2. Классические задачи на определение вероятности

Случайные события. Задачи на классическое определения вероятности. Задача о выборке. Геометрическое определение вероятности. Задача о встрече.

2.1. Классическое определение вероятности(продолжение)

Необходимый теоретический материал из лекции 1.

Число способов, которыми из совокупности n объектов можно выбрать m, различающихся набором объектов или порядком их расположения в наборе, равно числу размещений из n по m:

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)\ldots(n-m+1)}_{m \text{ сомножителей}}. \tag{2.1}$$

Эту формулы можно записать в более запоминающем виде

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2.2}$$

Если порядок выбора элементов не имеет значения, то число способов уменьшается в $m!$ раз. Это значение называется *числом сочетаний* и обозначается C_n^m

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2.3}$$

В соответствии с классическим определением вероятности вероятностью события A называется отношение числа m благоприятствующих ему исходов к общему числу n исходов данного испытания (1.7):

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример 2.1. *В урне 13 белых и 8 чёрных шаров. Из урны вынимают наугад сразу два шара. Найти вероятность того, что:*

(1) *они будут разного цвета;*

(2) *оба будут белыми;*

(3) *хотя бы один из них — белый;*

(4) *оба будут одного цвета.*

(1) ► Здесь n — число способов, которыми можно вынуть одновременно 2 шара из $13 + 8 = 21$, $n = C_{21}^2 = \dfrac{21!}{2! \cdot 19!} = \dfrac{21 \cdot 20}{1 \cdot 2}$. Каждый благоприятный способ есть комбинация способа, которым можно вынуть белый шар из 13 (таких способов 13), и способа, которым можно вынуть чёрный шар из 8 (8 способов). Всего таких комбинаций будет $m = 13 \cdot 8$. Или $m = C_{13}^1 \cdot C_8^1 = 13 \cdot 8$. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{13 \cdot 8}{(21 \cdot 20)/2} = \frac{2 \cdot 13 \cdot 8}{21 \cdot 20} = \frac{208}{420} = \frac{52}{105}. ◄$$

Ответ: $\dfrac{52}{105}$.

(2) ► Здесь $n = C_{21}^2 = 210$ (см. п. 1); m — число способов, которыми можно составить пары из 13 белых шаров,

$$m = C_{13}^2 = \frac{13!}{2! \cdot 11!} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78;$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{78}{210} = \frac{13}{35}. ◄$$

Ответ: $\dfrac{13}{35}$.

(3) ►Если $A = \{$хотя бы один белый$\}$ — искомое событие, то легче найти вероятность противоположного события $\bar{A}$, состоящего в том, что в выборке белых шаров нет: $\bar{A} = \{$оба чёрные$\}$.

$P(\bar{A}) = \dfrac{C_8^2}{C_{21}^2} = \dfrac{8 \cdot 7}{21 \cdot 20} = \dfrac{56}{420} = \dfrac{2}{15}$ (см. п. 2). Тогда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}. ◄$$

Ответ: $\dfrac{13}{15}$.

(4) ►*Первый способ.* Искомое событие A есть сумма двух несовместных событий:

$$A_1 = \{\text{оба белые}\} \text{ и } A_2 = \{\text{оба чёрные}\}. \text{ Тогда}$$

$P(A) = P(A_1) + P(A_2)$. $P(A_1) = \dfrac{13}{35}$ найдено в п. 2; $P(A_2) = \dfrac{2}{15}$ (п. 3); $P(A) = \dfrac{13}{35} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{53}{105}$.

Второй способ. Событие A — противоположное к событию B, состоящему в извлечении двух шаров разного цвета.

$P(B) = \dfrac{52}{105}$ (см. п. 1); $P(A) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{52}{105} = \dfrac{53}{105}$.◄

Ответ: $\dfrac{53}{105}$.

