5. Повторные испытания

Повторные испытания. Формула Бернулли. Производящие функции. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Пуассона. Отклонение частоты от вероятности.

5.1. Повторные испытания. Формула Бернулли

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Предположим, что производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может наступить или не наступить некоторое событие A. Обозначим $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ и определим $P_n(m)$ — вероятность того, что событие A произойдет m раз в n испытаниях.

Для вычисления $P_n(m)$ используется формула Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{5.1}$$

Для вычисления вероятности по формуле Бернулли (5.1), в пакет Maxima встроена функция pdf_binomial(m,n,p).

Пример 5.1. *Прибор состоит из* 10 *узлов. Вероятность безотказной работы в течение определённого времени для каждого узла равна* 0,98. *Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за данное время откажут ровно два узла.*

►Здесь $n = 10$, $q = 0{,}98$, $p = 1 - q = 0{,}02$, $m = 2$. По формуле Бернулли (5.1)

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^8 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^8 \approx 0{,}015. ◄$$

Ответ: $P_{10}(2) \approx 0{,}015$.

Пример 5.2. *Вероятность выпуска стандартного изделия на автоматической линии равна* 0,9. *Определить вероятности того, что из пяти наудачу взятых изделий* $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *окажутся стандартными*

►По формуле (5.1) при $n = 5$, $m = 0$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$ найдем вероятность того, что среди пяти взятых изделий не окажется стандартных

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot (0{,}9)^0 \cdot (0{,}1)^5 = 10^{-5}.$$

Как видим, это событие оказалось маловероятным. При других m будем иметь:

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot (0{,}9)^1 \cdot (0{,}1)^4 = \frac{5!}{1!4!} \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-4} = 0{,}00045,$$
$$P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}9)^2 \cdot (0{,}1)^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0{,}81 \cdot 10^{-3} = 0{,}0081,$$
$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0{,}9)^3 \cdot (0{,}1)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0{,}729 \cdot 10^{-2} = 0{,}0729,$$
$$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^1 = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0{,}6561 \cdot 0{,}1 = 0{,}32805,$$
$$P_5(5) = C_5^5 \cdot (0{,}9)^5 \cdot (0{,}1)^0 = 0{,}59049.$$

Здесь сумма всех вероятностей

$$\sum_{m=0}^{5} P_5(m) = 1.$$

Так как вероятность $p_5(5) \approx 0{,}591$ довольно высокая, то наиболее вероятным оказался выпуск пяти стандартных изделий.

Решение данного примера является достаточно трудоемкой задачей, поэтому проще воспользоваться компьютерным пакетом.

Maxima-программа:

(%i1) load(distrib)$ fpprintprec:5$

(%i3) P:makelist(pdf_binomial(k, 5, 0.9), k, 0, 5);

(%o3) [1.0 10^{-5}, 4.5 10^{-4}, 0.0081, 0.0729, 0.3281, 0.5905]

(%i4) wxplot2d(['discrete, P],[style,points])$

Во второй строке программы создаётся список в который записываются вероятности вычисленные по формуле Бернулли при $k = 0, 1, \cdots, 5$: $P_5(0), \cdots, P_5(5)$. Функция wxplot2d графически отображает значения полученных вероятностей, рис. 13.◄

Ответ: $P \approx \{10^{-5},\ \ 0{,}00005,\ \ 0{,}0081,\ \ 0{,}0729,\ \ 0{,}3281,\ \ 0{,}5905\}$.

Пример 5.3. *Продукция моторного завода содержит 7% брака. Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных десяти двигателей: а) не окажется ни одного бракованного, б) не более двух будут бракованными, в) более двух будут бракованными.*

►Здесь $n = 6,\ p = 0{,}07,\ q = 0{,}93.$

а) Вероятность P_1 того, что не окажется ни одного бракованного двигателя, найдем по формуле Бернулли при $m = 0$:

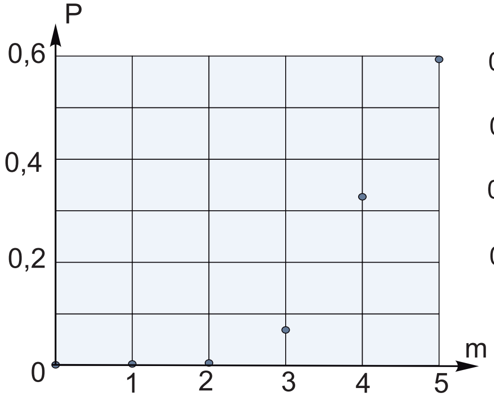

Рис. 13. *К примеру 5.2*

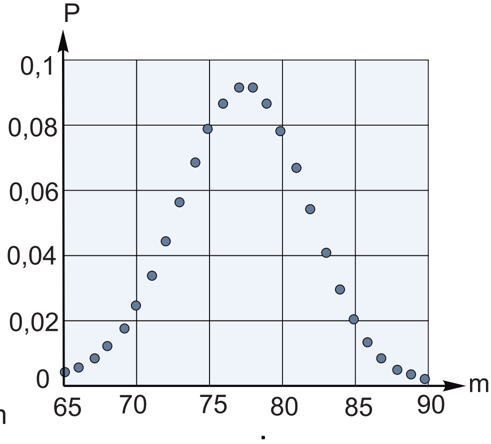

Рис. 14. *К примеру 5.6*

$P_1 = P_6(0) = C_6^0 \cdot (0{,}07)^0 \cdot (0{,}93)^6 \approx 0{,}647.$

б) найдем сначала вероятности $P_6(1)$ и $P_6(2)$:

$$P_6(1) = C_6^1 \cdot (0{,}07)^1 \cdot (0{,}93)^5 \approx 0{,}292,$$

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot (0{,}07)^2 \cdot (0{,}93)^4 \approx 0{,}055.$$

Тогда вероятность P_2 того, что не более двух двигателей будут бракованными, определится как сумма

$$P_2 = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) \approx 0{,}994.$$

в) Так как

$$\sum_{m=0}^{6} P_6(m) = 1,$$

то искомая вероятность P_3 того, что более двух двигателей будут бракованными, определяется как сумма вероятностей:

$P_3 = \sum_{m=3}^{6} P_6(m) = \sum_{m=0}^{6} P_6(m) - \sum_{m=0}^{2} P_6(m) \approx 1 - 0{,}994 = 0{,}006.$◀

Ответ: $P_1 \approx 0{,}647$ $P_2 \approx 0{,}994$ $P_3 \approx 0{,}006$.

Пример 5.4. *Рабочий производит с вероятностью* 0,92 *годное изделие, с вероятностью* 0,06 – *изделие с устранимым браком и с вероятностью* 0,02 – *с неустранимым браком. Произведено* 50 *изделий. Определить вероятность того, что среди них будет три изделия с устранимым браком и одно с неустранимым браком.*

Необходимый теоретический материал из лекции 2.

Замечание 5.1. *Формула Бернулли обобщается на тот случай, когда в результате каждого опыта возможны не два исхода A и $\bar{A}$, а несколько. Пусть производится n независимых опытов в одинаковых условиях, в каждом из которых может произойти только одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, причём*

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Тогда вероятность того, что в k_1 опытах появится событие A_1, ..., в k_m опытах — событие A_m $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} k_j = n\right)$, определяется формулой полиномиального распределения

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2! \ldots k_m!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}. \tag{5.2}$$

►Применим для решения данной задачи формулу (5.2) полиномиального распределения. Здесь

$$n = 50, \quad p_1 = 0{,}92, \quad p_2 = 0{,}06, \quad p_3 = 0{,}02,$$
$$k_2 = 3, \quad k_3 = 1, \quad k_1 = n - k_2 - k_3 = 46.$$

Тогда

$$P_{50}(46, 3, 1) = \frac{50!}{46!3!1!} \cdot 0{,}92^{46} \cdot 0{,}06^3 \cdot 0{,}02^1 =$$
$$= \frac{47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{6} \cdot 0{,}02162 \cdot 0{,}000216 \cdot 0{,}02 \approx 0{,}086.◄$$

В примере 5.2 наиболее вероятное число выпуска стандартных изделий было определено только после вычисления всех вероятностей появления этих изделий. Однако наивероятнейшее число m^* появления события A в n независимых испытаниях можно определить по формуле (5.3).

