| | |
|---|---|
| ДИСЦИПЛИНА | **Радиотехнические цепи и сигналы часть 1** |
| | полное название дисциплины без аббревиатуры |
| ИНСТИТУТ | **Радиотехнических и телекоммуникационных систем** |
| КАФЕДРА | **радиоволновых процессов и технологий** |
| | полное название кафедры |
| ГРУППА/Ы | **РРБО-1-3-18; РССО-1-3-18** |
| | номер групп/ы, для которых предназначены материалы |
| ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА | **Лекция №13** |
| | лекция; материал к практическим занятиям; контрольно-измерительные материалы к практическим занятиям; руководство к КР/КП, практикам |
| ПРЕПОДАВАТЕЛЬ | **Исаков Владимир Николаевич** |
| | фамилия, имя, отчество |
| СЕМЕСТР | **5** |
| | указать номер семестра обучения |

# Лекция 13
# Нелинейные радиотехнические цепи
## 1. Понятие нелинейной цепи

Электрическая цепь, содержащая хотя бы один нелинейный элемент называется нелинейной.

Элемент электрической цепи, параметры которого зависят от протекающего через него тока или приложенного к нему напряжения называется нелинейным.

Зависимость параметров означает нелинейность вольтамперных, кулон-вольтных или вебер-амперных характеристик.

Нелинейная электрическая цепь описывается нелинейным дифференциальным уравнением. Решение нелинейного дифференциального уравнения в большинстве случаев затруднительно, что делает невозможным общий подход к анализу нелинейных цепей. В общем случае для нелинейных цепей не выполняется ни принцип суперпозиции, ни принцип транспозиции, а подход к анализу оказывается индивидуальным при каждом сочетании вида нелинейной цепи и воздействия на неё.

Поэтому в дальнейшем рассматриваются нелинейные цепи, содержащие один резистивный нелинейный элемент, который можно считать безынерционным. Нелинейный элемент называется безынерционным, если его параметры зависят только от мгновенных значений протекающего через него тока или приложенного к нему напряжения.

В случае нелинейного резистивного безынерционного элемента между собой оказываются связанными только мгновенные значения протекающего через него тока или приложенного к нему напряжения. Это связь отражается вольтамперной характеристикой (ВАХ) – зависимостью тока через нелинейный элемент от приложенного к нему напряжения. ВАХ нелинейного элемента обычно получается экспериментально и оказывается задана графически (рис. 1).

Каждой точке ВАХ может поставлено в соответствие статическое сопротивление

$$r_{\text{ст}}(U_0) = \frac{U_0}{I_0},\ [\text{Ом}].$$

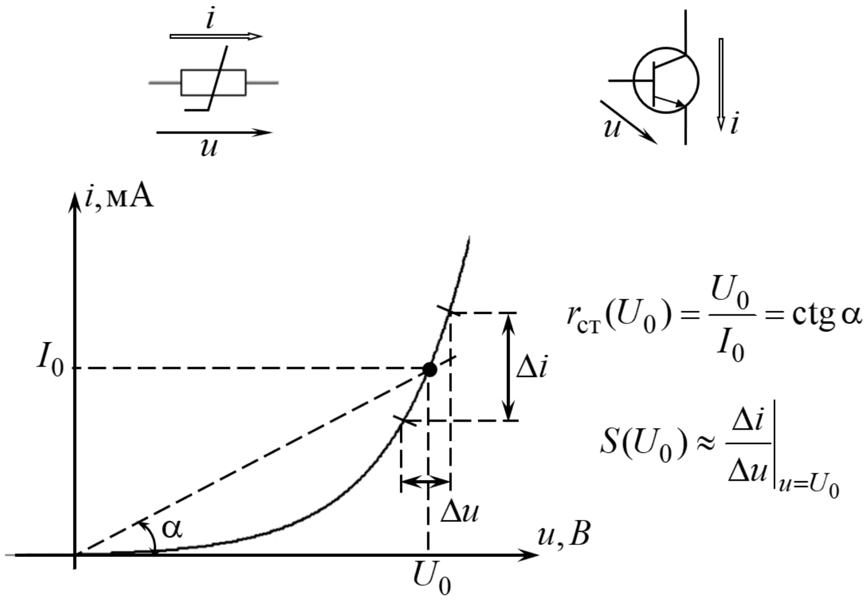


*Рис. 1. Графические обозначение нелинейных элементов и пример ВАХ*

Связь между приращениями напряжения и тока через нелинейный элемент характеризуется дифференциальной (динамической) проводимостью или крутизной ВАХ:

$$S(U_0)=\left.\frac{di}{du}\right|_{u=U_0}\approx\left.\frac{\Delta i}{\Delta u}\right|_{u=U_0},\ [\text{мА/В}].$$

