Колебания круглой мембраны

Исследуем свободные колебания круглой мембраны радиуса R с жестко закрепленными краями. Тогда удобно использовать цилиндрические координаты.

Волновое уравнение для отклонений точек мембраны $u = u(\rho, \varphi, t)$ запишется как:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right), \\ u|_{\rho = R_0} = 0. \end{cases}$$

Начальные условия — $u|_{t=0} = f(\rho, \varphi); \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(\rho, \varphi).$

Применяя метод разделения переменных, положим $u(\rho, \varphi, t) = v(\rho, \varphi)\, T(t)$

Ищем частные нетривиальные решения удовлетворяющие нулевому граничному (краевому) условию $u(R_0, \varphi, t) = R(R_0) = 0.$

Разделяя переменные $\dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \dfrac{\Delta v(\rho, \varphi)}{v(\rho, \varphi)} = -\lambda^2 = \text{const}\,.$

Получаем характерное для колебательных процессов уравнение

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0 \Rightarrow T(t) = C_1 \cos \lambda a t + C_2 \sin \lambda a t$$

а для координатной части мы получим задачу Штурма-Лиувилля.

Задача Штурма-Лиувилля в круге

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0; \\ u|_{\rho=R} = 0. \end{cases}$$

Так как задача обладает круговой симметрией, то удобно перейти к цилиндрическим координатам.

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] + \lambda u = 0; \\ u|_{\rho=R} = 0. \end{cases}$$

Найдем нетривиальные решения уравнения, $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \neq 0.$

удовлетворяющие нашим однородным граничным условиям.

$$\begin{cases} \Phi(\varphi)\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}\right) + \left(R(\rho)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}\right) + \lambda R(\rho)\Phi(\varphi) = 0; \\ u|_{\rho=R} = 0, \end{cases}$$

или

$$\left[\frac{\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)}{R(\rho)} + \lambda\rho^2\right] + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0,$$

Для угловой части $\Phi''(\varphi)+\gamma\Phi(\varphi)=0$

выполняются условия периодичности $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi); \quad \Phi'(\varphi+2\pi)=\Phi'(\varphi)$

Решение задачи Штурма-Лиувилля —

с.з $\gamma_n=n^2$ и с.ф. $\Phi_n=C_1\sin(n\varphi)+C_2\cos(n\varphi)$.

Для координатной части получаем: $$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+(\lambda\rho^2-n^2)R=0.$$

Сделав замену переменных $x=\rho\sqrt{\lambda}\ (y=R)$,

получим ***уравнение Бесселя*** $$\boxed{x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-n^2)y=0.}$$

или $$\boxed{y''+\frac{y'}{x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0}$$

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение $$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y=0,\quad x\in(a,b).$$ •

Предположим, что функция $k(x)$ обладает следующими свойствами:

1) положительна ($k(x)>0$) в области $a\leqslant x\leqslant b$;

2) равна $k(x)=(x-a)\varphi(x)$ (где $\varphi(x)\neq 0$) и непрерывна на $[a,b]$,

т. е. $k(x)$ имеет нуль первого порядка при $x=a$ (особая точка уравнения).

Лемма. *Пусть y_1 и y_2 — два линейно независимых решения уравнения ($\bullet$). Если $y_1(x)$ — ограниченная функция (имеет конечный предел) в точке $x = a$, то второе решение y_2 при $x \to a$ — неограниченное (если $|y_1(a)| < M$, то $\lim\limits_{x \to a} y_2(x) = \infty$). Причем если $y_1(a) \neq 0$, то $y_2(x)$ имеет в точке $x = a$ логарифмическую особенность, а если $y_1(a)$ имеет нуль ν-го порядка, то $y_2(x)$ имеет полюс ν-го порядка.*

Уравнение Бесселя

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

или

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0,$$

где ν – действительное число.

Так как уравнение имеет особую точку при $x = 0$, то будем искать решение в виде обобщенного степенного ряда (*метод Фробениуса*):

$$y(x) = x^\rho (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho},$$

где ρ — постоянная и где $a_0 \neq 0$.

