Лекция №10

Напомним выводы, сделанные в прошлой лекции.

Выводы.

1). *Выделяют 3 типа изолированных особых точек*:

- *устранимая особая точка*
- *полюс n-го порядка*
- *существенно особая точка.*

2). *Каждый тип можно установить*:

- путем вычисления предела функции при $z \to z_0$ (z_0 – изолированная особая точка);
- путем разложения функции в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$

и выделения главной части.

Замечание. Для успешного вычисления предела функции необходимо повторить методы вычисления пределов, в частности, основные эквивалентности.

1. Устранимая особая точка

Определение. *Точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = C.$$

Теорема. *Точка z_0 является устранимой особой точкой, если в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 отсутствует главная часть, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

2. Полюс n-го порядка

<u>Определение.</u> Точка z_0 называется <u>полюсом</u> функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f\,(z)=\infty$.

<u>Теорема.</u> Точка z_0 является полюсом n-го порядка функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит конечное число слагаемых, т.е.

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,(z-z_0)^k \text{ , где } c_{-n}\neq 0.$$

3. Существенно особая точка

<u>Определение.</u> Точка z_0 называется <u>существенно особой</u> точкой, если в этой точке не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$ при $z\to z_0$.

<u>Пример*.</u> Найти особые точки функции $f(z)=z^3\sin(\frac{1}{z})$ и установить их тип.

Решение. Изолированная особая точка функции $z=0$.
Докажем, что предел функции в этой особой точке не существует.

Пусть $z=(\frac{1}{ix})$, где $x\in\mathbf{R}$. Если $x\to+\infty$, то $z=(\frac{1}{ix})\to 0$.

Если предположить, что существует $\lim\limits_{z\to 0} f(\mathrm{z})=\lim\limits_{z\to 0}[z^3\sin(\frac{1}{z})]$, то отсюда будет вытекать, в частности, что существует $\lim\limits_{x\to+\propto} f(\frac{1}{ix})=\lim\limits_{x\to+\propto}[(\frac{1}{ix})^3\sin(ix)]$.

Попробуем вычислить этот предел. Поскольку по определению

$\sin(ix)=\frac{e^{i(ix)}-e^{-i(ix)}}{2i}=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2i}$, то

$\lim\limits_{x\to+\propto} f(\frac{1}{ix})=[(\frac{1}{i})^3\cdot\frac{1}{2i}\lim\limits_{x\to+\propto}\frac{e^{-x}-e^{x}}{x^3}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\propto}\frac{-e^{x}}{x^3}=-\infty$. При вычислении этого предела используется правило Лопитапля.

Рассмотрим теперь последовательность $z_n = (\frac{1}{2\pi n})$, где $n \in \mathbf{N}$.

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\propto} z_n = \lim\limits_{n\to\propto}\left(\frac{1}{2\pi n}\right) = 0$. При этом

$$\lim_{n\to\propto} f(z_n) = \lim_{n\to\propto}(2\pi n)^{-3} sin(2\pi n) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{z\to 0} f(\mathrm{z}) = \lim\limits_{z\to 0}[z^3 \sin(\frac{1}{z})]$ не существует.

Следовательно, $z = 0$ - существенно особая точка.

<u>Теорема.</u> Точка z_0 является <u>существенно особой точкой</u> для функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности z_0 содержит бесконечное количество членов.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = z^3 sin\frac{1}{z}$

Определить тип особой точки.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ - точка $z = 0$. Выпишем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z

$$f(z) = z^3\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \frac{1}{7!\,z^7} + \ldots\right) =$$

$$= z^2 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!\,z^2} - \frac{1}{7!\,z^4} + \ldots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, поэтому точка $z = 0$ - существенно особая точка функции $f(z)$. Вычет функции в точке $z = 0$ есть коэффициент $c_{-1} = 0$, т.е. $res\, f(0) = 0$.

Вычеты функций

<u>Определение.</u> <u>Вычетом аналитической функции</u> $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, определяемое равенством

$$resf(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f\,(z)dz,$$

где C – любой контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$, содержащий внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.

