9. Виды распределений случайных величин

9.1. Биномиальный закон распределения

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Пусть проведено n независимых испытаний с вероятностью p появления события A в каждом испытании (испытания Бернулли). Обозначим ξ – случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях. По формуле Бернулли

$$P\{\xi = m\} = P(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p,\ m = 0,1,\ \dots, n. \quad (9.1)$$

Определение 9.1. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое нижеприведенной таблицей, называется* ***биномиальным.***

ξ	0	1	2	...	k	...	n
p	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами n и p.

Математическое ожидание и дисперсия для биномиально распределённой случайной величины ξ вычисляется по формулам:

$$M(\xi) = np; \quad D(\xi) = npq. \quad (9.2)$$

Пример 9.1. *Вероятность попадания стрелком в мишень равна* 0,8. *Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины ξ — числа попаданий в мишень при трёх выстрелах.*

► Данная случайная величина имеет следующие возможные значения: 0 (стрелок не попал в мишень ни разу), 1 (попал один раз), 2 (попал два раза), 3 (ни разу не промахнулся). Здесь $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$, $n = 3$.

По формуле Бернулли (12.1) найдем:

$$P(0) = C_3^0 \cdot (0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^3 = \frac{1}{125}, \quad P(1) = C_3^1 \cdot (0{,}8)^1 \cdot (0{,}2)^2 = \frac{12}{125},$$

$$P(2) = C_3^2 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^1 = \frac{48}{125}, \quad P(3) = C_3^3 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^0 = \frac{64}{125}.$$

Отметим, что $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 1$.

Ряд распределения примет вид:

Ответ:

ξ	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

◄

Пример 9.2. *В партии поступивших на склад деталей 10% бракованные. Случайным образом выбрали n=15 деталей. Случайная величина ξ — число бракованных деталей среди выбранных. Составить ряд распределения случайной величины ξ. Не применяя формулы (9.2) найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ. Какова вероятность, что будет выбрано более трёх бракованных деталей. Построить график ряда распределения случайной величины ξ.*

►По формуле Бернулли (12.1) найдем:

$$P(\xi = k) = C_n^k \cdot (0{,}1)^k \cdot (0{,}9)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 15.$$

Для вычисления математического ожидания применяем формулу $M(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{15} k \cdot P(\xi = k)$.

Для вычисления дисперсии применяем формулу

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi), \quad \text{где } M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{15} k^2 \cdot P(\xi = k).$$

Для вычисления вероятности, что будет выбрано более трёх бракованных деталей находим

$P\_3\_15 = \sum\limits_{k=4}^{15} P(\xi = k)$ или $P\_3\_15 = 1 - \sum\limits_{k=0}^{3} P(\xi = k)$.

Выполнять такой огромный объём работы долго и неинтересно, поэтому пишем Maxima-программу, которая по приведённым формулам получит и выведет все требуемые результаты. Программа очень простая и понятная. При помощи встроенной функцией ***pdf_ binomial***(k, n, p) которая вычисляет по формулам (12.1) значения полученного ряда распределения. Создаём массив P, в который записываем полученные значения. В список G записываем значения координат точек для построения графика. Функция plot2d, по координатам списка G строит график, рис. 31. Используя функцию ***sum***, находим математическое ожидание M, дисперсию D случайной величины ξ и искомую вероятность P_3_15.

```
kill(all)$  load(distrib)$ fpprintprec:3$ n:15$ p:0.1$
array(P,n)$
```

```
fillarray(P,makelist(pdf_binomial(k, n, p), k, 0, n))$
G:makelist([k,P[k]],k,0,n);
plot2d([discrete,G], [x,0,8],[style,points],
          [gnuplot_postamble, "set grid;"])$
M:sum(k*P[k],k,0,n);
D:sum(k^2*P[k],k,0,n)-M^2;
P_3_15:sum(P[k],k,4,n);
Результаты
(G)[[0,0.206],[1,0.343],[2,0.267],[3,0.129],[4,0.043],[5,0.011],
[6,0.00194],[7,2.77*10^-4],[8,3.08*10^-5],[9,2.66*10^-6],
[10,1.77*10^-7],[11,8.96*10^-9],[12,3.32*10^-10],
[13,8.51*10^-12], [14,1.35*10^-13],[15,1.0*10^-15]]
(M) 1.5
(D) 1.35
(P_3_15) 0.0556
```

