Практическое занятие №15

Приложение вычетов к вычислению преобразования Лапласа

Теория вычетов часто используется в курсе дифференциальных уравнений при решении задачи Коши с помощью преобразования Лапласа (опереторный метод).

<u>Пример</u>. Задано изображение $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p-2)}$. Найти оригинал $f(t)$, используя теорию вычетов.

Решение. Функция $F(p)$ имеет простые полюсы в точках $p_1=1$, $p_2=2$.

По формуле можно найти оригинал

$f(t)=res_{p=1}(F(p)e^{pt})+res_{p=2}(F(p)e^{pt})$.

Вычисляем вычеты в указанных точках и получаем ответ

$$f(t)=-e^t+2e^{2t}.$$

<u>Пример</u>. Задано изображение $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p-2)}$.

Найти оригинал $f(t)$, используя теорию вычетов.

Решение. Функция $F(p)$ имеет простые полюсы в точках $p_1=3i$, $p_2=-3i$, $p_3=2$. По формуле

$$f(t)=res_{p=3i}(F(p)e^{pt})+res_{p=-3i}(F(p)e^{pt})+res_{p=2}(F(p)e^{pt}),$$

так как $p_1=3i$ и $p_2=-3i$ комплексно сопряженные, то

$$f(t)=2Re\,res_{p=3i}(F(p)e^{pt})+res_{p=2}(F(p)e^{pt}),$$

но $p_1=3i$ и $p_3=2$ – простые, поэтому применим формулу (6.8), обозначив

$A(p)=p^2$, $B(p)=(p^2+9)(p-2)=p^3-2p^2+9p-18$,

$B'(p)=3p^2-4p+9$.

Получим

$$f(t) = 2Re\frac{(3i)^2 e^{3ti}}{3(3i)^2-4(3i)+9} + \frac{4e^{2t}}{3\cdot 4-4\cdot 2+9} = 2Re\frac{3e^{3ti}}{6+4i} + \frac{4e^{2t}}{13} =$$

$$= Re\left[\frac{3}{13}(3-2i)(\cos 3t + i\sin 3t)\right] + \frac{4}{13}e^{2t} =$$

$$= \frac{3}{13}Re[(3\cos 3t + 2\sin 3t) + i(3\sin 3t - 2\cos 3t)] + \frac{4}{13}e^{2t} =$$

$$= \frac{3}{13}(3\cos 3t + 2\sin 3t) + \frac{4}{13}e^{2t}.$$

Таким образом, получен оригинал $f(t) = \frac{3}{13}(3\cos 3t + 2\sin 3t) + \frac{4}{13}e^{2t}$.

Решение задачи Коши с помощью преобразования Лапласа и теории вычетов

Пример. Решить операторным методом (с помощью преобразования Лапласа) задачу Коши $x''-3x'-4x = 4t-5$,

$x(0) = -1$, $x'(0) = 2$.

Указание: В процессе решения восстановить оригинал, используя теорию вычетов.

Решение.

Используем при решении задачи Коши операторный метод (преобразование Лапласа). В данном примере будем обозначать изображение $X(p)$ (вместо $F(p)$), что не влияет на метод решения. Оригинал обозначим $x(t)$.

$$x(t) \doteqdot X(p),$$

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x_0 = pX(p) + 1,$$

$$x''(t) \doteqdot p^2 X(p) - px_0 - x'(0) = p^2 X(p) + p - 2$$

$$4t-5 \doteqdot \frac{4}{p^2}-\frac{5}{p}$$

Запишем операторное уравнение:

$$p^2X(p)+p-2-3pX(p)-3-4X(p)=\frac{4}{p^2}-\frac{5}{p} \Rightarrow$$

$$(p^2-3p-4)X(p)=\frac{4}{p^2}-\frac{5}{p}-p+5 \Rightarrow$$

$$(p-4)(p+1)X(p)=\frac{4-5p-p^3+5p^2}{p^2} \Rightarrow$$

$X(p)=\dfrac{-p^3+5p^2-5p+4}{(p+1)(p-4)p^2}$ - полученное изображение.

