Лекция №15

Интеграл Фурье

Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой и не является периодической. Предположим, что $f(x)$ абсолютна интегрируема, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|(f(x)|dx = M < \infty$.

В третьем семестре мы уже проводили аналогию между рядом Фурье и интегралом Фурье. Напомним, что

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt \qquad (1)$$

Это равенство называется *формулой Фурье*, а интеграл в правой части равенства (1) – *интегралом Фурье*. Интеграл Фурье будем обозначать через $\Phi(x)$, т.е.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt .$$

Положим

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt, \qquad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt .$$

Формулу Фурье можно записать в виде

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty}\left[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda . \qquad (2)$$

При такой форме записи видна аналогия с рядом Фурье: представлению функции в виде суммы гармонических колебаний по натуральному параметру соответствует интеграл по непрерывному параметру.

ТФКП, 4 семестр, ИРТС

Формула Фурье, преобразование Фурье: основные понятия

Теорема Фурье. Пусть функция $f(x)$ имеет на каждом конечном интервале не более конечного числа точек разрыва, и абсолютно интегрируема на всей прямой. Тогда в каждой точке дифференцируемости $f(x)$ справедлива формула Фурье

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\lambda(\tau-x)d\tau\,.$$

В точках разрыва функции $f(x)$ при условии существования односторонних производных интеграл Фурье равен среднему арифметическому односторонних пределов функции

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\quad.$$

Формулу Фурье можно переписать в комплексной форме:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda(t-x)}f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}f(t)dt \qquad (3)$$

Формулу Фурье (3) принято разбивать на два равенства

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}f(t)dt, \qquad (4)$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\,. \qquad (5)$$

Функция $\hat{f}(\lambda)$ называется *преобразованием Фурье* функции f (или образом преобразования Фурье) и обозначается $\hat{f}(\lambda)=F(f)$

Здесь F - *оператор Фурье*, применяемый к функции f: $\quad F: f\to\hat{f}$.

Формулу (5) называют *обратным преобразованием Фурье* и пишут

$$f(x)=F^{-1}(\hat{f})\,.$$

Замечание. Часто преобразование Фурье определяют равенством $\hat{f}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t)dt,$ при этом формула (5) обратного преобразования Фурье принимает вид $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$.

Преобразование Фурье по существу является функцией, описывающей амплитуду и фазу каждой гармоники, соответствующей определенной частоте. Отметим, что при внешнем сходстве формул (8) и (9), они по существу различны. Первая – это определение, а второе – теорема. Кроме того, в (9) интеграл понимается в смысле главного значения, т.е.

$$f(x)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda .$$

В случае периодической функции $f(x)$ разложение в ряд Фурье состоит из отдельных гармоник с частотами $\omega_n=\dfrac{\pi}{l}n$. Зависимость амплитуды этих гармоник от частоты называется *дискретным амплитудным спектром* функции. Если функция $f(x)$ не является периодической, то роль ряда Фурье играет интеграл Фурье (9), а *амплитудным спектром* (*непрерывным*) называется функция $A(\lambda)=|\hat{f}(\lambda)|$ (с точностью до множителя $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$), λ при этом называется частотой. Функция $\hat{f}(\lambda)$ называется спектром (спектральной функцией) сигнала $f(x)$, функция $\varphi(\lambda)=\arg\hat{f}(\lambda)$ (с точностью до знака) называется *фазовым спектром*.

Пример. Емкость $C = 1\ \phi$, имеющая электрический заряд $q = 1\ k$ в момент времени $t = 0$ начинает разряжаться через сопротивление $r = 1\ \text{ом}$. Ток изменяется по закону $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Найти преобразование Фурье функции $f(t)$, амплитудный спектр и представить $f(t)$ интегралом Фурье в комплексной форме.

Решение. Преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-i\lambda t} e t^{-t} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-t(i\lambda+1)}}{(i\lambda+1)}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\lambda},$$

поскольку $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t(i\lambda+1)} = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}\left[\cos t\lambda - i\sin t\lambda\right] = 0$.

Амплитудный спектр $A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.

По формуле Фурье в точках непрерывности $f(t)$, т.е. при $t \ne 0$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{it\lambda} d\lambda}{1+i\lambda}$$

При $t = 0$ интеграл в правой части равен $\frac{1}{2}$.

Пример. Найти интеграл Фурье (в тригонометрической форме) для функции $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \end{cases}$ и нарисовать его график.

Решение. Интеграл Фурье $\Phi(x)$ функции $f(t)$ по определению равен $\Phi(x) = \int_0^{\infty} \left[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\right] d\lambda$, где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos\lambda t dt = \frac{\sin\lambda}{\pi\lambda},$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin\lambda t dt = \frac{1}{\pi\lambda}(1-\cos\lambda).$$

Интеграл Фурье совпадает с $f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, т.е. при $x \neq 0,\ x \neq 1$. В точках разрыва интеграл Фурье равен среднему арифметическому односторонних пределов, т.е. $\Phi(0) = \Phi(1) = \dfrac{1}{2}$.

