10. Нормальное распределение

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Определение 10.1. *Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, если её плотность распределения имеет вид:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{10.1}$$

Этот факт записывать так: $\xi \sim N(a;\sigma)$.

Нормальное распределение определяется двумя параметрами a и σ.

Функции распределения нормального закона:

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{10.2}$$

Для случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение, параметры a и σ имеют простой вероятностный смысл:

$$M(\xi) = a; \quad D(\xi) = \sigma^2; \quad \sigma(\xi) = \sigma. \tag{10.3}$$

Формула для вычисления вероятности попадания нормальной случайной величины в заданный интервал:

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)\right) -$$

$$-\left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right),$$

$$P\{x_1 \leqslant \xi < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \tag{10.4}$$

Вероятность отклонения случайной величины от математического ожидания

$$P\{|\xi - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{10.5}$$

В Maxima значения функции плотности распределения (10.1) и функции распределения (10.2) для нормального закона вычисляются при помощи встроенных в пакет функций pdf_normal(x, a, σ) и cdf_normal(x, a, σ).

Пример 10.1. *Написать плотность вероятности нормально распределённой случайной величины ξ, зная, что $M(\xi) = 4,\ D(\xi) = 25$.*

►Так как математическое ожидание $a = 4$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{25} = 5$, то по формуле (10.1) получаем плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-4)^2/50}.$$

◄

Пример 10.2. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения вероятностей с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Определить: а) $P(-2 < \xi < 3)$, б) $P(\xi < 1)$, в) $P(\xi > 3)$.*

►а) Применим формулу (10.4), полагая $a = 0,\ \sigma = 1$,
$x_1 = -2,\ x_2 = 3$. Тогда
$P(-2 < \xi < 3) = \Phi\Big(\dfrac{3-0}{1}\Big) - \Phi\Big(\dfrac{-2-0}{1}\Big) = \Phi(3) - \Phi(-2) =$
$= \Phi(3) + \Phi(2) \approx 0{,}499 + 0{,}477 = 0{,}976.$

Значения $\Phi(3)$ и $\Phi(2)$ найдены из таблицы, $\Phi(-2) = -\Phi(2)$.

б) $P(\xi < 1) = P(-\infty < \xi < 1) = \Phi\left(\dfrac{1-0}{1}\right) - \Phi\left(\dfrac{-\infty-0}{1}\right) =$
$= \Phi(1) + \Phi(+\infty) \approx 0{,}3413 + 0{,}500 = 0{,}841.$

в) $P(\xi > 3) = P(3 < \xi < +\infty) = \Phi\left(\dfrac{\infty-0}{1}\right) - \Phi\left(\dfrac{3-0}{1}\right) =$
$= \Phi(+\infty) - \Phi(3) \approx 0{,}500 - 0{,}499 = 0{,}001.$

Maxima-программа:
```
(%i1) load(distrib)$  fpprintprec:5$  numer:true$  a:0$  s:1$
(%i6) cdf_normal(3, a, s) − cdf_normal( −2, a, s);
(%o6) 0.976
(%i67) cdf_normal(1, a, s) − cdf_normal( −100, a, s);
(%o7) 0.841
(%i8) cdf_normal(100, a, s) − cdf_normal( 3, a ,s);
(%o8) 0.00135
```
MathCad-программа:
```
a:=0      σ:=1
pnorm(3, a, σ) − pnorm( −2, a, σ) = 0.976
pnorm(1, a, σ) − pnorm(−∞, a, σ)= 0.841
pnorm(∞, a, σ) − pnorm(3, a, σ) = 0.135 × 10^−3
```
Ответ: $P(-2 < \xi < 3) \approx 0{,}976$; $P(\xi < 1) \approx 0{,}726$;
$P(\xi > 3) \approx 0{,}001$.

◄

Пример 10.3. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 3$, $\sigma = 2$.*
Найти: а) $P(2 < \xi < 3)$, б) $P(|\xi - 3| < 0{,}1)$, в) $P(|\xi - 2| < 2)$.