<u>Теорема.</u> Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 является коэффициент c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0, $\text{т. е.}\quad resf(z_0) = c_{-1}$

<u>Формулы для вычисления вычетов функции $f(z)$</u>

1. Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$,
то $resf(z_0) = 0$.

2. Если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения вычета нужно найти коэффициент c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана: $resf(z_0) = c_{-1}$.

3. Если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$resf(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n].$$

<u>Частные случаи (для полюсов)</u>

А) если z_0 – простой полюс, т.е. полюс первого порядка $(n=1)$, то

$$resf(z_0) = \lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)\ ]\ .$$

Б) для полюса 2-го порядка

$$resf(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}[f(z)(z-z_0)^2].$$

В) для полюса 3-го порядка

$$resf(z_0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^2}{dz^2}[f(z)(z-z_0)^3]$$

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{cosz-1}{z^3(z-\pi)}$, определить их тип и найти вычеты функции в ее особых точках.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1 = 0, z_2 = \pi$.

В точке $z = 0$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{cosz-1}{z^3(z-\pi)} = \lim_{z\to 0}\frac{-z^2}{2z^3(z-\pi)} = \lim_{z\to 0}\frac{-1}{2z\ \ (z-\pi)} = \infty.$$

Следовательно, $z = 0$ – полюс первого порядка.

$res\, f(0) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{cosz-1}{z^3(z-\pi)}(z)\ \right] = \lim_{z\to 0}\frac{-z^3}{2z^3(z-\pi)} = \frac{1}{2\pi}$.

Точка $z = \pi$ - это полюс первого порядка:

$\lim_{z\to\pi} f(z) = \lim_{z\to\pi}\frac{cosz-1}{z^2(z-\pi)} = \infty.$

Для нахождения вычета в полюсе первого порядка используем формулу

$$resf(z_0) = \lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)\ ]\ .$$

Тогда

$$res\, f(\pi) = \lim_{z\to\pi}\frac{(cosz-1)(z-\pi)}{z^2(z-\pi)} = \frac{-1-1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2}.$$

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{e^{z-i}-1}{(z^2+1)z}$ и установить их тип. Найти вычеты.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1 = i$, $z_2 = -i$ и $z_3 = 0$.

В точке $z_1 = i$ числитель и знаменатель $f(z)$ обращаются в нуль. Для числителя $P(z) = e^{z-i} - 1$ число $z = i$ является нулем 1 порядка, так как $iP'(z)\,|_{z=i} = e^{z-i}\,|_{z=i} = 1$, то $z = i$ – нуль 1-го порядка.

Знаменатель $Q(z) = (z-i)(z+i)z$ в точке $z = i$ имеет также нуль 1-го порядка. Поскольку $(e^{z-i}-1)\sim(z-i)$ при $z\to i$,

$$\lim_{z\to i}\frac{e^{z-i}-1}{(z^2+1)z}=\lim_{z\to i}\frac{e^{z-i}-1}{(z-i)(z+i)z}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z-i)(z+i)z}=\frac{-1}{2}$$

Следовательно, $z_1=i$ – устранимая особая точка. $resf(i)=0$.

Рассмотрим точку $z=0$. В точке $z=0$ перепишем функцию в виде $f(z)=\frac{e^{z-i}-1}{(z^2+1)z}=\frac{\varphi(z)}{z}$, где $\varphi(z)=\frac{e^{z-i}-1}{(z^2+1)}$ – аналитическая функция в точке $z=0$, $\varphi(0)=\frac{e^{-i}-1}{1}\neq 0$. По теореме $z=0$ – полюс 1-го порядка. Тогда

$$resf(0)=\lim_{z\to 0}f(z)\cdot(z-0)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{z-i}-1}{(z^2+1)z}\cdot z=e^{-i}-1$$

В точке $z=-i$ перепишем функцию в виде $f(z)=\frac{e^{z-i}-1}{(z^2+1)z}=\frac{\varphi(z)}{z\ \ +i}$, где

$\varphi(z)=\frac{e^{z-i}-1}{z-i}$ – аналитическая функция в точке $z=-i$,

$\varphi(-i)=\frac{e^{-2i}-1}{-2i}\neq 0$. По теореме $z=-i$ – полюс 1-го порядка.

