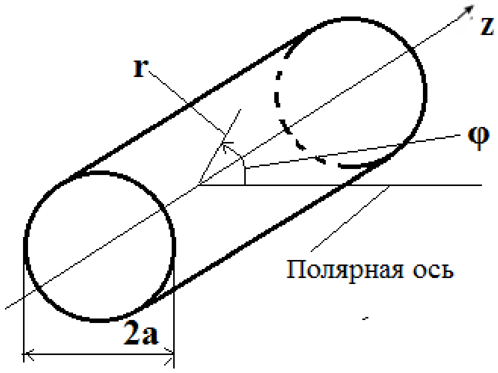
Волноводы круглого сечения

В системах связи значительно чаще используются металлические волноводы круглого сечения, такой волновод показан на следующем рисунке совместно с цилиндрической системой координат



В таком волноводе также как и в прямоугольном волноводе могут существовать волны типов E и H, которые распространяются вдоль оси z. Поэтому решение уравнения Гельмгольца можно искать в виде

$$\vec{H} = \vec{H}_0(r.\varphi)\exp(-ihz), \quad \vec{E} = \vec{E}_0(r.\varphi)\exp(-ihz),$$

причем, так как полярная ось проводится в произвольном направлении, угол φ определен для конкретного направления полярной.

. После вычисления вторых производных по продольной координате z в операторе Лапласа.

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -h^2 \vec{E}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = -h^2 \vec{H},$$

уравнения Гельмгольца принимают вид

$$\Delta_\perp \vec{E} + g^2 \vec{E} = 0, \quad \Delta_\perp \vec{H} + g^2 \vec{H} = 0,$$

$$g = (k^2 - h^2)^{1/2}.$$

в цилиндрических координатах

$$\Delta_\perp = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Разложим векторы поля на продольную и поперечную составляющие:

$$\vec{H} = \vec{H}_z + \vec{H}_\perp, \quad \vec{E} = \vec{E}_z + \vec{E}_\perp$$

Как и раньше волновое число k направляемой волны связано с его продольной h и поперечной g составляющими соотношением

$$k^2 = h^2 + g^2.$$

Тогда

$$h = \pm\sqrt{k^2 - g^2}.$$

Очевидно, что возможны три случая:

1) k> g , т.е. величина h вещественна, что соответствует распространяющейся вдоль волновода волне, так как *exp(-ihz)* образует

фазовый сомножитель, описывающий бегущую волну, такой случай называется режимом бегущих волн в волноводе;

2) критический или предельный случай $k = g$, при этом $h = 0$; величина $\lambda = 2\pi/g$ называется критической длиной волны и обозначается $\lambda_{кр}$;

3) $k < g$, тогда h – мнимая величина, и *exp(-ihz)* превращается в вещественный сомножитель, входящий в амплитуду и описывающий экспоненциальное уменьшение амплитуды поля при увеличении координаты z, поле в волноводе изменяется во времени, но не образует бегущую волну, такой случай называется закритическим или запредельным режимом поля в волноводе.

Очевидно

$$\lambda_{в} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}.$$

Здесь λ_0 - длина волны в свободном пространстве, имеющем параметры, совпадающие с параметрами среды, заполняющей волновод. Тогда фазовая постоянная для волновода $h = 2\pi/\lambda_{в}$.

Длина волны $\lambda_{в}$ в волноводе всегда больше длины волны λ_0 той же частоты в свободном пространстве,. фазовая скорость в волноводе больше фазовой скорости волны в свободном пространстве.

$$v_{ф} = \frac{\omega}{h} = \frac{2\pi f}{h} = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-(f_{кр}/f)^2}},$$

где f частота, c – скорость света в свободном пространстве, $f_{кр}$ – критическая частота

Фазовая скорость в волноводе является функцией частоты электромагнитного колебания. Такое явление получило название дисперсии. Дисперсия становится наиболее существенной, когда длина волны, на которой возбуждается волновод, близка к критической. При достаточно большой ширине спектра сигнала наличие дисперсии приводит к нелинейным искажениям сигналов, передаваемых по волноводу.

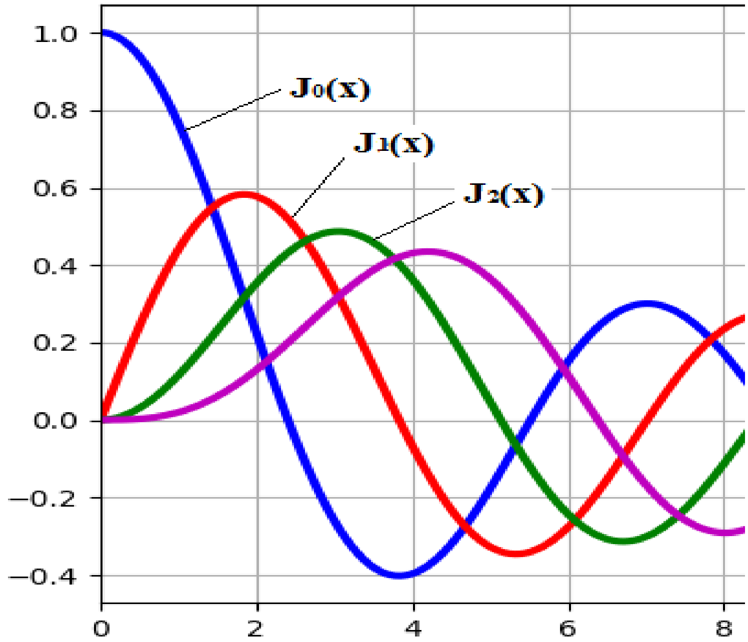
Волна типа H в круглом волноводе имеет продольную составляющую магнитного поля H_z, тогда как электрическое поле поперечное ($E_z = 0$). Для нахождения H_z необходимо решить уравнение Гельмгольца

$$\Delta_{\perp} H_z + g^2 H_z = 0$$

Как и в случае прямоугольного волновода уравнение решается методом разделения переменных, отличие заключается в использовании цилиндрических координат. Выражения для поперечных составляющих поля также находятся из системы уравнений Максвелла, записанной в цилиндрических координатах. Решение уравнения Гельмгольца будет иметь вид

$$H_z = H_0 J_m(gr) cos(m\varphi),$$

где $J_m(x)$ - функция Бесселя первого рода порядка m от аргумента x. Графики таких функций показаны на рис.



