собственные функции оператора A. Тогда любая функция $f \in L_2(Q)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, v_k)_{L_2(Q)} v_k(x).$$

Будем искать решение в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x),$$

где $\{a_k\} \in l_2$, то есть такая числовая последовательность, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

Формально подставляя выражение для u в операторное уравнение, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k A v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, v_k)_{L_2(Q)} v_k(x)$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, v_k)_{L_2(Q)} v_k(x).$$

Поскольку собственные функции v_k ортогональны, то получаем

$$a_k = \frac{(f, v_k)_{L_2(Q)}}{\lambda_k}.$$

В итоге мы получаем следующую формулу для решения

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, v_k)_{L_2(Q)}}{\lambda_k} v_k(x).$$

Последнюю формулу можно использовать для приближенного вычисления решения, если конструктивно известны собственные значения и функции эллиптического оператора.

Глава VI

Параболические уравнения

1. Постановка задачи

Параболические уравнения относятся к эволюционными уравнениям в частных производных. Поэтому мы будем рассматривать пространства функций, зависящих от времени. Мы всегда будем рассматривать уравнения на конечном временном интервале. Пусть $0 < T < \infty$, и мы будем рассматривать решения на интервале $(0, T)$.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей. Для эволюционных уравнений возможен и случай $n = 1$. Через Q_T обозначим область $Q_T = (0, T) \times Q$, также будем использовать обозначение $\Gamma_T = (0, T) \times \partial Q$ для боковой границы цилиндра Q_T.

Для любого гильбертова пространства X введем новое гильбертово пространство $L_2(0, T; X)$, состоящее из всех измеримых на $(0, T)$ функций со значениями в пространстве X и с интегрируемым (по Лебегу) квадратом. Скалярное произведение в этом пространстве выглядит следующим образом

$$(f, g)_{L_2(0,T;X)} = \int\limits_0^T (f(t), g(t))_X \, ds.$$

Введем пространства

$$H^{0,1}(Q_T) = L_2(0, T; H^1(Q)),$$

$$\overset{\circ}{H}{}^{0,1}(Q_T) = L_2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(Q)),$$

Эти пространства называются анизотропными пространствами Соболева, поскольку по пространственным переменным x функции из этих пространств имеют обобщенные решения, а по временной переменной t — нет.

Мы будем рассматривать смешанные или начально-краевые задачи для параболических уравнений, когда мы фиксируем краевое условие по пространственным переменным и начальное условие по временной переменной.

Мы будем рассматривать следующее параболическое уравнение

$$u_t(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j}(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \tag{VI.1}$$

где коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ удовлетворяют условию эллиптичности, а функция f принадлежит пространству $L_2(0,T;L_2(Q)) = L_2(Q_T)$. С этим уравнением будем рассматривать начальное условие

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q, \tag{VI.2}$$

где $\varphi \in L_2(Q)$.

А также либо первое краевое условие

$$u|_{\Gamma_T} = 0, \quad x \in \Gamma_T, \tag{VI.3}$$

либо второе краевое условие

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)|_{\Gamma_T} = 0, \quad x \in \Gamma_T. \tag{VI.4}$$

Задача (VI.1)–(VI.3) называется первой смешанной задачей, а задача (VI.1), (VI.2), (VI.4) называется второй смешанной задачей. В основном мы будем рассматривать первую смешанную задачу.

Определение 1.1. Функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^{0,1}(Q_T)$ называется обобщенным решением задачи (VI.1)–(VI.3), если для всех $v \in H^1(Q_T)$ таких, что $v|_{\Gamma_T} = 0$ и $v|_{t=T} = 0$, удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \left(-uv_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}\right) dxdy = \int\limits_{Q} \varphi v|_{t=0}dx + \int\limits_{Q_T} fvdxdt. \tag{VI.5}$$

Если функция u достаточно гладкая и удовлетворяет уравнению (VI.1), то умножив это уравнение на функцию v и проинтегрировав два раза по частям, получаем интегральное тождество (VI.5). Функцию v мы будем называть пробной функцией.

Сделаем важное замечание относительно начального условия (VI.2). Для функций $u \in \overset{\circ}{H}{}^{0,1}(Q_T)$ след при фиксированном t не определен, поэтому непосредственно это условие не может быть выполненным. В определении обобщенного решения начальное условие фигурирует в интегральном тождестве, где след вычисляется для функции $v \in H^2(Q_T)$.

2. Единственность обобщенных решений

Прежде всего докажем единственность обобщенных решений.

Теорема 2.1. *Первая смешанная задача не может иметь более одного решения.*

Заметим, что эта теорема не утверждает существования решений, а доказывается независимо от теоремы существования.

Доказательство. Предположим, что существуют два обобщенных решения u^1 и u^2, тогда функция $u = u^1 - u^2$ тоже будет решение первой смешанной задачи при $\varphi = 0$ и $f = 0$.

Построим функцию

$$v(t,x) = \int\limits_t^T u(s,x)ds.$$

По построению эта функция принадлежит пространству $H^1(Q_T)$, причем ее частные производные равны

$$v_t = -u, \quad v_{x_i} = \int\limits_t^T u_{x_i}(s,x)ds, \ i = 1, \ldots, n.$$

Кроме того,

$$v|_{t=T} = 0, \quad v|_{\Gamma_T} = u|_{\Gamma_T} = 0.$$

Таким образом, функция v может быть в качестве пробной функции. Подставим ее в равенство (VI.5)

$$\int\limits_{Q_T} \left(u^2(t,x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i}(t,x) \int\limits_t^T u_{x_j}(s,x)ds \right) dxdt = 0. \qquad \text{(VI.6)}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \int\limits_t^T u_{x_j} dsdtdx = \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^T u_{x_i} \left(\int\limits_t^T u_{x_j} ds \right) dtdx =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^T u_{x_i}(s,x) \left(\int\limits_0^s u_{x_j}(t,x) \right) dsdx =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^T u_{x_i}(s,x) \left(\int\limits_0^T u_{x_j}(t,x)dt - \int\limits_s^T u_{x_j}(t,x)dt \right) dsdx =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^T u_{x_i}(t,x)dt \int\limits_0^T u_{x_j}(t,x)dt -$$

$$- \int\limits_{Q_T} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \int\limits_t^T u_{x_j} dsdtdx.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \int\limits_t^T u_{x_j} dsdtdx = \frac{1}{2} \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^T u_{x_i}(t,x)dt \int\limits_0^T u_{x_j}(t,x)dt \geq$$

$$\geq \frac{C_A}{2} \int\limits_Q \left| \int\limits_0^T \nabla u(s,x) \right|^2 dx \geq 0.$$

Следовательно, из (VI.6) получаем, что

$$\int\limits_{Q_T} u(t,x)dxdt \leq 0,$$

поэтому $u(t,x) = 0$ в Q_T. $\square$

3. Существование обобщенных решений

Докажем теперь, что первая смешанная задача имеет обобщенное решение. Доказательство проведем с помощью метода Фурье, который имеет большое практическое значение для фактического вычисления приближенных решений.

Теорема 3.1. *Для любых* $f \in L_2(Q_T)$ *и* $\varphi \in L_2(Q)$ *первая смешанная задача* (VI.1)–(VI.3) *имеет обобщенное решение* $u \in \mathring{H}^{0,1}(Q_T)$. *Более того,*

$$\|u\|_{\mathring{H}^{0,1}(Q_T)} \le C\left(\|\varphi\|_{L_2(Q)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}\right). \qquad \text{(VI.7)}$$

Доказательство. Рассмотрим эллиптический оператор

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j}.$$

Этот оператор имеет счетный набор положительных собственных значений $\{\lambda_k\}$ и множество собственных функций $\{v_k\}$, образующих базис в $L_2(Q)$. При этом эти функции принадлежат $H^2(Q)$. Имеем разложения

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x), \quad f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) v_k(x).$$

Построим приближенные решения по формуле

$$u^N(t,x) = \sum_{k=1}^{N} u_k(t) v_k(x),$$

где $u_k(t)$ — числовые функции, которые являются решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_k(t)}{dt} + \lambda_n u_k(t) = f_k(t), \quad t \in (0,T),\ k = 1, \dots, N; \qquad \text{(VI.8)}$$

с начальными условиями

$$u_k(0) = \varphi_k.$$

Эта система имеет единственное решение, которое не сложно найти в явном виде

$$u_k(t) = e^{-\lambda_k t}\varphi_k + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} f_k(s) ds.$$

Заметим, что функции $\{u_k\}$ не зависят от N.

