

Лекция 14

8.4 Принцип электродинамического подобия

Рассмотрим первые два уравнения системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Ряд величин, входящих в уравнения являются векторными функциями пространственных координат и времени, например напряженность электрического поля $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$. Такие функции можно представить в виде произведения двух величин

$$\vec{E}(x, y, z, t) = m_1 \vec{E}'(x, y, z, t), \quad (8.15)$$

где величина $\vec{E}'(x, y, z, t)$ будет безразмерной, учитывающей зависимость от аргументов, а величина m_1 - будет размерным коэффициентом, константой. Например, в выражении для плоской волны

$$\vec{E} = 5 \cos(\omega t - kz + \pi/3) \vec{x}_0 [B/M],$$

величиной m_1 будет являться $5 [B/M]$.

Подобным образом можно преобразовать и другие величины, входящие в (8.14).

Кроме того, конкретный вид уравнений (8.14) зависит от вида систем единиц, в которых измеряются размерные величины, входящие в уравнения, например уравнения будут иметь различные величины коэффициентов в системах СИ и СГСЭ. Поэтому и для единиц измерения расстояния и времени можно ввести формулу записи (8.15). Полный перечень величин, входящих в (8.14) будет следующим:

$$\vec{E} = m_1 \vec{E}'; \quad \vec{H} = m_2 \vec{H}'; \quad l = m_3 l'; \quad t = m_4 t' \quad (8.16)$$

Если поставить представления (8.16) в (8.14) можно привести уравнения Максвелла к безразмерному виду

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}' \vec{H}' &= C_1 \vec{E}' + C_2 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'}, \\ \operatorname{rot}' \vec{E}' &= C_3 \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t'}. \end{aligned} \right\}, \quad (8.17)$$

где $C_1 = \frac{\sigma m_1 m_3}{m_2}$; $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon m_1 m_3}{m_4}$; $C_3 = \frac{-\mu_0 \mu m_2 m_3}{m_1 m_4}$, являются безразмерными коэффициентами.

При этом различные электродинамические задачи могут описываться одинаковыми системами уравнений (8.17). Такие задачи называются электродинамически подобными. Действительно, если каким либо путем, например экспериментальным, получено решение одной задачи, то решение подобной задачи получается масштабированием путем пересчета коэффициентов, входящих в (8.16). Покажем это на примере только коэффициента C_2 . Пусть имеются две антенны, первая из которых работает на частоте 100 МГц и имеет размер 3м, а вторая работает на частоте 10000 МГц и имеет размер 30 мм. Формы антенн геометрически подобны. Напряженности электрических полей, создаваемых антеннами измеряется в одинаковых единицах и параметры среды, в которой работают антенны, также одинаковы. Обозначим размерные коэффициенты, входящие в (8.16) для первой задачи одним штрихом, а для второй – двумя штрихами. Тогда, очевидно:

$$\varepsilon' = \varepsilon'' ; m_1' = m_1'' ; m_3' = 100m_3'' ; m_4' = 100m_4'' .$$

Подстановка этих величин в коэффициент C_2 дает $C_2' = C_2''$.

Значит с точки зрения электродинамики задачи излучения таких антенн являться подобными. Можно экспериментально изготовить вторую антенну размером 30 мм и измерить её характеристики, например диаграмму направленности на частоте 10 ГГц. Первая антенна будет иметь такую же диаграмму направленности. Попытка изготовить первую антенну и произвести измерения её параметров на частоте 100 МГц будет экономически гораздо более затратной.

Принцип электродинамического подобия широко применяется для экспериментальной проверки характеристик больших антенн на этапах их проектирования, применяется для изменения размеров СВЧ устройств, обладающих хорошими параметрами, при существенном изменении рабочей частоты и т. п.

9. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

9.1. Явления дифракции, отражения, рассеяния электромагнитных волн

Первоначально понятие дифракции связывали с процессом огибания волнами тел, находящихся на пути их распространения. Но в настоящее время круг задач, связанных с дифракцией существенно расширился, что привело к развитию понятия. Под дифракцией понимают явления взаимодействия электромагнитных волн со средой, в которой происходит распространение волн, или явления взаимодействия электромагнитных волны с телами, находящимися на пути их распространения, приводящие к изменению структуры поля. Понятие дифракции электромагнитных волн точно граничит с понятием интерференции и излучения волн.

