Лекция 8. Проверка статистических гипотез

Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции. Сравнение двух математических ожиданий. Сравнение математического ожидания с заданным значением. Сравнение вероятности с заданным значением. Критерий Пирсона.

Определение 8.1. *Статистической называется гипотеза о виде распределения или о значениях его параметров.*

Гипотезы будем обозначать $H_0,\ H_1,\ H_2,\ \ldots$.

Различают проверяемую или основную гипотезу H_0 и альтернативную или конкурирующую H_1, которая должна противоречить основной.

Пример 8.1. *Проверяемая гипотеза H_0 состоит в том, что математическое ожидание случайной величины ξ равно заданному значению a_0. $H_0:\ M(\xi) = a_0$. Альтернативная $H_1:\ M(\xi) > a_0$.*

Для проверки статистической гипотезы на основании выборки $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ вычисляют значение критерия, зависящего от наблюдений:

$$T = T(x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n).$$

Всё множество значений критерия делится на так называемую критическую область, при попадании в которую критерия проверяемая гипотеза отвергается, и область принятия гипотезы.

При принятии решения о справедливости гипотезы H_0 возможны следующие ошибки:

- гипотеза H_0 отвергается, хотя на самом деле она верна (ошибка первого рода) ;
- гипотеза H_0 принимается, хотя на самом деле она не верна, а справедлива гипотеза H_1 (ошибка второго рода) .

Наряду с этим возможны следующие правильные решения:

- гипотеза H_0 принимается и она действительно верна;
- гипотеза H_0 отвергается и на самом деле справедлива гипотеза H_1.

Определение 8.2. *Вероятность ошибки первого рода называется уровнем значимости критерия и обычно обозначается α.*

Вероятность правильно отвергнуть проверяемую гипотезу называется мощностью критерия и обычно обозначается β, тогда вероятность ошибки второго рода равна $1-\beta$.

Одновременно уменьшить вероятности ошибок первого и второго рода можно только увеличив объём выборки n. При фиксированном n обычно задают допустимый уровень ошибки первого рода α и стараются минимизировать вероятность ошибки второго рода $1-\beta$, т.е. максимизировать мощность критерия β.

На практике при проверке статистической гипотезы на основании наблюдений вычисляют наблюдаемое значение критерия $T_{\text{набл}}$ и по заданному уровню значимости α определяют границы критической области — критические точки.

Если критическая область правосторонняя, т.е. $(t_{\text{кр}2};\ +\infty)$, при выполнении условия $T_{\text{набл}} > t_{\text{кр}2}$ делают вывод: проверяемая гипотеза H_0 отвергается с уровнем значимости α в пользу гипотезы H_1; если это условие не выполняется, т.е. $T_{\text{набл}} \leqslant t_{\text{кр}2}$, делают более осторожный вывод: нет оснований для того, чтобы отвергнуть гипотезу H_0 в пользу гипотезы H_1 с уровнем значимости α.

Если критическая область левосторонняя, т.е. $(-\infty;\ t_{\text{кр}1})$, гипотеза H_0 отвергается при выполнении условия $T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}1}$. В случае двусторонней критической области вида $(-\infty;\ t_{\text{кр}1}) \cup (t_{\text{кр}2};\ +\infty)$ гипотеза H_0 отвергается при выполнении условия $T_{\text{набл}} < t_{\text{кр}1}$ или $T_{\text{набл}} > t_{\text{кр}2}$.

8.1. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Пусть на основании данных корреляционной таблицы по выборке объёма n независимых наблюдений над нормально распределёнными случайными величинами найден выборочный коэффициент корреляции r^*_{xy}, который оказался отличным от нуля. Так как выборка отобрана случайно, возникает вопрос о том, будет ли отличен от нуля теоретический коэффициент корреляции $r_{\xi\zeta}$, к которому сходится выборочный коэффициент при $n \to \infty$.

Необходимо при заданном уровне значимости α проверить гипотезу $H_0:\ r_{\xi\zeta} = 0$ при альтернативной гипотезе $H_1:\ r_{\xi\zeta} \neq 0$.

Если H_0 отвергается, это означает, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, а случайные величины ξ и ζ

коррелированы, т.е. в той или иной степени связаны линейной зависимостью. Если H_0 принимается, это означает, что выборочный коэффициент корреляции незначимо отличается от нуля, а случайные величины ξ и ζ некоррелированы, т.е. не связаны линейной зависимостью.