Умножим каждое уравнение в (VI.8) на функцию v_k и просуммируем

$$\frac{\partial u^N}{\partial t} + Au^N = \sum_{k=1}^{N} f_k v_k. \qquad \text{(VI.9)}$$

Последнее равенство умножим скалярно в пространстве $L_2(Q)$ на u^N

$$\int\limits_Q \left(\frac{\partial u^N(t,x)}{\partial t} u^N(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u^N_{x_i x_j}(t,x) u^N(t,x) \right) dx =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{k=1}^{N} f_k(t) v_k(x) u^N(t,x) dx.$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N\|^2_{L_2(Q)} + \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u^N_{x_i} u^N_{x_j} dx = \int\limits_Q f(t,x) u^N(t,x) dx.$$

Интегрируем это равенство по t и используем условие эллиптичности

$$\|u^N(T)\|^2_{L_2(Q)} + 2C_A \int\limits_0^T \|u^N(t)\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} dt \le$$

$$\le \|u^N(0)\|^2_{L_2(Q)} + 2\int\limits_0^T \|(f(t), u^N(t))_{L_2(Q)} dt \le$$

$$\le \|u^N(0)\|^2_{L_2(Q)} + 2\int\limits_0^T \|(f(t)\|_{L_2(Q)} \|u^N(t)\|_{L_2(Q)} dt \le$$

$$\le \|u^N(0)\|^2_{L_2(Q)} + C_A \int\limits_0^T \|(f(t)\|^2_{L_2(Q)} dt + \frac{1}{C_A} \int\limits_0^T \|u^N(t)\|^2_{L_2(Q)} dt.$$

В последнем неравенстве мы используем элементарное неравенство

$$2|ab| = 2|\varepsilon^{1/2} a \varepsilon^{-1/2} b| \le \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2.$$

Поскольку $\|u^N(0)\|^2_{L_2(Q)} \leq \|\varphi\|_{L_2(Q)}$ и $\|u^N\|_{L_2(Q)} \leq C_1\|u^N\|_{\mathring{H}^1(Q)}$, мы получаем оценку

$$\|u^N\|^2_{\mathring{H}^{0,1}(Q_T)} \leq C_2\left(\|\varphi\|^2_{L_2(Q)} + \|f\|^2_{L_2(Q_T)}\right). \tag{VI.10}$$

Следовательно, последовательность $\{u^N\}$ является слабо предкомпактно в пространстве $\mathring{H}^{0,1}(Q_T)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что эта последовательность имеет слабый предел. С другой стороны из (VI.9) следует, что функция u^N является обобщенным решением задачи (VI.1)–(VI.3) для $\varphi^N = \sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k v_k$ и $f^N = \sum\limits_{k=1}^{N} f_k v_k$, действительно, умножим равенство (VI.9) на любую пробную функцию и проинтегрируем по частям

$$\int\limits_{Q_T}\left(-u^N v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u^N_{x_i} v_{x_j}\right) dxdt = \int\limits_{Q} \varphi^N v|_{t=0} dx + \int\limits_{Q_T} f^N v dxdt.$$

В силу слабой сходимости последовательности $\{u^N\}$ в последнем равенстве можно перейти к пределу и убедиться, что функция

$$u = \mathrm{w} - \lim_{N\to\infty} u^N$$

является обобщенным решением задачи (VI.1)–(VI.3).

Оценка (VI.7) следует из (VI.10). $\square$

4. О гладкости решений параболических задач

Используя результаты о гладкости эллиптических задач, можно доказать гладкость обобщенных решений параболических задач. Однако более правильным является получить гладкость решений с помощью теории полугрупп операторов. Теория полугрупп линейных операторов органически связана с параболическими задачами и позволяет понять суть параболических задач. Систематическое изучение полугрупп операторов мы приведем в следующей главе, а сейчас сформулируем основной результат о гладкости обобщенных решений задачи (VI.1)–(VI.3).

Теорема 4.1. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{H}{}^{0,1}(Q_T)$ *— обобщенное решение задачи* (VI.1)–(VI.3)*, где* $f \in L_2(Q_T)$*, а* $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q) \cap H^2(Q)$*, тогда*

$$u_{x_i x_j} \in L_2(Q_T), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

и

$$u_t \in L_2(Q_T).$$

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из теоремы 6.5 и того факта, что для области определения эллиптического оператора имеет место включение $\mathcal{D}(A) \subset H^2(Q)$. □

Заметим, что условие $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q) \cap H^2(Q)$ можно ослабить до условия $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, однако совсем отказаться от гладкости начальной функции нельзя. Условие $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ является необходимым и достаточным для гладкости обобщенных решений задачи (VI.1)–(VI.3). Подробнее об этом см. [8].

Глава VII

Полугруппы операторов

1. Сильно непрерывные полугруппы

Полугруппы операторов возникают при рассмотрении эволюционных уравнений. Действительно, рассмотрим задачу Коши для простейшего дифференциального уравнения

$$y'(t) = \alpha y(t),$$

$$y(0) = y_0.$$

Решением этой задачи является функция $y(t) = e^{\alpha t} y_0$. В банаховом пространстве $\mathbb{R}$ линейные операторы представляют собой умножение на число, поэтому можно рассмотреть параметрическое семейство линейных операторов

$$Y(t) = e^{\alpha t},$$

действующих в $\mathbb{R}$, для параметра $t \geq 0$. Это семейство операторов удовлетворяет полугрупповому (на самом деле, групповому) свойству

$$Y(t)Y(s) = e^{\alpha t} e^{\alpha s} = e^{\alpha(t+s)} = Y(t+s),$$

причем,

$$Y(0) = I.$$

Видно, что это семейство полностью определяется числом α, которое само можно рассматривать, как оператор в $\mathbb{R}$. Имея любое семейство линейных операторов в $\mathbb{R}$, удовлетворяющих полугрупповому свойству, можно найти единственное число, которое определяет это семейство по формуле

$$\alpha = \frac{d}{dt}Y(0).$$

Таким образом, решением задачи Коши для линейного однородного дифференциального уравнения является функция

$$y(t) = Y(t)y_0.$$

Аналогичные рассуждения можно применить для системы линейных дифференциальных уравнений, поскольку несложно обосновать существование экспоненты от квадратной матрицы. Вместе с тем, полугрупповое свойство решений эволюционных уравнений выражает глубокий факт о том, что будущее динамической системы определяется текущим положением. При этом переход системы из начального положения A в момент времени $t = 0$ в положение B за время t_1, а из положения B в следующее положение C за время $t = t_2$, эквивалентно переходу системы из начального положения A в положение C за время $t_1 + t_2$.

С помощью теории полугрупп операторов можно аналогично исследовать и бесконечномерные эволюционные уравнения, в частности, дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа. Однако не для каждого линейного неограниченного оператора можно построить параметрическое семейство операторов, которые будут представлять соответствующее решение эволюционной задачи.

Рассмотрим модельный пример эволюционной задачи. Пусть H — банахово пространство. Будем рассматривать замкнутый линейный оператор

$$\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H \to H.$$

Введем банахово пространство функций со значениями в пространстве H, обозначаемое $L_2(0, T; H)$. Это пространство состоит из всех интегрируемых на $(0, T)$ по Лебегу функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_2(0,T;H)} = \left(\int\limits_0^T \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Для некоторых функций из этого пространства можно определить производную по переменной t таким образом, что эта производная также принадлежит пространству $L_2(0,T;H)$.

Будем рассматривать следующую задачу Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве H

$$u'(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t), \tag{VII.1}$$

$$u(0) = \varphi. \tag{VII.2}$$

В этой задаче мы будем предполагать, что $f \in L_2(0,T;H)$, $\varphi \in H$.

Определение 1.1. Функция $u \in L_2(0,T;H)$ называется *сильным решением*, если эта функция имеет производную $u' \in L_2(0,T;H)$, принадлежит пространству $L_2(0,T;\mathcal{D}(A))$, где область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ мы рассматриваем в качестве банахова пространства с нормой графика, и функция u удовлетворяет задаче (VII.1)–(VII.2).

Для исследования сильной разрешимости задачи (VII.1)–(VII.2) мы воспользуемся результатами теории полугрупп. Будем рассматривать произвольное банахово пространство H.

Определение 1.2. Однопараметрическое семейство T_t $(t \geq 0)$ ограниченных операторов называется C_0-*полугруппой*, или *сильно непрерывной полугруппой*, или просто *полугруппой*, если выполнены следующие условия:

1. $T_{t+s} = T_t T_s$ при $t, s \geq 0$, $T_0 = I$.
2. Функция $T_t\varphi$ непрерывна в пространстве H на $[0,\infty)$ при каждом фиксированном $\varphi \in H$.

Из определения полугруппы следует оценка нормы полугруппы.

Теорема 1.1. *Пусть T_t $(t \geq 0)$ — C_0-полугруппа. Тогда существуют такие константы $\beta \in \mathbb{R}$ и $M \geq 1$, что выполнено неравенство:*

$$\|T_t\| \leq Me^{\beta t}. \tag{VII.3}$$

Доказательство. Положим $c_1 = \sup\limits_{t\in[0,1]} \|T_t\|$. Обозначая через $[t]$ целую часть t, имеем

$$T_t = T_{[t]}T_{t-[t]} = (T_1)^{[t]}T_{t-[t]}$$

для любого $t \geq 0$. Отсюда следует, что

$$\|T_t\| \leq c_1 e^{\beta[t]},$$

где $\beta = \ln \|T_1\|$. Следовательно,

$$\|T_t\| \leq M e^{\beta t}, \quad t \geq 0,$$

где $M = c_1$, если $\beta \geq 0$, и $M = c_1 e^{-\beta}$, если $\beta < 0$. $\square$

Определение 1.3. Точная нижняя грань всех чисел β, для которых верно неравенство (VII.3), называется *порядком роста полугруппы.*

Определение 1.4. В случае, когда порядок роста неположительный, а $M = 1$, то есть имеет место оценка

$$\|T_t\| \leq 1,$$

полугруппа называется *сжимающей.*

Пусть T_t $(t \geq 0)$ — C_0-полугруппа. Введем линейный, вообще говоря, неограниченный оператор G по формуле:

$$\mathrm{G}\varphi = \lim_{h \to +0} \frac{T_h\varphi - \varphi}{h},$$

определенный на таких элементах $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, для которых этот предел существует.

Определение 1.5. Определенный таким образом оператор G называется *генератором полугруппы* или *инфинитезимальным производящим оператором полугруппы* T_t $(t \geq 0)$.

