Лекция 3

2.3. Общие свойства системы уравнений Максвелла

Рассмотрим некоторые общие свойства уравнений Максвелла на примере системы в дифференциальной форме (2.6).

2.3.1. Так же, как и система (2.3), уравнения (2.6) с учетом материальных соотношений (1.3, 1.5, 1.7) являются системой линейных уравнений, число которых превышает число неизвестных величин. Система уравнений является переопределенной, между отдельными уравнениями существуют взаимные связи. Покажем это на примере второго уравнения из (2.6)

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

вычислим операцию дивергенции от обеих частей уравнения

$$div\, rot\vec{E} = -div\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2.14}$$

в левой части образовалось выражение, соответствующее известному тождеству из математической теории поля. Напомним его, используя в записи оператор Гамильтона $\vec{\nabla}$

$$div\ rot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} \equiv (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{E} \equiv 0\cdot\vec{E} \equiv 0.$$

В правой части (2.14) можно поменять местами дифференциальные операторы, так как они действуют по различным аргументам. Получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}div\vec{B} = 0, \quad \text{или отсюда} \quad div\vec{B} = const\Big|_{t},$$

то есть, дивергенция вектора индукции магнитного поля является постоянной величиной, не зависящей от времени. Дивергенция количественно оценивает источники поля. Очевидно, последнее выражение полностью соответствует четвертому уравнению из (2.6) при условии отсутствия магнитных зарядов. Таким образом, второе и четвертое уравнения в системе уравнений Максвелла взаимосвязаны.

Так же можно показать, что при отсутствии токов и зарядов в среде взаимосвязаны первое и третье уравнения Максвелла. При наличии токов и зарядов из этих уравнений выводится известное выражение. Получим его, используя продемонстрированный выше прием. Имеем

$$\begin{gathered} rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ div\vec{D} = \rho, \end{gathered} \tag{2.15}$$

вычислим операцию дивергенции от первого уравнения

$$div\ rot\vec{H} = div\vec{J} + div\frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

левая часть выражения тождественно равна нулю. В последнем члене правой части поменяем местами операторы, действующие на вектор индукции электрического поля по различным аргументам, и подставим значение $div\vec{D}$ из второго соотношения в (2.15), получаем

$$div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \qquad (2.17)$$

Это выражение известно в физике как экспериментально открытый закон сохранения заряда или закон непрерывности тока проводимости.

2.3.2. Система уравнений Максвелла (2.6) очень сложна, ее общее решение неизвестно. Введенные Максвеллом токи проводимости позволяют получить частные решения системы в виде электромагнитных волн. По этой причине (2.6) часто называется волновой системой уравнений. Любые упрощения системы уравнений, если они оправданы условиями задач, упрощают решение. Рассмотрим часто встречающиеся упрощенные варианты системы уравнений Максвелла.

В правой части первого уравнения Максвелла в исходной системе (2.1) стоит сумма тока проводимости и тока смещения, в эквивалентной системе (2.6) в правой части стоят вектора объемных плотностей тока проводимости и тока смещения. Причем, в выражение объемной плотности тока смещения входит временная производная $\vec{J}_{см} = \partial\vec{D}/\partial t$. В практических приложениях часто встречаются задачи, в которых объемная плотность тока смещения мала, например, из-за низкой частоты электромагнитного колебания, или из-за большой амплитуды объемной плотности тока проводимости, или из-за малых размеров области пространства, в которой ищется решение системы уравнений. При этом, решение системы уравнений (2.6) без учета токов смещения может давать пренебрежимо малую ошибку. В этих случаях упрощение системы целесообразно. Преобразованная система получила название системы уравнений для квазистационарного случая, она имеет вид

$$\begin{aligned} rot\vec{H} &= \vec{J}, \\ rot\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ div\vec{D} &= \rho, \\ div\vec{B} &= 0. \end{aligned} \qquad (2.18)$$

в этой системе уравнений отсутствуют решения в виде волн. Она описывает электромагнитные процессы в радиотехнических цепях, в цепях переменного тока.

Дальнейшее упрощение системы связано с цепями постоянного тока. В таких цепях отсутствует зависимость электромагнитных процессов от времени. Такие процессы называются стационарными, соответствующая система уравнений будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&rot\vec{H} = \vec{J}, \\
&rot\vec{E} = 0, \\
&div\vec{D} = \rho, \\
&div\vec{B} = 0.
\end{aligned}
\qquad (2.19)
$$

Следующим упрощением являются статические задачи. В статике отсутствует всяческое движение, в том числе и движение зарядов, поэтому из первого уравнения исключается объемная плотность токов проводимости. Система уравнений Максвелла распадается на две независимых системы, в одну входят только электрические величины, во вторую – только магнитные

$$
\begin{cases} rot\vec{H} = 0, \\ div\vec{B} = 0, \end{cases} \textit{магнитостатика}, \quad \begin{cases} rot\vec{E} = 0, \\ div\vec{D} = \rho \end{cases} \textit{электростатика}. \qquad (2.20)
$$