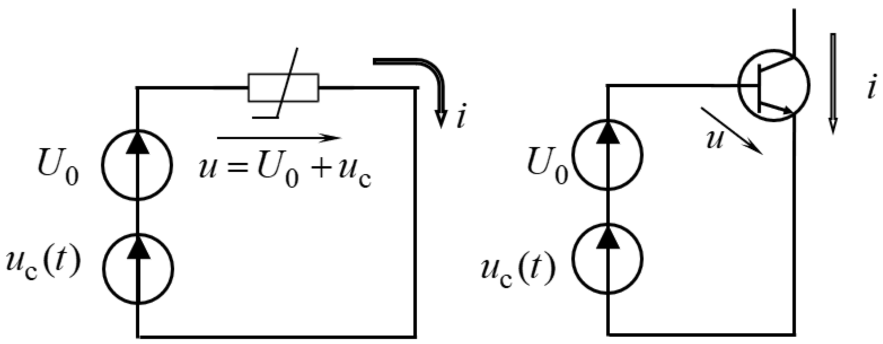


*Рис. 2. Схемы подключения источников напряжения*

При работе нелинейного элемента в цепи переменного тока прикладываемое к нему напряжение изменяется в определённых пределах, то есть используется некоторый участок ВАХ, называемый рабочим участком. Для задания положения рабочего участка последовательно с источником переменного напряжения включают источник постоянного напряжения $U_0$, называемый источником смещения (рис. 2). Само напряжение $U_0$ называется напряжение (начального) смещения. Напряжение смещение определяет рабочую точку – точку ВАХ с координатами $(U_0, I_0)$, соответствующую статическому режиму нелинейного элемента.

