Лекция 2

2.2. Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

Для эквивалентного преобразования системы уравнений Максвелла из интегральной формы в дифференциальную необходимо провести обсуждение такого перехода. По правилам математики требуется, чтобы неизвестная функция, стоящая под знаком дифференциального оператора, была непрерывна и чтобы у нее существовали производные порядка, совпадающего с порядком дифференциального оператора. Интегральные операторы допускают наличие разрывов неизвестных функций, на которые они действуют. Поэтому дифференциальные уравнения не могут быть полностью эквивалентны интегральным, если их не дополнить условиями, поясняющими как ведет себя неизвестная функция в тех местах, где она не дифференцируема. Рассмотрим рис. 2.1.

Рис. 2.1 Граница раздела сред

Пусть пространство, в котором необходимо найти электромагнитное поле, состоит из двух однородных подобластей V_1 и V_2, имеющих различные значения параметров ε,μ,σ и общую границу Σ. Тогда, в силу материальных соотношений (1.3,1.5,1.7), какие-то из векторов поля при переходе через границу раздела будут терпеть разрыв первого рода. Значит, дифференциальные соотношения на границе Σ не применимы, хотя они применимы в каждой из подобластей V_1 и V_2. В то же время, интегральные соотношения описывают все пространство. Поэтому можно поступить следующим образом:

- получить из системы (2.3) систему дифференциальных уравнений, описывающих поле по отдельности в каждой из однородных областей V_1 и V_2;
- получить из системы (2.3) выражения, описывающие поведение векторов поля в непосредственной близости от границы раздела Σ (такие выражения являются граничными условиями).

Значит, можно получить эквивалентную дифференциальную форму уравнений Максвелла, если дополнить дифференциальные уравнения граничными условиями. Проведем такие преобразования.

2.2.1. Для перехода от системы уравнений Максвелла в интегральной форме к системе в дифференциальной форме используются две теоремы из математической теории поля, теоремы Стокса и Остроградского-Гаусса. Теорема Стокса применима к векторным полям $\vec{A}$, имеющим полную первую частную производную, и имеет вид следующего выражения:

$$\oint_L \vec{A}d\vec{l} = \int_\Sigma rot\vec{A}d\vec{s}, \tag{2.4}$$

где Σ - поверхность, охватываемая контуром L.

Запишем первое уравнение Максвелла из (2.3)

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_\Sigma \vec{J}d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{D}d\vec{s};$$

Преобразуем левую часть согласно теореме Стокса

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_\Sigma rot\vec{H}d\vec{s}$$

Приравняем правые части записанных соотношений, считая что поверхность Σ одна и та же

$$\int_\Sigma rot\vec{H}d\vec{s} = \int_\Sigma \vec{J}d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{D}d\vec{s}.$$

Пользуясь тем, что область интегрирования одна и та же и свойством линейности операции интегрирования преобразуем сумму интегралов в интеграл суммы. При этом поменяем операторы в последнем члене пользуясь правилом дифференцирования функции под знаком интеграла по аргументу, отличающемуся от аргументов, по которым вычисляется интеграл.

$$\int_\Sigma (rot\vec{H} - \vec{J} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})d\vec{s} = 0.$$

Это выражение равно нулю независимо от области интегрирования. По свойствам определенных интегралов это может быть лишь в том случае, если подынтегральное выражение равно нулю. Тогда получаем:

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Это первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме. Аналогичным образом при использовании теоремы Стокса преобразуется второе уравнение Максвелла.

Для преобразования двух оставшихся уравнений используется теорема Остроградского-Гаусса, которая также применима к векторным полям $\vec{A}$, имеющим первую полную частную производную. Теорема имеет вид следующего выражения

$$\oint_S \vec{A}d\vec{s} = \int_V div\vec{A}dv, \tag{2.5}$$

где V – объем, охватываемый поверхностью S.

Запишем третье уравнение Максвелла из (2.3)

$$\oint_S \vec{D}d\vec{s} = \int_V \rho dv$$

Преобразуем левую часть согласно теореме Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \vec{D}d\vec{s} = \int_V div\vec{D}dv,$$

Считая, что в двух последних записанных выражениях поверхности *S*, а значит и объемы *V* одни и те же, приравняем правые части

$$\int_V div\vec{D}dv = \int_V \rho dv, \text{ или } \int_V (div\vec{D} - \rho)dv = 0.$$

Как и в случае первого уравнения, последнее выражение может обращаться в ноль независимо от области интегрирования только в том случае, когда подынтегральное выражение равно нулю. Поэтому получаем:

$$div\vec{D} = \rho.$$

Аналогично преобразуется и последнее уравнение из (2.3). Окончательно имеем (2.6).