Пример 2.2. *В урне* 13 *белых и* 8 *чёрных шаров. Из урны вынимают сразу три шара. Найти вероятность того, что:*

(1) *все три будут белыми;*

(2) *хотя бы один из них — белый;*

(3) *среди них один белый и два чёрных;*

(4) *все шары одного цвета;*

(5) *среди них имеются как белые, так и чёрные.*

(1)► Всего в урне $13+8 = 21$ шар. Оттуда три шара одновременно можно извлечь

$$n = C_{21}^3 = \frac{21!}{3!\cdot 18!} = \frac{21\cdot 20\cdot 19}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{7980}{6} = 1330 \text{ способами.}$$

Для подсчёта числа благоприятных исходов оставим в урне только 13 белых шаров. Теперь каждый исход — благоприятный, и всего таких исходов $m = C_{13}^3 = \dfrac{13!}{3!\cdot 10!} = \dfrac{13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3} = 286$. Если A — искомое событие, то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{3!} : \frac{21\cdot 20\cdot 19}{3!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{21\cdot 20\cdot 19} = \frac{13\cdot 4\cdot 11}{7\cdot 20\cdot 19} =$$

$$= \frac{13\cdot 11}{7\cdot 5\cdot 19} = \frac{286}{1330} = \frac{143}{665}.◄$$

Ответ: $\dfrac{143}{665}$.

Замечание 2.1. *Аналогично ищется вероятность того, что все три шара — чёрные.* $P\{\text{все чёрные}\} = \dfrac{4}{95}$.

Замечание 2.2. *События* $\{\text{все белые}\}$ *и* $\{\text{все чёрные}\}$ *хоть и несовместны, но не противоположны; сумма их вероятностей равна* $\dfrac{171}{665} \neq 1$. *Кроме них, возможны события, состоящие в выборке разноцветных шаров.*

(2)►Пусть $A = \{\text{хотя бы один белый}\}$ — искомое событие. Здесь легче вычислить $P(\bar{A})$, где событие $\bar{A}$, противоположное к A, состоит в том, что среди вынутых шаров белых нет, то есть все чёрные. В замечании 2.2 найдено $P(\bar{A}) = \dfrac{4}{95}$, откуда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{95} = \frac{91}{95}.\blacktriangleleft$$

Ответ: $\dfrac{91}{95}$.

Замечание 2.3. *Аналогично ищется вероятность того, что хотя бы один из них — чёрный (см. п. 1):*

$$P\{\textit{хотя бы один чёрный}\} = 1 - P\{\textit{все белые}\} = 1 - \frac{143}{665} = \frac{522}{665}.$$

(3) ►Здесь, как и в п. 1, общее число исходов равно $C_{21}^3 = 1330$. Благоприятный исход содержит ровно один белый шар (который можно извлечь 13 способами) и ровно два чёрных шара (которые можно извлечь $C_8^2 = 28$ способами).

Всего благоприятных исходов будет $m = C_{13}^1 \cdot C_8^2 = 13 \cdot 28 = 364$. Если A — искомое событие, то $P(A) = \dfrac{364}{1330} = \dfrac{26}{95}.\blacktriangleleft$

Ответ: $\dfrac{26}{95}$.

Замечание 2.4. *Аналогично ищется вероятность того, что среди них один чёрный и два белых:*

$$P\{\textit{1 чёрный, 2 белых}\} = \frac{C_{13}^2 \cdot C_8^1}{C_{21}^3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 8}{2!} : \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3!} = \frac{312}{665}.$$

(4) ►Искомое событие A есть сумма двух несовместных событий $A_1 = \{\text{все белые}\}$ и $A_2 = \{\text{все чёрные}\}$, вероятности которых найдены ранее.

$$P(A) = \frac{143}{665} + \frac{4}{95} = \frac{171}{665} = \frac{9}{35}. \blacktriangleleft$$

Ответ: $\dfrac{9}{35}$.

