Практическое занятие №9

Теория вычетов: примеры решения задач на разложение функции в ряд Тейлора и Лорана, нахождение типа и.о.т.и вычетов

Определение. *Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, определяемое равенством*

$$res f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz,$$

где C – любой контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$, содержащий внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.

Теорема. *Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 является коэффициент c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0*, т.е. $res f(z_0) = c_{-1}$

<u>Формулы для вычисления вычетов функции $f(z)$</u>

1. Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$,
то $res f(z_0) = 0$.

2. Если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения вычета нужно найти коэффициент c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана: $res f(z_0) = c_{-1}$.

3. Если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$res f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n].$$

<u>Частные случаи (для полюсов)</u>

А) если z_0 – простой полюс, т.е. полюс первого порядка $(n=1)$, то

$$resf(z_0) = \lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)\ ]\ .$$

Б) для полюса 2-го порядка

$$resf(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}[f(z)(z-z_0)^2].$$

В) для полюса 3-го порядка

$$resf(z_0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^2}{dz^2}[f(z)(z-z_0)^3]$$

<u>*Пример.*</u> Разложить в ряд Лорана функцию

$(z+6)^5 cos\frac{1}{z+6}$ по степеням *(z+6)*. Указать главную часть ряда Лорана, указать область сходимости полученного ряда. Найти иот функции и ее тип. Вычислить вычет.

Решение. Используем разложение (4.3):

$cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z\epsilon C$

Тогда

$$cos\frac{1}{z+6} = 1 - \frac{1}{2!\,(z+6)^2} + \frac{1}{4!\,(z+6)^4} - \frac{1}{6!\,(z+6)^6} + \frac{1}{8!\,(z+6)^8} - \ldots,$$

Имеем следующее разложение функции

$$f(z) = (z+6)^5\Bigg(1 - \frac{1}{2!\,(z+6)^2} + \frac{1}{4!\,(z+6)^4} - \frac{1}{6!\,(z+6)^6} +$$

$$+\frac{1}{8!\,(z+6)^8} - \ldots\Bigg)$$

$$= (z+6)^5 - \frac{(z+6)^3}{2!} + \frac{(z+6)}{4!} - \frac{1}{6!\,(z+6)} + \frac{1}{8!\,(z+6)^3} - \ldots$$

Разложение справедливо в кольце $0 < |z+6| < +\infty$.

Это ряд Лорана, его главная часть

$$-\frac{1}{6!\,(z+6)}+\frac{1}{8!\,(z+6)^3}-\cdots$$

Главная часть полученного ряда Лорана имеет бесконечное количество членов (слагаемых).

У функции $f(z)=(z+6)^5 cos\frac{1}{z+6}$ есть изолированная особая точка (и.о.т.) z= - 6 (функция не является аналитической в этой точке). Данная точка будет существенно особой точкой функции.

Найдем вычет

$$resf(-6)=c_{-1}=\frac{-1}{6!}$$

Пример. Разложить в ряд Лорана функцию

$f(z)=(z-2)^4 sin\frac{8}{z-2}$ по степеням *(z-2).*

Указать главную часть ряда Лорана, указать область сходимости полученного ряда. Найти иот функции и ее тип. Вычислить вычет.

Решение. Используя разложение (4.2):

$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, z∈C

Имеем

$$sin\frac{8}{z-2}=\frac{8}{(z-2)}-\frac{8^3}{3!\,(z-2)^3}+\frac{8^5}{5!\,(z-2)^5}-\frac{8^7}{7!\,(z-2)^7}\dots,$$

Тогда функция раскладывается в ряд следующим образом

$$f(z)=(z-2)^4\Big(\frac{8}{(z-2)}-\frac{8^3}{3!\,(z-2)^3}+\frac{8^5}{5!\,(z-2)^5}-\frac{8^7}{7!\,(z-2)^7}\dots,\Big)=$$

$$=8(z-2)^3-\frac{8^3(z-2)}{3!}+\frac{8^5}{5!\,(z-2)}-\frac{8^7}{7!\,(z-2)^3}+\dots$$

Разложение справедливо в кольце

$0<|z-2|<+\infty$. (В указанной области $f(z)$ – аналитическая).

Получен ряд Лорана в указанном кольце. *Главная часть ряда Лорана имеет* *вид*:

$$\frac{8^5}{5!\,(z-2)} - \frac{8^7}{7!\,(z-2)^3} + \ldots$$

Главная часть ряда Лорана имеет бесконечное количество слагаемых.