В качестве критерия для проверки H_0 выбирается случайная величина

$$T = r^*_{xy}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-{r^*_{xy}}^2}}\ , \tag{8.1}$$

где r^*_{xy} вычисляется по формуле (7.21). При справедливости гипотезы H_0 величина T имеет так называемое распределение Стьюдента с $n-2$ степенями свободы. Критическая область для рассматриваемой гипотезы H_1 будет двусторонней, $t_{\text{кр}1} = -t_{\text{кр}2}$. Критическая точка $t_{\text{кр}2}$ определяется по заданным уровню значимости α и числу степеней $n-2$ по специальным таблицам (приложение 3) или с помощью обратной к функции распределения Стьюдента, имеющейся, например, среди статистических функций Excel для $\alpha/2$ и $n-2$ степеней свободы. По формуле (8.1) для данных наблюдений определяем значение критерия $T_{\text{набл}}$.

Если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}2}$, гипотеза H_0 отвергается с уровнем значимости α, если $|T_{\text{набл}}| \leqslant t_{\text{кр}2}$ — нет оснований отвергнуть H_0.

8.2. Сравнение двух математических ожиданий

Пусть имеются две независимые выборки объёмов n и m из нормальных совокупностей с известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2. Требуется по найденным выборочным средним $\bar{x}$ и $\bar{y}$ с уровнем значимости α проверить нулевую гипотезу H_0 о равенстве теоретических математических ожиданий:

$$H_0: \quad M(\xi) = M(\zeta).$$

Заметим, что в силу несмещённости оценок $\bar{x}$ и $\bar{y}$ следует, что нулевую гипотезу можно записать и так:

$$H_0: \quad M(\bar{\xi}) = M(\bar{\zeta}).$$

Другими словами, требуется проверить значимо или нет отличаются между собой выборочные средние. В качестве критерия проверки гипотезы примем величину:

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}}. \tag{8.2}$$

Для изучения её свойств рассмотрим соответствующую случайную величину:

$$Z = \frac{\bar{\xi} - \bar{\zeta}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}}, \quad \text{где} \quad \bar{\xi} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i}{n}, \ \bar{\zeta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \zeta_i}{m} \ .$$

Если верна гипотеза H_0, т.е. $\xi_i \sim N(a;\sigma_1)$, $\zeta_i \sim N(a;\sigma_2)$, то $Z \sim N(0;1)$.

Действительно, Z является линейной комбинацией нормально распределённых случайных величин и поэтому сама распределена нормально. Её математическое ожидание и дисперсия равны:

$$M(Z) = \big(M(\bar{\xi}) - M(\bar{\zeta})\big) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i)/n - \sum_{i=1}^{m} M(\zeta_i)/m \right) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} =$$

$$= \Big(\frac{na}{n} - \frac{ma}{m}\Big) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} = 0,$$

$$D(Z) = \big(D(\bar{\xi}) + D(\bar{\zeta})\big) \Big/ \left(\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)/n^2 + \sum_{i=1}^{m} D(\zeta_i)/m^2\right) \Big/ \left(\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right) =$$
$$= \left(\frac{n\sigma_1^2}{n^2} + \frac{m\sigma_2^2}{m^2}\right) \Big/ \left(\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right) = 1.$$

Поэтому, в зависимости от конкурирующей гипотезы, решающее правило выглядит следующим образом:

- $$H_0: \quad M(\xi) = M(\zeta), \qquad H_1: \quad M(\xi) \neq M(\zeta).$$

  Критическая область двусторонняя с вероятностью $\alpha/2$ попадания в каждую половину в случае справедливости H_0. Из уравнения $F_{\text{ст}}(Z_{\text{кр}}) = 1 - \alpha/2$, где $F_{\text{ст}}(Z)$ — функция распределения стандартного нормального закона, находим значение $Z_{\text{кр}}$, вычисляем по данным наблюдениям значение критерия $Z_{\text{набл}}$ и если $|Z_{\text{набл}}| > Z_{\text{кр}}$, то отвергаем гипотезу H_0 с уровнем значимости α. Если $|Z_{\text{набл}}| \leqslant Z_{\text{кр}}$, у нас нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 в пользу данной гипотезы H_1.