5.2. Наивероятнейшее число появления события А

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Часто необходимо знать значение m, при котором вероятность $P_n(m)$ максимальна; это значение m называется наивероятнейшим числом m^* наступления события A в n испытаниях.

Можно показать, что

$$(n+1)p-1 \leqslant m^* \leqslant (n+1)p. \tag{5.3}$$

Возможны случаи когда неравенству (5.3) удовлетворяют два целых значения m^*, тогда имеются два наивероятнейших числа m_1^* и $m_2^* = m_1^* + 1$.

Пример 5.5. *Заявки на получение инструмента поступают на склад от восьми цехов ежедневно и независимо. Вероятность получения заявки от каждого склада равна* 0,6. *Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.*

►Здесь $n = 8,\ p = 0{,}6,\ q = 0{,}4$. Тогда

$$(n+1)p-1 \leqslant m^* \leqslant (n+1)p \quad \text{или} \quad 4,4 \leqslant m^* \leqslant 5,4.$$

Следовательно, наиболее вероятное число заявок $m^* = 5$. Вероятность пяти заявок из восьми равна

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^3 = \tfrac{8!}{3!5!} \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}064 \approx 0{,}279.◄$$

Ответ: $m^* = 5,\ P_8(5) \approx 0{,}279$.

Пример 5.6. *Вероятность получения в цехе изделий первого сорта равна* 0,75. *На контроль принята партия в* 103 *изделия. Какое число изделий первого сорта в ней наиболее вероятно?*

►Обозначим $p = 0{,}75,\ q = 0{,}25,\ n = 103$. Тогда

$$0{,}75 \cdot 104 - 1 \leqslant m^* \leqslant 0{,}75 \cdot 104 \quad \text{или} \quad 77 \leqslant m^* \leqslant 78.$$

Так как здесь $(n+1)p$ есть целое число, то существуют два наивероятнейших числа: $m^* = 77,\ m^* = 78$.◄

Ответ: $m^* = 77$ и 78.

На рис. 14, представлено графическое распределение вероятностей $P_{103}(m)$ в диапазоне $65 \leqslant m \leqslant 90$ для примера 5.6. Ниже приведена Maxima-программа.

```
n:103$ p:0.75$
```

P:makelist(pdf_binomial(k, n, p), k, 65,90);
wxplot2d(['discrete, P],[style,points])$

5.3. Производящие функции

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Если в каждом из независимых испытаниях вероятности наступления событий разные, то вероятности того, что в n опытах событие A наступит m раз, равна коэффициенту при m-й степени многочлена

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \cdots (q_n + p_n z). \tag{5.4}$$

Функция $\varphi_n(z)$, называется производящей функцией.

Пример 5.7. *Автомобилист движется по улице на которой расположены 4 светофора. Вероятность проехать светофор без остановки для каждого светофора различна и равна:* $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}5$ *и* $p_4 = 0{,}7$. *Какова вероятность, что автомобилист остановиться ровно на двух светофорах.*

►Применяем формулу (5.4) для $n = 4$ и $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}7$, $q_1 = 0{,}7$, $q_2 = 0{,}2$, $q_3 = 0{,}5$, $q_4 = 0{,}3$.
$\varphi_4(z) = (0{,}7 + 0{,}3z)(0{,}2 + 0{,}8z)(0{,}5 + 0{,}5z)(0{,}3 + 0{,}7z)$.

Раскрываем скобки
$\varphi_4(z) = 0{,}084z^4 + 0{,}337z^3 + 0{,}395z^2 + 0{,}163z + 0{,}021$.

Искомыми вероятностями будут коэффициенты при соответствующих степенях данного многочлена.
$P_3(0) = 0{,}021$; $P_3(1) = 0{,}163$; $P_3(2) = 0{,}395$; $P_3(3) = 0{,}337$,
$P_3(4) = 0{,}084$.◄

Ответ: $P_3(2) = 0{,}395$.

