МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**"МИРЭА - Российский технологический университет"**
**РТУ МИРЭА**

# МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

**Электромагнитные поля и волны**
*(наименование дисциплины (модуля) в соответствии с учебным планом)*

Уровень бакалавриат
*(бакалавриат, магистратура, специалитет)*

Форма обучения очная
*(очная, очно-заочная, заочная)*

Направление подготовки 11.03.02 "Инфокоммуникационные технологии и системы связи"
*(код (-ы) и наименование (-я))*

Институт Радиотехнических и телекоммуникационных систем (ИРТС)
*(полное и краткое наименование)*

Кафедра Телекоммуникаций и радиотехники (ТР)
*(полное и краткое наименование кафедры, реализующей дисциплину (модуль))*

Лектор к.т.н., проф. Трефилов Николай Александрович
*(сокращенно - ученая степень, ученое звание; полностью -ФИО)*

Используются в данной редакции с учебного года 2018/19
*(учебный год цифрами)*

Проверено и согласовано "___"_________2019 г. ________________(А.Г. Васильев)
*(подпись директора Института/Филиала с расшифровкой)*

Москва 2019 г.

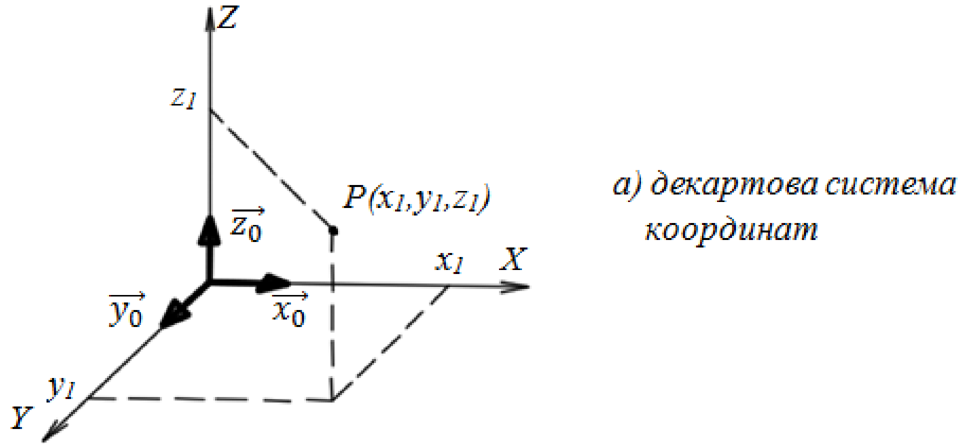
**Занятие 1 (2 часа)**

**Тема:**

# ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ПОЛЯ, ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ.

## 1. Общие сведения

1.1. Основные величины, описывающие электромагнитное поле, являются векторными функциями пространственных координат. Для их задания обычно используются ортогональные системы координат, показанные на рис. 1.



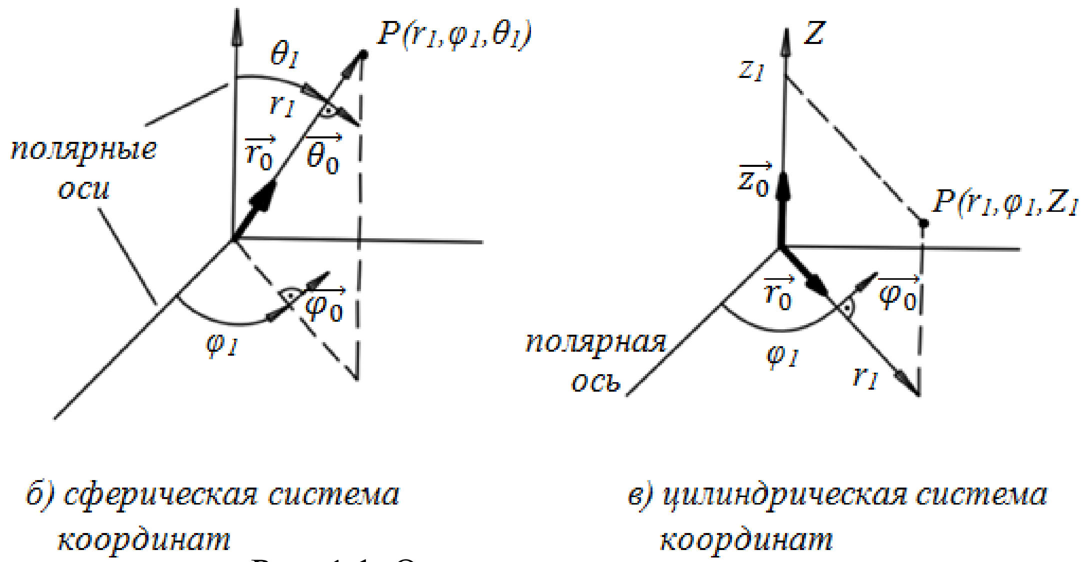




Рис. 1.1. Ортогональные системы координат

Векторы в любой системе координат задаются в виде разложения по компонентам (единичным ортам), параллельным направлениям осей координат в каждой точке пространства. Иногда векторные величины изображаются жирным шрифтом без изображения вектора над величиной.

В декартовой системе координат (единичные орты $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$):

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\vec{x}_0 + A_y\vec{y}_0 + A_z\vec{z}_0.$$

В цилиндрической системе координат (единичные орты $\vec{r}_0$, $\vec{\varphi}_0$, $\vec{z}_0$):

$\vec{A} = \vec{A}_r + \vec{A}_\varphi + \vec{A}_z = A_r \vec{r}_0 + A_\varphi \vec{\varphi}_0 + A_z \vec{z}_9$.

В сферической системе координат (единичные орты $\vec{\theta}_0$, $\vec{\varphi}_0$, $\vec{r}_0$ ):

$\vec{A} = \vec{A}_\theta + \vec{A}_\varphi + \vec{A}_r = A_\theta \vec{\theta}_0 + A_\varphi \vec{\varphi}_0 + A_r \vec{r}_0$.

В декартовых координатах единичные орты одинаково направлены во всех точках пространства. В сферических и цилиндрических координатах единичные орты в различных точках имеют различное направление, поэтому при выполнении каких либо операций с разными векторами, заданными в разных точках пространства, необходимо, или перевести их в декартовы координаты, или привести к одной и той же точке.

Из геометрических соображений следует связь между компонентами одного и того же вектора, заданного в различных системах координат:

| Переход от декартовых к цилиндрическим координатам | Обратное преобразование |
|---|---|
| $A_r=A_x\, cos\varphi + A_y\, sin\varphi$ | $A_x=A_r\, cos\varphi - A_\varphi\, sin\varphi$ |
| $A_\varphi=-A_x\, sin\varphi + A_y\, cos\varphi$ | $A_y= A_r\, sin\varphi - A_\varphi\, cos\varphi$ |
| $A_z=A_z$ | $A_z=A_z$ |
| $\varphi=arctg(A_y / A_x)$ | |

| Переход от декартовых к сферическим координатам | Обратное преобразование |
|---|---|
| $A_r=(A_x\, cos\varphi + A_y\, sin\varphi) sin\theta + A_z\, cos\theta$ | $A_x=A_r\, sin\theta\, cos\varphi + A_\theta\, cos\theta\, cos\varphi - A_\varphi\, sin\varphi$ |
| $A_\theta = - A_z\, sin\theta + (A_x\, cos\varphi + A_y\, sin\varphi)\, cos\theta$ | $A_y=A_r\, sin\theta\, sin\varphi + A_\theta\, cos\theta\, sin\varphi + A_\varphi\, cos\varphi$ |
| $A_\varphi = -A_x\, sin\varphi + A_y\, cos\varphi$ | $A_z = A_r\, cos\theta - A_\theta\, sin\theta$ |
| $\varphi = arctg(A_y/A_x)$, | |
| $\theta = arcsin\sqrt{\dfrac{A_x^2 + A_y^2}{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$ | |

Количественно вектор характеризуется модулем, который равен не отрицательному числу, определяемому в декартовых координатах по следующему правилу:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

В векторной алгебре определены следующие основные операции:

- Операция сложения векторов (в декартовых координатах)

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = (A_x + B_x)\vec{x}_0 + (A_y + B_y)\vec{y}_0 + (A_z + B_z)\vec{z}_0.$$

- Операция скалярного умножения векторов

$$a = \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot cos(\vec{A}, \wedge \vec{B})$$

В декартовых координатах справедливо также

$$a=A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

- Операция векторного умножения векторов

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A},$$

причем $\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot sin(\vec{A}, \wedge \vec{B})$, вектор $\vec{C}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через $\vec{A}$ и $\vec{B}$ в сторону, с которой поворот $\vec{A}$ до направления $\vec{B}$ происходит против часовой стрелки (это правило правого буравчика — при вращении $\vec{A}$ к $\vec{B}$ ось буравчика перемещается в направлении $\vec{C}$ ). В декартовых координатах векторное произведение можно записать в виде определителя

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}.$$

Часто при операциях с векторами используются следующие тождественные соотношения:

а) двойное векторное произведение

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}\vec{B}\right).$$

б) смешанное произведение векторов (необходимо отметить, что векторные операции в этом выражении выполняются раньше скалярных)

$$\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=C\times\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A}$$

- это правило перестановки знаков относительно сомножителей и правило круговой перестановки векторов относительно знаков умножения.

1.2. К величинам, описывающим электромагнитное поле, в пространстве за исключением областей разрыва применимы дифференциальные векторные операции, изучаемые в курсе высшей математики в разделе математическая теория поля:

- Операция вычисления градиента применима к скалярным функциям пространственных координат (например к потенциалу поля, к диэлектрической проницаемости среды и т.д.). Градиент функции в какой-то точке пространства является вектором, направленным в сторону наибольшего возрастания функции в этой точке и по модулю равен скорости возрастания функции в этом направлении.

Формулы для вычисления операции градиента

- декартова система координат

$$gradU=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{x}_0+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{y}_0+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{z}_0,$$

- цилиндрическая система координат

$$gradU=\frac{\partial U}{\partial r}\vec{r}_0+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{\varphi}_0+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{z}_0,$$

- сферическая система координат

$$gradU=\frac{\partial U}{\partial r}\vec{r}_0+\frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{\varphi}_0+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{\theta}_0.$$

- Операция вычисления дивергенции применима к векторным функциям пространственных координат (например к напряженности электрического поля, к плотности объемного тока проводимости и т.д.). Дивергенция векторной функции в какой-то точке пространства равна объемной плотности источников векторной функции в этой точке.

