Практическое занятие №2

§ 2. Функции комплексного переменного

Изображение множеств на комплексной плоскости

Рассмотрим задачи, связанные с изображением на комплексной плоскости линий или областей, заданных уравнениями и неравенствами.

Пример. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством $\operatorname{Re} z \leq 3$.

Решение. $\operatorname{Re} z = x$, тогда неравенство можно переписать так: $x \leq 3$. На

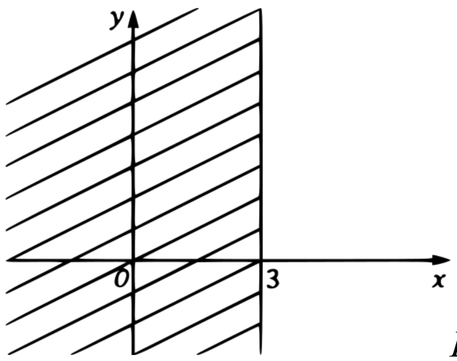

Рис. 6

плоскости xOy это определяет полуплоскость левее прямой $x = 3$ (см. рис. 6).

Пример. Изобразить на комплексной плоскости линию, заданную

$|z| = 6$.

Решение. По определению, $|z|$ – это расстояние от начала координат до точки z, т.е. $|z| = 6$ – это геометрическое множество точек, равноудаленных от начала координат. Таким геометрическим местом является окружность с центром в начале координат радиуса $R = 6$.

Также можно вывести уравнение кривой алгебраическим способом. Из понятия модуля комплексного числа $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. уравнение переписывается в виде $\sqrt{x^2 + y^2} = 36$, или $x^2 + y^2 = 6^2$ – это и есть уравнение окружности с центром в точке O и $R = 6$.

Пример. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством $1 < |z - 1 + i| \leq 2$.

Решение. $|z - 1 + i| = |z - (1 - i)| \leq 2$

Это множество точек z, расстояние которых от точки $1 - i$ не больше 2, то есть круг с центром в $1 - i$ радиуса 2. Множество точек z таких, что $1 < |z - (1 - i)|$ представляет собой внешность круга радиуса 1 с центром в точке $1 - i$. Таким образом, исходное множество – кольцо с центром в точке $1 - i$ (см. рис. 7).

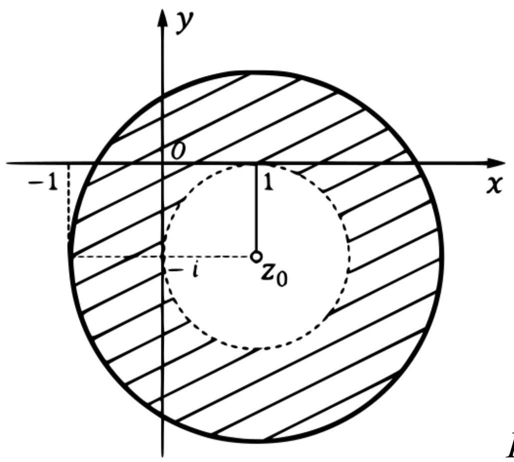

Рис. 7

Пример. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством $5 < |z + 3 + 2i| \leq 14$.

Решение: по аналогии с предыдущим примером получим кольцо с центром в точке $(-3 - 2i)$, радиус внутренней окружности равен 5 (линия обозначается пунктиром), радиус второй окружности равен 14 (линия сплошная.

Пример. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную $|z| < 9$.

Решение: по аналогии с предыдущими примерами получим, что задана внутренняя часть круга с центром в точке 0, радиус равен 9, причем граница области – окружность – обозначается пунктиром.

Заметим, что для случая $|z| > 9$, получим внешнюю часть круга.

Пример. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \geq 1$.

Решение: Пусть z не равно (-1). Умножим обе части неравенства на положительное число $|z+1|$, получим $|z-1| \geq |z+1|$.

Положим $z = x + iy$.

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

Возведем в квадрат:

$$(x-1)^2 + y^2 \geq (x+1)^2 + y^2.$$

Перенося в левую часть все слагаемые, получим $(x-1)^2 - (x+1)^2 \geq 0$ или $-4x \geq 0$, или $x \leq 0$ – это левая полуплоскость вместе с границей $x = 0$, причем выкалывается точка $z = -1$.

