Практическое занятие №11

Теория вычетов (продолжение)

<u>Формулы для вычисления вычетов функции $f(z)$</u>

1. Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$,
то $resf(z_0) = 0$.

2. Если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения вычета нужно найти коэффициент c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана: $resf(z_0) = c_{-1}$.

3. Если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$resf(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z - z_0)^n].$$

<u>Частные случаи (для полюсов)</u>

А) если z_0 – простой полюс, т.е. полюс первого порядка $(n = 1)$, то

$$resf(z_0) = \lim_{z \to z_0} [f(z)(z - z_0)\ ] .$$

Б) для полюса 2-го порядка

$$resf(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} [f(z)(z - z_0)^2].$$

В) для полюса 3-го порядка

$$resf(z_0) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2} [f(z)(z - z_0)^3]$$

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{e^{z-i}-1}{(z^2+1)z}$ и установить их тип. Найти вычеты.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1 = i$, $z_2 = -i$ и $z_3 = 0$.

В точке $z_1 = i$ числитель и знаменатель $f(z)$ обращаются в нуль. Для числителя $P(z) = e^{z-i} - 1$ число $z = i$ является нулем 1 порядка, так как $iP'(z)\,|_{z=i} = e^{z-i}\,|_{z=i} = 1$, то $z = i$ – нуль 1-го порядка.

Знаменатель $Q(z) = (\mathrm{z} - \mathrm{i})(\mathrm{z} + \mathrm{i})z$ в точке $z = i$ имеет также нуль 1-го порядка. Поскольку $(e^{z-i} - 1) \sim (z - i)$ при $z \to i$,

$$\lim_{z\to i} \frac{e^{z-i}-1}{(\mathrm{z}^2+1)z} = \lim_{z\to i} \frac{e^{z-i}-1}{(\mathrm{z}-\mathrm{i})(\mathrm{z}+\mathrm{i})z} = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)}{(\mathrm{z}-\mathrm{i})(\mathrm{z}+\mathrm{i})z} = \frac{-1}{2}$$

Следовательно, $z_1 = i$ – устранимая особая точка. $resf(i) = 0$.

Рассмотрим точку $z = 0$. В точке $z = 0$ перепишем функцию в виде $f(z) = \frac{e^{z-i}-1}{(\mathrm{z}^2+1)z} = \frac{\varphi(z)}{z}$, где $\varphi(z) = \frac{e^{z-i}-1}{(\mathrm{z}^2+1)}$ – аналитическая функция в точке $z = 0$, $\varphi(0) = \frac{e^{-i}-1}{1} \neq 0$. По теореме $z = 0$ – полюс 1-го порядка. Тогда

$$resf(0) = \lim_{z\to 0} f(\mathrm{z}) \cdot (z - 0) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{z-i}-1}{(\mathrm{z}^2+1)z} \cdot z = e^{-i} - 1$$

В точке $z = -i$ перепишем функцию в виде $f(z) = \frac{e^{z-i}-1}{(\mathrm{z}^2+1)z} = \frac{\varphi(z)}{z\ \ +i}$, где

$\varphi(z) = \frac{e^{z-i}-1}{z-i}$ – аналитическая функция в точке $z = -i$,

$\varphi(-i) = \frac{e^{-2i}-1}{-2i} \neq 0$. По теореме $z = -i$ – полюс 1-го порядка.

Поскольку $z = -i$ – полюс 1-го порядка, то

$$resf(-i) = \lim_{z\to -i} f(\mathrm{z}) \cdot (z + i) = \lim_{z\to -i} \frac{e^{z-i}-1}{(\mathrm{z}^2+1)z} \cdot (z + i),$$ т.е.

$$resf(-i) = \lim_{z\to -i} \frac{e^{z-i}-1}{(z-i)\cdot z} = \frac{e^{-2i}-1}{(-2i)\cdot \mathrm{i}} = \frac{e^{-2i}-1}{2}.$$

Пример. Найти особые точки функции $f(z)=\frac{sin2z+1}{z^5-3z^4}$

и установить их тип. Найти вычеты.

Решение. Найдем нули функции $\frac{1}{f(z)}=\frac{z^5-3z^4}{sin2z+1}$. Поскольку

$z^5-3z^4=z^4(z-3)$, то для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка $z=0$ – это нуль четвертого, а $z=3$ – нуль первого порядка. Пользуясь теоремой, имеем

$z=0$ – это полюс 4-го порядка функции $f(z)$,

$z=3$ – полюс первого порядка.

