Лекция 3

МЕТОД Д'АЛАМБЕРА, ИЛИ МЕТОД БЕГУЩИХ ВОЛН

Если нас интересуют явления в течение малого промежутка времени, когда влияние границ еще несущественно, то вместо полной задачи

можно рассмотреть ***задачу с начальными условиями*** для неограниченной области — эту задачу часто называют ***задачей Коши***.

Колебания бесконечной струны

Бесконечная струна — это струна настолько большой длины, что влияние ее концов не сказывается на колебаниях любой рассматриваемой точки струны.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

и начальные условия: $u|_{t=0} = f(x)$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x)$.

решение уравнения выражается через две произвольные дифференцируемые функции:

$$u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at}F(x)\,dx+\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}F(x)\,dx$$

или

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}F(x)\,dx.$$

Это решение — суперпозиция двух волн, одна из которых распространяется направо со скоростью *a*, а вторая — налево с той же скоростью, называется ***решением Д'Аламбера*** задачи Коши для уравнения колебаний струны, или ***решением в виде бегущих волн***

◇ Для волнового уравнения $\Delta\psi-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$ путем замены $\xi=\alpha x+$ $+\beta y+\gamma z-vt$ и $\eta=\alpha x+\beta y+\gamma z+vt$ можно аналогично получить решение в виде плоских волн $\psi(\boldsymbol{r},t)=f_1(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r}-vt)+f_2(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r}-vt)$.

Волны отклонения

Пусть струна колеблется в результате начального отклонения (начальные скорости точек струны равны нулю, $F(x) = 0$), тогда

$$u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}$$

Предположим, что в начальный момент функция $f(x)$ четна и отлична от нуля только на некотором интервале $(-l, l)$

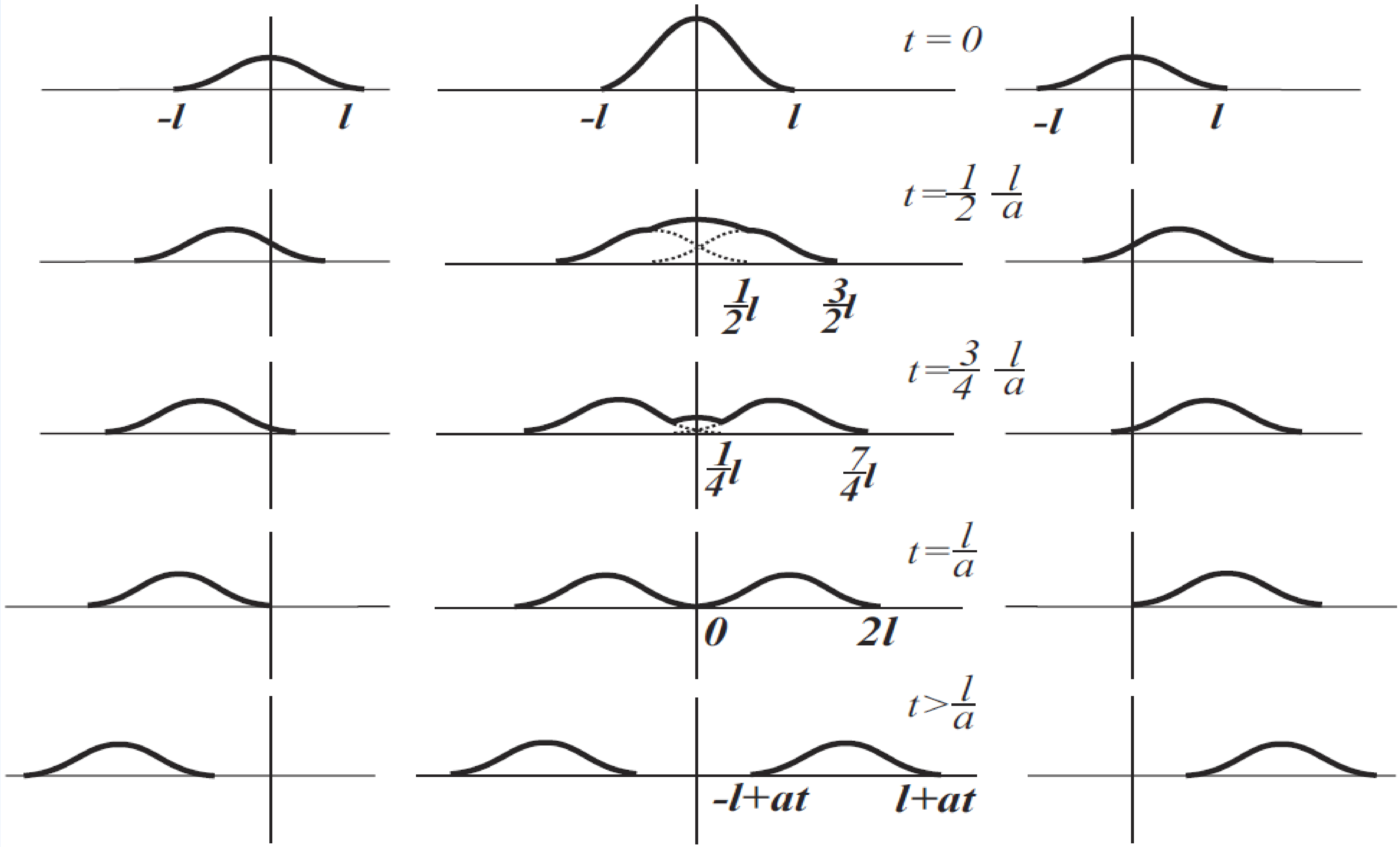
В начальный момент времени *(t = 0)*, профили обеих волн совпадают,