Формулы для вычисления операции дивергенции

- декартова система координат

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

- цилиндрическая система координат

$$div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot A_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

- сферическая система координат

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ A_r\right) + \frac{1}{r\ sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta\ sin\theta\right) + \frac{1}{r\ sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi};$$

- Операция вычисления ротора применима к векторным функциям пространственных координат. Ротор векторной функции в какой-то точке пространства является вектором, совпадающим по направлению с ориентацией элементарной площадки для которой поверхностная плотность циркуляции векторной функции является наибольшей в этой точке и по модулю равен указанной поверхностной плотности циркуляции векторной функции по контуру, ограничивающему площадку.

Формулы для вычисления операции ротора

- декартова система координат

$$rot\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{x}_0 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{y}_0 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{z}_0;$$

- цилиндрическая система координат

$$rot\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{r}_0 + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{\varphi}_0 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(r\ A_\varphi\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\vec{z}_0;$$

- сферическая система координат

$$rot\vec{A} = \frac{1}{r\ sin\theta}\left(\frac{\partial\left(A_\varphi sin\theta\right)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{r}_0 + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial\left(r\ A_\varphi\right)}{\partial r}\right)\vec{\theta}_0 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(r\ A_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{\varphi}_0;$$

Для записи указанных операций в компактной форме удобно пользоваться символическим оператором Гамильтона $\vec{\nabla}$ (дифференциальный векторный оператор «набла»).

$$gradU = \vec{\nabla}U\ ,\ div\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\ ,\ rot\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\ .$$

В декартовой системе координат оператор имеет условное изображение (оператор - это действие, которое нужно совершить со стоящей под ним величиной, без указания этой величины он не имеет смысла)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{z}_0\,.$$

При использовании оператора $\vec{\nabla}$ необходимо одновременно выполнять правила дифференцирования и правила выполнения векторных операций.

- Операция вычисления оператора Лапласа скалярной или векторной функции координат. В математических выражениях оператор Лапласа изображается в виде $\Delta$ или $\vec{\nabla}^2$

Формулы для вычисления оператора Лапласа:

- в символической форме

для скалярной величины

$$\Delta U = \vec{\nabla}^2 U = div\ gradU,$$

для векторной величины в декартовых координатах

$$\Delta\vec{A} = (\Delta A_x)\vec{x}_0 + (\Delta A_y)\vec{y}_0 + (\Delta A_z)\vec{z}_0;$$

- в декартовых координатах

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2};$$

- в цилиндрических координатах

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2};$$

- в сферических координатах

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\,\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

Для электромагнитных полей справедливы следующие интегральные соотношения

$$\oint_L \vec{A}d\vec{\ell} = \int_S rot\vec{A}d\vec{S}$$ - теорема

$$\oiint_S \vec{A}d\vec{S} = \int_V div\vec{A}dV$$ - теорема Остроградского-

2.1.3. Для математического представления величин, описывающих гармонические электромагнитные поля, используются комплексные векторные функции пространственных координат. Рассмотрим формы записи и основные операции с комплексными числами.

$\dot{Q} = R + jM$ - алгебраическая форма записи комплексного числа;

$\dot{Q} = Z(\cos\psi + j\sin\psi)$ - тригонометрическая форма записи;

$\dot{Q} = Z\exp(j\psi)$ - показательная форма записи.

Здесь $Z = \left|\dot{Q}\right| = \sqrt{R^2 + M^2}, \psi = arctg\dfrac{M}{R}.$

Если $\dot{\vec{A}}(x,y,z)$ - комплексная векторная функция, то она может быть представлена в любой форме записи, например показательной

$$\dot{\vec{A}}(x,y,z)=\vec{A}(x,y,z)\exp[j\psi(x,y,z)].$$

С комплексными числами можно выполнять следующие основные действия:

- операция сложения

$$\dot{Q}=R+jM,\quad \dot{P}=S+jN,$$

$$\dot{Q}+\dot{P}=(R+S)+j(M+N).$$

- операция умножения

$$\dot{Q}=Z\exp(j\Psi),\quad \dot{P}=W\exp(j\omega),$$

$$\dot{Q}\cdot\dot{P}=ZW\exp[j(\Psi+\omega)].$$

- операция возведения в степень

$$\dot{Q}=Z\exp(j\Psi),$$

$$\dot{Q}^{a}=Z^{a}\exp(j\Psi a).$$

Справедливы и обратные действия.

## 2. Примеры решений

2.1. Определить угол между векторами $\vec{A}=(x+2z)\vec{x}_0+3\vec{y}_0-\sqrt{7}y\,\vec{z}_0$ и $\vec{B}=3xy\vec{x}_0(x+2z)\vec{x}_0+\sqrt{6}xy\vec{y}_0+\vec{z}_0$ в точке P(1,1,-2).

Решение. Вычислим значение компонент векторов в указанной точке. $\vec{A}(P)=-3\vec{x}_0+3\vec{y}_0-\sqrt{7}\vec{z}_0,\vec{B}(P)=3\vec{x}_0+\sqrt{6}\vec{y}_0+\vec{z}_0$

Определим модули векторов

$$\left|\vec{A}(P)\right|=5\ ;\ \left|\vec{B}(P)\right|=4$$

Вычислим скалярное произведение векторов

$$\vec{A}(P)\cdot\vec{B}(P)=-9+3\sqrt{6}-\sqrt{7}\approx-4{,}3$$

угол между векторами равен

$$\arccos\frac{\vec{A}(P)\cdot\vec{B}(P)}{\left|\vec{A}(P)\right|\cdot\left|\vec{B}(P)\right|}=\arccos(-\frac{4{,}3}{5\cdot4})\approx102{,}4^{\circ}.$$

2.2. Вычислить $\vec{\nabla}(\vec{A}\times\vec{B})-\vec{A}\vec{B}$ в точке P(2,0,-1), если

$\vec{A}=xyz\vec{y}_0-5x\vec{z}_0$, $\vec{B}=xy\vec{x}_0-5x\vec{z}_0$.

Решение. Вычислим

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ 0 & xyz & -5x\\ xyz & 0 & -5x\end{vmatrix}=-5x^2yz\vec{x}_0-5x^2yz\vec{y}_0-x^2y^2z^2\vec{z}_0$$

Применим к полученному выражению операцию дивергенции

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\times\vec{B})=-10xyz-5x^2z-2x^2y^2z$$

Вычислим

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=25x^2$$

Подставим численные значения координат и выполним вычитание 20-100= -80.

2.3. Упростить, используя символическую запись

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{B}).$$

Решение. Упростим почленно

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})-(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})-\vec{\nabla}^2\vec{A},$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}+\vec{A}\vec{B})=\vec{\nabla}^2\vec{A}+\vec{B}\vec{\nabla}\vec{A}+\vec{A}\vec{\nabla}\vec{B}.$$

Суммируя, получаем результат

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})+\vec{B}\vec{\nabla}\vec{A}+\vec{A}\vec{\nabla}\vec{B}.$$

2.4. Возвести число (3+j4) в степень (1-2j).

Решение. Запишем первое число в показательной форме

$$3+j4\approx 5\exp(j53°)$$

Выполним возведение в степень

$$[5\exp(j53°)]^{(1-2j)}=5^{(1-2j)}\exp[(j53°)(1-2j)]=$$
$$5\cdot 5^{-2j}\exp(j53°)\exp(2)\approx 37\cdot\exp(j53°)\cdot 5^{-2j}$$

В последнем сомножителе перейдем к основанию *e* и в показателе степени перейдем от радиан к градусам

$$5^{-2j}=e^{1,6\cdot(-2j)}=\exp(-3,2j)=\exp(176°j)$$

Подставляя в основное соотношение, получаем

$$37\exp(j53°)\exp(176°j)=37\exp(j229°)= -24-j28.$$

## 3. Задачи и упражнения

3.1. Плоскость в пространстве задана векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Определить угол между нормалью к плоскости и вектором $\vec{C}$, если

$$\vec{A} = \vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 + \vec{z}_0,$$
$$\vec{B} = 2\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0 - 2\vec{z}_0,$$
$$\vec{C} = -\sqrt{5}\vec{x}_0 + \sqrt{11}\vec{z}_0$$

3.2. Найти угол между плоскостями, одна из которых задана векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$, а вторая векторами $\vec{B}$ и $\vec{C}$, если

$$\vec{A} = 2\vec{x}_0 - \vec{y}_0 + \vec{z}_0;\ \vec{B} = 4\vec{x}_0 - 2\vec{y}_0 + 6\vec{z}_0; \vec{C} = -\vec{x}_0 + \vec{y}_0 - 3\vec{z}_0.$$

2.3.3. Определить годограф векторной функции

$$\vec{A} = 2\ [cos(\,t + \frac{\pi}{6})\vec{x}_0 + cos(\,t - \frac{\pi}{3})\vec{y}_0\,]\ .$$

3.4. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A} = 3z\vec{x}_0 + z\vec{y}_0 + 4y\vec{z}_0$ по окружности единичного радиуса, расположенной в плоскости, ориентация которой задана вектором нормали

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{x}_0 + \vec{y}_0 + \vec{z}_0).$$

3.5. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность сферы единичного радиуса. Имеет ли поле $\vec{A}$ источники внутри указанной сферы ?

$$\vec{A} = 3x\vec{x}_0 + 3y\vec{y}_0 - 8\vec{z}_0.$$

3.6. Упростить следующие дифференциальные векторные операции так, чтобы оператор $\vec{\nabla}$ действовал только на одну переменную. Запись вести в символической форме.

а) $\vec{\nabla}(U \cdot V)$; б) $\vec{\nabla}(U \cdot \vec{A})$; в) $\vec{\nabla} \times (U \cdot \vec{A})$; г) $\vec{\nabla}(\vec{A} \times \vec{B})$.

3.7. Упростить, насколько возможно, следующие дифференциальные векторные операции второго порядка. Запись вести в символической форме.

а) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U$; б) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$; в) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$; г) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A})$.

3.8. Упростить

а) $\vec{\nabla}(U \cdot \vec{\nabla} V)$, б) $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{\nabla} U)$, в) $\vec{\nabla}(\vec{A} \times \vec{\nabla} U)$,

г) $\vec{\nabla} \times (U \cdot \vec{\nabla} V)$, д) $\vec{\nabla} \times (\vec{A}\vec{\nabla}\vec{B})$, е) $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{\nabla} U)$.