Продифференцируем $y'(x) = a_0\,\rho\, x^{\rho-1} + a_1(\rho+1)\,x^{\rho} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(\rho+k)\,x^{\rho+k-1};$

$$y''(x) = a_0\,\rho(\rho-1)x^{\rho-2} + a_1\,(\rho+1)\,\rho x^{\rho-1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\rho+k)\,a_k\,(\rho+k-1)\,x^{\rho+k-2}$$

Подставим в уравнение и получим

$$(\rho^2-\nu^2)\,a_0x^{\rho} + ((\rho+1)^2-\nu^2)\,a_1x^{\rho+1} + \\ + \sum_{k=2}^{\infty}\left[((\rho+k)^2-\nu^2)\,a_k + a_{k-2}\right]x^{\rho+k} = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях *x*, и учитывая

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^{\rho+k} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}\,x^{\rho+k}.$$

получим

$$\begin{cases} a_0(\rho^2-\nu^2)=0 \;\Rightarrow (\rho_1=\nu; \quad \rho_2=-\nu); \\ a_1((\rho+1)^2-\nu^2)=0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k((\rho+k)^2-\nu^2)+a_{k-2}=0. \end{cases}$$

Возьмем первый корень:

$$\rho_1 = \nu$$

тогда $a_1 = 0$ и $a_k = -\dfrac{a_{k-2}}{k(2\nu+k)} \quad (k = 2, 3, 4, \ldots).$

$\nu \neq \pm(n+1/2).$

а все нечетные коэффициенты равны нулю $(a_{2k+1} = 0$ при $k = 0, 1, 2, \ldots).$

Для четных коэффициентов получаем

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{a_0}{2^2(\nu+1)1!}; \\ a_4 = \dfrac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)2!}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{2k} = (-1)^k \dfrac{a_0}{2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)\cdot k!} \end{cases}$$

Имеется произвол относительно выбора коэффициента a_0.

Выберем его из условия нормировки $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$.

Тогда подставив коэффициенты

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu} k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)\Gamma(\nu+1)} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

В ряд $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{\rho+k}$, получим частное решение уравнения

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

которое носит название *функции Бесселя 1-го рода ν-го порядка*

Ряд сходится для любого х.

В этом легко убедиться, применяя признак Д'Аламбера

ЛИКБЕЗ

Гамма-функция Эйлера

Гамма-функцией называется интеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt,$$

где z — комплексный аргумент, действительная часть которого $\operatorname{Re} z > 0$.

Свойства гамма-функции:

1) $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$;

2) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. В частности, если $z = n$ — натуральное число,

$\Gamma(n+1) = n!$ $\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n} n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!! = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$;

3) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ (теорема умножения);

Ассимптотика при $x \to \infty$:

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left[1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right], \quad x > 0.$$

Из нее следует Формула Стирлинга.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \gg 1).$$

Используя второй корень $\rho_2 = -\nu$, легко получить другое частное решение

так как основное уравнение не зависит от знака ν простой заменой ν на $-\nu$,

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}.$$

При нецелом ν частные решения $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ уравнения Бесселя будут *линейно независимы*. Они по разному себя ведут в нуле (начинаются с разных степеней x). Если $J_\nu(x)$ имеет в нуле ноль ν-го порядка, то $J_{-\nu}(x)$ — полюс ν-го порядка. Они образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя порядка ν.

При целых значениях ν $(\nu = n)$ определение $J_{-\nu}(x)$ лишено смысла: гамма-функция в знаменателе при отрицательных целочисленных значениях обращается в бесконечность ($\Gamma(-n+k+1)$ при $k \leqslant n-1$) и суммирование начинается с $k = n$:

$$J_{-n}(x) = \lim_{\nu\to n} J_{-\nu}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}.$$

При $k = n + l$ видно, что они линейно зависимы

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l}}{\Gamma(l+1)\Gamma(n+l+1)} = (-1)^n J_n(x).$$

Введем функцию

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

Она является решением, так как линейная комбинация решений J_ν и $J_{-\nu}$.

При $\nu = n$ возникает неопределенность 0/0. По правилу Лопиталя

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} -$$

$$-\frac{1}{\pi}(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)!}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]$$

И в частном случае при $n = 0$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}J_0(x)\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}\right]$$

$N_\nu(x)$ называется *функцией Бесселя второго рода ν-го порядка.*

Функции J_ν и $N_\nu(x)$ линейно независимы и для любого ν (дробного и целого) образуют фундаментальную систему решений уравнения (•) $y(x) = C_1 J_\nu + C_2 N_\nu(x)$; где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Рекурентные формулы

В их справедливости легко убедиться путем прямой проверки (непосредственным дифференцированием рядов для бесселевых функций).

1. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\dfrac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$, или $\dfrac{\nu}{x}J_\nu(x) - J'_\nu(x) = J_{\nu+1}(x)$.
2. $\dfrac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$, или $\dfrac{\nu}{x}J_\nu(x) + J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x)$.

Складывая первую и вторую формулы получим

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x), \quad J'_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\right)$$

Для функций Бесселя второго рода

$$N_{\nu-1}(x) + N_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}N_\nu(x), \quad N_{\nu-1}(x) - N_{\nu+1}(x) = 2N'_\nu(x).$$

Асимптотическое поведение функций Бесселя при $x \to \infty \;\; (x > 0)$

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right),$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right).$$

Докажем в качестве примера первое соотношение:

$$x^{\nu}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right)=x^{\nu}\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}\,\frac{x^{2k}}{2^{2k+\nu}}=$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\,2k\,x^{2k-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)\,2^{2k}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{\Gamma(k)\,\Gamma(k+\nu+1)}\,\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu-1)}=$$

$$=-\sum_{l=k-1=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l}}{\Gamma(l+1)\,\Gamma(l+(\nu+1)+1)}\,\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+(\nu+1)}=\frac{x^{2k}}{2^{2k+\nu}}=-J_{\nu+1}(x).$$

Аналогично, учитывая, что $(\nu+k)\Gamma(\nu+k)=\Gamma(\nu+k+1)$, получим

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}J_{\nu}(x)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\,2\,(\nu+k)\,x^{2\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k}\,k!\,\Gamma(\nu+k+1)}=$$

$$=x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k}}{k!\,\Gamma(\nu-1+k+1)}=x^{\nu}J_{\nu-1}(x).$$

Частный случай: $J_0'(x)=-J_1(x)$.

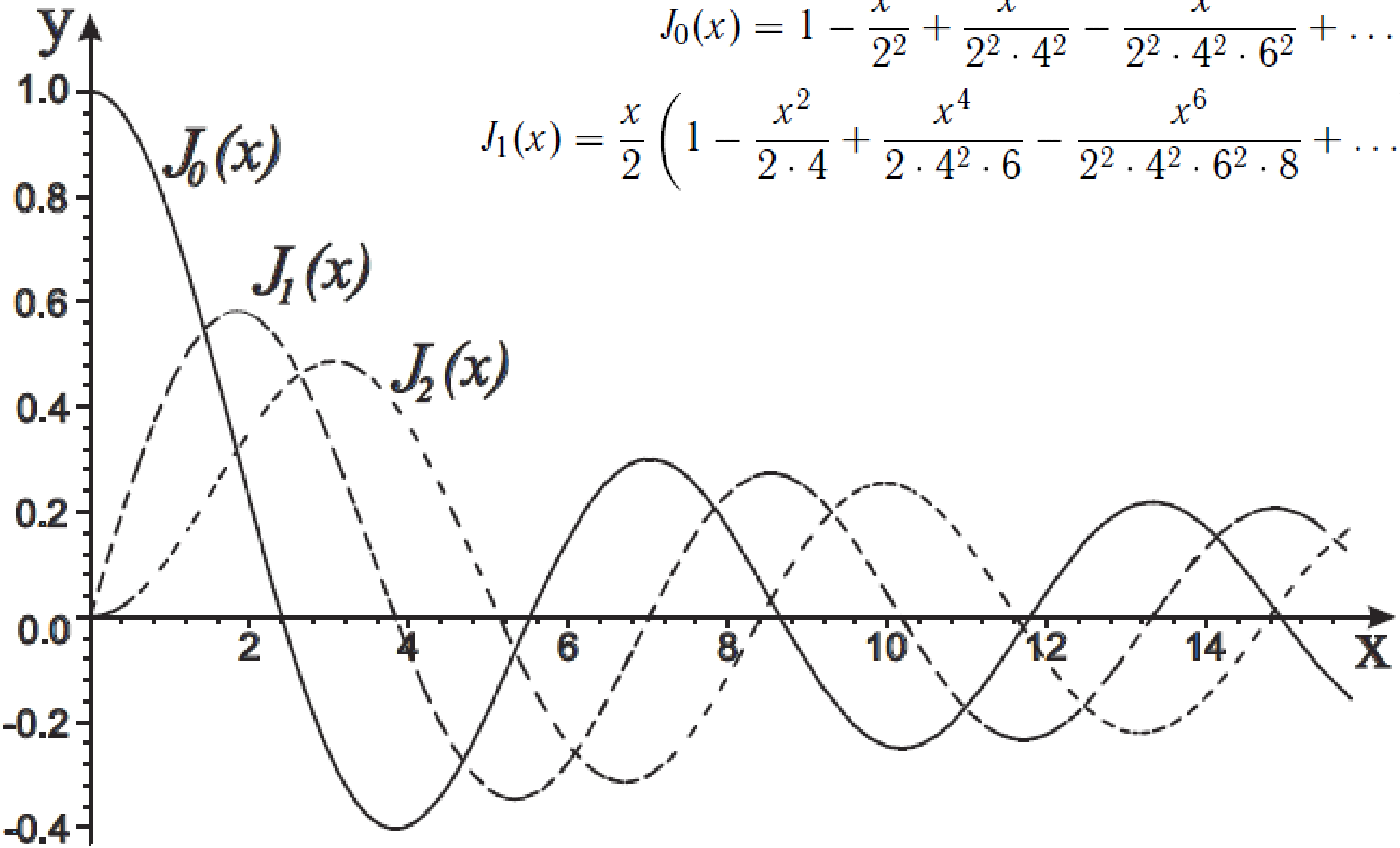
Графики функций $J_0(x)$, $J_1(x)$ и $J_2(x)$

