Титульный лист материалов по дисциплине

ДИСЦИПЛИНА	**Разработка и эксплуатация радиотелеметрических систем** полное название дисциплины без аббревиатуры
ИНСТИТУТ	**Радиотехнических и телекоммуникационных систем**
КАФЕДРА	**радиоволновых процессов и технологий** полное название кафедры
ГРУППА/Ы	**РИБО-2-19; РРБО-2-19; РССО-2-19** номер групп/ы, для которых предназначены материалы
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	**Практическое занятие 1** лекция; материал к практическим занятиям; контрольно-измерительные материалы к практическим занятиям; руководство к КР/КП, практикам
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	**Исаков Владимир Николаевич** фамилия, имя, отчество
СЕМЕСТР	**5** указать номер семестра обучения

Практическое занятие 1
Пространство сигналов.
Обобщённый спектральный анализ сигналов
1. Линейное пространство сигналов

Множество сигналов R называется линейным пространством сигналов, если выполняются следующие условия:

1. Для любых двух сигналов из R определена операция сложения так, что множество R замкнуто относительно этой операции:

$$\forall s_1, s_2 \in R \quad \exists s_1 + s_2 \in R .$$

2. Для любого сигнала из R определена операция умножения на число так, что множество R замкнуто относительно этой операции:

$$\forall s \in R,\ \lambda \in \mathbb{C}\ \exists \lambda s \in R .$$

3. В множестве R имеется нулевой элемент:

$$\exists 0 \in R : \forall s \in R \ \Rightarrow\ s + 0 = s .$$

2. Скалярное произведение

Скалярным произведением сигналов s_1 и s_2 из R называется сопоставляемое им число (s_1, s_2) посредством правила, обладающего свойствами:

1. Сопряжённая симметрия

$$(s_1, s_2) = (s_2, s_1)^* .$$

2. Распределительное свойство

$$(s_1 + s_2, s_3) = (s_1, s_3) + (s_2, s_3) ,$$
$$(s_3, s_1 + s_2) = (s_3, s_1) + (s_3, s_2) .$$

3. Умножение на число

$$(\lambda s_1, s_2) = \lambda (s_1, s_2) ,$$
$$(s_1, \lambda s_2) = \lambda^* (s_1, s_2) .$$

4. Скалярное произведение сигнала на него же неотрицательно и может быть равно нулю только для нулевого элемента

$$(s, s) \ge 0 ,$$
$$(s, s) = 0 \Leftrightarrow s = 0 .$$

5. Скалярное произведение любого сигнала и нулевого элемента равно нулю

$$(0, s) = 0.$$

6. Скалярное произведение удовлетворяет неравенству Коши-Буняковского

$$|(s_1, s_2)|^2 \le (s_1, s_1)(s_2, s_2),$$

где равенство достигается только при $s_1 = \lambda s_2$.

Конечномерное линейное пространство с введённым на нём скалярным произведением называется евклидовым E.

Бесконечномерное линейное пространство с скалярным произведением называется гильбертовым H.

3. Норма

Нормой сигнала называется число $\|s\|$, сопоставляемое ему с помощью правила, обладающего свойствами:

1. Норма неотрицательна, нулевую норму имеет только нулевой элемент

$$\|s\| \ge 0; \ \|s\| = 0 \Leftrightarrow s = 0.$$

2. Норма сигнала, умноженного на число

$$\|\lambda s\| = |\lambda| \, \|s\|.$$

3. Неравенство треугольника

$$\|s_1 + s_2\| \le \|s_1\| + \|s_2\|.$$

В качестве нормы евклидова (гильбертова) пространства часто рассматривается

$$\|s\| = \sqrt{(s, s)}.$$

При таком определении нормы неравенство Коши-Буняковского перепишется в виде:

$$|(s_1, s_2)| \le \|s_1\| \cdot \|s_2\|.$$

4. Пространство сигналов $L_2[a,b]$

Пространством сигналов $L_2[a,b]$ называется линейное пространство, элементами которого являются квадратично-интегрируемые на интервале $t \in [a,b]$ сигналы:

$$\int_a^b |s(t)|^2\, dt < \infty .$$

Скалярное произведение в $L_2[a,b]$ определяется как

$$(s_1,s_2)=\int_a^b s_1(t)s_2^*(t)dt,$$

норма сигнала

$$\|s\|=\sqrt{\int_a^b \left|s(t)\right|^2 dt}\,.$$

При таком определении квадрат нормы даёт энергию сигнала:

$$E_s(a,b)=\|s\|^2=\int_a^b \left|s(t)\right|^2 dt\,.$$

5. Понятие базиса

Совокупность сигналов $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ из R называется линейно-независимой системой, если их линейная комбинация обращается в нуль только при тривиальном наборе коэффициентов:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_n f_n=0 \Leftrightarrow \alpha_n=0, n=0,\ldots,N-1.$$

Линейное пространство называется N-мерным, если в нём существуют не более N линейно-независимых сигналов.

Линейное пространство называется бесконечномерным, если в нём существует любое количество линейно-независимых сигналов.

Совокупность N линейно-независимых сигналов $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ в линейном пространстве размерности N называется базисом этого пространства. Для любого сигнала s найдутся такие числа $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$, что

$$s=\sum_{n=0}^{N-1}C_n f_n\,.$$

Сигналы $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ называются базисными функциями.

В задачах теории сигналов пространство может быть и бесконечномерным.