3.9. Доказать тождества

а) $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\vec{\nabla}\vec{B}-\vec{B}\vec{\nabla}\vec{A}+(\vec{B}\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B};$

б)

$$\vec{\nabla}\times[\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})]=[(\vec{\nabla}\times\vec{B})\vec{\nabla}]\vec{A}-(\vec{A}\vec{\nabla})(\vec{\nabla}\times\vec{B})-(\vec{\nabla}\times\vec{B})(\vec{\nabla}\vec{A}).$$

3.10. Доказать, что системы уравнений равносильны

$$\begin{cases}\vec{B}=rot\vec{A},\\ A=rot\vec{B},\end{cases}\quad \begin{cases}\vec{\nabla}^2\vec{A}+\vec{A}=0,\\ \vec{\nabla}^2\vec{B}+\vec{B}=0.\end{cases}$$

3.11. Доказать, что векторное поле $\vec{\mathrm{A}}$ является вихревым, если $\vec{A}+rot\vec{B}=0$ и $\vec{B}=rot\vec{A}$.

3.12. Вычислить $\sqrt{-j}$ .

3.13. Если заданы два комплексных числа $\dot{Q}$ и $\dot{P}$, доказать, что

$\left|\dot{Q}\right|\cdot\left|\dot{P}\right|=\left|\dot{Q}\cdot\dot{P}\right|$.

3.14. Вычислить $(2+j2)^2(\sqrt{3}-j)^3+\sqrt{8}\exp(j\frac{\pi}{4})$.

3.15. Доказать, что $ch(j\Psi)=\dfrac{e^{j\Psi}+e^{-j\Psi}}{2}=\cos\Psi$

$$sh(j\Psi)=\frac{e^{j\Psi}+e^{-j\Psi}}{2}=j\sin\Psi.$$

3.16. Вычислить $ch\,(1+j\sqrt{3}\,)^{(\sqrt{3}-j)}$.

3.17.Вычислить операцию ротора от выражения

$$\dot{E}_y=E_0\,sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)exp(-j\beta z\,).$$

3.18. Вычислить операцию ротора от выражения

$$\dot{E}_\theta=\frac{exp(-jkr\,)}{r}sin\,\theta\,.$$

3.19. Вычислить векторное произведение векторов

$$\dot{\vec{E}} = (280\vec{x}_0 + 320\vec{y}_0)\exp(-jkz)$$
$$\dot{\vec{H}} = (0,8\vec{x}_0 - 0,7\vec{y}_0)\exp(-jkz)$$

**Занятия 2,3 (4 часа)**
**Тема:**
## СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

### 1. Общие сведения

Электромагнитные процессы описываются системой уравнений электродинамики, которая может представлена в различных формах:

а) интегральная форма

$$\oint_L \vec{H}d\vec{\ell} = I + \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}d\vec{S},$$
$$\oint_L \vec{E}d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}d\vec{S},$$
$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0,$$
$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = Q.$$

б) дифференциальная форма

$$rot\vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$
$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$
$$div\vec{B} = 0,$$
$$div\vec{D} = \rho.$$

Здесь $\vec{H}$ - вектор напряженности магнитного поля; $I$ - электрический ток, протекающий через площадку *S*, ограниченную контуром *L;* $\vec{D}$ - вектор индукции электрического поля; $\vec{E}$ - вектор напряженности электрического поля; $\vec{B}$ - вектор индукции магнитного поля; $Q$ - электрический заряд, находящийся в объеме, ограниченном поверхностью *S*; $\vec{\delta}$ - вектор объемной плотности электрического тока проводимости; $\rho$ - объемная плотность электрического заряда. Вектор $\vec{\delta}$ состоит из наведенной и сторонней $\vec{\delta}^{ñò}$ составляющих.

Во многих случаях электромагнитные процессы подчиняются более простым закономерностям:

Для гармонических электромагнитных процессов применяется специальное математическое представление полей в виде комплексных амплитуд и система уравнений в дифференциальной форме примет вид.

$$\left.\begin{aligned} & rot\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{\delta}} + j\omega\dot{\vec{D}}, \\ & rot\dot{\vec{E}} = -j\omega\dot{\vec{B}}, \\ & div\dot{\vec{B}} = 0, \\ & div\dot{\vec{D}} = \dot{\rho}. \end{aligned}\right\} \quad \text{система уравнений для комплексных амплитуд}$$

Величины, входящие в систему уравнений электродинамики связаны также материальными соотношениями

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E};\ \vec{B} = \mu_a \vec{H};\ \vec{\delta} = \sigma \vec{E}.$$

Для однородного изотропного пространства величины $\varepsilon_a$, $\mu_a$, $\sigma$ являются скалярными константами.

При использовании комплексных амплитуд в качестве дополнительных параметров, характеризующих среду, вводятся комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_0 (\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}),$$ и тангенс угла диэлектрических потерь

$$tg\delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a}$$

Энергетические процессы, происходящие при взаимодействии электромагнитного поля со средой, подчиняются закону Умова-Пойнтинга.

$$\oint_S \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) d\vec{S} + \int_V \vec{\delta}\vec{E} dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV = -\int_V \vec{\delta}^{\text{ñò}}\, \vec{E} dV,$$ где

1-ый член — мгновенное значение мощности электромагнитного поля, проходящего через границу *S* объема *V*;

2-ой член — мгновенное значение мощности потерь электромагнитного поля в объеме *V*;

3-ий член — мгновенное значение мощности электромагнитного поля, запасаемого в объеме *V*;

4-ый член — мгновенное значение мощности, получаемой электромагнитным полем от сторонних источников в объеме *V*.

Для комплексных амплитуд теорема Умова-Пойнтинга имеет вид

$$\frac{1}{2}\oint (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) d\vec{S} + \frac{1}{2}\int_V \dot{\vec{\delta}}\dot{\vec{E}}^* dV + \frac{j\omega}{2}\int_V (\dot{\vec{E}}\dot{\vec{D}}^* + \dot{\vec{H}}\dot{\vec{B}}^*) dV =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_V \vec{\delta}^{\text{ñò}}\, \dot{\vec{E}}^* dV.$$

Здесь действительная часть каждого члена равна среднему за период колебания значению соответствующей мощности.

Уравнения электродинамики в дифференциальной форме не применимы в областях разрыва функций, описывающих электромагнитные поля, в частности на границах раздела сред. Для распространения решения на границы раздела используются граничные условия. Их удобно записать раздельно для нормальных и тангенциальных к границе компонент полей.

$$D_{1n} - D_{2n} = \xi, \quad E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0,$$

$$B_{1n} - e_{2n} = 0, \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta.$$

Здесь $\xi$ - плотность поверхностного заряда на границе раздела;

$\eta$ - плотность поверхностного тока на границе раздела.

Дополнительно используются асимптотические граничные условия, связанные с возможностью физической реализуемости решений уравнений электродинамики.

а) Амплитуда полей при бесконечном удалении от источников бесконечно убывает;

б) амплитуда полей в любой точке пространства не может бесконечно возрастать.

## 2. Примеры решений

2.1. Получить закон сохранения заряда в дифференциальной форме.

Решение. Запишем первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме

$$rot\vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Применим операцию дивергенции к обеим частям уравнения

$$divrot\vec{H} = div\vec{\delta} + div\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Используем тождество $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv 0$ и поменяем местами операторы, действующие по различным аргументам, в последнем члене выражения.

$$div\vec{\delta} + \frac{\partial}{\partial t} div\vec{D} = 0$$

Используем четвертое уравнение Максвелла.

$$div\vec{\delta} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Для комплексных амплитуд

$$j\omega\dot{\rho} = -\vec{\nabla}\dot{\vec{\delta}}$$

2.2. Получить уравнение Пуассона для электростатического потенциала.

Решение. Запишем уравнения Максвелла для электростатического случая.

$$rot\vec{E} = 0, div\vec{D} = \rho.$$

Из первого уравнения следует, что можно ввести скалярный потенциал U, так, что $\vec{E} = -gradU$, тогда первое положение выполняется тождественно, так как $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \equiv 0$. Подставим введенное обозначение во второе уравнение.

$$div\vec{D} = div\varepsilon_a\vec{E} = div\varepsilon_a(-gradU) = \rho$$

Для однородных изотропных сред

$$divgradU = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \quad \text{èëè} \quad \Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

2.3. Часть пространства, ограниченная плоскостями x= -a, x=a, имеющая диэлектрическую проницаемость $\varepsilon=\varepsilon_1$ заряжена с объемной плотностью $\rho=\rho_0$. Остальная часть пространства не проводящая с $\varepsilon=\varepsilon_2$. Определить электрические поля в среде, построить графики, качественно характеризующие изменения амплитуд векторов полей.

Решение. Из условия следует, что геометрия задачи является одномерной. Все поля зависят только от координаты x. Для решения воспользуемся уравнением Пуассона, запишем его в декартовых координатах с учетом отмеченного выше.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_{a1}}$$ — для заряженной части пространства

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$$ — для остального пространства.

Решаем первое уравнение методом непосредственного интегрирования.

$$U_1 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_{a1}}x^2 + C_1x + C_2.$$

Интегрируем второе уравнение

$$U_2 = C_3 x + C_4.$$

Переходим от потенциала к напряженности электрического поля

$$\vec{E}_1 = -gradU_1 = (\frac{\rho}{\varepsilon_{a1}} x - C_1)\vec{x}_0,$$

$$\vec{E}_2 = -C_3 \vec{x}_0.$$

Индукция поля равна

$$\vec{D}_1 = (\rho x - C_1 \varepsilon_{a1})\vec{x}_0,$$

$$\vec{D}_2 = -C_3 \varepsilon_{a2} \vec{x}_0 = -C_5 \vec{x}_0.$$

Вектора $\vec{D}$ ориентированы нормально к границам раздела сред. Для определения постоянных интегрирования воспользуемся граничными условиями.

Из симметрии задачи, а также потому, что при ρ=0 поле должно отсутствовать, следует, что $C_1$=0.