►а) По формуле (10.4) имеем:

$$P(2 < \xi < 3) = \Phi\left(\frac{3-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{2}\right) = \Phi(0) - \Phi(-0{,}5) =$$
$$= \Phi(0) + \Phi(0{,}5) \approx 0 + 0{,}192 = 0{,}192.$$

б) Так как $a = 3$, то для нахождения вероятности неравенства $|\xi - 3| < 0{,}1$, применим формулу (10.5), где $\varepsilon = 0{,}1$. В этом случае

$$P(|\xi - 3| < 0{,}1) = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{2}\right) = 2\Phi(0{,}05) \approx 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04.$$

в)В этом случае формулу (10.5) применять нельзя. Применяем общую формулу (10.4).

$$P(|\xi - 2| < 2) = P(0 < \xi < 4) = \Phi\left(\frac{4-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-3}{2}\right) =$$
$$= \Phi(0{,}5) - \Phi(-1{,}5) =\approx 0{,}1915 + 0{,}4332 = 0{,}6247.◄$$

Ответ: $P(2 < \xi < 3) \approx 0{,}192$; $P(|\xi - 3| < 0{,}1) \approx 0{,}04$; $P(|\xi - 2| < 2) \approx 0{,}625$.

Пример 10.4. *Вычислить вероятность того, что случайная величина ξ, подчинённая нормальному закону, при трёх испытаниях хотя бы один раз окажется в интервале (4, 6), если $M(\xi) = 3{,}8$, $\sigma(\xi) = 0{,}6$.*

►Сначала найдем вероятность того, что случайная величина ξ будет заключена в интервале (4, 6):

$$P(4 < \xi < 6) = \Phi\Big(\frac{6-3{,}8}{0{,}6}\Big) - \Phi\Big(\frac{4-3{,}8}{0{,}6}\Big) =$$
$$= \Phi(3{,}67) - \Phi(0{,}33) \approx 0{,}500 - 0{,}129 = 0{,}371.$$

Тогда вероятность попадания вне интервала (4, 6) будет равна $1 - 0{,}371 = 0{,}629$. Вероятность того, что случайная величина ξ при трёх испытаниях все три раза окажется вне интервала (4, 6), найдется по теореме умножения независимых событий как $0{,}6294^3 \approx 0{,}2489$. Следовательно, искомая вероятность $p = 1 - 0{,}249 = 0{,}751$.

Ответ: $\approx 0{,}75$. ◄

Пример 10.5. *Длина изготовляемых болтов является нормально распределённой случайной величиной ξ с математическим ожиданием $a = 8{,}46$. Вероятность того, что наудачу взятый болт имеет* *размер от* 8,40 *до* 8,43, *равна* 0,25. *Чему равна вероятность того, что размер наудачу взятого болта будет в пределах от* 8,49 *до 8,52 см?*

►Поскольку кривая плотности нормального распределения симметрична относительно математического ожидания a, то в данном случае

$P(8{,}49 < \xi < 8{,}52) = P(8{,}40 < \xi < 8{,}43) = 0{,}25$. ◄

Пример 10.6. *Длина детали представляет собой случайную величину ξ, распределённую по нормальному закону и имеющую поле допуска от* 78 *до* 84 *см. Известно, что брак по заниженному размеру (длина деталей меньше* 78 *см) составляет* 4%, *а брак по завышенному размеру (длина деталей больше* 84 *см)* 6%. *Найти средний размер детали a и среднее квадратическое отклонение σ.*

►Поле допуска находится от 78 до a и от a до 84. Вероятность попадания в первый интервал $0{,}5-0{,}04 = 0{,}46$, а во второй: $0{,}5-0{,}06 = 0{,}44$. Поскольку

$$P(78 < \xi < a) = \Phi(0) - \Phi\left(\frac{78-a}{\sigma}\right) \approx 0{,}46,$$

$$P(a < \xi < 84) = \Phi\left(\frac{84-a}{\sigma}\right) - \Phi(0) \approx 0{,}44$$

и функция Лапласа $\Phi(0) = 0$, то

$$\Phi\Big(\frac{78-a}{\sigma}\Big) \approx -0{,}46, \qquad \Phi\Big(\frac{84-a}{\sigma}\Big) \approx 0{,}44.$$

Из таблицы найдем: $(78-a)/\sigma = -1{,}75$, $(84-a)/\sigma = 1{,}28$.