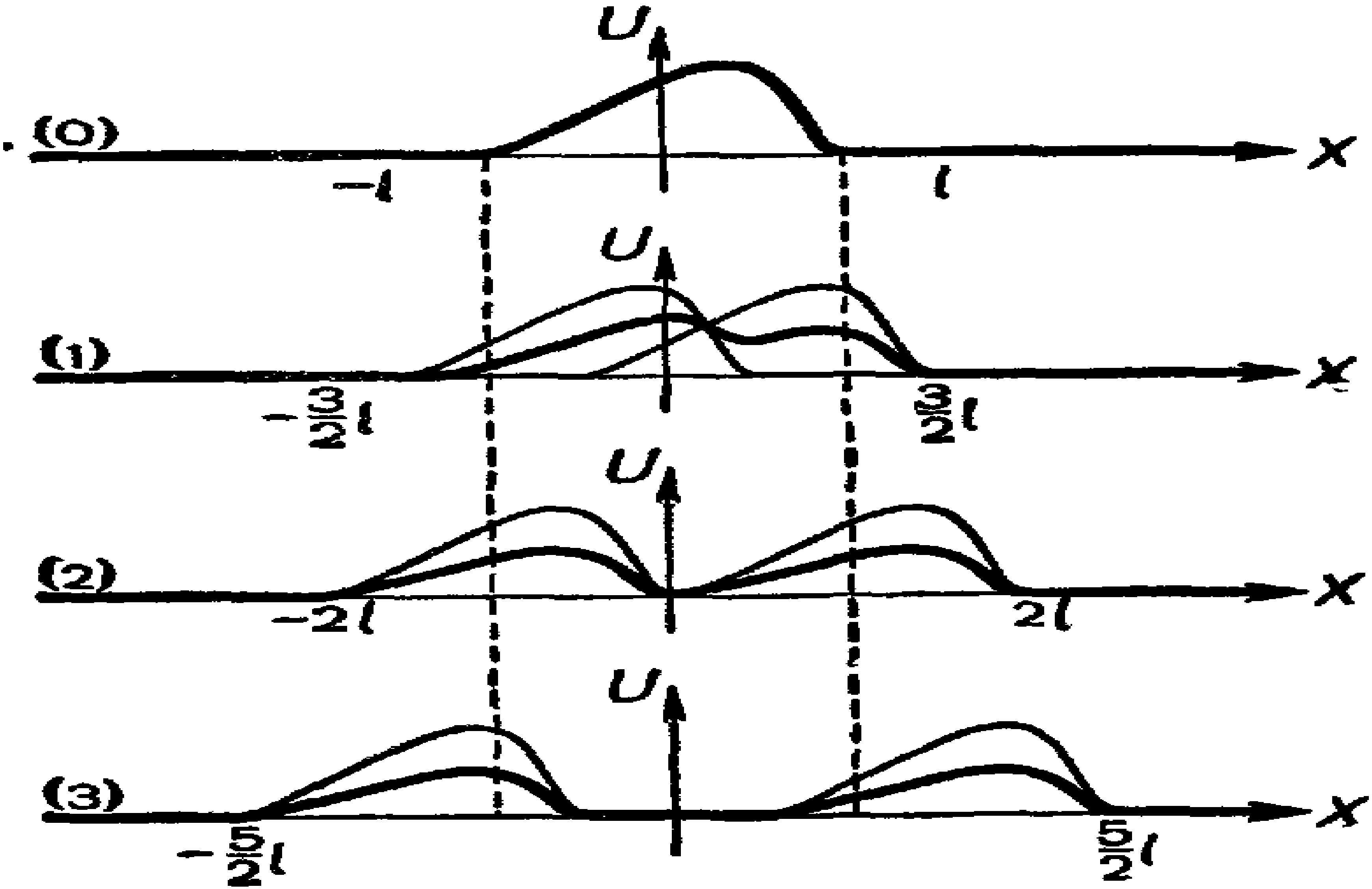
а потом волна $f(x+at)/2$ бежит влево,

а волна $f(x-at)/2$) – вправо

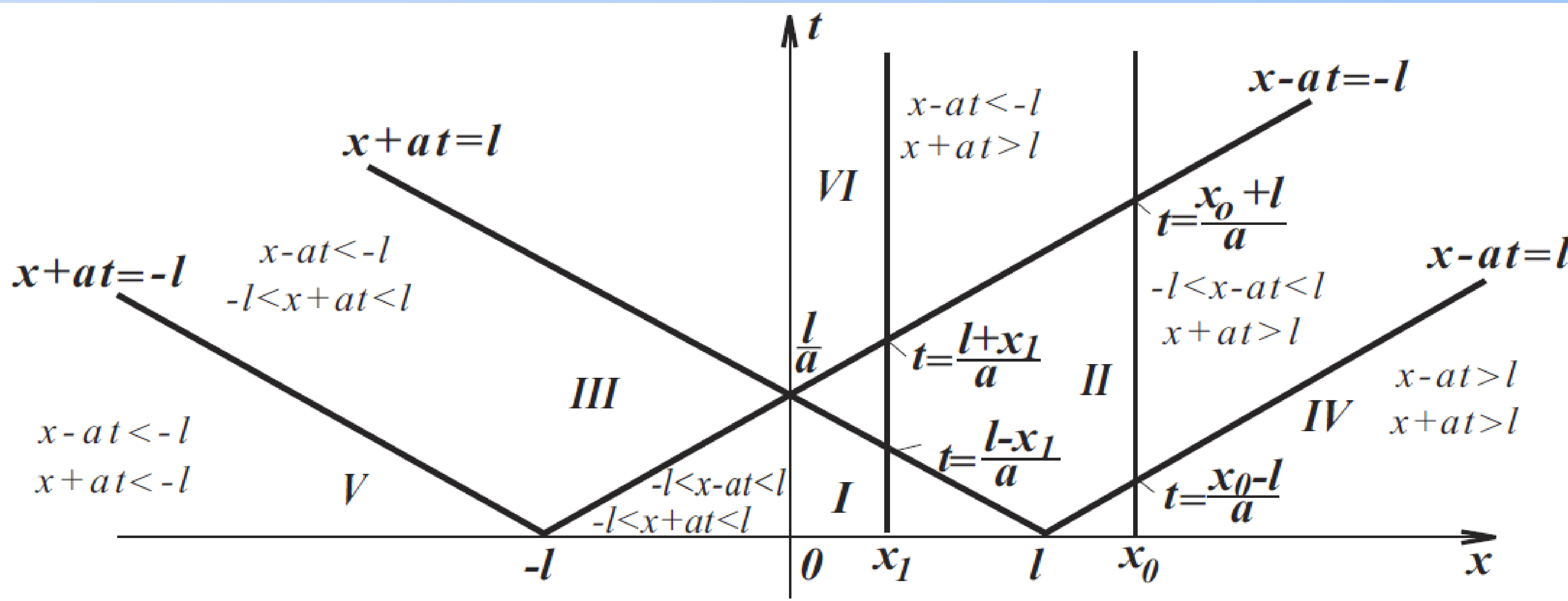
$f(x+at)/2$ ←

→ $f(x-at)/2$




(0)
U
x
−l
l
(1)
U
x
−3/2 l
3/2 l
(2)
U
x
−2l
2l
(3)
U
x
−5/2 l
5/2 l

Проиллюстрируем процесс с использованием фазовой плоскости.



Каждая точка $M(x,t)$ фазовой плоскости (при $t > 0$) соответствует точке струны с абсциссой x в момент времени t. Как можно видеть, через точку x в момент времени t проходит прямая волна, если $-l < x - at < l$, и обратная, если $-l < x + at < l$

. При этом полуплоскость t > 0 разбивается на шесть частей.

В зоне II действует только прямая волна,

в зоне III — только обратная, а в зоне I — и та и другая.

В точках зон IV и V колебания еще нет, а в VI — уже нет.

Зафиксировав какую-либо точку $x_1 \ (0 < x_1 < l)$ и двигаясь по прямой $x = x_1$ вверх, легко записать выражения для функции $u(x_1, t)$ в любой момент времени t:

$$u(x_1,t) = \begin{cases} \dfrac{f(x_1 - at) + f(x_1 + at)}{2}, & 0 < t < \dfrac{(l - x_1)}{a}; \\ \dfrac{1}{2} f(x_1 - at), & \dfrac{(l - x_1)}{a} < t < \dfrac{(l + x_1)}{a}; \\ 0, & t > \dfrac{(l + x_1)}{a}. \end{cases}$$

Выражения для функции $u(x, t)$ при фиксированных значениях времени t

$$u(x, t_0) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -at_0 - l; \\ \dfrac{1}{2} f(x + at), & -at_0 - l < x < at_0 - l; \\ \dfrac{f(x - at) + f(x + at)}{2}, & at_0 - l < x < l - at_0; \\ \dfrac{1}{2} f(x - at), & l - at_0 < x < l + at_0; \\ 0, & l + at_0 < x < \infty. \end{cases}$$

Распространение волн импульса

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}F(x)\,dx=\Phi(x+at)-\Phi(x-at),$$

