Лекция №8

§ 5. Теория вычетов функций:

классификация изолированных особых точек по виду главной части ряда Лорана, вычеты

Напомним некоторые понятие и теоремы, что рассматривались ранее.

<u>Определение.</u> Рядом Лорана называется ряд вида

$$..+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+$$
$$+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

где z_0, c_n – комплексные постоянные, z – комплексная переменная.

<u>Определение.</u> Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+..$$

называется главной частью ряда Лорана.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+..$$

называется правильной частью ряда Лорана.

Ряд Лорана сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots \text{ и}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

Областью сходимости первого из этих рядов является внешность круга $|z - z_0| > r$. Областью сходимости второго ряда является внутренность круга $|z - z_0| < R$.

Если $r < R$, то ряд Лорана сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$. Здесь $r \geq 0$, $0 < R < +\infty$.

Теорема. *Функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ (не исключаются случаи $r = 0$ и $R = +\infty$) представляется в этом кольце единственным образом в виде ряда Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты c_n находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Здесь L – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащей внутри данного кольца.

5.3 Классификация изолированных особых точек по виду главной части ряда Лорана

Теорема 5.6. *Точка z_0 является устранимой особой точкой, если в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 отсутствует главная часть, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Теорема 5.7. *Точка* z_0 *является полюсом* n*-го порядка функции* $f(z)$, *если главная часть ряда Лорана для* $f(z)$ *в окрестности точки* z_0 *содержит конечное число слагаемых, т.е.*

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{ , где } c_{-n} \neq 0.$$

Теорема 5.8. *Точка* z_0 *является существенно особой точкой для функции* $f(z)$, *если главная часть ряда Лорана для* $f(z)$ *в окрестности* z_0 *содержит бесконечное количество членов.*

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{sin3z}{z}$.

Определить тип особой точки.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ $z_0 = 0$. Используя разложение в ряд Тейлора для функции $sinz$ (4.2) в окрестности точки $z_0 = 0$, т.е.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in C$$

Получим разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[(3z) - \frac{(3z)^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{(3z)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right] =$$

$$= 3 - \frac{9z^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{(3z)^{2n} \cdot 3}{(2n+1)!} + \ldots$$

Это разложение не содержит главной части.

Поэтому точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^5}$.

Определить тип особой точки.

Решение. Используя разложение в ряд Тейлора для функции e^z (4.1) в окрестности точки $z_0 = 0$, т.е.

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in C$

Заданная функция $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^5}$.

Получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{z^5}\left[1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3 2!} + \frac{1}{z^2 3!} + \frac{1}{z 4!} + \frac{1}{5!} + \frac{z}{6!} + \ldots$$

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является полюсом четвертого порядка, т. к. наибольший показатель степени z, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, равен четырем.

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = (z-2)^2 e^{\frac{1}{z-2}}$.

Определить тип особой точки.

Решение. Используем разложение (4.1)

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$$

Полагая $t = \frac{1}{z-2}$, получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$

$$f(z) = (z-2)^2 \left[1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!\,(z-2)^2} + \frac{1}{3!\,(z-2)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4!(z-2)^4} + \ldots \right] = (z-2)^2 + (z-2) + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!(z-2)} +$$

$$+ \frac{1}{4!(z-2)^2} + \ldots$$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $(z-2)$. Следовательно, точка $z_0 = 2$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

5.4 Вычеты функций

Определение 5.6. *Вычетом аналитической функции* $f(z)$ *в изолированной особой точке* z_0 *называется комплексное число, обозначаемое символом* $resf(z_0)$ *и определяемое равенством*

$$resf(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f\,(z) dz,$$

где C *– любой контур, лежащий в области аналитичности функции* $f(z)$, *содержащий внутри себя единственную особую точку* z_0 *функции* $f(z)$.

Предполагается, что контур C проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Теорема 5.9. *Вычетом аналитической функции* $f(z)$ *в изолированной особой точке* z_0 *является коэффициент* c_{-1} *при* $(z-z_0)^{-1}$ *в разложении функции* $f(z)$ *в ряд Лорана в окрестности точки* z_0.

Формулы для вычисления вычетов функции $f(z)$

1. Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$,

то $resf(z_0) = 0$.

2. Если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$resf(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z - z_0)^n].$$

В частности, если z_0 – простой полюс, т.е. полюс первого порядка $(n = 1)$, то

$$resf(z_0) = \lim_{z \to z_0} [f(z)(z - z_0)\ ]\ .$$

3. Если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения вычета нужно найти коэффициент c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана: $resf(z_0) = c_{-1}$.

