# Практическое занятие №3

## § 2. Функции комплексного переменного:

## *предел, непрерывность, дифференцирование функции комплексного переменного, аналитические функции*

### *2.2 Предел функции комплексного переменного*

Пример. Вычислить предел функции $\lim\limits_{z\to -2i} \frac{8z^2+8iz+16}{z+2i}$.

*Решение*. Непосредственная подстановка в числитель и знаменатель предельного значения аргумента $z=-2i$ обращает их в нуль и приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим числитель на множители, сократим на $(z+2i)$, получим

$$\lim_{z\to -2i} \frac{8z^2+8iz+16}{z+2i} = \lim_{z\to -2i} \frac{8(z+2i)(z-i)}{z+2i} = \lim_{z\to -2i} 8(z-i) = -24i.$$

### *2.3 Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана*

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой области $D$ комплексного переменного $z$. Пусть точки $z$ и $z+\Delta z$ принадлежат области $D$. Обозначим

$$\Delta\omega = f(z+\Delta z) - f(z), \qquad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Определение. *Однозначная функция* $\omega = f(z)$ *называется дифференцируемой в точке* $z \in D$, *если отношение* $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ *имеет конечный предел при* $\Delta z$, *стремящемся к нулю. Этот предел называется производной функции* $f(z)$ *в данной точке* $z$ *и обозначается* $f'(z)$ *или* $\omega'$, *т.е.*

$$\omega' = f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}.$$

Обычные правила дифференцирования функций действительного переменного остаются справедливыми для функций комплексного переменного.

Определение. *Однозначная функция* $f(z)$ *называется аналитической в точке* $z_0$, *если она дифференцируема в самой точке* $z_0$ *и в некоторой окрестности этой точки.*

Теорема. *Для того, чтобы функция* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *была дифференцируема в точке* $z = x + iy$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* $u(x, y), v(x, y)$ *были дифференцируемы в точке* $(x, y)$ *и чтобы в этой точке имели место равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

*называемые условиями Коши-Римана. При этом формулы для производной функции* $f'(z)$ *имеют вид:*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

<u>Пример</u>. Исследовать функцию $f(z) = 3z^2$ на аналитичность.

*Решение*. Выделим действительную и мнимую части функции, подставив вместо $z = x + iy$:

$$f(z) = 3(x + iy)^2 = 3(x^2 - y^2) + 6xyi,$$

т. е.

$$\mathrm{Re}f(z) = u(x, y) = 3x^2 - 3y^2, \mathrm{Im}f(z) = v(x, y) = 6xy.$$

Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы во всех точках $(x, y)$. Проверим выполнение теоремы 2.2.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x, \frac{\partial v}{\partial y} = 6x, \frac{\partial u}{\partial y} = -6y, \frac{\partial v}{\partial x} = 6y.$$

Условия Коши-Римана выполнены во всех точках $(x, y)$, т.е. выполнены условия теоремы 2.2, следовательно, $f(z) = 3z^2$ аналитическая функция на всей комплексной плоскости.

Пример. Исследовать функцию $f(z) = 13\overline{z} + 20$ на аналитичность.

*Решение*. Выделим действительную и мнимую части функции, подставим вместо $\overline{z} = x - iy$

$$f(z) = 13(x - iy) + 20 = (13x + 20) - 13yi,$$

т.е.

$$\mathrm{Re}f(z) = u(x,y) = 13x + 20, \mathrm{Im}f(z) = v(x,y) = -13y.$$

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы во всех точках $(x,y)$, проверим выполнение условий теоремы 2.2

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 13, \frac{\partial v}{\partial y} = -13, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ - первое условие Коши-Римана не выполнено ни в одной точке комплексной плоскости. Значит, функция $\omega(z) = 13\overline{z} + 20$ нигде не дифференцируема, а следовательно, не является аналитической.

Пример. Исследовать функцию $f(z) = e^{3z}$ на аналитичность.

*Решение*. Выделим действительную и мнимую части функции

$f(z) = e^{3z} = e^{3x}cos3y + ie^{3x}sin3y$, т.е.

