Направляющие системы связи в виде металлических пустотелых волноводов

Волноводы прямоугольного сечения

При решении задач распространения электромагнитных волн в волноводе сначала находят собственные волны, распространяющиеся по однородному прямолинейному волноводу бесконечной длинны, которые являются решениями однородного уравнения Гельмгольца для комплексных амплитуд векторов поля в волноводе.

Электромагнитные волны могут переносить энергию лишь вдоль волновода, поэтому усредненный за период колебаний вектор Пойнтинга может иметь только одну составляющую

$$\Pi_z = \frac{E_y H_x^*}{2} = \frac{E_x H_y^*}{2}$$

и его величина полностью определяется поперечными составляющими напряженностей электрического и магнитного полей, существующих в волноводе. Поэтому, для решения задач передачи энергии достаточно найти лишь поперечные составляющие поля. Поперечные составляющие напряженностей полей в волноводе для собственных волн могут быть легко определены, если найдено решение однородного уравнения Гельмгольца для векторных потенциалов поля, ориентированных по оси Z. Но для пустотелых волноводов решение часто ищут иначе. Известно, что собственные волны таких волноводов можно разделить на два типа: волны типа «Е», которые имеют продольную составляющую напряженности электрического поля в волноводе E_z (причем H_z=0), и волны типа «Н», имеющие продольную составляющую напряженности магнитного поля в волноводе H_z (причем E_z=0). В этом случае поперечные составляющие напряженностей поля в волноводе могут быть выражены непосредственно через продольные составляющие полей. Методика определения полей в прямоугольном волноводе обычно сводится к следующему:

а) предполагается, что стенки волновода идеально проводящие и форма поверхностей стенок идеальна;

б) записывается однородное уравнение Гельмгольца для составляющей H_z и ищется его решение в виде распространяющейся вдоль оси Z волны методом разделения переменных;

в) пользуясь уравнениями Максвелла, определяют поперечные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей в волноводе, выражая их через H_z ;

г) пользуясь принципом перестановочной двойственности уравнений электродинамики, находят общее решение для волн типа «Е»;

д) на найденные в пп. б), в), г) решения накладывают граничное условие E_τ=0 на стенках волновода, определяют постоянные интегрирования и получают решения в окончательном виде.

При отсутствии сторонних источников векторы поля E и H направляемой волны должны удовлетворять однородным уравнениям Гельмгольца

$$\vec{\nabla}^2 \dot{\vec{H}}_0 + k^2 \dot{\vec{H}}_0 = 0.$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_0 + k^2 \vec{E}_0 = 0.$$

Здесь $k^2 = \omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0$. k является волновым числом для среды, заполняющей волновод.

Так как в волноводах электромагнитная энергия может передаваться только вдоль оси z, решение уравнений будем искать в виде бегущей волны, направляемой волноводом вдоль оси Oz :

$$\vec{H} = \vec{H}_0(x, y)\exp(-ihz), \quad \vec{E} = \vec{E}_0(x, y)\exp(-ihz),$$

где $h=k_z$ – продольное волновое число.

Подставим такое представление полей в уравнения Гельмгольца. После вычисления вторых производных по продольной координате z в операторе Лапласа.

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -h^2 \vec{E}, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = -h^2 \vec{H},$$

уравнения Гельмгольца принимают вид

$$\Delta_\perp \vec{E} + g^2 \vec{E} = 0, \quad \Delta_\perp \vec{H} + g^2 \vec{H} = 0,$$

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$g = (k^2 - h^2)^{1/2}.$$

Разложим векторы поля на продольную и поперечную составляющие:

$$\vec{H} = \vec{H}_z + \vec{H}_\perp, \quad \vec{E} = \vec{E}_z + \vec{E}_\perp$$

Подставляя в систему уравнений Максвелла для комплексных амплитуд поля, получим поперечные составляющие полей направляемых волн в виде

$$E_x = -\frac{i}{g^2}\left(\omega\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} + h\frac{\partial E_z}{\partial x}\right), \; E_y = \frac{i}{g^2}\left(\omega\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} - h\frac{\partial E_z}{\partial y}\right),$$

$$H_x = \frac{i}{g^2}\left(\omega\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} - h\frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \; H_y = -\frac{i}{g^2}\left(\omega\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + h\frac{\partial H_z}{\partial y}\right).$$

