Практическое занятие №13

Вычисление интегралов с тригонометрическими функциями

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\alpha x\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} R(x)cos\ \alpha x\,dx$$

Теорема. *Пусть* $R(z)$ *– рациональная функция, у которой степень числителя меньше степени знаменателя,* $R(z)$ не имеет полюсов на действительной оси, *и в верхней полуплоскости имеет полюса* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*; при* $z=x$ *функция* $R(x)$ *действительна при действительных* x*. Тогда для любого* $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\cdot R(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\left[R(z_k)\cdot e^{i\alpha z}\right].$$

Следствие. Воспользовавшись формулой Эйлера: $e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x,$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\alpha x\,dx = Im\left[2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\big(R(z_k)e^{i\alpha z}\big)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)cos\ \alpha x\,dx = Re\left[2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\big(R(z_k)e^{i\alpha z}\big)\right]$$

$$(Im\ z_k > 0).$$

Пример. Вычислить

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 12x}{x^2 + 25} dx$$

Решение. Введем вспомогательную функцию $F(z) = \frac{ze^{i12z}}{z^2+25}$. Если $z = x$, то $Im\, F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{x \sin 12x}{x^2+25}$.

Функция $F(z) = \frac{ze^{i12z}}{z^2+25}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i12x}}{x^2 + 25} dx = 2\pi i \cdot res\, F(5i).$$

$z = 5i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является полюсом первого порядка.

$z = -5i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z = 5i$

$$res\, F(5i) = \lim_{z \to 3i} \frac{ze^{i12z}}{z^2 + 9}(z - 5i) =$$

$$= \lim_{z \to 5i} \frac{ze^{i12z}}{z + 5i} = \frac{5ie^{-60}}{10i} = \frac{1}{2e^{60}}.$$

Подставляя полученное значение, получим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 12x}{x^2 + 25} dx = Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i12x}}{x^2 + 25} dx =$$

$$= Im \left[2\pi i \cdot res_{z=5i} \frac{\left(ze^{i12z}\right)}{z^2 + 25} \right] = Im \left[2\pi i \frac{1}{2e^{60}} \right] = \frac{\pi}{e^{60}}.$$

Пример. Вычислить

$$I = \int_0^\infty \frac{cos\,31x}{x^2+1}dx$$

Решение. Введем вспомогательную функцию $F(z) = \frac{e^{i31z}}{z^2+1}$. Если $z = x$, то $Re\,F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{cos\,31x}{x^2+1}$. Поскольку подынтегральная функция $f(x)$ четная, то

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{cos\,31x}{x^2+1}dx$$

Функция $F(z) = \frac{e^{i31z}}{z^2+1}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда получаем

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i31x}}{x^2+1}dx = 2\pi i \cdot res\,F(i).$$

$z = i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является простым полюсом.

$z = -i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z = i$

$$res\,F(i) = \lim_{z\to i}\frac{e^{i31z}}{z^2+1}(z-i) =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{e^{i31z}}{z+i} = \frac{e^{-31}}{2i} = \frac{1}{2ie^{31}}.$$

Подставляя полученное значение, получим

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{cos\,31x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\cdot Re\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i31x}}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot Re\left[2\pi i \cdot res_{z=i}\frac{\left(e^{i31z}\right)}{z^2+1}\right] = \frac{1}{2}\cdot Re\left[2\pi i\frac{1}{2ie^{31}}\right] = \frac{\pi}{2e^{31}}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos29x}{(x^2+4)^2} dx$$

Решение. Введем вспомогательную функцию $F(z) = \frac{e^{i29z}}{(z^2+4)^2}$. Если $z = x$, то $Re\,F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{cos29x}{(x^2+4)^2}$.

Функция $F(z) = \frac{e^{i29z}}{(z^2+4)^2}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i29x}}{(x^2+4)^2} dx = 2\pi i \cdot res\,F(2i).$$

$z = 2i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является полюсом второго порядка.

