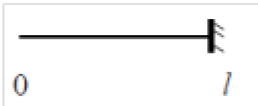
Решение задачи о нахождении колебаний струны с закреплённым концом (x=0) и свободным концом (x=l), когда начальное отклонение совпадает с собственной функцией

Задача. Найти поперечные колебания струны, один конец (x=l) которой жестко закреплен, а другой конец (x=0) – свободен. Если в начальный момент струна не имеет начального отклонения. Начальная скорость струны совпадает с собственной функцией задачи Штурма-Лиувилля $f_2\left(x\right)=\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)$, где n=5.

1. Запишем уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2. Графически изобразим заданные граничные (краевые) условия.



Запишем граничные условия:
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,$$
$$u(x,t)\big|_{x=l}=u(l,t)=0.$$

3. Запишем начальные условия задачи

$$u(x,t)\big|_{t=0}=u(x,0)=0,$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right).$$

4. Используя метод Фурье (метод разделения переменных) запишем общее решение уравнения в виде произведения:

$u(x,t)=X(x)T(t)$ и найдём нетривиальные решения $u(x,t)\neq 0$

5. Подставим общее решение в уравнение и разделим переменные

$$\frac{\partial^2\left(X(x)T(t)\right)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\left(X(x)T(t)\right)}{\partial x^2},$$

$$X(x)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}=a^2 T(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2},$$

$$X(x)T''(t)=a^2T(t)X''(x),$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}, \quad \textit{уравнение справедливо для } \forall x,t, \quad \textit{когда}$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=C, \quad \textit{где} \quad C=const$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=C \quad \textit{и} \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=C$$

$$T''(t)-a^2CT(t)=0 \quad X''(x)-C\,X(x)=0$$

Подставим общее решение в граничные условия

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{\partial X(l)T(t)}{\partial x} = T(t)\frac{\partial X(l)}{\partial x} = 0,$$

$$\textit{Если}\quad T(t)=0,\quad \textit{то}\quad \textit{для}\quad \forall x,t\quad u(x,t)=0\quad -\textit{тривиальное решение} \Rightarrow$$

$$X(0)=0,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial X(l)}{\partial x} = 0.$$

6. Представив $C=\lambda^2$, получим

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ \dfrac{\partial X(l)}{\partial x} = 0. \end{cases} \qquad \textit{одномерную}\quad \textit{задачу}\quad \textit{Штурма – Лиувилля}$$

7. Решение будем искать в виде $X(\underline{x}) = e^{\alpha x}$. Для решения этой задачи необходимо найти собственные значения $C=\lambda^2$ и собственные функции задачи, соответствующие нетривиальным решениям. Подставим это общее решение в уравнение и получим характеристическое уравнение:

$$(e^{\alpha x})'' - \lambda^2 e^{\alpha x} = 0,$$

$$\alpha(e^{\alpha x})' - \lambda^2 e^{\alpha x} = 0,$$

$$\alpha^2 e^{\alpha x} - \lambda^2 e^{\alpha x} = 0,$$

$$e^{\alpha x}(\alpha^2 - \lambda^2) = 0,$$

$$e^{\alpha x} \neq 0 \; \textit{для} \quad \forall \alpha, x \Rightarrow \quad \alpha^2 - \lambda^2 = 0$$

1) Если $C=\lambda^2 >0$, то

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x},$$

найдём частные решения, подставив в граничные условия

$$\frac{\partial X(0)}{\partial x} = X'(0) = \lambda c_1 e^{\lambda\cdot 0} - \lambda c_2 e^{-\lambda\cdot 0} = 0, \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2$$

$$X(l) = c_1 e^{\lambda\cdot l} + c_2 e^{-\lambda\cdot l} = c_1 e^{\lambda\cdot l} + c_1 e^{-\lambda\cdot l} = 0,$$

$$\lambda c_1 (e^{\lambda\cdot l} + e^{-\lambda\cdot l}) = 0,$$

$$\textit{так}\quad \textit{как}\quad l,\lambda \neq 0,\quad \textit{то}\quad \textit{и}\quad e^{\lambda\cdot l} + e^{-\lambda\cdot l} \neq 0, \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0$$ В этом случае нет нетривиальных решений.

2) Если $C=\lambda^2 =0$, то

$$X(x) = c_1 + c_2 x,$$

найдём частные решения, подставив в граничные условия

$$\frac{\partial X(0)}{\partial x} = c_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$X(l) = c_1 + c_2 \cdot l = c_1 = 0, \quad \Rightarrow \quad X(x) = 0$$

В этом случае нет нетривиальных решений.