Это система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

$$\begin{aligned} rot\vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ rot\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ div\vec{D} &= \rho, \\ div\vec{B} &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2.2. Для получения граничных условий необходимо применить уравнения Максвелла в интегральной форме (2.3) к малой области, расположенной вблизи границы раздела сред и путем предельного перехода сжать область так, чтобы внутри нее оставалась только часть границы раздела. Полученные таким образом соотношения будут описывать поведение векторов поля на границе раздела, то есть будут являться граничными условиями, дополняющими систему (2.6). Так как областью интегрирования в первых двух уравнениях является замкнутый контур, а в двух последних – замкнутая поверхность, необходимо будет сделать два построения.

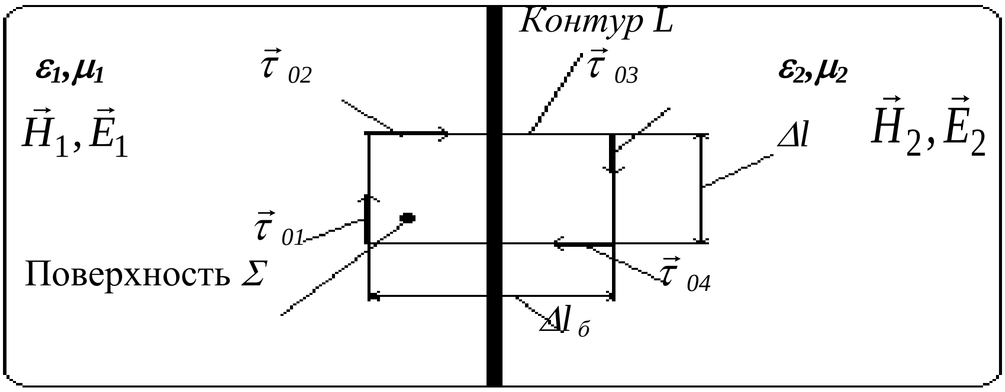

Рис.2.2 Контур на границе раздела сред

Начнем с первого уравнения Максвелла в интегральной форме. Применим его к малому контуру, показанному на рис. 2.2. Считаем, что граница раздела достаточно гладкая, такая, что можно найти малый контур такого поперечного размера *Δl,* при котором границу раздела можно считать плоской. (Заметим, что это не всегда возможно, в особых случаях приходится получать специальные граничные условия). Контур *L* возьмем прямоугольной формы так, чтобы участки *Δl* были параллельны границе раздела. Направление обхода контура по часовой стрелке на каждой стороне зададим единичным тангенциальным вектором $\vec{\tau}_0$ с номером, соответствующим номеру стороны контура. Каждая сторона контура будет давать свой вклад в циркуляцию, поэтому интеграл в левой части уравнения Максвелла можно представить в виде суммы интегралов по каждой стороне контура. Получаем:

$$\int\limits_{\Delta l_1} \vec{H}_1\vec{\tau}_{01}dl + \int\limits_{\Delta l_{\acute{a}}} \vec{H}\vec{\tau}_{02}dl + \int\limits_{\Delta l_3} \vec{H}_2\vec{\tau}_{03}dl + \int\limits_{\Delta l_{\acute{a}}} \vec{H}\vec{\tau}_{04}dl =$$
$$= \int\limits_{\Sigma} \vec{J}d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Sigma} \vec{D}d\vec{s}. \qquad (2.7)$$

Заметим, что площадь поверхности *Σ* равна произведению *Δl* *Δl*$_б$. Вычислим предел от всего выражения при условии, что $\Delta l_б$ стремится равномерно к нулю. При этом боковые стороны контура стремятся лечь на границу раздела с обеих сторон, но при этом каждая из боковых сторон остается в своей среде. Пределы определенных интегралов, у которых область интегрирования стремится к нулю, будут равны нулю в том случае, если подынтегральная функция не имеет особенностей на границе. По этой причине пределы второго и четвертого интеграла в левой стороне выражения и предел второго интеграла в правой стороне выражения будут равны нулю. Предел первого интеграла в правой части выражения во всех реальных случаях также равен нулю. Но если вторая среда является некоторым абстрактным идеальным проводником, то на его поверхности может протекать ток в бесконечно тонком слое. В этом абстрактном случае подынтегральная функция в первом интеграле правой части имеет особенность второго рода и предел интеграла имеет конечную величину. Обозначим $\lim\limits_{\Delta l_б \to 0}\int\limits_{\Sigma}\vec{J}d\vec{s} = \xi'$. Тогда после вычисления предела от (2.7) имеем:

$$\int\limits_{\Delta l_1}\vec{H}_1\vec{\tau}_{01}dl + \int\limits_{\Delta l_3}\vec{H}_2\vec{\tau}_{03}dl = \begin{cases} 0 \textit{ в реальных случаях}, \\ \xi' \textit{ для идеального проводника}. \end{cases}$$

Из построения контура, показанного на рис.2.2 следует, что $\vec{\tau}_{01} = -\vec{\tau}_{03}$. Кроме того, из-за малости контура можно с высокой точностью вычислить интегралы в левой части пользуясь теоремой о среднем, получаем

$$\vec{H}_1\vec{\tau}_{01} - \vec{H}_2\vec{\tau}_{01} = \xi'/\Delta l\,.$$

Скалярное произведение вектора $\vec{H}$ на вектор тангенциальный к границе раздела сред дает тангенциальную к границе раздела составляющую вектора, кроме того, введем определение плотности поверхностного тока проводимости $\xi = \xi'/\Delta l$. Тогда окончательно имеем:

$$H_{\tau 1} - H_{\tau 2} = \begin{cases} 0 \; в \; реальных \; случаях \\ \xi \; для \; идеального \; проводника \end{cases}. \qquad (2.8)$$

Это выражение является граничным условием для тангенциальных составляющих векторов напряженности магнитного поля на границе раздела сред. Тангенциальная составляющая вектора напряженности магнитного поля на границе раздела сред непрерывна в реальных случаях и терпит разрыв, равный плотности поверхностного тока проводимости на поверхности идеального проводника.

Подставляя в (2.8) значения H из материального соотношения (1.5) в случае изотропных сред получаем:

$$\frac{B_{\tau 1}}{\mu_1\mu_0} - \frac{B_{\tau 2}}{\mu_2\mu_0} = \begin{cases} 0 \; в \; реальных \; случаях \\ \xi \; для \; идеального \; проводника \end{cases}, \qquad (2.9)$$

это граничное условие для тангенциальных составляющих векторов индукции магнитного поля на границе раздела сред.

Применяя к контуру, показанному на рис. 2.2 второе уравнение Максвелла из системы (2.3) и проводя аналогичные рассуждения получим еще два граничных условия

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \qquad \frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2}. \qquad (2.10)$$

Тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля непрерывна на границе раздела сред.

Для применения двух оставшихся уравнений необходимо сделать другое построение, показанное на рис.2.3. Как и ранее

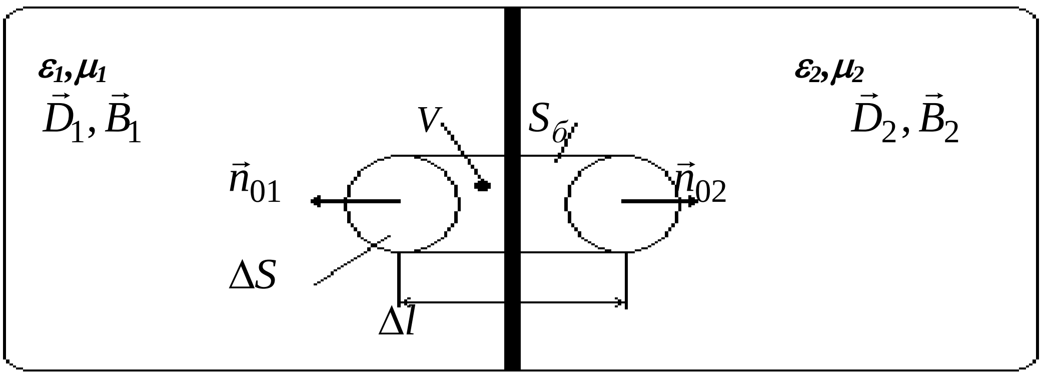

Рис.2.3. Элементарный объем на границе раздела

будем считать границу раздела достаточно гладкой, чтобы на малом участке в пределах объема V ее можно было считать плоской. Объем возьмем в виде цилиндра, торцевые грани которого параллельны границе раздела сред. Направление каждой грани зададим единичным вектором внешней нормали $\vec{n}_0$ с индексом, соответствующим номеру грани. Длину образующей обозначим Δl.