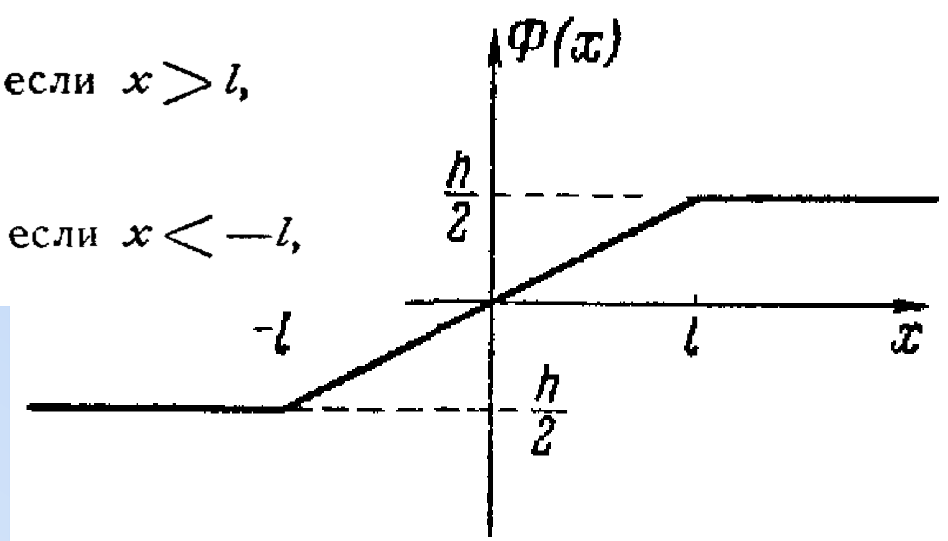
$$\Phi(x)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^x F(x)\,dx.$$

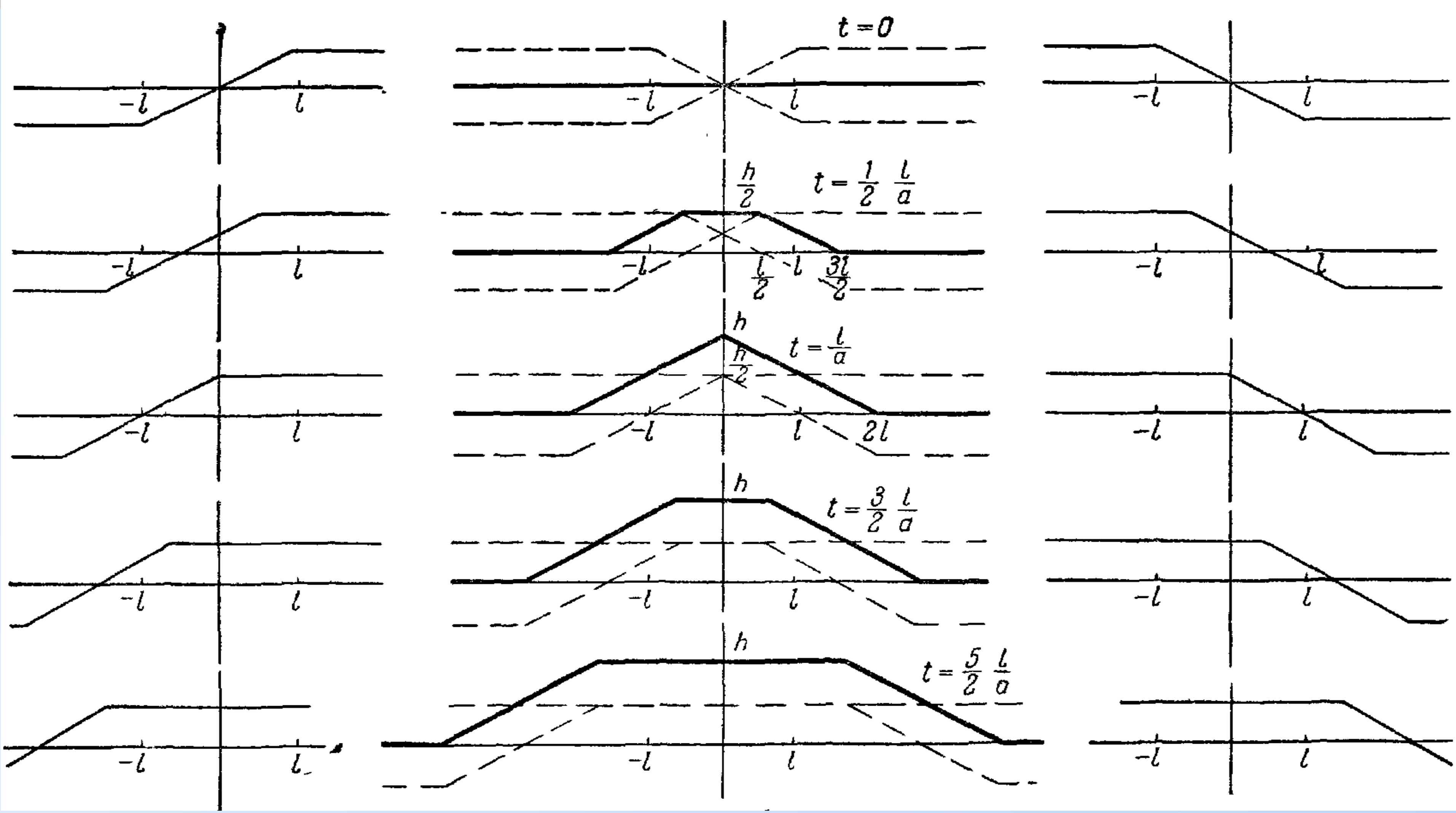
Пусть $F(x)=v_0$.

$$\Phi(x)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^x v_0\,dx=\frac{v_0x}{2a},\qquad \text{если } -l\leqslant x\leqslant l,$$