Из граничного условия при x=a

$$\rho_a = -C_5'; \;\; C'_5 = -\rho_a.$$

Из граничного условия при x=-a

$$-\rho_a = -C_5''; \;\; C''_5 = -\rho_a.$$

Таким образом при -a>x>-∞

$$\vec{D} = -\rho_a \vec{x}_0; \;\; \vec{E} = -\frac{\rho_a}{\varepsilon_{a2}} \vec{x}_0;$$

при a≥x≥-a

$$\vec{D} = -\rho x \vec{x}_0; \;\; \vec{E} = -\frac{\rho x}{\varepsilon_{a1}} \vec{x}_0;$$

при a<x<+∞

$$\vec{D} = -\rho_a \vec{x}_0; \;\; \vec{E} = -\frac{\rho_{\epsilon}}{\varepsilon_{a2}} \vec{x}_0;$$

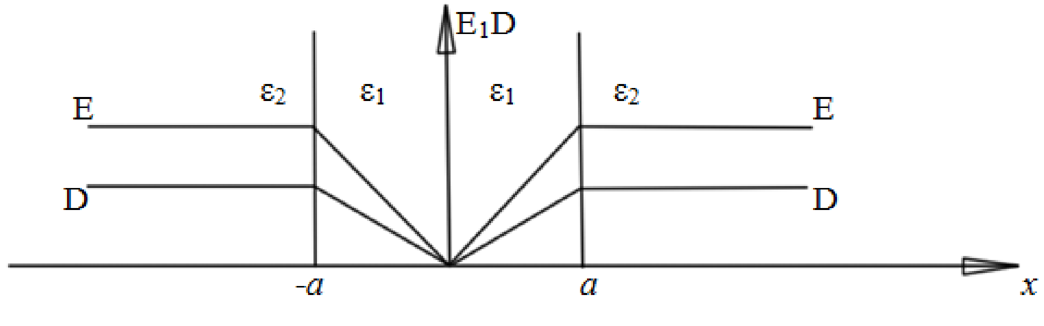


Рис.2 Графики к задаче 2.3

Эту задачу можно также решить, используя четвертое уравнения Максвелла.

## 3. Задачи и упражнения

3.1. Преобразовать первое уравнение Максвелла из интегральной формы в дифференциальную.

3.2. Преобразовать второе уравнение Максвелла из дифференциальной формы в интегральную.

3.3. Мгновенное значение напряженности электрического поля равно $\vec{E} = (a\vec{x}_0 + b\vec{y}_0)\cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{6})$. Записать выражение для комплексной амплитуды поля.

3.4. Электромагнитное поле с частотой 50 МГц существует в свободном пространстве. Его комплексная амплитуда определяется выражением $\vec{E} = (2xy\vec{x}_0 + 3xyz\vec{z}_0)\exp(-j\frac{\pi}{4})$. Записать выражение для мгновенного значения напряженности поля.

3.5. По данным задачи 3.3.4. определить остальные вектора поля ( $\dot{\vec{D}}, \dot{\vec{H}}, \dot{\vec{B}}$).

3.6. В однородной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε=2 существует электромагнитное поле с частотой 300 МГц, комплексная амплитуда которого задается выражением $\dot{\vec{E}} = (\frac{4}{r}\cos\theta\vec{\theta}_0 + \frac{6\cos\theta}{r}\vec{\varphi}_0)\exp(-jkr - \alpha r)[\frac{\hat{A}}{M}]$. В точке со сферическими координатами P(2; π; $\frac{\pi}{6}$) протекают токи проводимости с амплитудой объемной плотности $|\delta| = 10^{-8}[\frac{\grave{A}}{\grave{I}^{\ 2}}]$. Вычислить комплексную относительную диэлектрическую проницаемость среды и тангенс угла диэлектрических потерь среды.

3.7. Антенна РЛС, имеющая площадь раскрыва 2 м$^2$ излучает электромагнитные колебания, мощностью 200 КВт. Определить амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей в раскрыве антенны, если $\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = 120\pi[\hat{I}\ \grave{\imath}\ ]$, считая, что излучаемая мощность равномерно распределена по раскрыву, а поле имеет поперечную структуру.

3.8. Определить энергию электрического поля плоского конденсатора, если площадь обкладок составляет S=500 см$^2$, расстояние между обкладками d=0,3 мм, диэлектрическая проницаемость изолятора ε=2, а напряжение между обкладками составляет 400 В.

3.9. Бесконечный цилиндрический объем, имеющий радиус *a*, заряженный с объемной плотностью $\rho=\rho_0 r^2$, находится в свободном пространстве. Диэлектрическая проницаемость среды в объеме цилиндра равна 4. Определить напряженность и индукцию электрического поля внутри и вне цилиндра, используя уравнение Пуассона.

3.10. Шар радиуса *a*, заряженный с объемной плотностью $\rho=\rho_0(r^3-2r^2)$ находится в двухслойной сферически симметричной среде. Диэлектрическая проницаемость материала шара $\varepsilon_1=2$. Диэлектрическая проницаемость окружающей шар среды равна $\varepsilon_2=4$, а ее внешний радиус равен *b*. Диэлектрическая проницаемость внешней среды равна $\varepsilon_3=1$. Определить напряженность и индукцию электрического поля во всех средах, построить графики, качественно показывающие зависимости амплитуд полей от радиальной координаты.

3.11. Используя второе и третье уравнения Максвелла в дифференциальной форме показать, что указанные уравнения не являются полностью независимыми.

3.12. Определить напряженность магнитного поля, действующего на расстоянии *a* от прямолинейного бесконечно длинного провода, по которому протекает ток $I_0$.

3.13. На границе первой среды, имеющей параметры $\varepsilon_1=4$, $\mu_1=3$ действует вектор напряженности электрического поля, нормальная составляющая которого равна 2 [В/м], а тангенциальная составляющая равна 5 [В/м]. Вторая среда имеет параметры $\varepsilon_2=2$, $\mu_2=8$. Определить угол, под которым наклонен к границе раздела вектор напряженности электрического поля во второй среде.

3.14. Записать граничные условия для реальных сред в векторной форме.

**Занятие 4 (2 часа)**
**Тема:**
# ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

## 1. Общие сведения

В каждое из уравнений Максвелла, являющихся дифференциальными уравнениями в частных производных, входит несколько величин, определяющих электромагнитное поле. Обычно при решении электродинамических задач бывает удобнее перейти к дифференциальным уравнениям, в которые входит одна неизвестная величина. Получаемые при переходе уравнения называются волновыми, так как дают решения для электромагнитных полей в виде волн. В случае однородной изотропной среды, содержащей электрические и магнитные сторонние токи волновые уравнения для комплексных амплитуд векторов поля имеют вид

$$\Delta\dot{\vec{E}} + k^2\dot{\vec{E}} = -\dot{\vec{M}}_{э},$$

$$\Delta\dot{\vec{H}} + k^2\dot{\vec{H}} = -\dot{\vec{M}}_{M},$$

где *k*— волновое число, $k = \omega\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$ (в среде без потерь $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, при наличии потерь k=k'—jk″ и $k' = \dfrac{2\pi}{\lambda}$); $\dot{\vec{M}}_{Э}$ и $\dot{\vec{M}}_{м}$ — функции, характеризующие источники поля

$$\dot{\vec{M}}_{\text{Ý}} = -j\omega\mu_a\dot{\vec{\delta}}_{\text{ý}}^{\text{ñò}} + \frac{1}{j\omega\varepsilon_a}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\dot{\vec{\delta}}_{\text{ý}}^{\text{ñò}}) - \vec{\nabla}\times\dot{\vec{\delta}}_{\text{ì}}^{\text{ñò}},$$

$$\dot{\vec{M}}_{\text{ì}} = -j\omega\varepsilon_a\dot{\vec{\delta}}_{\text{ì}}^{\text{ñò}} + \frac{1}{j\omega\mu_a}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\dot{\vec{\delta}}_{\text{ì}}^{\text{ñò}}) + \vec{\nabla}\times\dot{\vec{\delta}}_{\text{ý}}^{\text{ñò}}.$$

Такие волновые уравнения используются, если в среде отсутствуют сторонние источники или если они задаются простыми функциями. При сложных сторонних источниках удобнее применить волновые уравнения для векторных и скалярных потенциалов. При этом полагается, что сторонние источники электрического типа создают электрические потенциалы, магнитные источники — магнитные потенциалы, а общие решения волновых уравнений равны сумме полей электрического и магнитного типов. Волновые уравнения для потенциалов имеют вид

$$\Delta\dot{\vec{A}}_{\text{ý}} + k^2\dot{\vec{A}}_{\text{ý}} = -\delta_{\text{ý}}^{\text{ñò}},$$

$$\Delta\dot{\vec{A}}_{\text{ì}} + k^2\dot{\vec{A}}_{\text{ì}} = -\dot{\vec{\delta}}_{\text{ì}}^{\text{ñò}}.$$

Комплексные амплитуды полей выражаются через потенциалы поля соотношениями

$$\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\vec{A}}_{\text{ý}} + \frac{1}{j\omega\varepsilon_a}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\dot{\vec{A}}_{\text{ý}}) - \vec{\nabla}\times\dot{\vec{A}}_{\text{ì}}\ ,$$

$$\dot{\vec{H}} = -j\omega\varepsilon_a \dot{\vec{A}}_{\text{ì}} + \frac{1}{j\omega\mu_a}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\dot{\vec{A}}_{\text{ì}}) - \vec{\nabla}\times\dot{\vec{A}}_{\text{ý}}.$$

Иногда используются волновые уравнения для векторов Герца.

Для решения волновых уравнений применяются различные методы.

В данном курсе используются

— метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям для простейших задач;

— методы разделения переменных для нахождения собственных волн в ортогональных системах координат;

— метод функции Грина для решения задач для свободного пространства;

Функция Грина дифференциального уравнения является решением этого уравнения для точечного источника. При известной функции Грина G решение волнового уравнения записывается в виде

$$\dot{\vec{A}}_{\text{ý},\text{ì}} = \int\limits_V \dot{\vec{\delta}}^{\,\text{ñò}}_{\text{ý},\text{ì}}\, G dV.$$

Здесь интегрирование выполняется по объему, занятому сторонними источниками.

Для свободного пространства функция Грина определяется выражением

$$G = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(-jkr)}{r}\ ,$$

где r - расстояние от точки расположения стороннего источника до точки наблюдения, в которой определяется электромагнитное поле.

## 2. Примеры решений

2.1. Используя закон сохранения заряда найти связь между скалярным и векторным потенциалом одного и того же электромагнитного поля.

