Практическое занятие 1
Пространство сигналов.
Обобщённый спектральный анализ сигналов.
1. Линейное пространство сигналов

Множество сигналов R называется линейным пространством сигналов, если выполняются следующие условия:

1. Для любых двух сигналов из R определена операция сложения так, что множество R замкнуто относительно этой операции:

$$\forall s_1, s_2 \in R \quad \exists s_1 + s_2 \in R.$$

2. Для любого сигнала из R определена операция умножения на число так, что множество R замкнуто относительно этой операции:

$$\forall s \in R,\ \lambda \in \mathbb{C}\ \exists \lambda s \in R.$$

3. В множестве R имеется нулевой элемент:

$$\exists 0 \in R : \forall s \in R \ \Rightarrow\ s + 0 = s.$$

2. Понятие базиса

Совокупность сигналов $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$ из R называется линейно-независимой системой, если их линейная комбинация обращается в нуль только при тривиальном наборе коэффициентов:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \varphi_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_n = 0, n = 0, \ldots, N-1.$$

Линейное пространство называется N-мерным, если в нём существуют не более N линейно-независимых сигналов.

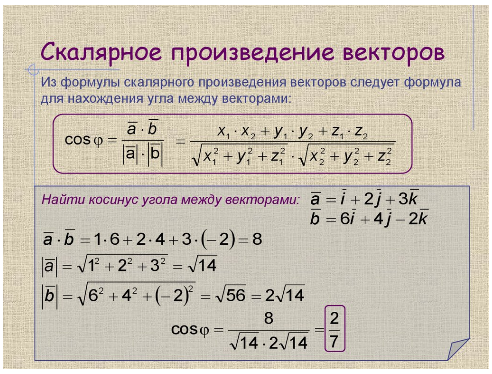
Линейное пространство называется бесконечномерным, если в нём существует любое количество линейно-независимых сигналов.

Совокупность N линейно-независимых сигналов $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$ в линейном пространстве размерности N называется базисом этого пространства. Для любого сигнала s найдутся такие числа $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$, что

$$s = \sum_{n=0}^{N-1} C_n \varphi_n.$$

Сигналы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$ называются базисными функциями.

В задачах теории сигналов пространство может быть и



бесконечномерным.

3. Скалярное произведение

Скалярным произведением сигналов s_1 и s_2 из R называется сопоставляемое им число (s_1, s_2) посредством правила, обладающего свойствами:

1. Сопряжённая симметрия

$$(s_1, s_2) = (s_2, s_1)^*.$$

2. Распределительное свойство

$$(s_1 + s_2, s_3) = (s_1, s_3) + (s_2, s_3),$$
$$(s_3, s_1 + s_2) = (s_3, s_1) + (s_3, s_2).$$

3. Умножение на число

$$(\lambda s_1, s_2) = \lambda (s_1, s_2),$$
$$(s_1, \lambda s_2) = \lambda^* (s_1, s_2).$$

4. Скалярное произведение сигнала на него же неотрицательно и может быть равно нулю только для нулевого элемента

$$(s, s) \geq 0,$$
$$(s, s) = 0 \Leftrightarrow s = 0.$$

5. Скалярное произведение любого сигнала и нулевого элемента равно нулю

$$(0, s) = 0.$$

6. Скалярное произведение удовлетворяет неравенству Коши-Буняковского

$$|(s_1, s_2)|^2 \leq (s_1, s_1)(s_2, s_2),$$

где равенство достигается только при $s_1 = \lambda s_2$.

Конечномерное линейное пространство с введённым на нём скалярным произведением называется евклидовым E.

Бесконечномерное линейное пространство с скалярным произведением называется гильбертовым H.

4. Норма

Нормой сигнала называется число $\|s\|$, сопоставляемое ему с

помощью правила, обладающего свойствами:
1. Норма неотрицательна, нулевую норму имеет только нулевой элемент

$$\|s\| \geq 0;\ \|s\| = 0 \Leftrightarrow s = 0\,.$$

2. Норма сигнала, умноженного на число

$$\|\lambda s\| = |\,\lambda\,|\,\|s\|\,.$$

3. Неравенство треугольника

$$\|s_1 + s_2\| \leq \|s_1\| + \|s_2\|.$$

В качестве нормы евклидова (гильбертова) пространства часто рассматривается

$$\|s\| = \sqrt{(s,s)}\,.$$

При таком определении нормы неравенство Коши-Буняковского перепишется в виде:

$$|(s_1, s_2)| \leq \|s_1\| \cdot \|s_2\|.$$

5. Пространство сигналов $L_2[a,b]$

Пространством сигналов $L_2[a,b]$ называется линейное пространство, элементами которого являются квадратично-интегрируемые на интервале $t \in [a,b]$ сигналы:

$$\int_a^b |\,s(t)\,|^2\,dt < \infty\,.$$

Скалярное произведение в $L_2[a,b]$ определяется как

$$(s_1, s_2) = \int_a^b s_1(t) s_2^*(t) dt\,,$$

норма сигнала

$$\|s\| = \sqrt{\int_a^b |s(t)|^2\,dt}\,.$$

При таком определении квадрат нормы даёт энергию сигнала:

$$E_s(a,b)=\|s\|^2=\int_a^b |s(t)|^2\,dt.$$

6. Обобщённый ряд Фурье. Обобщённый спектр сигнала

Рассмотрим гильбертово пространство H. Система ненулевых функций (сигналов) $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется ортогональной, если выполняется условие ортогональности:

$$(\varphi_n,\varphi_k)=\begin{cases}\|\varphi_n\|^2, n=k\\ 0, n\neq k\end{cases}, n,k=0,1,2,...$$

Если сигналы ортогональны, то они и линейно-независимы. Действительно, пусть линейная комбинация $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\varphi_n$ обращается в нуль:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\varphi_n=0.$$

Умножим левую и правую часть равенства скалярно на φ_k:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\varphi_n,\varphi_k\right)=0,\ k=0,1,2,...,$$

откуда с учётом свойств скалярного произведения получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\varphi_n,\varphi_k)=0,$$

и, ввиду условия ортогональности, запишем

$$\alpha_k\|\varphi_k\|^2=0.$$

Так как сигналы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ненулевые, то $\alpha_k=0,\ k=0,1,2,...$, то есть обращение рассматриваемой линейной комбинации в нуль возможно только при тривиальном наборе коэффициентов, что и означает линейную независимость системы.