Пример 1.1 (случай ограниченного генератора)**.** Пусть $B : H \to H$ — произвольный ограниченный оператор. Тогда можно определить семейство операторов T_t по формуле

$$T_t = I + tB + \frac{t^2}{2!}B^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}B^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}B^n. \qquad \text{(VII.4)}$$

Этот ряд сходится по норме операторов при всех $t \geq 0$, так как его члены мажорируются членами разложения в степенной ряд функции $e^{\|B\|t}$. Непосредственно можно видеть, что определенное таким образом семейство операторов является C_0-полугруппой с оператором B в качестве генератора.

2. Генераторы полугрупп

Из примера 1.1 видно, что любой ограниченный оператор является генератором C_0-полугруппы. Однако далеко не каждый неограниченный оператор будет генератором.

Теорема 2.1. *Генератор C_0-полугруппы имеет плотную в H область определения.*

Доказательство. Пусть G — генератор полугруппы T_t. Сначала покажем, что для всех $\varepsilon > 0$ и $\varphi_0 \in H$ элементы вида:

$$\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon T_t\varphi_0 dt, \tag{VII.5}$$

принадлежат $\mathcal{D}(\mathrm{G})$. Элементы (VII.5) образуют плотное в H множество, так как для любого $\varphi_0 \in H$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_H \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon \|T_t\varphi_0 - \varphi_0\|_H dt = 0.$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{T_h - I}{h}\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon h}\int\limits_0^\varepsilon (T_{t+h}\varphi_0 - T_t\varphi_0)dt =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon h}\left\{\int\limits_h^{\varepsilon+h} T_t\varphi_0 dt - \int\limits_0^\varepsilon T_t\varphi_0 dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon h}\left\{\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon+h} T_t\varphi_0 dt - \int\limits_0^h T_t\varphi_0 dt\right\},$$

откуда

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{T_h - I}{h}\varphi_\varepsilon - \frac{T_\varepsilon - I}{\varepsilon}\varphi_0\right\|_H = 0.$$

Мы показали, что $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$ и

$$\mathrm{G}\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(T_\varepsilon\varphi_0 - \varphi_0).$$

□

Теорема 2.2. *Пусть T_t и G — соответственно C_0-полугруппа и генератор этой полугруппы. Тогда оператор-функция T_t преобразует область определения $\mathcal{D}(\mathrm{G})$ в себя и имеет место равенство:*

$$\frac{d}{dt}(T_t\varphi) = \mathrm{G}T_t\varphi = T_t\mathrm{G}\varphi, \tag{VII.6}$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, $t \geq 0$.

Доказательство теоремы следует из очевидного равенства:

$$\frac{T_h - I}{h}T_t\varphi = T_t\frac{T_h - I}{h}\varphi$$

путем предельного перехода. □

Теорема 2.3. *Генератор C_0-полугруппы является замкнутым оператором.*

Доказательство. Пусть G — генератор полугруппы T_t. Возьмем произвольную последовательность $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathrm{G})$ такую, что φ_k и $\mathrm{G}\varphi_k$ сходятся в H к пределам φ_0 и y_0 соответственно. Из (VII.6) следует, что при $h > 0$ имеем

$$\frac{1}{h}(T_h\varphi_k - \varphi_k) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h (T_t)'\varphi_k dt = \frac{1}{h}\int\limits_0^h T_t\mathrm{G}\varphi_k dt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $k \to \infty$ (и фиксированном h), получаем

$$\frac{1}{h}(T_h\varphi_0 - \varphi_0) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h T_t y_0 dt.$$

Устремим теперь h к нулю. Передел в правой части существует и равен y_0, следовательно, $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$ и $\mathrm{G}\varphi_0 = y_0$. □

3. Спектральные свойства генераторов полугрупп

Через $\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{G})$ будем обозначать резольвенту оператора G, то есть

$$\mathrm{R}(\lambda, \mathrm{G}) = (\lambda I - \mathrm{G})^{-1},$$

для тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых существует ограниченный оператор $(\lambda I - \mathrm{G})^{-1}$. Когда это не приводит к путанице, будем сокращать запись: $\mathrm{R}(\lambda) = \mathrm{R}(\lambda, \mathrm{G})$.

Оказывается, на спектр генераторов полугрупп необходимо налагаются существенные условия. В частности, эти условия связаны с порядком роста полугруппы.

Теорема 3.1. *Пусть T_t — C_0-полугруппа, а β_0 есть ее порядок роста. Тогда множество $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > \beta_0\}$ принадлежит резольвентному множеству оператора* G. *Причем*

$$\mathrm{R}(\lambda)\varphi = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \varphi dt, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > \beta_0. \tag{VII.7}$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{Re}\,\lambda \geq \beta > \beta_0$. Тогда существует такое $M(\beta)$, что выполнено неравенство (VII.3), поэтому интеграл

$$J(\lambda)\varphi = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t \varphi dt$$

равномерно и абсолютно сходится и определяет ограниченный оператор.

Поскольку оператор G замкнут, то для доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$(\lambda I - \mathrm{G})J(\lambda)\varphi = J(\lambda)(\lambda I - \mathrm{G})\varphi = \varphi$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$.

Фиксируем λ ($\mathrm{Re}\,\lambda \geq \beta$) и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$. Из равенства

$$(\lambda I - \mathrm{G})T_t\varphi = T_t(\lambda I - \mathrm{G})\varphi \tag{VII.8}$$

следует, что функция $e^{-\lambda t}(\lambda I - \mathrm{G})T_t\varphi$ интегрируема на $[0, \infty)$. Далее, в силу замкнутости оператора $\lambda I - \mathrm{G}$ имеем

$$(\lambda I - \mathrm{G})J(\lambda)\varphi = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda I - \mathrm{G})T_t\varphi dt =$$

$$= \lambda J(\lambda)\varphi - \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(T_t)'\varphi dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$(\lambda I - \mathrm{G})J(\lambda)\varphi = \lambda J(\lambda)\varphi + \varphi - \lambda \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} T_t \varphi dt =$$

$$= \lambda J(\lambda)\varphi + \varphi - \lambda J(\lambda)\varphi = \varphi.$$

Из (VII.8) следует, что

$$J(\lambda)(\lambda I - \mathrm{G})\varphi = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} T_t (\lambda I - \mathrm{G})\varphi dt =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda I - \mathrm{G}) T_t \varphi dt = \varphi.$$

□

Следствие 3.1. *В условиях теоремы* 3.1 *имеют место следующие формулы:*

$$\frac{d^k \mathrm{R}(\lambda)}{d\lambda^k} = (-1)^k \int\limits_0^{\infty} t^k e^{-\lambda t} T_t \varphi dt, \tag{VII.9}$$

при $\mathrm{Re}\,\lambda > \beta_0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Формулы (VII.9) следуют из того, что все интегралы в (VII.9) абсолютно сходятся. □

4. Теорема Хилле—Иосиды и ее обобщения

Ранее мы получили ряд необходимых свойств генераторов полугрупп. Сейчас рассмотрим вопрос о критериях для генераторов C_0-полугрупп.

Теорема 4.1. *Замкнутый оператор* G, *имеющий плотную область определения, является генератором* C_0*-полугруппы тогда и только тогда, когда существует такое число* λ_0*, что все числа* λ*,* $\mathrm{Re}\,\lambda \geq \lambda_0$ *являются резольвентными для оператора* G*, и для этих чисел выполнено неравенство:*

$$\|(\mathrm{R}(\lambda))^k\| \leq \frac{c_1}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \lambda_0)^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{VII.10}$$

где константа $c_1 > 0$ *не зависит от* k*.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — генератор полугруппы T_t. Тогда из теоремы 3.1 следует, что если $\operatorname{Re}\lambda > \beta_0$, где β_0 — порядок роста, то λ принадлежит резольвентному множеству. Поскольку резольвента является аналитической оператор-функцией на резольвентном множестве, то в силу вида коэффициентов ряда Тейлора и формулы (VII.9) имеем формулу:

$$(\mathrm{R}(\lambda))^k\varphi = \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^\infty t^{k-1}e^{-\lambda t}T_t\varphi dt.$$

Оценивая отсюда $(\mathrm{R}(\lambda))^k$ с помощью оценки (VII.3), получаем при любом фиксированном $\beta > \beta_0$ и $\operatorname{Re}\lambda > \beta$:

$$\|(\mathrm{R}(\lambda))^k\| \leq \frac{M}{(k-1)!}\int\limits_0^\infty t^{k-1}e^{(\beta-\operatorname{Re}\lambda)t}dt = \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda-\beta)^k}.$$

Достаточность. Пусть оператор G удовлетворяет условиям теоремы. Построим полугруппу, производящим оператором которой является оператор G.

