Лекция №6

§ 4. Ряды Тейлора и Лорана:

примеры разложений функции в ряд Лорана

4.4 Примеры разложений функции в ряд Лорана

Решение всех задач в данной лекции строится на материале предыдущих лекций. Напомним основные теоремы, которые будут использоваться при решении задач.

<u>*Теорема.*</u> *Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, представляется в нем единственным образом в виде сходящегося к ней степенного ряда – ряда Тейлора*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого c_n вычисляются по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Здесь L – окружность с центром z_0, целиком лежащая в круге сходимости $|z-z_0|<R$.

Предполагается, что окружность проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

<u>Определение.</u> Рядом Лорана называется ряд вида

$$..+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+$$
$$+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

где z_0, c_n *– комплексные постоянные,* z *– комплексная переменная.*

<u>Определение.</u> Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots$$

называется главной частью ряда Лорана.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

называется правильной частью ряда Лорана.

Ряд Лорана сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots \text{ и}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

Областью сходимости первого из этих рядов является внешность круга $|z-z_0|>r$. Областью сходимости второго ряда является внутренность круга $|z-z_0|<R$.

Если $r<R$, то ряд Лорана сходится в кольце $r<|z-z_0|<R$. Здесь $r\geq 0$, $0<R<+\infty$.

<u>*Теорема.*</u> *Функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ (не исключаются случаи $r = 0$ и $R = +\infty$) представляется в этом кольце единственным образом в виде ряда Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z - z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

где коэффициенты c_n находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\,(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Здесь L – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащей внутри данного кольца.

<u>Пример.</u> Разложить в ряд Лорана функцию

$f(z) = (z - 3)^4 cos\frac{1}{z-3}$ по степеням *(z-3).*

Решение. Используя разложение (4.3)

$cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},$ z ∈ C

получим

$$cos\frac{1}{z-3} = 1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \ldots,$$

тогда

$$f(z) = (z-3)^4\left(1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \right.$$

$$\left. + \ldots\right) = (z-3)^4 - \frac{(z-3)^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!\,(z-3)^2} + \ldots$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 3$. В данном случае «кольцо» представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z = 3$. что можно записать так: $0 < |z - 3| < +\infty$. Здесь $r = 0$, $R = +\infty$. В указанной области $f(z)$ – аналитическая.

Пример. Разложить в ряд Лорана функцию

$f(z) = (z-1)^4 sin\frac{1}{z-1}$ по степеням *(z-1).*

Решение. Используя разложение (4.2)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathrm{C}$$

получим

$$sin\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{3!\,(z-1)^3} + \frac{1}{5!\,(z-1)^5} - \frac{1}{7!\,(z-1)^7} \ldots,$$

Тогда

$$f(z) = (z-1)^4 \left(\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{3!\,(z-1)^3} + \frac{1}{5!\,(z-1)^5} - \frac{1}{7!\,(z-1)^7} + \ldots\right) =$$

$$= (z-1)^3 - \frac{(z-1)}{3!} + \frac{1}{5!\,(z-1)} - \frac{1}{7!\,(z-1)^3} + \ldots$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 1$. В данном случае «кольцо» представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z = 1$, что можно записать так: $0 < |z-1| < +\infty$. Здесь $r = 0$, $R = +\infty$. В указанной области $f(z)$ – аналитическая.

Получен ряд Лорана в указанном кольце. *Главная часть ряда Лорана имеет вид*:

$$\frac{1}{5!\,(z-1)} - \frac{1}{7!\,(z-1)^3} + \cdots .$$

Главная часть ряда Лорана имеет бесконечное количество слагаемых.

Пример. Получить все разложения функции $f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}$ в ряд по степеням z.

Решение. Приравняем знаменатель дроби к нулю

$z^2 + 3z + 2 = (z+2)(z+1) = 0$, отсюда $z_1 = -2$, $z_2 = -1$.