6. Обобщённый ряд Фурье. Обобщённый спектр сигнала

Рассмотрим гильбертово пространство H. Система ненулевых функций (сигналов) $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется ортогональной, если выполняется условие ортогональности:

$$(f_n, f_k) = \begin{cases} \|f_n\|^2, n = k \\ 0, n \neq k \end{cases}, n, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Если сигналы ортогональны, то они и линейно-независимы. Действительно, пусть линейная комбинация $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n$ обращается в нуль:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n = 0.$$

Умножим левую и правую часть равенства скалярно на φ_k:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_n, f_k \right) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда с учётом свойств скалярного произведения получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (f_n, f_k) = 0,$$

и, ввиду условия ортогональности, запишем

$$\alpha_k \|f_k\|^2 = 0.$$

Так как сигналы $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ненулевые, то $\alpha_k = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, то есть обращение рассматриваемой линейной комбинации в нуль возможно только при тривиальном наборе коэффициентов, что и означает линейную независимость системы.

В евклидовом пространстве ортогональная система функций, количество элементов в которой совпадает с размерностью линейного пространства, является полной и образует базис, который называется ортогональным базисом.

В гильбертовом линейном пространстве ортогональная система функций может иметь бесконечное количество элементов, но при этом не являться полной, то есть не образовывать базиса.

Любой элемент из H можно представить можно представить в виде:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} C_n f_n ,$$

где $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ - полная ортогональная система функций (ортогональный базис). Умножим левую и правую часть записанного равенства на φ_k скалярно:

$$(s, f_k) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (f_n, f_k) = C_k \|f_k\|^2,\ k = 0,1,2,...,$$

откуда

$$C_k = \frac{1}{\|f_k\|^2}(s, f_k),\ k = 0,1,2,....$$

Рассмотренное представление называется обобщённым рядом Фурье. Совокупность коэффициентов ряда $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется обобщённым спектром сигнала в базисе $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

7. Равенство Парсеваля

Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональный базис в H, рассмотрим два сигнала

$$s_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} f_n ,\ s_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} f_n ,$$

и их скалярное произведение

$$(s_1, s_2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} f_n, \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} f_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{1n} C_{2k}^{*} \left(f_n, f_k \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} C_{2n}^{*} \|f_n\|^2 .$$

Полученное равенство

$$(s_1, s_2) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} C_{2n}^{*} \|f_n\|^2$$

называется равенством Парсеваля.

В частном случае, когда $\|s\| = \sqrt{(s,s)}$ и $s = s_1 = s_2$, равенство Парсеваля перепишется как

$$\|s\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \|f_n\|^2.$$

8. Экстремальное свойство коэффициентов обобщённого ряда Фурье

Рассмотрим случай, когда сигнал приближается в неполной ортогональной системе функций

$$s(t) \approx \psi(t) = \sum_{n} a_n f_n(t).$$

Неполная система ортогональных функций может быть использована изначально для приближения сигнала из каких-нибудь соображений, или, например, получиться при усечении обобщённого ряда Фурье. При этом возникает задача выбора коэффициентов $\{a_n\}_{n=0}^{N-1}$. Выберем коэффициенты так, чтобы минимизировать энергию разностного сигнала:

$$\|s - \psi\|^2 \to \min.$$

Далее

$$\|s-\psi\|^2 = \left(s - \sum_n a_n f_n, s - \sum_k a_k f_k \right) =$$

$$= (s,s) - \left(s, \sum a_k f_k\right) - \left(\sum a_n f_n, s\right) + \left(\sum a_n f_n, \sum a_k f_k\right) =$$

$$= \|s\|^2 - \sum a_k^{*}(s, f_k) - \sum a_n (f_n, s) + \sum\sum a_n a_k^{*} (f_n, f_k) =$$

$$= \|s\|^2 - \sum\left(a_n^{*} C_n \|f_n\|^2 + a_n C_n^{*} \|f_n\|^2 \right) + \sum |a_n|^2 \|f_n\|^2 =$$

$$= \|s\|^2 - \sum 2\operatorname{Re} a_n^{*} C_n \|f_n\|^2 + \sum |a_n|^2 \|f_n\|^2 \pm \sum |C_n|^2 \|f_n\|^2 =$$

$$= \|s\|^2 - \sum_n |C_n|^2 \|f_n\|^2 + \sum_n |a_n - C_n|^2 \|f_n\|^2.$$

На последнем шаге учтено, что $|a_n - C_n|^2 = |a_n|^2 + |C_n|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, a_n C_n^*$.

Минимум полученного выражение достигается, когда последнее слагаемое $\sum |a_n - C_n|^2 \|f_n\|^2$ равно нулю, то есть когда коэффициенты аппроксимирующей функции совпадают с коэффициентами обобщённого ряда Фурье

$$a_n = C_n,\ n = 0,...,N-1.$$

При этом достигается минимальная энергия разностного сигнала

$$\|s - \psi\|^2_{\min} = \|s\|^2 - \sum_n |C_n|^2 \|f_n\|^2 = \|s\|^2 - \|\psi\|^2.$$

Таким образом, при приближении сигнала линейной комбинацией ортогональных функций, наименее уклоняется от сигнала такая приближающая функция, коэффициенты которой являются коэффициентами обобщённого ряда Фурье.

Литература

Основная литература

1. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов / О. А. Стеценко. — М.: Высш. шк., 2007.

2. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Дрофа, 2006.

3. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Радио и связь, 1986.

4. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 2000.

Дополнительная литература

5. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.: ил. — Библиогр.: с. 804 (15 назв.)

6. Сигналы. Теоретическая радиотехника: Справ. пособие / А. Н. Денисенко. — М.: Горячая линия - Телеком, 2005. — 704 с.

7. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М.: Наука, 1998. — 608 с.

8. Назаров А.В., Козырев Г.И., Шитов И.В. и др. Современная телеметрия в теории и на практике. учебный курс. – СПб.: Наука и Техника, 2007.