Лекция 5

3. ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основным способом решения системы уравнений Максвелла для электродинамических задач является сведение системы к одному дифференциальному уравнению более высокого порядка методом исключения. В некоторых случаях применяется способ получения такого уравнения за счет проведения замены переменных. Если исходной системой уравнений является полная система уравнений (2.6) или (2.24), то решение уравнения представляет электромагнитное поле в виде волны. Поэтому дифференциальное уравнение относительно одной неизвестной величины, получаемое из системы уравнений Максвелла получило название волнового уравнения. Рассмотрим основные пути получения волновых уравнений.

3.1. Волновые уравнения для однородной среды при отсутствии сторонних источников

Предположим, что необходимо найти электромагнитное поле в однородной среде при отсутствии сторонних источников. Такая задача удовлетворяет системе уравнений Максвелла в виде (2.24)

$$rot\dot{\vec{H}}_0 = j\varpi\ \dot{\varepsilon}\varepsilon_0\ \dot{\vec{E}}_0,$$

$$rot\dot{\vec{E}}_0 = -j\varpi\ \mu\mu_0\dot{\vec{H}}_0,$$

$$div\,\dot{\varepsilon}\varepsilon_0\dot{\vec{E}}_0 = \dot{\rho}_0,$$

$$div\,\mu\mu_0\dot{\vec{H}}_0 = 0.$$

Применяя метод Гаусса, определяем значение вектора $\dot{\vec{E}}_0$ из первого уравнения

$$\dot{\vec{E}}_0 = rot\dot{\vec{H}}_0 \Big/ j\omega\varepsilon\,\varepsilon_0 \tag{3.1}$$

и подставляем это выражение во второе уравнение

$$rot\,(rot\dot{\vec{H}}_0 \Big/ j\omega\varepsilon\,\varepsilon_0) = -j\omega\,\mu\,\mu_0\dot{\vec{H}}_0\,.$$

Так как среда однородная, то диэлектрическая проницаемость является постоянной величиной, не зависящей от координат, поэтому знаменатель выражения в левой части можно вынести из под операторов вычисления операции ротора. И для того, чтобы упростить выражение домножим обе части уравнения на величину знаменателя. После сокращения получаем

$$rot\,(rot\dot{\vec{H}}_0) = -j\omega\,\mu\,\mu_0\dot{\vec{H}}_0 \cdot j\omega\varepsilon\,\varepsilon_0\,. \tag{3.2}$$

Для всего коэффициента правой части введем обозначение $k^2 = \omega^2\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0$.

Величину k назовем волновым числом. В левой части выражения сложный оператор второго порядка можно заменить более простыми операторами, если воспользоваться тождеством из математической теории поля

$$rot(rot\dot{\vec{H}}_0) = grad\, div\dot{\vec{H}}_0 - \vec{\nabla}^2\dot{\vec{H}}_0, \tag{3.3}$$

тогда (3.2) принимает вид

$$grad\, div\dot{\vec{H}}_0 - \vec{\nabla}^2\dot{\vec{H}}_0 = k^2\dot{\vec{H}}_0. \tag{3.4}$$

Но из четвертого уравнения Максвелла в случае однородной среды имеем

$$div\mu\mu_0\dot{\vec{H}}_0 = \mu\mu_0\, div\dot{\vec{H}}_0 = 0, \text{ откуда } div\dot{\vec{H}}_0 = 0.$$

С учетом этого первый член в (3.3) обращается в нуль, и окончательно получаем

$$\vec{\nabla}^2\dot{\vec{H}}_0 + k^2\dot{\vec{H}}_0 = 0. \tag{3.5}$$

Это однородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка называется волновым уравнением или уравнением Гельмгольца. Оно должно рассматриваться совместно с дифференциальным соотношением (3.1)и граничными условиями.

Аналогичным образом можно получить уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды напряженности электрического поля, но при этом приходиться делать предположение об отсутствии электрических зарядов в среде.