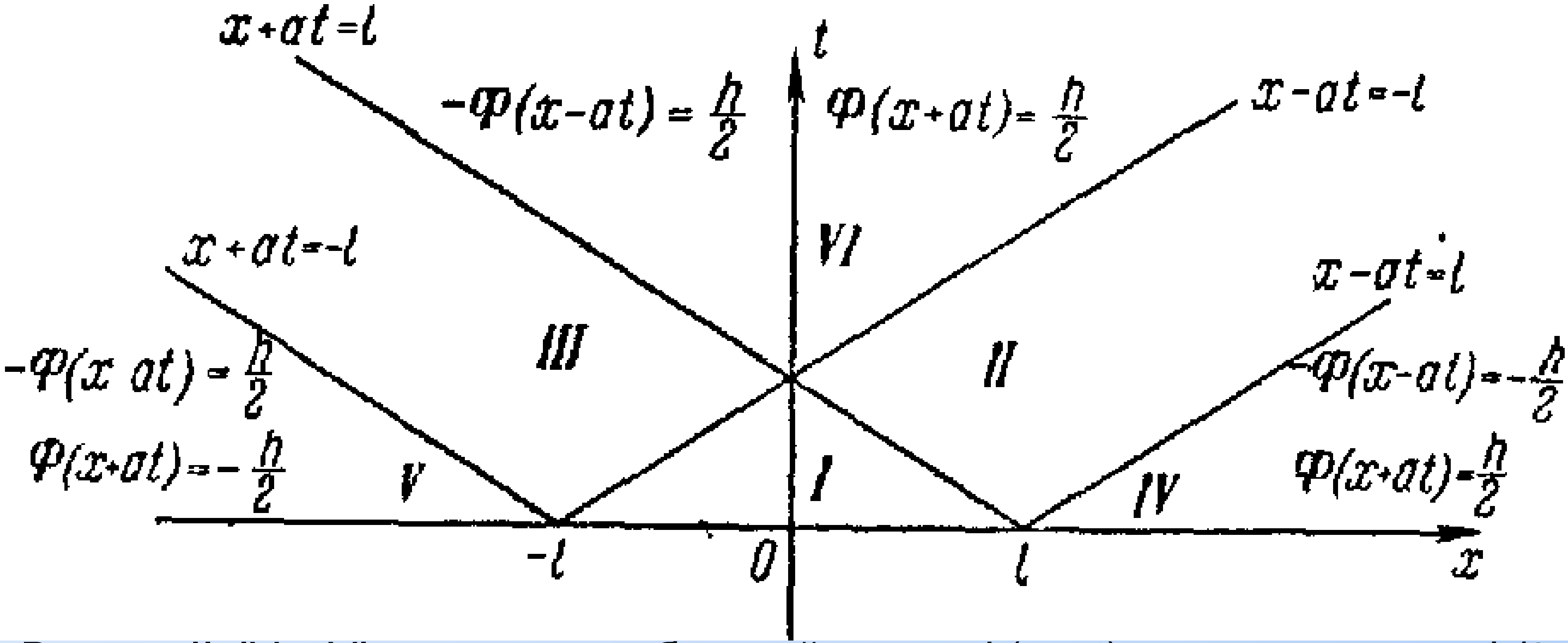
$$\Phi(x)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^l v_0\,dx=\frac{v_0l}{2a}=\frac{h}{2},\qquad \text{если } x>l,$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^{-l} v_0\,dx=-\frac{v_0l}{2a}=-\frac{h}{2},\qquad \text{если } x<-l,$$





С течением времени каждая точка струны под влиянием начальных скоростей, сообщенных участку струны (—l, l), поднимется на высоту h и дальше все время остается на этой высоте (остаточное смещение). .



В зонах II, IV и VI отклонение обратной волны Φ(x+at) постоянно равно h/2, а в точках зон III, V и VI такое же отклонение имеет прямая волна Φ(x - at). Поэтому зона VI представляет зону остаточного смещения;

в точках, ей соответствующих, функция и (x, t) = Φ(x + at) — Φ(x—at) = h.

Зоны IV и V — зоны покоя

Колебания полубесконечной струны

Рассмотрим явление вблизи одной границы. Влияние значительно удаленной второй границы не имеет существенного значения.

Приходим к постановке задачи на полуограниченной прямой $0 \leqslant x \leqslant \infty$