◀

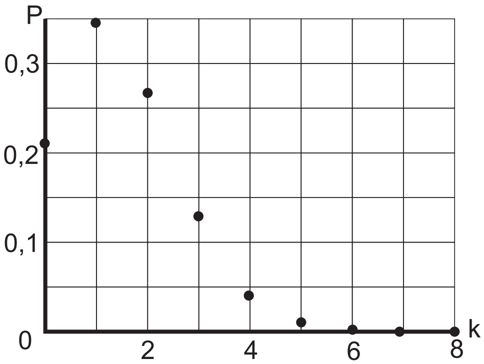

Рис. 31. *Биномиальное распределения для примера 9.2*

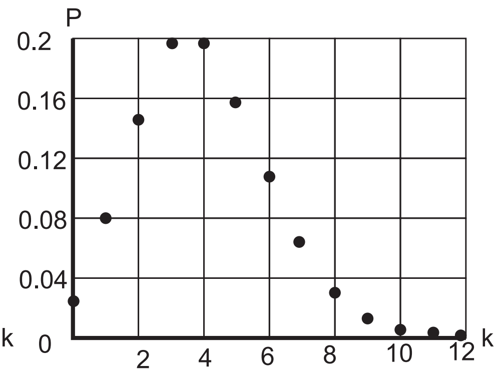

Рис. 32. *Распределения Пуассона для примера 9.4*

9.2. Распределение Пуассона

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Пусть в испытаниях Бернулли $n \to \infty$, $p \to 0$, так, что $np \to \lambda$. Тогда вероятность $P_n(m)$ приближённо определяется с помощью формулы Пуассона:

$$P\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0. \tag{9.3}$$

Определение 9.2. *Распределение дискретной случайной величины, задаваемое формулой (9.3), называется распределением Пуассона или* ***пуассоновским распределением.***

Запишем закон распределения Пуассона в виде таблицы:

ξ	0	1	2	$\dots$	m	$\dots$
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	$\dots$

Итак, для случайной величины, имеющей распределение Пуассона, получим:

$$M(\xi) = D(\xi) = \lambda. \tag{9.4}$$

Пример 9.3. *Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна* 0,02. *Производится выборка* 120 *изделий. Записать закон распределения числа бракованных изделий в выборке.*

► Здесь $n = 120$ и $p = 0{,}02$. Поскольку первая величина больше 100, а вторая – меньше 0,1, то для решения задачи можно применить формулу Пуассона (9.3). Параметр $\lambda = np = 120 \cdot 0{,}02 = 2{,}4$; из таблицы найдем, что $e^{-2,4} = 0{,}0907$. Тогда

$$P\{\xi = 0\} = \frac{2{,}4^0 \cdot e^{-2,4}}{0!} = 0{,}0907, \quad P\{\xi = 1\} = \frac{2{,}4^1 \cdot e^{-2,4}}{1!} = 0{,}2177,$$

$$P\{\xi = 2\} = 0{,}2612, \quad P\{\xi = 3\} = 0{,}2090, \dots$$

Здесь наибольшая вероятность при $k = 2$. Распределение Пуассона можно записать следующим образом:

ξ	0	1	2	3	...	k	...
p	0,0907	0,2177	0,2612	0,2090	...	$2{,}4^k \cdot e^{-2,4}/k!$	...

Для вычисления распределения Пуассона $P(\xi = m) = \dfrac{\lambda^m}{m!}\ e^{-\lambda}$ в компьютерный пакет Maxima встроена функция pdf_poisson(m,a), а в пакет MathCad – dpois(m,λ).

Maxima-программа.

(%i1) load(distrib)$

(%i2) fpprintprec:5$ n:120$ p:0.02$ a:n*p;

(%i5) P:makelist(pdf_poisson(k, a), k, 0, n);

(%o5) [0.091, 0.218, 0.261, 0.209, 0.125, 0.06, 0.024, 0.008, ...

◄

Пример 9.4. *В партии поступивших на склад деталей 1% бракованные. Случайным образом выбрали n=400 деталей. Случайная величина ξ — число бракованных деталей среди выбранных. Составить ряд распределения случайной величины ξ. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ. Какова вероятность, что будет выбрано более пяти бракованных деталей. Построить график ряда распределения случайной величины ξ на отрезке $x \in [0; L+4\sigma(\xi)]$, где $\sigma(\xi)$ —среднеквадратическое отклонение случайной величины ξ.*

►Этот пример подобен решённому выше примеру 9.2, только число испытаний значительно больше и применения формул Бернулли затруднительно.

