Занятие 5. Линейные операторы в пространстве геометрических векторов. Переход к другому базису.

Задача 1.

Линейный оператор $\hat{A}$ – проекция на плоскость XOZ в пространстве V_3.

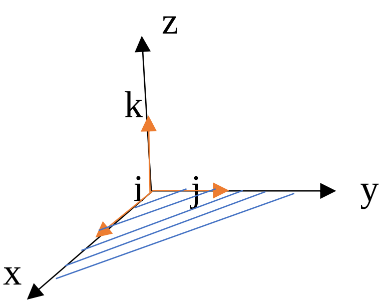
a) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

b) Найти образ вектора $\vec{a}$ = (1,2,3)

c) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$**.**

d) Является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Если да, описать его действие.

<u>Решение.</u>



Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

$$\hat{A}\vec{\imath} = \vec{\imath} = (1,0,0),$$
$$\hat{A}\vec{\jmath} = \vec{\jmath} = (0,0,0),$$
$$\hat{A}\vec{k} = \vec{0} = (0,0,1).$$

a) Запишем матрицу $\hat{A}$. Вспомним, что координаты образов базисных векторов надо записать по столбцам:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Найдите образ вектора $\vec{a} = (1,2,3)$:

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} => \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Из геометрических соображений видно, что под действием линейного оператора в $\vec{0}$ переходят все векторы, параллельные оси OY, следовательно,

$\mathrm{Ker}\,\hat{A} = \{\alpha\vec{j}\}$, $\mathrm{Im}\,\hat{A} = \{\beta\vec{i} + \gamma\vec{k}\} = V_2$, $\mathrm{Defect}\,\hat{A} = 1$, $\mathrm{Rang}\,\hat{A} = 2$.

d) По всем трем критериям линейный оператор необратим:

1) $\det A = 0$; 2) $\mathrm{Im}\,\hat{A} \neq V_3$; 3) $\mathrm{Ker}\,\hat{A} \neq \{\vec{0}\}$.

Достаточно применить только один критерий

Задача 2.

$\widehat{A}$ - поворот вокруг оси OZ на угол 90^0 против часовой стрелки пространстве V_3

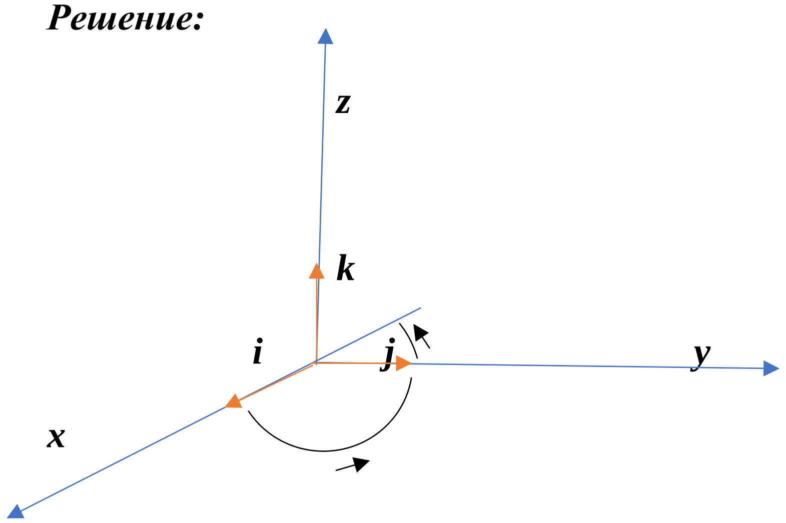
a) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

b) Найти образ вектора $\vec{a}$ = (1,2,3)

c) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.

d) Является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Если да, описать его действие.

Решение:



Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$\hat{A}\vec{i} = \vec{j}$ = (0, 1, 0)

$\hat{A}\vec{j} = -\vec{i}$ =(-1, 0, 0)

$\hat{A}\vec{k}$ = $\vec{k}$=(0, 0, 1)

a) Запишем матрицу $\hat{A}$. Вспомним, что координаты образов базисных векторов надо записать по столбцам.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Найдем образ вектора $\vec{a} = (1{,}2{,}3)$:

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} => \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) Из геометрических соображений видно, что под действием линейного оператора в $\vec{0}$ переходит только $\vec{0}$, следовательно, $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\}$. Тогда образом $\hat{A}$ является все пространство V_3.

$\operatorname{Im} \hat{A} = V_3$. Данные выводы подтверждаются тем факторм, что $\operatorname{rang} A = 3$.

d) По всем трем критериям линейный оператор обратим:

1) $\det A \neq 0$; 2) $\operatorname{Im} \hat{A} = V_3$; 3) $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\}$.

Достаточно применить только один критерий.

$\hat{A}^{-1}$– поворот вокруг оси OZ на угол 90^0 по часовой стрелке.

Задача 3.