## 2. Определение формы тока через нелинейный элемент

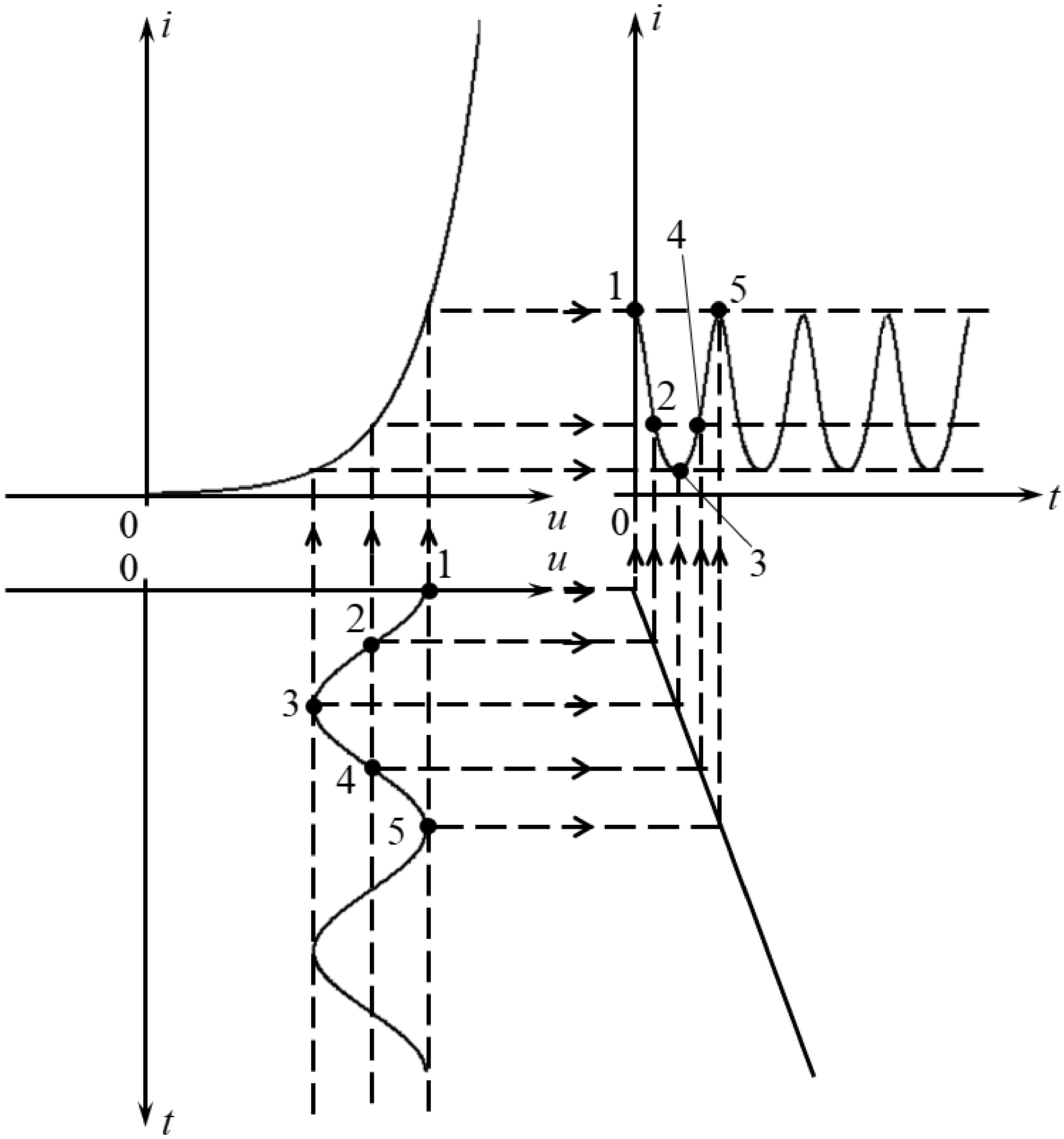


*Рис. 3. Графоаналитическое определение формы тока через нелинейный элемент*

Для безынерционного нелинейного элемента связь между напряжением и током определяется ВАХ и не зависит от времени и скорости изменения входного сигнала. Ток через нелинейный элемент может быть найден путём решения системы уравнений:

$$\begin{cases} i = i(u) \\ u = U_0 + u_c(t) \end{cases} \Rightarrow i(t) = i(U_0 + u_c(t)).$$

Решение этой системы для можно проводить графически, как показано на рис.3. Метод анализа нелинейных цепей, основанный на графическом решении указанной системы уравнений, получил название графоаналитического метода и являлся основным в докомпьютерную эпоху. Диаграммы, аналогичные рис.3 мы будем использовать в дальнейшем в целях обеспечения наглядности.

## 3. Режимы работы нелинейного элемента при гармоническом воздействии

### 3.1. Линейный режим

В линейном режиме (рис.4) рабочий участок ВАХ удовлетворительно аппроксимируется прямой линией, что позволяет записать выражение для аппроксимирующей функции в виде:

$$i(u) = I_0 + S_0(u - U_0),$$

где $I_0 = i(U_0)$ - ток статического режима, $S_0 = S(U_0) = \left.\frac{di}{du}\right|_{u=U_0}$ - крутизна ВАХ в рабочей точке.

В этом случае для цепей рис.2 выполняется принцип суперпозиции: действительно, рассматривая в качестве воздействия $u_{\text{c}}(t) = k_1 u_{\text{c}1}(t) + k_1 u_{\text{c}2}(t)$ такое, что напряжение на нелинейном элементе $u = U_0 + u_{\text{c}}(t) = U_0 + k_1 u_{\text{c}1}(t) + k_2 u_{\text{c}2}(t)$ по-прежнему изменяется в пределах линейного участка, а в качестве отклика $i_{\text{вых}}$ переменную составляющую тока через нелинейный элемент, запишем

$$i(t) = I_0 + S_0(u(t) - U_0) = I_0 + \underbrace{S_0 u_{\text{c}}(t)}_{i_{\text{вых}}(t)},$$

$$i(t) = I_0 + S_0(u(t) - U_0) = I_0 + k_1 \underbrace{S_0 u_{\text{c}1}(t)}_{i_{\text{вых}1}(t)} + k_2 \underbrace{S_0 u_{\text{c}2}(t)}_{i_{\text{вых}2}(t)},$$

