Лекция №13

Вычисление интегралов с тригонометрическими функциями $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\alpha x\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} R(x)cos\ \alpha x\,dx$ (продолжение)

Теорема. *Пусть* $R(z)$ *– рациональная функция, у которой степень числителя меньше степени знаменателя,* $R(z)$ не имеет полюсов на действительной оси, *и в верхней полуплоскости имеет полюса* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*; при* $z=x$ *функция* $R(x)$ *действительна при действительных* x*. Тогда для любого* $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\cdot R(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\left[R(z_k)\cdot e^{i\alpha z}\right].$$

Следствие. Воспользовавшись формулой Эйлера: $e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\alpha x\,dx = Im\left[2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\big(R(z_k)e^{i\alpha z}\big)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)cos\ \alpha x\,dx = Re\left[2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\big(R(z_k)e^{i\alpha z}\big)\right]$$

$$(Im\, z_k > 0).$$

Пример. Вычислить

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 25} dx$$

Решение. Введем вспомогательную функцию $F(z) = \frac{ze^{i2z}}{z^2+25}$. Если $z = x$, то $Im\, F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{x \sin 2x}{x^2+25}$.

Функция $F(z) = \frac{ze^{i2z}}{z^2+25}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2 + 25} dx = 2\pi i \cdot res\, F(5i).$$

$z = 5i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является полюсом первого порядка.

$z = -5i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z = 5i$

$$res\, F(5i) = \lim_{z \to 3i} \frac{ze^{i2z}}{z^2 + 9}(z - 5i) =$$

$$= \lim_{z \to 5i} \frac{ze^{i2z}}{z + 5i} = \frac{5ie^{-10}}{10i} = \frac{1}{2e^{10}}.$$

Подставляя полученное значение, получим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 25} dx = Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2 + 25} dx =$$

$$= Im \left[2\pi i \cdot res_{z=5i} \frac{\left(ze^{i2z}\right)}{z^2 + 25} \right] = Im \left[2\pi i \frac{1}{2e^{10}} \right] = \frac{\pi}{e^{10}}.$$

Пример. Вычислить

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{cos\, 3x}{x^2 + 1} dx$$

Решение. Введем вспомогательную функцию $F(z)=\frac{e^{i3z}}{z^2+1}$. Если $z=x$, то $Re\,F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x)=\frac{\cos 3x}{x^2+1}$. Поскольку подынтегральная функция $f(x)$ четная, то

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^2+1}dx$$

Функция $F(z)=\frac{e^{i3z}}{z^2+1}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i3x}}{x^2+1}dx=2\pi i\cdot res\,F(i).$$

$z=i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является простым полюсом.

$z=-i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z=i$

$$res\,F(i)=\lim_{z\to i}\frac{e^{i3z}}{z^2+1}(z-i)=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{e^{i3z}}{z+i}=\frac{e^{-3}}{2i}=\frac{1}{2ie^3}.$$

Подставляя полученное значение, получим

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\cdot Re\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i3x}}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot Re\left[2\pi i\cdot res_{z=i}\frac{\left(e^{i3z}\right)}{z^2+1}\right]=\frac{1}{2}\cdot Re\left[2\pi i\frac{1}{2ie^3}\right]=\frac{\pi}{2e^3}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos9x}{(x^2+4)^2}dx$$

Решение. Введем вспомогательную функцию $F(z) = \frac{e^{i9z}}{(z^2+4)^2}$. Если $z = x$, то $Re\,F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{cos9x}{(x^2+4)^2}$.

Функция $F(z) = \frac{e^{i9z}}{(z^2+4)^2}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i9x}}{(x^2+4)^2}dx = 2\pi i \cdot res\,F(2i).$$

$z = 2i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является полюсом второго порядка.

