Лекция 11

6 РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

6.1 Понятие δ-функции и функции Грина волнового уравнения

В этом разделе используется ряд дополнительных сведений из математики, обычно не рассматриваемых в стандартном курсе математического анализа для технического вуза.

6.1.1. В математике имеется раздел, посвященный изучению обобщенных функций. Это функции, имеющие разрывы 1-ого и

2-ого рода, т.е. функции с особенностями. Одной из таких функций является δ-функция или импульсная функция. Такую функцию можно определить для одномерного и многомерного пространства. Для одномерного пространства функция $\delta(x-a)$ равна нулю во всех точках пространства кроме $x=a$. При $x=a$ функция устремляется в бесконечность, но при этом выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)dx=1. \tag{6.1}$$

Из этого свойства следует, что если имеется гладкая функция $f(x)$, определенная в области $x=a$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\cdot f(x)dx=f(a). \tag{6.2}$$

Трехмерную δ-функцию можно определить как функцию точки, например, если точка A имеет координаты (a,b,c), то трехмерная функция может быть представлена в виде

$$\delta(x-a)\delta(y-b)\delta(z-c), \tag{6.3}$$

тогда функция равна нулю во всех точках пространства, кроме точки A, где она устремляется в бесконечность, при этом должно выполняться трехмерное условие нормировки, подобное (6.1). Также трехмерную δ-функцию можно определить через радиус-вектор точки

$$\vec{R}_A=a\vec{x}_0+b\vec{y}_0+c\vec{z}_0, \tag{6.4}$$

учитывая это можно записать для трехмерной δ-функции выражение $\delta(\vec{R}-\vec{R}_0)$.

В радиотехнике δ-функции применяются, например, для представления линейчатого спектра сигнала, в электродинамике она используется для представления точечных источников поля. В частности можно считать, что источник расходящихся сферических волн описывается δ-функцией, заданной в начале координат.

6.1.2. В математике для решения неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных применяется метод функции Грина. Воспользуемся им для решения неоднородного волнового уравнения (3.12) для электрического векторного потенциала поля

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\vec{J}_{cm}.$$

Функцией Грина G такого уравнения называется решение уравнения с δ-функцией в правой части, то есть функция Грина удовлетворяет условию

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(\vec{R} - \vec{R}_0) \tag{6.5}$$

В предыдущем разделе было показано, что вид этой функции для бесконечного однородного пространства известен, она соответствует выражению для поля расходящейся сферической волны, в соответствии с (5.3)

$$E = A_1 \frac{e^{-jkr}}{r} \tag{6.6}$$

Но это выражение содержит произвольную контакту A_1. Понятно, что величина этой константы связана с условием нормировки трехмерной δ-функции. Учитывая это, можно записать

$$G = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r}. \tag{6.7}$$

Метод функции Грина для решения неоднородных дифференциальных уравнений связан с использованием теоремы Грина из раздела математики, называемого математической теорией поля. Так вторая теорема Грина для функций U_1, U_2, определённых в объеме *V*, ограниченном поверхностью *S*, имеющих вторые частные производные, имеет вид следующего выражения

$$\int_S (U_1 \vec{\nabla} U_2 - U_2 \vec{\nabla} U_1) dS = \int_V (U_1 \vec{\nabla}^2 U_2 - U_2 \vec{\nabla}^2 U_1) dV. \tag{6.8}$$

Если записать уравнение (3.12) в скалярном виде для отдельных компонент векторного потенциала поля и вектора объемной плотности стороннего тока, то оно примет вид

$$\vec{\nabla}^2 A + k^2 A = -J. \tag{6.9}$$

Потенциал *A* в (6.9) и функция Грина (6.7) удовлетворяют условиям применимости теоремы Грина, поэтому обозначим $A = U_1; G = U_2$ и получим

$$\int_S (A \vec{\nabla} G - G \vec{\nabla} A) dS = \int_V (A \vec{\nabla}^2 G - G \vec{\nabla}^2 A) dV. \tag{6.10}$$