Достаточно трудоёмкая задача приведение производящей функцией к полиному записанному в стандартном виде, можно поручить пакету maxima. Программа для решения данной задачи является достаточно простой и имеет вид:

```
(%i1)kill(all)$
 p:[0.3, 0.8, 0.5,0.7];     q:1-p;
 P:product((q[k]+p[k]*z),k,1,4);
 Fi:expand(%);
(p) [0.3,0.8,0.5,0.7]
(q) [0.7,0.2,0.5,0.3]
(%o4) (0.3*z+0.7)*(0.5*z+0.5)*(0.7*z+0.3)*(0.8*z+0.2)
(Fi) 0.084*z^4+0.337*z^3+0.395*z^2+0.163*z+0.021
```

```
(%i10) K:makelist(coeff(Fi,z^n),n,0,4)$K[1]:coeff(Fi,z,0)$
K;
(%o10) [0.021,0.163,0.395,0.337,0.084]
```

Кратко о программе.
Задаём список значений вероятностей (массив p). Вычисляем массив q. Используя функцию product, перемножаем $\prod_{k=1}^{4}(q_k + p_k z)$. Функция ***expand***(%) раскрывает скобки и записывает полином в порядке убывания коэффициентов. Функция ***coeff***(Fi,z^n) возвращает коэффициент полинома при степени z^n. Для свободного слагаемого надо вызвать эту функцию отдельно: ***coeff***(Fi,z,0). Функция ***makelis***t создаёт список K при $n = \overline{0,4}$. Команда ***K***; выводит значения полученных коэффициентов.

5.4. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Рассмотрим задачи с применением локальной и интегральной теорем Лапласа.

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Вычисления по формуле Бернулли при больших n громоздки и приводят к значительным погрешностям. Локальная теорема Лапласа даёт асимптотическую формулу, позволяющую приближённо найти вероятность появления события ровно m раз в n испытаниях, если n достаточно велико.

Теорема 5.10 (Локальная теорема Муавра-Лапласа). *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появиться m раз в n испытаниях, приближённо равна (при $n \to \infty,\ p \not\approx 0,\ p \not\approx 1$):*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, f\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \text{где } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}. \tag{5.5}$$

На рис. 15 представлен график функции $f(x)$. Из графика видно, что значения функции вне области $|x| < 3$ практически равны нулю. Например, $f(\pm 3) \approx 0{,}0044$, $f(\pm 4) \approx 0{,}0001$. Функция является чётной, максимальное значение функции равно $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}399$. Следовательно, максимальное значение вероятности достигается при $m = m^* = np$ и равно $P_n(m^*) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$. Найдём значения m при котором вероятности $P_n(m)$ значимы. Решаем неравенство

$$\left|\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right| < 3 \ \Rightarrow -3\sqrt{npq} < m - np < 3\sqrt{npq} \ \Rightarrow$$
$$m \in (np - 3\sqrt{npq};\ np + 3\sqrt{npq}).$$

Для вычисления суммарной («интегральной») вероятности того, что число появлений события A находится в заданных пределах при больших n также используется асимптотическая формула, позволяющая вычислять эту вероятность приближённо.

Для пользования этой формулой познакомимся с функцией Лапласа.

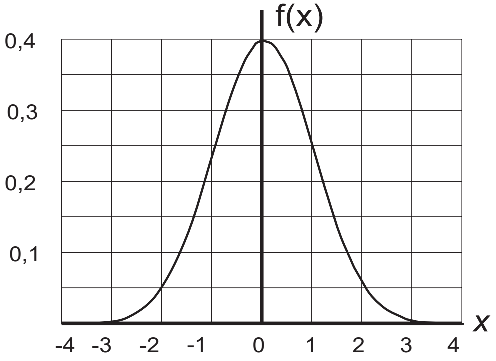

Рис. 15. *Функция* $f(x)$

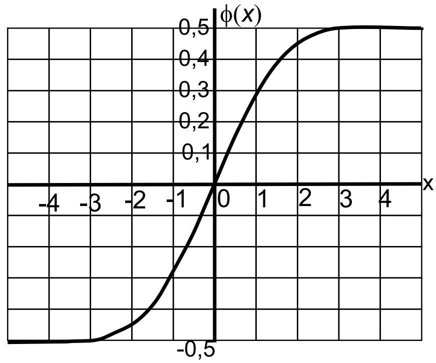

Рис. 16. *Функция* $\Phi(x)$

Определение 5.1. *Функцией Лапласа* $\Phi(x)$ *называется:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{5.6}$$

График Функции Лапласа представлен на рис. 16. Функция является возрастающей, при этом $|\Phi(x)| < 0{,}5,\ \forall x \in (-\infty;\ \infty)$.