Функции, удовлетворяющие однородным дифференциальным уравнениям, в математике называются собственными функциями уравнений. Но также известно, что решения уравнения Гельмгольца имеют вид волн. Поэтому решения уравнений типа (3.5) принято называть собственными волнами. Также из математики известно, что любое решение неоднородного дифференциального уравнения можно представить в виде разложения по собственным функциям соответствующего однородного уравнения. Поэтому любое решение неоднородного уравнения Гельмгольца (или, говоря по другому, любое электромагнитное поле) можно представить в виде разложения по собственным волнам, удовлетворяющим уравнению (3.5) и граничным условиям в пространстве. Именно поэтому поиск общих решений однородного уравнения Гельмгольца для различных граничных условий является важным.

Вид собственных волн зависит не только от граничных условий, но и от используемой системы координат, так как оператор Лапласа $\vec{\nabla}^2$ имеет различный вид в разных системах координат. Для случая бесконечного пространства собственные волны зависят только от вида системы координат, и они получили специальные названия:

- плоские волны – собственные волны уравнения Гельмгольца в декартовых координатах;

- сферические волны – собственные волны уравнения Гельмгольца в сферических координатах;
- цилиндрические волны – собственные волны уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах.

Эти определения являются первичными, исходящими из математической формулировки задач электродинамики, в дальнейшем будут даны физические определения.

Если в качестве исходной системы уравнений Максвелла использовать уравнения (2.6), то способом, аналогичным показанному в данном разделе, можно получить дифференциальное уравнение д'Аламбера. На практике оно применяется существенно реже, чем уравнения Гельмгольца.

3.2. Волновые уравнения для однородной среды при наличии сторонних источников

В прикладных областях приходится часто рассматривать задачи по определению электромагнитных полей, создаваемых известными сторонними электрическими токами. Такие поля удовлетворяют системе уравнений Максвелла вида

$$\begin{aligned} &rot\dot{\vec{H}}_0 = \dot{\vec{J}}_{cm} + j\varpi\ \dot{\varepsilon}\varepsilon_0\ \dot{\vec{E}}_0, \\ &rot\dot{\vec{E}}_0 = -j\varpi\ \mu\mu_0\dot{\vec{H}}_0, \\ &div\,\dot{\varepsilon}\varepsilon_0\dot{\vec{E}}_0 = \dot{\rho}_0, \\ &div\mu\mu_0\dot{\vec{H}}_0 = 0. \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Если использовать для приведения этой системы уравнений к уравнению волнового типа прежний метод преобразования, то функция, задающая сторонние токи попадает под дифференциальный оператор вычисления операции ротора. Это, как правило, усложняет процедуру решения волнового уравнения. В математике известно, что чем проще правая часть неоднородного дифференциального уравнения, тем менее сложно получить его решение. Поэтому принято в процессе вывода волнового уравнения применять замену переменных так, чтобы получить волновое уравнение в простейшем виде. Замену переменных можно проводить различными способами. Наиболее часто водят новые величины, которые называются потенциалами поля, если исходная система уравнений Максвелла имеет вид (2.6), то вводят величины, называемые векторами Герца. Между различными способами введения новых величин нет особой разницы.

Рассмотрим получение волнового уравнения из (3.6) для однородной среды, применяя электрические потенциалы поля, так как сторонние источники заданы в виде электрического стороннего тока. В процессе вывода используем два тождества из математической теории поля. Известно, что:

$$div\,rot\vec{A} \equiv 0 \ \text{ и } \ rot\,grad\,\varphi \equiv 0, \qquad (3.7)$$

где $\vec{A}, \varphi$ векторная и скалярная функции координат, имеющие первые полные частные производные. Напомним, что доказательство тождеств в символическом виде основано на свойствах смешанного произведения векторов, используя оператор Гамильтона (3.7), можно записать так

$$div\, rot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \equiv 0 \quad \text{и} \quad rot\, grad\, \varphi = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi \equiv 0 .$$

