

ДИСЦИПЛИНА	<b>Радиотехнические цепи и сигналы часть 2</b> полное название дисциплины без аббревиатуры
ИНСТИТУТ	<b>Радиотехнических и телекоммуникационных систем</b>
КАФЕДРА	<b>радиоволновых процессов и технологий</b> полное название кафедры
ГРУППА/Ы	<b>РРБО-1-3-18; РССО-1-3-18</b> номер групп/ы, для которых предназначены материалы
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	<b>Лекция №5</b> лекция; материал к практическим занятиям; контрольно-измерительные материалы к практическим занятиям; руководство к КР/КП, практикам
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	<b>Исаков Владимир Николаевич</b> фамилия, имя, отчество
СЕМЕСТР	<b>6</b> указать номер семестра обучения

## **5. Восстановление (интерполяция) аналоговых сигналов по их дискретным значениям**

### **5.1. Постановка задачи восстановления сигналов**

Базовой теоретической моделью при цифровой обработке сигналов являются сигналы с ограниченным спектром, поскольку именно для таких сигналов дискретизация и восстановление потенциально могут быть выполнены точно.

Процедура восстановления сигнала с ограниченным спектром определяется рядом Котельникова. Однако практическая реализация этой процедуры затруднена, поскольку, из-за неограниченности во времени функций Котельникова, для определения любого значения  $s(t)$ ,  $t \neq nT$ , требуется располагать всеми отсчётами сигнала  $\{s(nT)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  и выполнить бесконечно большое количество операций умножения и сложения. Это обуславливает поиск приближённых решений задачи восстановления сигналов, предполагающих простую физическую реализацию.

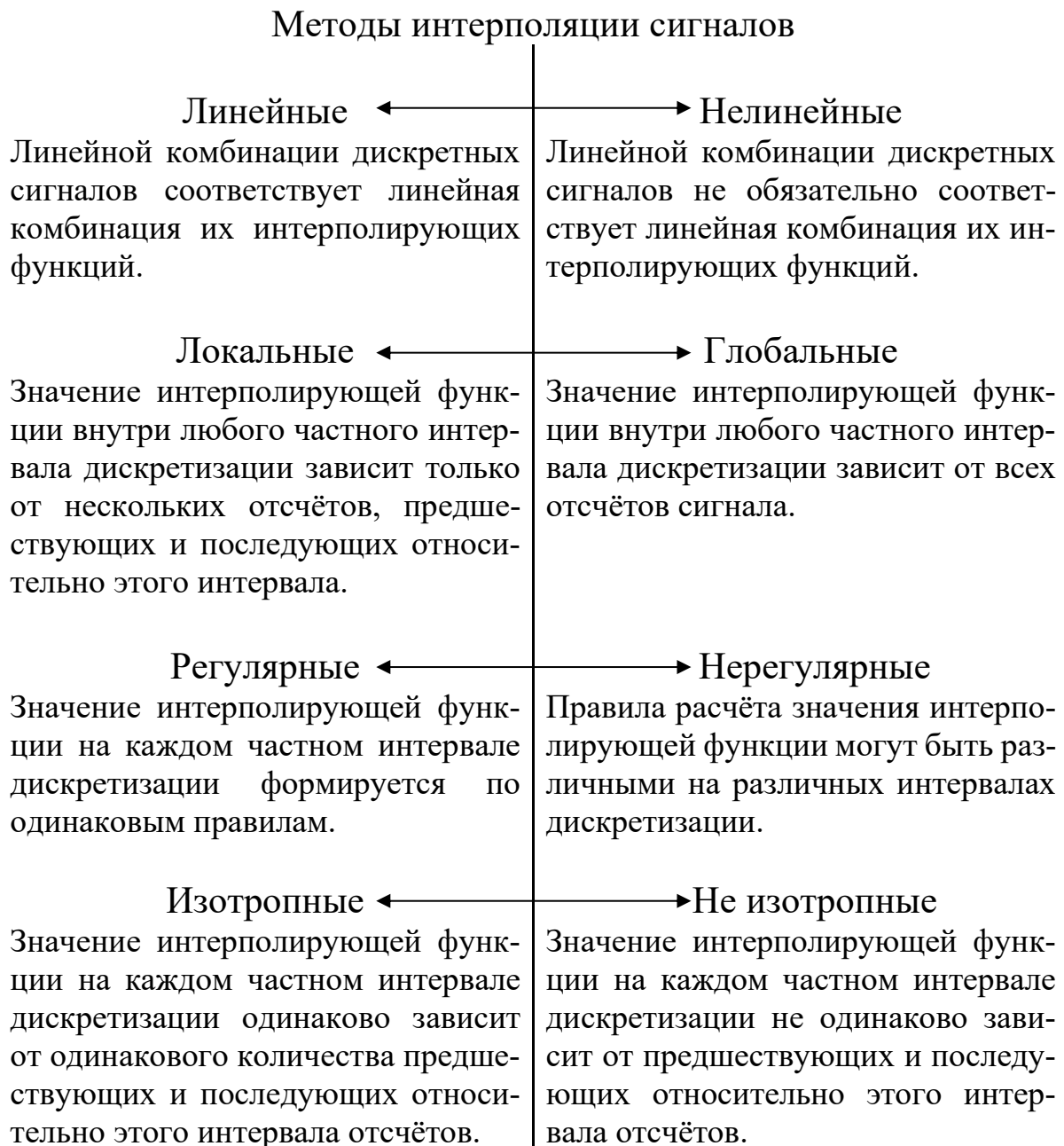
Восстановление аналоговых сигналов в математическом плане сводится к задаче интерполяции, то есть нахождения такой функции  $\psi(t)$ , называемой интерполирующей, которая в моменты дискретизации  $t_n = nT$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  принимает значения, совпадающие с значениями сигнала, а в остальные моменты времени описывает восстанавливаемый сигнал с той или иной степенью точности.