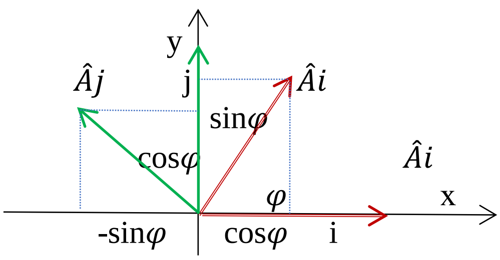
$\hat{A}: V_2 \to V_2$ – оператор поворота на угол $\frac{\pi}{3}$ против часовой стрелки;

a) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.

b) Найти образ вектора $\vec{a}$ = (1,2)

c) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$**.**

d) Является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Если да, описать его действие.



$$\hat{A}\vec{\imath} = cos\frac{\pi}{3}\vec{\imath} + sin\frac{\pi}{3}\vec{\jmath} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\hat{A}\vec{\jmath} = -\sin\frac{\pi}{3}\vec{\imath} + cos\frac{\pi}{3}\vec{\jmath} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$

a) A=$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) Найдите образ вектора $\vec{a} = (1,2)$:

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

c) Из геометрических соображений видно, что под действием линейного оператора в $\vec{0}$ переходит только $\vec{0}$, следовательно, Ker $\hat{A} = \{\vec{0}\}$. Тогда образом $\hat{A}$ является все пространство V_2.

Im $\hat{A} = V_2$. Данные выводы подтверждаются тем факторм, что rang $A = 2$.

d) По всем трем критериям линейный оператор обратим:

1) det $A \neq 0$; 2) Im $\hat{A} = V_2$; 3) Ker $\hat{A} = \{\vec{0}\}$.

Достаточно применить только один критерий

$\hat{A}^{-1}$– поворот вокруг на угол $\frac{\pi}{3}$ по часовой стрелке.

Задача 4. В пространстве V_3 отражение $\hat{A}$ задано формулой

$\hat{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{a}]$, (векторное произведение), где $\vec{a} = (1,1,1)$

a) Доказать, что $\hat{A}$- линейный оператор;
б) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
c) Найти образ вектора $\vec{a}$ = (1,2,3)
d) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$**.**
e) Является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Если да, описать его действие.

Решение:

a) $\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = [\vec{x} + \vec{y}, \vec{a}]$= $[\vec{x}, \vec{a}]$+ $[\vec{y}, \vec{a}]$= $\hat{A}(\vec{x}) + \hat{A}(\vec{y})$
$\hat{A}(\alpha\vec{x}\ )$ =$[\alpha\vec{x}, \vec{a}]$= $\alpha[\vec{x}, \vec{a}]$= $\alpha\hat{A}(\vec{x}\ )$
Свойства линейности выполняется, следовательно $\hat{A}$ – линейный оператор.

б) $\hat{A}\vec{\imath} = [\vec{\imath}, \vec{a}]$ = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = -j+k=(0, -1, 1)

$\hat{A}\vec{\jmath} = [\vec{\jmath}, \vec{a}]$ = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$= i-k = (1, 0, -1)

$\hat{A}\vec{k}$ = $[k, \vec{a}]$ = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$= - i+j = (-1, 1, 0)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Найдем образ вектора $\vec{a} = (1,2,3)$:

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} => \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d) Ker $\hat{A} = \{\beta\vec{a}\} - \text{векторы, коллинеарные } \vec{a}$, (следует из свойств векторного произведения)

Im $\hat{A} - \text{векторы, перпендикулярные } \vec{a}$ (плоскость, для которой $\vec{a} -$ нормаль)

Defect $\hat{A} = 1$, Rang $\hat{A} = 2$.

e) По всем трем критериям линейный оператор необратим:

1) det $A = 0$; 2) Im $\hat{A} \neq V_3$; 3) Ker $\hat{A} \neq \{\vec{0}\}$.

<u>Разбор задач типового расчета</u>

Задача 2.5. Линейный оператор $\hat{A}$ в базисе $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ задан матрицей A. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\overrightarrow{f_3} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

1) Запишем матрицу перехода от старого базиса $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ к новому $\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$. Для этого выпишем по столбцам координаты нового базиса в старом

$$\vec{f_1} = (1,1,2), \overrightarrow{f_2} = (2,-1,0), \overrightarrow{f_3} = (-1,1,1): \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем матрицу, обратную к P:

$$P^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку: $P \cdot P^{-1} = E$ (единичная матрица).

3) Применим формулу преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса: $A_2 = P^{-1} A_1 P$ (теорема 3), где $A_1 = A$.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 6 & -8 \\ 11 & -9 & 12 \\ 15 & -16 & 19 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A_2 = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -8 \\ 11 & -9 & 12 \\ 15 & -16 & 19 \end{pmatrix}.$

Домашнее задание :

1) Типовой расчет : задача 2.5;

2) Линейный оператор $\hat{A}$ – проекция на ось OX в пространстве V_3.

a) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

b) Найти образ вектора $\vec{a}$ = (1,2,3)

c) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.

d) Является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Если да, описать его действие.

3) Линейный оператор $\hat{A}$ – зеркальное отражение относительно плоскости XOZ в пространстве V_3.

a) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

b) Найти образ вектора $\vec{a}$ = (1,2,3)

c) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$**.**

d) Является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Если да, описать его действие.

4) Линейный оператор $\hat{A}$ – гомотетия с коэффициентом k=3, $\hat{A}(\vec{x}) = 3\vec{x}$, в пространстве V_3.

a) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

b) Найти образ вектора $\vec{a}$ = (1,2,3)

c) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$**.**

d) Является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Если да, описать его действие.