Будем считать, что здесь объем *V* – всё бесконечное пространство, тогда его граница *S* удалена в бесконечность. Применим граничные условия на бесконечности, в соответствии с которым все вектора поля, а значит и потенциал поля на бесконечности обращаются в ноль. Тогда (6.10) примет вид

$$\int\limits_{V\to\infty}(A\vec{\nabla}^2 G - G\vec{\nabla}^2)dV = 0 . \qquad (6.11)$$

Подставим сюда значение лапласиана от A из (6.9)

$$\int\limits_{V\to\infty}(A\vec{\nabla}^2 G - G(-J - k^2 A))dV = 0 \text{, или}$$

$$\int\limits_{V\to\infty} A(\nabla^2 G + k^2 G)dV = - \int\limits_{V\to\infty} GJdV \qquad (6.12)$$

В соответствии с определением функции Грина для уравнения Гельмгольца преобразуем левую часть, при этом учтем, что интеграл в правой части отличен от нуля только в пределах объема $V_{\tilde{n}\grave{o}}$, занятого сторонними источниками.

$$\int\limits_{V\to\infty} A\delta(\vec{R} - \vec{R}_0)dV = \int\limits_{V_{\tilde{n}\grave{o}}} GJdV \cdot \qquad (6.13)$$

По свойству (6.2) δ-функции, получаем

$$A(\vec{R}_0) = \int\limits_{V_{\tilde{n}\grave{o}}} GJdV \qquad (6.14)$$

Так как это соотношение выполняется для каждой компоненты потенциала и стороннего тока, а функция G - скаляр, можно вернуться к векторной записи

$$\vec{A}(\vec{R}_0) = \int\limits_{V_{\tilde{n}\grave{o}}} G\vec{J}dV \qquad (6.15)$$

Здесь $\vec{R}_0$ – радиус вектор точки наблюдения, r – в функции Грина, расстояние между точками источника стороннего тока и точкой наблюдения.

7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИЗЛУЧАТЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.

7.1 Поле элементарного электрического излучателя

Под элементарным электрическим излучателем понимают дифференциально малый объем, вдоль которого протекает сторонний электрический ток.

Поскольку объем диференциально малый, отдельные точки в пределах его неразличимы и комплексная амплитуда тока одинакова во всем объеме. Для удобства считаем, что излучатель имеет цилиндрическую форму и ток направлен вдоль оси. Разместим излучатель в начале декартовых координат, так чтобы направление тока совпадало с осью z, и сразу же введем вторую сферическую систему координат, в которой первую полярную ось совместим с осью z, а вторую полярную ось – с осью x декартовых координат. Это показано на рис. 7.1.

Две системы координат используются потому, что интеграл в (6.15) удобнее вычислять в декартовых координатах, а поле сферической волны, создаваемой диференциально малым излучателем, удобно записывать в сферических координатах.

Плотность объемного стороннего тока на излучателе в этом случае будет иметь вид $\vec{J} = J_0 \vec{z}_0$. Подставим это значение в (6.15) и вычислим векторный электрический потенциал, создаваемый в свободном временем пространстве вне излучателя, заметим, что