Теорема 5.11 (Интегральная теорема Лапласа)**.** *Если вероятность* p *появления события* A *в каждом из* n *независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность* $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ *того, что событие* A *появится не менее* m_1*, но не более* m_2 *раз в* n *испытаниях приближённо равна (при* $n \to \infty,\ p \not\approx 0,$ $p \not\approx 1$*):*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{5.7}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ *— функция Лапласа.*

Пример 5.8. *Вероятность того, что изделия некоторого производства будут отнесены к первому сорту, равна* 0,56. *Чему равна вероятность того, что из* 120 *случайно взятых изделий производства* 67 *окажется первого сорта?*

►В данной задаче

$$n = 120,\ p = 0{,}56,\ \ q = 0{,}44,\ \ m = 67,\ \ npq = 29,568.$$

Применим локальную теорему Лапласа. Так как
$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{67 - 120\cdot 0{,}56}{\sqrt{29{,}568}} \approx -0{,}04, \quad f(-0{,}04) = f(0{,}04) = 0{,}3986,$$
то:
$$P_{120}(67) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}3986}{\sqrt{29{,}568}} \approx 0{,}073.$$

Нетрудно убедиться в том ,что наивероятнейшее число здесь $m^* = 67$, однако вероятность появления m^*, как видим, сравнительно мала ($\approx 0{,}07$). Это объясняется тем, что значения вероятности распределены от $m = 0$ до $m = 120$.

Maxima-программа:

```
(%i1) numer:true$
(%i2) L_Lapl(m, n, p):=(y:1/sqrt(n*p*(1—p)),
              y/sqrt(2*%pi)* exp(— 0.5*((m—n*p)*y)^2) );
(%i3)L_Lapl(67,120,0.56);
(%o3) 0.0733
```

Ответ: $P_{120}(67) \approx 0{,}073$. ◄

Пример 5.9. *В цехе находится* 150 *станков. Вероятность того, что один станок в течение смены потребует к себе внимания, равна* 0,2. *Найти вероятности того, что: а) за смену* 40 *станков потребуют к себе внимания, б) от* 25 *до* 35 *станков потребуют к себе внимания.*

►а) В первом случае можно применить локальную теорему Лапласа, так как $n = 150$, т.е. $n > 100$, а при $p = 0{,}2,\ q = 0{,}8$ величина $npq = 24 > 20$. Здесь $m = 40$,
$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 150\cdot 0{,}2}{\sqrt{24}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \approx 2,04.$$

По таблице найдем $f(2{,}04) = 0{,}05$ и, согласно (5.5), получим:
$$P_{150}(40) \approx 0{,}05/\sqrt{24} \approx 0{,}010.$$

б) Во втором случае используем интегральную теорему (5.11). Здесь $m_1 = 25,\ m_2 = 35$,
$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{25-30}{\sqrt{24}} \approx -1{,}02, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{35-30}{\sqrt{24}} \approx 1{,}02.$$

С помощью (5.7) найдем
$$P_{150}(25 \leqslant m \leqslant 35) \approx \Phi(1{,}02) - \Phi(-1,02) = 2\Phi(1{,}02) \approx 2\cdot 0{,}346 = 0{,}692.$$

Maxima-программа:
(%i1) fpprintprec:4$ n:150$ p:0.2$; m1:25$ m2:35$
(%i6) load(distrib)$
(%i7) pdf_binomial(40,n,p);
(%o7) 0.011
(%i8) c:1/sqrt(n*p*(1 – p)); x1:(m1–n*p)*c; x2:(m2 – n*p)*c;
(%o9) –1.021
(%o10) 1.021
/* *Результаты по интегральной теореме Лапласа.* */
(%i11) PL:cdf_normal(x2, 0, 1) – cdf_normal(x1, 0, 1);
(%o11) 0.693
/* *Результаты по формуле Бернулли.* */
(%i12) PB:sum(pdf_binomial(k,n,p),k,m1,m2);
(%o12) 0.739
/* *Результаты по интегральной теореме Лапласа.* */
PL:=pnorm(x2,0,1) – pnorm(x1,0,1) PL=0.693

Результаты по интегральной теореме Лапласа дают несколько заниженные значения.

