Лекция 7

4.3 Поведение плоских волн в средах различных типов

Здесь для простоты будем рассматривать линейно - поляризованные прямые плоские волны, описываемые соотношениями (4.6). Выражения зависят от двух величин, от волнового числа k и волнового сопротивления W, которые в свою очередь, зависят от параметров среды, в которой распространяется плоская волна. Рассмотрим изменение свойств волн при изменении параметров среды.

4.3.1. В качестве первого случая возьмём плоскую волну в идеальном вакууме, для которого $\varepsilon=1,\ \mu=1,\ \sigma=0$. Тогда

$$k = k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,;\ V_\text{ф} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c;$$

$$\lambda_0 = c/f = \frac{2\pi}{k_0}; \qquad W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\,[\,Ом\,]\,. \tag{4.33}$$

4.3.2. Среда – идеальный диэлектрик, $\varepsilon>1$. Тогда,

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon}\,; \qquad V_\text{ф} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k_0\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}};$$

$$\lambda = \frac{V_\text{ф}}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad W = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon}} = \frac{W_0}{\sqrt{\varepsilon}}\,. \tag{4.34}$$

В такой среде происходит уменьшение фазовой скорости и длины волны. Это означает, что при прохождении одинакового расстояния в диэлектрике и вакууме, фаза плоской волны больше изменяется в диэлектрике. Волновое сопротивление диэлектрика для плоской волны также меньше, чем в случае вакуума. Это означает, что меняется соотношение между амплитудами векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, то есть, наблюдается трансформация величин, характеризующих волну, подобно тому, как происходит трансформация тока и напряжения в электрической цепи. Эти свойства диэлектрика применяются в устройствах СВЧ.

4.3.3. Среда – диэлектрик с малыми потерями, $\varepsilon>1,\ 0<tg\delta<<1$.

В этом случае придётся пользоваться понятием комплексной относительной диэлектрической проницаемости

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon(1 - j\cdot tg\delta) = \varepsilon\cdot e^{-j\delta}\,.$$

Тогда $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\dot{\varepsilon}} = k_0\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1-jtg\delta}$, используя биномиальное разложение для последнего сомножителя и ограничиваясь первым членом из-за малости $tg\delta$, получаем

$$k = k_0\sqrt{\varepsilon} - j\frac{k\sqrt{\varepsilon}\cdot tg\delta}{2} = k' - jk'' \tag{4.35}$$

Подставим это значение в выражение для одной из составляющих поля (4.6)

$$\dot{H}_{0x} = A_1 e^{-k'' z} e^{-jk' z} = A_1(z) e^{-jk' z}, \qquad (4.36)$$

где $A_1(z) = Ae^{-jk'' z}$.

Амплитуда плоской волны уменьшается (затухает) в процессе распространения. Скорость уменьшения амплитуды зависит от мнимой части волнового числа, которую принято называть постоянной затухания. Для удобства, вместо постоянной затухания часто вводят понятие «глубины проникновения поля в среду», это расстояние *d*, при прохождении которого амплитуда волны уменьшается в *e* раз. Очевидно $k'' d = 1$, или

$$d = \frac{1}{k''} = \frac{2}{k_0 \sqrt{\varepsilon} \cdot tg\delta}. \qquad (4.36)$$

Другие параметры плоской волны, как следует из (4.36) будут следующими

$$V_ф = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{k_0 \sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \lambda = \frac{\omega}{k'} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}};$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \dot{\varepsilon}}} = \frac{W_0}{\sqrt{\varepsilon}} e^{j\frac{\delta}{2}}. \qquad (4.37)$$

Волновое сопротивление будет комплексным, то есть между составляющими поля плоской волны $\vec{E}$ и $\vec{H}$ появляется сдвиг по фазе. По аналогии с электрическими цепями, можно отметить, что это свидетельствует о процессе реактивного энергообмена в среде. Физически это связано с тем, что в среде под действием электрического поля волны наводятся токи проводимости, которые отдают энергию как на потери, так и на перемещение поля волны.