Введем ограниченные операторы, которые называются аппроксимациями Иосиды

$$\mathrm{G}_n = n\mathrm{G}\mathrm{R}(n),$$

где n принимает целые значения, большие, чем λ_0. Покажем, что операторы G_n на элементах $\mathcal{D}(\mathrm{G})$ сходятся к G:

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathrm{G}_n\varphi - \mathrm{G}\varphi\|_H = 0. \tag{VII.11}$$

Для этого сначала докажем, что для любого $\varphi \in H$

$$\lim_{n\to\infty}\|n(nI-\mathrm{G})^{-1}\varphi - \varphi\|_H = 0. \tag{VII.12}$$

В случае, когда $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$ имеем

$$\|n(nI-\mathrm{G})^{-1}\varphi - \varphi\|_H = \|\mathrm{R}(n)\mathrm{G}\varphi\|_H \leq \frac{c_1}{n-\lambda_0}\|\mathrm{G}\varphi\|_H.$$

Откуда (VII.12) следует для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$. Для других элементов $\varphi \in H$ справедливость (VII.12) вытекает из плотности $\mathcal{D}(\mathrm{G})$ в H и равномерной ограниченности норм операторов $n\mathrm{R}(n)$:

$$\|n\mathrm{R}(n)\| \leq |n|\|\mathrm{R}(n)\| \leq \frac{c_1|n|}{n-\lambda_0}.$$

Из (VII.12) и соотношения

$$\mathrm{G}_n\varphi - \mathrm{G}\varphi = n\mathrm{R}(n)\mathrm{G}\varphi - \mathrm{G}\varphi$$

следует (VII.11).

Поскольку операторы G_n ограничены, то, используя ряд (VII.4) из примера 1.1, определим операторы $e^{\mathrm{G}_h t}$. Так как

$$\mathrm{G}_n = n^2(nI - \mathrm{G})^{-1} - nI,$$

то

$$e^{\mathrm{G}_n t} = e^{-nt} e^{n^2(nI-\mathrm{G})^{-1}t} = e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k n^{2k}}{k!}(\mathrm{R}(n))^k.$$

С помощью неравенств (VII.10) оцениваем

$$\|e^{\mathrm{G}_n t}\| \le e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k n^{2k}}{k!}\|(\mathrm{R}(n))^k\| \le$$

$$\le c_1 e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{tn^2}{n-\lambda_0}\right)^k \le c_1 e^{\left(-n+\frac{n^2}{n-\lambda_0}\right)t}.$$

Таким образом, при достаточно больших n имеем

$$\|e^{\mathrm{G}_n t}\| \le e^{\frac{n\lambda_0 t}{n-\lambda_0}} \le c_2 e^{(\lambda_0+\varepsilon)t}, \tag{VII.13}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое фиксированное число.

Покажем теперь, что последовательность ограниченных операторов $e^{\mathrm{G}_n t}$ сходится на всем H равномерно относительно t из каждого ограниченного отрезка $[0, t_0]$. В силу (VII.13) этот факт достаточно установить для элементов φ из плотного в H множества $\mathcal{D}(\mathrm{G})$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$. Тогда при достаточно больших m и n

$$e^{\mathrm{G}_m t} - e^{\mathrm{G}_n t} = \int_0^t \frac{d}{ds} e^{\mathrm{G}_n(t-s)+\mathrm{G}_m s}\varphi ds =$$

$$= \int_0^t e^{\mathrm{G}_n(t-s)+\mathrm{G}_m s}(\mathrm{G}_m - \mathrm{G}_n)\varphi ds,$$

откуда в силу (VII.13) получаем

$$\|(e^{\mathrm{G}_m t} - e^{\mathrm{G}_n t})\varphi\|_H \le c_2 e^{(\lambda_0+\varepsilon)t} t\|(\mathrm{G}_m - \mathrm{G}_n)\varphi\|_H \le$$

$$\le c_3\|(\mathrm{G}_m - \mathrm{G}_n)\varphi\|_H$$

и в силу (VII.11)

$$\lim_{n,m\to\infty} \|(e^{G_m t} - e^{\mathrm{G}_n t})\varphi\|_H = 0.$$

Следовательно, операторы $e^{\mathrm{G}_n t}$ сходятся к пределу, который обозначим через T_t.

Поскольку оператор-функции $e^{\mathrm{G}_n t}$ непрерывны и функции $e^{\mathrm{G}_n t}$ сходятся равномерно по t, то оператор-функция T_t будет также непрерывной. Переходя к пределу в равенстве

$$e^{\mathrm{G}_n (t+s)}\varphi = e^{\mathrm{G}_n t} e^{\mathrm{G}_n s},$$

получим полугрупповое соотношение $T_{t+s} = T_t T_s$. Очевидно, $T_0 = I$. Следовательно, T_t является сильно непрерывной полугруппой.

Остается показать, что генератором полугруппы T_t будет оператор G. Обозначим через $\tilde{\mathrm{G}}$ генератор полугруппы T_t. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$. Переходя к пределу в равенстве

$$e^{\mathrm{G}_n t}\varphi - \varphi = \int\limits_0^t e^{\mathrm{G}_n s}\mathrm{G}_n \varphi ds,$$

получим соотношение

$$T_t\varphi - \varphi = \int\limits_0^t T_s \mathrm{G}\varphi ds, \tag{VII.14}$$

из которого следует, что $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{\mathrm{G}})$, причем $\tilde{\mathrm{G}}\varphi = \mathrm{G}\varphi$ при $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$. В силу теоремы 3.1 при достаточно большом $\lambda > 0$ образ оператора $(\lambda I - \tilde{\mathrm{G}})$ совпадает со всем H, а значит, и с образом оператора $(\lambda I - \mathrm{G})$, что доказывает совпадение операторов $\tilde{\mathrm{G}}$ и G. □

Непосредственная проверка условия (VII.10) может быть затруднительна. Однако существует более сильное и простое условие, из которого следует условие (VII.10).

Следствие 4.1. *Теорема* 4.1 *остается верной, если условие* (VII.10) *заменить условием*

$$\|\mathrm{R}(\lambda)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \lambda_0}. \tag{VII.15}$$

В случае, когда и $\lambda_0 = 0$, это следствие носит название теоремы Хилле—Иосиды. Приведем полную формулировку.

Теорема 4.2 (Хилле—Иосида)**.** *Замкнутый оператор* G*, имеющий плотную область определения, является генератором сжимающей* C_0*-полугруппы тогда и только тогда, когда все числа* $\lambda > 0$ *являются резольвентными для оператора* G*, и для этих чисел выполнено неравенство:*

$$\|\mathrm{R}(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{VII.16}$$

Доказательство. Остается доказать, что получаемая полугруппа будет сжимающей. Действительно, из неравенства (VII.13) вытекает, что

$$\|e^{\mathrm{G}_n t}\varphi\|_H \leq e^{\frac{1}{n}}\|\varphi\|_H,$$

откуда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\|T_t\| \leq 1.$$

□

5. Аналитические полугруппы

При рассмотрении сильных решений неоднородных параболических задач возникают аналитические полугруппы.

Определение 5.1. Сильно непрерывная полугруппа T_t называется *аналитической*, если она может быть аналитически продолжена в некоторый сектор:

$$\Delta_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \delta, \operatorname{Re}\lambda > 0\}, \quad 0 < \delta \leq \pi/2,$$

таким образом, что T_λ непрерывна в $\overline{\Delta}_\delta$.

Определение 5.1 не очень удобно в приложениях. К счастью, есть удобный критерий для аналитических полугрупп.

Определение 5.2. Сильно непрерывная полугруппа называется *аналитической*, если существуют такие числа ω и $q \geq 0$, что множество $\Omega_{q,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega, |\lambda| > q\}$ свободно от спектра ее генератора G, и выполнено неравенство

$$\|(\lambda I - \mathrm{G})^{-1}\| \leq \frac{c_1}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_{q,\omega}. \tag{VII.17}$$

Можно показать, что определения 5.1 и 5.2 эквивалентны, но мы не будем пользоваться этим утверждением.

Покажем, что аналитические полугруппы необходимо возникают при рассмотрении сильных решений параболических задач.

Пусть G — генератор C_0-полугруппы T_t. Рассмотрим задачу (VII.18)–(VII.19) с нулевым начальным условием и оператором G

$$u'(t) - \mathrm{G}u(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \tag{VII.18}$$

$$u(0) = 0. \tag{VII.19}$$

Теорема 5.1. *Пусть для любого* $f \in C([0,1];H)$ *задача* (VII.18)–(VII.19) *имеет сильное решение и такое, что*

$$\|\mathrm{G}u(\cdot)\|_{C([0,1];H)} \leq c_1\|f\|_{C([0,1];H)}, \tag{VII.20}$$

тогда полугруппа T_t *является аналитической полугруппой.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$ и сконструируем функцию $v(t) = tT_t\varphi$. Легко проверить, что v является сильным решением задачи (VII.18)–(VII.19) с $f(t) = T_t\varphi$. В силу неравенств (VII.20) и (VII.3) следует

$$\max_{0\leq t\leq 1} \|tT_t\varphi\|_H \leq c_2\|\varphi\|_H.$$

Отсюда, учитывая плотность области определения G в H, получаем для $t > 0$ оценку

$$\|\mathrm{G}T_t\| \leq c_2 t^{-1}. \tag{VII.21}$$

Из (VII.21) следует, что для любого $\psi \in H$ и $t > 0$ имеем $T_t\psi \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$. Покажем, что

$$\frac{d^k}{dt^k}T_t\psi = \left(\frac{d}{dt}T_{t/k}\right)^k \psi. \tag{VII.22}$$

Действительно, учитывая замкнутость оператора G, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}T_t\psi = \frac{d}{dt}(\mathrm{G}T_t)\psi = \mathrm{G}\lim_{n\to\infty} n(T_{t+1/n} - T_t)\psi =$$

$$= \mathrm{G}(\mathrm{G}T_t)\psi = \mathrm{G}T_{t/2}\mathrm{G}T_{t/2}\psi = \left(\frac{d}{dt}T_{t/2}\right)^2\psi.$$

Повторяя эти рассуждения, получаем (VII.22).