(5) ►*Первый способ.* Искомое событие A есть сумма несовместных событий

$$A_1 = \{\text{1 белый, 2 чёрных}\} \quad \text{и} \quad A_2 = \{\text{2 белых, 1 чёрный}\};$$

$P(A_1) = \dfrac{26}{95}$, $P(A_2) = \dfrac{312}{665}$ (см. п. 3 и замечание 11.5);

$$P(A) = \frac{26}{95} + \frac{312}{665} = \frac{494}{665} = \frac{26}{35}.$$

Второй способ. Если Вам проще найти вероятность того, что все шары одного цвета (равную $\dfrac{9}{35}$, см. п. 4), то противоположное событие A будет искомым, $P(A) = 1 - \dfrac{9}{35} = \dfrac{26}{35}$.◄

Ответ: $\dfrac{26}{35}$.

Рассмотрим теперь решения блока из пяти однотипных задач на выборку из несколько однотипных элементов, но с разными свойствами. В реальных задачах вместо шаров могут быть карандаши, игрушки и другие предметы.

Пример 2.3. *В урне 6 белых и 4 чёрных шара. Из урны наугад сразу вынимают пять шаров. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых и 3 чёрный шара.*

►Найдём число всевозможных исходов данного испытания: $n = C_{10}^5$. Найдём теперь число (m) исходов благоприятствующих искомому событию A. Два белых шара можно вытащить C_6^2 способами, а для каждого из них чёрный шар можно вытащить C_4^3 способами. Следовательно, $m = C_6^2 \cdot C_4^3$.

Получаем,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^3}{C_{10}^5} = \frac{6! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 5!}{2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 10!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} =$$

$$= \frac{5}{21} \approx 0{,}238. ◄$$

Пример 2.4. *На полке находятся 4 пакета с апельсиновым соком, 4 с яблочным и 4 с персиковым. Случайным образом берут шесть пакетов. Найти вероятность того, что среди взятых соков хотя бы один персиковый.*

► Число исходов данного испытания $n = C_{12}^6 = \dfrac{12!}{6! \cdot 6!} = 924$,

Число исходов в которых взяли хотябы один пакет с персиковым соком равно, $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$, где m_i — взяли i пакетов с персиковым соком и $4 - i$ с апельсиновым или яблочным, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$m = C_8^5 \cdot C_4^1 + C_8^4 \cdot C_4^2 + C_8^3 \cdot C_4^3 + C_8^2 \cdot C_4^4 = 224 + 420 + 224 + 28 = 896,$$
$$P(A) = \frac{C_8^5 \cdot 4 + C_8^4 \cdot C_4^2 + C_8^3 \cdot C_4^3 + C_8^2 \cdot 1}{C_{12}^6} = \frac{896}{924} = \frac{32}{33} \approx 0{,}9697.$$

Рассмотрим теперь более простой способ. Нетрудно заметить, что противоположным к искомому событию A будет событие $\bar{A}$, состоящее в том, что не взяли ни одного пакета с персиковым соком.

$$m_0 = C_8^6 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{m_0}{m} = 1 - \frac{C_8^6}{C_{12}^6} = 1 - \frac{1}{33} = \frac{32}{33}.$$

Естественно, получили тот же ответ.◀

Ответ: $P(A) = \dfrac{32}{33} \approx 0{,}9697$.

Пример 2.5. *В урне 4 белых, 3 чёрных, 5 красных и 3 синих шаров. Из урны наугад сразу вынимают пять шаров. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых, 1 чёрный и 2 красных шара.*

▶ $n = C_{15}^5, \quad m = C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^2.$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^2}{C_{15}^5} = \frac{60}{1001} \approx 0{,}0599.$$

◀

Пример 2.6. *В урне 4 белых, 3 чёрных, 2 красных и 3 синих шаров. Из урны наугад сразу вынимают пять шаров. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых, 1 чёрный и хотя бы один красный шар.*

▶ $n = C_{12}^5, \quad m_1 = C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 C_3^1, \ m_2 = C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 \ \Rightarrow \ m = m_1 + m_2.$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 C_3^1 + C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2}{C_{12}^5} = \frac{7}{44} \approx 0{,}1591.$$