Физическая модель понятия дифракции на идеально проводящем теле является следующей. Пусть имеется первичное падающее электромагнитное поле $\vec{E}_{пад}$, создаваемое далеко удаленными источниками (рис. 9.1), существующее в виде волны, характеристики которой известны. Волна падает на идеально проводящее тело, занимающее объем V , ограниченное поверхностью S . Под воздействием падающей волны на поверхности S наводятся токи проводимости $\vec{I}_{пов}$, которые переизлучают свою мощность в окружающее объем V пространство. При этом переизлученное вторичное поле также падает на поверхность тела, приводя к изменению наведенного тока. Окончательное распределение наведенного тока устанавливается в результате динамического равновесия.

Результирующее распределение тока на поверхности S создает в пространстве вторичное или дифракционное поле. Полное поле в пространстве является результатом суперпозиции или интерференции поля падающей и дифракционной волн. Математическая модель дифракции определяет распределение наведенного тока на поверхности тела, и затем дифракционное поле. Возникающие при этом математические задачи являются настолько сложными, что точное аналитическое решение получено только для небольшого числа задач. На практике для нахождения дифракционных полей применяют приближенные методы, причем используются и более простые физические представления, и более простые математические модели.

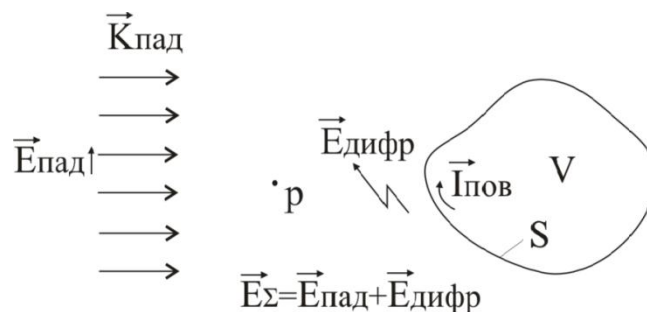


Рис.9.1. Определение понятия дифракции на идеально проводящем теле.

Одним из упрощений является выделение из всего круга дифракционных задач таких, которые можно представить в виде процесса отражения электромагнитных волн, в котором выполняются законы Снеллиуса и формулы Френеля. Это можно сделать, если кривизна тела невелика, а дифракционное поле определяется в области малой, по сравнению с размерами тела, и мало удаленной от него. При этом также требуется, чтобы область определения дифракционного поля была значительно удалена от краев тела. Примером такого подхода является учет влияния земной поверхности на процесс распространения электромагнитных

волн при высоко поднятых излучателях, применяемый при расчете УКВ радиотрасс.

Вторая группа задач, выделяемых из задач дифракции, относится к понятию рассеяния. Под рассеянием, в основном, понимается дифракция электромагнитных волн на множестве объектов с малыми по сравнению с длиной волны размерами. Например, дифракция электромагнитных волн на статистически неровных поверхностях раздела сред, на множестве дождевых капель, на взволнованной поверхности моря. Для решения этой группы задач применяются специфические математические методы, использующие понятия статистики.

9.2. Интегральные уравнения для задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих телах.

Математическое описание физической модели дифракции, рассмотренной в предыдущем подразделе, часто сводится к составлению и решению интегрального уравнения для наведенных токов. Процедура составления уравнения заключается в следующем.

Обозначим через \dot{J}_n объемную плотность наведенного тока проводимости в точках q поверхности идеально проводящего тела, возникающего под действием падающей электромагнитной волны \vec{E}_{nad} , \vec{H}_{nad} . Наведенный ток создает в точках в пространстве дифракционное поле \vec{E}_∂ , \vec{H}_∂ , которое связано с током \dot{J}_n через истокообразное представление, следующее из (3.13), (6.15).

$$\begin{aligned}\dot{H}_\partial &= \text{rot}_p \int_{s_q} G \cdot \dot{J}_n dS_q, \\ \dot{E}_\partial &= (-j\omega\mu\mu_0 \text{rot}_p + \frac{1}{j\omega\epsilon\epsilon_0} \text{grad div}_p) \int_{s_q} G \cdot \dot{J}_n dS_q, \quad (9.1)\end{aligned}$$

где индекс p относится к координатам точки наблюдения, индекс q – к точкам источника. В функцию Грина входит расстояние между точками p, q . Дифференциальные операции выполняются над функциями в точках наблюдения p .