откуда

$$i_{\text{вых}}(t) = k_1 i_{\textit{вых}1}(t) + k_1 i_{\text{вых}2}(t).$$

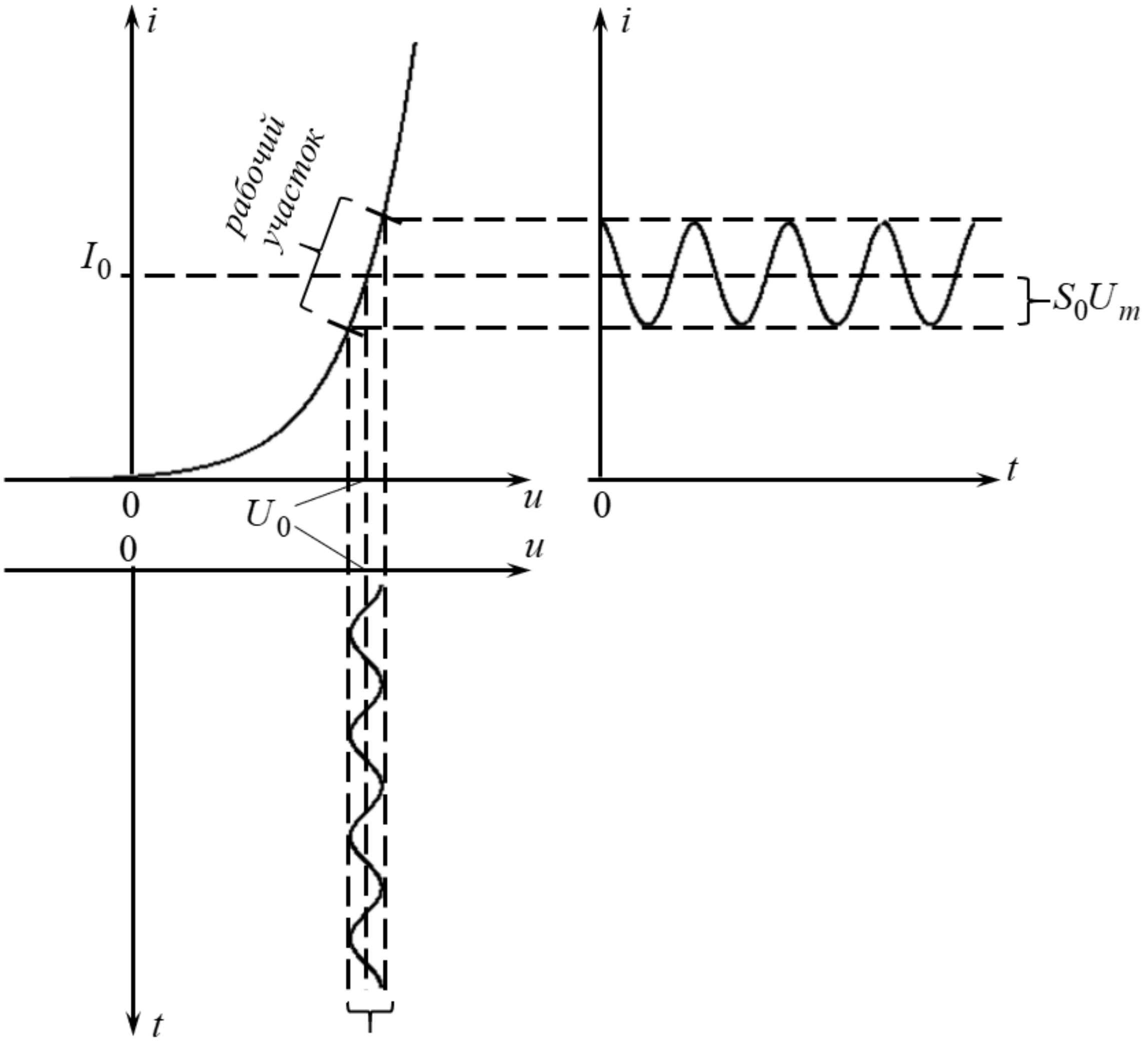


*Рис. 4. Напряжение и ток через нелинейный элемент в линейном режиме*

Напряжение на нелинейном элементе при гармоническом воздействии

$$u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t).$$

Ток через нелинейный элемент

$$i(t) = I_0 + S_0 U_m \cos(\omega t).$$

Последнее выражение показывает, что для цепи рис.2 также выполняется и принцип суперпозиции: при гармоническом воздействии имеем гармонический отклик той же частоты.

Таким образом рассмотренные цепи с нелинейным элементом в линейном режиме ведут себя как линейные по переменным составляющим отклика и воздействия.

### 3.2. Режим степенной аппроксимации ВАХ

Рабочий участок обладает ярко выраженной нелинейностью и не может быть аппроксимирован прямой линией, при этом нелинейный элемент всегда прозрачен для тока. В этом случае рабочий участок аппроксимируется степенным полиномом

$$i_a(u) = \sum_{k=0}^{N} a_k (u - U_0)^k .$$

Обычно достаточно использовать многочлен 2-й степени

$$i_a(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 .$$

Для выбора коэффициентов аппроксимирующего многочлена потребуем, чтобы его график проходил через точки (рис. 5) с координатами $(u_1, i_1)$; $(U_0, i_0)$; $(U_2, i_2)$ и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} i_1 = a_0 + a_1(u_1 - U_0) + a_2(u_1 - U_0)^2 \\ i_0 = a_0 \\ i_2 = a_0 + a_1(u_2 - U_0) + a_2(u_2 - U_0)^2 \end{cases} .$$

Обозначив $\Delta u = u_2 - u_1$, систему уравнений приведём к виду:

$$\begin{cases} i_1 - i_0 = -a_1 \dfrac{\Delta u}{2} + a_2 \left( \dfrac{\Delta u}{2} \right)^2 \\ i_2 - i_0 = a_1 \dfrac{\Delta u}{2} + a_2 \left( \dfrac{\Delta u}{2} \right)^2 \end{cases} ,$$

откуда

$$a_0 = i_0,\ [\text{мА}];\ a_1 = \frac{i_2 - i_1}{u_2 - u_1},\ \left[ \frac{\text{мА}}{\text{В}} \right];\ a_2 = 2\frac{i_1 - 2i_0 + i_2}{(u_2 - u_1)^2},\ \left[ \frac{\text{мА}}{\text{В}^2} \right].$$

