Практическое занятие №12

Применение теории вычетов: основная теорема о вычетах

Теорема. *Если функция $f(z)$ является аналитической всюду внутри области D, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_{1,}z_{2,}\dots,z_n$, лежащих внутри кусочно-гладкой замкнутой кривой Г, Г⊂D, тогда*

$$\oint_{\Gamma} f\,(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k).$$

Контур *Г* проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{|z-i|=2}(z-i)^3 sin\frac{1}{z-i}dz$.

Решение. Изолированная особая точка $z_1 = i$. Эта точка попадает внутрь контура интегрирования. В данном случае нужно разложить функцию в ряд Лорана

$$f(z) = (z-i)^3\left(\frac{1}{(z-i)} - \frac{1}{3!\,(z-i)^3} + \frac{1}{5!\,(z-i)^5} - \frac{1}{7!\,(z-i)^7} + \dots\right) =$$

$$= (z-i)^2 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!\,(z-i)^2} - \frac{1}{7!\,(z-i)^4} + \dots$$

Главная часть ряда Лорана имеет бесконечное количество слагаемых. Имеем, что иот $z_1 = i$ является существенно особой точкой. Находим коэффициент при $(z-1)^{-1}$. Этот коэффициент равен 0. Тогда вычет функции $res\, f(i) = 0.$

Ответ: $\int_{|z-i|=2}(z-i)^3 sin\frac{1}{z-i}dz = 0.$

Пример. Найти интеграл от функции $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{(z^2+9)z}$

по контуру $|z| = 5$.

Решение: Изолированные особые точки функции $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$ и $z_3 = 0$.

Все точки попадают внутрь заданной окружности $|z| = 5$.

Для нахождения типа каждой особой точки нужно вычислить предел функции в каждой особой точке.

$$\lim_{z\to 3i}\frac{e^z-1}{(z^2+9)z} = \lim_{z\to 3i}\frac{e^z-1}{(z+3i)(z-3i)z} = \infty$$

Тогда $z_1 = 3i$ полюс первого порядка. Найдем вычет в этой точке.

$$res\, f(3i) = \lim_{z\to 3i}\frac{(e^z-1)(z-3i)}{z\quad (z+3i)(z-3i)} = \frac{e^{3i}-1}{(3i)\quad 6i} = \frac{e^{3i}-1}{-18}.$$

Перейдем к следующей точке:

$$\lim_{z\to -3i}\frac{e^z-1}{(z^2+9)z} = \lim_{z\to -3i}\frac{e^z-1}{(z+3i)(z-3i)z} = \infty$$

Тогда $z_2 = -3i$ полюс первого порядка.

Найдем вычет в этой точке:

$$res\, f(-3i) = \lim_{z\to -3i}\frac{(e^z-1)(z+3i)}{z\quad (z+3i)(z-3i)} = \frac{e^{-3i}-1}{(-3i)\quad (-6i)} = \frac{e^{-3i}-1}{-18}.$$

Рассмотрим еще одну и.о.т. $z_3 = 0$

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{(z^2+9)z} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{z}{(z^2+9)z} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z^2+9)} = \frac{1}{9}$$

Тогда $z_3 = 0$ устранимая особая точка. В этом случае $res\, f(0) = 0$.

Получаем ответ

$$\int_{|z|=5} \frac{e^z - 1}{(z^2+9)z} dz = 2\pi i\big(res\, f(3i) + res\, f(-3i) + res\, f(0)\big)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^{3i}-1}{-18} + \frac{e^{-3i}-1}{-18}\right)$$

<u>Пример.</u> Вычислить $\int_{|z+4|=2} (z+4)^5 e^{\frac{2}{z+4}} dz.$

Решение: Изолированная особая точка функции $z = -4$. Внутри области, ограниченной контуром $|z+4| = 2,$ лежит данная точка $z = -4$.