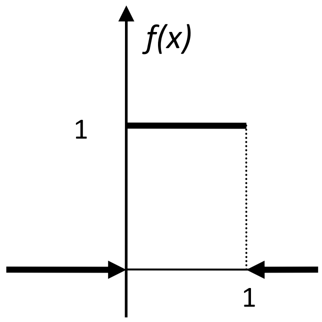

График исходной функции $f(x)$.

График значений интеграла Фурье нужно нарисовать самостоятельно.

Пример. Найти амплитудный спектр сигнала $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ 0, & t \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$

Решение. Найдем преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(-i\lambda)} (e^{-i\lambda} - 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\lambda} e^{-i\frac{\lambda}{2}} \sin(\frac{\lambda}{2}) .$$

По определению амплитудного спектра

$$A(\lambda) = |\, \hat{f}(\lambda) \,| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{1}{\lambda} \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right| .$$

Интеграл Фурье для четных и нечетных функций.
Косинус- и синус- преобразования Фурье

Формулу Фурье перепишем в следующем виде

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(\lambda x)d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin(\lambda x)d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\lambda t)dt \qquad (6)$$

1. *Случай четной функции:* $f(-x)=f(x)$.

Перепишем первый внутренний интеграл в формуле (6) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt=\int_{-\infty}^{0}f(t)\cos(\lambda t)dt+\int_0^{\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt.$$

В силу четности функции $f(x)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt=2\int_0^{\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\lambda t)dt=0.$$

Формула Фурье для четной функции примет вид

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(\lambda x)d\lambda\int_0^{\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt \qquad (7)$$

Положим

$$\hat{f}_c(\lambda)=a(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt \qquad (8)$$

Тогда равенство перепишется в виде

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_c(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda\ . \qquad (9)$$

Формула (8) называется *косинус- преобразованием Фурье*, а формула (9) – *обратным косинус- преобразованием.*

2. <u>Случай нечетной функции</u>: $f(-x) = -f(x)$.

Аналогично предыдущему случаю нетрудно проверить, что интегральная формула Фурье примет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(\lambda x)d\lambda \int_0^\infty f(t)\sin(\lambda t)dt .$$

В этом случае равенство

$$\hat{f}_s(\lambda) = b(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin(\lambda t)dt \qquad (10)$$

определяет прямое *синус- преобразование Фурье*, а равенство

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(\lambda)\sin(\lambda x)dx \qquad (11)$$

задает *обратное синус- преобразование Фурье*.

Таким образом, имеем полную аналогию с рядом Фурье для четной и нечетной функции.

Итак, формула Фурье для *четной* функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda , \quad \text{где } \hat{f}_c(\lambda) = a(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos(\lambda t)dt . \qquad (12)$$

Формула Фурье для *нечетной* функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(\lambda)\sin(\lambda x)d\lambda , \quad \text{где } \hat{f}_s(\lambda) = b(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin(\lambda t)dt . \qquad (13)$$

Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $[0,\infty)$. Доопределив функцию на интервал $(-\infty,0]$ четным или нечетным образом, получим, что её интеграл Фурье можно представить как в виде (12), так и в виде (13).

Пример. Найти косинус- преобразование Фурье для функции $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le a,\\ 0, & x>a.\end{cases}$

Представить функцию с помощью интеграла Фурье.

Решение. Считая, что $f(x)$ продолжена на всю прямую четным образом, получим $\hat{f}_c(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a\cos\lambda t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda a}{\lambda}$.

По формуле (9) $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\hat{f}_c(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\lambda a}{\lambda}\cos(\lambda x)d\lambda$.

В точке $x=0$ функция $f(x)$ (точнее её четное продолжение) непрерывна. Следовательно, $f(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\lambda a}{\lambda}d\lambda$.

Отсюда, в частности, получаем $\int_0^\infty\frac{\sin\lambda a}{\lambda}d\lambda=\frac{\pi}{2}$.

Свойства преобразования Фурье

Продолжим изучение преобразования Фурье.

Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная и абсолютно интегрируемая функция, т.е. $\|f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$.

Выше оператор Фурье F был определен как отображение $F: f\to\hat{f}$,

где $\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}f(x)dx$.

Рассмотрим свойства преобразования Фурье.

1. *Линейность* (вытекает из линейности интеграла):

$$(\alpha f+\beta g)^{\wedge}=\alpha\hat{f}+\beta\hat{g}$$

где α и β – произвольные константы.

2. $\hat{f}(\lambda)$ *– ограниченная функция:*

$$|\hat{f}(\lambda)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

3. $\hat{f}(\lambda)$ *– непрерывная функция и стремится к нулю при* $\lambda \to \pm\infty$.

4. *Убывание функции на бесконечности и гладкость преобразования Фурье*

Если сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)| dx$, то $\hat{f}(\lambda)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $\hat{f}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \pm\infty$ и

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-i\lambda x} dx. \qquad (14)$$

Это равенство – следствие теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру, поскольку интеграл в правой части (14) сходится абсолютно и равномерно по параметру λ.

