Векторная алгебра

Разложение вектора $\boldsymbol{a}$ в прямоугольных декартовых координатах:

$$\boldsymbol{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}_0 a,$$

где $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ (или $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) — единичные векторы (орты), направленные по осям x, y, z, а $\boldsymbol{a}_0$ — единичный вектор в направлении $\boldsymbol{a}$.

Скалярное произведение векторов:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{ba}) = ab\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Понятие тензора тесно связано с преобразованием систем координат.

Пусть дана трехмерная ортогональная декартова система координат $Oxyz$, которую для удобства запишем в симметричной форме $Ox_1x_2x_3$. Тогда, если заданы две декартовы системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Ox'_1x'_2x'_3$ с общим началом координат 0, то координаты любой точки M в штрихованной и нештрихованной системах связаны между собой соотношением

$$x'_i = \sum_{j=1} A_{ij} x_j.$$

Часто для такого суммирования знак суммы опускается, и суммирование проводится автоматически по повторяющимся индексам:

1. Тензор второго ранга — символ Кронекера δ_{ij} определяется как

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j; \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Для δ_{ij} выполняются следующие соотношения:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad \delta_{ik} a_k = a_i, \quad \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3,$$
$$\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2} + \delta_{i3}\delta_{j3} = \delta_{ij},$$

2. Единичный абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга e_{ijk} — тензор Леви-Чивиты[1]

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если какие-либо индексы из тройки } i,\ j\,k \text{ попарно совпадают;} \\ 1, & \text{если индексы } i,\ j\,k \text{ образуют правильную} \\ & \qquad \text{последовательность чисел } 1,\ 2,\ 3; \\ -1, & \text{если индексы } i,\ j,\ k \text{ образуют неправильную} \\ & \qquad \text{последовательность чисел } 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Правильной называется циклическая последовательность чисел 1, 2, 3, или, по-другому, последовательность, которая образуется путем *четных* перестановок индексов $((123), (231), (312))$. Соответственно *неправильной* называется нециклическая последовательность чисел 1, 2, 3, или же последовательность, которая образуется путем *нечетных* перестановок $((213), (132), (321))$.

Из определения следует, что при цикличном смещении индексов знак e_{ijk} не меняется: $e_{ijk} = e_{jki} = e_{kij}$. Знак меняется при перестановке двух индексов $e_{ijk} = -e_{ikj} = -e_{kji} = -e_{jik}$. например, $e_{213}e_{123} = -1$.

Скалярное поле. Если в каждой точке $M(x, y, z)$ пространства V задана скалярная функция $u(M) = u(x, y, z)$, то говорится что задано *скалярное поле.*

Быстрота пространственного изменения скалярной функции $u(M)$ характеризуется *производной по данному направлению* $\boldsymbol{l}$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{i}) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{j}) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k}) =$$
$$= |\boldsymbol{l}|\,|\operatorname{grad} u|\cos(\boldsymbol{l}, \operatorname{grad} u) = |\boldsymbol{l}| \operatorname{grad}_l u,$$

где *градиент* скалярной функции u

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial n}\boldsymbol{n} = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{e}_z = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

представляет вектор, направленный в данной точке M_0 в сторону быстрейшего возрастания скалярного поля u (по нормали к поверхности уровня) и численно равный производной от u в точке M_0 в этом направлении.

Модуль градиента равен

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z.$$

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial n}\boldsymbol{n} = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{e}_z.$$

Как дифференциальный оператор ∇ обладает свойствами произ водной:

$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{e}_z = \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

$$\operatorname{grad} u(r) = \frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{grad} r = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \quad \operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v,$$

$$\operatorname{grad}(uv) = v\operatorname{grad} u + u\operatorname{grad} v, \quad \operatorname{grad} f(u) = \frac{df}{du}\operatorname{grad} u.$$

Как дифференциальный оператор ∇ обладает свойствами производной:

$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{e}_z = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$\operatorname{grad} u(r) = \frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{grad} r = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v,$$

$$\operatorname{grad}(uv) = v\operatorname{grad} u + u\operatorname{grad} v, \quad \operatorname{grad} f(u) = \frac{df}{du}\operatorname{grad} u.$$

Векторное поле. *Векторным полем* называется область пространства V, в каждой точке $M(x, y, z)$ которой задано значение вектор-функции $\boldsymbol{a}(M)$. Графически векторное поле изображается с помощью векторных (силовых) линий. Вектор $\boldsymbol{a}(M)$ направлен по касательной к векторной линии, а его абсолютное значение $|\boldsymbol{a}(M)|$ пропорционально густоте линий. Для векторного поля можно определить поток вектора через площадку, характеризуемую вектором $d\boldsymbol{S}$, в виде

$$dN = \boldsymbol{a}(M)d\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{a}(M)\cdot\boldsymbol{n})\,dS = a(M)\cos(\widehat{\mathbf{an}})\,dS = a_n\,dS.$$

Поверхностный интеграл

$$N = \int\limits_S \boldsymbol{a}(M)\,d\boldsymbol{S} = \int a_n\,dS = \int a_x\,dy\,dz + \int a_y\,dx\,dz + \int a_z\,dx\,dy$$

представляет собой поток вектора $\boldsymbol{a}$ через поверхность S.

Если поверхность замкнута, то справедлива теорема Гаусса–Остроградского.

Теорема. *Поток векторного поля* $\boldsymbol{a}(M)$ *через произвольную замкнутую поверхность* S *равен тройному интегралу от* $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)$, *взятому по объему, ограниченному этой поверхностью,*

$$\oint \boldsymbol{a}(M)d\boldsymbol{S} = \oint (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})\,dS = \int \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dV =$$
$$= \int \operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)\,dV = \int \nabla\cdot\boldsymbol{a}(M)\,dV\,.$$

Следовательно, $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)$ представляет собой поток вектора $\boldsymbol{a}(M)$ через бесконечно малую поверхность, окружающую данную точку поля M, отнесенный к единице объема.

Помимо дивергенции векторное поле характеризуется еще одной величиной:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = [\nabla \boldsymbol{a}] = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z,$$

которая носит название *ротора* (rot), или *вихря* (в зарубежной литературе в основном используется другое обозначение — curl, *англ.* завиток ($\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \operatorname{curl} \boldsymbol{E}$).

Физический смысл ротора становится понятным из теоремы Стокса.

Теорема. *Циркуляция векторного поля* $\boldsymbol{a}(M)$ *по замкнутому контуру* l *равна потоку вихря (ротора) этого вектора через произвольную поверхность* S, *опирающуюся на контур* l,

$$\oint\limits_{l} \boldsymbol{a}(M)\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{S} \operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)\cdot d\boldsymbol{S}.$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u = (\nabla\cdot\nabla)u = \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u.$$

Оператор второго порядка Δ называется оператором Лапласа, или лапласианом:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = [\nabla[\nabla\boldsymbol{a}]] = \nabla(\nabla\boldsymbol{a}) - (\nabla\nabla)\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a};$$