Разложим функцию в ряд по степеням (z+4)

$$f(z) = (z+4)^5 e^{\frac{2}{z+4}}$$

$$= (z+4)^5 \Big(1 + \frac{2}{z+4} + \frac{2^2}{2!\,(z+4)^2} + \frac{2^3}{3!\,(z+4)^3} + \frac{2^4}{4!\,(z+4)^4} +$$

$$\frac{2^5}{5!(z+4)^5} + \frac{2^6}{6!(z+4)^6} + \frac{2^7}{7!(z+4)^7} + \cdots\Big) \ldots$$

Раскрываем скобки и получаем

$$f(z) = (z+4)^5 + 2(z+4)^4 + \frac{2^2(z+4)^3}{2!} + \frac{2^3(z+4)^2}{3!} + \frac{2^4(z+4)}{4!} +$$

$$+ \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!(z+4)} + \frac{2^7}{7!(z+4)^2} + \cdots$$

Главная часть полученного ряда Лорана имеет бесконечное количество членов (слагаемых). Выделенная изолированная особая точка $z = -4$ существенно особая точка. Вычет равен $res\, f(-4) = \frac{2^6}{6!}$.

Тогда по основной теореме о вычетах имеем

$$\int_{|z+4|=2} (z+4)^5 e^{\frac{2}{z+4}} dz = 2\pi i \cdot res\, f(-4) = 2\pi i \cdot \frac{2^6}{6!}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить $\int_{|z+1|=4} \frac{8z+11}{z^2+3z+2} dz$

Решение. Находим и.о.т. (приравняем знаменатель дроби к нулю): $z_1 = -2$, $z_2 = -1$.

Внутри контура $|z+1| = 4$ находятся обе точки.

$$\lim_{z\to -2} \frac{8z+11}{z^2+3z+2} = \lim_{z\to -2} \frac{8z+11}{(z+2)(z+1)} = \infty$$

Изолированная особая точка $z_1 = -2$ является полюсом 1-го порядка.

Найдем вычет.

$$res\, f(-2) = \lim_{z\to -2} \frac{(8z+11)(z+2)}{(z+2)(z+1)} = \frac{-5}{-1} = 5$$

Рассмотрим следующую точку.

$$\lim_{z\to -1} \frac{8z+11}{z^2+3z+2} = \lim_{z\to -1} \frac{8z+11}{(z+2)(z+1)} = \infty$$

Изолированная особая точка $z_1 = -1$ является полюсом 1-го порядка.

Найдем вычет.

$$res\, f(-1) = \lim_{z\to -1} \frac{(8z+11)(z+1)}{(z+2)(z+1)} = \frac{3}{1} = 3$$

Ответ:

$$\int_{|z+1|=4} \frac{8z+11}{z^2+3z+2} dz = 2\pi i\big(res\, f(-2) + res\, f(-1)\big) = 16\pi i$$

<u>Пример.</u> Вычислить $\int_{|z+3|=0,5} \frac{1}{(z^2+5z+6)^2} dz$

Решение. Находим и.о.т. функции: $z = -3$, $z = -2$.

Рисуем контур интегрирования $|z+3| = 0,5$. Внутри этого контура лежит <u>*только одна особая точка*</u> $z = -3$.

Рассмотрим эту точку $z = -3$

Вычислим $\lim\limits_{z\to -3}\frac{1}{(z^2+5z+6)^2} = \lim\limits_{z\to -3}\frac{1}{(z+2)^2(z+3)^2} = \infty$

Следовательно, изолированная особая точка $z_1 = -3$ является полюсом 2-го порядка.

Найдем вычет в точке z_1:

$$res f(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}[f(z)(z-z_0)^2].$$

Тогда

$$res f(-3) = \lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+2)^2(z+3)^2}(z+3)^2\right] = 2$$

По основной теореме о вычетах получаем, что

$$\int_{|z+3|=0,5}\frac{1}{(z^2+5z+6)^2}dz = 2\pi i\cdot res f(-3) = 4\pi i.$$

Применение теории вычетов*: *вычисления несобственных интегралов от рациональных функций

Рассмотрим примеры вычисления несобственных интегралов от рациональных функций.