◀

Пример 2.7. *В урне 4 белых, 3 чёрных, 4 красных и 4 синий шаров. Из урны наугад сразу вынимают семь шаров. Найти вероятность того, что вытащили 2 белых, 1 чёрный и хотя бы один красный шар.*

▶ $n = C_{15}^7 = \dfrac{15!}{7! \cdot 8!} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 15 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3 = 6435,$

$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot \left(C_4^1 C_4^3 + C_4^2 C_4^2 + C_4^3 C_4^1 + C_4^4\right),$

где m_i — вытащили i красных и $4 - i$ – синих шаров, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$m = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 3 \cdot (4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 1) = 6 \cdot 3 \cdot (16 + 36 + 16 + 1) = 18 \cdot 69 = 1242.$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1242}{6435} = \frac{138}{715} \approx 0{,}193.$$ ◀

ПРИМЕР 2.8. *На полке находятся 4 пакета с апельсиновым соком, 4 с яблочным и 4 с персиковым. Случайным образом берут шесть пакетов. Найти вероятность того, что среди взятых соков хотя бы один персиковый.*

► Число исходов данного испытания $n = C_{12}^6 = \dfrac{12!}{6! \cdot 6!} = 924$,

Число исходов в которых взяли хотябы один пакет с персиковым соком равно, $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$, где m_i — взяли i пакетов с персиковым соком и $4 - i$ с апельсиновым или яблочным, $i = 1, 2, 3, 4$.

$m = C_8^5 \cdot C_4^1 + C_8^4 \cdot C_4^2 + C_8^3 \cdot C_4^3 + C_8^2 \cdot C_4^4 = 224 + 420 + 224 + 28 = 896$,

$$P(A) = \frac{C_8^5 \cdot 4 + C_8^4 \cdot C_4^2 + C_8^3 \cdot C_4^3 + C_8^2 \cdot 1}{C_{12}^6} = \frac{896}{924} = \frac{32}{33} \approx 0{,}9697.$$

Рассмотрим теперь более простой способ. Нетрудно заметить, что противоположным к искомому событию A будет событие $\bar{A}$, состоящее в том, что не взяли ни одного пакета с персиковым соком.

$$m_0 = C_8^6 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{m_0}{m} = 1 - \frac{C_8^6}{C_{12}^6} = 1 - \frac{1}{33} = \frac{32}{33}.$$

Естественно, получили тот же ответ.◄

Ответ: $P(A) = \dfrac{32}{33} \approx 0{,}9697$.

2.2. Задачи на геометрическое определение вероятности

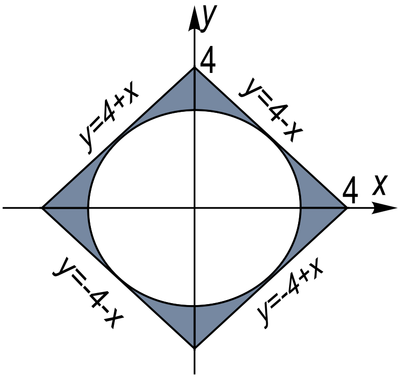

Рис. 3. *К примеру 2.9*

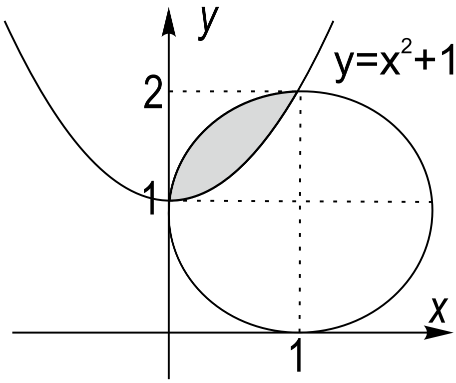

Рис. 4. *К примеру 2.10*

Пример 2.9. *На комплексную плоскость в область $|Imz| + |Rez| \leqslant 4$ наудачу брошена точка. Найдите вероятность, что она попадёт внутрь области области $|z| \geqslant 2\sqrt{2}$.*

►Перейдём к действительным переменным. $z = x + i \cdot y$, $Rez = x$, $Imz = y$. Область Ω на которую брошена точка в действительных переменных имеет вид: $|x| + |y| \leqslant 4$.