Из четвертого уравнения (3.6) в однородной среде следует $div\dot{\vec{H}}_0 = 0$, поэтому, используя первое тождество из (3.7) можно ввести новую переменную, взамен комплексной амплитуды вектора напряженности магнитного поля так, что четвертое уравнение Максвелла будет выполняться как тождество

$$\dot{\vec{H}}_0 = rot\vec{A}. \qquad (3.8)$$

Подставим это представление во второе уравнение в (3.6)

$$rot\,\dot{\vec{E}}_0 = -j\omega\mu\mu_0\, rot\,\vec{A}, \text{ или } \quad rot(\dot{\vec{E}}_0 + j\omega\mu\mu_0\, rot\,\vec{A}) = 0 .$$

Вместо выражения, стоящего в последнем равенстве в скобках, можно ввести новую величину, используя второе тождество из (3.7), так, что второе уравнение Максвелла будет выполняться как тождество

$$(\dot{\vec{E}}_0 + j\omega\mu\mu_0\, rot\,\vec{A}) = -grad\,\varphi, \qquad \text{отсюда}$$

$$\dot{\vec{E}}_0 = -j\omega\mu\mu_0\, rot\,\vec{A} - grad\,\varphi. \qquad (3.9)$$

Заметим, что замена каких либо уравнений в системе тождественными равенствами, приводит к появлению паразитных решений системы уравнений, так как по определению тождество выполняется для любых величин, входящих в него, в уравнение выполняется только для величин, являющихся решениями. Так например, если существуют величины $\vec{A}$ и φ, удовлетворяющие представлениям (3.8), (3.9), а значит и соответствующим уравнениям Максвелла то им будут удовлетворять и величины $\vec{A}_1 = \vec{A} + grad\,U$ и $\varphi_1 = \varphi + C$, где U произвольная функция координат, а C - произвольная константа.

Подставляем (3.8) и (3.9) в первое уравнение Максвелла в (3.6)

$$rot\, rot\vec{A} = \dot{\vec{J}}_{cm} + j\omega\varepsilon\varepsilon_0(-j\omega\mu\mu_0 rot\vec{A} - grad\,\varphi),$$

Преобразуем оператор в левой части по правилу (3.3), раскроем скобки в правой части и обозначим вновь $k^2 = \omega^2\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0$. В результате имеем

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} + k^2\vec{A} = -\dot{\vec{J}}_{cm} + grad(div\vec{A} + j\omega\varepsilon\varepsilon_0\,\varphi). \qquad (3.10)$$

Выражение, стоящее в скобках, с учетом предыдущего замечания можно записать в виде

$$div\vec{A} + j\omega\varepsilon\varepsilon_0\,\varphi = div\vec{A}_1 + j\omega\varepsilon\varepsilon_0\,\varphi_1 - \vec{\nabla}^2 U - j\omega\varepsilon\varepsilon_0 C .$$

Произвольные величины U и C можно взять так, чтобы все выражение обращалось в нуль. Тогда

$$div\vec{A} + j\omega\varepsilon\varepsilon_0\,\varphi = 0, \tag{3.11}$$

это условие называется калибровочным условием Лоренца. Оно является фильтром, вырезающим паразитные решения волнового уравнения. По форме оно является аналогом закона непрерывности тока (2.17). Учитывая калибровочное условие в (3.10) получаем волновое уравнение Гельмгольца для электрического векторного потенциала электромагнитного поля

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} + k^2\vec{A} = -\dot{\vec{J}}_{cm}. \tag{3.12}$$

По математической классификации это неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. Комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля связаны с решением этого уравнения соотношениями, следующими из (3.8), (3.9), (3.11)

$$\dot{\vec{H}}_0 = rot\vec{A},\ \dot{\vec{E}}_0 = -j\omega\mu\mu_0\,rot\,\vec{A} + (grad\ div\vec{A})/\,j\omega\varepsilon\varepsilon_0. \tag{3.13}$$

В случае неоднородной среды волновое уравнение может быть получено из системы уравнений Максвелла подобным образом, но оно будет иметь более сложную форму.