Из формул видно, что

$J_0(x)$ имеет экстремумы в тех точках, где $J_1(x)$ обращается в ноль.

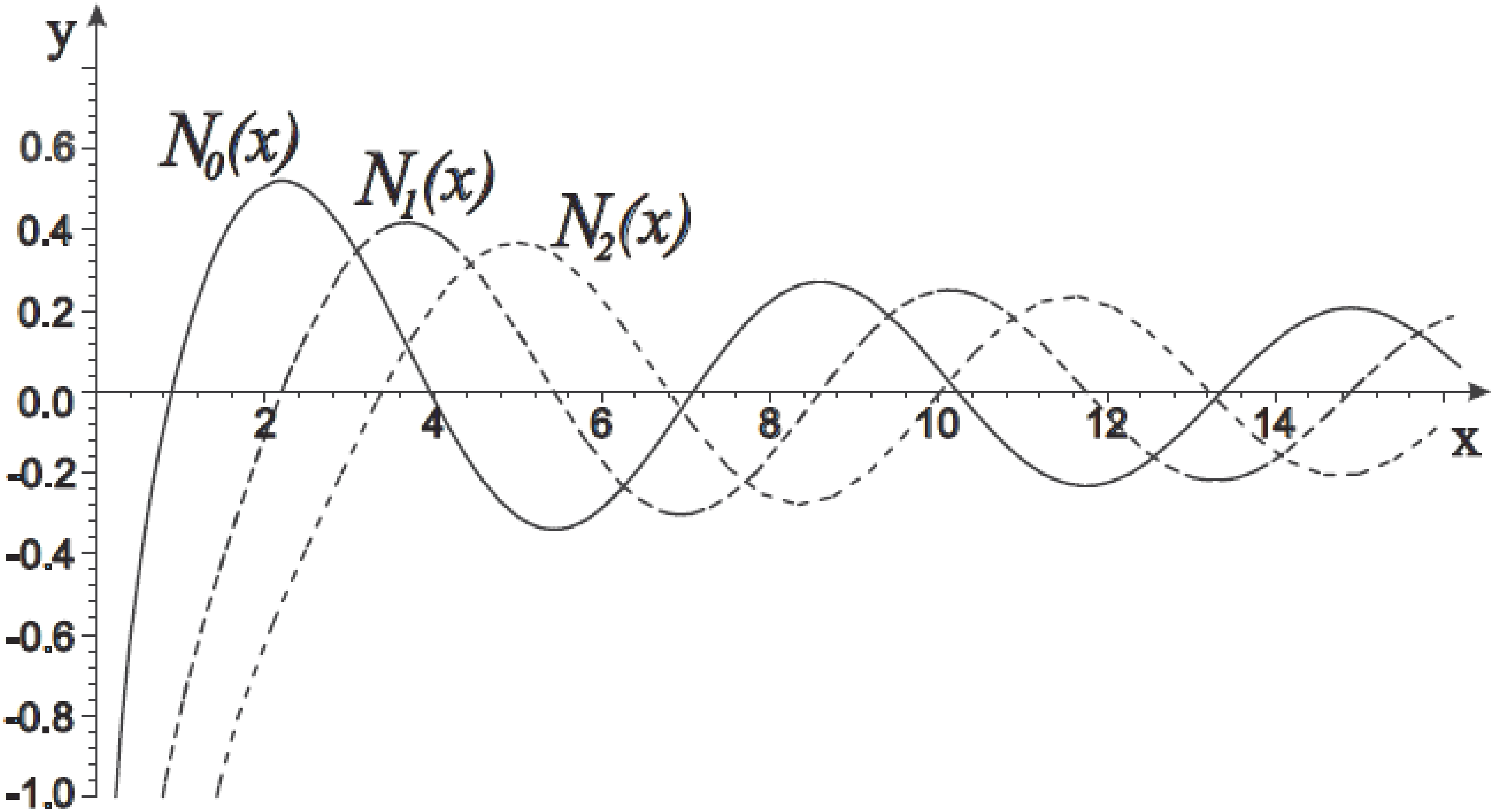
$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \ldots\right)$$