В статических задачах вместо векторных уравнений Максвелла удобнее пользоваться эквивалентными скалярными уравнениями. Покажем переход к ним для случая электростатики. Из первого уравнения следует, что ротор вектора напряженности электрического поля в электростатике равен нулю. Но известно тождество из математической теории поля

$$rot\ gradU = (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})U \equiv 0.$$

Используя это тождество можно ввести новую переменную U взамен $\vec{E}$,

$\vec{E} = -gradU$, подставляя это представление во второе уравнение, для случая однородной среды получаем

$$div\ \varepsilon_0\varepsilon(-gradU) = \rho, \textit{или}\ div\ gradU = -\rho/\varepsilon_0\varepsilon. \quad \vec{\nabla}^2 U = -\rho/\varepsilon_0\varepsilon.$$

Последнее выражение известно как уравнение Пуассона для электростатического потенциала. При отсутствии зарядов оно преобразуется в уравнение Лапласа. В математике развит специальный раздел, рассматривающий решения таких уравнений, он называется теорией потенциала.

Заметим, что полученные ранее граничные условия применимы ко всем упрощенным представлениям системы уравнений Максвелла.

2.4. Система уравнений Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля

В предыдущем подразделе рассматривались возможности упрощения системы уравнений Максвелла на физическом уровне. Сейчас рассмотрим пути упрощения системы с точки зрения математики. Одним из возможных путей является уменьшение числа аргументов, от которых зависят неизвестные вектора электромагнитного поля, входящие в систему уравнений Максвелла. Конечно, такое упрощение должно быть обосновано, оно не должно резко уменьшать круг важных для практики задач, которые могут описываться упрощенными уравнениями. Каждый из векторов поля, входящих в систему (2.6), зависит от трех пространственных координат и от времени. В этом подразделе рассмотрим возможности исключения времени из системы уравнений. В дальнейшем будут использоваться приемы исключения зависимости от некоторых пространственных координат.

В математике известны приемы исключения зависимости функций от какого-то из аргументов. Прямой путь связан с применением интегральных преобразований, например, преобразования Фурье, преобразования Лапласа и т.п. При использовании преобразований производится переход от исходных величин в исходном пространстве к их изображениям в некотором новом пространстве, обычно комплексном, в котором исключается зависимость изображений от одного из исходных аргументов. При этом, правда, вводится новый аргумент, но в некоторых случаях зависимость изображений от него может быть более простой или вообще отсутствовать. Например, при использовании преобразования Фурье исключается зависимость сигнала от времени, но изображение сигнала – спектральная плотность будет зависеть от частоты. Одним из простых путей такого вида преобразований является комплексное продолжение. Оно может быть применено, если существует простая исходная временная зависимость.

Будем считать, что электромагнитные колебания имеют гармоническую зависимость от времени, например, вектор $\vec{H}$ имеет вид

$$\vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}_0(x,y,z)\cos(\omega t + \varphi), \qquad (2.21)$$

где $\vec{H}_0$ - векторная амплитуда, зависящая от пространственных координат, ω - угловая частота колебания, φ - начальная фаза колебания в нулевой момент времени. Такое представление обосновано и математически и физически, действительно:

- при произвольной зависимости электромагнитного поля от времени за счет преобразования Фурье его можно представить в виде спектра, каждая из гармоник которого будет иметь вид, подобный (2.21), тогда решение задачи о нахождении электромагнитного поля может быть сведено к решению ряда задач о нахождении спектра гармоник; окончательное решение после этого будет получено при обратном преобразовании Фурье;
- большинство применяемых в радиотехнике и технике связи сигналов являются узкополосными по сравнению с несущей частотой, на которой происходит передача сигналов; например, в радиолокации применяются сигналы, имеющие ширину спектра около мегагерца при несущей частоте в тысячи мегагерц. Если на условиях распространения сигнала не сказывается наличие дисперсии, то физически они могут быть представлены в виде гармоники несущей частоты.

Выражение (2.21) можно представить в комплексном виде, используя следующие преобразования:

$$\vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}_0(x,y,z)\cos(\omega t+\varphi) = \mathrm{Re}\left\{\vec{H}_0\left[\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi)\right]\right\}$$
$$= \mathrm{Re}\left\{\vec{H}_0 e^{j(\omega t+\varphi)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\vec{H}_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{H}}_0 e^{j\omega t}\right\}$$

Здесь обозначено *Re* – оператор вычисления вещественной части комплексного числа, $\dot{\vec{H}}_0$- комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля, зависящая от пространственных координат и от начальной фазы колебаний.

