

Лекция 15

9.4 Методы геометрической оптики, геометрической теории дифракции и метод интеграла Кирхгофа

Методы геометрической оптики (ГО) были развиты в 18 веке для решения оптических задач, когда отсутствовали современные понятия о природе электромагнитного поля, но они оказались эффективными для решения задач дифракции электромагнитных волн в освещенной области, в которую кроме дифракционного поля падает также поле падающей волны. Метод ГО применяется в случаях, когда все характерные геометрические размеры задачи (расстояние, кривизна поверхности и т.п.) существенно превосходят длину волны электромагнитного поля. Геометрическая оптика базируется на ряде постулатов:

- поле электромагнитной волны существует в виде множества геометрических лучей, не пересекающихся и не сливающихся друг с другом;
- лучи, проходящие через замкнутую линию, образуют лучевую трубку, энергия переносится волной только внутри лучевой трубки;
- фаза поля изменяется вдоль луча подобно тому, как это происходит в плоской волне, $\exp(-jkl)$, где l -расстояние, на которое распространяется волна вдоль луча;
- амплитуда поля изменяется за счет затухания в среде и за счет изменения сечения лучевой трубки;

$$E = E_0 e^{-\alpha l} \sqrt{S/S_0} \quad (9.7)$$

S -текущее значение площади лучевой трубки, S_0 -сечение лучевой трубки, в которой амплитуда волны была равна E_0 , l - расстояние вдоль среднего луча лучевой трубки между сечениями S и S_0 ;

- электромагнитное поле является поперечным и $E/H=W_0$;
- при падении лучевой трубки на границу раздела двух сред выполняться законы Снеллиуса для лучей и формулы Френеля для амплитуды волн.

Перечисленные постулаты позволяют получить приближенное решение задач дифракции на проводящих телах в освещенной области, и на диэлектрических телах. Примером таких задач является определение поля в раскрыве зеркальной и линзовой антенны по известному полю облучателя. Поле в раскрыве является дифракционным полем, возникающем при взаимодействии падающей волны, создаваемой облучателем, с поверхностью рефлектора зеркальной антенны или с телом диэлектрической линзы. Погрешность решения, полученного методом ГО можно оценить только экспериментальной проверкой, но во многих случаях она является приемлемой для технических приложений. Точность решения методом ГО также может быть оценена для дифракционных задач, для которых известно

аналитическое решение (9.5), например для дифракции на идеально-проводящем шаре, цилиндре, полуплоскости, бесконечном клине.

Метод ГО не позволяет получить решение дифракционных задач в области тени и дает неприемлемые ошибки в пограничной области между областью тени и освещенной областью. В 1956 г. Келлер предложил метод геометрической теории дифракции (ГТД), являющийся расширением метода ГО. Келлер ввел ряд дополнительных постулатов:

- при падении лучевой трубки на участок поверхности тела с большой кривизной, например на острый край, возникает семейство рассеянных или дифракционных лучей, распространяющихся во всех возможных направлениях;

- при прохождении лучевой трубки по касательной к поверхности тела возникают огибающие лучи, распространяющиеся вдоль поверхности тела, и создающие лучи, проникающие в область геометрической тени;

- амплитуда полей, возникающих за счет дифракционных и огибающих лучей, находится из решения модельных задач дифракции, для которых известно аналитическое или численное решение.

В качестве модельных задач используются задачи дифракции на телах, поверхностями которых можно аппроксимировать поверхность тела, для которых решается задача методом ГТД.

Метод ГТД расширяет круг дифракционных задач, для которых может быть получено решение, но, как и метод ГО не позволяет оценить погрешность полученного решения.

Метод интеграла Кирхгофа основан на определении дифракционного поля путем вычисления интеграла

$$\vec{E}_{\partial p} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \int_{S_q} \vec{E}_{nad q} \cdot \frac{\exp(-jkr_{pq})}{r_{pq}} dS_q, \quad (9.8)$$

где S_q - плоская поверхность, на которой задано поле падающей волны в точках q ; $\vec{E}_{\partial p}$ - дифракционное поле в точках наблюдения p ; r_{pq} - расстояние между точками p и q , угол θ отсчитывается от нормали к поверхности S_q .

Выражение (9.8) является математическим представлением принципа Гюйгенса, рассмотренного в 7.2. Интеграл Кирхгофа совместно с принципом Бабинне позволяет с достаточно высокой точностью решать задачи дифракции на металлических экранах, на отверстиях в экранах, задачи дифракции на неровных поверхностях, например на взволнованной поверхности моря.