·

Графики функций $N_0(x)$, $N_1(x)$ и $N_2(x)$



Свойства функций Бесселя

Часто встречается уравнение в виде

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - \nu^2)y = 0, \quad k = \text{const} \neq 0.$$

сделаем замену

$t = kx$ получим $t^2\ddot{y} + t\dot{y} + (t^2 - \nu^2)y = 0.$

и решение $y(x) = J_\nu(kx)$

Положительность и вещественность корней функции Бесселя.

Возьмем два разные k (k_1 и k_2) и запишем уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dJ_\nu(k_1x)}{dx}\right) + \left(k_1^2x - \dfrac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(k_1x) = 0, \\ \dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dJ_\nu(k_2x)}{dx}\right) + \left(k_2^2x - \dfrac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(k_2x) = 0. \end{cases}$$

Умножив первое на $J_\nu(k_2x)$,
а второе на $J_\nu(k_1x)$,и вычитая
одно из другого получим

$$(k_2^2 - k_1^2)\, xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x) = \frac{d}{dx}\left(xJ_\nu(k_2x)\frac{dJ_\nu(k_1x)}{dx} - xJ_\nu(k_1x)\frac{dJ_\nu(k_2x)}{dx}\right)$$

Выражение в скобках можно разложить в ряд по степеням ***x***

Наинизшая степень будет $x^{2(\nu+1)}$ и если $\nu > -1$ выражение равно 0 при $x = 0$.

Проинтегрировав выражение от 0 до l, получим

$$(k_2^2 - k_1^2) \int_0^l x J_\nu(k_1 x) J_\nu(k_2 x)\, dx = l \left[k_1 J'_\nu(k_1 l) J_\nu(k_2 l) - k_2 J'_\nu(k_2 l) J_\nu(k_1 l)\right] \quad *$$

При $l = 1$

$$(k_2^2 - k_1^2) \int_0^1 x J_\nu(k_1 x) J_\nu(k_2 x)\, dx = k_1 J'_\nu(k_1) J_\nu(k_2) - k_2 J'_\nu(k_2) J_\nu(k_1) \quad **$$

Покажем, что функция Бесселя не может иметь комплексных корней при $\nu > -1$

1. Предположим, что есть корень $a + ib$, причем $a \neq 0$.

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

Но в разложении все корни вещественны, а следовательно должен быть комплексно сопряженный корень $a - ib$. Предположим, что $k_1 = a + ib$ и $k_2 = a - ib$, при этом ($k_1^2 \neq k_2^2$)

Тогда из (**) следует, что

$$\int_0^1 x J_\nu(k_1 x) J_\nu(k_2 x)\, dx = 0.$$

2. Покажем, что функция Бесселя $J_\nu(x)$ не может иметь и чисто мнимых корней Подставим $\pm ib$ в разложение и получим только положительные члены:

$$J_\nu(ib) = (ib)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \frac{b^{2k}}{2^{\nu+2k}},$$

так как гамма-функция Г(x) принимает положительные значения при x > 0.

3. Легко показать, что функция $J_\nu(x)$ имеет вещественные корни, если обратиться к асимптотическому разложению этой функции

$$J_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1})\right] \text{ при } x > 0.$$

При $x \to \infty$ второе слагаемое в скобках стремится к нулю $(O(x^{-1}) \to 0)$ а первое меняется от -1 до 1, следовательно, $J_\nu(x)$ имеет бесконечное множество вещественных корней.