Решение задачи интерполяции неоднозначно. Классификация методов интерполяции представлена на рис.5.1.

Интерполяция на основе ряда Котельникова является линейной, глобальной, регулярной и изотропной. Перечисленные признаки желательно сохранить и при поиске приближённых решений задачи интерполяции, полагая, что они обусловлены неотъемлемыми свойствами сигналов с ограниченным спектром. Однако только глобальность интерполяции рядом Котельникова обуславливает принципиальные трудности при физической реализации. Поэтому приближённые решения задачи восстановления сигналов обычно рассматривают в классе линейных, локальных, регулярных и изотропных методов.

При переходе к приближённому решению задачи восстановления сигнала с ограниченным спектром, единственность решения

понимается асимптотически и выражается наложением условия сходимости интерполяционного процесса, которое гарантирует, что рано или поздно увеличение информации о восстанавливаемом сигнале приведёт к его более точному восстановлению. Требуемая точность восстановления сигнала, при выполнении условия сходимости, может быть достигнута предварительным выбором периода дискретизации.



*Рис.5.1. Классификация методов интерполяции*

## 5.2. Линейная регулярная интерполяция сигналов

### 5.2.1. Интерполяционный оператор и его основные свойства, интерполяционный базис

Регулярная интерполяция может рассматриваться только на бесконечной равномерной сетке дискретизации  $t_n = nT$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Переход от последовательности  $\{s(nT)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  к интерполирующей функции  $\psi(t)$  можно рассматривать как отображение множества дискретных сигналов на множество аналоговых сигналов:

$$\psi(t) = I\{s(nT)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \quad (5.1)$$

Интерполяционный оператор  $I\{\bullet\}$  обладает свойствами:

1. Линейность

$$I\{k_1 s_1(nT) + k_2 s_2(nT)\} = k_1 I\{s_1(nT)\} + k_2 I\{s_2(nT)\}, \quad k_{1,2} \in \mathbb{C}. \quad (5.2)$$

2. Согласованность

$$\psi(nT) = s(nT), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.3)$$

3. Сходимость

$$\lim_{T \rightarrow 0} \psi(t) = s(t). \quad (5.4)$$

Дискретный сигнал можно представить в виде:

$$s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta[n-k]. \quad (5.5)$$

С учётом свойства линейности (5.2)

$$\psi(t) = I\{s(nT)\} = I\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) I\{\delta[n-k]\}.$$

Введём обозначение

$$\phi_k(t) = I\{\delta[n-k]\}, \quad (5.6)$$

тогда выражение для интерполирующей функции можно переписать в виде:

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \phi_k(t). \quad (5.7)$$

Функция  $\phi_k(t)$  называется базисной функцией и представляет собой результат восстановления единичного отсчёта, соответствующего  $k$ -му моменту дискретизации, методом  $I\{\bullet\}$  (см.

ри.5.2).