У функции $f(z) = (z-2)^4 sin\frac{8}{z-2}$ есть изолированная особая точка (и.о.т.) z=2 (функция не является аналитической в этой точке). Данная точка является существенно особой точкой функции.

Найдем вычет

$$resf(2) = c_{-1} = \frac{8^5}{5!}$$

<u>*Пример.*</u> Разложить в ряд Лорана функцию

$f(z) = (z+3)^4 e^{\frac{9}{z+3}}$ по степеням *(z+3)*. Выделить главную часть ряда Лорана. Указать область сходимости ряда. Найти иот функции и ее тип. Вычислить вычет.

Решение. Используется разложение (4.1):

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$,   z∈C

В этом случае функция раскладывается в ряд:

$$f(z) = (z+3)^4 e^{\frac{9}{z+3}}$$

$$= (z+3)^4 (1 + \frac{9}{z+3} + \frac{9^2}{2!\,(z+3)^2} + \frac{9^3}{3!\,(z+3)^3} + \frac{9^4}{4!\,(z+3)^4} +$$

$$\frac{9^5}{5!(z+3)^5} + \frac{9^6}{6!(z+3)^6} + \frac{9^7}{7!(z+3)^7} + \cdots) \ldots$$

Раскрываем скобки и получаем

$$f(z) = (z+3)^4 e^{\frac{9}{z+3}} =$$

$$= (z+3)^4 + 9(z+3)^3 + \frac{9^2(z+3)^2}{2!} + \frac{9^3(z+3)}{3!} + \frac{9^4}{4!} +$$

$$+ \frac{9^5}{5!(z+3)} + \frac{9^6}{6!(z+3)^2} + \frac{9^7}{7!(z+3)^3} + \cdots$$

Разложение справедливо в кольце

$0 < |z+3| < +\infty.$

Получен ряд Лорана в указанном кольце. *Главная часть ряда Лорана имеет вид*:

$$\frac{9^5}{5!(z+3)} + \frac{9^6}{6!(z+3)^2} + \frac{9^7}{7!(z+3)^3} + \cdots$$

Главная часть ряда Лорана имеет бесконечное количество слагаемых.

Иот заданной функции z= -3 (функция не является аналитической в этой точке). Данная точка является существенно особой точкой функции.

Найдем вычет

$$res f(-3) = c_{-1} = \frac{9^5}{5!}$$

Пример. Найти все разложения в ряд функции

$f(z) = \frac{3}{z+2}$ по степеням $(z+5)$.

Решение. В процессе решения будем использовать стандартное разложение (4.4)

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1 \quad .$$

Преобразуем заданную функцию

$$f(z) = \frac{3}{(z+5)+2-5} = \frac{3}{(z+5)-3}$$

1) Выполним следующее действие с функцией

$$f(z) = \frac{3}{(z+5)-3} = \frac{3}{-3(1-\frac{z+5}{3})} = \frac{-1}{1-\frac{z+5}{3}}$$

Далее можно использовать стандартное разложение (4.4):

$$f(z) = \frac{-1}{1-\frac{z+5}{3}} = -(1 + \frac{z+5}{3} + \frac{(z+5)^2}{9} + \frac{(z+5)^3}{27} \dots.)$$

Получили ряд Тейлора в круге

$|\frac{z+5}{3}| < 1$ или $|z+5| < 3$

2) Можно выполнить еще одно преобразование функции

$$f(z) = \frac{3}{(z+5)-3} = \frac{3}{(z+5)(1-\frac{3}{z+5})} = \frac{3}{z+5} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z+5}}$$

Далее можно использовать стандартное разложение (4.4):

$$\frac{1}{1-\frac{3}{z+5}} = (1 + \frac{3}{z+5} + \frac{3^2}{(z+5)^2} + \frac{3^3}{(z+5)^3} \dots.)$$

тогда $f(z) = \frac{3}{z+5} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z+5}} = \frac{3}{z+5}\left(1 + \frac{3}{z+5} + \frac{3^2}{(z+5)^2} + \frac{3^3}{(z+5)^3} + \cdots.\right) = \frac{3}{z+5} +$

$+ \frac{3^2}{(z+5)^2} + \frac{3^3}{(z+5)^3} + \cdots.$

Получили ряд Лорана в кольце $3 < |z+5| < \infty$.