Волновое число k направляемой волны связано с его продольной h и поперечной g составляющими соотношением

$$k^2 = h^2 + g^2.$$

Тогда

$$h = \pm\sqrt{k^2 - g^2}.$$

Очевидно, что возможны три случая:

1) k> g , т.е. величина h вещественна, что соответствует распространяющейся вдоль волновода волне, так как *exp(-ihz)* образует фазовый сомножитель, описывающий бегущую волну, такой случай называется режимом бегущих волн в волноводе;

2) критический или предельный случай k= g , при этом h= 0; величина $\lambda = 2\pi/g$ называется критической длиной волны и обозначается $\lambda_{кр}$;

3) k< g , тогда h – мнимая величина, и *exp(-ihz)* превращается в вещественный сомножитель, входящий в амплитуду и описывающий экспоненциальное уменьшение амплитуды поля при увеличении координаты z, поле в волноводе изменяется во времени, но не образует бегущую волну, такой случай называется закритическим или запредельным режимом поля в волноводе.

Очевидно

$$\lambda_в = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}}.$$

Здесь λ_0 - длина волны в свободном пространстве, имеющем параметры, совпадающие с параметрами среды, заполняющей волновод. Тогда фазовая постоянная для волновода $h=2\pi/\lambda_в$.

Длина волны $\lambda_в$ в волноводе всегда больше длины волны λ_0 той же частоты в свободном пространстве,. фазовая скорость в волноводе больше фазовой скорости волны в свободном пространстве.

$$v_ф = \frac{\omega}{h} = \frac{2\pi f}{h} = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{кр})^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-(f_{кр}/f)^2}},$$

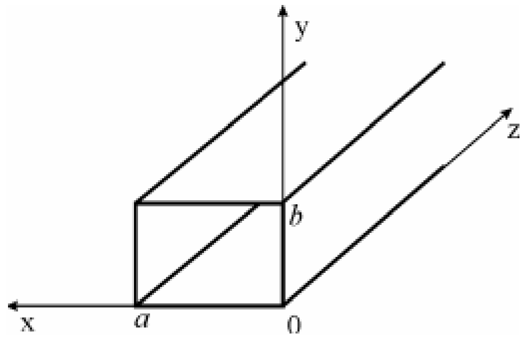
где f частота, c – скорость света в свободном пространстве, $f_{кр}$ – критическая частота

Фазовая скорость в волноводе является функцией частоты электромагнитного колебания. Такое явление получило название дисперсии. Дисперсия становится наиболее существенной, когда длина волны, на которой возбуждается волновод, близка к критической. При достаточно большой ширине спектра сигнала наличие дисперсии приводит к нелинейным искажениям сигналов, передаваемых по волноводу.

В качестве линий передачи диапазона СВЧ наиболее в системах связи применяются полые металлические волноводы в виде трубы прямоугольного, круглого и эллиптического сечения.

Прямоугольный волновод вместе с используемой системой координат показан на рис. Размер широкой стенки волновода принято обозначать a , а узкой– b . Волна типа H в прямоугольном волноводе имеет продольную составляющую магнитного поля H_z , тогда как электрическое поле поперечно(E_z =0). Для нахождения H_z необходимо решить уравнение Гельмгольца

$$\Delta_\perp H_z + g^2 H_z = 0$$



с учётом соответствующих граничных условий. Для волновода с идеально проводящими стенками граничное условие заключается в равенстве нулю тангенциальных составляющих электрического вектора на стенках волновода. Из геометрии задачи (см. рис.) следует, что для широких стенок волновода (y= 0 , b) тангенциальной является составляющая поля E_x, а для узких(x= 0 , a) − E_y . Формулы для поперечных составляющих поля, полученные ранее, позволяют записать граничные условия через искомую функцию H_z

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; b,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; a.$$