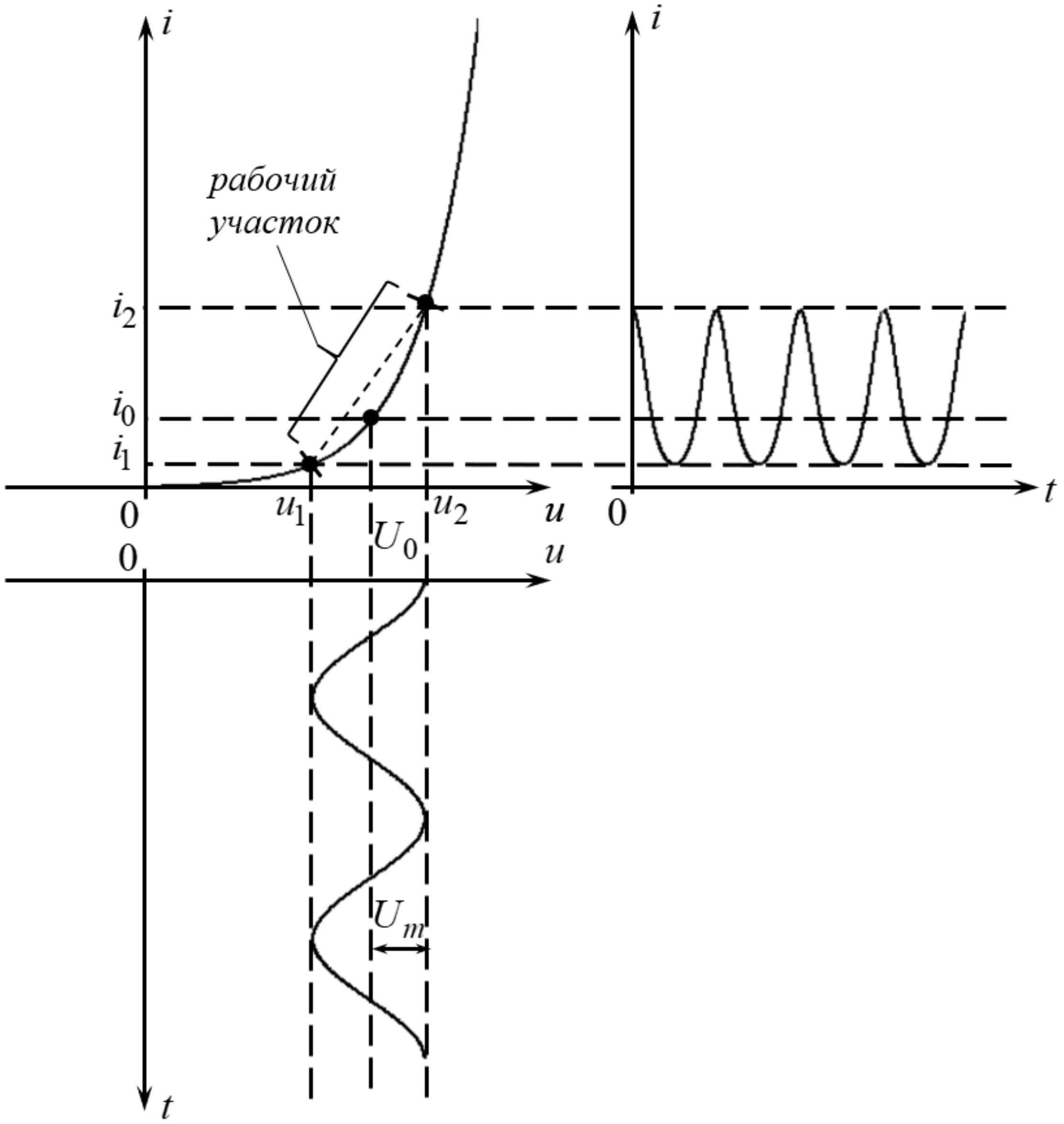


*Рис. 5. Напряжение и ток через нелинейный элемент в режиме степенной аппроксимации*

В общем случае выбор степени аппроксимирующего многочлена и способа расчёта его коэффициентов неоднозначен и может быть различным в зависимости от специфики решаемой задачи.

Например, наряду с рассмотренным интерполяционным методом нахождения коэффициентов аппроксимирующего многочлена, может быть использован метод наименьших квадратов. В этом случае вводится мера качества аппроксимации в виде суммы квадратов отклонений аппроксимирующей функции от ВАХ в пределах рабочего участка:

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{K-1} (i_k - i_{ak})^2 ,$$

где $i_k = i(u_k)$, $i_{ak} = i_a(u_k)$ - значения ВАХ и аппроксимирующей функции в $K >> N$ точках $u_k$, распределённых на интервале абсцисс рабочего участка.