Раскрываем модули

$$x = \begin{cases} \ \ x, \text{при } x \geqslant 0 \ \ \text{в I и IV четверти,} \\ -x, \ x < 0 \ \ \text{в II и III четверти.} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \ \ y, \ \text{при } y \geqslant 0 \ \ \text{в I и II четверти,} \\ -y, \ \ \text{при } y < 0 \ \ \text{в III и IV четверти.} \end{cases}$$

Получаем систему четырёх неравенств, соответствующих каждой четверти:

$$\begin{cases} y \leqslant 4 - x, \\ y \leqslant 4 + x, \\ y \geqslant -4 - x, \\ y \geqslant -4 + x. \end{cases}$$

На рис. 3, изображены границы области Ω. Сама область является квадратом со сторонами равными $\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$. Площадь её равны $S_\Omega = 32$.

Область в которую должна попасть точка, представляет внешность круга радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в начале координат. На рис. 3, данная область закрашена.

$P(A) = \dfrac{32 - \pi(2\sqrt{2})^2}{32} = 1 - \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}2146.$◀

Ответ: $P(A) = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}2146.$

Пример 2.10. *На комплексную плоскость в область $|z - i - 1| \leqslant 1$ наудачу брошена точка. Найдите вероятность, что она попадёт внутрь области $Imz - (Rez)^2 \geqslant 1$.*

▶Перейдём к действительным переменным.
$z = x + i \cdot y$, $Rez = x$, $Imz = y$. Область Ω на которую брошена точка в действительных переменных представляет собой окружность радиуса 1 с центром в точке $M(1, 1)$.
$|(x-1) + i(y-1)| \leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \leqslant 1 \Rightarrow$
$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1.$

Площадь области Ω равна $S_\Omega = \pi$.

Область G, в которую должна попасть точка, в действительных переменных задана уравнением: $y \geqslant 1 + x^2$. Это внутренняя часть параболы $y = 1 + x^2$. На рис. 3, данная область закрашена. Найдём её площадь. Для этого от площади четверти круга вычтем площадь криволинейной трапеции которую вырезает парабола от четверти круга.

$S_G = \dfrac{\pi}{4} - \int_0^1 x^2 dx = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{3}.$

$P(A) = \dfrac{S_G}{S_\Omega} = \dfrac{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{3}}{\pi} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3 \cdot \pi} \approx 0{,}452.$◀

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3 \cdot \pi} \approx 0{,}1439.$

Пример 2.11. *Случайным образом выбраны два положительных числа не превышающих значение 5. Найти вероятность того,что сумма этих чисел будет больше 5, а сумма их квадратов меньше 25?*

▶Используем геометрическое определение вероятности. Так как числа x и y берутся из интервала $(0, 5)$, можно считать, что случайным образом выбирается точка внутри квадрата $0 < x, y < 5$. При этом $x + y > 5$ и $x^2 + y^2 < 25$. Изобразим области на рис. 5.

Площадь квадрата в котором выбирается точка равна $S_\Omega = 25$.

Область G, в которую должна попасть точка, задана системой неравенств: $\begin{cases} y > 5 - x, \\ y < \sqrt{25 - x^2}, \\ x \in [0, 5]. \end{cases}$ На рис. 5, она выделена.

$S_G = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{4} - 0{,}5 \cdot 5^2 = \dfrac{25(\pi - 2)}{4}$.

$P(A) = \dfrac{S_G}{\Omega} = \dfrac{25(\pi - 2)}{4}/25 = \dfrac{\pi - 2}{4} \approx 0{,}285.$◄

Ответ: $P(A) = \dfrac{\pi - 2}{4} \approx 0{,}285$.