Из последних уравнений получим: $\sigma = 1{,}98$, $a = 81{,}47$. ◄

Пример 10.7. *Диаметр подшипников, выпускаемых заводом, представляет собой случайную величину ξ, распределённую по нормальному закону с $a = 15$ мм и $\sigma = 0{,}4$ мм. Найти вероятность брака P при условии, что разрешается допуск для диаметра подшипника $\pm 0{,}8$ мм. Какую точность диаметра подшипника можно гарантировать с вероятностью* 0,92*?*

►Так как здесь отклонение $\varepsilon = 0{,}8$, то, согласно (10.5),

$$P(|\xi - 15| < 0{,}8) = 2 \cdot \Phi\Big(\frac{0{,}8}{0{,}4}\Big) = 2 \cdot \Phi(2) \approx 2 \cdot 0{,}477 = 0{,}954.$$

Отсюда вероятность брака найдется как вероятность противоположного события: $P = 1 - 0{,}954 = 0{,}046$.

Во второй части задачи, наоборот, задана вероятность $P(|\xi - a| < \varepsilon)$ и нужно найти отклонение ε. Подставим известные данные в формулу (10.5). Тогда $0{,}92 = 2 \cdot \Phi(\varepsilon/0{,}4)$, $\Phi(\varepsilon/0{,}4) = 0{,}46$. Из таблицы найдем, что $\varepsilon/0{,}4 = 1{,}75$ или $\varepsilon = 0{,}7$ мм.

Ответ: $P \approx 0{,}05$, $\varepsilon = 0{,}7$. ◄

Пример 10.8. *Размер диаметра втулок считается нормально распределённым с $a = 2{,}5$ см и $\sigma = 0{,}01$ см. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки ξ, если за вероятность практической достоверности принимается* 0,9973*?*

►Согласно правилу «3σ» (трёх сигм):

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 0{,}9973.$$

Отсюда получим: $|\xi - a| < 3\sigma$, $a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma$, $2{,}5 - 0{,}03 < \xi < 2{,}5 + 0{,}03$ или $2{,}47 < \xi < 2{,}53$.

Ответ: $\xi \in (2{,}47; 2{,}53)$. ◄

Необходимый теоретический материал из лекции 5.

Замечание 10.1. *Если $\eta = \varphi(\xi)$ — непрерывная функция случайного аргумента ξ, причём возможные значения ξ принадлежат всей оси Ox, то*

$$M(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x)dx, \tag{10.6}$$

где $f(x)$ – плотность распределения ξ.

$$D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)f(x)\,dx - M^2(\varphi(\xi)). \tag{10.7}$$

Замечание 10.2. *Если ξ — непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$, и если $y = \varphi(x)$ — дифференцируемая монотонно возрастающая или монотонно убывающая функция, обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины η определяется равенством*

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|. \tag{10.8}$$

Пример 10.9. *Непрерывная случайная величина ξ задана функцией плотности распределения $f(x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & x < 0, \\ 8e^{-8x}, & x \geqslant 0. \end{array}\right.$ Найти $M(\xi)$,*

$D(\xi)$, плотность распределения непрерывной случайной величины $\eta = e^{3\xi}$, $M(\eta)$ и $D(\eta)$. Числовые характеристики случайной величины найти двумя способами.

►

$$M(\xi) = \int\limits_0^{+\infty} 8xe^{-8x}dx = -\int\limits_0^{+\infty} xde^{-8x} = -xe^{-8x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-8x}dx =$$

$$= -\frac{1}{8e^{8x}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{8}.$$

$M(\eta) = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{3x} \cdot 8e^{-8x}dx = 8\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-5x}dx = -\frac{8}{5}e^{-5x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{8}{5}.$

Найдём теперь функция плотности случайной величины η. Т.к. функция $y = e^{3x}$ монотонно возрастающая при $x > 0$, то для определения функции плотности случайной величины η можно применить формулу (10.8). Найдём функцию $\psi(y)$ обратную функция $y = e^{3x}$. Для этого логарифмируем эту функцию.

$$\ln(y) = \ln\left(e^{3x}\right) \Rightarrow \ln(y) = 3x \Rightarrow x = \frac{\ln y}{3}.$$

Отметим, что при $x = 0 \quad y = 1$, а при $x = +\infty \quad y + \infty$.