Применяем формулы Пуассона (9.3). Здесь $\lambda = n\,p = 400 \cdot 0{,}1 = 4$.

$$P(\xi = k) = \frac{4^k}{k!}e^{-4}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Для вычисления математического ожидания и дисперсии применяем формулу $M(\xi) = D(\xi) = \lambda = 4$. $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = 2$.

Пишем Maxima-программу, которая по приведённым формулам получит и выведет все требуемые результаты и строит график функции распределения на отрезке $x \in [0; 12]$, рис. 32.

```
kill(all)$  load(distrib)$  fpprintprec:3$  n:400$ p:0.01$  L:n*p;
M:L$   D:L$   S:sqrt(D);    m1:0$     m2:fix(L+4*S);
array(P,100)$
fillarray(P,makelist(L^k/k!*exp(-L), k, 0 ,m2))$
G:makelist([k,P[k]],k,m1,m2);
plot2d([discrete,G], [x,m1,m2],[gnuplot_postamble, "set grid;"])$
P_5_n:1-sum(P[k],k,0,5);
```

```
Вывод программы
(L) 4.0
(S) 2.0
(m2) 12
(G) [[0,0.0183],[1,0.0733],[2,0.147],[3,0.195],[4,0.195],
[5,0.156],[6,0.104],[7,0.0595],[8,0.0298],[9,0.0132],
[10,0.00529],[11,0.00192],[12,6.42*10^-4]]
(P_5_n) 0.215
```

◄

Пример 9.5. *В диспетчерской автопредприятия среднее число заявок, поступающих в одну минуту, равно* 2. *Найти вероятности того, что за одну минуту: не поступит вызова, поступит* $1, 2, 3, \ldots$ *вызовов.*

►Количество вызовов ξ, поступивших за время t, имеет распределение Пуассона:

$$P_t\{\xi = k\} = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!},$$

где λ - среднее число событий в единицу времени (интенсивность). В данном случае $\lambda = 2,\ t = 1$. Следовательно,

$$P_1\{\xi = 0\} = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} \approx 0{,}135, \quad P_1\{\xi = 1\} = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} \approx 0{,}271,$$

$$P_1\{\xi = 2\} = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} \approx 0{,}271, \quad P_1\{\xi = 3\} = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx 0{,}180, \ldots$$

Ответ:

ξ	0	1	2	3	...
p	0,135	0,271	0,271	0,180	...

◄

Пример 9.6. *На складе* 20% *приборов являются неточными. Взяты 5 приборов для проверки. Составить таблицу распределения случайной величины* ξ *– числа точных приборов среди проверенных. Определить математическое ожидание* $M(\xi)$ *и* $D(\xi)$.

►Вероятность отбора неточного прибора $q = 0{,}2$, а точного прибора $p = 1 - q = 0{,}8$. В данной задаче имеем биномиальное распределение. Запишем ряд распределения:

ξ	0	1	2	3	4
p	$0{,}2^5$	$C_5^1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^4$	$C_5^2\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^3$	$C_5^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2$	$C_5^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2$
ξ	5				
p	$0{,}8^5$				

Для получения числовых значений используем Maxima-программу:

(%i1) load(distrib)$ fpprintprec:4$

(%i3) P:makelist(pdf_binomial(k, 5, 0.8), k, 0, 5);

(%o4) $[3.2*10^{-4},\ 0.0064,\ 0.0512,\ 0.205,\ 0.41,\ 0.328]$

MathCad-программа решения этой задачи:

$k := 0..5 \qquad P_k := dbinom(k, 5, 0.8)$

$P = \left(3.2\times10^{-4}\ \ 6.4\times10^{-3}\ \ 0.051\ \ 0.205\ \ 0.41\ \ 0.328\right)$

Согласно формулам (9.2), математическое ожидание $M(\xi) = np = 5\cdot 0{,}8 = 4$, а дисперсия $D(\xi) = npq = 5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 = 0{,}8$.

Ответ: $M(\xi) = 4,\ D(\xi) = 0{,}8$. ◄

9.3. Геометрическое распределение

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Пусть производится ряд независимых испытаний («попыток») для достижения некоторого результата (события A), и при каждой попытке событие A может появиться с вероятностью p. Тогда число попыток ξ до появления события A, включая удавшуюся, является дискретной случайной величиной, возможные значения которой принимают значения: $m = 1, 2, \ldots, m, \ldots$ Вероятности их по теореме умножения вероятностей для независимых событий равны

$$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{9.5}$$

где $0 < p < 1, \quad q = 1 - p$.