Таким образом, мы показали, что если $\nu > -1$, то у функции Бесселя $J_\nu(x)$ все корни вещественные.

Ортогональность функций Бесселя

Пусть $k_1 = \mu_i/l$ и $k_2 = \mu_j/l$, где μ_i и μ_j — два различных положительных корня тогда из (*) следует свойство ортогональности

$$\int\limits_0^l x\, J_\nu(\mu_i x/l)\, J_\nu(\mu_j x/l)\, dx = 0 \quad (i \neq j).$$

Теперь пусть $k = \mu/l$, где μ — положительный корень. Возьмем $k_1 = k$, а k_2 будем считать переменным и стремящимся к k ($k_2 \to k$), тогда получим

$$\int\limits_0^l x\, J_\nu(kx/l)\, J_\nu(k_2 x/l)\, dx = \frac{lk\, J'_\nu(kl)\, J_\nu(k_2 l)}{k_2^2 - k^2}.$$

При устремлении $k_2 \to k$ получается неопределенность типа (0/0), которую легко разрешить по правилу Лопиталя:

$$\int\limits_0^l x\, J_\nu^2(\mu_i x/l)\, dx = \frac{l^2}{2} J_\nu'^2(\mu) = \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu).$$

Таким образом

$$\int_0^l xJ_\nu(\mu_i x/l)J_\nu(\mu_j x/l)\,dx = = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \dfrac{l^2}{2}J_\nu'^2(\mu_i) = \dfrac{l^2}{2}J_{\nu+1}^2(\mu_j), & j = i, \end{cases}$$

где $\nu > -1$ и μ_i и μ_j – два различных положительных корня $J_\nu(x) = 0$

Рассмотрим более общее уравнение $\alpha J_\nu(x) + \beta J_\nu'(x) = 0, \quad \nu > -1,$

где α и β — заданные вещественные числа.

Пусть $k_1 = \mu_i/l$ и $k_2 = \mu_j/l,$ где μ_i и μ_j — два различных положительных корня этого уравнения. Аналогично проделанному ранее можно доказать, что при $\nu > -1$ и $\alpha/\beta + \nu \geqslant 0$ все корни уравнения вещественны, а для $j = i$

имеем

$$\int_0^l xJ_\nu^2(\mu x/l)\,dx = \frac{l^2}{2}\left[J_\nu'^2(\mu) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)J_\nu^2(\mu)\right]$$

или учитывая $J_\nu'(\mu) = -\dfrac{\alpha}{\beta\mu}J_\nu(\mu)$

$$\int_0^l xJ_\nu^2(\mu x/l)\,dx = \frac{l^2}{2}\left(1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2\nu^2}{\beta^2\mu^2}\right)J_\nu^2(\mu)$$

Разложение произвольной функции в ряд по функциям Бесселя

Всякая дважды дифференцируемая произвольная функция ***f (x)*** может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

ряд Фурье–Бесселя

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}A_iJ_\nu\left(\mu_i\frac{x}{l}\right),\quad \nu>-1,$$

где $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots$ — различные положительные корни уравнения $J_\nu(x)=0,$ расположенные в порядке возрастания.

Где коэффициенты разложения легко получить используя свойство ортогональности

$$A_i=\frac{2}{l^2J_{\nu+1}^2(\mu_i)}\int\limits_0^l xf(x)J_\nu\left(\mu_i\frac{x}{l}\right)dx.$$

Разложение

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}B_iJ_\nu\left(\mu_i\frac{x}{l}\right),\quad \nu>-1,$$

где $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots$ – различные положительные корни уравнения

$$\alpha J_\nu(x)+\beta xJ_\nu'(x)=0,$$

, причем $\alpha/\beta+\nu>0.$

$$B_i=\frac{2}{l^2\left(1+\dfrac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu_i^2}\right)J_\nu^2(\mu)}\int\limits_0^l xf(x)J_\nu\left(\mu_i\frac{x}{l}\right)dx.$$

ряд Дини–Бесселя

Колебания круглой мембраны (продолжение)

Итак мы получили .

$$\begin{cases} \Phi'' + \nu^2\Phi = 0; \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi); \\ \Phi'(\varphi) = \Phi'(\varphi + 2\pi) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{(\rho R')'}{R} + \left(\lambda^2 - \dfrac{\nu^2}{\rho^2}\right) = 0; \\ R(R_0) = 0; \\ |R(0)| < \infty. \end{cases}$$