Ответ: $P_{150}(40) \approx 0{,}011$; $P_{150}(25 \leqslant m \leqslant 35) \approx 0{,}739$. ◄

Пример 5.10. *Доля изделий продукции завода высшего качества составляет* 40%. *Найти вероятности того, что из отобранных 300 изделий окажется высшего качества: а) от* 110 *до* 140 *изделий, б) не менее* 110 *изделий, в) не более* 109 *изделий.*

►Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа.
Здесь $n = 300$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$.

а) Найдем аргументы функции Лапласа при $m_1 = 110$ и $m_2 = 140$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = -\frac{5}{3\sqrt{2}} \approx -1{,}18,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{140 - 300 \cdot 0{,}4}{\sqrt{72}} = \frac{10}{3\sqrt{2}} \approx 2{,}36.$$

Тогда

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx \Phi(2{,}36) - \Phi(-1,18) \approx 0{,}491 + 0{,}381 = 0{,}872.$$

Эта вероятность оказалась довольно высокой вследствие того, что были просуммированы вероятности вблизи наивероятнейшего числа $m^* = 120$.

б) В этой части задачи нужно положить $m_1 = 110$, а $m_2 = 300$. Значение x_1 было найдено в пункте а, другой параметр

$$x_2 = \frac{300 - 120}{\sqrt{72}} = \frac{180}{6\sqrt{2}} \approx 21{,}21.$$

Соответствующая вероятность

$$P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx \Phi(21{,}21) - \Phi(-1{,}18) \approx 0{,}5 + 0{,}381 = 0{,}881.$$

в) Так как сумма вероятностей

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \quad \text{и} \quad P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300)$$

равна 1, то

$$P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) = 1 - P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 1 - 0{,}881 = 0{,}119.$$

Ответ: $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 140) \approx 0{,}872$; $P_{300}(110 \leqslant m \leqslant 300) \approx 0{,}881$; $P_{300}(0 \leqslant m \leqslant 109) \approx 0{,}119$. ◀

Для случая, когда n велико и p мало (меньше 0,1) выражение (5.7) даёт плохую оценку. В этом случае пользуются асимптотической формулой Пуассона.

5.5. Формула Пуассона

Если вероятность p появления события A в испытании Бернулли близка к 0 или 1 , то теоремы 5.10 и 5.11 неприменимы. В этом случае следует пользоваться приближённой формулой Пуассона для вычисления $P_n(m)$ при больших n.

Теорема 5.12. *Если вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и близка к нулю, а n велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n испытаниях приближённо равна (при $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to a$):*

$$P_n(m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}. \tag{5.8}$$

Замечание 5.2. *Случай, когда $p \approx 1$, сводится к рассмотренному, если вместо $P_n(m)$ вычислять равную ей вероятность $P_n(n-m)$ появления $n-m$ раз противоположного события $\bar{A}$, вероятность появления которого в одном испытании $q = 1 - p \approx 0$.*

Пример 5.11. *При перевозке автомобилей по железной дороге вероятность того, что один автомобиль в пути получит повреждение, равна* 0,003. *Найти вероятности того, что в пути будет повреждено три автомобиля, если их отправлено* 200.

►Поскольку $n = 200$, $p = 0{,}003$, $np = 0{,}6$, то при $m = 3$

$$P_{200}(3) = \frac{0{,}6^3 \cdot e^{-0{,}6}}{3!} \approx 0{,}019.$$

Ответ: $P_{200}(3) \approx 0{,}019$. ◄

Пример 5.12. *Вероятность остановки автобуса из-за поломки в течение смены равна* 0,004. *Найти вероятности того, что в течение смены из* 1000 *машин, вышедших на линии, остановятся: а) две машины, б) пять машин, в) ни одна не остановится; г) менее пяти; д) более пяти.*

►В данном случае $n = 1000$, $p = 0{,}004$, $np = 4$, поэтому можно применить формулу Пуассона.