Ряд распределения ξ имеет вид

ξ	1	2	3	...	m	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	...

$$M(\xi) = \frac{1}{p}, \qquad D(\xi) = \frac{q}{p^2}. \tag{9.6}$$

Пример 9.7. *Детали, количество которых неограниченно, проверяют до появления бракованной. Вероятность брака для каждой* *детали одинакова и равна* 0,6. *Построить ряд распределения дискретной случайной величины* ξ — *числа проверенных деталей. Найти математическое ожидание* $M(\xi)$, *дисперсию* $D(\xi)$ *и среднеквадратическое отклонение* $\sigma(\xi)$ *случайной величины* ξ. *Какова вероятность, что будет проверено более четырёх деталей. Построить график ряда распределения случайной величины* ξ *на отрезке* $k \in [0; 8]$.

►Используем формулу для геометрического распределения (9.5) при $p = 0{,}6$.

$$P(\xi = k) = 0{,}6 \cdot 0,4^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

$P(\xi = 1) = 0{,}6$; $\quad P(\xi = 2) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$;
$P(\xi = 3) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}096$; $\quad P(\xi = 4) = 0{,}6 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}0384; \dots\dots$
$P\_5\_n = 1 - (0{,}6 + 0{,}24 + 0{,}096 + 0{,}0384) = 0{,}0256$.

Maxima-программа:

```
kill(all)$  load(distrib)$ fpprintprec:3$
p:0.6$ q:1-p; K:8$
M:1/p;   D:q/p^2;   S:sqrt(D);
P:makelist(p*q^(k-1), k, 1 ,K);
P_5_n:1-sum(P[k], k, 1, 4);
plot2d([discrete,P], [x,1,K],[style,points]
[gnuplot_postamble, "set grid;"])$
```

◄

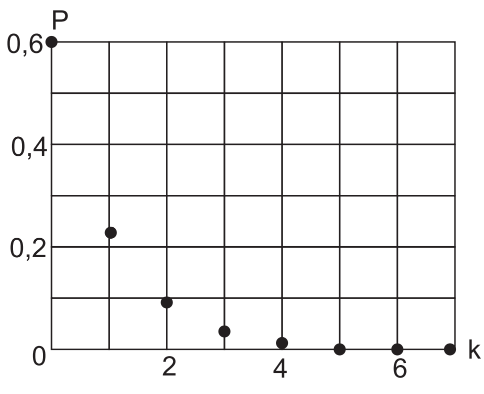

Рис. 33. *Геометрическое распределения для примера 9.7*

9.4. Задачи из типового расчета

Задача 1.7

Пример 9.8. *На переэкзаменовку по теории вероятностей явились 3 студента. Вероятность того, что первый сдаст экзамен, равна* 0,8, *второй* – 0,7, *третий* – 0,9. *Найдите ряд распределения случайной величины ξ числа студентов, сдавших экзамен, постройте график функции распределения, найдите $M(\xi)$, $D(\xi)$ и $\sigma(\xi)$.*

Дискретная случайная величина ξ – число числа студентов, сдавших экзамен принимает следующие возможные значения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Введем обозначения: A_i, $i = 1, 2, 3$ — событие состоящее в том, что i-тый студент сдал экзамен. $p_i = P(A_i)$, $q_i = P(\overline{A}_i) = 1 - p_i$.

Тогда событие B_i, состоящее в том i студентов сдадут экзамен можно записать следующими выражениями:

$B_0 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,

$B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,

$B_2 = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$,

$B_3 = A_1A_2A_3$.

Находим вероятности данных событий.

$P(B_0) = q_1q_2q_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}006$

$P(B_1) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 =$

$= 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}092,$

$P(B_2) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 =$

$= 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}398,$

$P(B_3) = p_1p_2p_3 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$

Закон распределения примет вид:

ξ	0	1	2	3
p	0,006	0,092	0,398	0,504

Отметим, что сумма вероятностей равна единице.

Найдём числовые характеристики случайной величины ξ.

$M(\xi) = 0 \cdot 0{,}006 + 1 \cdot 0{,}092 + 2 \cdot 0{,}398 + 3 \cdot 0{,}504 = 2{,}4.$

$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 0^2 \cdot 0{,}006 + 1^2 \cdot 0{,}092 + 2^2 \cdot 0{,}398 +$
$+ 3^2 \cdot 0{,}504 - 2{,}4^2 = 0{,}46.$
$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{0{,}46} \approx 0{,}678.$

Задача 1.8

Пример 9.9. *Производится стрельба по мишени. Случайная величина ξ – число попаданий.*

а) Вероятность попадания при каждом выстреле 0,6. Было произведено 12 независимых выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ. Определить вероятность того, что будет не менее 10 попаданий в цель.