К выделенному объему можно применить третье уравнение из (2.3), при этом поток вектора индукции электрического поля по замкнутой поверхности представим в виде суммы вкладов от торцевых и боковой поверхностей цилиндра. Получим:

$$\int\limits_{\Delta S} \vec{D}_1 \vec{n}_{01} ds + \int\limits_{S_{á}} \vec{D} d\vec{s} + \int\limits_{\Delta S} \vec{D}_2 \vec{n}_{02} ds = \int\limits_{V} \rho dv.$$

Вычислим предел этого выражения при условии, что Δl стремится к нулю. Заметим, что при этом $S_б$ и V будут стремиться к нулю. Как и раньше, если подынтегральное выражение не будет иметь особенностей, то предел определенных интегралов, область интегрирования которых стремится к нулю, будет равен нулю. По этой причине предел второго члена в левой части будет равен нулю. В реальных случаях и предел правой части также равен нулю, но в абстрактном случае идеального проводника заряд распределяется по его поверхности и находится в идеально тонком слое. Поэтому подынтегральное выражение в правой части будет иметь особенность второго рода и предел правой части может быть конечным. Обозначим $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \int\limits_{V} \rho dv = \nu'$. Тогда имеем

$$\int\limits_{\Delta S} \vec{D}_1 \vec{n}_{01} ds + \int\limits_{\Delta S} \vec{D}_2 \vec{n}_{02} ds = \begin{cases} 0 \ \textit{в реальных случаях}, \\ \nu' \ \textit{для идеального проводника}. \end{cases}$$

Учтем, что $\vec{n}_{01} = -\vec{n}_{02}$, и пользуясь малостью выделенного объема вычислим интегралы в левой части по теореме о среднем.

$$(\vec{D}_1 \vec{n}_{01} - \vec{D}_2 \vec{n}_{01}) \Delta S = \begin{cases} 0 \ \textit{в реальных случаях}, \\ \nu' \ \textit{для идеального проводника}. \end{cases}$$

Учитывая, что скалярное произведение вектора на единичный вектор нормали к границе раздела дает нормальную относительно границы составляющую вектора и вводя определение плотности поверхностного заряда $\nu = \nu'/\Delta S$ получаем окончательно:

$$D_{n1} - D_{n2} = \begin{cases} 0 \ \textit{в реальных случаях}, \\ \nu \ \textit{для идеального проводника}. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Это граничное условие для нормальных составляющих векторов индукции электрического поля на границе раздела сред.

Нормальная составляющая вектора индукции электрического поля на границе раздела сред непрерывна в реальных случаях и терпит разрыв, равный плотности поверхностного заряда на поверхности идеального проводника.

Использую материальные соотношения (1.3) для случая изотропных сред получаем граничное условие для нормальных составляющих векторов напряженностей электрического поля

$$\varepsilon_1\varepsilon_0 E_{n1} - \varepsilon_2\varepsilon_0 E_{n2} = \begin{cases} 0 \textit{ в реальных случаях}, \\ \nu \textit{ для идеального проводника}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Применяя к объему, показанному на рис. 2.3 четвертое уравнение из (2.3), аналогичным образом получаем два последних граничных условия

$$B_{n1} = B_{n2}, \qquad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}. \tag{2.13}$$

Нормальная составляющая вектора индукции магнитного поля непрерывна на границе раздела сред.

На этом переход от системы уравнений Максвелла в интегральной форме к системе в дифференциальной форме завершен. Можно сказать, что система (2.3) эквивалентна системе выражений (2.6), (2.8) - (2.13) с учетом сделанных при преобразовании допущений. К граничным условиям для векторов поля предстоит вернуться в последующих частях курса. Здесь дополнительно введем так называемые граничные условия на бесконечности, которые не следуют непосредственно из системы уравнений Максвелла в интегральной форме, и являются просто физическими условиями. Согласно физическим представлениям любая энергия может передаваться только с конечной скоростью, поэтому электромагнитное поле, которое может создаваться любыми физически реальными сторонними источниками, всегда занимает определенный объем вокруг источников. За границами этого объема, например на бесконечном удалении, поле отсутствует. Все вектора поля при бесконечном удалении от сторонних источников должны обращаться в ноль.