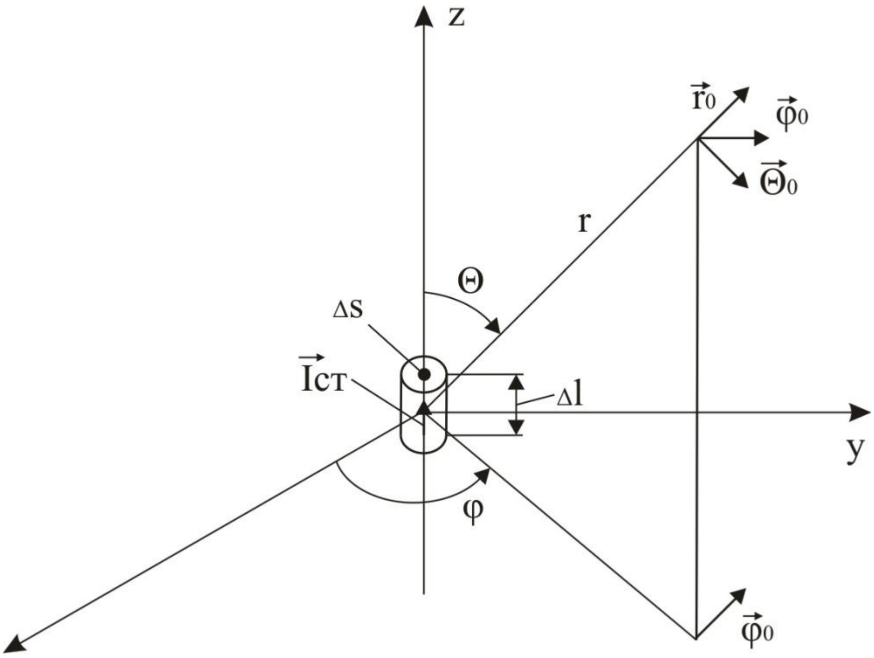

Рис. 7.1. Элементарный электрический излучатель

вне излучателя $r \neq 0$, и объем излучателя $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$

$$\vec{A} = \int\limits_{\Delta V} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} J_0 \vec{z}_0 dV = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} J_0 \Delta V \vec{z}_0 = \frac{I_0 \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{z}_0 \quad (7.1)$$

Здесь учтено, что $J_0 \Delta S = I_0$, где I_0 – комплексная амплитуда тока на излучателе.

Перейдём к сферическим координатам, для этого вектор $\vec{A}$ спроектируем на орты сферической системы координат. Очевидно

$$\vec{A} = \frac{I_0 \Delta l}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (-\sin\theta \vec{\theta}_0 + \cos\theta \vec{r}_0). \quad (7.2)$$

Найдём напряженность магнитного поля в пространстве, создаваемую излучателем, пользуясь (3.8), при этом используем оператор вычисления ротора в сферических координатах

$$\dot{\vec{H}}_0 = rot\vec{A} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta A_\phi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\vec{r}_0 +$$

$$+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{\phi}_0 + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\right]\vec{\theta}_0 =$$

$$= \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\frac{I_0\Delta l}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{I_0\Delta l}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\cos\theta\right)\right]\vec{\phi}_0 = \tag{7.3}$$

$$= \frac{I_0\Delta l}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\theta\cdot\left(jk + \frac{1}{r}\right)\vec{\phi}_0.$$

Напряженность электрического поля излучателя можно найти, используя первое уравнения Максвелла из (2.24)

$$\dot{\vec{E}}_0 = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon} rot\vec{H}.$$

Используем операцию вычисления ротора в сферических координатах, опуская громоздкие выкладки получим

$$\dot{\vec{E}}_0 = \frac{I_0\Delta l\cdot k^2}{4\pi\omega\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e^{-jkr}}{r}\left[\left(j + \frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2}\right)\sin\theta\cdot\vec{\theta}_0 + \right.$$

$$\left. +2\left(\frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2}\right)\cos\theta\cdot\vec{r}_0\right]. \tag{7.4}$$

Выражения (7.3), (7.4) имеют достаточно сложный вид. Для упрощения анализа излучаемых полей область пространства вблизи элементарного излучателя делят на три зоны.

Ближняя зона поля элементарного излучателя это геометрическое место точек, удаленных от излучателя на расстояние $r \ll \lambda$.

Дальняя зона поля элементарного излучателя это геометрическое место точек, удаленных от излучателя на расстояние $r \gg \lambda$.

Промежуточная зона – область пространство расположенная между ближней и дальней зонами.