Следовательно, оператор-функция T_t, дифференцируемая при $t > 0$, и имеют место оценки для производных

$$\left\|\frac{d^kT_t}{dt^k}\right\| = \|\mathrm{G}^kT_t\| \le c^kk^kt^{-k}. \qquad \text{(VII.23)}$$

Из этих оценок следует, что существует такая константа c_2, что при $|t - t_0| < c_2t_0$ ряд Тейлора

$$T_t = \sum_{k=0}^{\infty}(t-t_0)^k\frac{1}{k!}\frac{d^kT_{t_0}}{dt^k}$$

сходится. А это означает, что T_t может быть аналитически продолжена в сектор Δ_δ при определенном $\delta > 0$. $\square$

Замечание 5.1. Можно показать, что условие (VII.21) является не только достаточным для аналитичности полугруппы, но и необходимым.

Из теоремы 5.1 следует следующая важная теорема.

Теорема 5.2. *Пусть T_t есть аналитическая полугруппа в пространстве H, а оператор* G *является ее генератором, тогда для любого $t_0 > 0$ оператор*

$$T_{t_0} : H \to \mathcal{D}(\mathrm{G}) \qquad \text{(VII.24)}$$

является ограниченным.

Замечание 5.2. Теорема 5.2 не верна для для C_0-полугрупп.

6. Применение полугрупп операторов для эволюционных уравнений

Теорема 6.1. *Пусть оператор $-\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы T_t $(t \ge 0)$, и пусть $u(t)$ — сильное решение задачи* (VII.1)–(VII.2)*, тогда имеет место формула:*

$$u(t) = T_t\varphi + \int\limits_0^t T_{t-s}f(s)ds. \qquad \text{(VII.25)}$$

Доказательство. Для произвольных $0 \le s \le t \le T$ имеем

$$\frac{d}{ds}\big(T_{t-s}\mathcal{A}^{-1}u(s)\big) = T_{t-s}\mathcal{A}^{-1}f(s).$$

Интегрируя это равенство по s от 0 до t, получаем

$$\mathcal{A}^{-1}u(t) = T_t\mathcal{A}^{-1}\varphi + \int\limits_0^t T_{t-s}\mathcal{A}^{-1}f(s)ds.$$

Отсюда в силу замкнутости оператора $\mathcal{A}$ и соотношения (VII.6) получаем (VII.25) □

Теорема 6.2. *При выполнении условий теоремы* 6.1 *задача* (VII.1)–(VII.2) *может иметь не более одного сильного решения.*

Доказательство теоремы следует из формулы (VII.25). □

Заметим еще раз, что теорема не утверждает существования сильного решения.

В этом разделе будем рассматривать неоднородную задачу (VII.1)–(VII.2) в случае нулевых начальных условиях (VII.2).

Теорема 6.3. *Пусть оператор $-\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы. Тогда для любого $f \in L_2(0,T;H)$ и $\varphi = 0$ задача* (VII.1)–(VII.2) *имеет сильное решение.*

Доказательство. Продолжим функцию f нулем на $\mathbb{R}$. Это продолжение также обозначим через f. Очевидно, что $f \in L_2(\mathbb{R}, H)$. Введем оператор-функцию

$$K(t) = \begin{cases} T_t, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Через $\mathcal{K}$ обозначим интегральный оператор с ядром $K(t)$. Покажем, что оператор $B : L_2(\mathbb{R}, H) \to L_2(\mathbb{R}, H)$, определенный по формуле:

$$Bf(t) = \mathcal{A}\mathcal{K}f(t) = \mathcal{A}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t-s)f(s)ds,$$

ограничен. Используя преобразование Фурье, имеем

$$F[Bf](\lambda) = F[\mathcal{A}\mathcal{K}](\lambda)F[f](\lambda).$$

В силу теоремы 3.1 и в следствие того, что спектр оператора $\mathcal{A}$ лежит в левой полуплоскости, имеем

$$F[\mathcal{A}\mathcal{K}](\lambda) = \mathcal{A} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{-i\lambda t}dt = \mathcal{A} \int\limits_{0}^{\infty} T_t e^{-i\lambda t}dt = \mathcal{A}(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}.$$

В силу равенства Парсеваля получаем

$$\|Bf\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} = \|F[Bf]\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} \le$$

$$\le \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\mathcal{A}(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|^2 \|F[f]\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} =$$

$$= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\mathcal{A}(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)} \le c_1 \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R},H)}.$$

Здесь использовано соотношение $\mathcal{A}(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1} = i\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1} - I$ и оценка (VII.17).

Покажем теперь, что

$$u(t) = \int\limits_0^t T_{t-s} f(s)ds$$

является сильным решением задачи (VII.1)–(VII.2). Достаточно убедиться, что $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A})$. Действительно, имеем

$$u'(t) = f(t) - \int\limits_0^t \mathcal{A}T_{t-s} f(s)ds.$$

В силу ограниченности оператора B и замкнутости оператора $\mathcal{A}$ получаем, что $u', \mathcal{A}u \in L_2(0,T;H)$. □

Теперь рассмотрим однородную задачу (VII.1)–(VII.2) с ненулевым начальным условием. Хотя эта задача формулируется для любого $\varphi \in H$, сильное решение существует не для всех таких начальных условий. Можно указать точный класс начальных условий, для которых существует сильное решение задачи (VII.1)–(VII.2). Этот класс будет совпадать с интерполяционным пространством между H и областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Рассмотрение интерполяционных пространств выходит за рамки нашей книги, см. [8]. Мы докажем существование сильных решений при условии, когда начальное условие φ принадлежит области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Теорема 6.4. *Пусть оператор $-\mathcal{A}$ является генератором C_0-полугруппы. Тогда для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $f = 0$ задача* (VII.1)–(VII.2) *имеет сильное решение.*

Доказательство. Пусть T_t — полугруппа, порожденная оператором $-\mathcal{A}$, тогда построим функцию

$$u(t) = T_t\varphi.$$

Покажем, что функция u принадлежит пространству $L_2(0, T; H)$. Действительно,

$$\int\limits_0^T \|T_t\varphi\|_H^2 dt \le M^2 \int\limits_0^T e^{2\beta t}\|\varphi\|_H^2 dt \le C\|\varphi\|_H^2 < \infty.$$

В силу теоремы 2.2 мы имеем

$$\int\limits_0^T \|\mathcal{A}T_t\varphi\|_H^2 dt = \int\limits_0^T \|T_t\mathcal{A}\varphi\|_H^2 dt \le$$

$$\le C_2\|\mathcal{A}\varphi\|_H^2 \le C_3\|\varphi\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}^2 < \infty.$$

Следовательно, функция $u(t)$ принадлежит пространству $L_2(0, T; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$. В силу равенства

$$\frac{d}{dt}T_t\varphi = \mathcal{A}T_t\varphi$$

мы получаем, что $u' \in L_2(0, T; H)$. При этом функция $u(t) = T_t\varphi$ удовлетворяет задаче (VII.1)–(VII.2) согласно свойствам C_0-полугруппы. Следовательно, эта функция является сильным решением. $\square$

Отметим, что эта теорема верна и для случая генератора C_0-полугруппы. Комбинация теорем 6.3, 6.4, 6.1 и 6.2 в силу линейности задачи дают следующую теорему.

Теорема 6.5. *Пусть оператор $-\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы. Тогда для любых $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $f \in L_2(0, T; H)$ задача* (VII.1)–(VII.2) *имеет единственное сильное решение*

$$u(t) = T_t\varphi + \int\limits_0^t T_{t-s}f(s)ds.$$

Глава VIII

Гиперболические уравнения

1. Постановка задачи

Гиперболические уравнения также как и параболические относятся к эволюционным дифференциальным уравнениям, поэтому мы также будем рассматривать ограниченную область $Q \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей и ограниченную цилиндрическую область Q_T.

Мы будем рассматривать следующее гиперболическое уравнение

$$u_{tt}(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j}(t,x) = f(t,x), \ (t,x) \in Q_T \qquad \text{(VIII.1)}$$

С этим уравнением будем рассматривать первое краевое условие

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \qquad \text{(VIII.2)}$$

и два начальных условия

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \qquad \text{(VIII.3)}$$

Здесь $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$, $\psi \in L_2(Q)$.

Таким образом, мы будем рассматривать первую смешанную краевую задачу для гиперболического уравнения.