$\mathrm{Re}f(z) = u(x,y) = e^{3x}cos3y$ – действительная часть функции,

$\mathrm{Im}f(z) = v(x,y) = e^{3x}sin3y$ - мнимая часть функции.

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы во всех точках $(x,y)$, проверим выполнение условий теоремы 2.2

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x}cos3y$ , $\frac{\partial v}{\partial y} = 3e^{3x}cos3y$ , получаем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ во всех точках $(x,y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -3e^{3x}sin3y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 3e^{3x}sin3y$ , получаем $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ во всех точках $(x,y)$

Таким образом, $f(z) = e^{3z}$ дифференцируема во всех точках z и аналитическая на всей комплексной плоскости.

*Свойства аналитических функций*

Если $f_1(z)$, $f_2(z)$ аналитические функции в области $D$, то

1) $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z) \cdot f_2(z)$ – также аналитические функции в области $D$;

2) $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ - аналитическая функция во всех точках области $D$, где $f_2(z) \neq 0$.

При этом имеют место формулы

$$[f_1(z) \pm f_2(z)]' = f_1'(z) \pm f_2'(z),$$

$$[cf_1(z)]' = cf_1'(z), \left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \frac{f_1'(z)f_2(z) - f_2'(z)f_1(z)}{f_2^2(z)},$$

$$[f_1(z) \cdot f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z).$$

Пример. Исследовать функцию $f(z) = \frac{1}{z+25i}$ на аналитичность.

*Решение.* По свойствам аналитических функций заданная функция является аналитической на всей комплексной плоскости за исключением точки $z = -25i$.

Пример. Исследовать функцию $f(z) = \frac{1}{z^2+81}$ на аналитичность.

*Решение.* По свойствам аналитических функций заданная функция является аналитической на всей комплексной плоскости за исключением точек, где знаменатель равен нулю, т.е. за исключением

$z = -9i$ и $z = 9i$ .

## **Связь аналитических и гармонических функций, геометрический смысл модуля и аргумента производной, конформные отображения**

### ***2.4. Связь аналитических и гармонических функций***

Определение. *Функция $\psi(x, y)$ называется гармонической в области $D$, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0.$$

Теорема. *Если функция*

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *аналитична в некоторой области* $D$ *комплексной плоскости, то ее действительная часть* $u(x,y)$ *и мнимая часть* $v(x,y)$ *являются гармоническими функциями в соответствующей области плоскости (xy), т. е.* $u(x,y)$, $v(x,y)$ *удовлетворяют уравнению Лапласа:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Пример.

Показать, что функция $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ является гармонической. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по действительной части $u(x,y)$ и условию $f(0) = 2$.

*Решение*. Найдем частные производные функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Сложим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$ Получаем, что функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической.

Функция $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ и искомая функция $v(x,y)$ должны удовлетворять условиям Коши-Римана. Используя одно из условий Коши-Римана, имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1.$

Интегрируем последнее уравнение по $y$ (считая $x$ постоянной), получаем

$$v(x,y) = \int (2x+1)\,dy + c(x) = (2x+1)y + c(x). \qquad (2.5)$$

Чтобы найти $c(x)$, используем второе условие Коши-Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

Для этого дифференцируем $v(x,y)$ по переменной $x$ и приравняем выражения: $2y + c'(x) = 2y$, т.е. $c'(x) = 0$. Отсюда находим $c(x) = c_1$, где $c_1$ – постоянная, т.е. $v(x,y) = (2x+1)y + c_1$. Следовательно,

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 + x + i[(2x+1)y + c_1].$$

Тогда $f(z) = z^2 + z + ic_1$.

Для нахождения $c_1$ воспользуемся условием $f(0) = 2,\ 2 = ic_1$ , т.е. $c_1 = -2i$, окончательно $f(z) = z^2 + z + 2$.

**Домашнее задание**.

Учебно-методическое пособие «Теория функций комплексного переменного», часть 1. Задачи №№ 1.7, 1.8, 1.10.

Пособие размещено на сайте кафедры ВМ-2
http://vm-2.mozello.ru
раздел «Математический анализ. 4 семестр».