б) Вероятность попадания при каждом выстреле 0,01 *и было произведено 200 независимых выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ. Определить вероятность того, что будет более двух попаданий в цель.*

$M(\xi) = np = 12 \cdot 0{,}6 = 7{,}2$, $D(\xi) = npq = 7{,}2 \cdot 0{,}4 = 1{,}48.$
$P(A) = P_{12}(10) + P_{12}(11) + P_{12}(12).$
По формуле Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ найдем:
$P_{12}(10) = C_{12}^{10} \cdot 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^2 = 66 \cdot 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^2 \approx 0{,}0639.$
$P_{12}(11) = C_{12}^{11} \cdot 0{,}6^{11} \cdot 0{,}4 = 12 \cdot 0{,}6^{11} \cdot 0{,}4 \approx 0{,}0174.$
$P_{12}(12) = 0{,}6^{12} \approx 0{,}0022.$

б) Вероятность попадания при каждом выстреле 0,01 и было произведено 200 независимых выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ. Определить вероятность того, что будет более двух попаданий в цель.

Применяем формулу для распределения Пуассона

$$P\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

$\lambda = np = 2$

$$M(\xi) = D(\xi) = \lambda = 2.$$

$P(A) = 1 - (P_{200}(0) + P_{200}(1))$

$$P\{\xi = 0\} = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = 0{,}1353.$$

$$P\{\xi = 1\} = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = 0.2707$$

$P(A) = 1 - (P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\}) = 0{,}406.$

9.5. Равномерное распределение

Из непрерывных законов на этом занятии изучим равномерное и экспоненциальное распределения.

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Распределение непрерывной случайной величины называется ***равномерным*** на $[a;b]$, если плотность распределения постоянна и отлична от 0 на этом отрезке и равна нулю вне его:

$$f(x)=\begin{cases} C & \text{при} \quad x\in[a;b],\\ 0 & \text{при} \quad x\notin[a;b].\end{cases}$$

Плотность равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины определяется по формуле:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x\in[a;b],\\ 0 & \text{при} \quad x\notin[a;b].\end{cases} \tag{9.7}$$

Функция распределения равномерно распределённой на $[a;b]$ случайной величины:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant b,\\ 1 & \text{при} \quad b<x.\end{cases} \tag{9.8}$$

$$M(\xi)=\frac{a+b}{2};\quad D(\xi)=\frac{(b-a)^2}{12}. \tag{9.9}$$

Пример 9.10. *Цена деления шкалы измерительного прибора равна* 0,1. *Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при снятии показаний прибора будет сделана ошибка, превышающая* 0,03.

►Ошибку округления до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину ξ, которая распределена равномерно между двумя целыми делениями. Плотность равномерного распределения находим по формуле (9.7), где длина интервала $b-a$ в данной задаче равна 0,1. Ошибка отсчёта превысит 0,03, если она будет заключена в интервале $(0{,}03; 0{,}07)$. По формуле

$$P(a<\xi<b)=\int\limits_a^b f(x)dx,\qquad f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x\in[0;0{,}1],\\ 0 & \text{при } x\notin[0;0{,}1].\end{cases}$$

найдем:

$$P(0{,}03 < \xi < 0{,}07) = \int\limits_{0{,}03}^{0{,}07} 10\,dx = 0{,}4.$$

Ответ: 0,4. ◄

Пример 9.11. *Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, распределённой равномерно в отрезке [1,9].*

►Математическое ожидание и дисперсия определяются в данном случае выражениями (9.9). Так как $a = 1,\ b = 9$, то сразу найдем

$$M(\xi) = \frac{1+9}{2} = 5, \quad D(\xi) = \frac{(9-1)^2}{12} = \frac{16}{3} \approx 5{,}333.$$

Ответ: $M(\xi) = 5,\ D(\xi) = 16/3 \approx 5{,}333$. ◄

Пример 9.12. *Случайная величина ξ распределена равномерно с $M(\xi) = 9/2$ и $D(\xi) = 25/12$. Найти функцию распределения случайной величины ξ.*

►Функция распределения в формуле (9.8) зависит от параметров a и b. Используя (9.9), для определения a и b составим следующие уравнения:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{9}{2}, \qquad \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{12}.$$

Отсюда, с учётом того, что $b > a$, получим $a = 2,\ b = 7$. Функция распределения окончательно примет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 2, \\ \dfrac{x-2}{5} \text{ при } x \in (2,7], \\ 1 \text{ при } x > 7. \end{cases}$$

◄

9.6. Показательное распределение

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Определение 9.3. *Распределение непрерывной случайной величины называется* **экспоненциальным (показательным)**, *если плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \textit{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \textit{при} \quad x < 0, \quad \textit{где } \lambda > 0. \end{cases} \tag{9.10}$$

Экспоненциальное распределение определяется одним параметром $\lambda > 0$.