Поскольку $z=-i$ – полюс 1-го порядка, то

$resf(-i)=\lim_{z\to -i}f(z)\cdot(z+i)=\lim_{z\to -i}\frac{e^{z-i}-1}{(z^2+1)z}\cdot(z+i)$, т.е.

$resf(-i)=\lim_{z\to -i}\frac{e^{z-i}-1}{(z-i)\cdot z}=\frac{e^{-2i}-1}{(-2i)\cdot i}=\frac{e^{-2i}-1}{2}$.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z)=\frac{sin2z+1}{z^5-3z^4}$

и установить их тип. Найти вычеты.

Решение. Найдем нули функции $\frac{1}{f(z)}=\frac{z^5-3z^4}{sin2z+1}$. Поскольку

$z^5-3z^4=z^4(z-3)$, то для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка $z=0$ – это нуль четвертого, а $z=3$ – нуль первого порядка. Пользуясь теоремой, имеем

$z = 0$ – это полюс 4-го порядка функции $f(z)$,

$z = 3$ – полюс первого порядка.

Поскольку $z = 3$ – полюс 1-го порядка, то

$res f(3) = \lim\limits_{z\to 3} f(z)\cdot(z-3) = \lim\limits_{z\to 3} \frac{sin2z+1}{z^5-3z^4}\cdot(z-3) = \lim\limits_{z\to 3} \frac{sin2z+1}{z^4} = \frac{sin6+1}{3^4}$.

Задание: самостоятельно найти вычет в точке $z = 0$ – это полюс 4-го порядка функции.

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{\sin(z-i)}{(z-i)^3 z^3}$ и установить их тип. Найти вычеты.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1 = i$ и $z_2 = 0$.

В точке $z_1 = i$ числитель и знаменатель $f(z)$ обращаются в нуль. Для числителя $P(z) = \sin(z-i)$ число $z = i$ является нулем 1-го порядка, так как $P'(z)\,|_{z=i} = \cos(z-i)\,|_{z=i} = 1$, то $z = i$ – нуль 1-го порядка. Знаменатель $Q(z) = (z-i)^3 z^3$ в точке $z = i$ имеет нуль 3-го порядка. Следовательно, по теореме $z_1 = i$ –полюс 2-го порядка функции $f(z)$.

Найдем вычет.

$$res f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}[f(z)(z-z_0)^2]$$

$$res\ f(i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{\sin(z-i)(z-i)^2}{(z-i)^3 z^3}\right] = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{\sin(z-i)}{(z-i)\quad z^3}\right] = \cdots ....$$

(доделать самостоятельно)

В точке $z = 0$ перепишем функцию в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^3}$, где $\varphi(z) = \frac{\sin(z-i)}{(z-3)^3}$ – аналитическая функция в точке $z = 0$,

$\varphi(0) = \frac{\sin(-i)}{-27} \neq 0$. По теореме $z = 0$ – полюс 3-го порядка.

Окончательно, $z = i$ – полюс 2-го порядка, $z = 0$ – полюс 3-го порядка.

Задание. Вычислить вычет в точке $z = 0$ (полюс 3-го порядка), используя

$$res f(z_0) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^2}{dz^2}[f(z)(z - z_0)^3].$$

Пример. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ и установить их тип. Найти вычеты.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки, в которых знаменатель обращается в нуль, т.е. решения уравнения $e^z - 1 = 0$. Таким образом, особые точки: $z_n = 2\pi n i$, $n \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим сначала случай $z_0 = 0$. Поскольку

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1,$$

то $z_0 = 0$ - устранимая особая точка. Следовательно, $res f(0)$=0.