4.3.4. Среда – реальный металл, $\varepsilon > 1; \sigma >> 1$. Тогда

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \approx -j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad (4.38)$$

Вычислим волновое число

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0 \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\mu_0\omega\sigma} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}} - j\sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}} =$$

$$= k' - jk''. \qquad (4.39)$$

Численная оценка k' и k'' в металле на самой низкой частоте СВЧ диапазона 300 МГц дает величины порядка $10^6 \left[\frac{1}{м}\right]$. Это означает что фазовая скорость и длина волны в металле по крайней мере в миллион раз меньше, чем в вакууме, а глубина проникновения тока в металл составляет менее микрометра. То есть, электромагнитное поле в виде волны может существовать в металле в основном только в тонком поверхностном слое. Это называется скин – эффектом, глубина проникновения поля равна

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}}\,. \qquad (4.40)$$

4.3.5. Идеальный проводник $\sigma \to \infty$.

При таком поведении проводимости $d \to 0$, то есть, электромагнитное поле в виде волны в идеальном проводнике существовать не может, напряженности поля в идеальном проводнике обращаются в нуль. При этом граничные условия на поверхности идеального проводника преобразуются в более простую форму

$$E_{1\tau} = 0; \qquad H_{1\tau} = \xi_э;$$
$$D_{1\tau} = 0; \qquad B_{1\tau} = \mu_0 \xi_э. \qquad (4.41)$$

4.4 Плоская волна, распространяющаяся под углом к координатным осям

Выражения (4.6) получены для простейшего случая, когда плоская волна распространяется вдоль координатной оси. Чаще встречаются ситуации, когда волна двигается под углом к осям координат, как показано на рис.4.5.

Будем считать, что волна является линейно – поляризованной. Для задания направления распространения можно ввести угловые координаты сферической системы координат θ и ϕ, которые подобны угловым координатам сферической системы координат. Направление распространения плоской волны при этом можно определить через волновой вектор $\vec{k}$.

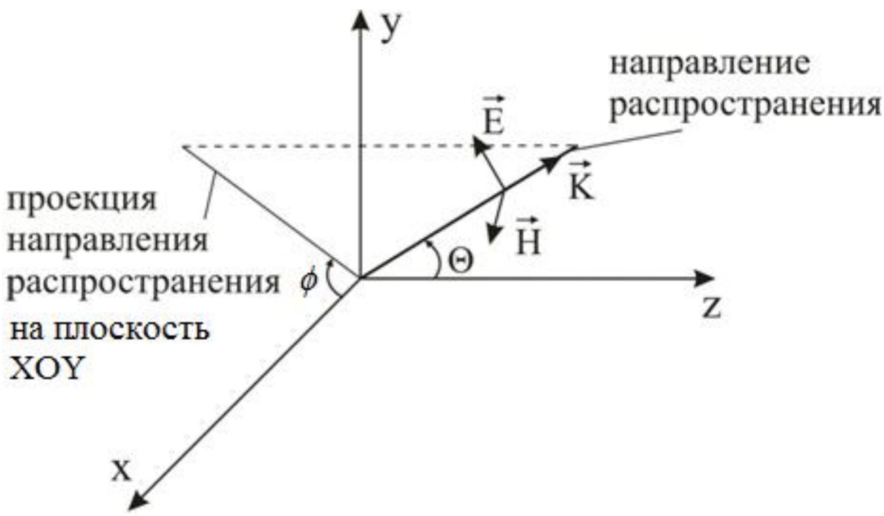

Рис.4.5. Плоская волна в произвольной системе координат

$$\vec{k} = k(\sin\theta\cos\phi \cdot \vec{x}_0 + \sin\theta\sin\phi \cdot \vec{y}_0 + \cos\theta \cdot \vec{z}_0\,), \qquad (4.42)$$

где k - волновое число.

Положение точки наблюдения, в которой определяются величины, характеризующие плоскую волну можно задать радиусом – вектором

$$r = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0. \qquad (4.43)$$

Амплитуда напряженности электрического поля волны при этом будет иметь вид вектора (векторной амплитуды)

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\vec{x}_0 + E_{0y}\vec{y}_0 + E_{oz}\vec{z}_0. \qquad (4.44)$$

Тогда выражение (4.6) для плоской волны произвольной системе координат примет вид

$$\vec{E} = E_0 e^{-j\vec{k}\vec{r}} = (E_{0x}\vec{x}_0 + E_{0y}\vec{y}_0 + E_{oz}\vec{z}_0)\times$$
$$\times exp[-jk(x\sin\theta\cos\phi + y\sin\theta\sin\phi + z\cos\theta]. \qquad (4.45)$$

Причем, поскольку волна является поперечной, вектора $\vec{E}_0$ и $\vec{k}$ ортогональны, т.е. выполняется условие $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0.$ Аналогичным образом можно записать выражения и для напряженности магнитного поля волны. Легко видеть, что выражение (4.45) приводится к виду (4.6), когда $\theta = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$.