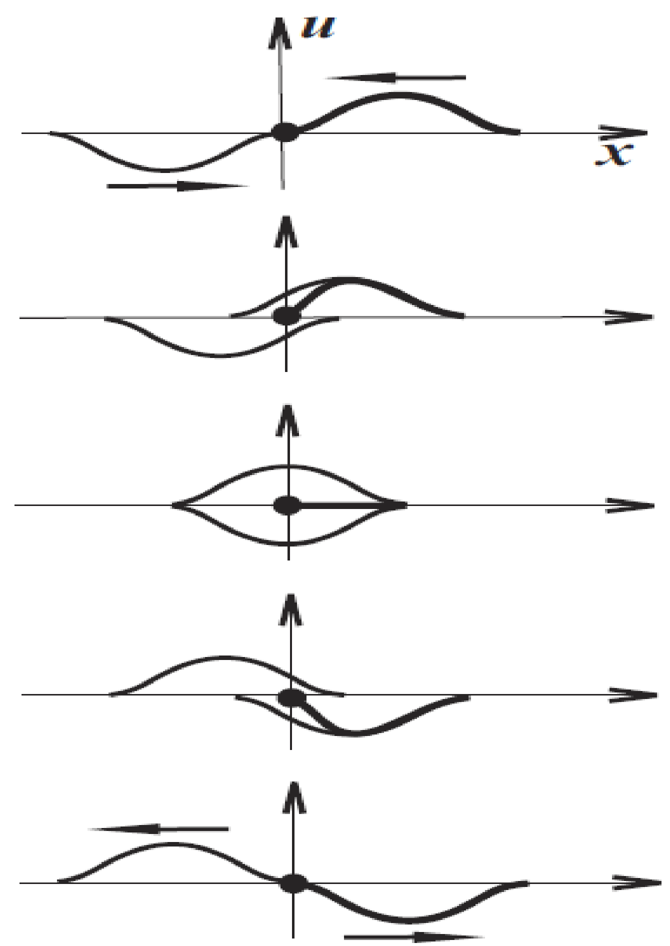
Пусть струна жестко закреплена в точке x = 0.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u|_{t=0} = f(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x), \\ u|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

При исследовании этой задачи особое внимание уделим отражению волн от закрепленного конца.

Решение уравнения может быть получено из формулы Д'Аламбера следующим образом. Допустим, что функции $f(x)$ и $F(x)$, определенные сначала только при $x \geqslant 0$ доопределены нами произвольным образом при $x < 0$ Напишем выражение для $u(0,t)$

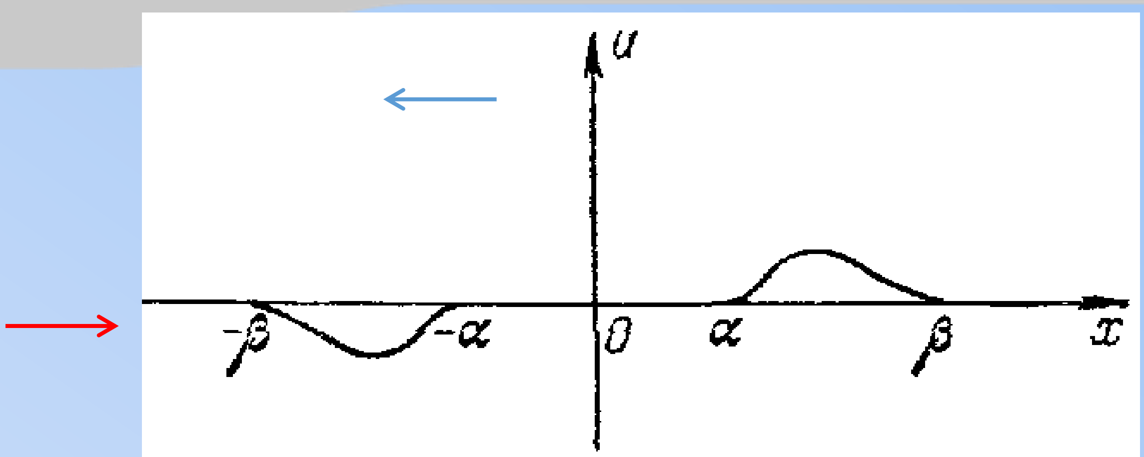
$$u(0,t) = \frac{1}{2}(f(-at) + f(+at)) + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} F(x)dx.$$



Чтобы удовлетворить условию (жестко закрепленный конец) , т. е. чтобы $u(0,t)=0$, нужно значения функций $f(x)$ и $F(x)$ при $x < 0$ выбрать так: $f(-x) = -f(x)$ и $F(-x) = -F(x)$ т. е. надо $f(x)$ и $F(x)$ продолжить нечетным образом.