9.4 Численные методы для задач дифракции

Значительный рост возможностей решения задач дифракции связан с быстрым развитием средств вычислительной техники. Это приводит к тому, что заметная часть учебной и научно-технической литературы, а также рассматриваемых в ней рекомендаций, морально устаревают в течение

нескольких лет после публикации. Круг задач, решаемых численными методами, при использовании современных компьютеров быстро решаются.

К числу машинных методов решения дифракционных задач, получивших наибольшее распространение, относятся так называемый метод моментов (МОМ), метод конечных элементов (МКЭ) и получивший в последние годы интенсивное развитие быстрый метод моментов (FMM). Рассмотрим их подробнее. Наиболее просто МОМ описан в [7]. Используем для простоты операторную форму записи уравнений (9.6)

$$L(U) = V, \quad (9.9)$$

где U – искомая функция распределения наведённого тока, V – функция возбуждения, описывающая поле падающей волны; L – интегральный оператор, выполняющий действие над U .

В функциональном анализе под оператором понимается действие, которое совершается над функцией, т.е. оператор является как бы функцией, аргументом которой является другая функция. Под пространством понимается полное множество величин, в частности функций, обладающих некоторыми общими математическими свойствами.

Введём в рассмотрение полное семейство ортонормированных функций f , принадлежащих тому же пространству, что и U . Свойство полноты означает, что любую функцию пространства, в частности и функцию U , можно представить в виде разложения по базисным функциям f , т.е.

$$U = \sum \alpha_n f_n, \quad (9.10)$$

где α_n – коэффициент разложения.

Тогда (9.9) можно записать в виде

$$L(\sum \alpha_n \cdot f_n) = v \text{ или } \sum \alpha_n \cdot L(f_n) = v. \quad (9.11)$$

В качестве базисных функций можно брать простейшие, например, кусочно-постоянные. Если всю область определения оператора L , то есть поверхность интегрирования в (9.6), разбить на малые участки ΔS , то в качестве базисных функций можно брать функции, равные единице на данном участке ΔS , и обращающиеся в нуль на всех остальных участках. Тогда число базисных функций N будет равно числу участков ΔS покрывающих область определения оператора, и суммирование в (9.10) будет выполняться по N членам разложения.

Заметим, что аппроксимация (9.10) применяется при приближенном вычислении определенных интегралов. Там же обычно показывается, что для улучшения сходимости вычислительной процедуры лучше использовать метод треугольников, предусматривающий использование треугольных (в английском языке используется понятие roof) функций. Для одномерного случая это показано на рис. 9.1.

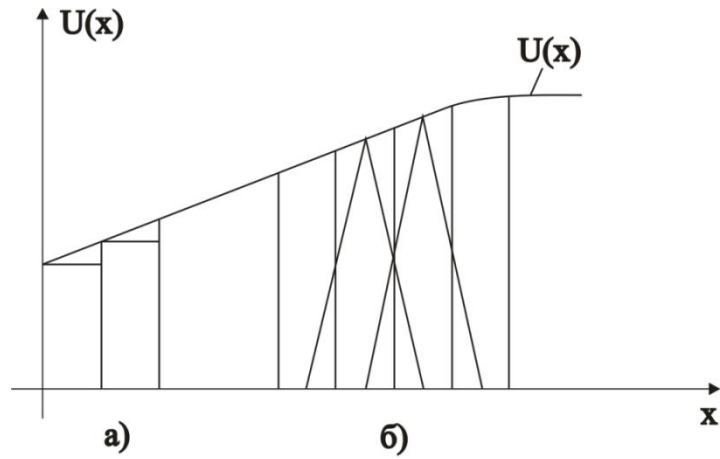


Рис. 9.1. Кусочно-постоянная (а) и треугольная (б) аппроксимация функции

Аналогичная ситуация существует и в представлении (9.10), при использовании треугольных функций сходимость ряда улучшается.

В левой части (9.11) суммирование выполняется по всем элементам поверхности ΔS . То есть, точка источника q занимает все возможные положения на поверхности S . Точка наблюдения p также должна занимать последовательно все возможные положения. При этом (9.11) будет отдельно записываться для каждого положения точки p . Все выражения при этом образуют систему линейных уравнений и их можно записать в матричном виде. Если число положений точки наблюдения равно числу элементов ΔS на поверхности, то матрица системы будет квадратной и её порядок равен N . Для решения системы уравнений и определения коэффициентов разложения α_n в (9.10) необходимо вычислить обратную матрицу. Такой подход к решению интегрального уравнения называется методом коллокаций. В таком методе исходное уравнение, а значит и граничные условия для векторов поля формально выполняются только в тех точках поверхности (например в центральных точках элементов ΔS), для которых записывается каждое из уравнений (9.11). Полученное решение может не удовлетворять граничным условиям в других точках поверхности. Для решения этой проблемы выражение (9.11) еще раз преобразуют для расширения возможностей выбора пути численного решения.