а) Здесь $m = 2$ и

$$P_{1000}(2) = \frac{4^2 \cdot e^{-4}}{2!} = \frac{8}{e^4} \approx 0{,}147.$$

б) Так как $m = 5$, то

$$P_{1000}(5) = \frac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} \approx \frac{128}{15 \cdot 54,6} \approx 0{,}156.$$

в) При $m = 0$

$$P_{1000}(0) = \frac{1}{e^4} \approx \frac{1}{54,6} \approx 0{,}018.$$

г) $m < 5$

$P_{1000}(m < 5) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) + P_{1000}(3) + P_{1000}(4) =$
$= \frac{1}{e^4}\left(1 + \dfrac{4}{6} + \dfrac{4^2}{24} + \dfrac{4^3}{2}\right) \approx 0{,}629.$

д) $m > 5$

$P_{1000}(m > 5) = 1 - P_{1000}(m < 6) = 1 - (P_{1000}(m < 5) + P_{1000}(5) \approx 0{,}215.$

Ответ: $P_{1000}(2) \approx 0{,}147$; $P_{1000}(5) \approx 0{,}156$; $P_{1000}(0) \approx 0{,}018$; $P_{1000}(m < 5) \approx 0{,}629$; $P_{1000}(m > 5) \approx 0{,}215$. ◄

Представим геометрическое изображение зависимости $P_n(m)$ примера 5.12, рис. 17.

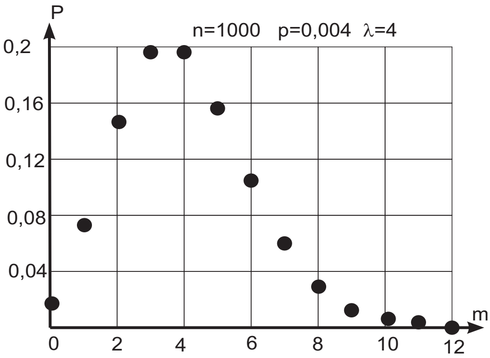

Рис. 17. *К примеру 5.12*

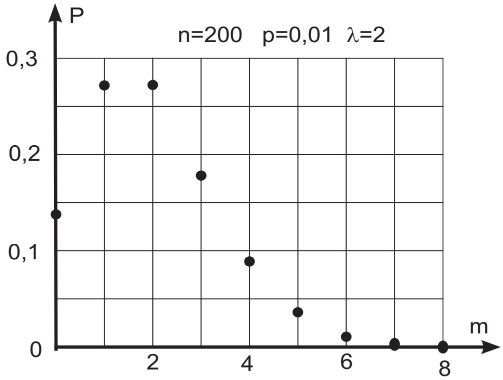

Рис. 18. *К примеру 5.13*

```
n:1000$ p:0.004$ L:n*p;  array(P,n)$
fillarray(P, makelist(L^k/k!*exp(-L), k, 0 ,12))$
G:makelist([k,P[k]], k, 0, 12);
plot2d([discrete,G], [x,0,12],[style,points],
[gnuplot_postamble, "set grid;"],
[title, "n=1000   p=0.004"])$
```

Пример 5.13. *Продукция некоторого производства содержит* 1% *бракованных изделий. Найти вероятность того, что среди* 200 *изделий окажется бракованных: а) ровно три, б) менее трёх, в) более трёх, г) хотя бы одно.*

►Так как $n = 200$, $p = 0{,}01$, то $np = 2$.

а) Вероятность того, что три изделия будут бракованными,

$$P_{200}(3) = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} \approx 0{,}180.$$

б) Вероятность того, что менее трёх изделий будут бракованными, найдется как сумма

$$P_{200}(m < 3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} + \\ + \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} \approx 0{,}677.$$

в) Поскольку сумма

$$\sum_{m=0}^{200} P_{200}(m) = 1,$$

то вероятность наличия более трёх бракованных изделий

$$P_{200}(m > 3) = 1 - \sum_{m=0}^{3} P_{200}(m) \approx 1 - (0{,}677 + 0{,}180) = 0{,}143.$$

г) События «хотя бы одно изделие бракованное» и «ни одно изделие небракованное» противоположные, поэтому искомая вероятность

$$P = 1 - P_{200}(0) = 1 - e^{-2} \approx 0{,}865.$$

Представим геометрическое изображение зависимости $P_n(m)$ примера 5.13, рис. 18.