Таким образом, $\psi(y) = \frac{\ln y}{3}. \Rightarrow \psi'(y) = \frac{1}{3y}.$

Функцию плотности случайной величины η равна

$$g(y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & y < 1, \\ \frac{8}{3}y^{-11/3}, & y \geqslant 1. \end{array}\right.$$

Проверим выполняется ли условие нормировки полученной функции плотности

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{8}{3}y^{-11/3}dy = \frac{8}{3} \cdot \frac{y^{-8/3}}{-8/3}\Big|_1^{+\infty} = 1.$$

Вычислим математическое ожидание данной функции

$$M(\eta) = \int\limits_1^{+\infty} y\frac{8}{3}y^{-11/3}dy = \frac{8}{3}\int\limits_1^{+\infty} y^{-8/3}dy = \frac{8}{3}\frac{y^{-5/3}}{(-5/3)}\Big|_1^{+\infty} =$$

$$= -\frac{8}{5y^{2/3}}\Big|_1^{+\infty} = \frac{8}{5}.$$

Получили такое же значение как и по формуле (10.6).

Найдём теперь дисперсию случайной величины η по двум формулам.

1) По формуле $D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta)$:

$$D(\eta) = \int\limits_1^{+\infty} y^2\frac{8}{3}y^{-11/3}dy - M^2(\eta) = \frac{8}{3}\int\limits_1^{+\infty} y^{-5/3}dy - \frac{64}{25} =$$

$$= \frac{8}{3}\frac{y^{-2/3}}{(-2/3)}\Big|_1^{+\infty} - \frac{64}{25} = 4 - \frac{64}{25} = \frac{36}{25}.$$

2) По формуле $D(\varphi(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)f(x)\,dx - M^2(\varphi(\xi))$:

$$D(\eta) = \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{3x}\right)^2 8e^{-8x}dx - M^2(\eta) = 8\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}dx - \left(\frac{5}{8}\right)^2 =$$

$$= -\frac{8}{2e^{2x}}\Big|_0^{+\infty} - \frac{25}{64} = 4 - \frac{64}{25} = \frac{36}{25}.$$

По обеим формулам получили одинаковые результаты.

◀В примере 10.10 условие монотонности функции $\varphi(\xi)$ выполнялось на всей области определения. Рассмотрим теперь пример в котором функция кусочно монотонна. В этом случае вместо формулы (10.9) применяется более общая формула

$$g(y) = \sum_{k=1}^{m} f[\psi_k(y)] \cdot |\psi_k'(y)|. \qquad (10.9)$$

где m — число интервалов монотонности, $x = \psi_k(y)$ — уравнение обратной функции $y = \varphi(\xi)$ на k-том интервале монотонности этой функции.

Пример 10.10. *Непрерывная случайная величина* ξ *задана функцией плотности распределения* $f(x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & x \notin [0;\pi/2], \\ \cos x, & x \in [0;\pi/2]. \end{array}\right.$ *Найти плотность распределения непрерывной случайной величины* $\eta = |\xi - \pi/6|$ *и построить её график.*

►

На рис. 34 приведен график функции преобразования, в координатах (x, y), случайной величины ξ к величине η.

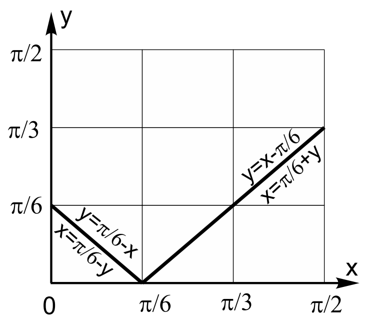

Рис. 34. $\eta(\xi)$

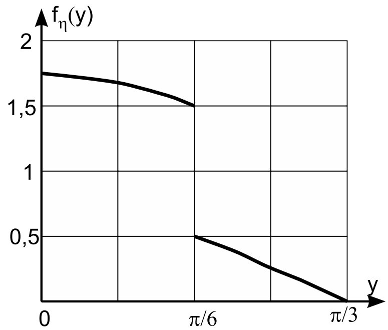

Рис. 35. $f_\eta(y)$

Рисунки для примера 10.10

$$y = \left[\begin{array}{ll} 0, & x \notin [0;\pi/2], \\ \pi/6 - x, & x \in [0;\pi/6], \\ x - \pi/6, & x \in [\pi/6;\ \pi/2]. \end{array}\right. \quad ◄$$

Получим обратную функцию $x = \psi(y)$.

$$x = \psi(y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & y \in (-\infty;0)\bigcup((\pi/3;\infty), \\ \pi/6 - y, & x \in [0;\pi/6]\bigcap y \in [0;\pi/6], \\ \pi/6 + y, & x \in [\pi/6;\pi/3]\bigcap y \in [0;\pi/3]. \end{array}\right.$$