$z = -2i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z = 2i$.

$$res\,F(2i) = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}[F(z)(z-2i)^2] = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{i9z}}{(z^2+4)^2}(z-2i)^2\right] =$$

$$= \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{i9z}(z-2i)^2}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right] = \lim_{z\to i2}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{i9z}}{(z+2i)^2}\right] =$$

$$\lim_{z\to 2i}\left[\frac{9ie^{i9z}}{(z+2i)^2} - \frac{2e^{i9z}}{(z+2i)^3}\right] = \frac{9ie^{-18}}{(4i)^2} - \frac{2e^{-18}}{(4i)^3} = \frac{7e^{-18}}{32i}.$$

Подставляя полученное значение, получим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos9x}{(x^2+4)^2}dx = Re\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i9x}}{(x^2+4)^2}dx =$$

$$= Re\left[2\pi i \cdot res_{z=2i}\frac{e^{i9z}}{(z^2+4)^2}\right] = Re\left[2\pi i\frac{7e^{-18}}{32i}\right] = \frac{7\pi}{32e^{18}}.$$

§ 6. Приложения теории вычетов: *теорема Руше, нахождение оригинала по заданному изображению*

6.3. Теорема Руше

Теорема 6.4. (Руше). *Если функции* $f(z)$ *и* $g(z)$*, аналитичные в замкнутой области* $\overline{D}$*, ограниченной контуром* Γ*, во всех точках этого контура удовлетворяют неравенству*

$$|f(z)| > |g(z)|,$$

то их сумма $F(z) = f(z) + g(z)$ *и функция* $f(z)$ *имеют в области* D *одинаковое число нулей (с учетом их кратности).*

Заметим, что в силу условий теоремы на границе Γ $|f(z)| > 0$, $|F(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$, значит функции $F(z)$ и $f(z)$ не имеют нулей на Г.

Пример. Определить число корней уравнения $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$ внутри круга $|z| < 2$.

Решение. Положим $f(z) = -3z^3$, $g(z) = z^4 - 1$, $F(z) = f(z) + g(z) = z^4 - 3z^4 - 1$.

На окружности $|z| = 2$:

$$|f(z)|_{z=2} = |-3z^3|_{z=2} = 3 \cdot 8 = 24,$$

$$|g(z)|_{z=2} \leq |z^4|_{z=2} + 1 = 16 + 1 = 17,$$

т.е. во всех точках окружности $|z| = 2$ выполняется условие $|f(z)| > |g(z)|$. Функция $f(z) = -3z^3$ внутри круга $|z| < 2$ имеет нуль кратности 3, следовательно, по теореме Руше, и функция $F(z) = z^4 - 3z^3 - 1$ имеет три нуля внутри круга $|z| < 2$, т.е. заданное уравнение $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$ имеет три корня внутри круга $|z| = 2$.

Пример. Сколько корней уравнения

$$z^5 - 10z + 3 = 0$$

находится в кольце $1 < |z| < 2$.

Решение. Обозначим через N – число корней заданного уравнения в кольце $1 < |z| < 2$, N_1 – число корней этого же уравнения в круге $|z| < 2$, N_2 – число корней уравнения в круге $|z| < 1$.

Найдем N_1. Рассмотрим окружность $|z| = 2$. Положим $f(z) = z^5$, $g(z) = -10z + 3$. Заданное уравнение можно переписать в виде $F(z) = f(z) + g(z) = 0$.

На окружности $|z| = 2$ имеем:

$|f(z)|_{|z|=2} = |z^5|_{|z|=2} = 32$, $|g(z)| = |-10z + 3| \leq |10z| + 3$, т.е. $|g(z)|_{|z|=2} \leq |10z|_{|z|=2} + 3 = 23$, следовательно

$|f(z)|_{|z|=2} > |g(z)|_{|z|=2}$. Функция $f(z) = z^5$ в круге $|z| < 2$ имеет нуль кратности 5, значит по теореме Руше $N_1 = 5$.

Найдем N_2. Рассмотрим окружность $|z| = 1$.