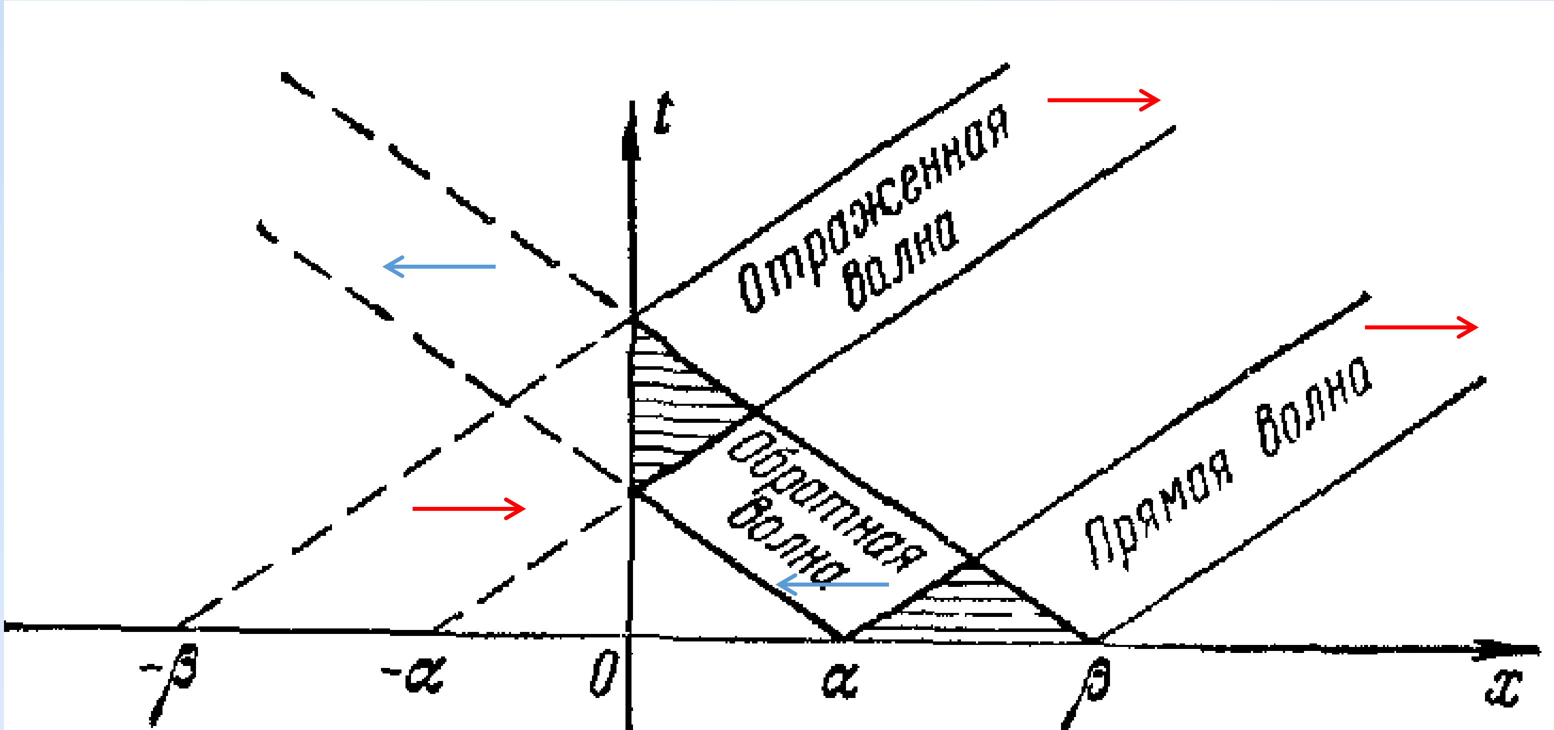
Начало процесса распространения волны отклонения полностью соответствует случаю бесконечной струны. Но как только бегущая влево полуволна дойдет до границы (начала координат), туда же подойдет и полуволна,

бегущая вправо по отрицательной полуоси.



Проиллюстрируем процесс с использованием фазовой плоскости.

.



Полные и замкнутые системы функций

Определение. Система функций $\varphi_n(M)_1^\infty$ называется *замкнутой* в $L_2(D)$, если не существует функции $f \in L_2(D)$, отличной от тождественного нуля, ортогональной ко всем функциям данной системы, т. е. если $\int\limits_D f\varphi_n dV = 0$ при всех n, то $f \equiv 0$.

Определение. Система функций $\varphi_n(M)_1^\infty$ называется *полной* в $L_2(D)$, если для любой функции $f \in L_2(D)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon) > 0$ и коэффициенты $a_1, \ldots, a_N$, такие что

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n \right\|_{L_2(D)} \leqslant \varepsilon,$$

т. е. f может быть аппроксимирована в среднем конечной линейной комбинацией функций данной системы.

Система φ_n называется *ортогональной*, если выполняется условие

$$\int\limits_D \varphi_n\varphi_m dV = \delta_{nm}\|\varphi_n\|^2 = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ \|\varphi_n\|^2 & \text{при } n = m, \end{cases}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера[1].

Если $\int\limits_D \varphi_n\varphi_m\rho dV = \delta_{nm}\|\varphi_n\|^2$, то говорят, что функции φ_n ортогональны с весом ρ.

Система φ_n называется *ортонормированной*, если норма $\|\varphi_n\|_{L_2(D)} = 1$.

Для ортонормированных систем необходимым и достаточным условием полноты является равенство Парсеваля–Ляпунова–Стеклова: для любой функции $f \in L_2(D)$ выполняется равенство

$$\int\limits_D f^2 dV = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2,$$

где $f_n = \int\limits_D f\varphi_n dV$ — коэффициенты Фурье функции $f(M)$.

Наиболее известный пример полной и замкнутой системы — тригонометрическая система $(1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим уравнение

$$\hat{L}u = \lambda u,$$

где $\hat{L}$ — линейный оператор, а λ — параметр.

Значения λ_n, при которых существуют ненулевые решения этого уравнения, называются *собственными значениями* (или характеристическими значениями) оператора $\hat{L}$, а соответствующие им решения — *собственными функциями*.

Спектром оператора $\hat{L}$ называется множество всех чисел λ_n (спектральных, или собственных, значений).