Наилучшим считается многочлен, обеспечивающий наименьшее значение параметра $\varepsilon$. Рассматривая показатель качества как функцию коэффициентов аппроксимирующего многочлена, запишем условие экстремума:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_n} = 0,\ n = 0,...,N ,$$

откуда получаем систему уравнений для коэффициентов многочлена

$$\sum_{k=0}^{K-1} (i_k - i_{ak}) \frac{\partial i_{ak}}{\partial a_n} = 0,\ n = 0,...,N .$$

Подставляя выражение для аппроксимирующего многочлена, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{K-1} (i_k - i_{ak}) = 0,\ n = 0$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} (i_k - i_{ak})(u_k - U_0) = 0,\ n = 1$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} (i_k - i_{ak})(u_k - U_0)^2 = 0,\ n = 2$$

$$\dots$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} (i_k - i_{ak})(u_k - U_0)^N = 0,\ n = N$$

или

$$a_0 K + a_1 \sum_{k=0}^{K-1} (u_k - U_0) + ... + a_N \sum_{k=0}^{K-1} (u_k - U_0)^N = \sum_{k=0}^{K-1} i_k$$

$$a_0\sum_{k=0}^{K-1}(u_k-U_0)+a_1\sum_{k=0}^{K-1}(u_k-U_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+a_N\sum_{k=0}^{K-1}(u_k-U_0)^{N+1}=\sum_{k=0}^{K-1}i_k(u_k-U_0)$$
$$a_0\sum_{k=0}^{K-1}(u_k-U_0)^2+a_1\sum_{k=0}^{K-1}(u_k-U_0)^3+\ldots$$
$$\ldots+a_N\sum_{k=0}^{K-1}(u_k-U_0)^{N+2}=\sum_{k=0}^{K-1}i_k(u_k-U_0)^2$$
$$\ldots$$
$$a_0\sum_{k=0}^{K-1}(u_k-U_0)^N+a_1\sum_{k=0}^{K-1}(u_k-U_0)^{N+1}+\ldots$$
$$\ldots+a_N\sum_{k=0}^{K-1}(u_k-U_0)^{2N}=\sum_{k=0}^{K-1}i_k(u_k-U_0)^N$$

Обозначив $\bar{U}_n=\sum_{k=0}^{K-1}(u_k-U_0)^n$ и $\bar{I}_n=\sum_{k=0}^{K-1}i_k(u_k-U_0)^n$, последнюю систему уравнений перепишем в компактном виде

$$a_0\bar{U}_0+a_1\bar{U}_1+\ldots+a_N\bar{U}_N=\bar{I}_0$$
$$a_0\bar{U}_1+a_1\bar{U}_2+\ldots+a_N\bar{U}_{N+1}=\bar{I}_1$$
$$a_0\bar{U}_2+a_1\bar{U}_3+\ldots+a_N\bar{U}_{N+2}=\bar{I}_2$$
$$\ldots$$
$$a_0\bar{U}_N+a_1\bar{U}_{N+1}+\ldots+a_N\bar{U}_{2N}=\bar{I}_N$$

В случае использования многочлена второй степени полученная система уравнения будет иметь вид

$$a_0\bar{U}_0+a_1\bar{U}_1+a_2\bar{U}_2=\bar{I}_0$$
$$a_0\bar{U}_1+a_1\bar{U}_2+a_2\bar{U}_3=\bar{I}_1$$
$$a_0\bar{U}_2+a_1\bar{U}_3+a_2\bar{U}_4=\bar{I}_2$$

Крутизна нелинейного элемента при аппроксимации многочленом

$$S(u)=i'(u)=a_1+2a_2(u-U_0)+\ldots+Na_N(u-U_0)^{N-1}.$$

В точке статического режима крутизна всегда совпадает с коэффициентом $a_1$ аппроксимирующего многочлена $S(U_0)=a_1$.

