Теория функций комплексного переменного

4 семестр

Часть 1

Основные типы задач

для подготовки к контрольным работам и зачету

Часть 1 построена следующим образом. По каждой теме курса математического анализа 4-го семестра приведены типовые задачи. Для успешной подготовки к контрольным работам и сдаче зачета студенту рекомендуется выполнить все такие задачи.

Задачи по теме «Комплексные числа. Области на комплексной области»

Задача №1.1 Заданы два комплексных числа z_1 и z_2 в алгебраической форме.

1) Представить комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.
2) Вычислить $(z_1/z_2)^{200}$. Результат изобразить на комплексной плоскости.

вариант№	z_1	z_2	вариант№	z_1	z_2
1	$2+2i$	$\sqrt{2}+i\sqrt{6}$	3	$-\sqrt{3}+i$	$-2+2i$
2	$2-2\sqrt{3}i$	$4i^{51}$	4	$-5-5i$	$5(\sqrt{3}-i)$

Задача №1.2. Вычислить значение выражения A, используя действия с комплексными числами. Представить полученное комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

вариант№	A	вариант№	A
1	$(2-2i)^7$	2	$\left(-\sqrt{3}-3i\right)^3$
3	$\left((-1+i)\left(-3+\sqrt{3}i\right)\right)^4$	4	$\left((1+i^3)(2-2^5 i)\right)^{10}$
5	$\left(-i^7\left(2-2\sqrt{3}i\right)\right)^{11}$	6	$\left(i^{11}\left(-\sqrt{2}-\sqrt{6}i\right)\right)^{13}$
7	$\left(-\sqrt{3}-i\right)^9(1+i^{17})^7$	8	$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

В электротехнике при расчете электрических цепей широко применяются комплексные числа (метод комплексных амплитуд)
(задача №1.3).

Задача №1.3. Для участка электрической цепи, состоящего из последовательно соединенных сопротивления r и индуктивности L, найти комплексное сопротивление Z и комплексную проводимость Y. Ответ изобразить на комплексной плоскости. Отметим, что величина wL называется индуктивным сопротивлением.

Указание: воспользоваться формулами $Z = r + wL \cdot i$, $Z = \frac{1}{Y}$.

вариант№	r	wL	вариант№	r	wL
1	20	30	3	18	64
2	35	29	4	13	81

Задача №1.4. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством или системой неравенств.

вариант№		вариант№	
1	$\lvert z-2i\rvert \le 3$	2	$\lvert z-5+2i\rvert \ge 4$
3	$1<\lvert z-5\rvert<4$	4	$2<\lvert z+3-3i\rvert<5$
5	$\operatorname{Re} z<\frac{1}{2}$	6	$\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{2}$
7	$\begin{cases}\lvert z+i\rvert<1\\ \mathrm{Re}z<0\end{cases}$	8	$\begin{cases}0<\mathrm{Re}z<3\\ -3<\mathrm{Im}z<0\end{cases}$
9	$\begin{cases}1<z\cdot\bar{z}<4\\ \mathrm{Im}\bar{z}<0\end{cases}$	10	$\begin{cases}z\cdot\bar{z}<9\\ 0<argz<\frac{\pi}{3}\end{cases}$
11	$\left\lvert\frac{z-2}{z+2}\right\rvert<1$	12	$\mathrm{Im}(z^2+2i)>0$

Задачи по теме «Функции комплексного переменного, их свойства»

Задача №1.5. Вычислить все значения заданного выражения A.

вариант№	A	вариант№	A
1	$Ln(1+\sqrt{3}i)$	2	$(-\sqrt{3}+i)^{5i}$
3	$(-i)^{-5i-5}$	4	$e^{5+(-\frac{\pi i}{2})}$
5	$\sin(5i)$	6	$sh(-8i)$

Задача №1.6. Решить уравнение. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

вариант№	уравнение	вариант№	уравнение
1	$z^3 - 27 = 0$	3	$z^4 + 16 = 0$
2	$z^3 - 8i = 0$	4	$z^8 + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 0$
5	$e^z + 3i - 3 = 0$	6	$\cos^2 z - \sin^2 z = 2$
7	$e^{2z} + 3e^z - 4 = 0$	8	$sin5z = 2$
9	$cosz = -3$	10	$shz = -5$
11	$ch2z = 6$	12	$\cos z - i\sin z = 2$

Задача №1.7. Исследовать функцию $f(z)$ на аналитичность, используя условия Коши-Римана и свойства аналитических функций.