Аналогичным образом можно представить все вектора, входящие в систему уравнений (2.6). Тогда, например, первое из уравнений (2.6) примет вид

$$rot\ \mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{H}}_o e^{j\varpi t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{J}}_0 e^{j\varpi t}\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{D}}_0 e^{j\varpi t}\right\}.$$

Это выражение содержит операторы, действующие по различным аргументам на входящие под них функции. Оператор *rot* производит дифференцирование по пространственным координатам, оператор $\partial/\partial t$ производит дифференцирование по времени, оператор *Re* зануляет мнимую часть комплексных величин. Разнотипные операторы можно менять местами, поэтому

$$\mathrm{Re}\left\{e^{j\varpi t}\ rot\dot{\vec{H}}_0\right\} = \mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{J}}_0 e^{j\varpi t}\right\} + \mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{D}}_0 j\varpi\ e^{j\varpi t}\right\}. \qquad (2.22)$$

Это выражение полностью эквивалентно первому уравнению из (2.6), но в нем фигурируют комплексные амплитуды, которые являются изображениями векторов поля в комплексном пространстве. Можно выполнить комплексное продолжение, отбрасывая оператор *Re* и распространяя выражение на комплексные величины, стоящие в фигурных скобках. Для обратного перехода необходимо тщательно отследить все выполняемые при комплексном продолжении действия. Итак:

-распространяем выражение (2.22) на комплексное пространство, отбрасывая операторы Re, получаем

$$\left\{e^{j\varpi t}\ rot\dot{\vec{H}}_0\right\} = \left\{\dot{\vec{J}}_0 e^{j\varpi t}\right\} + \left\{\dot{\vec{D}}_0 j\varpi\ e^{j\varpi t}\right\};$$

-раскрываем скобки и сокращаем выражение на $e^{j\varpi t}$.

Для обратного перехода указанные действия надо выполнить в обратном порядке.

Сравним исходное и полученное уравнения:

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \left(\textit{для мгновенных значений векторов поля}\right)$$

$$rot\dot{\vec{H}}_0 = \dot{\vec{J}}_0 + j\varpi\,\dot{\vec{D}}_0 - \left(\textit{для комплексных амплитуд векторов поля}\right).$$

Второе уравнение является изображением, аналогом первого уравнения в комплексном пространстве, оно проще исходного с математической точки зрения, так как не содержит зависимости от времени и оператора вычисления временной производной. Существует простой обратный переход от второго уравнения к первому, понятно, что этот переход существует и между решениями уравнений.

Переход к комплексным амплитудам позволяет еще больше упростить вид первого уравнения. Преобразуем правую часть уравнения для комплексных амплитуд векторов поля, используя материальные соотношения

$$\dot{\vec{J}}_0 + j\varpi\dot{\vec{D}}_0 = \sigma\dot{\vec{E}}_0 + j\varpi\varepsilon\varepsilon_0\dot{\vec{E}}_0 = j\varpi\dot{\varepsilon}\varepsilon_0\dot{\vec{E}}_0 .$$

Здесь введена величина комплексной относительной диэлектрической проницаемости, равная $\dot{\varepsilon} = \varepsilon - j\sigma/\varpi\varepsilon_0$. При введении такой величины уравнение выглядит одинаково независимо от проводимости среды, поэтому решение уравнения будет применимо к средам с различным значениям проводимости.

Для комплексной относительной диэлектрической проницаемости часто применяются дополнительные выражения

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon'(1 - j\, tg\, \delta), \tag{2.23}$$

где $\varepsilon' = \varepsilon$, $tg\delta$ - тангенс угла диэлектрических потерь или тангенс угла между вектором объемной плотности тока смещения и вектором полной объемной плотности тока в среде.

В предыдущей части подраздела показано как преобразуется первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме при комплексном продолжении. Аналогичным образом преобразуются остальные уравнения. В результате получается следующая система уравнений Максвелла для комплексных амплитуд векторов электромагнитного поля

$$\begin{aligned}
&rot\dot{\vec{H}}_0 = \dot{\vec{J}}_0 + j\varpi\,\dot{\vec{D}}_0, && rot\dot{\vec{H}}_0 = j\varpi\,\dot{\varepsilon}\varepsilon_0\,\dot{\vec{E}}_0,\\
&rot\dot{\vec{E}}_0 = -j\varpi\,\dot{\vec{B}}_0, \qquad\text{или} && rot\dot{\vec{E}}_0 = -j\varpi\,\mu\mu_0\dot{\vec{H}}_0,\\
&div\dot{\vec{D}}_0 = \dot{\rho}_0, && div\,\dot{\varepsilon}\varepsilon_0\dot{\vec{E}}_0 = \dot{\rho}_0,\\
&div\dot{\vec{B}}_0 = 0. && div\mu\mu_0\dot{\vec{H}}_0 = 0.
\end{aligned}$$