Уравнения математической физики

ФИО преподавателя: Богданкевич Ирина Леонидовна
e-mail: ira.bogdankevich@mail.ru

Условия обучения

- По итогам изучения дисциплины проводится зачет
- В течение семестра необходимо выполнить все задания по календарному плану, который опубликован на Учебном портале
- Для допуска на сессию набрать 40 баллов

Список литературы

- Н.Г.Гусейн-заде Курс лекций по математической физике: Учебное пособие/Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)».- Москва, 2008.
- А.Н.Тихонов, А.А.Самарский Уравнения математической физики, М.: Изд-во МГУ, 1999.
- А.Н.Тихонов, А.Н.Боголюбов, В.В.Кравцов Лекции по математической физике, М.: Изд-во МГУ, 1993.
- А.В.Бицадзе Уравнения математической физики, М.: Наука, 1978.

Темы дисциплины

1. **Вывод уравнений математической физики**
2. **Начальные и граничные условия.**
3. **Метод бегущих волн.**
4. **Собственные числа и собственные значения. Задача Штурма-Луивилля.**
5. **Метод разделения переменных (метод Фурье).**
6. **Свободные колебания струны конечной длины.**
7. **Вынужденные колебания струны.**
8. **Колебания прямоугольной мембраны.**
9. **Колебания круглой мембраны. Функции Бесселя.**
10. **Уравнение теплопроводности. Фундаментальное решение.**
11. **Колебания струны в среде с сопротивлением.**
12. **Уравнение Лапласа в круговых областях.**

Лекция 1

Основные понятия

1. Постоянные величины. **Абсолютные постоянные и параметры.**

2. Переменные величины.

3. Независимые переменные.

$y = f(x)$.

4. Функция.

5. Задание функции.

6. Частным значением функции

7. Область существования функции.

Непрерывность функции $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Определение производной $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Обозначение производной $y'_x, \; y', \; \frac{dy}{dx}, \; f'(x)$

при $x = x_0$ $y'_x(x_0); \; y'(x_0); \; y'_0; \; \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}; \; f'(x_0)$.

Производная

$y = c$ (c — постоянная); $y' = 0$

$y = x$; $y' = 1$ $\qquad$ $y = \frac{a}{u}$; $y' = -\frac{a}{u^2}\, u'$ (a — постоянная величина);

$y = cu$ (c — постоянная); $y' = cu'$

$y = u^n$, $y' = nu^{n-1}\, u'$ (n — любое действительное число)

$y = a^u$; $y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$; $y = e^u$; $y' = e^u u'$; $a > 0$, $a \neq 1$;

$y = \log_a u$; $\qquad$ $y' = \frac{1}{u} u' \log_a e = \frac{u'}{u \ln a}$;

$y = u \pm v$; $y' = u' \pm v'$

$y = v \cdot u$; $y' = u'v + uv'$

$y = \frac{u}{v}$. $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$y = \sin u$; $\qquad$ $y' = \cos u\; u'$;

$y = \cos u$; $\qquad$ $y' = -\sin u\; u'$;

$y = \operatorname{tg} u$; $\qquad$ $y' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$;

$y = \operatorname{ctg} u$; $\qquad$ $y' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$;

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

$y = f(u)$ $\qquad$ $u = \varphi(x)$

$y = f(\varphi(x))$ $\qquad$ $y'_x = y'_u u'_x$

Приращение функции

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x,$$

где, $\alpha \to 0$, *когда* $\Delta x \to 0$.

Дифференциал функции

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

Дифференциалом независимой переменной называется ее **приращение** $dx = \Delta x$.

$$dy = f'(x)\,dx.$$

ПРИМЕР

$y = x^3$,

$$dy = y'dx = 3x^2dx; \quad \Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= x^3 + 3x^3\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3;$$
$$\Delta y = \underbrace{3x^2\Delta x}_{dy} + \underbrace{3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}_{\alpha\Delta x}.$$

Приближенные формулы

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x,$$

$$(1+\Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x.$$

$$(x+\Delta x)^n - x^n \approx nx^{n-1}\Delta x.$$

$$\sin\Delta x \approx \Delta x.$$

$$\sin(x+\Delta x) - \sin x \approx \cos x \cdot \Delta x,$$

Производные высших порядков $f^{(n)}(x), \quad y^{(n)} \ \textit{или} \ \dfrac{d^n y}{dx^n}$