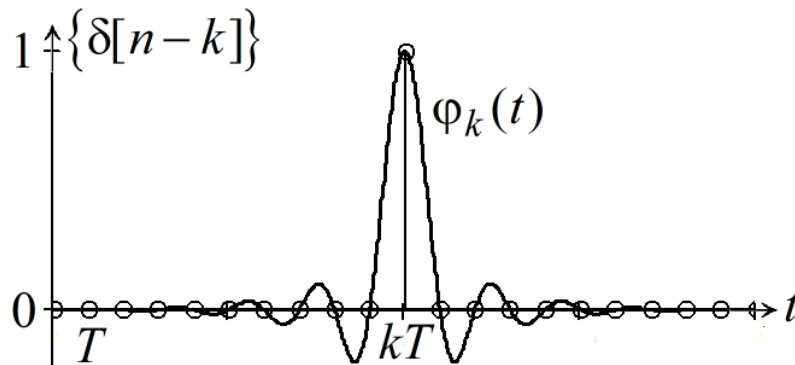


Рис.5.2. Базисная функция

Совокупность базисных функций  $\{\varphi_k(t)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$  называется интерполяционным базисом.

Базисная функция, как частный случай интерполирующей, обладает свойством согласованности:

$$\varphi_k(nT) = \delta[n - k]. \quad (5.8)$$

Графики базисных функций регулярного метода интерполяции имеют одинаковую форму, а сами базисные функции могут быть получены из базисной функции  $\varphi_0(t)$ , соответствующей нулевому моменту времени, путём её сдвигов на целое число периодов дискретизации:

$$\varphi_k(t) = \varphi_0(t - kT). \quad (5.9)$$

Базисная функция  $\varphi_0(t)$  называется порождающей функцией, в том смысле, что совокупность её сдвигов на целое число периодов дискретизации порождает интерполяционный базис. Свойство (5.8) для порождающей функции переписывается как

$$\varphi_0(nT) = \delta[n]. \quad (5.10)$$

С учётом (5.9) интерполирующую функцию (5.7) приведём к виду:

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)\varphi_0(t - kT) \quad (5.11)$$

В случае, локального метода интерполяции значения интерполирующей функции внутри некоторого частного интервала  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  зависят от его граничных узлов  $(t_k, s_k)$  и  $(t_{k+1}, s_{k+1})$ , а

также от  $M_1$  предшествующих и  $M_2$  последующих узлов интерполяции. При этом выражение (5.11) переписывается следующим образом:

$$\psi(t)|_{t \in [t_k, t_{k+1}]} = \sum_{m=-M_1}^{M_2+1} s_{k+m} \varphi_0(t - t_{k+m}), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.11a)$$

Порождающая функция изотропного метода интерполяции обладает чётной симметрией

$$\varphi_0(t) = \varphi_0(-t). \quad (5.12)$$

### 6.2.2. Условие сходимости регулярного метода интерполяции

Рассмотрим простейший случай восстановления единицы  $s(t) = 1$  и  $s(nT) = 1, n \in \mathbb{Z}$ . Такой сигнал может быть корректно дискретизирован при любом выборе периода дискретизации. Интерполирующая функция (5.11) в этом случае запишется в виде:

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t - nT) \quad (5.13)$$

Выражение (5.13) можно рассматривать как результат периодизации, непериодической функции  $\varphi_0(t)$ , с периодом повторения  $T$ , что позволяет выполнить разложение в ряд Фурье в комплексной форме:

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_0\left(\frac{2\pi k}{T}\right) e^{j\frac{2\pi k}{T}t}, \quad (5.14)$$

где  $\Phi_0(\omega) = F\{\varphi_0(t)\}$  - спектральная плотность порождающей функции.

Изменение периода дискретизации при восстановлении единицы можно рассматривать как масштабирование, то есть интерполирующая функция в этом случае может быть представлена в виде

$$\psi(t) = \psi_0\left(\frac{t}{T}\right),$$

где  $\psi_0(t)$  - интерполирующая функция, соответствующая единичному периоду дискретизации, является периодической с единичным периодом, то есть

$$\psi_0(t) = \psi_0(t + n).$$

Если  $\psi(t)$  не является постоянной, то найдутся такие две точки  $t_a, t_b \in [0, 1]$ , что  $\psi_0(t_a) \neq \psi_0(t_b)$ , и предела при неограниченном уменьшении периода дискретизации не существует, поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \psi(t) &= \lim_{T \rightarrow 0} \psi_0\left(\frac{t}{T}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_0\left(\frac{t}{t/(t_a + n)}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_0(t_a + n) = \psi_0(t_a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \psi(t) &= \lim_{T \rightarrow 0} \psi_0\left(\frac{t}{T}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_0\left(\frac{t}{t/(t_b + n)}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_0(t_b + n) = \psi_0(t_b). \end{aligned}$$

Таким образом, если  $\psi(t)$  не постоянна при некотором  $T$ , то она не трансформируется в постоянную и при его неограниченном уменьшении.