Поскольку $z=3$ – полюс 1-го порядка, то

$res f(3)=\lim\limits_{z\to 3} f(z)\cdot(z-3)=\lim\limits_{z\to 3}\frac{sin2z+1}{z^5-3z^4}\cdot(z-3)=\lim\limits_{z\to 3}\frac{sin2z+1}{z^4}=\frac{sin6+1}{3^4}$.

Задание: самостоятельно найти вычет в точке $z=0$ – это полюс 4-го порядка функции.

Пример. Найти особые точки функции $f(z)=\frac{\sin(z-i)}{(z-i)^3z^3}$ и установить их тип. Найти вычеты.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1=i$ и $z_2=0$.

В точке $z_1=i$ числитель и знаменатель $f(z)$ обращаются в нуль. Для числителя $P(z)=\sin(z-i)$ число $z=i$ является нулем 1-го порядка, так как $P'(z)\,|_{z=i}=\cos(z-i)\,|_{z=i}=1$, то $z=i$ – нуль 1-го порядка. Знаменатель $Q(z)=(z-i)^3z^3$ в точке $z=i$ имеет нуль 3-го порядка. Следовательно,
по теореме $z_1=i$ –полюс 2-го порядка функции $f(z)$.
Найдем вычет.

$$res f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}[f(z)(z-z_0)^2]$$

$$res\ f(i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{\sin(z-i)(z-i)^2}{(z-i)^3z^3}\right]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{\sin(z-i)}{(z-i)\quad z^3}\right]=\cdots\ldots.$$

(доделать самостоятельно)

В точке $z = 0$ перепишем функцию в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^3}$, где $\varphi(z) = \frac{\sin(z-i)}{(z-3)^3}$ – аналитическая функция в точке $z = 0$,

$\varphi(0) = \frac{\sin(-i)}{-27} \neq 0$. По теореме $z = 0$ – полюс 3-го порядка. Окончательно, $z = i$ – полюс 2-го порядка, $z = 0$ – полюс 3-го порядка.

<u>*Задание*</u>. Вычислить вычет в точке $z = 0$ (полюс 3-го порядка), используя

$$res f(z_0) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2} [f(z)(z - z_0)^3].$$

<u>Пример.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ и установить их тип. Найти вычеты.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки, в которых знаменатель обращается в нуль, т.е. решения уравнения $e^z - 1 = 0$. Таким образом, особые точки: $z_n = 2\pi n i$, $n \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим сначала случай $z_0 = 0$. Поскольку

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1,$$

то $z_0 = 0$ - устранимая особая точка. Следовательно, $res f(0)=0$.

Пусть теперь $z_n = 2\pi n i$, $n \neq 0$. В этом случае

$$\lim_{z \to 2\pi n i} f(z) = \lim_{z \to 2\pi n i} \frac{z}{e^z - 1} = \infty.$$

Следовательно, особые точки $z_n = 2\pi n i$ при $n \neq 0$ являются полюсами функции $f(z)$. Определим порядок этих полюсов.

Для знаменателя $P(z) = e^z - 1$ число $z_n = 2\pi n i$, $n \neq 0$, является нулем 1-го порядка, так как $P'(z)\,|_{z=2\pi n i} = e^z\,|_{z=2\pi n i} = 1$. При этом числитель функции $f(z)$ в точке $z_n = 2\pi n i$, $n \neq 0$, не равен нулю. Следовательно, особые точки $z_n = 2\pi ni$ при $n \neq 0$ являются полюсами 1-го порядка функции $f(z)$.

Найдем вычет в этих особых точках.

$$resf(z_n) = \lim_{z \to 2\pi ni} f(z) \cdot (z - 2\pi ni) = \lim_{z \to 2\pi ni} \frac{z \cdot (z - 2\pi ni)}{e^z - 1} =$$

$$\lim_{z \to 2\pi ni} \frac{2z - 2\pi ni}{e^z}$$

Здесь на последнем шаге использовалось правило Лопиталя.

Таким образом, при $n \neq 0$ вычет $f(z)$ в точках $z_n = 2\pi ni$:

$$resf(z_n) = \frac{2\pi ni}{e^{2\pi ni}} = 2\pi ni.$$

Основная теорема о вычетах

Теорема. *Если функция $f(z)$ является аналитической всюду внутри области D, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих внутри кусочно-гладкой замкнутой кривой Г, Г⊂D, тогда*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k).$$

Контур *Г* проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$.

Решение. Находим особые точки подынтегральной функции:

$z_1 = -2$ – полюс второго порядка,

$z_{2,3} = \pm i$ – полюсы первого порядка.