Пусть $z = x + iy$, тогда

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y) = \mathrm{Re} f(z)$ – действительная часть функции, $v(x, y) = \mathrm{Im} f(z)$ – мнимая часть функции.

Пример. Найти действительную и мнимую части функции

$$\omega = 15z + 7.$$

Решение. Положим $z = x + iy$,

тогда $\omega = 15(x + iy) \quad + 7 = (15x + 7) + 15iy$.

Получаем

$u(x, y) = 15x + 7$ – действительная часть функции,

$v(x, y) = 15y$ – мнимая часть функции.

Пример. Найти действительную и мнимую части функции

$$\omega = 4z^2 + 5i\bar{z}.$$

Решение. Положим $z = x + iy$, тогда $\omega = 4(x + iy)^2 + 5i(x - iy) = 4x^2 + 8xyi - 4y^2 + 5ix + 5y = (4x^2 - 4y^2 + 5y) + i(8xy + 5x)$. Получаем

$u(x, y) = 4x^2 - 4y^2 + 5y$ – действительная часть функции,

$v(x, y) = 8xy + 5x$ – мнимая часть функции.

Элементарные функции комплексного переменного

Основные элементарные функции комплексного переменного определяются следующими формулами (здесь $z = x + iy$).

1. ***Дробно-рациональная функция***

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + a_m}.$$

В частности, рациональной функцией является многочлен $\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$.

2. ***Показательная функция e^z*** при $z=x+i\cdot y\in\mathbf{C}$ определяется равенством

$$e^z=e^x\cdot(\cos y+i\cdot\sin y).$$

В частности, при $z\in\mathbf{R}$ (т.е. при $y=0$) функция e^z совпадает с обычной экспонентой, а при $x=0$ получаем формулу Эйлера:

$$e^{i\cdot y}=\cos y+i\cdot\sin y.$$

Свойства показательной функции:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, где z_1, z_2 – комплексные числа,

в) $e^{z+2\pi ki} = e^z (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, т.е.

e^z – периодическая функция с периодом $2\pi i$.

3. ***Тригонометрические функции***

Из формулы Эйлера следует, что $\forall x \in \mathbf{R}$

$$\cos x = \frac{e^{i \cdot x} + e^{-i \cdot x}}{2},\ \sin x = \frac{e^{i \cdot x} - e^{-i \cdot x}}{2i}.$$

По аналогии с этими равенствами введем функции комплексного переменного cosz и sinz $\forall z \in \mathbf{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{i \cdot z} + e^{-i \cdot z}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{i \cdot z} - e^{-i \cdot z}}{2i}. \tag{2.1}$$

Функции $sinz$ и $cosz$ – периодические с периодом $T = 2\pi$. Справедливо основное тригонометрическое тождество: $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Функции tgz и $ctgz$ определяются равенствами $tgz = \frac{sinz}{cosz}$, $ctgz = \frac{cosz}{sinz}$. Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все формулы тригонометрии.

4. ***Гиперболические функции***

Гиперболические функции shz, chz, thz, $cthz$ определяются равенствами

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$thz = \frac{shz}{chz}, cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Основное гиперболическое тождество $ch^2 z - sh^2 z = 1$.

5. ***Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями***

$$sinz = -ish(iz), cosz = ch(iz), tgz = -ith(iz),$$

$$thz = -itg(iz), cthz = ictg(iz).$$

6. ***Логарифмическая функция Ln z***, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\mathrm{Ln}\, z = ln|z| + iArg\, z = ln|z| + i(arg\, z + 2\pi k),$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{2.2}$$

Функция $\omega = \mathrm{Ln}\, z$ является многозначной.

Главным значением Ln $\boldsymbol{z}$ *называется значение, получаемое при* $\boldsymbol{k = 0}$

$$lnz = ln|z| + iargz.$$

Свойства функции $Ln\, z$:

a) $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2,$

b) $\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2.$

7. ***Общая показательная функция*** определяется равенством

$$a^z = e^{z\mathrm{Ln}a}, \tag{2.3}$$

где a – любое комплексное число, $a \neq 0$.