После вычисления поперечных составляющих поля накладываются граничные условия на тангенциальную составляющую напряженности электрического поля E_φ на идеально проводящей стенке круглого волновода, удовлетворяющей соотношению r=a.

$$\dot{E}_r = (-i\omega\mu_a / g^2)\,(1/\rho)\,\partial \dot{H}_z / \partial\varphi,$$

$$\dot{E}_\varphi = (i\omega\mu_a / g^2)\,\partial \dot{H}_z / \partial r,$$

$$\dot{H}_r = (-iK / g^2)\,\partial \dot{H}_z / \partial r,$$

$$\dot{H}_\varphi = (-iK / g^2)\,(1/r)\,\partial \dot{H}_z / \partial\varphi.$$

В результате определяются значения постоянных интегрирования уравнения Гельмгольца

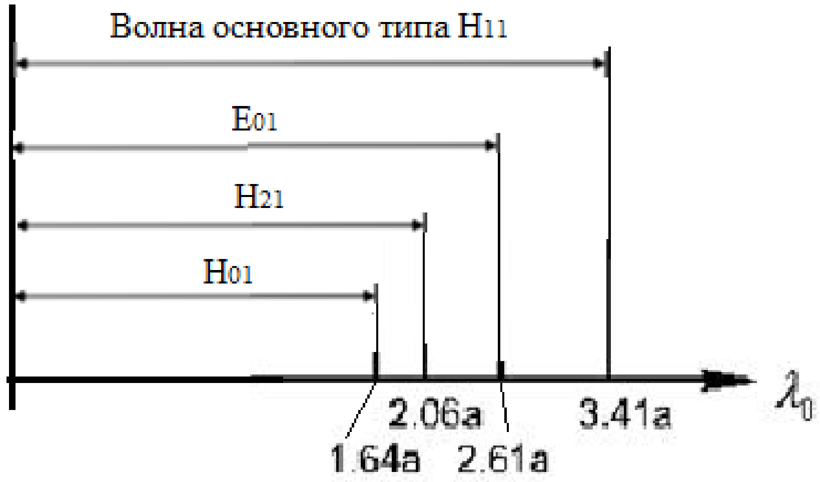
$g=\mu_{mn}/a$, m - целое число,

здесь μ_{mn} - n-ый корень трансцендентного уравнения $J'_m(x)=0$.

Значения первых корней приведены в табл.

n	m		
	0	1	2
1	3,832	1,840	3,054
2	7,016	5,335	6,705
3	10,174	8,536	9,965

Как и в случае прямоугольного волновода произвольное поле в круглом волноводе может быть представлено в виде разложения по собственным волнам волновода (в виде суперпозиции собственных волн, имеющих разные амплитуды). При этом каждая собственная мода распространяется в волноводе независимо от других. При заданных поперечных размерах волновода и длине волн генератора (длине волны колебания, создаваемого генератором, измеряемой в свободном пространстве) λ_0, волны типов «Е» и «Н» характеризуются двумя числовыми индексами m, n. Колебания с заданными индексами могут существовать лишь в определенных диапазонах длин волн, как это показано на диаграмме существования волн в круглом волноводе, приведенной на рис.



В волноводе круглого сечения волной основного типа является H_{11}, которая имеет следующие составляющие поля:

$$H_\rho(\rho,\varphi) = .H_{0\rho}\, J'_1(1{,}84\rho/a)\cos\varphi,$$

$$H_\varphi(\rho,\varphi) = H_{0\varphi}\,(J_1(1{,}84\,\rho/a)/(1{,}84\rho/a))\sin\varphi,$$

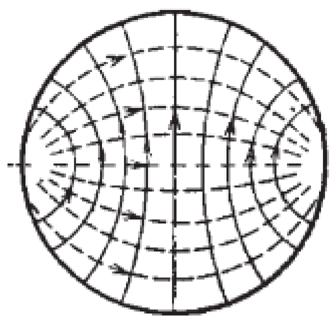
$$H_z(\rho,\varphi) = H_{0z}\, J_1(1{,}84\rho/a)\cos(\varphi).$$

$$E_\rho(\rho,\varphi) = E_{0\rho}\,(J_1(1{,}84\rho/a)/(1{,}84\rho/a))\sin\varphi,$$

$$E_\varphi(\rho,\varphi) = E_{0\varphi}\, J'_1(1{,}84\rho/a)\cos\varphi,$$

На следующем рис. приведена картина силовых линий поля волны H_{11}

H_{11}



Необходимо отметить, что из за произвола выбора направления полярной оси картина поля в волноводе круглого сечения может быть повернута на любой угол. Волна H_{11} имеет поляризационную неустойчивость.

Волноводы круглого сечения используются в системах связи, например при передаче сигналов от аппаратуры связи к антеннам радиорелейных линий. Для исключения поляризационной неустойчивости применяют волноводы с эллиптическим профилем сечения.