  На практике уравнение $F_{\text{ст}}(Z_{\text{кр}}) = 1 - \alpha/2$ решают или с помощью ЭВМ (например, Excel), или по таблице приложения 2 и уравнения (8.3) т.к.

  $$F_{\text{ст}}(Z_{\text{кр}}) = \Phi(Z_{\text{кр}}) + 0{,}5 \implies F_{\text{ст}}(Z_{\text{кр}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \iff$$
  $$\iff \Phi(Z_{\text{кр}}) + 0{,}5 = 1 - \frac{\alpha}{2} \iff$$

  $$\Phi(Z_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}; \tag{8.3}$$

- $$H_0: \quad M(\xi) = M(\zeta), \qquad H_2: \quad M(\xi) > M(\zeta).$$

  Критическая область правосторонняя с вероятностью α попадания в неё в случае справедливости H_0. Из уравнения $F_{\text{ст}}(Z_{\text{кр}}) = 1 - \alpha$ находим значение $Z_{\text{кр}}$, вычисляем по формуле (8.2) $Z_{\text{набл}}$ и если $Z_{\text{набл}} > Z_{\text{кр}}$, то отвергаем гипотезу H_0 с уровнем значимости α. Если $Z_{\text{набл}} \leqslant Z_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0. На практике $Z_{\text{кр}}$ находят или с помощью ЭВМ или по таблице приложения 2, из уравнения

(8.4) т.к.

$$F_{\text{ст}}(Z_{\text{кр}}) = 1 - \alpha \iff \Phi(Z_{\text{кр}}) + 0{,}5 = 1 - \alpha \iff$$

$$\Phi(Z_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \alpha; \tag{8.4}$$

- $$H_0: \quad M(\xi) = M(\zeta), \qquad H_3: \quad M(\xi) < M(\zeta).$$

  Критическая область левосторонняя с вероятностью α попадания в неё в случае справедливости H_0. Из уравнения $F_{\text{ст}}(Z'_{\text{кр}}) = \alpha$ находим значение $Z'_{\text{кр}}$.

  В силу симметрии нормального распределения относительно нуля на практике находят значение $Z_{\text{кр}}$ из уравнения (8.4) и берут $Z'_{\text{кр}} = -Z_{\text{кр}}$. Если $Z_{\text{набл}} < -Z_{\text{кр}}$, гипотезу H_0 отвергают с уровнем значимости α, если $Z_{\text{набл}} \geqslant -Z_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть H_0.

Замечание 8.1. *Если независимые выборки достаточно большие, указанный критерий можно применять для случая неизвестных дисперсий и не обязательно нормального распределения совокупностей. В этом случае вместо формулы (8.2) используют формулу (8.5) для вычисления критерия Крамера-Уэлча:*

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^{*2}}{n} + \dfrac{S_2^{*2}}{m}}}. \tag{8.5}$$

8.3. Сравнение математического ожидания с заданным значением

Пусть имеется выборка объёма n нормальной совокупности с известной дисперсией σ^2. Требуется по найденной выборочной средней с уровнем значимости α проверить гипотезу H_0 о равенстве неизвестного математического ожидания $M(\xi)$ заданному значению a_0:

$$H_0: \quad M(\xi) = a_0.$$

В силу несмещённости оценки $\bar{x}$ заключаем, что нулевую гипотезу можно записать и так:

$$H_0: \quad M(\bar{\xi}) = a_0.$$

Другими словами, требуется проверить, значимо или нет отличается выборочное среднее от заданного значения. В качестве критерия выберем величину

$$U = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}. \tag{8.6}$$

Можно доказать (сделайте это самостоятельно), что соответствующая случайная величина $U = \dfrac{(\bar{\xi} - a_0)}{\sqrt{n}/\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому в зависимости от конкурирующей гипотезы, решающее правило будет следующим:

- $H_0: \quad M(\xi) = a_0; \qquad H_1: \quad M(\xi) \neq a_0.$

  Из уравнения (8.3) по таблице приложения 2 (или с помощью ЭВМ) определяем $Z_{\text{кр}}$, по формуле (8.6) находим $U_{\text{набл}}$ для имеющихся наблюдений.

