Лекция №12

§ 6. Приложения теории вычетов: *вычисления несобственных интегралов, лемма Жордана*

Рассмотрим примеры вычисления несобственных интегралов от рациональных функций.

Теорема. *Если* $F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$, $Q(x)$ *– многочлены, причем многочлен* $Q(x)$ *не имеет действительных корней и степень* $Q(x)$ *«m» хотя бы на две единицы больше степени* $P(x)$ *«n»* $(m-n\geq 2)$, *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}res\,F(z_k),$$

где $F(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ *и* z_k *– полюсы функции* $F(z)$, *лежащие в верхней полуплоскости.*

Пример. Вычислить интеграл

$$I=\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a^2)^2},\quad (a>0).$$

Решение. Подынтегральная функция

$$F(x)=\frac{1}{(x^2+a^2)^2}$$

является четной. Поэтому

$$I=\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Введем функцию $F(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)^2}$.

Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1 = ai$, $z_2 = -ai$ – это полюсы второго порядка.

В верхней полуплоскости находится точка $z = ai$, $a > 0$.

Условия теоремы для функции $F(z)$ выполнены.

Вычислим $resF(ai)$:

$$res\,F(ai) \;= \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}[F(z)(z-ai)^2] =$$

$$= \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-ai)^2}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right] = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}[(z+ai)^{-2}] =$$

$$= \lim_{z\to ai}\frac{-2}{(z+ai)^3} = \frac{-2}{(2ai)^3} = \frac{1}{4a^3 i}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot res\,F(ai) = \frac{\pi i}{4a^3 i} = \frac{\pi}{4a^3}.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}, \quad (a > 0).$$

Решение. Подынтегральная функция

$$F(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^3}$$

является четной. Поэтому

$$I = \int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}.$$

Введем функцию $F(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^3}$.

Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1 = ai$, $z_2 = -ai$ – это полюсы третьего порядка. В верхней полуплоскости находится точка $z = ai$, $a > 0$. Условия теоремы для функции $F(z)$ выполнены.

Вычислим $resF(ai)$:

$$res\,F(ai) \; = \frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{d^2}{dz^2}\left[F(z)(z-ai)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-ai)^3}{(z-ai)^3(z+ai)^3}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+ai)^{-3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{12}{(z+ai)^5} = \frac{6}{(2ai)^5} = \frac{3}{16a^5 i}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot res\,F(ai) = \frac{3\pi i}{16a^5 i} = \frac{3\pi}{16a^5}.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty}\frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

Решение. Подынтегральная функция

$$F(x) = \frac{x^2+2}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

является четной. Поэтому

$$I = \int_0^{\infty}\frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Введем функцию $F(z) = \frac{(z^2+2)}{(z^2+1)(z^2+9)}$.

Функция $F(z)$ имеет четыре особые точки

$z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -3i$ – это полюсы первого порядка.

В верхней полуплоскости находятся точки $z = i$ и $z = 3i$. Условия теоремы для функции $F(z)$ выполнены.

Вычислим $resF(i)$:

$$res\ F(i)\ = \lim_{z\to i}\left[F(z)(z-i)\quad\right] =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{(z^2+2)(z-i)}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to i}\frac{(z^2+2)}{(z+i)(z^2+9)} = \frac{1}{16i}$$

Вычислим $resF(3i)$:

$$res\ F(3i)\ = \lim_{z\to 3i}\left[F(z)(z-3i)\quad\right] =$$

$$= \lim_{z\to 3i}\frac{(z^2+2)(z-3i)}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to 3i}\frac{(z^2+2)}{(z+3i)(z^2+1)} = \frac{-7}{-48i} = \frac{7}{48i}$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot(res\ F(i) + res\ F(3i)) =$$

$= \pi\ \cdot(\frac{1}{16} + \frac{7}{48}) = \pi\cdot\frac{5}{24}$.

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\propto}^{\infty}\frac{(x-3)dx}{x^4+5x^2+4}$$

Введем функцию $F(z) = \frac{z-3}{z^4+5z^2+4} = \frac{z-3}{(z^2+1)(z^2+4)}$.

Функция $F(z)$ имеет четыре особые точки

$z_1 = i,\ \ z_2 = -i\ ,\ \ z_3 = 2i,\ z_4 = -2i$ – это полюсы первого порядка.

В верхней полуплоскости находятся точки $z = i$ и $z = 2i$.

Условия теоремы для функции $F(z)$ выполнены.