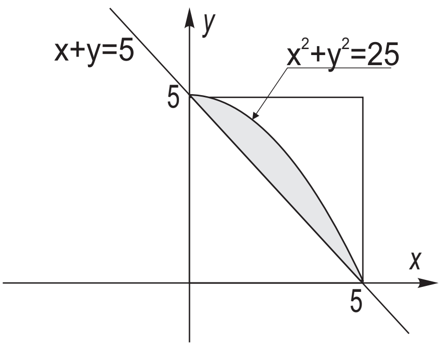

Рис. 5. *К примеру 2.11*

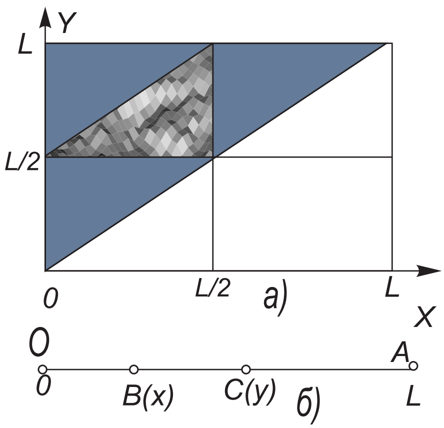

Рис. 6. *К примеру 2.12*

Пример 2.12. *Одномерный стержень длины L случайным образом распилили на три части. Найдите вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник.*

►На отрезке OA длины L, $|OA| = L$, рис. 6б, введём две точки разлома стержня: $B(x)$ и $C(y)$. Пусть точка C находится правее точки, т.е. $x < y$. Тогда длину полученных отрезков будут равны: $x, y - x$ и $L - y$.

Из полученных отрезков можно составить треугольник, когда суммы двух отрезков больше длины третьего отрезка. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x + (L - y) > (y - x), \\ x + (y - x) > (L - y), \\ (y - x) + (L - y) > x, \\ y > x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < x + L/2, \\ y > L/2, \\ x < L/2, \\ y > x. \end{cases}$$

Площадь данной области равна $L/8$.

Закрашенная, рис. 6а) область, удовлетворяет всем неравенствам системы. При этом область Ω определяется системой неравенств: $y > x$ и $0 < x < L$ $0 < y < L$. Это треугольник выше диагонали квадрата. Площадь его равна $L/2$.

$P = \dfrac{L/8}{L/2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25.$◄

Ответ: $P = 0{,}25$.

Задания для самостоятельной работы

2.1. В урне 10 белых и 15 чёрных шаров. Из урны вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все они будут чёрными.

2.2. Из колоды в 36 карт наудачу выбирают три карты. Какова вероятность того, что среди них окажется две дамы?

2.3. В конверте среди 80 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 20 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

2.4. Полная колода карт (52 листа) делится пополам. Найти вероятность того, что число чёрных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым.

2.5. Десять книг на одной полке расставлены наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определённые книги окажутся поставленными рядом.

2.6. Четыре пассажира случайным образом рассаживаются по шести вагонам. Определить вероятность того, что в первых четырёх вагонах окажется по одному пассажиру.

2.7. В лифте имеются 5 пассажиров, которые случайным образом сходят на семи этажах. Определить вероятность того, что на первых пяти этажах сойдет ровно по одному пассажиру.

2.8. Из девяти лилий, шести пионов и десяти георгинов случайным образом выбирают для букета девять цветков. Какова вероятность того, что в букете будет: три лилии и три георгина.

2.9. Из три лилий, шести пионов и десяти георгинов случайным образом выбирают для букета девять цветков. Какова вероятность того, что в букете будет: пять георгин и хотя бы одна лилия.

2.10. Из колоды 36 карт случайным образом выбирают восемь. Найти вероятность того, что среди них: три пики, две черви и одна бубны.

2.11. В прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат, вписан круговой конус. Найти вероятность того, что выбранная наудачу внутри параллелепипеда точка окажется внутри конуса.

2.12. Задуманы три положительные числа a, b и c, причём значения a и b не превышают c. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $\dfrac{a^2}{c} \leqslant b \leqslant a$.