Краевая задача, в которой на границе области обращается в нуль не сама искомая функция, а её производная, называется задачей Неймана. Решается такая задача стандартным методом разделения переменных. Будем искать Краевая задача, в которой на границе области обращается в нуль не сама искомая функция, а её производная, называется задачей Неймана. Решается такая задача стандартным методом разделения переменных. Будем искать H_z (x y) в виде

$$H_0(x, y) = X(x)Y(y)$$

где H_z (x y) имеет вид произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной из поперечных координат: x y

Подставляя такой вид в уравнение Гельмгольца для поперечных координат, получим

$$X''Y + XY'' + g^2XY = 0,$$

где двумя штрихами обозначена вторая производная функции по соответствующей координате. Деля обе части на XY , получаем уравнение

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -g^2,$$

где в левой части стоит сумма независимых друг от друга функций, зависящих от x и y соответственно. Поэтому выражение разбивается на два уравнения

$$X''/X = -g_x^2, \quad Y''/Y = -g_y^2,$$

g_x, g_y – неизвестные числа, постоянные интегрирования, причём

$$g_x^2 + g_y^2 = g^2.$$

Полученные обыкновенные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (т.е. не зависящими от координат) хорошо известны и изучаются в курсе математического анализа, имеющие следующие решения:

$$X(x) = A\sin(g_x x) + B\cos(g_x x),$$

$$Y(y) = C\sin(g_y y) + D\cos(g_y y).$$

В итоге общее решение исходного трехмерного уравнения Гельмгольца имеет вид

$$H_z(x,y,z) = (A\sin(g_x x) + B\cos(g_x x))\times$$

$$\times(C\sin(g_y y) + D\cos(g_y y))\exp(-ihz).$$

Постоянные A, B, C, D находятся из граничных условий. Граничные условия при x= 0, y= 0 выполняются, если A= C=0 . Обозначая H_m= BD , общее решение можно записать в виде

$$H_z = H_m\cos(g_x x)\cos(g_y y)\exp(-ihz).$$

з граничных условий при x= a, y= b следует

$$g_x = m\pi / a, \quad g_y = n\pi / b,$$

где , m n – положительные целые числа, одновременно не равные нулю.

Тогда поперечное волновое число g будет определяться соотношением

$$g_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Таким образом, данная волноводная задача имеет решение только при определённых значениях параметра g , которые определяются полученным соотношением. Эти значения называются собственными значениями, они образуют дискретную последовательность возрастающих положительных чисел $g_{m,n}$, каждое из которых соответствует паре чисел m n . Каждому из собственных значений $g_{m,n}$ соответствует решения полученного выше вида, называемая собственной волной (модой) волновода, которая описывает распределение составляющей H_z в волноводе. Распределение прочих (поперечных) составляющих легко получить по формулам связи, полученным выше.

Аналогично может быть решена задача о волнах типа E в прямоугольном металлическом волноводе. Решается уравнение Гельмгольца для продольной составляющей электрического вектора E_z

$$\Delta_\perp E_z + g^2 E_z = 0.$$

Искомая функция E_z для каждой из стенок волновода является тангенциальной составляющей, для которой граничные условия имеют вид:

$$E_z = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; a, \quad y = 0; b.$$

Граничные условия для составляющих E_x, E_y с помощью формул связи, следующих из уравнений Максвелла, сводятся к виду

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0; b,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; a.$$

Краевая задача, в которой искомая функция на границе области обращается в нуль, называется краевой задачей Дирихле. Так же, как и задача Неймана, она может быть решена методом разделения переменных. Его применение с учётом граничных условий приводит к решению вида

$$E_z = E_m \sin(g_x x)\sin(g_y y)\exp(-ihz),$$

где $g_{m,n}$, g_x,g_y определяются прежними выражениями. Однако для Е-волн числа m и n даже не могут равняться нулю.

Итак, в случае прямоугольного волновода при заданных поперечных размерах a b и длине волны генератора в волноводе может существовать дискретный набор собственных мод типов E и H, каждая из которых характеризуется двумя числовыми индексами , m n .

Из полученных формул видно, что распределение полей мод прямоугольного волновода в поперечном сечении соответствует стоячей волне. Индексы m и n при этом показывают, сколько полуволн стоячей волны укладывается вдоль широкой и узкой стенок волновода соответственно.