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{9.11}$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{9.12}$$

Пример 9.13. *Для какого значения a функция $f(x) = ae^{-\lambda x}$ при $x \geqslant 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$ является плотностью показательного закона?*

►Так как $f(x) = 0$ при $x < 0$, то

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty ae^{-\lambda x}dx = 1.$$

Отсюда

$$-\frac{a}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = 1 \Rightarrow a/\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = a.$$

Ответ: $a = \lambda$. ◄

Пример 9.14. *Непрерывная случайная величина распределена по экспоненциальному закону (12.2) с параметром $\lambda = 0{,}07$. Найти математическое ожидание и вероятность того, что в результате испытания ξ попадёт в интервал (2, 10).*

► С учётом (9.12) математическое ожидание $M(\xi) = 1/\lambda = = 1/0{,}07 = 100/7 \approx 14{,}286$. С другой стороны, используя выражение (9.11) для функции распределения, искомую вероятность найдем как приращение этой функции на интервале (2, 10):
$P(2 < \xi < 10) = F(10) - F(2) = 1 - e^{-0{,}7} - 1 + e^{-0{,}14} \approx \approx 0{,}869 - 0{,}497 = 0{,}373$.

Эту же вероятность можно вычислить как

$$P(2 < \xi < 10) = \int\limits_2^{10} 0{,}07e^{-0{,}07t}dt = -e^{-0{,}07t}\Big|_2^{10} \approx 0{,}372.$$

Ответ: $P(2 < \xi < 10) \approx 0{,}372$. ◄

Пример 9.15. *Время безотказной работы элемента распределено по экспоненциальному закону $f(x) = 0{,}03 \cdot e^{-0{,}03t}(t > 0)$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 200 часов.*

►Длительность времени безотказной работы элемента имеет экспоненциальное распределение, у которого функция распределения $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Тогда вероятность безотказной работы t (так называемая функция надежности) имеет вид:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t},$$

где λ – интенсивность отказов или среднее число отказов в единицу времени. В данном примере интенсивность отказов $\lambda = 0{,}03$. Искомая вероятность

$$R(200) = e^{-0{,}03 \cdot 200} = e^{-6} \approx 0{,}003.$$

◄

Задания для самостоятельной работы

Пример 9.16. *Вероятность того, что расход горючего одним автомобилем в день не будет превышать нормы равна* 0,9. *Найти вероятность того, что из четырёх машин автобазы расход горючего за день будет в норме для k автомобилей ($k = 0, 1, 2, 3, 4$).*

Пример 9.17. *В цехе находится четыре станка. Вероятность того, что каждый из них будет остановлен в течение определённого отрезка времени для смены деталей, равна* 0,3. *Определить вероятности того, что за это время будут остановлены* $0, 1, 2, 3, 4$ *станка. Найти математическое ожидание и дисперсию числа остановившихся станков.*

Пример 9.18. *Завод отправил на базу* 300 *изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна* 0,01. *Составить ряд распределения числа повреждённых изделий в пути. Воспользоваться законом Пуассона.*

Пример 9.19. *Брак продукции цеха составляет* 4%. *Определить математическое ожидание и дисперсию числа забракованных изделий цеха из 150 проверенных.*

Пример 9.20. *Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна* 0,005. *Телефонная станция обслуживает* 400 *абонентов. Чему равны дисперсия и среднее число абонентов, которые позвонят на коммутатор в течение часа? Воспользоваться законом Пуассона.*

Пример 9.21. *Интервал движения трамвая 6 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать трамвай менее 4 минут.*

Пример 9.22. *Время ожидания у бензоколонки автозаправочной станции является случайной величиной ξ, распределённой по показательному закону со средним временем ожидания, равным 10 минут. Найти вероятности того, что: а) 5мин $< \xi <$15мин, б) $\xi \geqslant 20$ мин.*

Домашнее задание.

Выполнить задание 1.8, 1.9, 1,11 типового расчёта.