Следовательно, для метода интерполяции, обладающего свойством сходимости, интерполирующая функция, построенная для единицы, независимо от периода дискретизации, постоянна и равна единице. Тогда из (5.14), ввиду единственности разложения в ряд Фурье, следует, что сходимость интерполяционного процесса при восстановлении единицы имеет место при выполнении любого из эквивалентных условий:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t - nT) = 1 \Leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{2\pi k}{T}\right) = \begin{cases} T, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

или

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t - nT) = 1 \Leftrightarrow \Phi_0(k\omega_d) = T\delta[k]. \quad (5.15)$$

Покажем теперь, что при выполнении условий восстановления единицы (5.15) имеет место и сходимость интерполяционного процесса для любого сигнала с ограниченным спектром.

Рассмотрим преобразование Фурье интерполирующей функции (5.11) и с учётом свойств линейности и временного запаздывания для спектральной плотности интерполирующей функции запишем:

$$\begin{aligned}\Psi(\omega) &= F\{\psi(t)\} = F\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)\varphi_0(t-nT)\right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)F\{\varphi_0(t-nT)\} = \Phi_0(\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)e^{-j\omega nT} = \\ &= \Phi_0(\omega)S_d(\omega).\end{aligned}\quad (5.16)$$

Подставляя спектр дискретного выраженный через спектр аналогового сигнала, последнее выражение перепишем как:

$$\Psi(\omega) = \Phi_0(\omega) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\omega - k\omega_d) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\omega) S(\omega - k\omega_d).$$

При предельном переходе  $T \rightarrow 0$  происходит локализация порождающей функции, что приводит к растяжению по оси частот её спектральной плотности (рис.5.3), но ширина спектра сигнала  $2\omega_m$  не изменяется, поэтому можно считать, что

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow 0} \Psi(\omega) &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\omega) S(\omega - k\omega_d) = \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_0(k\omega_d) S(\omega - k\omega_d),\end{aligned}$$

откуда, при выполнении (5.15), имеем  $\lim_{T \rightarrow 0} \Psi(\omega) = S(\omega)$  или

$$\lim_{T \rightarrow 0} \psi(t) = s(t).$$

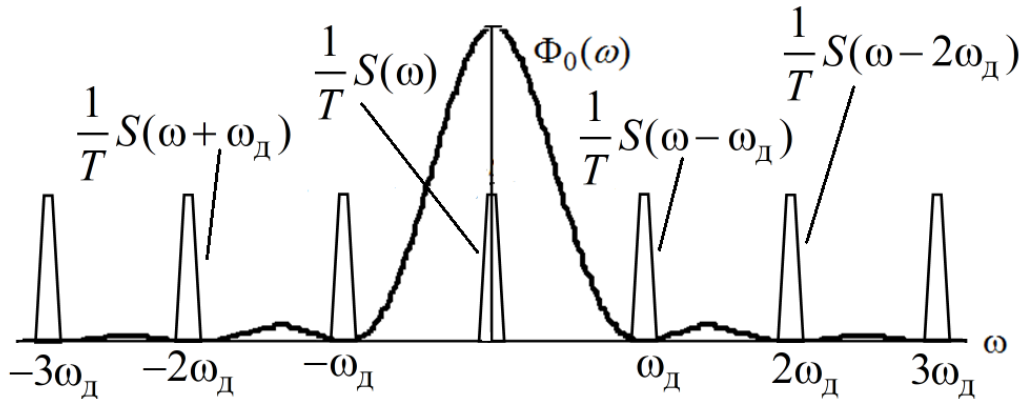


Рис.5.3. Спектральная плотность порождающей функции и спектр дискретного сигнала

Поскольку фурье-пара  $\varphi_0(t) \leftrightarrow \Phi_0(\omega)$  обладает свойствами (5.10) и (5.15), то имеют место нормировки