Решение. Запишем волновые уравнения для электрических потенциалов

$$\Delta\vec{A}_{э} + k^2\vec{A}_{э} = -\vec{\delta}_{э}^{-[}$$

$$\Delta U_{э} + k^2 U_{э} = -\rho_{э}^{-[}$$

Применим к обеим частям первого уравнения операцию дивергенции, а второе уравнение продифференцируем по времени. Результаты сложим.

$$\vec{\nabla}(\Delta\vec{A}_э)+\frac{\partial}{\partial t}\Delta U_э+k^2(\vec{\nabla}\vec{A}_э+\frac{\partial}{\partial t}\Delta U_э)=-\vec{\nabla}\vec{\delta}_э^{c\square}-\frac{\partial\rho_э^{-\square}}{\partial t}$$

Поскольку сторонние источники относятся к одному и тому же полю, то они должны быть связаны законом сохранения заряда.

$$\frac{\partial\rho_э}{\partial t}+\vec{\nabla}\vec{\delta}_э=0$$

поэтому получаем, меняя порядок действия операторов

$$\Delta(\vec{\nabla}\vec{A}_э+\frac{\partial U_э}{\partial t})+k^2(\vec{\nabla}\vec{A}_э+\frac{\partial U_э}{\partial t})=0$$

Полученное уравнение имеет тривиальное решение

$$\vec{\nabla}\vec{A}_э+\frac{\partial U_э}{\partial t}=0$$

Это соотношение выражает связь между векторным и скалярным потенциалами. Оно называется условием Лоренца.

2.2. Пользуясь соотношением, связывающим комплексную амплитуду напряженности электрического поля с векторными потенциалами, получить аналогичное выражение для комплексной амплитуды напряженности магнитного поля.

<u>Решение.</u> Исходное соотношение имеет вид

$$\dot{\vec{E}}=-j\omega\mu_a\dot{\vec{A}}_э+\frac{1}{j\omega\varepsilon_a}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\dot{\vec{A}}_э)-\vec{\nabla}\times\dot{\vec{A}}_м$$

Второе уравнение Максвелла устанавливает связь между напряженностями электрического и магнитного поля.

$$\vec{\nabla}\times\dot{\vec{E}}=-j\omega\mu_a\dot{\vec{H}}-\dot{\vec{\delta}}_{ì}^{ñò}$$ , отсюда

$$\dot{\vec{H}}=-\frac{1}{j\omega\mu_a}(\vec{\nabla}\times\dot{\vec{E}}+\dot{\vec{\delta}}_{ì}^{ñò}).$$

Поставим в это выражение исходное соотношение.

$$\dot{\vec{H}}=\left\{\vec{\nabla}\times\left[-j\omega\mu_a\dot{\vec{A}}_{ý}+\frac{1}{j\omega\varepsilon_a}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\dot{\vec{A}}_{ý}\right)-\vec{\nabla}\times\dot{\vec{A}}_{ì}\right]+\dot{\vec{\delta}}_{ì}^{ñò}\right\}=$$

$$=\vec{\nabla}\times\vec{A}_{ý}+\frac{1}{\omega^2\varepsilon_a\mu_a}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\dot{\vec{A}}_{ý}\right)+\frac{1}{j\omega\mu_a}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\dot{\vec{A}}_{ì}-\frac{\dot{\vec{\delta}}_{ì}^{ñò}}{j\omega\mu_a}.$$

Здесь второй член тождественно равен нулю, так как $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U\equiv 0$. Последние члены распишем отдельно.

$$\frac{1}{j\omega\mu_a}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\dot{\vec{A}}_{ì}-\frac{\dot{\vec{\delta}}_{ì}}{j\omega\mu_a}=\frac{1}{j\omega\mu_a}\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\dot{\vec{A}}_{ì})-\Delta\dot{\vec{A}}_{ì}-\dot{\vec{\delta}}_{ì}^{ñò}\right].$$

Из уравнения для магнитного векторного потенциала следует

$$\Delta\dot{\vec{A}}_{ì}+\dot{\vec{\delta}}_{ì}^{ñò}=-k^2\dot{\vec{A}}_{ì}\ .$$

Возвращаясь к промежуточному результату получаем

$$\dot{\vec{H}}=\vec{\nabla}\times\dot{\vec{A}}_{ý}+\frac{1}{j\omega\mu_a}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\dot{\vec{A}}_{ì})+\frac{k^2}{j\omega\mu_a}\dot{\vec{A}}_{ì}=$$

$$-j\omega\varepsilon_a\dot{\vec{A}}_{ì}+\frac{1}{j\omega\mu_a}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\dot{\vec{A}}_{ì})+\vec{\nabla}\times\dot{\vec{A}}_{ý}.$$

2.3. Найти длину волны электромагнитного колебания частотой 300 КГц в среде с параметром ε=10; μ=200.

<u>Решение.</u> Потери в среде отсутствуют, поэтому

$k=\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}=\frac{2\pi}{\lambda}$, отсюда

$$\lambda=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}}=(f\sqrt{\mu_a\mu\varepsilon_a\varepsilon})^{-1}$$

Подставляем численные данные

$$\lambda=\left(300\cdot10^3\sqrt{4\pi\cdot10^{-7}\cdot200\cdot\frac{1}{36\pi}\cdot10^{-9}\cdot10}\right)^{-1}\approx 22\ \grave{I}\ .$$

### 3. Задачи и упражнения

3.1. Получить волновое уравнение для комплексной амплитуды напряженности электрического поля в случае свободного пространства, в котором отсутствует свободные заряды и сторонние источники.

3.2. Выполнить условие задачи 4.3.1. при наличии в среде электрических и магнитных сторонних источников в виде токов и зарядов.

3.3. Электромагнитное поле возбуждается электрическим током частотой ω, протекающим по прямолинейному проводу длиной $\ell$, ток равномерно распределен по поперечному сечению провода, а его амплитуда изменяется по закону $I=I_0 sin[k(\ell — Z)]$, где Z — продольная координата проводника, начало проводника совмещено с центром координат. Записать волновые уравнения для комплексной амплитуды напряженности электрического поля и для электрического векторного потенциала. Сравнить результаты.

3.4. Получить волновые уравнения для электрического и магнитного векторного потенциалов для свободного пространства, содержащего сторонние источники в виде электрического и магнитного токов.

3.5. В среде с параметрами $\mu$=1, ε=2, $\sigma$=1,6·10$^{-4}$. Существует электромагнитное поле с частотой 2 МГц. Определить длину волны колебания.

3.6. В результате решения электродинамической задачи для свободного пространства получено выражение для электрического векторного потенциала в виде

$$\vec{A}_э = \vec{A}_0(\cos\theta\vec{r}_0 - \sin\theta\vec{\theta}_0)\frac{\exp(-jkr)}{r}$$

Записать выражения для комплексных амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей.

3.7. Показать, что при $\omega\to 0$ волновое уравнение для скалярного электрического потенциала переходит в уравнение Пуассона.

3.8. Вычислить значения $k$ электромагнитного колебания с частотой 1 ГГц для меди.

## Занятия 5, 6 (4 часа)
## Тема:
# ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

## 1. Общие сведения

1.1. Плоскими волнами являются поперечные электромагнитные колебания, являющиеся простейшим решением волнового уравнения в декартовой системе координат. Вектора поля плоской волны изменяются только в одном направлении. Если это направление совместить с осью декартовой системы координат, например с осью *Z*, то уравнение Гельмгольца для плоской волны распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами для компонент векторов $\vec{E}$ или $\vec{H}$.

$$\frac{d^2\dot{E}_x}{dz^2}+k^2\dot{E}_x=0, \qquad \frac{d^2\dot{E}_y}{dz^2}+k^2\dot{E}_y=0.$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$\dot{E}_x=\dot{A}\exp(-jkz)+\dot{B}\exp(jkz)\ ;\ \dot{E}_y=\dot{C}\exp(-jkz)+\dot{D}\exp(jkz)$$

Первые члены этих выражений определяют плоские волны, распространяющиеся в положительном направлении оси *Z*, а вторые — волны, распространяющиеся в отрицательном направлении оси *Z*. Для исследования свойств волн достаточно рассмотреть только одно слагаемое. Если среда, в которой распространяется плоская волна, обладает потерями, то волновое число становится комплексным и плоская волна будет затухающей.

$$\dot{E}_x=\dot{A}\exp(-k''z)\exp(-jk'z),$$

где $k'$— фазовая постоянная;

$k''$— постоянная затухания .

Величина $d=\dfrac{1}{k''}$, равная расстоянию, на котором амплитуда волны убывает в *е* раз, называется глубиной проникновения поля в среду. Величина $k'$ определяет фазовую скорость плоской волны $V_\phi=\dfrac{\omega}{k'}$.

Напряженность магнитного поля плоской волны может быть определена из 2-го уравнения Максвелла.

$$\dot{H}_y=\frac{1}{j\omega\mu_a}\frac{\partial\dot{E}_z}{\partial z}=-\sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}}\dot{A}\exp(-jkz)=-\frac{\dot{A}}{W}\exp(-jkz)$$

$$\dot{H}_x=\frac{1}{j\omega\mu_a}\frac{\partial\dot{E}_y}{\partial z}=-\sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}}\dot{A}\exp(-jkz)=-\frac{\dot{A}}{W}\exp(-jkz)$$

Величина $W=\sqrt{\dfrac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$ называется волновым сопротивлением среды.

1.2. Из решения волнового уравнения, следует что комплексные амплитуды векторов $\vec{\mathrm{E}}$ и $\vec{\mathrm{H}}$ могут содержать две компоненты между которыми, в общем случае, возможны фазовые сдвиги.

$$\dot{E}_x=\left|\dot{A}\right|\exp(-jkz+j\psi_a),$$

$$\dot{E}_y=\left|\dot{C}\right|\exp(-jkz+j\psi_c),$$

$$\dot{\vec{E}}=\dot{E}_x\vec{x}_0+\dot{E}_y\vec{y}_0.$$

Фиксируя координату $Z=Z_1$, можно исследовать годограф вектора $\vec{E}$ в плоскости $Z=Z_1$. Способность векторов $\vec{E}$ или $\vec{H}$ волны в фиксированной точке пространства периодически описывать замкнутую фигуру, называется поляризацией волны. По виду годографа различают

— линейную поляризацию (годограф — отрезок прямой линии), линейная поляризация возможна, в следующих случаях

а) A=0; б) C=0; в) A≠0, C≠0;

б) $|\Psi_a — \Psi_c|=\pi\cdot n$, где n=0,1,2;

— круговую поляризацию (годограф — окружность), круговая поляризация возможна в следующем случае

$$\left|A\right|=\left|C\right|;\ \left|\psi_a-\psi_c\right|=\frac{\pi}{2}+\pi n$$

— эллиптическую поляризацию (годограф — эллипс).