Обыкновенным *дифференциальным уравнением* *n –го порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \quad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}),$$

где $y(x)$ — неизвестная функция от независимой переменной *x*

Функции многих независимых переменных

$$y = f(x, y, z, \ldots, t) \qquad u = f(x, y, z)$$

Частные приращения функции

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial x}, \ u'_x, \ f'_x$$

x получила приращение

частное приращение функции Δx

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}$$

Частной производной функции

по независимой переменной

x

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ u'_y, \ f'_y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

аналогично

по переменным y ***и*** z

$$\frac{\partial u}{\partial z}; \ \frac{\partial f}{\partial z}; \ u'_z; \ f'_z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

полное приращение функции

$$u = f(x,\ y,\ z)$$

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - f(x,\ y,\ z)$$

для независимых переменных

$$\Delta x = dx;\ \ \Delta y = dy;\ \ \Delta z = dz.$$

полный дифференциал функции

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$\Delta u - du$ $\quad$ Δu $\quad$ $\Delta x,\ \Delta y$ и $\Delta z,$ $\quad$ $\Delta x,\ \Delta y$ и Δz

главная часть $\quad$ линейная относительно

при малых $\quad \Delta u \approx du,\quad$ << $\quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

пример $\quad u(x,\ y) = 3x^2 + xy - y^2 + 1$

$$\Delta u = u(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - u(x,\ y) =$$

$$= \underbrace{(6x + y)\,\Delta x + (x - 2y)\,\Delta y}_{} + \underbrace{3(\Delta x^2) + \Delta x\,\Delta y - (\Delta y)^2}_{}$$

Дифференцирование сложной функции

Формула полной производной

если $z = f(u, v, w)$ $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \omega(x)$

то и функция z *является функцией* x

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}$$

Частный случай $z = f(x, u, v)$ $u = \varphi(x)$; $v = \psi(x)$, **и**

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

Если вычислить частную производную по x от $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

частная производная по x от $\frac{\partial y}{\partial y}$ *даст*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$$

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n} u = \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$$

Если частные производные непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования

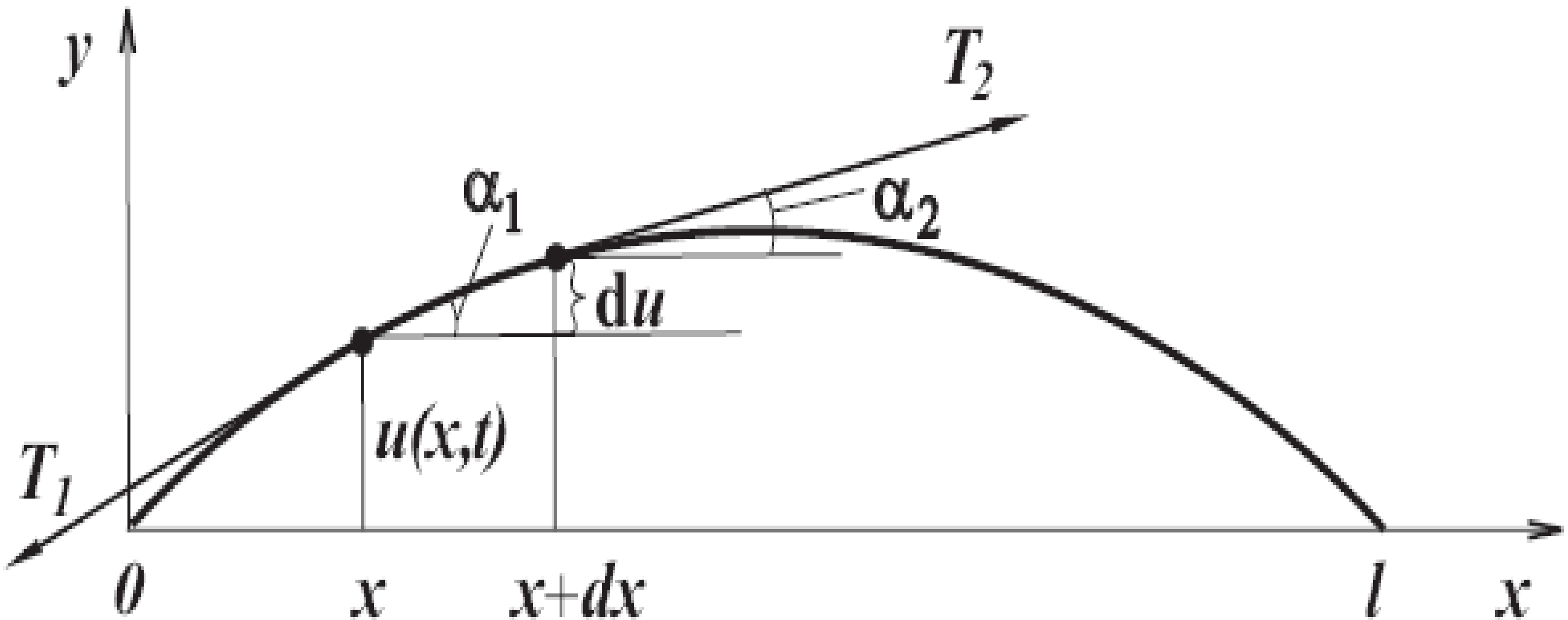
$z = f(x, y)$

Дифференциал второго порядка

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

ВЫВОД НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Уравнение бесконечно малых поперечных колебаний натянутой струны



вектор смещения $\boldsymbol{u}(x,t) \perp Ox$

$$\boldsymbol{u} = \hat{e}_y u_y(x,t).$$

$\boldsymbol{T}$ — сила натяжения струны в точке с координатой x

Уравнение бесконечно малых поперечных колебаний натянутой струны

$$dm\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \boldsymbol{F}.$$

согласно второму закону Ньютона

$$\boldsymbol{T}(x) + \boldsymbol{T}(x+dx) = \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2$$

$$f(x,t)$$

внешней силы, например, силы тяжести

Это векторное уравнение сводится к следующей системе уравнений для проекций силы на оси x и y:

$$\begin{cases} 0 = T_{1x} + T_{2x}, \\ dm\,\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = T_{1y} + T_{2y} + f(x,t)\,dm \end{cases}$$

Уравнение бесконечно малых поперечных колебаний натянутой струны

$$\begin{cases} -T_1\cos\alpha_1 + T_2\cos\alpha_2 = 0; \\ dm\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 + f(x,t)\,dm \end{cases}$$

Будем рассматривать малые колебания

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + du^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx dx$$

$$\cos\alpha \approx 1 \text{ и } \sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$$

Уравнение бесконечно малых поперечных колебаний натянутой струны

$T_1 \approx T_2$ Это означает, что натяжение струны во всех точках одинаковое.

$$dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(\alpha_2 - \alpha_1) + f\,dm$$

$$\alpha_2 = \alpha(x + dx) \approx \alpha(x) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}dx \qquad \alpha_1 = \alpha(x)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial x}dx \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial x}dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

$$dm = \rho\,ds \approx \rho\,dx$$

ρ — линейная плотность

Уравнение бесконечно малых поперечных колебаний натянутой струны

$$\rho\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \rho\, dx\, f(x, t)$$

$$a^2 = T/\rho,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

Уравнение колебаний струны

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f$$

ВЫВОД НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Δu оператор Лапласа

$$\Box_a u = f$$

$$\Box_a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u$$

волновой оператор (оператор Д'Аламбера

При отсутствии внешней силы получим однородное уравнение

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

уравнение свободных колебаний струны

А если материал струны неоднороден (линейная плотность меняется вдоль стержня), то имеем волновое уравнение с переменными коэффициентами

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

ВЫВОД НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Если сопротивлением струны (трением) пренебречь нельзя, то следует учитывать силу сопротивления (обычно ее принимают пропорциональной скорости u_t). Ее направление противоположно направлению смещения точек струны, а равнодействующая равна: $-\beta\, u_t(x,t)\, dx$