Вводят еще одно полное семейство функций $W_i, (i = 1, \dots, N)$, принадлежащих тому же пространству, которые называются весовыми или тестовыми и умножают последовательно (9.11) на каждую весовую функцию, в результате получается N уравнение вида

$$\sum_N \alpha_n (W_i, L(f_n)) = W_i V. \quad (9.12)$$

Проинтегрируем эти выражения по области определения L (то есть, по поверхности S)

$$\sum_N \alpha_n W_i \int_S L(f_n) dS = \int_S W_i V dS. \quad (9.13)$$

Полученное выражение для номера весовой функции, изменяющегося от 1 до N , порождает систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения α_n . Решая систему уравнений и подставляя полученные значения коэффициентов в формулу (9.10) можно получить решение исходного уравнения (9.9).

Отметим, что если в качестве весовых функций выбираются дельта функции, принимающие не нулевые значения в центральных точках элементов ΔS , то рассмотренный подход вновь приводит к методу коллокаций. Чаще в качестве весовых функций берутся такие же, которые выбраны в качестве базисных. Такой способ решения интегрального уравнения называется методом Галеркина. Метод коллокаций имеет низкие требования к вычислительным ресурсам, благодаря фильтрующим свойствам дельта функции. Метод Галёркина имеет более высокие требования к вычислительным ресурсам, по сравнению с методом коллокаций. Однако, в отличие от предыдущего метода, точность решения обеспечивается для всех точек поверхности.

Рассмотренные приемы построения интегральных уравнений и численные методы их решения являются достаточно понятными, но их практическая реализация наталкивается на ряд не очевидных проблем. Рассмотрим их кратко.

Первая проблема решения задач дифракции методом интегральных уравнений связана с проблемами выбора способа геометрического описания поверхности тела, на котором создаются наведенные токи. Как правило такие тела, например фюзеляж самолета, имеют сложную форму, которую невозможно описать в одной единой системе координат. Наиболее часто для преодоления этой проблемы используется разбиение всего тела на отдельные участки, каждый выделенный участок аппроксимируется относительно простой поверхностью, например участком сферы, цилиндра, плоскости и т.п., для описания которой вводятся отдельные координаты, связанные с центральной системой координат, в которой ищется решение задачи. Понятно, что если участков разбиения много, то это приводит к весьма громоздким геометрическим преобразованиям. Кроме того остается открытым вопрос о погрешности замены формы реального тела набором аппроксимирующих поверхностей.

Вторая проблема также геометрическая. Исходное тело может иметь особенности формы, приводящие к тому, что граничные условия в форме (4.41) не выполняются, например иметь острые ребра, выступы, углы пересечения образующих поверхностей, на которых кривизна поверхности является чрезвычайно большой. Интегральные уравнения на этих участках поверхности также не выполняются. Для решения этой проблемы чаще всего на таких участках поверхность реального тела заменяется аппроксимирующей поверхностью, имеющей приемлемую кривизну, поверхность как бы скругляется.

Третья проблема связана с особенностями формы функции Грина, входящей в ядро векторного интегрального уравнения. Например, рассмотрим (9.6). Векторная правая часть уравнения в каждой точке поверхности тела может не совпадать по направлению с вектором наведенного тока. Понятно, что для выполнения уравнения ядро уравнения, в котором содержится функция Грина должно обладать тензорными свойствами, то есть не иметь форму (6.7). Функция Грина для каждой задачи может принимать специфический вид, зависящий от геометрии задачи. Для сложных тел, в соответствии с предыдущим, функция Грина будет иметь особый вид для каждого участка поверхности.

Четвертая проблема также связана с функцией Грина, в которую входит расстояние между точкой источника, в которой определяется наведенный ток, и точкой наблюдения, в которой накладываются граничные условия. Причем, это расстояние входит в знаменатель функции Грина в первой степени. При этом в каждом уравнении из системы линейных алгебраических уравнений, полученных из исходного интегрального уравнения, используемого для решения задачи дифракции, имеется один из членов, для которого положения точек источника и наблюдения совпадают. Понятно, что такие члены уравнений будут иметь особенность, не интегрируемую численным способом. Для преодоления этой проблемы используют как аналитические способы вычисления особенности с дальнейшим учетом этого в уравнениях, так и численные приемы, при которых положения точек источника и наблюдения слегка разносят на небольшое расстояние, например, считают, что ток протекает непосредственно по поверхности тела, а граничное условие выполняется в точке, приподнятой над поверхностью на малую высоту.