Количественно поляризация оценивается:

— коэффициентом эллиптичности *r*, равным отношению малой полуоси поляризационного эллипса к большой полуоси ;

— углом ориентации поляризационного эллипса $\beta$, равном углу между большой полуосью эллипса и осью x (горизонталью);

— направлением вращения вектора $\vec{E}$ в поляризационном эллипсе.

1.3. Если направление движения плоской волны не совпадает с направлением осей координат, то выражение, описывающее ее принимает вид

$$\dot{\vec{E}}=\vec{E}\exp(-j\vec{k}\vec{R})=\vec{E}\exp\left[-jk\left(S_1x+S_2y+S_3z\right)\right],$$

где $\vec{k}=k\vec{k}_0$ — волновой вектор, по модулю равный *k*, направленный в сторону движения волны;

$S_1,S_2,S_3$ — направляющие косинусы единичного вектора $\vec{k}_0$.

Направление движения волны часто задается углами θ, φ сферической системы координат, поэтому

$$S_1 = \sin\theta\cos\varphi;\ \ S_2 = \sin\theta\sin\varphi;\ \ S_3 = \cos\theta.$$

Плоская волна является поперечным электромагнитным колебанием, поэтому $\vec{E}\cdot\vec{k} = 0$.

1.4. При падении плоской волны на плоскую границу раздела сред, ее мощность делится между отраженной и преломленной волнами. Направление движения преломленной волны определяется законом Спеллиуса $k_i sin\varphi_i = const$, где $i$ — номер среды, φ — угол между направлением движения волны и нормалью к границе.

Отраженная волна распространяется по направлению, симметричному направлению движения падающей волны относительно нормали к границе раздела сред.

Амплитуда преломленной и отраженной волн задаются формулами Френеля.

$$\Gamma_{1,2\perp} = \frac{E_{отр\perp}}{\acute{\Gamma}_{пад\perp}}\frac{W_2\cos\varphi_{пад} - W_1\cos\varphi_{пр}}{W_2\cos\varphi_{пад} + W_1\cos\varphi_{пр}},$$

$$T_{1,2\perp} = \frac{E_{пр\perp}}{\acute{\Gamma}_{пад\perp}}\frac{2W_2\cos\varphi_{пад}}{W_2\cos\varphi_{пад} + W_1\cos\varphi_{пр}}$$

$$\Gamma_{1,2||} = \frac{E_{отр||}}{\acute{\Gamma}_{пад||}}\frac{W_1\cos\varphi_{пад} - W_2\cos\varphi_{пр}}{W_1\cos\varphi_{пад} + W_2\cos\varphi_{пр}}$$

$$T_{1,2||} = \frac{E_{пр||}}{\acute{\Gamma}_{пад||}}\frac{2W_2\cos\varphi_{пр}}{W_1\cos\varphi_{пад} + W_2\cos\varphi_{пр}}$$

Здесь $\Gamma$ — коэффициент отражения; $T$ — коэффициент прохождения; индекс $\perp$ относится к компонентам векторов поля, перпендикулярным к плоскости падения, задаваемой вектором $\vec{k}$ и вектором нормали к границе раздела $\vec{n}_0$ ; индекс || относится к тангенциальным к плоскости падения компонентам вектора поля; индексы «пад», «пр», «отр» относятся к падающей, преломленной и отраженной волнам, соответственно. Если пространство состоит из 3 сред с параллельными границами раздела, то коэффициенты отражения и прохождения определяются формулами Эйри

$$\Gamma_{13} = \frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{23}\exp(2j\alpha)}{1 - \Gamma_{12}\Gamma_{23}\exp(j2\alpha)},$$

$$T_{13} = \frac{T_{12} + T_{23}\exp(j\alpha)}{1 - \Gamma_{12}\Gamma_{23}\exp(j2\alpha)},$$

где $\Gamma_{12}$, $\Gamma_{23}$, $T_{12}$, $T_{23}$ — коэффициенты отражения и прохождения на границах раздела между средами 1 и 2, между 2 и 3;

$$\alpha = d\omega\sqrt{\mu_{\varepsilon 2}\varepsilon_{a2}}\cos\varphi_2 .$$

1.5. Любое электромагнитное поле, создаваемое сторонними источниками можно представить в виде суперпозиции плоских волн, если известно распределение поля источников на некоторой плоскости. Если на плоскости XOY задано распределение компоненты $E_x(x,y)$, то поле в пространстве равно

$$\dot{\vec{E}}(x,y,z) = \frac{1}{k^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}(\vec{x}_0 - \frac{S_1}{S_3}\vec{z}_0)F(S_1,S_2)\exp(-j\vec{k}\vec{r})dS_1 dS_2 ,$$

где $F(S_1,S_2)$ — угловой спектр плоских волн

$$F(S_1,S_2) = \int\int_{-\infty}^{\infty}E_x(x,y)\exp[-jk(S_1x + S_2y)]dxdy.$$

## 2. Примеры решений

2.1 Определить фазовую скорость и глубину проникновения поля плоской волны, с частотой 10 ГГц распространяющейся в среде с параметрами ε=3, μ=1, σ=1 см/м.

Решение. Найдем волновое число плоской волны

$$k = \omega\sqrt{\mu_a\dot{\varepsilon}_a} = 2\pi\cdot 10^{10}\sqrt{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 10^{-9}(3 - j\frac{1}{2\pi\cdot 10^{10}\frac{1}{36\pi}\cdot 10^{-9}})}$$

$$732\exp(-j15{,}48°) = 705 - j195[\frac{1}{M}]$$

Вычислим фазовую скорость и глубину проникновения поля в среду

$$V_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{2\pi\cdot 10^{10}}{705} \approx 8{,}9\cdot 10^7[\frac{м}{сек}],$$

$$d = \frac{1}{k''} = \frac{1}{195} \approx 5{,}1[мм]$$

2.2. Определить поляризацию плоской волны, если

$$\dot{\vec{E}} = E_0[2\vec{x}_0 + (3 + j4)\vec{y}_0]\exp(-jkz).$$

Решение. Зафиксируем координату z=0. Запишем составляющую $E_y$ в показательной форме

$$\dot{E} = (3 + j4) = 5\exp(j53^\circ) = 5\exp(j0{,}925)$$

Мгновенное значение вектора напряженности электрического поля в плоскости Z=0 равно

$$\vec{E} = 2E_0 \cos\omega t \vec{x}_0 + 5E_0 \cos(\omega t + 0{,}925)\vec{y}_0.$$

Найдем его амплитуду

$$\left|\vec{E}\right| = E_0\sqrt{4\cos^2\omega t + 25\cos^2(\omega t + 0{,}925)}.$$

При вращении вектора $\vec{E}$ его амплитуда периодически изменяется, причем в моменты экстремумов амплитуды вектор $\vec{E}$ совпадает с полуосями поляризационного эллипса. Поэтому исследуем функцию $\left|\vec{E}\right|$ на экстремум.

$$\left|\vec{E}\right|' = \frac{E_0}{2}\frac{[-8\cos\omega t\sin\omega t - 50\cos(\omega t + 0{,}925)\sin(\omega t + 0{,}925)]}{\sqrt{4\cos^2\omega t + 25\cos^2(\omega t + 0{,}925)}} = 0.$$

Решая это трансцендентное уравнение получаем

$$4\sin 2\omega t + 25\sin(2\omega t + 1{,}85) = 0.$$

Решая это тригонометрическое уравнение получаем

$$2\omega t \approx 1{,}44 + \pi n; \quad \omega t = 0{,}72 + \frac{\pi}{2}n$$

Вычислим значения $\left|\vec{E}\right|$ для двух первых значений $\omega t$

$$\left|\vec{E}\right|(\omega t_1) = E_0\sqrt{4\cos^2 0{,}72 + 25\cos^2(0{,}72 + 0{,}925)} \approx 1{,}59E_0.$$

$$\left|\vec{E}\right|(\omega t_2) = E_0\sqrt{4\cos^2(0{,}72 + \frac{\pi}{2}) + 25\cos^2(0{,}72 + \frac{\pi}{2} + 0{,}925)} \approx 5{,}16E_0.$$

Очевидно, первое значение равно малой, а второе — большой полуоси поляризационного эллипса.

Вычислим параметры, характеризующие поляризацию

$$r = \frac{1{,}59E_0}{5{,}16E_0} \approx 0{,}31,$$

угол ориентации эллипса

$$\beta = \omega t_2 = (0{,}72 + \frac{\pi}{2})[\text{рад}] \approx 131^\circ$$

Вращение суммарного вектора происходит в направлении от одной компоненты ко второй, отстающей по фазе. Здесь вращение происходит от направления Y к направлению X — по часовой стрелке, поляризация правая.

2.3. Записать выражение для плоской линейно поляризованной электромагнитной волны, движущейся под углами θ=30°, φ=45°, если известно, что вектор $\vec{E}$ волны параллелен плоскости ZOY.

<u>Решение.</u> Вычислим направляющие косинусы

$$S_1 = \sin\theta\cos\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}};\ S_2 = \sin\theta\sin\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}};\ S_3 = \cos\theta\frac{\sqrt{3}}{2};$$

Единичный вектор, показывающий направление движения плоской волны равен

$$\vec{k} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{x}_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{y}_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{z}_0.$$

Вектор напряженности электрического поля волны можно представить в виде

$$\vec{E} = E_0\vec{e} = E_0(e_x\vec{x}_0 + e_y\vec{y}_0 + \vec{e}_z\vec{z}_0),$$

где $\vec{e}$ — единичный вектор, поэтому $\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2} = 1.$

Из свойств плоской волны следует

$$\vec{E}\cdot\vec{k} = E_0\left(\frac{e_x}{2\sqrt{2}} + \frac{e_y}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}e_z}{2}\right) = 0$$

По условию $\vec{E}\cdot\vec{x}_0 = E_0 e_x = 0.$

Решая совместно три последние уравнения получаем

$$e_x = 0;\ e_y = \sqrt{\frac{6}{7}};\ e_z = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

Поэтому плоская волна будет определяться выражением

$$\vec{E} = E_0\left(\sqrt{\frac{6}{7}}\vec{y}_0 + \frac{1}{\sqrt{7}}\vec{z}_0\right)\exp\left[-jk\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{x}_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{y}_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{z}_0\right)\right]$$

2.4. Диэлектрическая проницаемость многослойной среды с плоскопараллельными границами раздела определяется законом

$\varepsilon_i = 1 + \dfrac{5}{i^2}$, где i — номер среды в направлении движения волны.