Возвращающая сила направлена так же, как и сила сопротивления и имеет равнодействующую $-\gamma\, u(x,t)\, dx$

$$\rho\, u_{tt}\, dx = T u_{xx}\, dx + \rho(x) f(x,t)\, dx - \beta u_t\, dx - \gamma u\, dx$$

$$a^2 = T/\rho,\ b^2 = \beta/\rho,\ c^2 = \gamma/\rho,$$

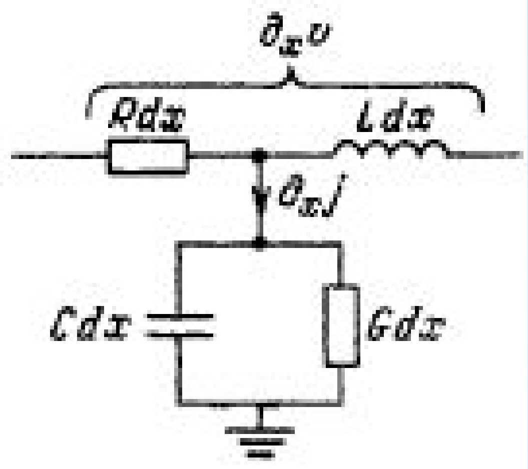
Телеграфное уравнение

$$\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx} - b^2 u_t - c^2 u + f(x,t)}$$

ВЫВОД НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Телеграфное уравнение

Рассмотрим электрическую линию (провод) с распределенными параметрами, т. е. будем считать, что каждый участок (dx) этой линии обладает активным сопротивлением Rdx, индуктивностью Ldx и емкостью Cdx; кроме того, будем считать, что возможна утечка тока в землю, причем проводимость этого участка для тока утечки равна Gdx. Параметры R, L, C, G будем считать постоянными.



Баланс напряжений дает

$$-\partial_x v = (R dx)\, j + (L dx)\,\frac{\partial j}{\partial t}.$$

$$-(\partial_x j)\, dt = (G dx)\, v dt + (C dx)\, \partial_t u.$$

из сохранения количества электричества

за время dt получаем

ВЫВОД НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Система телеграфных уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial I}{\partial x} = C\dfrac{\partial V}{\partial t} + GV, \\ -\dfrac{\partial V}{\partial x} = L\dfrac{\partial I}{\partial t} + RI, \end{cases}$$

где C, G, L, R — распределенные емкости, утечка, индуктивность и сопротивление системы.

Расщепляя систему относительно каждой из функций, получаем

для потенциала телеграфное уравнение вида

$$V_{xx} = CLV_{tt} + (CR + GL)V_t + GRV$$

Система телеграфных уравнений

Если пренебречь сопротивлением и утечкой тока, то для V и I получаем обычные одномерные волновые уравнения вида

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial I}{\partial x} = C\dfrac{\partial V}{\partial t}, \\ -\dfrac{\partial V}{\partial x} = L\dfrac{\partial I}{\partial t}. \end{cases}$$

при изучении движения воздуха в трубах получаются аналогичные уравнения

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho\dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial p}{\partial t}, \end{cases}$$

где v — скорость колеблющихся частиц,

ρ — плотность

p — давление

$\tau = p_0\gamma$ — коэффициент упругости воздуха

Электромагнитное поле в вакууме

Уравнения Максвелла для свободного (не связанного с зарядами и токами) электромагнитного поля в вакууме имеют вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0.$$

Здесь $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля; $\boldsymbol{B}$ — вектор магнитной индукции; ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные соответственно; $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, где c — скорость света в вакууме.

Электромагнитное поле в вакууме

Это система линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Сведем их к двум одинаковым уравнениям второго порядка. Для этого продифференцируем по времени первое уравнение систем

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}.$$

Временны́е и пространственные производные коммутируют, т. е. можно

поменять порядок их следования, тогда, используя второе уравнение

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2};$$

Электромагнитное поле в вакууме

Но есть правило дифференцирования

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{E}) - \Delta\boldsymbol{E}$$

Уравнение Максвелла

$$\Delta\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

и аналогично

$$\Delta\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Если векторы разложить в декартовых координатах, то каждое из уравнений распадается на три скалярных для соответствующих компонент напряженности электрического поля и индукции магнитного поля.