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t) dt &= T, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\omega) d\omega &= 2\pi. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Более того, класс фурье-пар, удовлетворяющих (5.10) и (5.15) замкнут относительно преобразования Фурье. Действительно, рассматривая в качестве временной функции  $\tilde{\varphi}_0(t) = \frac{1}{T} \Phi_0\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ , заметим, что она удовлетворяет (5.10), а её спектральная плотность, ввиду свойства симметрии преобразования Фурье, описывается выражением  $\tilde{\Phi}_0(\omega) = T \varphi_0\left(-\frac{T^2 \omega}{2\pi}\right)$  и удовлетворяет (5.15). Таким образом, спектральная плотность порождающей функции некоторого регулярного интерполяционного базиса при надлежащем масштабировании сама является порождающей функцией регулярного интерполяционного базиса. При этом интерполяция в обоих указанных базисах обладает свойством сходимости.

### 5.2.3. Оценка искажений при регулярной интерполяции

Из (5.16) видно, что спектральная плотность интерполирующей функции  $\Psi(\omega)$  представляет собой результат выделения спектра исходного сигнала  $S(\omega)$  из спектра дискретного сигнала  $S_d(\omega)$  путём умножения на спектральную плотность порождающей функции  $\Phi_0(\omega)$  (рис. 5.4).

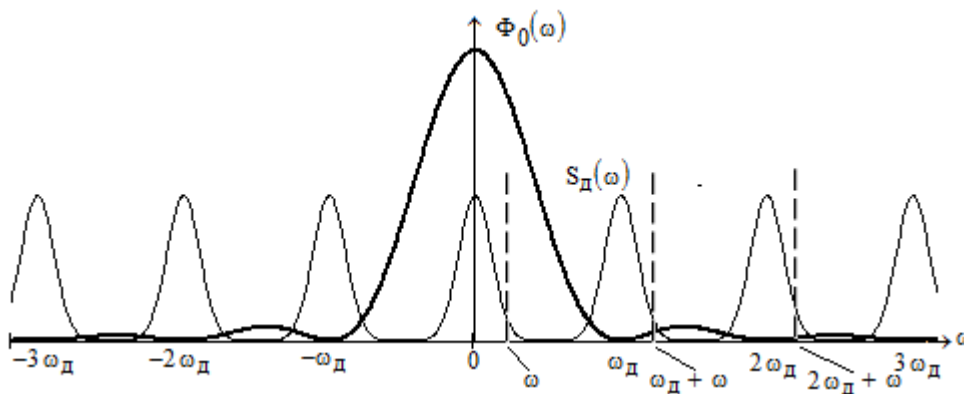


Рис.5.4. Спектр дискретного сигнала и спектральная плотность порождающей функции

Точным такое выделение являлось бы в случае, когда  $\Phi_0(\omega)$  представляет собой прямоугольную функцию, что при локальной интерполяции исключено, поскольку, ввиду ограниченности во времени порождающей функции  $\varphi_0(t)$ , её спектральная плотность  $\Phi_0(\omega)$  является аналитической функцией и, не будучи тождественным нулём, не может обращаться в нуль ни на каком конечном интервале.

Имея это в виду, интерполирующую функцию  $\psi(t)$ , при условии  $\omega_d > 2\omega_m$ , можно формально рассматривать как результат искажений исходного сигнала  $s(t)$ , при которых для каждой гармоники сигнала частоты  $\omega$ , независимо от других, происходит изменение её амплитуды (умножается на  $\Phi_0(\omega)$ ) и наложение на сигнал колебаний частот  $k\omega_d + \omega$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  с амплитудами, пропорциональными  $\Phi_0(k\omega_d + \omega)$ . Поскольку при этом комбинационного взаимодействия между гармониками сигнала не происходит, минимизацию искажений можно осуществлять отдельно для каждой гармоники.

Искажения отдельной гармонической составляющей сигнала будем характеризовать коэффициентом искажений, определяемым как отношение действующего значения совокупности нежелательных гармоник, возникших при интерполяции, к действующему значению восстанавливаемой гармоники. При этом, рассматривая только такую интерполяцию, при которой обеспечивается сходимость, то есть с учётом (5.15)  $\Phi_0(0) = T$ , выражение для коэффициента искажений запишем следующим образом:

$$K_{\text{и}}(\omega) = \frac{1}{T} \sqrt{(T - \Phi_0(\omega))^2 + \Phi_0^2(\omega_d + \omega) + \Phi_0^2(2\omega_d + \omega) + \dots} \quad (5.18)$$

При практических расчётах, может быть учтено только конечное число нежелательных гармоник:

$$K_{\text{и}}^N(\omega) = \frac{1}{T} \sqrt{(T - \Phi_0(\omega))^2 + \Phi_0^2(\omega_d + \omega) + \dots + \Phi_0^2(N\omega_d + \omega)} \quad (5.19)$$

В виду того, что изменение периода дискретизации соответствует масштабированию спектральной плотности порождающей

функции по горизонтальной и вертикальной координатным осям, коэффициент искажений удобно рассматривать как функцию нормированной частоты  $\omega T$ . График коэффициента искажений в зависимости от нормированной частоты не изменяется при изменении периода дискретизации.

