Практическое занятие №5

§3. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u(x,y)$, $v(x,y)$ – действительные функции переменных x и y. Тогда можно показать, что интеграл от функции $f(z)$ равен сумме двух криволинейных интегралов, а именно

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy +$$
$$+i\int_L u(x,y)dy + v(x,y)dx.$$

Интеграл от функции комплексного переменного обладает следующими *свойствами.*

1. Свойство линейности.

$$\int_L [c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)]\,dz = c_1 \int_L f_1(z)dz \pm c_2 \int_L f_2(z)dz,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

2. Свойство аддитивности.

$$\int_{L_1 \bigcup L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz,$$

где $L_1 \bigcup L_2$ – кривая, составленная из кривых L_1 и L_2.

3. $\int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz,$

где L^- – кривая, совпадающая с L, но проходимая в противоположном направлении.

4. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f\,(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\,\Big|_{z_0}^{z_1},$$

где $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

5. Если кривая L задана параметрическими уравнениями

$x = x(t),\, y = y(t)$

начальная и конечная точки дуги L соответствуют значениям параметра $t = t_0,\, t = t_1$, то

$$\int_L f\,(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f\,[z(t)]z'(t)dt,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

<u>Пример</u>. Вычислить интеграл $\int_L (2\overline{z} - 5i)\,dz$ по параболе $y = x^2$, соединяющей точки $z_1 = 0,\, z_2 = 1 + i$.

Решение. Перепишем подынтегральную функцию

в виде $2\overline{z} - 5i = 2x - 2yi - 5i = 2x - i(2y + 5)$,

т.е. $u(x, y) = 2x, \qquad v(x, y) = -(5 + 2y)$.

Используем для вычисления интеграла

формулу $\int_L (2\overline{z} - 5i)\,dz = \int_L 2\,xdx + (5 + 2y)dy + i\int_L 2\,xdy - (5 + 2y)dx$.

Для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2xdx$ $(0 \le x \le 1)$. Тогда

$$\int_L (2\overline{z} - 5i)\,dz = \int_0^1 [2x + (5 + 2x^2)2x]\,dx +$$

$$+i\int_0^1 [2x \cdot 2x - (5 + 2x^2)]\,dx = 7 + i\frac{17}{3}$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_i^{2i}(3z^2+z+5)\,dz$.

Решение. Подынтегральная функция аналитическая всюду (достаточно проверить все условия теоремы 2.2), можно применить формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_i^{2i}(3z^2+z+5)\,dz=\left(z^3+\frac{z^2}{2}+5z\right)\Big|_i^{2i}=(2i)^3+\frac{(2i)^2}{2}+10i-i^3-\frac{i^2}{2}-5i$$
$$=-2i-1{,}5$$

Теорема 3.1. *(теорема Коши для односвязной области).*

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D , а контур C – замкнутый контур, принадлежащий области D, то интеграл

$$\oint_C f(z)dz=0.$$

Отметим, что линия называется связной, если из любой ее точки можно пройти по этой линии в любую другую ее точку.

Порядком связности ограниченной области D называется число n связных частей, на которое разбивается ее граница.

Напомним, что область называется односвязной, если любую замкнутую кривую, лежащую в этой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.

Например, круг $|z|\le 3$ – односвязная область. Встречаются *n-связные* (многосвязные, *n>1*) области, например, кольцо $1\le|z|\le 3$ – двусвязная область (*n=2)*.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{|z|=0,5}\frac{dz}{(z+3)^2(z^2+9)}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{(z+3)^2(z^2+9)}$ является аналитической внутри области D, ограниченной контуром C: $|z|=0{,}5$. Область D – односвязная, контур C – замкнутый контур, принадлежащий области D.

По теореме 3.1 получаем

$$\int_{|z|=0,5} \frac{dz}{(z+3)^2(z^2+9)} = 0.$$

Отметим, что точки, в которых функция под знаком интеграла не является аналитической – это точки $z_1 = -3, \quad z_2 = -3i, \qquad z_3 = 3i.$

Все эти точки не лежат внутри области D,

ограниченной контуром C: $|z| = 0,5$.