Определение 1.1. Функция $u \in H^1(Q_T)$ называется обобщенным решением задачи (VIII.1)–(VIII.3), если $u|_{\Gamma_T} = 0$, $u|_{t=0} = \varphi$ и для любой функции $v \in H^1(Q_T)$ такой, что $v|_{\Gamma_T} = 0$ и $v|_{t=T} = 0$, выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{Q_T} \left(-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{xj} \right) dxdt = \int\limits_{Q} \psi v|_{t=0} dx + \int\limits_{Q_T} f v dxdt. \tag{VIII.4}$$

2. Энергетическое неравенство

В исследовании гиперболических уравнений принципиальную роль играют априорные оценки решений. Введем обозначения

$$Q_\tau = (0, \tau) \times Q$$

и

$$\Omega_\tau = \{(t, x) \in Q_T : t = \tau\}.$$

Теорема 2.1. *Пусть функция* $u \in H^2(Q_T)$ *удовлетворяет уравнению* (VIII.1) *и начально-краевым условиям* (VIII.2), (VIII.3). *Тогда имеет место следующая оценка*

$$\|u\|_{H^1(Q_T)} \le C(\|\varphi\|_{\mathring{H}^1(Q)} + \|\psi\|_{L_2(Q)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}). \tag{VIII.5}$$

Доказательство. Пусть $t \in (0, T)$ фиксированное число. Умножим уравнение (VIII.1) скалярно в $L_2(Q_t)$ на u_t

$$I = \int\limits_{Q_t} \left(u_{tt} u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} u_t \right) dtdx = \int\limits_{Q_t} f u_t dtdx.$$

Рассмотрим левую часть этого равенства. Преобразуем ее с помощью интегрирования по частям с учетом краевых условий

$$I = \int\limits_{Q_t} \left(\frac{\partial (u_t^2)}{\partial t} + 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{t x_j} \right) dtdx.$$

Заметим, что имеет место

$$2 \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i} u_{t x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial (u_{x_i} u_{x_j})}{\partial t}.$$

Поэтому имеем

$$I = \int\limits_{\Omega_t} \left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right) dtdx \Bigg|_{t=0}^{t=t}.$$

Отсюда имеем

$$y(t) = y(0) + 2 \int\limits_{Q_t} f u_t dtdx,$$

где

$$y(t) = \int\limits_{\Omega_t} \left(u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right) dtdx.$$

Имеем оценку

$$y(t) \le y(0) + 2 \int\limits_0^t \|f\|_{L_2(\Omega_t)} y^{1/2}(t) dt.$$

Получим оценку $\int\limits_{\Omega_t} u^2 dx$ через значение $u(0,t)$ и $y(t)$. Имеем

$$u(t,x) = u(0,x) + \int\limits_0^t u_s(s,x) ds.$$

Возведем это равенство в квадрат и проинтегрируем по Ω_t

$$\int\limits_{\Omega_t} u^2 dx \le 2 \int\limits_{\Omega_t} u^2(0,x) dx + 2 \int\limits_{\Omega_t} \left(\int\limits_0^t u_s(s,x) ds \right)^2 dx \le$$

$$\le 2 \int\limits_{\Omega_0} u^2(0,x) dx + 2t \int\limits_{Q_t} u_t^2 dtdx \le$$

$$\le 2 \int\limits_{\Omega_0} u^2(0,x) dx + 2t \int\limits_0^t y(s) ds.$$

Введем обозначение

$$z(t) = \int\limits_{\Omega_t} \left(u^2(t,x) + u_t^2(t,x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i}(t,x) u_{x_j}(t,x) \right) dx.$$

Имеем оценку

$$z(t) \le 2z(0) + 2t \int\limits_0^t z(s)ds + 2 \int\limits_0^t \|f\|_{L_2(\Omega_t)} z^{1/2}(s) ds.$$

Обозначим $\hat{z}(t) = \max\limits_{s\in[0,t]} z(s)$. Тогда получаем

$$\hat{z}(t) \le 2z(0) + 2tt\hat{z}(t) + 2\hat{z}^{1/2}(t) \int\limits_0^t \|f\|_{L_2(\Omega_t)} dt.$$

Пусть t_1 такое, что $2t_1^2 = 1/2$, тогда для $t \le \min\{t_1, T\}$ имеем оценку

$$\hat{z}^{1/2}(t) \le 4z^{1/2}(0) + 4\|f\|_{L_2(Q_T)}.$$

Если $t_1 < T$, то возьмем в качестве начальных условий следы функции u и u_t в момент времени t_1. В этом случае получим оценку

$$\hat{z}^{1/2}(t) \le 4z^{1/2}(t_1) + 4\|f\|_{L_2(Q_T)},\ \ t \le \min\{2t_1, T\}.$$

Продолжая, если необходимо, этот процесс получим оценку

$$\hat{z}^{1/2}(t) \le 4z^{1/2}(0) + 4\|f\|_{L_2(Q_T)}$$

для всех $t \in [0,T]$. А это значит, верна оценка (VIII.5). □

Выше мы получили априорную оценку в предположении определенной гладкости решения. Эта оценка является основанием для доказательства существования обобщенных решений, но ее недостаточно для доказательства единственности. Поэтому мы получим еще одну априорную оценку без предположения дополнительной гладкости решения.

Теорема 2.2. *Пусть $\varphi = 0$, $\psi = 0$ и $f = 0$, тогда обобщенное решение задачи* (VIII.1)–(VIII.3) *равно нулю $u =$.*

Доказательство. Пусть $u \in H^1(Q_T)$ — обобщенное решение задачи (VIII.1)–(VIII.3). Построим новую функцию

$$v(t,x) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u(s,x)ds, & 0 < t < \tau \\ 0, & \tau < t < T, \end{cases}$$

где $\tau \in (0,T)$ — произвольный параметр. Легко видеть, что

$$v_t(t,x) = \begin{cases} -u(t,x), & 0 < t < \tau \\ 0, & \tau < t < T \end{cases}$$

и $v|_{t=0} = 0$, $v|_{t=T} = 0$. Следовательно, эту функцию можно взять в качестве пробной функции в интегральном тождестве.

Подставим функцию v в тождество (VIII.4). Для первого слагаемого имеем

$$-\int\limits_{Q_T} u_t v_t dxtd = \int\limits_{Q_\tau} u_t u dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} u|_{t=\tau}^2 dx. \tag{VIII.6}$$

Для второго слагаемого имеем,

$$\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}(t,x)v_{x_j}(t,x)dxdt = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}(t,x)v_{x_j}(t,x)dxdt =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\int\limits_0^\tau u_{x_i}(t,x)\left(\int\limits_t^T u_{x_j}(s,x)ds\right)dtdx =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\int\limits_0^\tau u_{x_i}(s,x)ds\int\limits_0^s u_{x_j}(t,x)dtdx =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\int\limits_0^\tau u_{x_i}(s,x)ds\int\limits_0^\tau u_{x_j}(t,x)dtdx -$$

$$- \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\int\limits_0^\tau u_{x_i}(s,x)ds\int\limits_t^\tau u_{x_j}(t,x)dtdx \geq$$

$$\geq C_A \int\limits_Q \left| \int\limits_0^\tau \nabla u dt \right|^2 dx - \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int\limits_0^\tau u_{x_i}(s,x)ds \int\limits_t^\tau u_{x_j}(t,x)dtdx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int\limits_0^\tau u_{x_i}(s,x)ds \int\limits_t^\tau u_{x_j}(t,x)dtdx \geq \frac{C_A}{2} \int\limits_Q \left| \int\limits_0^\tau \nabla u dt \right|^2 dx.$$

Отсюда и из (VIII.6) получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} u|^2_{t=\tau} dx + \frac{C_A}{2} \int\limits_Q \left| \int\limits_0^\tau \nabla u dt \right|^2 dx \leq 0. \qquad \text{(VIII.7)}$$

А значит $u = 0$. □

3. Существование и единственность обобщенного решения

Также как и для параболических уравнений существование и единственность обобщенных решений могут быть доказаны независимо друг от друга. Начнем с единственности.

Теорема 3.1. *Задача* (VIII.1)–(VIII.3) *может иметь не более одного обобщенного решения.*

Доказательство. Предположим, что задача (VIII.1)–(VIII.3) имеет два обобщенных решения u' и u'', тогда функция $u = u' - u''$ есть обобщенное решение при $\varphi = 0$, $\psi = 0$ и $f = 0$, в силу теоремы 2.2

$$u = 0$$

и $u' = u''$. □

Существование обобщенного решения смешанной задачи для гиперболического уравнения мы докажем методом Галеркина.

Теорема 3.2. *Для любых* $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$, $\psi \in L_2(Q)$, $f \in L_2(Q_T)$ *существует обобщенное решение задачи* (VIII.1)–(VIII.3).

Доказательство. В гильбертовом пространстве $L_2(Q)$ фиксируем какой-либо ортонормированный базис, который мы обозначим через $\{w_k\}$ с таким условием, что $w_k \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q) \cap H^2(Q)$. В качестве этого базиса можно выбрать собственные функции соответствующего эллиптического оператора, тогда доказательство пойдет по методу Фурье. Однако на практике построение собственных функций может быть очень сложной задачей тогда, как в пространстве $L_2(Q)$ существует большое количество простых базисов, которые хорошо могут быть использованы при приближенном вычислении решений.

Для каждого $N > 0$ введем обозначения

$$\varphi^N = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k w_k, \quad \varphi_k = (\varphi, w_k)_{L_2(Q)},$$

$$\psi^N = \sum_{k=1}^{N} \psi_k w_k, \quad \varphi_k = (\psi, w_k)_{L_2(Q)},$$

$$f^N = \sum_{k=1}^{N} f_k w_k, \quad f_k = (f, w_k)_{L_2(Q)}.$$

Заметим, что φ_k и ψ_k — числа, а $f_k = f_k(t)$ — числовые функции.

Числовые функции $\{u_k^N\}_{k=1}^N$ найдем как решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$(u_k^N(t))'' + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{N} u_k^N(t)(w_k)_{x_i}, (w_k)_{x_j} \right)_{L_2(Q)} = f_k, \ k = 1, \ldots, N. \tag{VIII.8}$$

с начальными условиями

$$u_k^N(0) = \varphi_k,$$

$$(u_k^N)'(0) = \psi_k.$$

Эта задача Коши имеет единственное решение на $[0, T]$, причем функция

$$u^N(t, x) = \sum_{k=1}^{N} u_k^N(t) w_k(x)$$

принадлежит $H^2(Q_T)$.