  Если $|U_{\text{набл}}| > Z_{\text{кр}}$, гипотезу H_0 отвергаем с уровнем значимости α, если $|U_{\text{набл}}| \leqslant Z_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 в пользу данной гипотезы H_1.
- $H_0: \quad M(\xi) = a_0; \qquad H_2: \quad M(\xi) > a_0.$

  Из уравнения (8.4) определяем $Z_{\text{кр}}$, по формуле (8.6) находим $U_{\text{набл}}$. Если $U_{\text{набл}} > Z_{\text{кр}}$, гипотезу H_0 отвергаем с уровнем значимости α, если $U_{\text{набл}} \leqslant Z_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть H_0.
- $H_0: \quad M(\xi) = a_0; \qquad H_3: \quad M(\xi) < a_0.$

  Из уравнения (8.4) определяем $Z_{\text{кр}}$, по формуле (8.6) находим $U_{\text{набл}}$. Если $U_{\text{набл}} < -Z_{\text{кр}}$, гипотезу H_0 отвергаем с уровнем значимости α, если $U_{\text{набл}} \geqslant -Z_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергнуть H_0.

Если в условиях п. 8.4 дисперсия неизвестна, в качестве критерия следует выбрать величину

$$T = \frac{\bar{x} - a_0}{S^*/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - a_0}{S^*} \cdot \sqrt{n}. \tag{8.7}$$

Можно доказать (мы не будем этого делать), что соответствующая случайная величина $T = (\bar{\xi} - a_0) \cdot \sqrt{n}/S^*$ имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. Решающее правило в зависимости от конкурирующей гипотезы будет следующим:

- $H_0: \quad M(\xi) = a_0; \qquad H_1: \quad M(\xi) \neq a_0.$

  Критическая область в данном случае будет двусторонней; критическая точка t_2 определяется по заданным α и $n-1$ по специальным таблицам (приложение 3) или с помощью функции, обратной к функции распределения Стьюдента, имеющейся, например, среди статистических функций Excel. По формуле (8.7) определяем $T_{\text{набл}}$.

Если $|T_{\text{набл}}| > t_2$, гипотеза H_0 отвергается с уровнем значимости α, если $|T_{\text{набл}}| \leqslant t_2$, то нет оснований отвергнуть H_0 в пользу данной гипотезы H_1.

При конкурирующих гипотезах $H_2: \ M(\xi) > a_0$ и $H_3: \ M(\xi) < a_0$ строят соответственно правостороннюю и левостороннюю критические области (см. [5]).

8.4. Сравнение вероятности с заданными значением

Пусть проведено n независимых испытаний Бернулли с неизвестной вероятностью p появления события A в каждом. По результатам испытаний найдена относительная частота m/n, где m — число появлений события A в n испытаниях. Требуется по величине m/n с уровнем значимости α проверить нулевую гипотезу H_0 о том, что неизвестная вероятность p равна заданному значению p_0:

$$H_0: \quad p = p_0.$$

Заметим, что в силу несмещённости оценки m/n для p нулевую гипотезу можно записать и так:

$$H_0: \quad M\left(\frac{m}{n}\right) = p_0.$$

Другими словами, требуется проверить, значимо или нет отличается частота от значений p_0. В качестве критерия проверки гипотезы примем величину

$$U = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0}} \cdot \sqrt{n}, \qquad \text{где } q_0 = 1 - p_0. \tag{8.8}$$

Соответствующая случайная величина при справедливости гипотезы H_0 имеет стандартное нормальное распределение. При этом рассуждения аналогичны приведённым в п. 8.3 для случая известной дисперсии, с учётом того, что $M\left(\dfrac{m}{n}\right) = p_0$, $D\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{p_0 q_0}{n}$.

В зависимости от конкурирующей гипотезы решающее правило будет таким же, как для случая известной дисперсии, но значение $U_{\text{набл}}$, конечно, следует вычислять по формуле (8.8).

8.5. Критерии согласия

Определение 8.3. *Критериями согласия называют критерии для проверки гипотез о виде закона распределения случайной величины.*

8.6. Критерий Пирсона проверки гипотезы о виде закона распределения

Пусть имеется случайная выборка, состоящая из n элементов. Требуется найти закон распределения изучаемой случайной величины ξ (или, как условились говорить, генеральной совокупности), определить его параметры и оценить согласие выборки с принятым законом распределения.