Определить угол между направлением движения волны в среде i=5 и нормалью к границе раздела $\varphi_5$, если $\varphi_1$=10° ($\mu_i$=1, $\sigma_i$=0).

<u>Решение.</u> Воспользуемся обобщенным законом Снеллиуса $k_i \sin\varphi_i = const$. В нашем случае $k_1 \sin\varphi_1 = k_5 \sin\varphi_5$,

$$\varphi_5 = \arcsin\left(\frac{k_1}{k_5}\sin\varphi_1\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_5}}\sin\varphi_1\right)$$

Вычислим

$$\varepsilon_1 = \frac{5}{1^2} = 5 \; ; \varepsilon_5 = \frac{5}{5^2} = 0{,}2 \; .$$

Тогда

$$\varphi_5 = Arc\sin\left(\sqrt{\frac{5}{0{,}2}}\sin\varphi_1\right) \approx 60° \; .$$

2.5. Плоская волна

$$\vec{E} = E_0\left(\sqrt{\frac{6}{7}}\vec{y}_0 + \frac{1}{\sqrt{7}}\vec{z}_0\right)\exp\left[-jk\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{x}_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{y}_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{z}_0\right)\right]$$

падает на границу раздела сред, задаваемую единичным вектором нормали $\vec{n}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{x}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{z}_0\right)$. Определить перпендикулярную и параллельную к плоскости падения компоненты вектора $\vec{E}$.

<u>Решение.</u> Плоскость падения проходит через единичные вектора $\vec{k}_0$ и $\vec{n}_0$. Определим единичный вектор нормали к плоскости падения $\vec{N}_0$. Очевидно

$$\vec{N}_0 = \frac{\vec{n}_0 \times \vec{k}_0}{\left|\vec{n}_0 \times \vec{k}_0\right|} \approx \frac{1}{\left|\vec{n}_0 \times \vec{k}_0\right|}\left[-\frac{1}{4}\vec{x}_0 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right)\vec{y}_0 + \frac{1}{4}\vec{z}_0\right]$$

Единичный вектор, тангенциальный к плоскости падения равен

$$\vec{\tau}_0 = \vec{N}_0 \times \vec{k}_0 = \frac{1}{\left|\vec{n}_0 \times \vec{k}_0\right|}\left[-\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\vec{x}_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{y}_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\vec{z}_0\right]$$

Перпендикулярная компонента вектора $\vec{E}$ равна

$$\vec{E}_\perp = \left(\vec{E}\cdot\vec{N}_0\right)\cdot\vec{N}_0 = \frac{E_0}{\left|\vec{n}_0 \times \vec{k}_0\right|^2}\left[-\sqrt{\frac{6}{7}}\left(\frac{\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4\sqrt{7}}\right]\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{4}\vec{x}_0 - \left(\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}} - \frac{1}{4}\right)\vec{y}_0 + \frac{1}{4}\vec{z}_0\right]\exp\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right].$$

Параллельная компонента вектора $\vec{\mathrm{E}}$ равна

$$\vec{E}_{||} = \left(\vec{E} \cdot \vec{\tau}_0\right) \cdot \vec{\tau}_0 =$$

$$= \frac{E_0}{\left|\vec{n}_0 \times \vec{k}_0\right|^2} \left[ \sqrt{\frac{6}{7}} \left( \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4\sqrt{8}} \right) + \frac{1}{\sqrt{7}} \left( \sqrt{\frac{3}{8}} - \frac{1}{2\sqrt{8}} \right) \right] \times$$

$$\times \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{7}{4\sqrt{8}} \right) \vec{x}_0 + \left( \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4\sqrt{8}} \right) \vec{y}_0 + \left( \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2\sqrt{8}} \right) \vec{z}_0 \right] \times$$

$$\times \exp\left[ -jk \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} x + \frac{1}{2\sqrt{2}} y + \frac{\sqrt{3}}{2} z \right) \right]$$

## 3. Задачи и упражнения

3.1. Определить волновое сопротивление среды для плоской волны, если ε=4, μ=1, $\sigma=10^{-4}$, f=1 МГц.

3.2. Найти глубину проникновения поля плоской волны с частотой 300 ГГц в среду, обладающую параметрами меди (μ=1,$\sigma=5{,}8\cdot 10^{7}$ СМ/М).

3.3. Плоская волна, существующая в пространстве, определяется выражениями

$$\dot{\vec{E}} = (280\vec{x}_0 + 320\vec{y}_0)\exp(-jkz)[\hat{A} / \grave{\imath}\ ],$$

$$\dot{\vec{H}} = (0{,}8\vec{x}_0 - 0{,}7\vec{y}_0)\exp(-jkz)[A / \grave{\imath}\ ].$$

Найти волновое сопротивление среды.

3.4. Определить вектор Пойнтинга плоской волны, заданной в условии задачи 5.3.3.

3.5. Диэлектрическая проницаемость плазменной среды определяется выражением $\varepsilon = 1 - \dfrac{N}{f^2} \cdot 81$. В плазме распространяется радиосигнал, крайние частоты спектра, которого равны $f_1$ и $f_2$. Определить величину фазовых искажений сигнала при прохождении трассы длиной *L*. Считать, что радиосигнал существует в виде плоских волн.

3.6. Показать, что волны с линейной и эллиптической поляризацией можно представить в виде суммы волн круговой поляризации с различными направлениями вращения векторов.

3.7. Определить поляризацию плоской волны, заданной выражением

$$\dot{\vec{E}} = E_0\left[(2 - j)\vec{x}_0 + (2 + j)\vec{y}_0\right]\exp(-jkz).$$

3.8. Заданы две плоские волны одинаковой амплитуды

— волна с линейной поляризацией и волна с круговой поляризацией. Определить отношение модулей комплексных амплитуд векторов Пойнтинга волн круговой и линейной поляризации.

3.9. Записать выражение для плоской линейно поляризованной электромагнитной волны, движущейся под углами θ=60°, φ=30°, если известно, что вектор $\vec{\mathrm{E}}$ волны коллинеарен вектору $\vec{A} = \vec{x}_0 + \vec{y}_0 - \vec{z}_0$.

3.10. Записать выражение для плоской линейно поляризованной волны, движущейся под углами θ=90°, φ=45°, если вектор $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости XOY.

3.11. Определить углы Брюстера для границы сред с параметрами $\varepsilon_1$=4, $\mu_1$=2; $\varepsilon_2$=1, $\mu_2$=5.

3.12. Определить угол полного внутреннего отражения для границы раздела сред с параметрами, указанными в предыдущей задаче.

3.13. Определить коэффициенты отражения и прохождения плоской волны, падающей из первой среды. Парметры сред указаны в задаче 5.3.11, на границе раздела сред задается уравнение x=0. Плоская волна определяется выражением

$$\dot{\vec{E}} = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{x}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{y}_0\right)\exp\left[-jk\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)\right]$$

3.14. Плоская волна падает на границу раздела сред с $\varepsilon_1$=1, $\varepsilon_2$=4, $\mu_1=\mu_2$=1 из первой среды под углом $\varphi_1$=60°. Вектор $\vec{E}$ составляет с плоскостью падения угол 45°. Определить угол между вектором $\vec{E}_{\text{пр}}$ преломленной волны и плоскостью преломления (плоскость преломления для однородным изотропных сред совпадает с плоскостью падения и образована вектором преломленной волны и нормали к границе раздела).

3.15. Определить перпендикулярную и параллельную плоскости падения компоненты вектора $\vec{E}$ плоской волны

$$\dot{\vec{E}} = E_0\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{x}_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{y}_0\right)\exp\left[-jk\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{x}_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{y}_0\right)\right],$$

падающей на границу раздела, задаваемую вектором нормали

$$\vec{n}_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{x}_0 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{z}_0.$$

3.16. Плоская волна с частотой 6 ГГц падает по направлению нормали на слой диэлектрика с параметрами ε=4, μ=1, σ=0, толщиной d=3 см, размещенный в свободном пространстве. Определить коэффициенты отражения и прохождения волны.

**Занятия 7,8 (4 часа)**
**Тема:**
**ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИЗЛУЧАТЕЛИ**

## 1. Общие сведения

Под элементарным излучателем понимается излучатель, размеры которого малы по сравнению с длиной волны, и амплитуда стороннего тока на котором постоянна во всех точках. Различают элементарные электрический, магнитный излучатели по виду заданного линейного тока и излучатель Гюйгенса — излучающую площадку с поперечными электрическим и магнитными токами.

Поля, создаваемые элементарными излучателями в свободном пространстве находятся как решения неоднородного волнового уравнения для векторного пространства. При размещении элементарных электрического и магнитного излучателей в центре системы координат вдоль оси Z компоненты излучаемых полей имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_\theta &= \frac{jI\ell}{4\pi\omega\varepsilon_0}\frac{\exp(-jkr)}{r}\left(k^2-\frac{jk}{r}-\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta,\\
\dot{E}_r &= \frac{jI\ell}{2\pi\omega\varepsilon_0}\frac{\exp(-jkr)}{r}\left(\frac{jk}{r}-\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta,\\
\dot{H}_\varphi &= \frac{j\ell}{4\pi}\frac{\exp(-jkr)}{r}\left(jk-\frac{1}{r}\right)\sin\theta.
\end{aligned}\right\}\ \text{Поле электрического излучателя}$$

остальные компоненты отсутствуют

Здесь $I$ — амплитуда стороннего тока на излучателе;

$\ell$ — длина излучателя.

Поле магнитного излучателя можно получить применяя принцип перестановочной двойственности уравнений электродинамики, который сводится к взаимным заменам величин: $E \Leftrightarrow H$, $\mu \Leftrightarrow -\varepsilon$, $\delta_э \Leftrightarrow -\delta_м$, $A_э \Leftrightarrow -A_м$, $I_э \Leftrightarrow -I_м$, $\rho_э \Leftrightarrow \rho_м$.