Две последние рассматриваемые здесь проблемы связаны с особенностями решения дифракционных задач в цифровых компьютерах. Метод интегральных уравнений для решения задач дифракции является потенциально очень точным, так как позволяет учесть многие (но не все) особенности исходной задачи. Для сохранения точности необходимо вводить возможно большее число элементов разбиения поверхности, на которых численным способом определяется величина наведенного тока. В реальных задачах показано, что величина расстояния между отдельными элементами разбиения должна составлять $(0,1 - 0,12)\lambda$. При этом для поверхности площадью λ^2 необходимо ввести порядка 100 элементов разбиения, для самолета размером 30 м в дециметровом диапазоне длин волн необходимо порядка 10^5 элементов разбиения, еще большее число элементов необходимо для решения задач дифракции на еще больших телах. Порядок системы алгебраических уравнений, к которым сводится решения интегральных уравнений для задач дифракции, совпадает с числом элементов разбиения и может быть очень большим. Для решения систем уравнений необходимо выполнять значительное число вычислительных операций в компьютере. Операции выполняются с числовыми данными, которые представляются в компьютере в приближенном виде, в так называемом виде с плавающей

запятой. Мантисса такого представления имеет конечную длину, зависящую от используемого языка программирования и от типа компьютера. Последняя значащая цифра мантиссы является приближенной, полученной при округлении числа до необходимой длины мантиссы. При выполнении арифметических операций в процессоре компьютера происходит уменьшение числа правильных значащих цифр в мантиссе результата. Причем компьютер об этом не сигнализирует. При большом числе вычислительных операций, связанных с решением задач дифракции на больших телах, число правильных цифр в результате может значительно сокращаться, в полученных результатах может появиться вычислительная ошибка, величину которой зачастую трудно оценить.

В предыдущем пункте показано, что численное решение задач дифракции методом интегральных уравнений связано с большим числом обрабатываемых данных, как исходных, так и промежуточных. Кроме того, процессор компьютера выполняет большое число арифметических операций для получения результата. Для хранения данных необходим довольно большой объем оперативной памяти. На выполнение вычислительных операций необходимо определенное время. При решении сверхбольших систем линейных алгебраических уравнений предъявляются серьезные требования к техническим характеристикам компьютера, в частности ко времени наработки на сбой, поскольку решение относительно небольших задач может требовать десятков часов машинных вычислений.

В последнее десятилетие ведутся интенсивные исследования по развитию новой версии метода моментов, так называемом быстром методе моментов (FMM), предложенном В.Рохлиным [11], который позволяет значительно ускорить и повысить точность решения задач дифракции за счет уменьшения числа вычислительных операций. Матрица системы линейных уравнений вида (9.13) учитывает взаимодействие наведенных токов, протекающих в каждом элементе сетки, на которую разбивается область интегрирования в (9.6) с токами во всех ячейках сетки. Но физически, это взаимодействие выполняется по-разному за счет зависимости $(r)^{-1}$, присутствующей в функции Грина. Токи, протекающие в соседних ячейках, из-за малости r взаимодействуют сильно, но при удалении ячеек взаимодействие уменьшается. Для отдельных ячеек удаленных на большое расстояние взаимодействие будет очень слабым. Поэтому для учета взаимодействия можно найти суммарное поле, создаваемое группой ячеек, и учесть его влияние на ток в рассматриваемой ячейке так же, как это учитывается в первичном поле. При этом матрица системы линейных алгебраических уравнений может быть представлена в блочном виде. Блоки, учитывающие взаимодействие далеких элементов сетки, будут в основном содержать нулевые элементы и только один ненулевой, описывающий суммарное поле. Ускорение процесса решения интегрального уравнения происходит из-за преобразования исходной матрицы к разреженному виду. В настоящее время разработано несколько различных алгоритмов, реализующих FMM, позволяющих с высокой точностью решать сложные

дифракционные задачи, например задачи дифракции электромагнитных волн на полноразмерной модели самолета или корабля. Дополнительное ускорение решения задач методом FMM получается за счет распараллеливания вычислительного процесса при использовании процессоров с большим числом ядер и за счет применения итерационных процедур обращения преобразованной матрицы.