Положим $f(z) = -10z$, $g(z) = z^5 + 3$. На окружности $|z| = 1$ имеем $|f(z)|_{|z|=1} > |g(z)|_{|z|=1}$, так как

$|f(z)|_{|z|=1} = |-10z|_{|z|=1} = 10$,

$|g(z)|_{|z|=1} = |z^5 + 3|_{|z|=1} \leq |z^5|_{|z|=1} + 3 = 4$.

Значит функция $F(z)$ не имеют нулей на окружности $|z| = 1$.

Тогда $N = N_1 - N_2$.

Функция $f(z) = -10z$ в области $|z| < 1$ имеет один нуль, следовательно по теореме Руше $F(z) = f(z) + g(z)$ имеет в области $|z| < 1$ один нуль, т.е. $N_2 = 1$. Ответ: число корней заданного уравнения в кольце $1 < |z| < 2$ будет равно $N = 5 - 1 = 4$.

6.4. Приложение вычетов к вычислению преобразования Лапласа

Теория вычетов часто используется в курсе дифференциальных уравнений при решении задачи Коши с помощью преобразования Лапласа (опереторный метод).

Определение 6.1. *Оригиналом называется комплекснозначная функция* $f(t)$*, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) при $t<0$ $f(t) \equiv 0$,

2) при $t \geq 0$ $f(t)$ *непрерывна либо имеет на любом конечном отрезке оси* t *не более, чем конечное число точек разрыва первого рода,*

3) существуют действительные числа M>0 и s *(показатель роста* $f(t)$*) такие, что* $|f(t)| \leq Me^{st}$

Определение 6.2. *Преобразованием Лапласа называется интегральное преобразование, ставящее в соответствие оригиналу* $f(t)$ *функцию* $F(p)$ *комплексной переменной* p.

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, Re\, p > s \quad .$$

Обозначается $f(t) \risingdotseq F(p)$. $F(p)$ *называется изображением оригинала* $f(t)$

Теорема 6.5. (следствие из теоремы обращения). *Если изображение* $F(p)$ *является правильной дробно-рациональной функцией, т.е.*

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

где $A(p)$ *и* $B(p)$ *– многочлены, причем степень знаменателя больше степени числителя, и знаменатель имеет корни* $p_1, p_2, \dots, p_n$*, кратности* $r_1, r_2, \dots, r_n$*, то соответствующий оригинал*

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \sum_{k=1}^{n} res_{p_k} \left[\frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \right]. \tag{6.7}$$

В частном случае,

1) когда все корни знаменателя простые, т.е. $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 1$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}, \qquad (6.8)$$

2) если корни знаменателя сопряженные комплексные числа $p_1 = \alpha + i\beta, p_2 = \alpha - i\beta$.

Тогда

$$res_{(\alpha+i\beta)} F(p) e^{pt} + res_{\alpha-i\beta} F(p) e^{pt} =$$
$$= 2Re\, res_{\alpha+i\beta} F(p) e^{pt}. \qquad (6.9)$$

<u>Пример</u>. Задано изображение $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p-2)}$. Найти оригинал $f(t)$, используя теорию вычетов.

Решение. Функция $F(p)$ имеет простые полюсы в точках $p_1 = 1, p_2 = 2$.

По формуле (6.7) можно найти оригинал

$f(t) = res_{p=1}(F(p)e^{pt}) + res_{p=2}(F(p)e^{pt})$.

Вычисляем вычеты в указанных точках и получаем ответ

$$f(t) = -e^t + 2e^{2t}.$$

<u>Пример</u>. Задано изображение $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+9)(p-2)}$.

Найти оригинал $f(t)$, используя теорию вычетов.