Для элементарных излучателей вводятся понятия зон излучения, что обычно позволяет упростить выражение для их полей:

| Элементарный электрический излучатель | Элементарный магнитный излучатель |
|---|---|
| зона ближнего поля ($r \ll \lambda$) | |
| $\dot{E}_\theta = -\dfrac{jI_э\ell}{4\pi\omega\varepsilon_0 r^3}\sin\theta$ | $\dot{H}_\theta = -\dfrac{jI_м\ell}{4\pi\omega\mu_0 r^3}\sin\theta$ |

$$\dot{E}_r = -\frac{jI_э\ell}{2\pi\omega\varepsilon_0 r^3}\cos\theta \qquad \dot{H}_r = -\frac{jI_м\ell}{2\pi\omega\mu_0 r^3}\cos\theta$$

$$\dot{H}_\varphi = -\frac{I_э\ell}{4\pi r^2}\sin\theta \qquad \dot{E}_\varphi = -\frac{I_м\ell}{4\pi r^2}\sin\theta$$

Промежуточная зона r≈λ

Поля описываются полными соотношениями

Волновая (дальняя ) зона (r>>λ)

$$\dot{E}_\theta = \frac{jI_э\ell kW}{4\pi}\frac{\exp(-jkr)}{r}\sin\theta \qquad \dot{H}_\theta = -\frac{jI_м\ell k}{4\pi W}\frac{\exp(-jkr)}{r}\sin\theta$$

$$\dot{H}_\varphi = \frac{jI_э\ell k}{4\pi}\frac{\exp(-jkr)}{r}\sin\theta \qquad \dot{E}_\varphi = -\frac{jI_м\ell kW}{4\pi}\frac{\exp(-jkr)}{r}\sin\theta$$

В ближней зоне поле излучателей имеет квазистатический характер, то есть в каждый фиксированный момент времени структура поля напоминает структура поля электрического и магнитного диполей.

В волновой зоне поле имеет характер бегущей сферической волны.

Поле элементарного излучателя Гюйгенса, размещенного в центре координат так, что направления $\vec{\delta}_{ý}^{ñò}$ и $\vec{\delta}_{ì}^{ñò}$ коллинеарны направлениям *x* и *y* соответственно, в волновой зоне имеет вид

$$\dot{E}_\varphi = \frac{j\dot{\delta}\Delta SkW}{4\pi}\frac{exp(-jkr)}{r}sin(1+cos\theta),$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{j\dot{\delta}\Delta SkW}{4\pi}\frac{exp(-jkr)}{r}cos(1+cos\theta),$$

$$\dot{H} = \frac{j\dot{\delta}\Delta Sk}{4\pi}\frac{exp(-jkr)}{r}cos(1+cos\theta),$$

$$\dot{H} = \frac{j\dot{\delta}\Delta Sk}{4\pi}\frac{exp(-jkr)}{r}sin\,\varphi(1+cos\theta).$$

Здесь $\delta$ — амплитуда плотности объемного электрического и магнитного токов;

$\Delta S$ — площадь излучателя.

Для количественной оценки свойств излучателей вводится несколько величин:

1.1. Диаграммой направленности излучателя называется графическое изображение зависимости амплитуды излучаемого поля от угловых координат, определенной при постоянном расстоянии до излучателя

1.2. Нормированная к единице диаграмма направленности.

1.3. Коэффициент направленного действия, равный отношению плотности мощности, излучаемой в данном направлении к усредненной по всем направлениям плотности мощности излучателя.

1.4. Сопротивление излучения, равное отношению удвоенной излучаемой мощности к квадрату амплитуды тока на излучателе. Все реальные, используемые в технике излучатели — антенны, можно представить в виде совокупности элементарных излучателей, если известно распределение тока на антеннах.

## 2. Примеры решений

2.1. Определить напряженность магнитного поля прямолинейного провода длиной 0,2 м с током амплитудой 2 А и частотой 1 КГц в точке, расположенной в плоскости, проходящей через середину провода перпендикулярно его оси, удаленной на расстояние 5 м от провода, если провод находится в свободном пространстве.

Решение. Определим длину волны электромагнитного колебания, создаваемого в свободном пространстве током в проводе.

$\lambda = \dfrac{C}{f}$, здесь C — скорость электромагнитных волн в свободном пространстве

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^5} = 3 \cdot 10^5\,[\,м\,]$$

Если обозначить через $\ell$ - длину провода, а через r — расстояние от провода до точки наблюдения, то очевидно,

$$r, l << \lambda.$$

Поэтому провод можно считать элементарным электрическим излучателем, а точка наблюдения находится в его ближней зоне. Из условия следует θ=90°. Получаем

$$H_\varphi = \frac{I_{ý}\ell}{4\pi r^2}\sin\theta = \frac{0,2 \cdot 2}{4 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 5} = 0,00127[\frac{A}{ì}].$$

2.2. Показать, что поле элементарного электрического излучателя в ближней зоне удовлетворяет уравнениям Максвелла (для примера взять первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме для комплексных амплитуд).

Решение. В свободном пространстве указанное уравнение Максвелла приобретает вид

$$rot\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_0\dot{\vec{E}}$$

Поскольку поле излучателя задано в сферических координатах, то применим к напряженности магнитного поля элементарного излучателя в ближней зоне операцию ротора в сферических координатах

$$rot\dot{\vec{H}} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dot{H}_\varphi)\vec{r}_0 - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{H}_\varphi\right)\right]\vec{\theta}_0 =$$

$$= \frac{I_э\ell}{2\pi r^3}\cos\theta\vec{r}_0 + \frac{I_э\ell}{4\pi r^3}\sin\theta\vec{\theta}_0.$$

Правая часть уравнения Максвелла в данной задаче принимает следующий вид после подстановки поля излучателя

$$j\omega\varepsilon_0(\dot{\vec{E}}) = j\omega\varepsilon_0(-j\frac{I_э\ell}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\cos\theta\vec{r}_0 - j\frac{I_э\ell}{4\pi\omega\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\vec{\theta}_0).=$$

$$\frac{I_э\ell}{2\pi r^3}\cos\theta\vec{r}_0 + \frac{I_э\ell}{4\pi r^3}\sin\theta\vec{\theta}_0$$

очевидно, полученное выражение, тождественно предыдущему.

2.3. Получить выражение, описывающее напряженность электрического поля, создаваемого в пространстве системой из двух идентичных элементарных излучателей, расположенных на одной оси на расстоянии d друг от друга. При выводе полагать, что точка наблюдения удалена на расстояние r>>λ; r>>d.

Решение. Для решения задачи введем сферическую систему координат, показанную на рисунке 3.

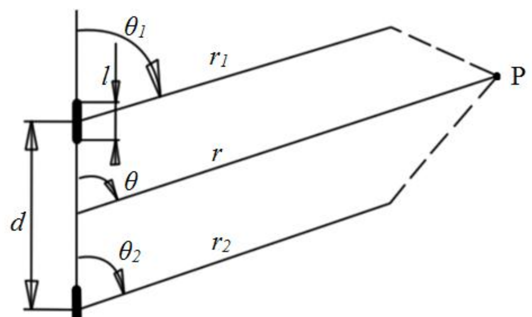



Рис. 3. Система координат задачи 2.3

Из геометрического построения, сделанного на рис. 2.3, при использовании теоремы косинусов следует

$$r_1 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - rd\cos\theta} = r\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \frac{d}{r}\cos\theta},$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - rd\cos(\pi - \theta)} = r\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \frac{d}{r}\cos(\pi - \theta)}.$$

В математике известно биноминальное разложение

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots,$$

пользуясь которым можно вычислить значения $r_1$ и $r_2$, например

$$r_1 \approx r\left\{1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \frac{d}{r}\cos\theta\right] - \frac{1}{8}\left[\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \frac{d}{r}\cos\theta\right]^2 + \ldots\right\}$$

Учитывая условие r>>d можно пренебречь высокими степенями d/r, тогда $r_1 \approx r\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$, аналогично $r_2 \approx r\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$.

Из этого же условия r>>d следует $\left|\theta_{1,2}^0 - \theta^0\right| < \frac{d}{2r} \cdot \frac{180°}{\pi}$, поэтому $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta_3$.

Суммируем компоненты векторов напряженности электрического поля, создаваемые излучателями в точке наблюдения

$$\dot{E}_\theta = \dot{E}_{\theta 1} + \dot{E}_{\theta 2} = j\frac{I_{\acute{y}}\ell_k W}{4\pi}\frac{\exp(-jkr_1)}{r_1}\sin\theta_1 + j\frac{I_{\acute{y}}\ell_k W}{4\pi}\frac{\exp(-jkr_2)}{r_2}\sin\theta_2,$$

учитывая, полученные ранее соотношения, имеем

$$\dot{E}_\theta = j\frac{I_{\acute{y}}\ell_k W}{4\pi}\sin\theta\frac{\exp(-jkr)}{r}\left[\exp\left(j\frac{kd}{2}\cos\theta\right) + \exp\left(-\frac{jkd}{2}\cos\theta\right)\right].$$

Вводя гиперболические функции мнимого аргумента и учитывая их свойства

$$\frac{\exp(j\alpha) + \exp(j\alpha)}{2} = ch(j\alpha) = \cos\alpha$$

получаем окончательно $\dot{E}_\theta = j\frac{I_э \ell_k W}{2\pi}\sin\theta\frac{\exp(-jkr)}{r}\cos\left(\frac{k\alpha}{2}\cos\theta\right)$.

## 3. Задачи и упражнения

3.1. Получить выражение для векторного потенциала (в сферической системе координат) элементарного электрического излучателя.

3.2. Пользуясь результатом предыдущей задачи определить компоненты напряженностей поля элементарного магнитного излучателя.

3.3. Определить мощность, излучаемую элементарным электрическим излучателем в дальней зоне.

3.4. Пользуясь результатом предыдущей задачи определить выражение для коэффициента направленного действия элементарного электрического излучателя.

3.5. Определить напряженность электрического поля в точке, расположенной посередине между двумя параллельными проводами, если центры проводов расположены на одной прямой, перпендикулярной к их осям. Другие необходимые для решения задачи данные равны: $f$=10 КГц; $\ell_1$ = 5 м; $I_1$=3А; $I_2$=10А; $d$=100 м. Фазы токов в проводах сдвинуты на 180°.

3.6. Изобразить качественно зависимости модулей волнового сопротивления пространства от расстояний, выраженных в длинах волн, до элементарных электрического и магнитного излучателей.

3.7. Получить выражение для напряженности электрического поля двух идентичных элементарных излучателей, расположенных параллельно друг другу на расстоянии $d$ друг от друга, если $r>>d>>\ell$ ; $r>>\lambda$.

3.8. Решить задачу 6.3.7. для n - идентичных элементарных излучателей, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, если центры излучателей находятся на одной линии ($r>>nd$).

3.9. Получить выражение для напряженности электрического поля, создаваемого на расстоянии $r$ прямолинейным электрическим током амплитудой $I_0$ и частотой 3 ГГц, если длина отрезка по которому протекает ток равна 1 м, а фаза тока во всех точках этого отрезка одинакова. Полагать $r>>1$ м.