Ответ: $P_{200}(3) \approx 0{,}180$; $P_{200}(m < 3) \approx 0{,}677$; $P_{200}(m > 3) \approx 0{,}143$.

Если в условиях применимости интегральной теоремы Лапласа требуется оценить отклонение относительной частоты появления события от соответствующей вероятности, то используют приближённую формулу (5.9). ◄

5.6. Отклонение частоты от вероятности

Необходимый теоретический материал из лекции 3.

Пусть проводятся испытания Бернулли с постоянной вероятностью p появления события A в каждом из них; событие A появилось m раз в n испытаниях. Найдем вероятность того, что отклонение относительной частоты $\dfrac{m}{n}$ от вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа ε.

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{5.9}$$

Пример 5.14. *Вероятность появления события в каждом из* 800 *независимых испытаний равна* 0,6. *Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на* 0,03.

►Здесь $n = 800$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $\varepsilon = 0{,}03$. Нужно найти вероятность

$$P\left(\left|\frac{m}{800} - 0{,}6\right| \leqslant 0{,}03\right).$$

По формуле (5.9) эта вероятность равна

$$2 \cdot \Phi\left(0{,}03 \cdot \sqrt{\frac{800}{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) \approx 2 \cdot \Phi(1{,}73).$$

По таблицам найдем $\Phi(1{,}73) \approx 0{,}4582$. Следовательно, искомая вероятность равна $2 \cdot 0{,}4582 = 0{,}9164$.

Ответ: $\approx 0{,}916$. ◄

Задания для самостоятельной работы

Пример 5.15. *Определить вероятность того, что в семье, имеющей пять детей, будет два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной* 0,51, *девочки* — 0,49.

Пример 5.16. *Вероятность изготовления бракованного изделия равна* 0,02. *Из большой партии изделий отбирается* 10 *штук и проверяется их качество. Если среди них окажется два или более бракованных, то вся партия не принимается. Определить вероятность того, что вся партия будет отвергнута.*

Пример 5.17. *Брак выпускаемых цехом деталей составляет* 6%. *Определить наиболее вероятное число годных деталей в партии из* 500 *штук.*

Пример 5.18. *Брак изделий цеха составляет* 12%. *Найти вероятность того, что из* 300 *изделий цеха будет забраковано* 35.

Пример 5.19. *Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна* 0,25. *Найти вероятность того, что среди* 200 *случайно отобранных деталей непроверенными окажутся от* 40 *до* 50.

Пример 5.20. *Вероятность, что изделие фабрики будет отличного качества, равна* 0,75. *Найти вероятность того, что из* 100 *изделий фабрики отличного качества будет: а) не менее* 71 *и не более* 80 *изделий, б) не менее* 71 *изделий, в) не более* 70 *изделий.*

Пример 5.21. *Вероятность брака при производстве деталей равна* 0,001. *Найти вероятности того, что в партии из* 5000 *деталей окажется: а) две бракованные детали, б) не менее двух бракованных деталей.*

Пример 5.22. *На факультете* 1000 *студентов. Вероятность того, что один студент заболеет в течение недели, равна* 0,002. *Найти вероятность того, что в течение недели заболеет более трёх студентов.*

Пример 5.23. *Отдел технического контроля проверяет* 625 *изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна*

0,02. *Найти с вероятностью* 0,95 *границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.*

Пример 5.24. *Вероятность того, что диаметр вала меньше допустимого, больше допустимого и в допустимых пределах, равны соответственно* 0,05, 0,08, 0,87. *Из общей партии берутся для проверки* 100 *валов. Определить вероятность того, что среди них будет два вала с меньшим диаметром и один вал с большим диаметром.*

Пример 5.25. *Вероятность появления события в каждом испытании равна* 0,7. *Сколько нужно провести испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений события равнялось* 10*?*