Дифракционное поле создается во всех точка среды, в том числе и точках наблюдения, расположенных в непосредственной близости от границы тела и на самой границе тела. Оно суммируется с полем падающей волны:

$$\begin{aligned}\vec{H}_{\Sigma p} &= \vec{H}_{nad p} + \vec{H}_\partial p, \\ \vec{E}_{\Sigma p} &= \vec{E}_{nad p} + \vec{E}_\partial p.\end{aligned} \quad (9.2)$$

Общее поле удовлетворяет граничным условиям (4.41) на поверхности идеально проводящего тела, которые записываются для тангенциальных и нормальных составляющих поля. Обычно используются граничные условия для тангенциальных составляющих поля. Если в точке падения p внешняя

нормаль к поверхности тока задана вектором \vec{N}_{op} , то модуль тангенциальной составляющей векторов H_τ , E_τ выделяется следующими выражениями.

Очевидно

$$\vec{E}_\tau = \vec{E} - (\vec{E} \cdot \vec{N}_0) \vec{N}_0,$$

умножим выражение слева векторно на \vec{N}_0 :

$$\vec{N}_0 \times \vec{E}_\tau = \vec{N}_0 \times \vec{E} - \vec{N}_0 \times \vec{N}_0 (\vec{E} \cdot \vec{N}_0). \quad (9.3)$$

Так как последний член обращается в ноль, а вектора \vec{N}_0 и \vec{E}_τ ортогональны, то

$$|\vec{E}_\tau| = |\vec{N}_0 \times \vec{E}|. \quad (9.4)$$

Аналогичное рассуждение можно провести и для магнитного поля, причем в выражении аналогичном (9.3). Если поместить точку наблюдения p в непосредственной близости от поверхности тела S , то полное поле будет удовлетворять (9.5)

$$\vec{N}_{0p} \times (-j\omega\mu_0 \text{rot}_p + \frac{1}{j\omega\epsilon\epsilon_0} \text{grad div}_p) \int_{s_q} G \cdot \dot{\vec{J}}_{nq} dS_q + \vec{N}_{0p} \times \vec{E}_{nad p} = 0, \quad (9.5)$$

$$\vec{N}_{0p} \times \vec{H} + \vec{N}_{0p} \times \text{rot}_p \int_{s_q} G \cdot \dot{\vec{J}}_{nq} dS_q = \dot{\vec{J}}_n p.$$

Эти выражения содержат неизвестную величину наведенного тока $\dot{\vec{J}}_{nq}$, входящую в подынтегральные выражения, то есть (9.5) представляют интегральные уравнения для наведенного тока. Для нахождения дифракционного поля необходимо решить одно из уравнений (9.5) и по (9.1) вычислить поле.

Интегральные уравнения можно получить и в другом, более удобном для решения, виде. Например, можно внести дифференциальные операторы, действующие по координатам p под интегралы, можно использовать граничные условия другого вида.

В общем виде, уравнения можно записать следующим образом:

$$\int_{s_q} K_{pq} \cdot \dot{\vec{J}}_n dS_q = -\vec{N}_{0p} \times \vec{E}_{nad p}, \quad \text{или} \quad (9.6)$$

$$\vec{N}_{0p} \times \vec{H}_{nad p} + \int_{s_q} K_{pq} \cdot \dot{\vec{J}}_n dS_q = \dot{\vec{J}}_n.$$

Эти уравнения являются интегральными уравнениями Фредгольма первого и второго рода, функция K_{pq} – ядро уравнения.

Ядро уравнения зависит от геометрии поверхности и от вида функции Грина. Поскольку векторные величины, входящие в (9.6), по-разному ориентированы в пространстве, то ядро уравнений обладает тензорными свойствами.

Интегральные уравнения получены для идеально проводящих, импедансных, диэлектрических тел, но аналитические решения получены только для нескольких простых видов поверхностей.

В подавляющем большинстве случаев решение задач дифракции электромагнитных волн ищется приближительными методами. Наиболее применимыми являются решения, получаемые методами геометрической оптики (ГО), геометрической теории дифракции (ГТД), значительное число задач решается методом применения интеграла Кирхгофа. Отдельную группу приближенных решений дифракционных задач образуют численные методы решения интегральных уравнений.