8. ***Общая степенная функция*** $w = z^a$, где a – любое комплексное число, $z \neq 0$

$$z^a = e^{a\mathrm{Ln}z}. \tag{2.4}$$

<u>Пример.</u> Вычислить $sin(3 - i)$.

Решение. Используя формулы (2.1) получаем

$$sin(3 - i) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(3-i)} - e^{-i(3-i)}\right] = -\frac{i}{2}\left[e^{1+3i} - e^{-1-3i}\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\left[e(cos3 + isin3) - e^{-1}(cos3 - isin3)\right] =$$

$$= -i\left[cos3\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right) + isin3\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)\right] =$$

$= sin3ch1 - icos3sh1.$

Пример. Вычислить $5\mathrm{Ln}(-1)$.

Решение. Из формулы (2.2) получаем

$$5\mathrm{Ln}(-1) = 5ln|-1| + 5i(arg(-1) + 2\pi k) = 5i(\pi + 2\pi k) =$$
$$= 5(2k+1)\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Пример. Вычислить i^{12i}.

Решение. Положим $a = i, z = 12i$ и воспользуемся формулой (2.4)

$$i^{12i} = e^{12i\mathrm{Ln}i}.$$

Вычислим отдельно $\mathrm{Ln}(i)$. Используя формулу (2.2), получим:

$$\mathrm{Ln}(i) = ln|i| + i(argi + 2\pi k) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$
$$|i| = \sqrt{0 + 1^2} = 1, ln|i| = ln1 = 0, argi = \frac{\pi}{2},$$
$$i^{12i} = e^{12i \cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = e^{-6\pi - 24\pi k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Решение уравнений

Пример. Решить уравнение $sinz = 3$, корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Решение. Используя формулу (2.1), уравнение можно переписать в виде $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3$ или $e^{2iz} - 6ie^{iz} - 1 = 0$ – это квадратное уравнение относительно e^{iz}. Его корни

$$e^{iz} = 3i \pm 2\sqrt{2}i = i(3 \pm 2\sqrt{2})$$

Прологарифмируем полученное равенство

$$iz = \mathrm{Ln}\left(i(3 \pm 2\sqrt{2})\right) = ln\left|i(3 \pm 2\sqrt{2})\right| +$$
$$+ i\left(arg\left(i(3 \pm 2\sqrt{2})\right) + 2\pi k\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Вычислим $\left|i(3 \pm 2\sqrt{2})\right| = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $arg\left(i(3 \pm 2\sqrt{2})\right) = \frac{\pi}{2}$, получим

$$iz = ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

отсюда вычислим

$$z = \frac{1}{i} ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right).$$

Получили две серии корней

$$z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right), z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right).$$

Преобразуем z_2.

$$-ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = ln\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right),$$

поэтому

$$z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + i ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

Корни находятся на двух прямых, параллельных оси Ox и отстоящих от нее на расстояние $ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$ (см. рис. 8).

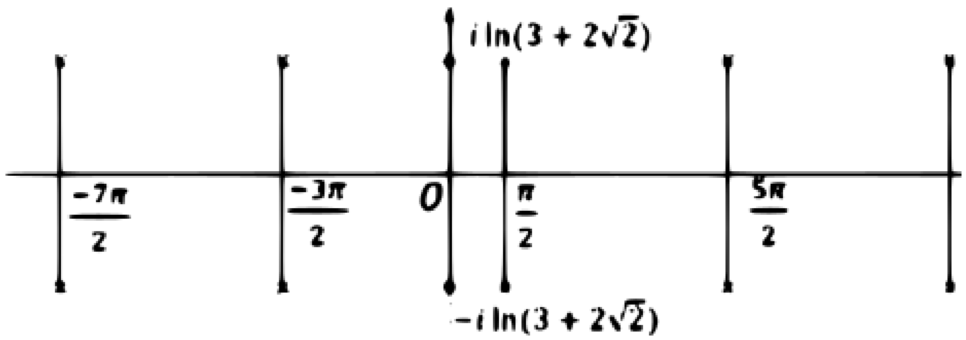

Рис. 8

Домашнее задание.

Учебно-методическое пособие «Теория функций комплексного переменного», часть 1. Задачи №№ 1.4, 1.5, 1.6.

Пособие размещено на сайте кафедры ВМ-2
http://vm-2.mozello.ru
раздел «Математический анализ. 4 семестр».