- матрица оператора поворота на угол φ в ортонормированном базисе e_1, e_2. Заметим, что в любом ортонормированном базисе матрица данного оператора имеет один и тот же вид.

Задача 11.4 Найти матрицу оператора дифференцирования (оператора d) в пространстве P_2 многочленов степени, не превосходящей 2, в базисе:

а) $1, x, x^2$; б) $1, 1+x, 1+x+x^2$.

Решение. а) Чтобы составить матрицу D_e оператора d в базисе $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$, найдем образы элементов e_1, e_2, e_3:

$d(e_1) = (1)' = 0$,

$d(e_2) = (x)' = 1 = e_1$,

$d(e_3) = (x^2)' = 2x = 2e_2$.

Отсюда следует, что

$$D_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Аналогично, для базиса $y_1 = 1$, $y_2 = 1 + x$, $y_3 = 1 + x + x^2$ имеем равенства

$d(y_1) = 0$,

$d(y_2) = 1 = y_1$,

$d(y_3) = 1 + 2x = -1 + 2(1 + x) = -y_1 + 2y_2$.

Отсюда следует, что

$$D_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ +

Задача 11.5 Элементы x_1 и x_2 линейного пространства R_2 имеют в базисе e_1, e_2 координаты $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Найти матрицы оператора f в базисах e_1, e_2 и x_1, x_2, если элементы $f(x_1)$ и $f(x_2)$ имеют в базисе e_1, e_2 координаты $(2,3)$ и $(4, 5)$.

Решение. Так как в базисе e_1, e_2 координаты элемента x_1 равны $(0, 1)$, а координаты элемента x_2 равны $(1, 0)$, то $x_1 = e_2$, $x_2 = e_1$. Используя эти равенства, а также данные координаты элементов $f(x_1)$ и $f(x_2)$, приходим к равенствам

$f(x_1) = f(e_2) = 2e_1 + 3e_2 = 3x_1 + 2x_2$,

$f(x_2) = f(e_1) = 4e_1 + 5e_2 = 5x_1 + 4x_2$.

Отсюда по определению матрицы оператора получаем

$$A_e = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_x = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Если линейный оператор $y = f(x)$ n-мерного линейного пространства в некотором базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ задан матрицей A, тогда зависимость между координатами вектора x и его образа $y = f(x)$ выражается формулой $Y = AX$, где X и Y - матрицы-столбцы соответственно векторов x и y.

Задача 11.6 Пусть линейный оператор f двумерного пространства в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти $f(x)$, если $x = 3e_1 - 2e_2$.

Решение. Составляем матрицу-столбец из координат вектора x в базисе e_1, e_2:

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

тогда так как $Y = AX$, имеем

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Итак, $f(x) = 3e_1 - 7e_2$.

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Если

$$e_1, e_2, ..., e_n; \tag{11.1}$$

$$e'_1, e'_2, ..., e'_n \tag{11.2}$$

- базисы некоторого линейного пространства и A - матрица линейного оператора f в базисе (11.1), то матрица B этого оператора в базисе (11.2) имеет вид:

$$B = T^{-1}AT,$$

где T - матрица перехода от базиса (11.1) к базису (11.2).

Задача 11.7 В базисе e_1, e_2 оператор f имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора f в базисе $e'_1 = e_1 - 2e_2$, $e'_2 = 2e_1 + e_2$.

Решение. Матрица перехода

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица

$$B = T^{-1}AT = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.8 Пусть даны два базиса e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 линейного пространства и матрица A линейного оператора в базисе e_1, e_2, e_3. Найти матрицу этого оператора в базисе e'_1, e'_2, e'_3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e'_1 = 3e_1 + e_2 + 2e_3,\ e'_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3,\ e'_3 = -e_1 + 2e_2 + 5e_3.$$

Решение. Составляем матрицу перехода от старого базиса e_1, e_2, e_3 к новому базису e'_1, e'_2, e'_3, имеем

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Находим T^{-1}. Напомним формулу

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{21} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix},$$

где $T_{11}, \ldots, T_{33}$ - соответствующие алгебраические дополнения.

$$\det T = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 - 2 - (-2 + 10 + 12) = 21 - 20 = 1.$$

$$T_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1, \qquad T_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1, \qquad T_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$T_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -12, \quad T_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17, \qquad T_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$T_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \qquad T_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \qquad T_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом,

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -12 & 5\\ -1 & 17 & -7\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Итак

$$B=T^{-1}\cdot A\cdot T=\begin{pmatrix}1 & -12 & 5\\ -1 & 17 & -7\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-26 & -19 & 6\\ 37 & 26 & -8\\ -4 & -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-85 & -59 & 18\\ 121 & 84 & -25\\ -13 & -9 & 3\end{pmatrix}.$$

Ядро и область значений линейного оператора

Ядром оператора $f:V\to W$ называется множество тех векторов пространства V, каждый из которых данный оператор переводит в нулевой вектор. Обозначение $ker\,f$.

Областью значений или ***образом оператора*** $f:V\to W$ называется множество векторов пространства W, каждый из которых является образом хотя бы одного вектора из V. Обозначение $Im\,f$.

Рангом оператора f называется $\dim\operatorname{Im} f$, т.е. размерность образа оператора.

Дефектом оператора f называется $\dim\ker f$, т.е. размерность ядра оператора.

Если $f:V\to V$ - линейный оператор, то:

$\dim\operatorname{Im} f=r_A$;

$\dim\ker f=n-r_A$,

где r_A - ранг матрицы A оператора f, n - размерность пространства V.

Задача 11.9 Найти ранг оператора f пространства V_3, если известна матрица оператора

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Находим r_A. Так как

$$\det A=\begin{vmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0+0-6-(2-6+0)=-6+4=-2\neq 0,$$

то $r_A=3$.

Таким образом, находим ранг и дефект оператора
$\dim \operatorname{Im} f = r_A = 3$;
$\dim \ker f = n - r_A = 3 - 3 = 0$.
Следовательно, ранг оператора равен трем, а его дефект равен нулю.

Характеристическое уравнение линейного оператора

Пусть A - матрица линейного оператора f, тогда $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ - ***характеристический многочлен матрицы*** A, $\det(A - \lambda E) = 0$ - ***характеристическое уравнение оператора*** f, а корни характеристического уравнения – ***характеристические числа линейного оператора*** f или ***характеристические числа матрицы*** A.

Задача 11.10 Найти характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с определением характеристического многочлена получаем:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

- характеристический многочлен матрицы A.

Задача 11.11 Найти характеристический многочлен и характеристические числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с определение характеристического многочлена получаем

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix},$$

$$P_n(\lambda) = (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 4 + 2 + 2(1-\lambda) + 2(1-\lambda) - 2(4-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

Приравнивая этот многочлен нулю, находим характеристическое уравнение

$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$, или $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.

Разлагая левую часть этого уравнения на множители