Покажем, что эта функция есть обобщенное решение задачи (VIII.1)–(VIII.3) с начальными данными φ^N, ψ^N и правой частью f^N. Для любой пробной функции $v \in H^1(Q_T)$ такой, что $v|_{\Gamma_T} = 0$ и $v|_{t=T} = 0$ рассмотрим ее разложение в ряд Фурье по базису $\{w_k\}$

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) w_k(x), \quad v_k(t) = (v, w_k)_{L_2(Q)}.$$

Умножим k-ое равенство (VIII.8) на $v_k(t)$ и учтем, что в этом равенстве $(u_k^N(t))'' = (u_k^N(t) w_k, w_k)_{L_2(Q)}$ и $f_k = (f_k w_k, w_k)_{L_2(Q)}$, поскольку $(w_k, w_k)_{L_2(Q)} = 1$ в силу ортогональности базиса. В итоге получаем равенства

$$((u_k^N(t))'' w_k, v_k(t) w_k)_{L_2(Q)} +$$

$$+ \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{N} u_k^N(t)(w_k)_{x_i}, v_k(t)(w_k)_{x_j} \right)_{L_2(Q)} =$$

$$= (f_k(t) w_k, v_k(t) w_k)_{L_2(Q)}, \ k = 1, \ldots, N.$$

Теперь просуммируем эти равенства и проинтегрируем по t от 0 до T, тогда получаем

$$\int\limits_{Q_T} \left(u_{tt}^N v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i}^N v_{x_j} \right) dtdx = \int\limits_{Q_T} f^N v dtdx.$$

Интегрируем по частям по t в первом слагаемом и получаем

$$\int\limits_{Q_T} \left(-u_t^N v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i}^N v_{xj} \right) dxdt = \int\limits_{Q} \psi^N v|_{t=0} dx + \int\limits_{Q_T} f^N v dxdt. \tag{VIII.9}$$

Поскольку $u^N|_{t=0} = \varphi^N$ и $u^N|_{\Gamma_T} = 0$, то мы видим, что функции u^N являются обобщенными решениями.

В силу априорной оценки (теорема 2.1) мы имеем

$$\|u^N\|_{H^1(Q_T)} \leq M,$$

где M константа не зависит от N. Поэтому последовательность $\{u^N\} \subset H^1(Q_T)$ является слабо предкомпактной в пространстве

$H^1(Q_T)$. Следовательно, без ограничения общности, можно считать, что и сама последовательность u^N слабо сходится к некоторой функции $u \in H^1(Q_T)$ и в силу теоремы Реллиха-Гординга эта последовательность сходится к u в $L_2(Q_T)$.

Покажем, что $u|_{t=0} = \varphi$. Действительно, поскольку функции u^N сходятся по норме $L_2(Q)$, то имеет место представление

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u^N(t),$$

где ряд сходится в $L_2(Q_T)$. При этом

$$u|_{t=0} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} u_k^N(0,x) w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k w_k(x) = \varphi.$$

Поэтому, переходя к пределу при $N \to \infty$ в равенстве (VIII.9), получаем, что функция u есть обобщенное решение задачи (VIII.1)–(VIII.3). $\square$

Глава IX

Системы Коши-Ковалевской

1. Шкалы банаховых пространств

Шкалой (непрерывной) банаховых пространств называется множество банаховых пространств, индексированных непрерывным показателем и связанных между собой вложением (непрерывным). Мы будем рассматривать только непрерывные банаховы пространства, специально не оговаривая.

Пусть для всех $s \in [0, S)$ определены банаховы пространства H_s, для которых имеют место вложения

$$H_s \subset H_{s'}, \quad \|\cdot\|_{s'} \leq \|\cdot\|_s, \quad 0 \leq s' \leq s,$$

где через $\|\cdot\|_s$ обозначена норма в пространстве H_s.

2. Абстрактное эволюционное уравнение

Будем рассматривать следующее эволюционное уравнение в шкале банаховых пространств

$$\begin{aligned} &\tfrac{du(t)}{dt} = F(t, u(t)), \quad |t| < \delta, \\ &u(0) = 0. \end{aligned} \tag{IX.1}$$

Здесь оператор $F : \mathbb{R}\times H_s \to H_0$ удовлетворяет следующим трем условиям.

1. Существуют такие константы $R > 0$, $s_0 > 0$, $\lambda > 0$ что для всех $0 < s' < s < s_0$ оператор F непрерывно отображает множество
$$[0, s_0/\lambda) \times \{u \in H_s : \|u\|_s < R\}$$
в $H_{s'}$.

2. Для всех $s' < s < s_0$ и любых $u, v \in H_s$ таких, что $\|u\|_s < R$, $\|v\|_s < R$ и $0 \le t < s_0/\lambda$ имеет место оценка
$$\|F(t,u) - F(t,v)\|_{s'} \le C\frac{\|u-v\|_s}{s-s'},$$
где константа $C > 0$ не зависит от t, u, v, s, s'.

3. Функция $F(t,0)$ со значениями в пространстве H_s является непрерывной по t на множестве $t \in [0, s_0/\lambda)$, и для всех $0 < s < s_0$ имеет место оценка
$$\|F(t,0)\|_s \le K.$$

3. Разрешимость эволюционного уравнения

Будем рассматривать новую шкалу банаховых пространств B^γ, $\gamma \ge 0$. Пространство B^γ состоит из непрерывных функций $u(t)$, заданных при условии $s + \lambda t < s_0$ с нормой
$$\|u\|^\gamma = \sup_{s+\lambda t<s_0} (s_0 - s - \lambda t)^\gamma \|u(t)\|_s.$$

Докажем две леммы.

Лемма 3.1. *Пусть $u, v \in B^0$ и $\|u\|^0 < R$, $\|v\|^0 \le R$. Тогда для любого $\gamma > 0$ имеет место*
$$\|F(t,u) - F(t,u)\|^{\gamma+1} \le 2^{\gamma+1}C\|u-v\|^\gamma.$$

Доказательство. Для фиксированных $0 < s' < s < s_0$ функции $F(t,u)$ со значениями в $H_{s'}$ непрерывны для $u \in B^\gamma$, при $0 \le t < (s_0 - s)/\lambda$, кроме того, это верно и для $0 \le t < (s_0 - s')/\lambda$.

Положим $\rho = s_0 - s' - \lambda t$, $s = s' + \rho/2$. Тогда имеем

$$s_0 - s - \lambda t = \frac{\rho}{2} = s - s',$$

с учетом условия 2 относительно оператора F имеем оценки

$$(s_0 - s' - \lambda t)^{\gamma+1} \|F(t, u(t)) - F(t, v(t))\|_{s'} \leq$$

$$\leq 2^{\gamma+1}(s_0 - s - \lambda t)^{\gamma} C \|u(t) - v(t)\|_s \leq 2^{\gamma+1} C \|u - v\|^{\gamma}.$$

Возьмем в этом неравенстве $\sup\limits_{s'+\lambda t < s_0}$ и получим утверждение леммы. $\square$

Лемма 3.2. *Для $\gamma > 0$ и $u \in B^{\gamma+1}$ мы имеем оценку*

$$\left\| \int\limits_0^t u(\tau) d\tau \right\|^{\gamma} \leq \frac{\|u\|^{\gamma+1}}{\gamma^{\lambda}}.$$

Доказательство. По определению нормы в пространстве $B^{\gamma+1}$ для всех $s + \lambda t < s_0$ мы получаем неравенства

$$\left\| \int\limits_0^t u(\tau) d\tau \right\| \leq \int\limits_0^t \|u(\tau)\|_s d\tau \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t (s_0 - s - \lambda\tau)^{-\gamma-1} \|u(\tau)\|^{\gamma+1} d\tau \leq (s_0 - s - \lambda t)^{-\gamma} \frac{\|u\|^{\gamma+1}}{\gamma^{\lambda}}.$$

Отсюда получается утверждение леммы. $\square$

Теорема 3.1. *Для любых положительных s_0, R, C и K существует положительная константа λ_0 такая, что при выполнении условий относительно оператора F с величиной $\lambda > \lambda_0$ существует единственная непрерывно дифференцируемая по t на функция $u(t)$ со значениями в H_s, $0 < s < s_0$, $\|u\|_s < R$, которая удовлетворяет задаче* (IX.1) *при $0 \leq t < (s_0 - s)/\lambda$.*

Доказательство. Фиксируем число $\gamma \in (0, 1)$ и рассмотрим

$$\lambda > \lambda_0 = \max\left\{\frac{2^{\gamma+1}C}{\gamma}, \frac{Ks_0}{(1-\gamma)R}\right\}.$$

Введем обозначение

$$M[u] = \sup_{0 \le \tau < s_0/\lambda} \sup_{s+\lambda t < s_0} (s_0 - s - \lambda t)^\gamma \|F(\tau, u(t))\|_s.$$

Через B_0 мы обозначим множество функций $u \in B^\gamma$, удовлетворяющие оценкам

$$\|u\|^{(0)} = \sup_{s+\lambda t < s_0} \|u(t)\|_s < R, \quad M[u] \le R_0 = K s_0^\gamma.$$

Согласно третьему условию на оператор мы имеем

$$M[0] = \sup_{0 \le \tau < s_0/\lambda} \sup_{0 < s < s_0} (s_0 - s)^\gamma \|F(\tau, 0)\|_s \le K s_0^\gamma = R_0,$$

поэтому $0 \in B^0$.