$z = -2i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z = 2i$.

$$res\,F(2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}[F(z)(z-2i)^2] = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{i29z}}{(z^2+4)^2}(z-2i)^2\right] =$$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{i29z}(z-2i)^2}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right] = \lim_{z\to i2} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{i29z}}{(z+2i)^2}\right] =$$

$$\lim_{z\to 2i}\left[\frac{29ie^{i29z}}{(z+2i)^2} - \frac{2e^{i29z}}{(z+2i)^3}\right] = \frac{29ie^{-58}}{(4i)^2} - \frac{2e^{-58}}{(4i)^3} = \frac{27e^{-58}}{32i}.$$

Подставляя полученное значение, получим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos29x}{(x^2+4)^2} dx = Re\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i29x}}{(x^2+4)^2} dx =$$

$$= Re\left[2\pi i \cdot res_{z=2i} \frac{e^{i29z}}{(z^2+4)^2}\right] = Re\left[2\pi i \frac{27e^{-58}}{32i}\right] = \frac{27\pi}{16e^{58}}.$$

Теорема Руше

Теорема Руше. *Если функции $f(z)$ и $g(z)$, аналитичные в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром* Γ, *во всех точках этого контура удовлетворяют неравенству*

$$|f(z)| > |g(z)|,$$

то их сумма $F(z) = f(z) + g(z)$ и функция $f(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей (с учетом их кратности).

Заметим, что в силу условий теоремы на границе Γ $|f(z)| > 0$, $|F(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$, значит функции $F(z)$ и $f(z)$ не имеют нулей на Γ.

Пример. Определить число корней уравнения $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$ внутри круга $|z| < 2$.

Решение. Положим $f(z) = -3z^3$, $g(z) = z^4 - 1$, $F(z) = f(z) + g(z) = z^4 - 3z^4 - 1$.

На окружности $|z| = 2$:

$$|f(z)|_{z=2} = |-3z^3|_{z=2} = 3 \cdot 8 = 24,$$

$$|g(z)|_{z=2} \leq |z^4|_{z=2} + 1 = 16 + 1 = 17,$$

т.е. во всех точках окружности $|z| = 2$ выполняется условие $|f(z)| > |g(z)|$. Функция $f(z) = -3z^3$ внутри круга $|z| < 2$ имеет нуль кратности 3, следовательно, по теореме Руше, и функция $F(z) = z^4 - 3z^3 - 1$ имеет три нуля внутри круга $|z| < 2$, т.е. заданное уравнение

$z^4 - 3z^3 - 1 = 0$ имеет три корня внутри круга $|z| = 2$.

Пример. Сколько корней уравнения

$$z^5 - 10z + 3 = 0$$

находится в кольце $1 < |z| < 2$.

Решение. Обозначим через N – число корней заданного уравнения в кольце $1 < |z| < 2$, N_1 – число корней этого же уравнения в круге $|z| < 2$, N_2 – число корней уравнения в круге $|z| < 1$.

Найдем N_1. Рассмотрим окружность $|z| = 2$. Положим $f(z) = z^5$, $g(z) = -10z + 3$. Заданное уравнение можно переписать в виде $F(z) = f(z) + g(z) = 0$.

На окружности $|z| = 2$ имеем:

$|f(z)|_{|z|=2} = |z^5|_{|z|=2} = 32$, $|g(z)| = |-10z + 3| \le |10z| + 3$, т.е. $|g(z)|_{|z|=2} \le |10z|_{|z|=2} + 3 = 23$, следовательно

$|f(z)|_{|z|=2} > |g(z)|_{|z|=2}$. Функция $f(z) = z^5$ в круге $|z| < 2$ имеет нуль кратности 5, значит по теореме Руше $N_1 = 5$.

Найдем N_2. Рассмотрим окружность $|z| = 1$.

Положим $f(z) = -10z$, $g(z) = z^5 + 3$. На окружности $|z| = 1$ имеем $|f(z)|_{|z|=1} > |g(z)|_{|z|=1}$, так как

$|f(z)|_{|z|=1} = |-10z|_{|z|=1} = 10$,

$|g(z)|_{|z|=1} = |z^5 + 3|_{|z|=1} \le |z^5|_{|z|=1} + 3 = 4$.

Значит функция $F(z)$ не имеют нулей на окружности $|z| = 1$.

Тогда $N = N_1 - N_2$.

Функция $f(z) = -10z$ в области $|z| < 1$ имеет один нуль, следовательно по теореме Руше $F(z) = f(z) + g(z)$ имеет в области $|z| < 1$ один нуль,

т.е. $N_2 = 1$. Ответ: число корней заданного уравнения в кольце $1 < |z| < 2$ будет равно $N = 5 - 1 = 4$.

Домашнее задание.

Учебно-методическое пособие «Теория функций комплексного переменного», часть 1. Задача №1.17 (варианты 7 и 8), задача №1.18.

Часть 2. Задачи №№2.7, 2.8, 2.9 (выполнение типового расчета).

Подготовка к контрольной работе №2 (см. ПР14).

Пособие размещено на сайте кафедры ВМ-2
http://vm-2.mozello.ru
раздел «Математический анализ. 4 семестр».