4.5 Преломление и отражение плоских волн на плоской границе раздела сред

В реальных условиях электромагнитные поля распространяются в ограниченных средах. Например, радиоволна базовой станции сотовой связи, возбуждаемая антенной, расположенной в воздухе, в процессе распространения взаимодействует с земной поверхностью, с поверхностями зданий и сооружений. Поэтому важным для практики является вопрос о том, что происходит процессе взаимодействия.

Рассмотрим эту задачу для исходной плоской волны. Пусть линейно – поляризованная плоская волна падает на бесконечную плоскую границу раздела двух сред, как показано на рисунке 4.6. Для определения задачи введем ряд понятий.

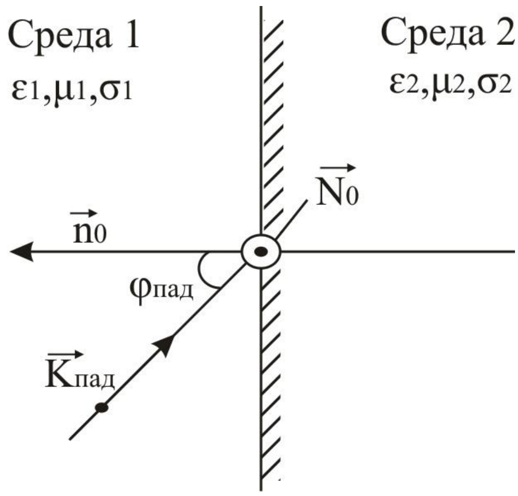

Рис.4.6. Падение плоской волны на плоскую границу раздела сред.

Плоскость падения – плоскость, образованная волновым вектором падающей волны $\vec{k}_{пад}$ и единичным вектором нормали $\vec{n}_0$ к границе раздела сред.

Угол падения – угол $\phi_{пад}$ между векторами $\vec{k}$ и $\vec{n}_0$.

$\vec{N}_0$ - единичный вектор нормали к плоскости падения, очевидно равен $\vec{N}_0 = \dfrac{\vec{k} \times \vec{n}_0}{\left|\vec{k} \times \vec{n}_0\right|}$.

ψ - угол между вектором $\vec{E}_0$ падающей волны и вектором $\vec{N}_0$, очевидно, что $\psi = arccos \dfrac{\vec{E}_0 \cdot \vec{N}_0}{\left|\vec{E}_0\right|}$.

Векторную амплитуду $\vec{E}_0$ можно разложить на две составляющие – параллельную и перпендикулярную к плоскости падения

$$E_{0\perp} = \vec{E}_0 \cdot \vec{N}_0, \quad E_{0\|} = \vec{E}_0 - E_{0\perp} \cdot \vec{N}_0. \tag{4.46}$$

Проведем ряд рассуждений. Пусть 2 среда является идеальным проводником. Тогда энергия падающей волны не может проникнуть во 2 среду, она остается в 1 среде. Энергия падающей волны не может накапливаться у границы сред, поэтому она должна уноситься от границы раздела новой, возникающей на границе раздела волной. Нетрудно понять, что эта отраженная волна так же будет плоской. Причем, если падающая волна имеет только одну составляющую $E_{0\perp}$ или $E_{0\|}$, то и отраженная волна будет иметь только такую же составляющую векторной амплитуды. То есть, поляризация отраженной плоской волны соответствует поляризации падающей плоской волны только в двух частных случаях:

- случай перпендикулярной поляризации

$$E_{0\perp} \neq 0; \quad E_{0\|} = 0;$$

- случай параллельной поляризации

$$E_{0\perp} = 0; \quad E_{0\|} \neq 0.$$

Если вторая среда является диэлектриком, то граница раздела сред будет полупрозрачной. Часть энергии падающей волны будет уноситься от границы раздела отраженной волной, а часть – проникать во вторую среду и уносится от границы раздела так называемой преломленной волной. По аналогии с предыдущим можно показать, что поляризация преломленной волны совпадает с поляризацией падающей волны только в дух частных случаях: для случаев перпендикулярной и параллельной поляризации. Рассмотрим процесс задачи преломления и отражения плоской волны от плоской границы раздела сред для этих случаев по отдельности.