вариант№	$f(z)$	вариант№	$f(z)$
1	$4z^2 + 5z - 2i$	2	$e^{6z} + 3z$
3	$iz^2 + 3\bar{z} + 4i$	4	$z\,\mathrm{Im}(6z+2)$
5	$ie^{5iz} + z$	6	$\cos 2z$
7	$\mathrm{Re}(z^2) + 2z + 5i$	8	$\lvert ie^{5iz} \rvert$
9	$\mathrm{Im}(e^{2iz})$	10	$i\,\lvert (1+i\sqrt{3})z^2 \rvert$
11	$iz + \sin 2z$	12	$3iz + sh2z$
13	$3i\bar{z} + ch2z$	14	$iz^2 + 3e^{-z} + 4i$

Задача №1.8. Исследовать функцию $f(z)$ на дифференцируемость и аналитичность. Указать область аналитичности функции. Найти производную функции в точке z_0.

вариант№	$f(z)$	z_0	вариант№	$f(z)$	z_0
1	$4\|z\|^2$	0	2	$\frac{2z+5}{z^2+4}$	i
3	$(z+1)\,\mathrm{Im}(iz)$	-1	4	$(z+2i)\,\mathrm{Re}(3z+i)$	$-2i$
5	$z\|z+i\|^2$	$-i$	6	$\frac{5i}{z^2+z+1}$	$-i$
7	$\frac{z}{e^z-1}$	πi	8	$\frac{z}{\sin 2z}$	i

Задача №1.9. Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w=f(z)$ в точке z_0.

вариант№	$f(z)$	z_0	вариант№	$f(z)$	z_0
1	$4z^2$	$1-i$	2	$2e^{iz}$	$\frac{-\pi}{4}$
3	ie^{4z}	$3\pi i$	4	z^3	$2+2i$

Задача №1.10. Показать, что заданные функции
$u(x,y)$ или $v(x,y)$ являются гармоническими. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по ее действительной части $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$.

вариант №	заданные функции	$f(z_0)$
1	$u = sin\,3xch3y$	$f(0)=0$
2	$v = sin(2-x)shy$	$f(2)=1$
3	$u = cos\frac{y}{2}ch\frac{x}{2}$	$f(0)=1$
4	$v = x^2-y^2+2x$	$f(i)=-2-i$

5	$u = e^{2x}cos(2y+1)$	$f(-i/2) = 1$
6	$v = cos4xch4y$	$f(0) = i$

Задача №1.11. Задано отображение $w = f(z)$.

Указать:

1) часть плоскости, которая растягивается (сжимается) при заданном отображении $w = f(z)$;

2) множество точек, в которых коэффициент растяжения равен 1.

вариант№	$w = f(z)$
1	$w = \dfrac{1}{z-1}$
2	$w = e^{z-3}$
3	$w = (z+i)^2$

Задача №1.12. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)dz$.

вариант№	$f(z)$	L	вариант№	$f(z)$	L
1	$z^2 + 2\bar{z}$	Отрезок прямой от точки A(0;0) до B(1;-3)	2	$3z - \bar{z}$	$\begin{cases} \lvert z\rvert = 1, \\ -\pi/2 \le \arg z \le \pi/2 \end{cases}$
3	$z + 3\bar{z}$	$\lvert z-1\rvert = 3$	4	$z^2 + z$	Часть параболы $y = x^2$ от точки A(0;0) до B(1;1)

Задачи по теме «Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек. Вычеты»

Задача №1.13. Получить все разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням ($z - z_0$).

вариант №	$f(z)$	z_0	вариант №	$f(z)$	z_0
1	$z^3 e^{\frac{4}{z^2}}$	0	2	$(z-1)^4 \cos\left(\frac{4}{z-1}\right)$	1
3	$(z+2)\sin\left(\frac{5}{(z+2)^2}\right)$	-2	4	$(z+1)sh\left(\frac{2}{z+1}\right)$	-1
5	$(z^2 + \frac{1}{z^2})e^{\frac{5}{z}}$	0	6	$\frac{z}{(z-2)(z+3)}$	0
7	$\frac{4z+5}{z^2+5z+6}$	-2	8	$\frac{z+2}{z^2(z+4)}$	0
9	$\frac{3iz + ch2z}{z^2}$	0	10	$\frac{z^4+z+1}{z^2+9}$	0

Задача №1.14. Получить разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в заданной области.

вариант№		$f(z)$	вариант№		$f(z)$
1	$\lvert z \rvert > 2$	$\frac{z}{(z-1)(z+2)}$	2	$2 < \lvert z \rvert < 4$	$\frac{2z+1}{z^2+2z-8}$
3	$\lvert z-3 \rvert > 4$	$\frac{1}{(z+1)(z-2)}$	4	$1 < \lvert z-2 \rvert < 3$	$\frac{4z+5}{z^2-6z+5}$

Задача №1.15. Найти изолированные особые точки функции $f(z)$, указать их тип, вычислить вычеты в этих точках.