Вычислим $resF(i)$:

$$res\ F(i)\ = \lim_{z\to i}\left[F(z)(z-i)\quad\right] =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{(z-3)(z-i)}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to i}\frac{z-3}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{i-3}{6i}$$

Вычислим $resF(2i)$:

$$res\ F(i)\ = \lim_{z\to 2i}\left[F(z)(z-2i)\quad\right] =$$

$$= \lim_{z\to 2i}\frac{(z-3)(z-2i)}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to i}\frac{z-3}{(z+2i)(z^2+1)} = \frac{2i-3}{-12i}$$

Следовательно,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-3)dx}{x^4+5x^2+4} = 2\pi i\cdot(res\,F(i)+res\,F(2i)) =$$

$$=2\pi i\cdot\left(\frac{i-3}{6i}+\frac{2i-3}{-12i}\right) = 2\pi\cdot\frac{-3}{12} = \frac{-\pi}{2}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\propto}^{\infty}\frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$$

Введем функцию $F(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$. Особые точки этой функции – это нули знаменателя, т.е. решения уравнения $z^4+1=0.$

Функция $F(z)$ имеет четыре особые точки

$z_1 = cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4} = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$, $z_2 = cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}$,

$z_3 = cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4} = \frac{-i-1}{\sqrt{2}}$, $z_4 = cos\frac{7\pi}{4}+isin\frac{7\pi}{4} = \frac{-i+1}{\sqrt{2}}$ – это полюсы первого порядка (*проверить!*).

В верхней полуплоскости находятся точки $z_1 = cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}$ и $z_2 = cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}$. Условия теоремы для функции $F(z)$ выполнены.

Вычислим $resF(z_1)$:

$$res\,F(z_1) = \lim_{z\to z_1}\left[F(z)(z-z_1)\right] = \lim_{z\to z_1}\frac{(z^2+1)(z-z_1)}{z^4+1}$$

Для вычисления этого предела воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{z\to z_1}\frac{(z^2+1)(z-z_1)}{z^4+1} = \lim_{z\to z_1}\frac{(2z)(z-z_1)+(z^2+1)}{4z^3} = \frac{(z_1^2+1)}{4z_1^3} = \frac{i+1}{4z_1^3} = \frac{i+1}{4z_2} =.$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{(i+1)\sqrt{2}}{i-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(i+1)^2\sqrt{2}}{-2}.$$

Здесь мы воспользовались формулой Муавра:

$$z_1^3 = \left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = z_2$$

Вычислим $resF(z_2)$:

$$res\,F(z_2) = \lim_{z\to z_2}\left[F(z)(z-z_2)\right] = \lim_{z\to z_2}\frac{(z^2+1)(z-z_2)}{z^4+1}$$

Для вычисления этого предела воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{z\to z_2}\frac{(z^2+1)(z-z_1)}{z^4+1} = \lim_{z\to z_2}\frac{(2z)(z-z_2)+(z^2+1)}{4z^3} = \frac{(z_2^2+1)}{4z_2^3} = \frac{-i+1}{4z_2^3} = \frac{-i+1}{4z_1} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{(-i+1)\sqrt{2}}{i+1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(-i+1)^2\sqrt{2}}{2}.$$

Здесь мы снова воспользовались формулой Муавра:

$$z_2^3 = \left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]^3 = \cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4} = z_2$$

Следовательно,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+1)dx}{x^4+1} = 2\pi i\cdot(res\,F(z_1) + res\,F(z_2)) =$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot[\,(-i+1)^2 - (i+1)^2\,] = \pi\cdot\sqrt{2}.$$

6.2.2 Вычисление интегралов с тригонометрическими функциями

Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет следующим *двум условиям (6.1):*

1) $f(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости и на действительной оси, кроме конечного числа полюсов, лежащих в верхней полуплоскости;

2) при z → ∞ в верхней полуплоскости и на действительной оси $z \cdot f(z) \to 0$ *равномерно по аргументу z,* т.е. $\max\limits_{z \in C_R} |z \cdot f(z)| \to 0$ при $R \to \infty$, контур C_R – полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости.

При этом справедливо равенство

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} res f(z_k). \tag{6.2}$$

Здесь $\sum\limits_{k=1}^{n} res f(z_k)$ – сумма вычетов $f(z)$ относительно полюсов, лежащих в верхней полуплоскости. Разобьем интервал (−R, R) на части (−R, 0) и (0, R) и заменим в первом из интегралов x на $(-x)$. В результате получим $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{0}^{R} [f(x) + f(-x)]dx = 2\pi i \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} res f(z_k)$. Следовательно,

$$\int_{0}^{+\infty} [f(x) + f(-x)]dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} res f(z_k). \tag{6.3}$$

Используем полученный результат в частном случае, когда подынтегральная функция $f(z)$ имеет вид: $f(z) = F(z) \cdot e^{iaz}$, $a > 0$, где функция $F(z)$ удовлетворяет двум условиям (6.1).