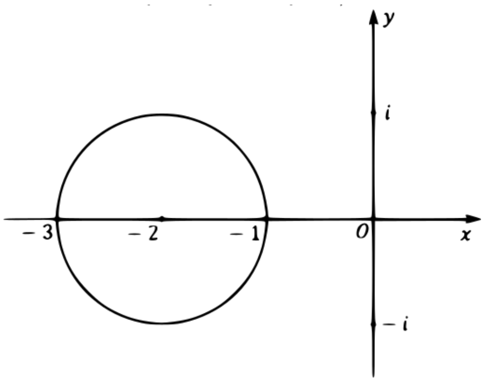
Теорема 3.2. (*<u>теорема Коши для многосвязной области</u>*).

Пусть D - n-связная область (n>1) и ее граница состоит из n замкнутых кусочно-гладких линий $L_0, L_1, \dots, L_n$, *причем контур* L_0 *охватывает* $L_1, \dots, L_n$, *а каждый из* $L_1, \dots, L_n$ *расположен вне остальных. Пусть* $f(z)$ – *аналитическая функция в области D и непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$. *Тогда интеграл от* $f(z)$ *по внешнему контуру* L_0 *равен сумме интегралов по внутренним контурам при условии, что обход всех контуров совершается в одном направлении*

$$\int_{L_0} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \dots + \int_{L_n} f(z)dz. \qquad (3.5)$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{(z+2)^2(z^2+1)}$ является аналитической за исключением точек $z_1 = -2$ и $z_{2,3} = \pm i$. Внутри области D, ограниченной контуром C: $|z+2| = 1$, находится точка $z_1 = -2$.



В этом случае нужно применять теорему 3.2. В последующих лекциях будет построена теория для вычисления таких интегралов: теория вычетов.

Теория вычетов предполагает изучение рядов с комплексными членами, рядов Тейлора и Лорана, изучение классификации изолированных особых точек аналитической функции.

§ 4. Ряды с комплексными членами

Степенные ряды с комплексными членами

Пусть дана последовательность функций комплексной переменной

$$u_1(z),\ u_2(z),\ \ldots,\ u_n(z),\ \ldots\ ,$$

определенных на некотором множестве D комплексной плоскости: $D \subset C$. Выражение вида

$$u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$$

называется *функциональным* рядом с комплексными членами.

Определение. *Множество значений переменной* z*, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда.*

Определение. *Степенным рядом с комплексными членами называется функциональный ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

Здесь z - комплексная переменная, c_n и z_0 - комплексные числа. При $z_0 = 0$ степенной ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots.$$

Теорема (теорема Абеля). Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$. *Тогда этот ряд абсолютно сходится в круге* $|z-z_0| < |z_1-z_0| = R$.

Следствие. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ расходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то этот ряд расходится в области $|z-z_0| > |z_1-z_0| = R$, т.е. вне круга $|z-z_0| \leq |z_1-z_0| = R$.

Следствие. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ существует число R, $0 \leq R \leq \infty$, называемое *радиусом сходимости* степенного ряда, такое, что внутри круга $|z-z_0| < R$ ряд сходится, а вне этого круга, т.е. в области $|z-z_0| > R$, ряд расходится.

Если R - радиус сходимости, то область $|z-z_0| < R$ называется *кругом сходимости* степенного ряда. В точках границы $|z-z_0| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. В этом случае требуется дополнительное исследование.

Отметим, что прослеживается аналогия с рядами с действительными членами (3 семестр).

Домашнее задание.

Учебно-методическое пособие «Теория функций комплексного переменного», часть 1. Задачи №№ 1.12.

Пособие размещено на сайте кафедры ВМ-2
http://vm-2.mozello.ru
раздел «Математический анализ. 4 семестр».