Ответ:

1) **в круге** $\boldsymbol{|z+5| < 3}$ функция разлагается в ряд Тейлора

$$f(z) = -(1 + \frac{z+5}{3} + \frac{(z+5)^2}{9} + \frac{(z+5)^3}{27} \dots.)$$

2) **в кольце** $\boldsymbol{3 < |z+5| < \infty}$ функция разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{3}{z+5} + \frac{3^2}{(z+5)^2} + \frac{3^3}{(z+5)^3} + \cdots.$$

Пример. Найти все разложения в ряд функции

$f(z) = \frac{4}{2z+5}$ по степеням *(z+1).*

Решение. Используем разложение (4.4)

$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$,
$|z| < 1$

Преобразуем заданную функцию

$$f(z) = \frac{4}{2(z+1) - 2 + 5} = \frac{4}{2(z+1) + 3}$$

1) В круге $|z+1| < \frac{3}{2}$ получаем ряд Тейлора вида

$$f(z) = \frac{4}{2(z+1) - 2 + 5} = \frac{4}{2(z+1) + 3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2(z+1)}{3}}$$

$$= \frac{4}{3}\left(1 - \frac{2(z+1)}{3} + \frac{4(z+1)^2}{9} - \cdots.\right)$$

2) В кольце $\frac{3}{2} < |z+1| < \infty$ получаем ряд Лорана вида

$$f(z) = \frac{4}{2(z+1)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2(z+1)}}$$

$$= \frac{4}{2(z+1)}\left(1 - \frac{3}{2(z+1)} + \frac{3^2}{4(z+1)^2} - \frac{3^3}{8(z+1)^3} + \cdots.\right)$$

$$= \frac{2}{z+1} - \frac{3}{(z+1)^2} + \frac{9}{2(z+1)^3} - \cdots.$$

Пример. Указать разложение в ряд функции

$f(z) = \frac{6}{z-4}$ в области $|z| < 4$.

Решение.

В круге $|z| < 4$ заданная функция раскладывается в ряд Тейлора

$$f(z)=\frac{6}{z-4}=\frac{6}{-4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{4}}=\frac{-3}{2}\left(1+\frac{z}{4}+\frac{z}{4^2}^{2}+\frac{z^3}{4^3}+\cdots..\right)$$

<u>Пример.</u> Указать разложение в ряд функции

$f(z)=\frac{2}{z+7}$ в области $10<|z-3|<\infty$.

Решение.

В кольце $10<|z-3|<\infty$ заданная функция раскладывается в ряд Лорана

$$f(z)=\frac{2}{z+7}=\frac{2}{(z-3)+3+7}=\frac{2}{(z-3)+10}=\frac{2}{(z-3)}\cdot\frac{1}{1+\frac{10}{(z-3)}}$$

$$=\frac{2}{(z-3)}\left(1-\frac{10}{(z-3)}+\frac{10^2}{(z-3)^2}-\frac{10^3}{(z-3)^3}+\frac{10^4}{(z-3)^4}\dots\dots\right)$$

$$=\frac{2}{(z-3)}-\frac{20}{(z-3)^2}+\frac{2\cdot10^2}{(z-3)^3}-\frac{2\cdot10^3}{(z-3)^4}+\cdots.$$

Более сложные ситуации связаны с функциями, у которых несколько изолированных особых точек (и.о.т.).

<u>Пример.</u> Получить все разложения функции $f(z)=\frac{8z+11}{z^2+3z+2}$

в ряд по степеням z.

Решение. Находим и.о.т. (приравняем знаменатель дроби к нулю): $z_1=-2$, $z_2=-1$. Изобразим на комплексной плоскости возможные области. Для этого проведем окружности с центром в $z_0=0$ через точки $z_1=-2$ и $z_2=-1$. Получим три «кольца» с центром в точке $z_0=0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической:

1) круг $|z|<1$,

2) кольцо $1<|z|<2$,

3) $2 < |z| < +\infty$ – внешность круга $|z| \le 2$ (см. рис. 1)

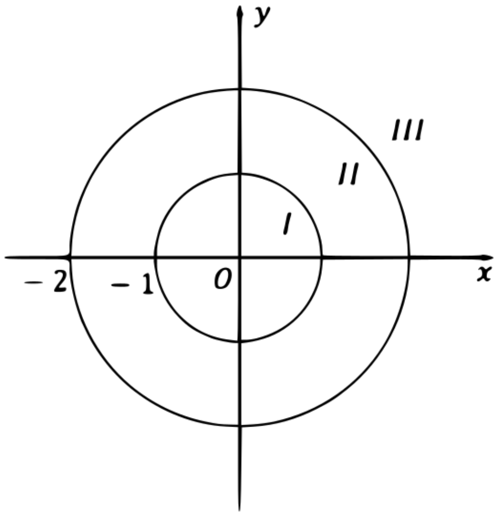

Рис. 1

Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$f(z) = \frac{8z + 11}{z^2 + 3z + 2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} = \frac{3}{z+1} + \frac{5}{z+2}.$$

A и B нашли методом неопределенных коэффициентов.