Тогда этим же условиям будет удовлетворять и функция $f(z)$. Таким образом, если $F(z)$ удовлетворяет двум условиям (6.1), то

$$\int_{0}^{+\infty} [F(x) \cdot e^{iax} + F(-x) \cdot e^{-iax}]dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} res[F(z_k) \cdot e^{iaz_k}]. \tag{6.4}$$

Пусть $F(z)$ − *четная* функция, т. е. $F(-z) = F(z)$. Тогда из (6.4) получаем

$$\int_0^{+\infty} F(x)\cdot\cos(ax)dx = \pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res[F(z_k)\cdot e^{iaz_k}]. \qquad (6.5)$$

Аналогично, если $F(z)$ − *нечетная* функция, т. е. $F(-z) = -F(z)$, то

$$\int_0^{+\infty} F(x)\cdot\sin(ax)dx = \pi\cdot\sum_{k=1}^{n} res[F(z_k)\cdot e^{iaz_k}] \qquad (6.6)$$

Замечание. Отметим, что формулу (6.2) нельзя, вообще говоря, писать в виде

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res f(z_k)$. В формуле (6.2) интеграл рассматривается в смысле главного значения [см. 6]. Но если из каких-либо соображений известно, что этот интеграл существует как обычный несобственный интеграл, то в этом случае интеграл в смысле главного значения совпадает с обычным несобственным интегралом.

Следующая лемма позволяет ослабить условия (6.1), наложенные на функцию $F(z)$. При этом формулы (6.5) и (6.6) сохраняются.

Лемма Жордана. *Если* $F(z)$ *в верхней полуплоскости и на действительной оси удовлетворяет условию:* $F(z) \to 0$ *равномерно при* $z \to \infty$ *и* $a>0$, то

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} F(z)\cdot e^{iaz}dz = 0.$$

Здесь контур C_R – полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости (рис. 14).

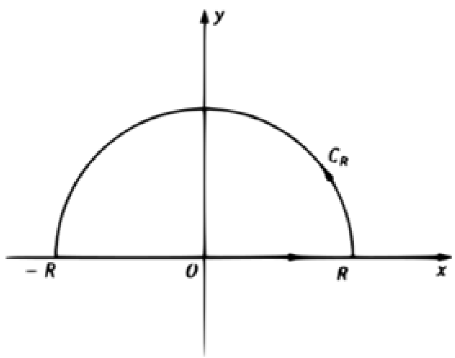

Рис. 14

Пользуясь леммой Жордана, можно доказать справедливость формул (6.5) и (6.6) при более слабых предположениях относительно функции $F(z)$. Вместо второго условия (6.1) достаточно потребовать, чтобы $F(z) \to 0$ равномерно при $z \to \infty$. Требование четности (нечетности) функции $F(z)$ сохраняется.

Если $F(z)= R(z)$ – рациональная функция, то справедливо следующее утверждение [см. 1].

Теорема 6.3. *Пусть* $R(z)$ *– рациональная функция, у которой степень числителя меньше степени знаменателя,* $R(z)$ не имеет полюсов на действительной оси, *и в верхней полуплоскости имеет полюса* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*; при* $z=x$ *функция* $R(x)$ *действительна при действительных* x*. Тогда для любого* $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \cdot R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\left[R(z_k) \cdot e^{i\alpha z}\right].$$

Следствие. Воспользовавшись формулой Эйлера: $e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x,$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\alpha x\, dx = Im\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\big(R(z_k)e^{i\alpha z}\big)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)cos\,\alpha x\,dx = Re\left[2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\big(R(z_k)e^{i\alpha z}\big)\right]$$

$$(Im\,z_k > 0).$$

Отметим, что в теореме 6.3 не требуется четность (нечетность) функции $F(z)$.

<u>Пример.</u> Вычислить

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx$$

Решение. Введем вспомогательную функцию $F(z) = \frac{ze^{i2z}}{z^2+3^2}$. Если $z = x$, то $Im\,F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{x\sin 2x}{x^2+9}$. Поскольку подынтегральная функция $f(x)$ четная, то

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx$$

Функция $F(z) = \frac{ze^{i2z}}{z^2+3^2}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx = 2\pi i\cdot res\,F(3i).$$

$z = 3i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является простым полюсом.

$z = -3i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z = 3i$

$$res\,F(3i) = \lim_{z\to 3i}\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}(z-3i) =$$

$$= \lim_{z\to 3i}\frac{ze^{i2z}}{z+3i} = \frac{3ie^{-6}}{6i} = \frac{1}{2e^6}.$$

Подставляя полученное значение, получим

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \cdot Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot Im \left[2\pi i \cdot res_{z=3i} \frac{\left(ze^{i2z}\right)}{z^2+9} \right] = \frac{1}{2} \cdot Im \left[2\pi i \frac{1}{2e^6} \right] = \frac{\pi}{2e^6}.$$