Пусть теперь $z_n = 2\pi n i$, $n \neq 0$. В этом случае

$$\lim_{z\to 2\pi n i} f(z) = \lim_{z\to 2\pi n i} \frac{z}{e^z - 1} = \infty.$$

Следовательно, особые точки $z_n = 2\pi n i$ при $n \neq 0$ являются полюсами функции $f(z)$. Определим порядок этих полюсов.

Для знаменателя $P(z) = e^z - 1$ число $z_n = 2\pi n i$, $n \neq 0$, является нулем 1-го порядка, так как $P'(z)\,|_{z=2\pi n i} = e^z\,|_{z=2\pi n i} = 1$. При этом числитель функции $f(z)$ в точке $z_n = 2\pi n i$, $n \neq 0$, не равен нулю. Следовательно, особые точки $z_n = 2\pi n i$ при $n \neq 0$ являются полюсами 1-го порядка функции $f(z)$.

Найдем вычет в этих особых точках.

$$res f(z_n) = \lim_{z\to 2\pi n i} f(z)\cdot(z - 2\pi n i) = \lim_{z\to 2\pi n i} \frac{z\cdot(z - 2\pi n i)}{e^z - 1} =$$

$$\lim_{z\to 2\pi n i} \frac{2z - 2\pi n i}{e^z}$$

Здесь на последнем шаге использовалось правило Лопиталя.

Таким образом, при $n\neq0$ вычет $f(z)$ в точках $z_n = 2\pi ni$:

$$resf(z_n) = \frac{2\pi ni}{e^{2\pi ni}} = 2\pi ni.$$

Теперь перейдем к изучению приложений теории вычетов.

§ 6. Приложения теории вычетов: *основная теорема о вычетах*

6.1. Основная теорема о вычетах

Теорема 6.1. *Если функция* $f(z)$ *является аналитической всюду внутри области D, за исключением конечного числа изолированных особых точек* $z_1, z_2, \dots, z_n$, *лежащих внутри кусочно-гладкой замкнутой кривой Г, Г⊂D, тогда*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k).$$

Контур *Г* проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$.

Решение. Находим особые точки подынтегральной функции:

$z_1 = -2$ – полюс второго порядка,

$z_{2,3} = \pm i$ – полюсы первого порядка.

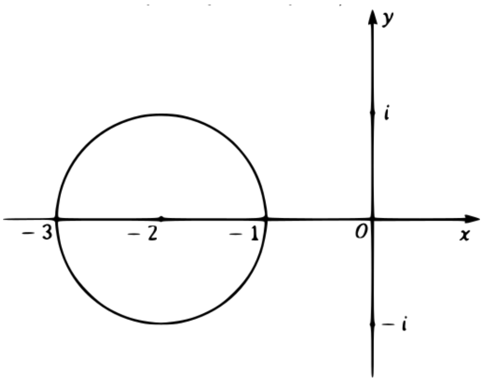

Рис. 13

Нарисуем контур $|z+2| = 1$. Внутри контура лежит только одна особая точка $z_1 = -2$ (см. рис. 13).

По основной теореме о вычетах получаем

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 2\pi i \cdot res f(-2).$$

Найдем $res\, f(-2)$:

$$\operatorname{res} f(-2) = \lim_{z\to-2} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+2)^2(z^2+1)}\right] = \lim_{z\to-2} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{4}{25}.$$

Далее получим

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = \frac{8\pi i}{25}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$.

Решение. В области D: $|z-i|<2$ функция $f(z)=z^2 e^{\frac{1}{z}}$ имеет одну особую точку $z=0$. Разложение в ряд Лорана для заданной функции имеет вид

(используем формулу (4.1) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, z ∈ C)

$$f(z) = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots\right) =$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \cdots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, поэтому $z=0$ – существенно особая точка. Вычет в этой точке равен коэффициенту $c_{-1} = \frac{1}{3!}$, т.е. $res\, f(0) = \frac{1}{3!}$. По теореме 6.1 получаем ответ:

$$\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot res\, f(0) = \frac{2\pi i}{3!} = \frac{\pi i}{3}.$$