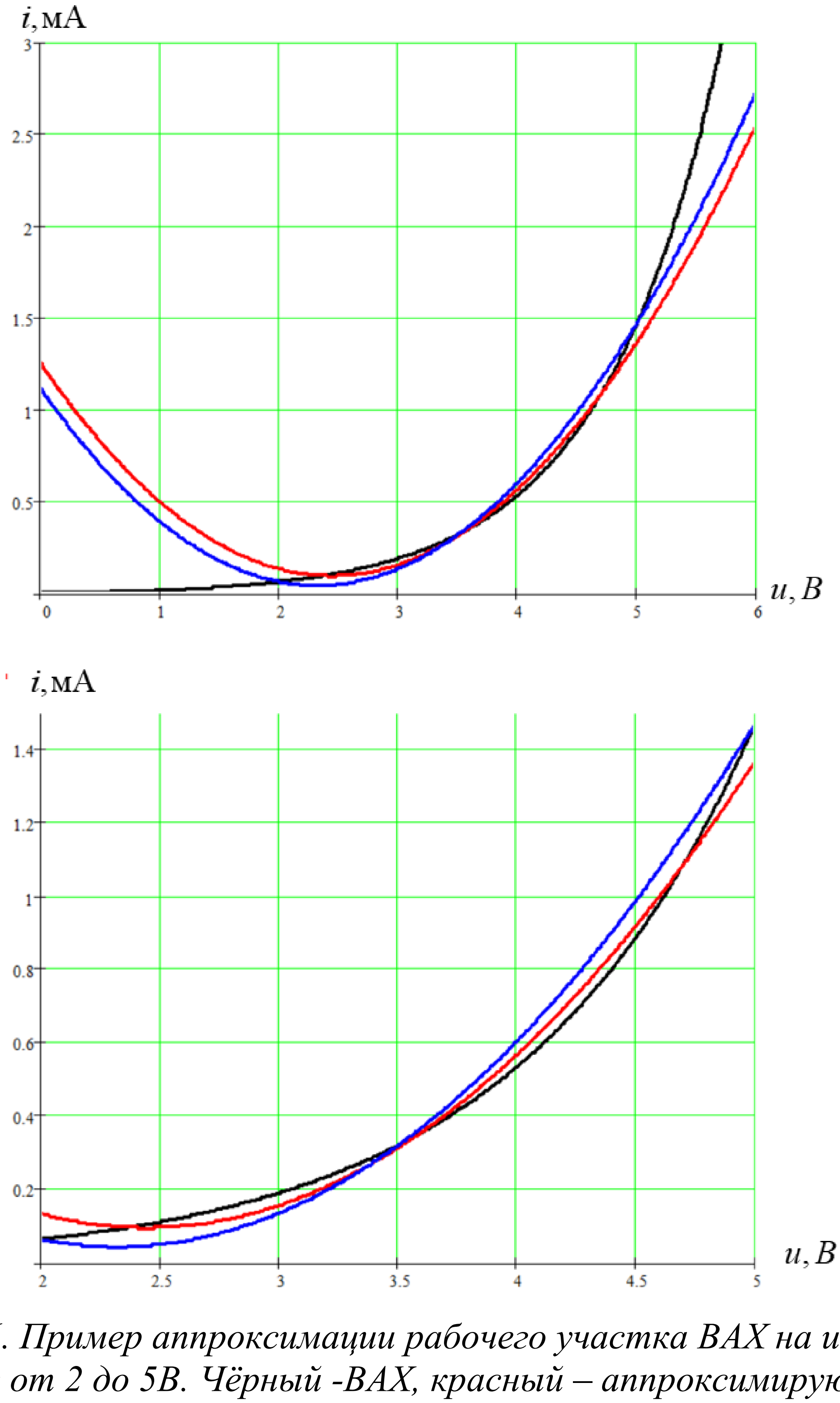


*Рис.6. Пример аппроксимации рабочего участка ВАХ на интервале от 2 до 5В. Чёрный -ВАХ, красный – аппроксимирующий многочлен 2-й степени, оптимальный по методу наименьших квадратов, синий – аппроксимирующий многочлен, коэффициенты которого выбраны интерполяционным методом.*

Пример степенной аппроксимации рабочего участка ВАХ многочленом 2-й степени приведён на рис.6.

### 3.3. Режим кусочно-линейной аппроксимации

Рабочий участок охватывает большую часть ВАХ, в том числе и ту область, в которой нелинейный элемент становится непрозрачным для тока (рис.7). Диаграммы токов и напряжений в режиме кусочно-линейной аппроксимации удобно рассматривать в зависимости от $\omega t$ . Это обобщённый временной параметр называется электрическим временем и измеряется в электрических радианах или градусах.