Характер спектра определяется дополнительными условиями, которым удовлетворяют решения уравнения. Если λ принимает дискретный ряд значений λ_n, то говорят, что спектр оператора $\hat{L}$ — *дискретный*. Если λ принимает непрерывный ряд значений ($a < \lambda < b$), то спектр оператора $\hat{L}$ — *сплошной*.

Рассмотрим следующую линейную однородную краевую задачу для уравнения эллиптического типа

$$\begin{cases} \hat{L}u + \lambda\rho u = 0 & \text{в } D; \\ \alpha\dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\Big|_S = 0, & |\alpha| + |\beta| \neq 0, \end{cases}$$

где $\hat{L} = \operatorname{div}[k(M)\operatorname{grad} u] - q(M)u$ — дифференциальный эллиптический оператор.

Коэффициенты $\rho(M)$, $k(M) > 0$, $q(M) \geqslant 0$ являются непрерывными функциями переменной M в области D, ограниченной замкнутой поверхностью S.

Найдем те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения этого уравнения.

Эта ***задача на собственные значения и собственные функции*** называется ***задачей Штурма–Лиувилля.***

1. Существует бесконечное счетное множество собственных значений λ_n и собственных функций $u_n(M)$; собственные значения с увеличением номера n неограниченно возрастают. Каждому собственному значению соответствует лишь конечное число линейно-независимых функций, т. е. ранг всех собственных значений конечен.

2. При $q \geqslant 0$ собственные значения задачи Дирихле ($\alpha = 0$, $\beta = 1$) положительны ($\lambda_n > 0$) при всех n.

3. Собственные функции ортогональны между собой в области D с весом $\rho(M)$: $\int\limits_D u_n(M)u_m(M)\rho\, dV = 0$ для $n \neq m$.

4. Теорема разложимости Стеклова. Произвольная, дважды непрерывно дифференцируемая в $\bar{D}$, функция $f(M)$, удовлетворяющая граничным условиям, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственными функциям данной краевой задачи:

$$f(M) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(M),$$

где $f_n = \dfrac{1}{\|u_n\|^2} \int\limits_D f(M) u_n \rho\, dV$ и $\|u_n\|^2 = \int\limits_D u_n^2 \rho\, dV$.

Первая и вторая формулы Грина

область D ограничена гладкой замкнутой поверхностью S.

Пусть в области D задана векторная функция $\boldsymbol{a}(M)$, так что она непрерывна в $\bar{D} = D+S$ и имеет непрерывные производные в области D. Тогда в этих условиях выполняется

теорема Остроградского–Гаусса

$$\int\limits_{D} \operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)\, dV = \int \nabla \cdot \boldsymbol{a}(M)\, dV = \oint\limits_{S} \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint\limits_{S} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$$

Заданы функции u и v

Используем дифференциальный оператор

$$\hat{L} = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} u) - q(M)u$$

где k и q непрерывны в $\bar{D}$,

а k непрерывно-дифференцируема в D.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_D v\hat{L}u\,dV = \int\limits_D v\,\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u)\,dV - \int\limits_D qvu\,dV,$$

Учитывая, что

$$v\,\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) = \mathrm{div}(kv\,\mathrm{grad}\,u) - k\nabla u\nabla v = \mathrm{div}\left(kv\frac{\partial u}{\partial n}\right) - k\nabla u\nabla v,$$

и используя теорему Остраградского–Гаусса, получим

первую формулу Грина

$$\int\limits_D v\hat{L}u\,dV = \oint\limits_S kv\frac{\partial u}{\partial n}dS - \int\limits_D (k\nabla u\nabla v + qvu)\,dV.$$

Поменяем местами u и v

$$\int\limits_D u\hat{L}v\,dV = \oint\limits_S ku\frac{\partial v}{\partial n}\,dS - \int\limits_D (k\nabla u\nabla v + qvu)\,dV$$

Вычтем одну формулу из другой и получим

$$\int\limits_D (v\hat{L}u - u\hat{L}v)\,dV = \oint\limits_S k\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS.$$

Для случая оператора Лапласа $\hat{L}u = \Delta u$

первая формула Грина

$$\int\limits_D v\Delta u\, dV = \oint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS - \int\limits_D \nabla u \nabla v\, dV,$$

вторая формула Грина

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)\, dV = \oint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS$$

Ортогональность собственных функций

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа с однородными граничными условиями 1 рода.

Пусть λ_m и λ_k $(k \neq m)$

$$\begin{cases} \Delta u_k + \lambda_k u_k = 0, \\ u_k|_S = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \Delta u_m + \lambda_m u_m = 0, \\ u_m|_S = 0. \end{cases}$$

Домножим на u_m и u_k соответственно.

Вычтем друг из друга и проинтегрируем по V

$$\int\limits_D (u_m \Delta u_k - u_k \Delta u_m)\, dV + (\lambda_k - \lambda_m) \int\limits_D u_k u_m \, dV = 0.$$

Из формул Грина

$$\oint\limits_S \left(u_m \frac{\partial u_k}{\partial n} - u_k \frac{\partial u_m}{\partial n} \right) dS + (\lambda_k - \lambda_m) \int\limits_D u_k u_m \, dV = 0.$$

В силу гран. условий $\lambda_k \neq \lambda_m$ $\int\limits_D u_k u_m \, dV = 0 \ (k \neq m)$