На основании статистического материала проверяется гипотеза H_0, состоящая в том, что случайная величина ξ подчиняется некоторому закону распределения. Для того чтобы принять или отвергнуть гипотезу H_0, рассматривается величина U — степень расхождения теоретического и статистического распределения. За U принимают сумму квадратов (с некоторыми коэффициентами) отклонений теоретических вероятностей P_i от соответствующих частот P_i^* (критерий χ^2).

Схема расчётов с помощью критерия Пирсона (критерия χ^2) следующая.

(1) На основании выборки выбираем в качестве предполагаемого какой–то закон распределения изучаемой величины (например, с помощью вероятностной бумаги) и оцениваем его параметры, как описано выше.

(2) Всё множество наблюдений разбиваем на s интервалов вида $(a_{j-1}; a_j]$ и подсчитываем эмпирические частоты — количество наблюдений m_j, попавших в j-ый интервал (см. п. 7.3). Относительная частота наблюдений, попавших в j-ый интервал, равна $P_j^* = \dfrac{m_j}{n}$, $\quad (m_1 + \ldots + m_s = n)$, сумма всех частот, очевидно, равна единице.

(3) Определяем теоретические частоты m'_j для j-го интервала $(a_{j-1}; a_j]$:

$$m'_j = \Big(F(a_j) - F(a_{j-1})\Big) \cdot n,$$

где $F(x)$ – теоретическая функция распределения, найденная на этапе 1.

(4) Вычисляем критерий $\chi^2_{\text{набл}}$ (критерий Пирсона):

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{j=1}^{S} \frac{(m_j - m'_j)^2}{m'_j}. \tag{8.9}$$

Из этого выражения видно, что $\chi^2_{\text{набл}}$ равно нулю лишь при совпадении всех соответствующих эмпирических и теоретических частот: $m_i = m'_i \quad (i = 1, 2, \ \ldots, \ l)$. В противном случае $\chi^2_{\text{набл}}$ отлично от нуля и тем больше, чем больше расхождение между частотами. Величина χ^2, определяемая равенством (8.9), является случайной, и (при больших n) имеет χ^2 — распределение с k степенями свободы (принимается без доказательства).

(5) Определяем число степеней свободы k случайной величины χ^2:

$$k = s - 1 - r, \tag{8.10}$$

где r — число параметров закона распределения (для нормального закона распределения $r = 2$), s — число интервалов.

(6) По заданному уровню значимости α и числу степеней свободы k по таблице критических точек распределения χ^2 (таблица приложения 4) находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$. Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ — нет оснований отвергнуть гипотезу о принятом (нормальном) законе распределения. Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k)$ — гипотезу отвергают с уровнем значимости α.

Пример 8.2. *С помощью критерия Пирсона проверить гипотезу о нормальном распределении выборки: 2,98; 3,03; 3,17; 3,22; 3,57; 3,59; 3,95; 3,96; 4,03; 4,16; 4,35; 4,47; 4,54; 4,96; 5,01.*

►Разобьём всё множество значений выборки на 6 интервалов, границы которых занесены во второй столбец табл. 8.1.

В третий столбец табл. 8.4 заносим количество наблюдений m_j, попавших в j-ый интервал. По формулам (7.2), (7.12), (7.5) определяем параметры нормального распределения $\bar{x}$ и S^* для выборки из табл. 8.2:

$$\bar{x} = 3,933; \quad S^* = 0{,}664$$

Таблица 8.1

Решение примера 8.2				
j	a_j	m_j	$F(a_j)$	m'_j
0	2,5	1	0,0155	0,969
1	3,0	3	0,0800	2,659
2	3,5	4	0,2573	4,246
3	4,0	4	0,5404	3,948
4	4,5	2	0,8036	2,137
5	5,0	1	0,9460	0,673
6	5,5		0,9909	

и находим значения теоретической функции распределения $F(a_j)$. В данном примере $F(a_j) = \Phi\Big(\dfrac{a_j - \bar{x}}{S^*}\Big) + 0{,}5$. В пятый столбец заносим теоретические частоты m'_j, вычисляемые, как указано выше.

По формуле (8.9) находим значение $\chi^2_{\text{набл}} = 0{,}228$. По таблице приложения 4 для $\alpha = 0{,}05$ и $k = 6 - 1 - 2 = 3$ находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 3) = 7{,}8$. Поскольку $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 3)$, нет оснований отвергать гипотезу H_0 о нормальном распределении заданной выборки.