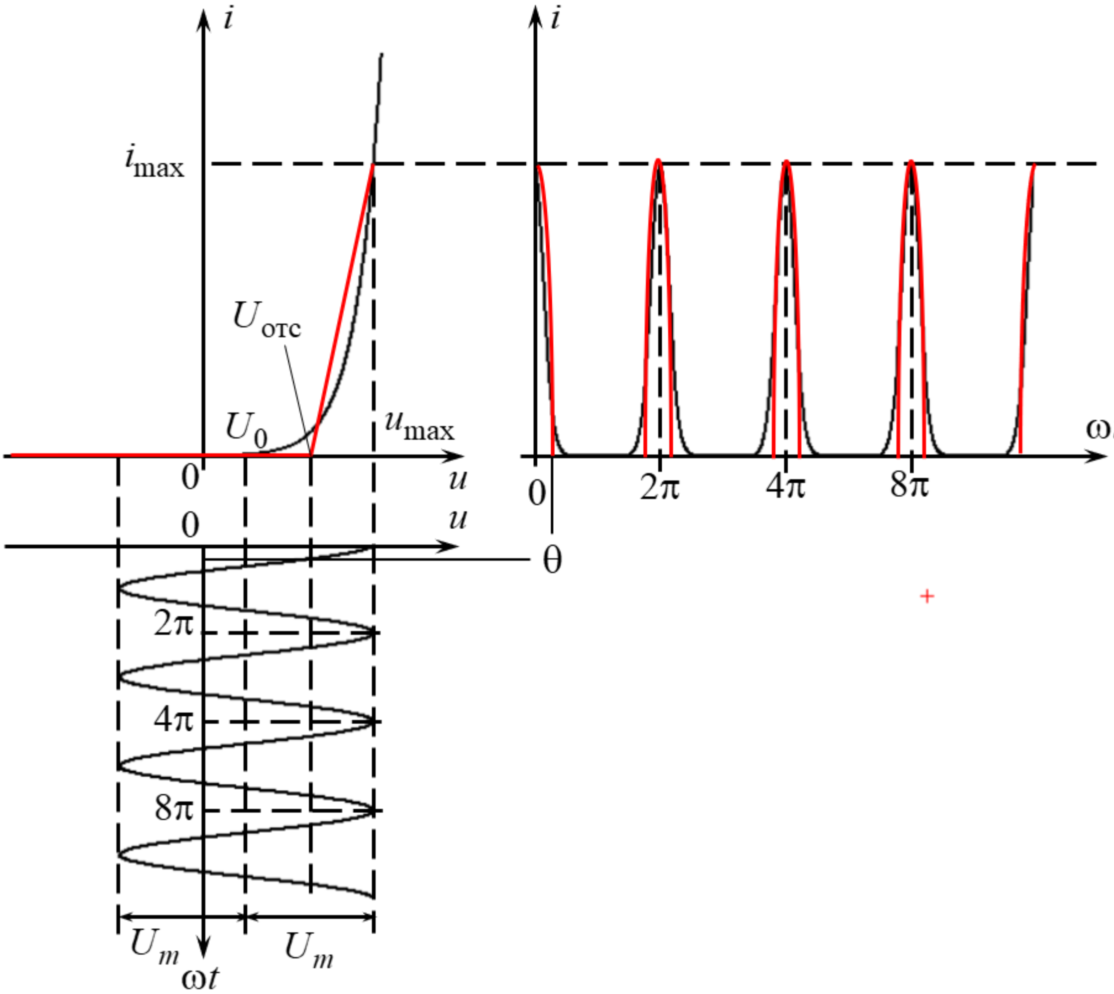


*Рис. 7. Напряжение и ток через нелинейный элемент в режиме кусочно-линейной аппроксимации.*

Вольтамперная характеристика в рассматриваемом случае аппроксимируется двумя отрезками прямых и описывается выражением:

$$i(u)=\begin{cases}0, u\le U_{\text{отс}}\\ S(u-U_{\text{отс}}),\ u>U_{\text{отс}}\end{cases}.$$

Параметр аппроксимирующей функции $S$ является крутизной участка прозрачности ВАХ и может быть определён по формуле

$$S=\frac{i_{\max}}{u_{\max}-U_{\text{отс}}},$$

где $u_{\max}$ и $i_{\max}$ - соответствующие друг другу по ВАХ напряжение и ток максимального режима.

При гармоническом воздействии напряжение на нелинейном элемента задаётся в виде

$$u(t)=U_0+U_m\cos(\omega t).$$

Ток через нелинейный элемент представляет собой периодическую последовательность импульсов. Половина длительности импульсов тока через нелинейный элемент, выраженная в единицах электрического времени, называется углом отсечки $\theta=\frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}$.

В момент электрического времени $\omega t=\theta$, когда напряжение на нелинейном элементе пересекает уровень $U_{\text{отс}}$, имеем

$$U_{\text{отс}}=U_0+U_m\cos\theta,$$

откуда

$$\cos\theta=\frac{U_{\text{отс}}-U_0}{U_m}.$$

Импульс тока через нелинейный элемент на интервале $-\theta\le\omega t\le\theta$ описывается выражением

$$i_0(t)=S\left(U_0+U_m\cos(\omega t)-U_{\text{отс}}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\omega t}{2\theta}\right)=$$

$$=SU_m\left(\cos(\omega t)-\cos\theta\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\omega t}{2\theta}\right).$$

## Литература

### Основная литература

1. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов / О. А. Стеценко. — М.: Высш. шк., 2007.

2. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Дрофа, 2006.

3. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Радио и связь, 1986.

4. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 2000.

### Дополнительная литература

5. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.: ил. — Библиогр.: с. 804 (15 назв.)

6. Сигналы. Теоретическая радиотехника: Справ. пособие / А. Н. Денисенко. — М.: Горячая линия - Телеком, 2005. — 704 с.

7. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М.: Наука, 1998. — 608 с.