Изображение $X(p)$ имеет три особые точки $p_1=0, p_2=4, p_3=-1.$

Вычисляя пределы данной функции в каждой указанной точке, получаем

$p_1=0$ - полюс второго порядка,

$p_2=4$ – устранимая особая точка

$p_3=-1$- полюс первого порядка (простой полюс).

Находим оригинал

$x(t)=2-t-3e^{-t}$. Это решение задачи Коши.

Вычисление интегралов Эйлера

Определение. *Гамма-функцией* называется $\Gamma(p)$, определяемая равенством

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx,$$

где p – любое комплексное число, $Re\, p > 0$.

Основные свойства $\Gamma(p)$:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ – формула приведения
3. $\Gamma(n+1) = n!$
4. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ – формула дополнения, $0 < p < 1$
5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Определение. *Бета-функция* определяется формулой *(для $p > 0$, $q > 0$)*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Свойства $B(p,q)$:

1. $B(p,q) = B(q,p)$
2. $B(p,q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$
3. $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Пример.

Вычислить $I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx$, $a > 0$.

Решение. Сделаем замену $\frac{x^2}{a^2} = t$, т.е. $x = a\sqrt{t}$, $dx = \frac{a\,dt}{2\sqrt{t}}$, пределы интегрирования изменятся $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = a \Rightarrow t = 1$.

Подставляя в интеграл, получим

$$I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_0^1 \frac{a^2 t\sqrt{a^2 - a^2 t}}{2\sqrt{t}}a\,dt = \frac{a^4}{2}\int_0^t t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt.$$

Это есть Бета-функция

$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$

Найдем p и q, используя определение, т.е. сопоставим полученное выражение интеграла с определением

$$I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_0^1 \frac{a^2 t\sqrt{a^2 - a^2 t}}{2\sqrt{t}}a\,dt = \frac{a^4}{2}\int_0^t t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt,$$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Получаем

$p - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{3}{2}, q - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{3}{2}.$

Тогда

$$I = \frac{a^4}{2}\int_0^t t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{a^4}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)},$$

Теперь используем свойства Гамма-функции.

Заметим $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma(3) = 2!$.

Тогда получаем

$$I = \frac{a^4}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2}{2!} = \frac{a^4}{2}\frac{1}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

Ответ: $I = \frac{\pi a^4}{16}$.

<u>Пример</u>. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{20} dx$

Решение. Сделаем замену переменной $t = \ln\frac{1}{x} \Rightarrow x = e^{-t}$, $dx = -e^{-t}dt$, пределы интегрирования также изменятся

при $x \to 0^-$ $t \to +\infty$,

при $x = 1$ $t = 0$.

Будем использовать определение $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$.

Заданный интеграл примет вид (используем замену)

$$I = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{20} dx = -\int_\infty^0 t^{20}e^{-t}dt = \Gamma(21).$$

Вычислим $\Gamma(21) = 20!$ (по свойству Г- функции), т.е. $I = 20!$.

Окончательно получаем,

$$I = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{7\cdot 5\cdot 3}{2^4}\sqrt{\pi}\cdot\frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{7\pi}{2^{11}}.$$

Ответ. $I = \frac{7\pi}{2^{11}}$.

Домашнее задание.

Учебно-методическое пособие «Теория функций комплексного переменного», часть 1. Задача №1.19 и 1.20.

Часть 2. Выполнить все задачи этой части (типовой расчет), каждый студент делает свой вариант типового расчета (при решении необходимо писать детальные пояснения в решении задач, указывать используемые теоретические положения). Студент должен уметь правильно отвечать на вопросы преподавателя по решению задач типового расчета.

Пособие размещено на сайте кафедры ВМ-2
http://vm-2.mozello.ru
раздел «Математический анализ. 4 семестр».