Изобразим на комплексной плоскости возможные области. Для этого проведем окружности с центром в $z_0 = 0$ через точки $z_1 = -2$ и $z_2 = -1$. Получим три «кольца» с центром в точке $z_0 = 0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической:

1) круг $|z| < 1$,

2) кольцо $1 < |z| < 2$,

3) $2 < |z| < +\infty$ – внешность круга $|z| \leq 2$ (см. рис. 12)

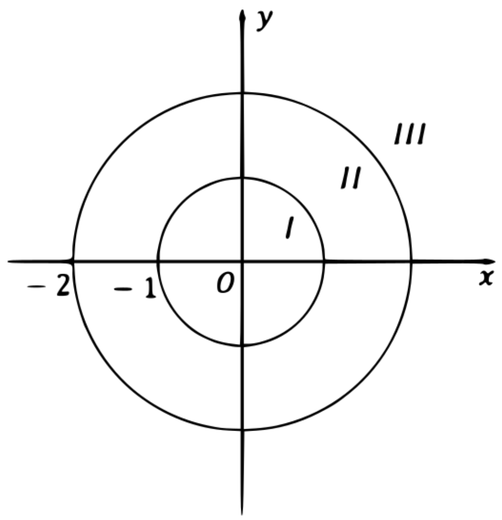

Рис. 12

Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждой из этих областей. Для этого представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}.$$

A и B нашли методом неопределенных коэффициентов.

1) Рассмотрим круг $|z|<1$.

Преобразуем $f(z)$:

$$f(z)=\frac{1}{1+z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}.$$

Используя формулу (4.4), т.е.

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

$$|z|<1$$

получим

$$f(z)=(1-z+z^2-z^3+\ldots)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}z+\frac{5}{4}z^2-\frac{9}{8}z^3+\ldots$$

Это разложение является рядом Тейлора функции $f(z)$, т.к. в этой области функция является аналитической.

При этом ряд для функции $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots$ сходится при $|z|<1$,

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots$$

сходится при $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ или $|z|<2$, т.е. внутри круга $|z|<1$ оба ряда сходятся.

2) Рассмотрим кольцо $1 < |z| < 2$.

Ряд для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ остается сходящимся в этом кольце, т.е. $|z| < 2$,

а ряд для функции $\frac{1}{1+z}$ расходится при $|z| > 1$.

Поэтому преобразуем $f(z)$ следующим образом

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}}.$$

Применяя стандартное разложение (4.4): $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots \quad |z| < 1$, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} + \ldots\right) + \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^2}{16} + \ldots + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \ldots$$

Этот ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, т.е. при $|z| > 1$ и при $|z| < 2$.

3) Рассмотрим $|z| > 2$.

Ряд для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ при $|z| > 2$ расходится,

а ряд для функции $\frac{1}{1+\frac{1}{z}}$ сходится, если $|z| > 2$, то условие $|z| > 1$ выполняется.

Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}}.$$

Используя формулу (4.4), получим

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(2-\frac{3}{z}+\frac{5}{z^2}-\frac{9}{z^3}\right)=\frac{2}{z}-\frac{3}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{9}{z^4}+\ldots$$

Таким образом, в разных областях функция $f(z)$ представима разными рядами.

Ответ. 1). В области $|z|<1$ функция представима рядом Тейлора

$$f(z)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}z+\frac{5}{4}z^2-\frac{9}{8}z^3+\ldots$$

2) В области $1<|z|<2$ функция представима рядом Лорана вида

$$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^2}{16}+\ldots+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\ldots$$

(в этом ряде Лорана присутствует и правильная, и главная часть ряда)

3) В области $|z|>2$ функция представима рядом Лорана вида

$$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{3}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{9}{z^4}+\ldots$$

(здесь – только главная часть ряда Лорана).

Пример. Разложить функцию $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$ в ряд Лорана

в кольце $0<|z-1|<3$.

Решение. Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}.$$

Введем новую переменную $z-1=t$, т.е. $z=t+1$ и перепишем функцию $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{t+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$. Используя разложение (4.4), получим

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{3}}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-1}{3}+\frac{(z-1)^2}{9}-\frac{(z-1)^3}{27}+\ldots\right]$$

Область сходимости этого ряда

$\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$ или $|z-1|<3$.

Таким образом, разложение в ряд Лорана в кольце $0<|z-1|<3$ имеет вид

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{3}-\frac{z-1}{9}+\frac{(z-1)^2}{27}-\frac{(z-1)^3}{81}+\ldots$$

Слагаемое $\frac{1}{z-1}$ является степенью $(z-1)^{-1}$ и поэтому не требует дальнейшего разложения. Оно образует *главную часть ряда Лорана*.