1) **Рассмотрим круг $|z| < 1$.**

В этой области каждое слагаемое $\frac{3}{z+1}$ и $\frac{5}{z+2}$ по теореме 2 раскладываются в ряд Тейлора.

Получаем $f_1(z) = \frac{3}{1+z} = 3(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots)$ для $|z| < 1$

$f_2(z) = \frac{5}{z+2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{5}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} - \ldots\right)$ для $|z| < 2$.

Тогда заданная функция представима рядом Тейлора вида

$$f(z) = \frac{3}{1+z} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 3(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots) + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} - \ldots\right)$$

$$= \frac{11}{2} - \frac{17}{4}z + \frac{29}{8}z^2 - \frac{53}{16}z^3 + \ldots$$

2) **Рассмотрим кольцо $\mathbf{1 < |z| < 2}$.**

В этом случае функция $f_1(z) = \frac{3}{z+1}$ раскладывается уже в ряд Лорана

($1 < |z| < \infty$), функция $f_2(z) = \frac{5}{z+2}$ раскладываются в ряд Тейлора

($|z| < 2$)

Получаем разложение заданной функции в ряд вида

$$f(z) = \frac{3}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} =$$

$$= \frac{3}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots\right)$$

$$+ \frac{5}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} + \dots\right) =$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{5z}{4} + \frac{5z^2}{8} - \frac{5z^3}{16} + \dots + \frac{3}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{3}{z^3} - \frac{3}{z^4} + \dots$$

В итоге получается уже **<u>ряд Лорана</u>**. Главная часть ряда Лорана имеет вид

$$\frac{3}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{13}{z^3} - \frac{3}{z^4} + \dots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество слагаемых.

3) **Рассмотрим $\mathbf{|z| > 2}$ (кольцо $\mathbf{2 < |z| < \infty}$)**

В таком кольце каждая функция $f_1(z) = \frac{3}{z+1}$ и $f_2(z) = \frac{5}{z+2}$ разлагаются в ряд Лорана.

$$f(z) = \frac{3}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} + \frac{5}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}}.$$

Используя формулу (4.4), получим

$$f(z) = \frac{3}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots\right) + \frac{5}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots\right) =$$

$$=\frac{8}{z}-\frac{13}{z^2}+\frac{23}{z^3}-\frac{43}{z^4}+\ldots$$

В итоге тоже получается **ряд Лорана**. Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное количество слагаемых. В этом случае у ряда Лорана нет правильной части.

Ответ в этой задаче состоит из 3- пунктов:

1) **круг $|z|<1$**

имеем ряд **Тейлора** $f(z)=\frac{11}{2}-\frac{17}{4}z+\frac{29}{8}z^2-\frac{53}{16}z^3+\ldots$

2) **кольцо $1<|z|<2$**

имеем ряд **Лорана** $f(z)=\frac{5}{2}-\frac{5z}{4}+\frac{5z^2}{8}-\frac{5z^3}{16}+\ldots+\frac{3}{z}-\frac{3}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\ldots$

3) **кольцо $2<|z|<\infty$**

имеем ряд **Лорана** $f(z)=\frac{8}{z}-\frac{13}{z^2}+\frac{23}{z^3}-\frac{43}{z^4}+\ldots$

Пример. Разложить функцию $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$ в ряд Лорана

в кольце $0<|z-1|<3$.

Решение.

В этом примере задана область разложения. Ответ будет один, связанный только с заданной областью.

Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}.$$

Используя разложение (4.4), получим

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-1}{3}+\frac{(z-1)^2}{9}-\frac{(z-1)^3}{27}+\ldots\right]$$

Область сходимости этого ряда

$\left|\frac{z-1}{3}\right| < 1$ или $|z-1| < 3$.

Таким образом, разложение в ряд Лорана в кольце $0 < |z-1| < 3$ имеет вид

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3} - \frac{z-1}{9} + \frac{(z-1)^2}{27} - \frac{(z-1)^3}{81} + \ldots$$

Слагаемое $\frac{1}{z-1}$ является степенью $(z-1)^{-1}$ и поэтому не требует дальнейшего разложения. Оно образует *главную часть ряда Лорана*.

Домашнее задание.

Учебно-методическое пособие «Теория функций комплексного переменного», часть 2. Задача №2.4.

Пособие размещено на сайте кафедры ВМ-2

http://vm-2.mozello.ru

раздел «Математический анализ. 4 семестр».