Нетривиальные периодические решения для угловой части существуют лишь при $\nu^2 = m^2$ (m — целое число) и имеют вид: $\Phi_m(\varphi) = D_{1m}\cos m\varphi + D_{2m}\sin m\varphi.$

Для радиальной части имеем $R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0$

С граничными условиями $R(R_0) = 0$

и доп. условием ограниченности при $\rho = 0$ (нет бесконечного прогиба $|R(0)| < \infty$)

Введем новую переменную

$x = \lambda\rho$ – масштабирование

и обозначая

$R(\rho) = R(x/\lambda) = y(x)$

$$R' = \frac{dR}{d\rho} = \frac{dy}{d\rho} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\rho} = \lambda\frac{dy}{dx},$$

$$R'' = \frac{dR'}{d\rho} = \lambda\frac{d}{d\rho}\left(\frac{dy}{d\rho}\right) = \lambda\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{d\rho} = \lambda^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

Получим уравнение цилиндрических функций m-го порядка (уравнение Бесселя)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0,$$

$$y(x_0) = 0 \quad (x_0 = \lambda R_0), \quad |y(0)| < \infty.$$

Решение имеет вид

$$R(\rho) = R(x/\lambda) = y(x) =$$

$$= d_1 J_m(x) + d_2 N_m(x) = d_1 J_m(\lambda\rho) + d_2 N_m(\lambda\rho),$$

где $J_m(x)$ и $N_m(x)$ – функции Бесселя первого и второго рода *m – го* порядка

Так как $\lim\limits_{\rho \to 0} |N_m(\lambda\rho)| = \infty,$ то из условия ограниченности решения d_2 равна 0.

Граничное условие дает: $J_m(\lambda R_0) = 0$, или

$$R_{mn} = y(\lambda\rho) = J_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{R_0}\rho\right), \quad \lambda_{mn} = \left(\frac{\mu_n^{(m)}}{R_0}\right),$$

где $\mu_n^{(m)}$ — n-й корень уравнения $J_m(\mu) = 0$.

$$\|R_{mn}\|^2 = \left\| J_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{R_0}\rho\right)\right\|^2 = \int\limits_0^{R_0} J_m^2\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{R_0}\rho\right)\rho\, d\rho = \frac{R_0^2}{2}\left[J_m'\left(\mu_n^{(m)}\right)\right]^2$$

Задача о собственных значениях круглой мембраны решена. Для каждого λ_{mn} существуют две собственные функции

$$v_{mn}^{c}(\rho,\varphi) = J_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{R_0}\rho\right)\cos(m\varphi) \quad \text{и} \quad v_{mn}^{s}(\rho,\varphi) = J_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{R_0}\rho\right)\sin(m\varphi).$$