В евклидовом пространстве ортогональная система функций, количество элементов в которой совпадает с размерностью линейного пространства, является полной и образует базис, который называется ортогональным базисом.

В гильбертовом линейном пространстве ортогональная система функций может иметь бесконечное количество элементов, но при этом не являться полной, то есть не образовывать базиса.

Любой элемент из H можно представить можно представить в виде:

$$s=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n,$$

где $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ - полная ортогональная система функций (ортогональный базис). Умножим левую и правую часть записанного равенства на φ_k скалярно:

$$(s,\varphi_k)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(\varphi_n,\varphi_k)=C_k\left\|\varphi_k\right\|^2,\ k=0,1,2,...,$$

откуда

$$C_k=\frac{1}{\left\|\varphi_k\right\|^2}(s,\varphi_k),\ k=0,1,2,....$$

Рассмотренное представление называется обобщённым рядом Фурье. Совокупность коэффициентов ряда $\left\{C_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ называется обобщённым спектром сигнала в базисе $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$.

7. Равенство Парсеваля

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональный базис в H, рассмотрим два сигнала

$$s_1=\sum_{n=0}^{\infty}C_{1n}\varphi_n,\ s_2=\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n}\varphi_n,$$

и их скалярное произведение

$$(s_1,s_2)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_{1n}\varphi_n,\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k}\varphi_k\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}C_{1n}C_{2k}^{*}\left(\varphi_n,\varphi_k\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_{1n}C_{2n}^{*}\left\|\varphi_n\right\|^2.$$

Полученное равенство

$$(s_1, s_2) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} C_{2n}^{*} \|\varphi_n\|^2$$

называется равенством Парсеваля.

В частном случае, когда $\|s\| = \sqrt{(s, s)}$ и $s = s_1 = s_2$, равенство Парсеваля перепишется как

$$\|s\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \|\varphi_n\|^2.$$

8. Экстремальное свойство коэффициентов обобщённого ряда Фурье

Рассмотрим случай, когда сигнал приближается в неполной ортогональной системе функций

$$s(t) \approx \psi(t) = \sum_n a_n \varphi_n(t).$$

Неполная система ортогональных функций может быть использована изначально для приближения сигнала из каких-нибудь соображений, или, например, получиться при усечении обобщённого ряда Фурье. При этом возникает задача выбора коэффициентов $\{a_n\}_{n=0}^{N-1}$. Выберем коэффициенты так, чтобы минимизировать энергию разностного сигнала:

$$\|s - \psi\|^2 \to \min.$$

Далее

$$\|s-\psi\|^2 = \left(s - \sum_n a_n \varphi_n, s - \sum_k a_k \varphi_k \right) =$$

$$= (s, s) - \left(s, \sum a_k \varphi_k\right) - \left(\sum a_n \varphi_n, s\right) + \left(\sum a_n \varphi_n, \sum a_k \varphi_k\right) =$$

$$= \|s\|^2 - \sum a_k^{*} (s, \varphi_k) - \sum a_n (\varphi_n, s) + \sum \sum a_n a_k^{*} (\varphi_n, \varphi_k) =$$

$$= \|s\|^2 - \sum \left(a_n^{*} C_n \|\varphi_n\|^2 + a_n C_n^{*} \|\varphi_n\|^2 \right) + \sum |a_n|^2 \|\varphi_n\|^2 =$$

$$= \|s\|^2 - \sum 2 \operatorname{Re} a_n^{*} C_n \|\varphi_n\|^2 + \sum |a_n|^2 \|\varphi_n\|^2 \pm \sum |C_n|^2 \|\varphi_n\|^2 =$$

$$= \|s\|^2 - \sum_n |C_n|^2 \|\varphi_n\|^2 + \sum_n |a_n - C_n|^2 \|\varphi_n\|^2.$$

На последнем шаге учтено, что $\left|a_n - C_n\right|^2 = \left|a_n\right|^2 + \left|C_n\right|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,a_n C_n^*$.

Минимум полученного выражение достигается, когда последнее слагаемое $\sum\left|a_n - C_n\right|^2 \left\|\varphi_n\right\|^2$ равно нулю, то есть когда коэффициенты аппроксимирующей функции совпадают с коэффициентами обобщённого ряда Фурье

$$a_n = C_n,\ n = 0,\ldots,N-1.$$

При этом достигается минимальная энергия разностного сигнала

$$\left\|s - \psi\right\|_{\min}^2 = \left\|s\right\|^2 - \sum_n \left|C_n\right|^2 \left\|\varphi_n\right\|^2 = \left\|s\right\|^2 - \left\|\psi\right\|^2.$$

Таким образом, при приближении сигнала линейной комбинацией ортогональных функций, наименее уклоняется от сигнала такая приближающая функция, коэффициенты которой являются коэффициентами обобщённого ряда Фурье.