вариант№	$f(z)$	вариант№	$f(z)$
1	$z^5 \cdot e^{\frac{4}{z}}$	2	$(z+3)^6 \sin\left(\frac{5}{z+3}\right)$

3	$\dfrac{e^{8z}}{z^2+9}$	4	$\dfrac{z+4}{z^3+3z^2}$
5	$\dfrac{\sin(\pi z)}{(z-2)(2z+1)}$	6	$\dfrac{e^z-1}{z^2(z+4i)}$
7	$z\cdot e^{\frac{1}{z+2}}$	8	$(2z^3+1)\cos(1/z)$
9	$\dfrac{\sin(z+1)}{(z+1)^6}$	10	$\dfrac{e^{z+1}-1}{(z+1)^2 z}$
11	$\dfrac{\sin^2(3\pi z)}{z^3(z-1)^2}$	12	$\dfrac{1+\cos(\pi z)}{(z-1)^3(z-5)^2}$
13	$\dfrac{e^z-1}{(z-2\pi i)^2 z}$	14	$\dfrac{4}{(z^2+1)^2}$

Задачи по теме «Применение теории вычетов»

<u>Задача №1.16</u>. Вычислить интеграл $\oint\limits_L f(z)dz$ с помощью основной теоремы о вычетах.

вариант №	$f(z)$	L	вариант №	$f(z)$	L
1	$(z+i)^4\sin\left(\dfrac{i}{z+i}\right)$	$\|z+i\|=2$	2	$(z-1)^5\cos\left(\dfrac{2}{z-1}\right)$	$\|z-1\|=\dfrac{1}{2}$
3	$(z^2+3z+5)e^{\frac{1}{z}}$	$\|z-i\|=2$	4	$\dfrac{iz^3+sh2z}{z^4}$	$\|z-i\|=2$
5	$\dfrac{\sin z}{z(z^2+9)}$	$\|z-i\|=3$	6	$\dfrac{1}{(z+2)(z^2-4)}$	$\|z+2\|=1$
7	$\dfrac{e^z}{z^2(z+2i)}$	$\|z+i\|=2$	8	$\dfrac{z}{\sin z}$	$\|z+2\|=3$
9	$\dfrac{z+2}{(z^2+4)^2}$	$\|z-i\|=2$	10	$\dfrac{z}{e^{2z}-1}$	$\|z-i\|=3$

11	$\dfrac{\sin^2 2z}{z^3(2z-\pi)}$	$\|z\|=2$	12	$\dfrac{\sin \pi z}{z^3 - z^2}$	$\|z-1\|=2$
13	$\dfrac{\cos(\pi z)}{z^2(4z^2-1)}$	$\|2z-1\|=\dfrac{1}{2}$	14	$\dfrac{e^z}{z(z+2)^2}$	$\|z+1\|=2$

Задача №1.17. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(z)dz$ с помощью вычетов.

вариант№	$f(z)$	(a,b)	вариант№	$f(z)$	(a,b)
1	$\dfrac{x^2+1}{(x^2+9)(x^2+16)}$	$(0,+\infty)$	2	$\dfrac{x^2}{(x^2+9)^2}$	$(0,+\infty)$
3	$\dfrac{1}{x^2+6x+13}$	$(-\infty,+\infty)$	4	$\dfrac{1}{(x^2+4)^3}$	$(0,+\infty)$
5	$\dfrac{1}{(x^2-4x+13)^2}$	$(-\infty,+\infty)$	6	$\dfrac{x^2}{x^4+6x^2+5}$	$(0,+\infty)$
7	$\dfrac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}$	$(-\infty,+\infty)$	8	$\dfrac{x\sin 2x}{x^2+9}$	$(0,+\infty)$

Задача №1.18. С помощью теоремы Руше найти количество корней уравнения $f(z)=0$ в указанной области *Д*.

вариант№	$f(z)$	*Д*	вариант№	$f(z)$	*Д*
1	z^5-5z^2+2z+1	1< |Z|<2	2	$z^4-5z^3-z^2-1$	0,5< |Z|<1
3	$2z^3-7z^2+3z+1$	1< |Z|<4	4	$z^7-5z^5+2z^4+1$	1< |Z|<3

Задача №1.19. Решить задачу Коши операторным методом, используя теорию вычетов при нахождении оригинала по полученному изображению.

1) $y'' + 2y' - 3y = 1 \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$

2) $y'' - y' - 2y = 2x - 1 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

3) $y'' + y = 1 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

Задачи по теме «Интегралы Эйлера: Гамма и Вета - функции»

Задача №1.20. Вычислить интегралы с помощью Гамма и Вета – функций

вариант№		вариант№	
1	$\int_0^{+\infty} x^4 \cdot e^{-x^2} dx$	2	$\int_0^1 \ln^5(\frac{1}{x})dx$
3	$\int_0^1 x^4 \cdot \sqrt[3]{1-x^3}dx$	4	$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx$
5	$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cdot \cos^2 x dx$	6	$\int_0^{\pi/2} \sqrt{tgx}dx$
7	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$	8	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$
9*	$\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \ln x}{1+x^3}dx$	10*	$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}dx$