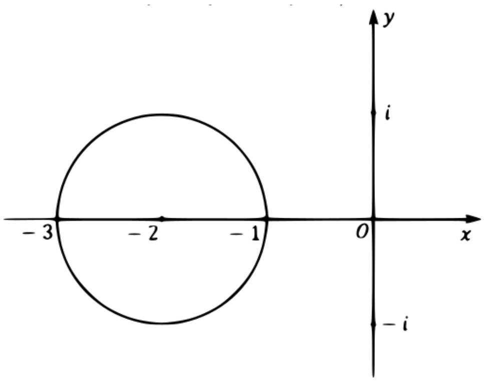

Рис. 13

Нарисуем контур $|z+2|=1$. Внутри контура лежит только одна особая точка $z_1 = -2$ (см. рис. 13).

По основной теореме о вычетах получаем

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 2\pi i \cdot resf(-2).$$

Найдем $res\, f(-2)$:

$$\text{res}\, f(-2) = \lim_{z\to -2} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+2)^2(z^2+1)}\right] = \lim_{z\to -2} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{4}{25}.$$

Далее получим

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 2\pi i \cdot \text{res}\, f(-2) = \frac{8\pi i}{25}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz.$

Решение. <u>В области D: $|z-i| < 2$</u>

функция $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ имеет одну особую точку $z = 0$.

Разложение в ряд Лорана для заданной функции имеет вид

$$f(z) = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + \frac{1}{4!\, z^4} + \cdots\right) =$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\, z} + \frac{1}{4!\, z^2} + \cdots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, поэтому $z = 0$ – существенно особая точка. Вычет в этой точке равен коэффициенту $c_{-1} = \frac{1}{3!}$, т.е. $res\, f(0) = \frac{1}{3!}$. По основной теореме о вычетах получаем ответ:

$$\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot res\, f(0) = \frac{2\pi i}{3!} = \frac{\pi i}{3}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{|z|=3} \frac{1}{z^5+4z^3} dz$.

Решение. Особые точки функции находятся из решения уравнения $z^5 + 4z^3 = 0$, т.е. $z^3(z+2i)(z-2i) = 0$. Получаем,

$z_1 = 0$ – полюс третьего порядка,

$z_{2,3} = \pm 2i$ – полюсы первого порядка.

В области $D: |z| < 3$

функция $f(z) = \frac{1}{z^5+4z^3}$ имеет три и.о.т. $z_1 = 0, z_{2,3} = \pm 2i$

Найдем вычеты в полюсах первого порядка, т.е. в точках z_2, z_3:

$$res\, f(2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(2i)^3 4i} = \frac{1}{32},$$

$$res\, f(-2i) = \lim_{z\to -2i} \frac{(z+2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(-2i)^3(-4i)} = \frac{1}{32}.$$

Найдем вычет в точке $z_1 = 0$ (это полюс третьего порядка), применяем формулу

$$res f(z_0) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^2}{dz^2} [f(z)(z-z_0)^3].$$

Тогда

$$res\, f(0) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{1\cdot z^3}{z^3(z^2+4)}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left[-\frac{2z}{(z^2+4)^2}\right] =$$

$$= -\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z^2+4)^2} = -\lim_{z\to 0} \frac{-3z^2+4}{(z^2+4)^3} = -\frac{1}{16}.$$

Тогда

$$\int_{|z|=3} \frac{1}{z^5+4z^3}\,dz = 2\pi i\big(res\, f(2i) + res\, f(-2i) + res\, f(0)\big) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32} - \frac{1}{16}\right) = 0.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{|z-3|=1} (z-3)^3 cos\frac{1}{z-3}\,dz$.

Решение. Изолированная особая точка $z=3$.

В области D: $|z-3|<1$

функция $f(z) = (z-3)^3 cos\frac{1}{z-3}$ имеет данную и.о.т.

Найдем вычет.

В данном случае нужно разложить функцию в ряд Лорана

$$f(z) = (z-3)^3\left(1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \right.$$

$$\left. +\ldots\right) = (z-3)^3 - \frac{(z-3)}{2!} + \frac{1}{4!\,(z-3)} - \frac{1}{6!\,(z-3)^3} + \ldots$$

В данном случае главная часть ряда Лорана имеет бесконечное количество слагаемых. Тогда изолированная особая точка $z=3$ является существенно особой точкой. Находим коэффициент при $(z-3)^{-1}$, значит вычет функции $res\, f(3) = \frac{1}{4!}$.

Тогда $\int_{|z-3|=1} (z-3)^4 cos\frac{1}{z-3}\,dz = 2\pi i \cdot res\, f(3) = 2\pi i\left(\frac{1}{4!}\right)$.

Домашнее задание.

Учебно-методическое пособие «Теория функций комплексного переменного», часть 1. Задача №1.16.

Пособие размещено на сайте кафедры ВМ-2
http://vm-2.mozello.ru
раздел «Математический анализ. 4 семестр».