Производная этой функции равна

$$|\psi'(y)| = \left[\begin{array}{ll} 0, & y \in (-\infty;0)\bigcup((\pi/3;\infty), \\ 1, & y \in [0;\pi/3]. \end{array}\right.$$

Функция $\psi(y)$ на отрезке $y \in [0;\pi/6]$ двузначная, поэтому в функции плотности $f_\eta(y)$ этому отрезку соответствует сумма двух слагаемых. Получаем

$$f_\eta(y) = \left[\begin{array}{ll} 0, & y \in (-\infty;0)\bigcup((\pi/3;\infty), \\ \cos(\pi/6 + y) + \cos(\pi/6 - y), & y \in [0;\pi/6], \\ \cos(\pi/6 + y), & y \in [0;\pi/3]. \end{array}\right.$$

Отдельно вычислим
$\cos(\pi/6+y)+\cos(\pi/6-y)=$
$$=2\cos(\frac{\pi/6+y+\pi/6-y}{2})\cos(\frac{\pi/6+y-\pi/6+y}{2})=\sqrt{3}\cos y.$$
Получаем искомую функцию плотности
$$f_\eta(y)=\left[\begin{array}{ll} 0, & y\in(-\infty;0)\bigcup((\pi/3;\infty), \\ \sqrt{3}\cos y, & y\in[0;\pi/6], \\ \cos(\pi/6+y), & y\in[\pi/6;\pi/3]. \end{array}\right.$$
Проверим выполняется ли условие нормировки полученной функции плотности $\int\limits_1^{+\infty} f_\eta(y)dy=1$.
$$\int\limits_0^{\pi/6}\sqrt{3}\cos y\,dy+\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\sqrt{3}\cos(\pi/6+y)\,dy=$$
$$=\sqrt{3}\sin y\Big|_0^{\pi/6}+\sin(\pi/6+y)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}=\sqrt{3}/2+1-\sqrt{3}/2=1.$$
На рис. 35, представлен график полученной функции плотности $f_\eta(y)$.

Задания для самостоятельной работы

Пример 10.11. *Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a=1$, $\sigma=0{,}5$. Определить: а) $P(-1<\xi<1)$, б) $P(0<\xi<3)$, в) $P(|\xi-1|<0{,}1)$.*

Пример 10.12. *Процент выполнения задания (норма выработки) рабочего является случайной величиной, подчинённой нормальному закону распределения с математическим ожиданием 110% и средним квадратическим отклонением 2%. Определить вероятность того, что: а) выполнение нормы выработки одним рабочим окажется в пределах от 101 до 105%, б) выполнение нормы выработки хотя бы одним из трёх наудачу взятых рабочих окажется в пределах от 107 до 111%.*

Пример 10.13. *Размер гайки задан полем допуска $90-95$ мм. На ОТК завода средний размер детали оказался 92,7 мм, а среднее квадратическое отклонение 1,2 мм. Считая, что размер гайки подчиняется нормальному закону, определить отдельно вероятность брака по: а) заниженному, б) завышенному размерам. (В случае а нужно искать вероятность того, что $\xi<90$, а в случае б — вероятность того, что $\xi>95$).*

Пример 10.14. *Длина изготавливаемой на станке детали представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону. Её среднее значение равно* 30 *см, а* $\sigma = 0{,}25$ *см. Какую точность длины детали можно гарантировать с вероятностью* 0,95*?*

Пример 10.15. *Производится взвешивание драгоценного металла без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением* $\sigma = 10$ *мг. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине* 5 *мг.*

Пример 10.16. *Случайная величина* ξ *имеет нормальное распределение с параметрами* $a = 0{,}3$, $\sigma = 0{,}5$. *В каких границах должна изменяться величина* ξ, *чтобы вероятность неравенства* $|\xi - 0{,}3| < \varepsilon$ *была равна* 0,9642*?*

Пример 10.17. *Наблюдения показали, что внешний диаметр подшипников данного типа является нормально распределённой случайной величиной* ξ *со средним значением* $a = 100$ *мм и средним квадратическим отклонением* $\sigma = 0{,}001$ *мм. В каких границах можно практически гарантировать внешний диаметр подшипника, если за вероятность практической достоверности принять* 0,9973.

Домашнее задание.

Выполнить задание 1.12, 1.13 и 1.14 типового расчёта.