Решение. Функция $F(p)$ имеет простые полюсы в точках $p_1 = 3i, p_2 = -3i$, $p_3 = 2$. По формуле (6.7)

$$f(t) = res_{p=3i}(F(p)e^{pt}) + res_{p=-3i}(F(p)e^{pt}) + res_{p=2}(F(p)e^{pt}),$$

так как $p_1 = 3i$ и $p_2 = -3i$ комплексно сопряженные, то

$$f(t) = 2Re\, res_{p=3i}(F(p)e^{pt}) + res_{p=2}(F(p)e^{pt}),$$

но $p_1 = 3i$ и $p_3 = 2$ – простые, поэтому применим формулу (6.8), обозначив

$A(p) = p^2$, $B(p) = (p^2+9)(p-2) = p^3 - 2p^2 + 9p - 18$,
$B'(p) = 3p^2 - 4p + 9$.

Получим, используя формулу (6.9)

$$f(t) = 2Re\frac{(3i)^2 e^{3ti}}{3(3i)^2 - 4(3i) + 9} + \frac{4e^{2t}}{3\cdot 4 - 4\cdot 2 + 9} = 2Re\frac{3e^{3ti}}{6+4i} + \frac{4e^{2t}}{13} =$$

$$= Re\left[\frac{3}{13}(3-2i)(\cos 3t + i\sin 3t)\right] + \frac{4}{13}e^{2t} =$$

$$= \frac{3}{13}Re[(3\cos 3t + 2\sin 3t) + i(3\sin 3t - 2\cos 3t)] + \frac{4}{13}e^{2t} =$$

$$= \frac{3}{13}(3\cos 3t + 2\sin 3t) + \frac{4}{13}e^{2t}.$$

Таким образом, получен оригинал $f(t) = \frac{3}{13}(3\cos 3t + 2\sin 3t) + \frac{4}{13}e^{2t}$.

§ 6. Приложения теории вычетов:
решение задачи Коши с помощью преобразования Лапласа и теории вычетов

Ранее были рассмотрены задачи на нахождение оригинала по заданному изображению. Приведем решение более сложной задачи – задачи Коши из курса дифференциальных уравнений – на основе преобразования Лапласа и теории вычетов.

Пример. Решить операторным методом (с помощью преобразования Лапласа) задачу Коши $x'' - 3x' - 4x = 4t - 5$,

$x(0) = -1$, $x'(0) = 2$.

Указание: В процессе решения восстановить оригинал, используя теорию вычетов.

Решение.

Используем при решении задачи Коши операторный метод (преобразование Лапласа). В данном примере будем обозначать изображение $X(p)$ (вместо $F(p)$), что не влияет на метод решения. Оригинал обозначим $x(t)$.

$$x(t) \doteqdot X(p),$$

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x_0 = pX(p) + 1,$$

$$x''(t) \doteqdot p^2 X(p) - px_0 - x'(0) = p^2 X(p) + p - 2$$

$$4t - 5 \doteqdot \frac{4}{p^2} - \frac{5}{p}$$

Запишем операторное уравнение:

$$p^2 X(p) + p - 2 - 3pX(p) - 3 - 4X(p) = \frac{4}{p^2} - \frac{5}{p} \Rightarrow$$

$$(p^2 - 3p - 4)X(p) = \frac{4}{p^2} - \frac{5}{p} - p + 5 \Rightarrow$$

$$(p-4)(p+1)X(p) = \frac{4 - 5p - p^3 + 5p^2}{p^2} \Rightarrow$$

$$X(p) = \frac{-p^3 + 5p^2 - 5p + 4}{(p+1)(p-4)p^2}$$ - полученное изображение.

Изображение $X(p)$ имеет три особые точки $p_1 = 0, p_2 = 4, p_3 = -1$.

Вычисляя пределы данной функции в каждой указанной точке, получаем

$p_1 = 0$ - полюс второго порядка,

$p_2 = 4$ – устранимая особая точка

$p_3 = -1$- полюс первого порядка (простой полюс).

По формуле (6.7) находим оригинал

$x(t) = 2 - t - 3e^{-t}$. Это решение задачи Коши.