3.2. Волновые уравнения для однородной среды при наличии виртуальных магнитных сторонних источников

В некоторых важных для практических приложений случаях закон распределения комплексной амплитуды стороннего электрического тока, входящий в (3.12), задается сложной громоздкой функцией. При этом исходное уравнение, а значит и его решение, будет отличаться значительной сложностью. Это, например, будет при петлеобразной форме линий стороннего тока, при протекании стороннего тока по кольцевому проводнику. Для упрощения математической формулировки исходной электродинамической задачи вводится физическая модель, предусматривающая сторонний виртуальный магнитный ток, задаваемый так, чтобы электромагнитное поле, создаваемое им, совпадало с полем, возникающим при протекании реального стороннего электрического тока.

Система уравнений Максвелла, описывающая такую модель будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&rot\dot{\vec{H}}_0 = j\varpi\,\dot{\varepsilon}\varepsilon_0\,\dot{\vec{E}}_0,\\
&rot\dot{\vec{E}}_0 = -\dot{\vec{J}}^{\,м}_{cm} - j\varpi\,\mu\mu_0\dot{\vec{H}}_0,\\
&div\,\dot{\varepsilon}\varepsilon_0\dot{\vec{E}}_0 = 0,\\
&div\mu\mu_0\dot{\vec{H}}_0 = \rho_м.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Здесь $\dot{\vec{J}}_{cm}^{м}$- комплексная амплитуда объемной плотности виртуального магнитного стороннего тока, $\rho_{м}$- комплексная амплитуда объемной плотности виртуального магнитного заряда, связанного с $\dot{\vec{J}}_{cm}^{м}$.

Проводя рассуждения, аналогичные рассмотренным в предыдущем разделе, можно получить волновое уравнение для магнитного векторного потенциала в виде

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}_{м} + k^2 \vec{A}_{м} = -\dot{\vec{J}}_{cm}^{м}, \qquad (3.15)$$

а комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля будут связаны с решением этого уравнения дифференциальными соотношениями

$$\dot{\vec{E}}_0 = -rot\vec{A}_{м} \quad \text{и} \quad \dot{\vec{H}}_0 = -j\omega\varepsilon\varepsilon_0\, rot\ \vec{A}_{ь} + (\,grad\ div\vec{A}_{м}\,)/\ j\omega\mu\mu_0. \quad (3.16)$$

При одновременном учете и электрического, и магнитного сторонних токов система уравнений Максвелла приобретает симметричный вид относительно электрических и магнитных величин. При этом система уравнений будет преобразовываться сама в себя при выполнении следующих подстановок:

$$\dot{\vec{E}}_0 \Leftrightarrow \dot{\vec{H}}_0,\ \mu_a \Leftrightarrow -\varepsilon_a,\ \dot{\vec{J}}_{cm} \Leftrightarrow -\dot{\vec{J}}_{cm}^{м},\ \rho \Leftrightarrow -\rho_{м}, \text{ добавим}$$
$$\vec{A} \Leftrightarrow -\vec{A}_{м}, \qquad (3.17)$$

При выполнении подстановок меняются местами уравнения в системе, но в целом вид уравнений сохраняется. Значит, нечто подобное будет происходить и с решениями системы уравнений Максвелла. Это позволяет сформулировать важный качественный принцип перестановочной двойственности системы уравнений Максвелла и ее решений.

Если имеется общее решение системы уравнений Максвелла для определенного закона распределения электрического стороннего тока, то общее решение системы уравнений Максвелла для соответствующего закона распределения виртуального стороннего магнитного тока может быть получено из имеющегося решения путем перестановок (3.17).

Заметим, что в нелинейных или анизотропных средах сведение системы уравнений Максвелла к волновому уравнению зачастую невозможно и для решения электродинамических задач используется исходная система уравнений.