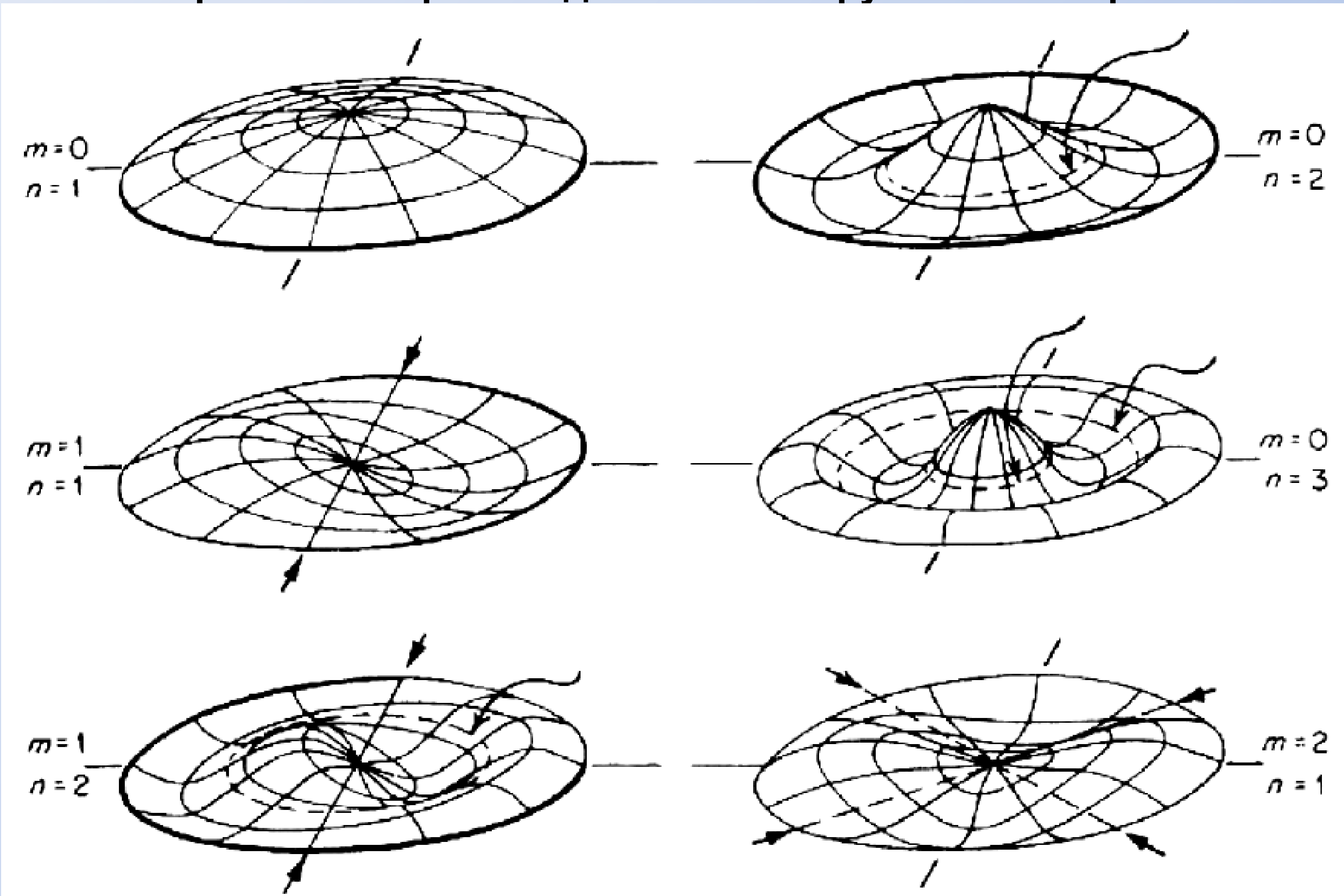
$$v_{mn}(\rho,\varphi) = J_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{R_0}\rho\right)[A_{mn}\cos(m\varphi) + B_{mn}\sin(m\varphi)].$$

Соответствующие им колебания — ***стоячие волны.***

..

$$u(\rho,\varphi,t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn}(\rho,\varphi,t) = \\ = \sum_{m,n=0}^{\infty} J_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{R_0}\rho\right)[A_{mn}\cos(m\varphi) + B_{mn}\sin(m\varphi)] \times \\ \times [C_1\cos\lambda_{mn}at + C_2\sin\lambda_{mn}at],$$

Формы некоторых мод колебаний круговой мембраны



Узловые линии

m — диаметров

$$D_{1m} \cos m\varphi + D_{2m} \sin m\varphi = 0)$$

n-1 окружностей

$$(J_m\left(\mu_n^{(m)}\rho/R_0\right) = 0)$$

.

$$u(\rho,\varphi,t)=\sum_{m,n=0}^{\infty} v_{mn}^{c}(\rho,\varphi)\left[A_{mn}\cos\left(\frac{a\mu_n^{(m)}}{R_0}t\right)+B_{mn}\sin\left(\frac{a\mu_n^{(m)}}{R_0}t\right)\right]+$$
$$+v_{mn}^{s}(\rho,\varphi)\left[C_{mn}\cos\left(\frac{a\mu_n^{(m)}}{R_0}t\right)+D_{mn}\sin\left(\frac{a\mu_n^{(m)}}{R_0}t\right)\right].$$

Коэффициенты A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} и D_{mn} определяются из начальных условий

$$u(\rho,\varphi,0)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left[A_{mn}v_{mn}^{c}(\rho,\varphi)+C_{mn}v_{mn}^{s}(\rho,\varphi)\right]=f(\rho,\varphi);$$
$$u_t(\rho,\varphi,0)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left[B_{mn}v_{mn}^{c}(\rho,\varphi)+D_{mn}v_{mn}^{s}(\rho,\varphi)\right]\frac{a\mu_n^{(m)}}{R_0}=F(\rho,\varphi).$$