Теорема. *Если* $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$, $Q(x)$ *– многочлены, причем многочлен* $Q(x)$ *не имеет действительных корней и степень* $Q(x)$ *«m» хотя бы на две единицы больше степени* $P(x)$ *«n»* $(m-n\geq 2)$, *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\,F(z_k),$$

где $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *и* z_k *– полюсы функции* $F(z)$, *лежащие в верхней полуплоскости.*

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+16)^2} \quad .$$

Решение. Подынтегральная функция

$$F(x) = \frac{1}{(x^2+16)^2}$$

является четной. Поэтому

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+16)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+16)^2}.$$

Введем функцию $F(z) = \frac{1}{(z^2+16)^2}$.

Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1 = 4i$, $z_2 = -4i$ – это полюсы второго порядка.

В верхней полуплоскости находится точка $z = 4i$.

Условия теоремы для функции $F(z)$ выполнены.

Вычислим $resF(4i)$:

$$res\, F(4i) = \lim_{z\to 4i} \frac{d}{dz}[F(z)(z-4i)^2] =$$

$$= \lim_{z\to 4i} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-4i)^2}{(z-4i)^2(z+4i)^2}\right] = \lim_{z\to 4i} \frac{d}{dz}[(z+4i)^{-2}] =$$

$$= \lim_{z\to 4i} \frac{-2}{(z+4i)^3} = \frac{-2}{(8i)^3} = \frac{1}{4^4 i}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+16)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot res\, F(4i) = \frac{\pi i}{4^4 i} = \frac{\pi}{4^4}.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}, \quad (a > 0).$$

Решение. Подынтегральная функция

$$F(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^3}$$

является четной. Поэтому

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}.$$

Введем функцию $F(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^3}$.

Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1 = ai$, $z_2 = -ai$ – это полюсы третьего порядка. В верхней полуплоскости находится точка $z = ai$, $a > 0$. Условия теоремы для функции $F(z)$ выполнены.

Вычислим $resF(ai)$:

$$res\, F(ai) = \frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{d^2}{dz^2}[F(z)(z-ai)^3] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-ai)^3}{(z-ai)^3(z+ai)^3}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{d^2}{dz^2}[(z+ai)^{-3}] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{12}{(z+ai)^5} = \frac{6}{(2ai)^5} = \frac{3}{16a^5 i}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot res\, F(ai) = \frac{3\pi i}{16a^5 i} = \frac{3\pi}{16a^5}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{10(x^2+2)dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

Решение. Подынтегральная функция

$$F(x) = \frac{10(x^2+2)}{(x^2+1)(x^2+9)}$$

является четной. Поэтому

$$I = \int_0^{\infty} \frac{10(x^2+2)dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{10(x^2+2)dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Введем функцию $F(z) = \frac{(z^2+2)}{(z^2+1)(z^2+9)}$.

Функция $F(z)$ имеет четыре особые точки

$z_1 = i,\ \ z_2 = -i\ ,\ \ z_3 = 3i,\ z_4 = -3i$ – это полюсы первого порядка.

В верхней полуплоскости находятся точки $z = i$ и $z = 3i$. Условия теоремы для функции $F(z)$ выполнены.

Вычислим $resF(i)$:

$$res\,F(i) = \lim_{z\to i}\left[F(z)(z-i)\right] =$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{(z^2+2)(z-i)}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to i}\frac{(z^2+2)}{(z+i)(z^2+9)} = \frac{1}{16i}$$

Вычислим $resF(3i)$:

$$res\,F(3i) = \lim_{z\to 3i}\left[F(z)(z-3i)\right] =$$

$$= \lim_{z\to 3i}\frac{(z^2+2)(z-3i)}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to 3i}\frac{(z^2+2)}{(z+3i)(z^2+1)} = \frac{-7}{-48i} = \frac{7}{48i}$$

Следовательно,

$$I = 5\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = 5\cdot 2\pi i\cdot(res\,F(i) + res\,F(3i)) =$$

$$= 10\pi\cdot\left(\frac{1}{16}+\frac{7}{48}\right) = 10\pi\cdot\frac{5}{24} = \frac{25\pi}{12}.$$

Домашнее задание.

Учебно-методическое пособие «Теория функций комплексного переменного», часть 1. Задача №1.17 (варианты 1-6).

Пособие размещено на сайте кафедры ВМ-2
http://vm-2.mozello.ru
раздел «Математический анализ. 4 семестр».