Введем оператор T в пространстве B^0 по формуле

$$Tu(t) = \int\limits_0^t F(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

Для $u, v \in B^0$ в силу лемм 3.1 и 3.2 имеем

$$\begin{gathered} \|Tu - Tv\|^{(\gamma)} \le \tfrac{1}{\gamma^\lambda} \|F(t, u(t)) - F(t, v(t))\|^{(\gamma+1)} \le \\ \le \tfrac{2^{\gamma+1} C}{\gamma^\lambda} \|u - v\|^{(\gamma)} \le \tfrac{\lambda_0}{\lambda} \|u - v\|^{(\gamma)}. \end{gathered} \tag{IX.2}$$

Покажем, что $T(B^0) \subset B^0$. Поскольку $\|F(t, u(t))\|^{(\gamma)} \le M[u]$, то для $u \in B^0$, $s + \lambda t < s_0$ мы получаем

$$\|T\|_s = \int\limits_0^t \|F(\tau, u(\tau))_s d\tau \le M[u] \int\limits_0^t (s_0 - s - \lambda t)^{-\gamma} d\tau \le M[u] \frac{s_0^{1-\gamma}}{(1-\gamma)^\lambda}$$

и

$$\|Tu\|^{(0)} = \sup_{s+\lambda t < s_0} \|Tu(t)\|_s \le \frac{K s_0}{(1-\gamma)\lambda} = R' < R \tag{IX.3}$$

поэтому функция Tu принадлежит пространству B^0.

Теперь покажем, что

$$M[Tu] \le R_0, \quad u \in B^0. \tag{IX.4}$$

Для этого достаточно показать, что для всех $0 \le \tau < s_0/\lambda$, $0 < s' < s_0$, $0 \le t < (s_0 - s')/\lambda$ мы имеем

$$f(t) = \rho^\gamma g(t) \le R_0,$$

где

$$\rho = \rho(t) = s_0 - s' - \lambda t, \quad g(t) = \|F(\tau, Tu(t))\|_{s'}.$$

В силу предположений относительно оператора F мы имеем непрерывность функции $f(t)$. Введем обозначение

$$Df(t) = \limsup_{t' \to t} \frac{f(t') - f(t)}{t' - t}.$$

Имеем

$$Df(t) = -\gamma\lambda\rho^{\gamma-1} g(t) + \rho^\lambda Dg(t), \quad 0 \le t < (s_0 - s')/\lambda.$$

Положим теперь $s = s' + \rho/2$. Имеем оценки

$$g(t') - g(t) \le \|F(\tau, Tu(t')) - F(\tau, Tu(t))\|_{s'} \le$$

$$\le \frac{C}{s - s'}\|Tu(t') - Tu(t)\|_s \le \frac{C}{s - s'} \int\limits_0^{t'} \|F(\tau, u(\tau))\|_s d\tau$$

для $0 \le t < t'$. Таким образом, мы имеем

$$Dg(t) \le 2C\rho^{-1}\|F(t, u(t))\|_s,$$

$$\rho Df(t) \le -\gamma\lambda f(t) + 2C\rho^\gamma \|F(t, u(t))\|_s \le$$
$$\le -\gamma\lambda f(t) + 2^{\gamma+1} C M[u] \le -\gamma\lambda f(t) + \gamma\lambda R_0.$$

Если $f(t) > R_0$, то $Df(t) < 0$. Поскольку $M[0] = R_0$, то $f(0) \le R_0$, поэтому мы имеем (IX.4). Следовательно, мы показали, что $T(B^0) \subset B^0$.

Для доказательства существования решения задачи (IX.1) рассмотрим последовательность $\{u_k\} \subset B^0$, которую построим следующим образом

$$u_0 = 0, \quad u_k = Tu_{k-1} = T^k u_0, \ k = 1, 2, \ldots.$$

В силу (3.2) мы имеем

$$\|u_{k+1} - u_k\|^{(\gamma)} = \|T^k u_1 - T^k u_0\|^{(\gamma)} \le q^k \|u_1\|^{(\gamma)},$$

где $0 < q < \lambda_0/\lambda < 1$. Отсюда следует, что последовательность $\{u_k\}$ является фундаментальной в пространстве B^γ, поэтому сходится к функции u, которая является решением проблемы

$$u = Tu,$$

которая эквивалентна задачи (IX.1).

Докажем теперь единственность решения задачи (IX.1). Из сходимости $u_k \to u$ при $k \to \infty$ в пространстве B^γ следует сходимость

$$u_k(t) \to u(t), \quad k \to \infty, \quad s + \lambda t < s_0.$$

В силу (IX.3) для $Tu_k = u_{k+1}$ мы имеем оценку

$$\|u\|^{(0)} \leq R' < R. \tag{IX.5}$$

Для доказательства единственности решения u достаточно показать, что $\|u - v\|^{(\gamma)} = 0$ для любой непрерывно дифференцируемой функции $v(t)$ при $0 \leq t < (s_0 - s)/\lambda$ со значениями в B^s, $0 < s < s_0$, удовлетворяющей $v = Tv$. В силу (IX.2) это верно, если $\|v\|^{(\gamma)} < R$.

Предположим, что $\|v\|^{(0)} \geq R$. В этом случае для функции $V(\sigma =) = \sup\limits_{s+\lambda t<\sigma} \|v(t)\|_s$ мы имеем

$$\lim_{\sigma \to s_0} = \|v\|^{(0)} \geq R.$$

Поскольку $v_t(t)$ является непрерывной функцией со значениями H_s для $0 \leq t < (s_0 - s)/\lambda$, то значения $\|v_t(t)\|_s$ ограничены для любого $\sigma \in (0, s_0)$. Следовательно, $V(\sigma)$ является непрерывной на $(0, s_0)$, поэтому мы можем выбрать $s'_0 \in (0, s_0)$ такую, что

$$R' < V(s'_0) < R. \tag{IX.6}$$

Мы можем использовать неравенство (IX.2) со значением s' вместо s. В этом случае мы имеем $\|u(t) - v(t)\|_s = 0$ при $s + \lambda t < s'_0$, поэтому (IX.6) противоречит (IX.5). $\square$

4. Нелинейное уравнение первого порядка

В качестве примера системы Коши-Ковалевской, для которого верна доказанная выше теорема, приведем нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Рассмотрим уравнение

$$u_t(t,x) = F(t,x,u(t,x),u_x(t,x)) \tag{IX.7}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = 0,$$

где F — функция, аналитическая в окрестности нуля по всем аргументам. Эта функция должна удовлетворять следующим условиям:

1. Существуют такие $s_0 \in (0,1]$, $r > 0$ и $\lambda > 0$, что функция $F(t,x,u,p)$ является непрерывной по t и аналитичной в (x,u,p) на множестве

$$D = \{0 \le t < s_0/\lambda\} \times \{|x| < s_0\} \times \{|u| < r\} \times \{|p| < r\}.$$

2. Существует такая константа C_0, что на множестве D имеют место оценки

$$|F|, |F_x|, |F_u|, |F_p| \le C_0.$$

В этих условиях оператор F будет ограниченным в любой такой области D_1, что $D \subset D_1$.

Для всех s таких, что $0 < s < s_0$ введем шкалу банаховых пространств B_s, где каждое B_s состоит из аналитических в $\{|x| < s\}$ функций $f(x)$ с ограниченной нормой

$$\|f\|_s = \sup_{|x|<s} |f(x)| + \sup_{|x|<s} |f'_x(x)|.$$

Из комплексного анализа известно, что для производных аналитических функций имеют место следующие оценки

$$\sup_{|x|<s'} |f'_x(x)| \le \frac{1}{s-s'} \sup_{|x|<s} |f(x)|$$

для $0 < s' < s$. Таким обозом, для $0 < s' < s < s_0 \le 1$ и $f \in B_s$ мы имеем

$$\|f\|_{s'} \le \left(1 + \frac{1}{s-s'}\right) \sup_{|x|<s} |f(x)| \le \frac{2}{s-s'} \sup_{|x|<s} |f(x)|$$

Далее, используя теорему о среднем, для $(t,x,u,u_x), (t,x,v,v_x) \in D$ мы получаем

$$|F(t,x,u,u_x) - F(t,x,v,v_x)| \le C_0C_1|u-v| + C_0C_2|u_x - v_x|.$$

Кроме того,

$$\|F(t,x,0,0)\|_s = \sup_{|x|<s} |F(t,x,0,0)| + \sup_{|x|<s} |F'_x(t,x,0,0)| \le 2C_0.$$

Таким образом, оператор F удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1, поэтому задача (IX.7) имеет локальное решение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

[2] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

[3] *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.

[4] *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: 1973.

[5] *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

[6] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., Мир, 1973.

[7] *Шамин Р.В.* Математические вопросы волн-убийц. М.: ЛЕНАНД/URSS, 2016.

[8] *Шамин Р.В.* Полугруппы операторов. М.: РУДН, 2008.

[9] *Шамин Р.В.* Функциональный анализ от нуля до единицы. М.: ЛЕНАНД/URSS, 2016.

[10] *Rossovskii L.E., Skubachevskii A.L.* Partial differential equations. Part 1. Function spaces. Elliptic problems. Moscow: PFUR, 2015.

[11] *Rossovskii L.E., Skubachevskii A.L.* Partial differential equations. Part 2. Evolutinary equations. Moscow: PFUR, 2015.

Учебное издание

Шамин Роман Вячеславович

Дифференциальные уравнения в частных производных в пространствах Соболева

Художник *Михаил Шамин*

Формат $60 \times 90\frac{1}{16}$. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 11,25. Зак. № 30294. Тираж 600 экз.
ООО «Грин Принт». 105318, г. Москва, Измайловское ш., д. 28,
Тел.: +7(495)118-09-26