3) Если $C=\lambda^2<0$, то корни характеристического уравнения чисто мнимые

$$X(x) = Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x} = c_1 cos\left(\lambda x\right)+c_2 sin\left(\lambda x\right),$$

найдём частные решения, подставив в граничные условия

$$\frac{\partial X(0)}{\partial x} = -c_1\cdot\lambda sin\left(\lambda\cdot 0\right)+c_2\lambda cos\left(\lambda\cdot 0\right)=c_2\lambda=0, \qquad c_2=0$$

$$X(l) = c_1 cos\left(\lambda\cdot l\right)+c_2 sin\left(\lambda\cdot l\right)=c_1 cos\left(\lambda\cdot l\right)=0,$$

$$c_1\lambda cos\left(\lambda\cdot l\right)=0,$$

при $c_1\neq 0$ получим

$$\lambda l=\frac{\pi(2n-1)}{2},$$

$$\lambda=\frac{\pi(2n-1)}{2l}, \qquad n=1,2,3...$$

$$X(x)=c_1\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)$$

8. Таким образом

$$X_n=A_n\varphi_n(\lambda_n,x),$$

$\lambda_n=\dfrac{\pi(2n-1)}{2l}, \qquad n=1,2,3...$ – собственные значения,

$\varphi_n=\cos\left(\dfrac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \qquad n=1,2,3...$ – собственные функции

Решение имеет вид

$$X_n(x)=A_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right).$$

Проверим ортогональность собственных функций:

$$\int_0^l\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l}x\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx=\begin{cases}0, n\neq m\\ \frac{l}{2}, n=m\end{cases}$$

9. Решим уравнение для $T(t)$ и найдём решения $T_n(t)$, каждое из которых соответствует одному собственному значению

$$T''\left(t\right) \text{€} a^2CT(t) = 0, \qquad =\lambda^2=\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2,$$

$$T''\left(t\right) -\left(\frac{\pi(2na-1)}{2l}\right)^2 T(t) =0$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$T_n(t)=c_{1n}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)+c_{2n}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right),$$

где c_{1n}, c_{2n} – произвольные постоянные

10. Представим общее решение задачи в виде

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=A_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\cdot\left(c_{1n}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)+c_{2n}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right),$$

внесём A_n в скобку и получим

$$u_n(x,t)=\left(a_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)+b_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),$$

где $\dfrac{\pi(2n-1)a}{2l}=\omega_n$ – собственные частоты колебаний струны,

а соответствующие этим частотам колебания – собственные колебания.

$\omega_1=\dfrac{\pi a}{2l}=\dfrac{\pi}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}},$– частота основного тона колебаний, где T – натяжение струны, ρ – линейная плотность струны.

Разложим функцию $u(x,t)$ в сходящийся ряд по собственным функциям:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),$$– ряд Фурье, a_n,b_n – коэффициенты ряда Фурье.

11. Найдём коэффициенты a_n и b_n,, чтобы удовлетворить начальным условиям задачи

$$u(x,t)\big|_{t=0}=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot 0\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot 0\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=0,(\textit{из}\quad\textit{начальных}\quad\textit{условий})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=0$$

$$a_n=0$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot\left(-a_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot 0\right)+b_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot 0\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot b_n\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=\cos\left(\frac{9\pi}{2l}x\right)\textit{из}(\quad\textit{начальных}\quad\textit{услови}\quad\textit{й}\quad\textit{при}\quad n=5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(2n-1)a}{2l}\cdot b_n\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)=\cos\left(\frac{9\pi}{2l}x\right),$$

$$b_n=\frac{4}{\pi(2n-1)a}\int_0^l\cos\left(\frac{9\pi}{2l}x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx=\frac{4}{9\pi a}\cdot\frac{l}{2}=\frac{2l}{9\pi a},$$

$$\textit{при}\quad n=5\quad\textit{по}\quad\textit{условию}\quad\textit{ортогональности}$$

12. В итоговом ответе необходимо записать решение задачи с подстановкой найденных в пункте 11 кооэфициентов a_n и b_n.

Так как коэфициент n=5, при поиске нетривиального решения, то общее решение записывается без разложения в ряд

$$u(x,t)=\frac{2l}{9\pi a}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),$$