Пример. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{cosz-1}{z^2(z-\pi)}$ в ее особых точках.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1 = 0, z_2 = \pi$.

В точке $z = 0$

$$\lim_{z \to 0} f\,(z) = \lim_{z \to 0} \frac{cosz - 1}{z^2(z-\pi)} = \lim_{z \to 0} \frac{-z^2}{2z^2(z-\pi)} = \frac{1}{2\pi}.$$

Следовательно, $z = 0$ – устранимая особая точка и $res\, f(0) = 0$.

Точка $z = \pi$ - это полюс первого порядка. Тогда

$$res\ f(\pi) = \lim_{z\to\pi} \frac{(cosz - 1)(z - \pi)}{z^2(z - \pi)} = \frac{-1 - 1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2}.$$

Пример. Найти вычет функции $f(z) = z^2 sin\frac{1}{z}$ в особой точке.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ - точка $z = 0$. Выпишем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z, используя формулу

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Получаем

$$f(z) = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \frac{1}{7!\,z^7} + \ldots\right) =$$

$$= z - \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{5!\,z^3} - \frac{1}{7!\,z^5} + \ldots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, поэтому точка $z = 0$ - существенно особая точка функции $f(z)$. Вычет функции в точке $z = 0$ есть коэффициент $c_{-1} = -\frac{1}{3!}$, т.е. $res\ f(0) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$, (теорема 5.9).

Пример. Найти вычет функции $f(z) = \frac{1}{z^5 + 4z^3}$ в ее особых точках.

Решение. Особые точки функции находятся из решения

уравнения $z^5 + 4z^3 = 0$, т.е. $z^3(z + 2i)(z - 2i) = 0$. Получаем,

$z_1 = 0$ – полюс третьего порядка,

$z_{2,3} = \pm 2i$ – полюсы первого порядка.

Используя приведенные выше формулы для вычисления вычетов, найдем вычеты в точках $z_2,\ z_3$:

$$res\, f(2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(2i)^3 4i} = \frac{1}{32},$$

$$res\, f(-2i) = \lim_{z\to -2i} \frac{(z+2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(-2i)^3(-4i)} = \frac{1}{32}.$$

Найдем вычет в точке z_1:

$$res\, f(0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1\cdot z^3}{z^3(z^2+4)}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[-\frac{2z}{(z^2+4)^2}\right] =$$

$$= -\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z^2+4)^2} = -\lim_{z\to 0}\frac{-3z^2+4}{(z^2+4)^3} = -\frac{1}{16}.$$

<u>Пример.</u> Найти изолированные особые точки (иот) функции, их тип, вычислить вычеты функции в таких точках:

$f(z) = (z-3)^4 cos\frac{1}{z-3}$.

Решение. Изолированная особая точка $z = 3$.

Используем

$cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, z ∈ C.

В данном случае нужно разложить функцию в ряд Лорана

$$f(z) = (z-3)^4\left(1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \right.$$

$$\left. + \ldots\right) = (z-3)^4 - \frac{(z-3)^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!\,(z-3)^2} + \ldots$$

В данном случае главная часть ряда Лорана имеет бесконечное количество слагаемых. Таким образом, изолированная особая точка $z = 3$ является существенно особой точкой. Находим коэффициент при $(z-3)^{-1}$. Этот коэффициент равен нулю, значит вычет функции $res\, f(3) = 0$.

Пример. Найти изолированные особые точки (иот) функции, их тип, вычислить вычеты функции в таких точках:

$f(z) = (z-1)^4 sin\frac{1}{z-1}$.

Решение. Изолированная особая точка $z = 1$.

Используем

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad$ z ∈ C.

В данном случае нужно разложить функцию в ряд Лорана

$$f(z) = (z-1)^4 \left(\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{3!\,(z-1)^3} + \frac{1}{5!\,(z-1)^5} - \frac{1}{7!\,(z-1)^7} + \ldots\right) =$$

$$= (z-1)^3 - \frac{(z-1)}{3!} + \frac{1}{5!\,(z-1)} - \frac{1}{7!\,(z-1)^3} + \ldots$$

Главная часть ряда Лорана имеет вид:

$$\frac{1}{5!\,(z-1)} - \frac{1}{7!\,(z-1)^3} + \cdots.$$

Главная часть ряда Лорана имеет бесконечное количество слагаемых. Имеем, что иот $z = 1$ является существенно особой точкой. Находим коэффициент при $(z-1)^{-1}$.

Этот коэффициент равен $\frac{1}{5!}$. Тогда вычет функции $res\, f(1) = \frac{1}{5!}$.