Равенство (14) удобно представить в виде

$$F : (-ix) f(x) \to \frac{d}{d\lambda}\hat{f}(\lambda) \qquad \text{или} \qquad F\left[(-ix) f(x)\right] = \frac{d}{d\lambda} F\left[f(x)\right],$$

т.е. операция умножения $f(x)$ на x переходит после преобразования Фурье F в операцию $i\frac{d}{d\lambda}$.

Если абсолютно интегрируемой является функция $x^n f(x)$ при некотором натуральном n, то $\hat{f}(\lambda)$ n раз непрерывно дифференцируемая функция и

$$F : (-ix)^n f(x) \to \frac{d^n}{d\lambda^n}\hat{f}(\lambda).$$

Иначе это соотношение можно представить в виде

$$i^n \frac{d^n}{d\lambda^n} F(f) = F(x^n f(x)).$$

Таким образом, чем быстрее функция $f(x)$ убывает при $|x| \to \infty$, тем более гладким является её преобразование Фурье.

5. *Операция дифференцирования и преобразование Фурье*

Пусть функция $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая, причем $f(x)$ и $f'(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой прямой. Тогда

$$F(f') = i\lambda F(f), \qquad \text{т.е.} \qquad (f')^{\wedge}(\lambda) = i\lambda \hat{f}(\lambda). \qquad (15)$$

В самом деле, интегрируя по частям, получим

$$F(f') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right].$$

Поскольку $f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, то внеинтегральное слагаемое равно нулю и, следовательно, справедливо соотношение (15).

Вывод: при преобразовании Фурье операция дифференцирования переходит в операцию умножение на $(i\lambda)$:

$$F : \frac{d}{dx} f(x) \to (i\lambda)\, \hat{f}(\lambda).$$

Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема n раз, все производные $f^k(x),\ k = 0,1,\dots,n,$ абсолютно интегрируемы на всей прямой то

$$F(f^{(k)}) = (i\lambda)^k F(f).$$

6. *Преобразование Фурье и свертка функций*

Определение. Сверткой функций f_1 и f_2 называется функция

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt,$$

если интеграл в правой части существует.

Свертка обозначается $f_1 * f_2$, т.е.

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt.$$

Теорема. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и абсолютно интегрируемы на всей прямой. Тогда их свертка $f = f_1 * f_2$ является также непрерывной и абсолютно интегрируемой функцией, причем

$$F\left(f_1 * f_2\right) = \sqrt{2\pi} F(f_1) \cdot F(f_2).$$

Вывод: при преобразовании Фурье операция свертки с точностью до множителя $\sqrt{2\pi}$ переходит в операцию умножения.

Приведем полезные формулы для вычисления преобразования Фурье.

1). *Теорема подобия.* $F: f(ax) \to \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\lambda}{a})$.

2). *Теорема смещения.* $F: f(x)e^{iax} \to \hat{f}(\lambda - a)$.

3). *Теорема запаздывания.* $F: f(x-b) \to \hat{f}(\lambda)e^{-ib\lambda}$

Для удобства запишем в виде таблицы основные свойства преобразования Фурье, перечисленные выше.

Таблица основных свойств преобразования Фурье

$f(x)$	$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx$
$\alpha f_1 + \beta f_2$	$\alpha \hat{f}_1 + \beta \hat{f}_2$
$x^n f(x)$	$i^n \frac{d^n \hat{f}(\lambda)}{d\lambda^n}$
$f_1 * f_2$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2$
$f(ax)$	$\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$
$f(x)e^{i\alpha x}$	$\hat{f}(\lambda - a)$
$f(x-b)$	$\hat{f}(\lambda)e^{-i\lambda b}$

Пример. Найти преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Решение. Воспользуемся формулой:

$$\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-ix)e^{-i\lambda x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\cdot d(e^{-\frac{x^2}{2}})=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-i\lambda)e^{-i\lambda x}dx=-\lambda\widehat{f}(\lambda).$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\lambda}\widehat{f}(\lambda)=-\lambda\widehat{f}(\lambda).$$

Отсюда $\widehat{f}(\lambda)=c\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$, где $c>0$ - некоторая константа. Записывая исходную функцию с помощью интеграла Фурье, получим

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}\widehat{f}(\lambda)d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}c\cdot e^{i\lambda x}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}d\lambda=c^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Следовательно, $c=1$ и

$$F: e^{-\frac{x^2}{2}}\to e^{\frac{-\lambda^2}{2}}.$$

Некоторые приложения интеграла Фурье и преобразования Фурье

Вычисление несобственных интегралов

Пример. Вычислить интеграл Гаусса $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Решение. Пусть $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. Было показано, что $\widehat{f}(\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$,

т.е. $$e^{-\frac{\lambda^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Полагая $\lambda=0$, получим $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$.