Пороговый анализ зависимости  $K_{\text{и}}(\omega)$  может быть положен в основу определения требуемого значения частоты дискретизации и/или выбора метода интерполяции при заданном уровне искажений (см. рис. 5.5). Выбор допустимого уровня искажений  $K_{\text{и.доп}}$  определяется спецификой решаемой задачи и определяет нормированную граничную частоту  $(\omega T)_{\text{гр}}$  для метода интерполяции, такую что  $K_{\text{и}}|_{\omega T \leq (\omega T)_{\text{гр}}} \leq K_{\text{и.доп}}$ . Нормированная граничная частота не зависит от периода дискретизации. Для восстановления сигнала с максимальной частотой спектра  $\omega_m$  с заданным уровнем искажений требуется обеспечить  $\omega_m T \leq (\omega T)_{\text{гр}}$ , при этом каждая гармоника сигнала частоты  $\omega$  восстанавливается с  $K_{\text{и}}(\omega) \leq K_{\text{и.доп}}$ .

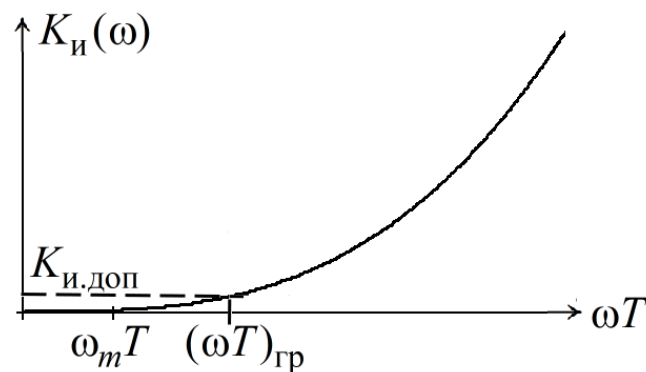


Рис.5.5. Пример графика коэффициента искажений

Обычно приемлемые значения допустимого коэффициента искажений зависят от специфики конкретной решаемой задачи и выбираются в диапазоне  $K_{\text{и.доп}} \leq 10^{-2}$  (меньше -40дБ). Чем меньше выбран допустимый коэффициент искажений, тем меньше окажется и граничная частота.

## Литература

### Основная литература

1. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов / О. А. Стеценко. — М.: Высш. шк., 2007. — 432 с. <https://library.mirea.ru/books/39991>
2. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для студентов радиотехн. спец. вузов / И. С. Гоноровский. — М.: Радио и связь, 1986. — 512 с. <https://library.mirea.ru/books/6969>
3. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. для вузов / С. И. Баскаков. — М.: Высш. шк., 2005. — 462 с. <https://library.mirea.ru/books/875>
4. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие / Д. В. Васильев, М. Р. Витоль, Ю. Н. Горшенков, и др.; К. А. Самойло. — М.: Радио и связь, 1982. — 528 с. <https://library.mirea.ru/books/19694>

### Дополнительная литература

5. Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров: учебное пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1982.
6. Основы цифровой обработки сигналов: Учеб. пособие для вузов / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 753 с. <https://library.mirea.ru/books/831>
7. Сигналы. Теоретическая радиотехника: Справ. пособие / А. Н. Денисенко. — М.: Горячая линия - Телеком, 2005. — 704 с. <https://library.mirea.ru/books/45>
8. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.: ил. — Библиогр.: с. 804 (15 назв.) <https://library.mirea.ru/books/9447>
9. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. — М.: Наука, 1998. — 608 с. <https://library.mirea.ru/books/4829>

### Пособия и методические указания

10. Радиотехнические цепи и сигналы. Ч. 2 [Электронный ресурс]: метод. указания по выполнению лаб. работ / В. Н. Исаков, Д. Р. Барский. — М.: РТУ МИРЭА, 2019. — Электрон. опт. диск (ISO) <https://library.mirea.ru/share/3274>