Лекция 10

5. Сферические и цилиндрические электромагнитные волны

5.1 Решение волнового уравнения для сферической и цилиндрической волн

Используем введенное в подразделе 3.4. первичное определение сферической и цилиндрической волн, как простейших решений однородного уравнения Гельмгольца в сферических и цилиндрических координатах. Рассуждения проводятся в последовательности, аналогичной 4.1. Вектор напряженности электрического поля в общем виде можно представить как

$$\vec{E} = E_\theta \vec{\theta}_0 + E_\phi \vec{\phi}_0 + E_r \vec{r}_0$$ - в сферических координатах

$$\vec{E} = E_\phi \vec{\phi}_0 + E_r \vec{r}_0 + E_z \vec{z}_0$$ - в цилиндрических координатах

Оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} ctg\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$ - в сферических координатах

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ - в цилиндрических координатах.

Окрестность r=0 исключается из области, в которой ищется решение. Тогда уравнения Гельмгольца могут иметь следующий простейший вид

$$\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial r} + k^2 E_\theta = 0$$ - в сферических координатах. (5.1)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + k^2 E_z = 0$$ - в цилиндрических координатах. (5.2)

Общее решение (5.1) имеет вид

$$E = A\frac{e^{ar}}{r},$$

где A и a – неизвестные постоянные интегрирования.

Подставляя общее решение в соответствующие уравнения вычисляем постоянные интегрирования и получаем решения в следующем виде

$$E_\theta = A_1\frac{e^{-jkr}}{r} + A_2\frac{e^{jkr}}{r}$$ - в сферических координатах; (5.3)

$$E_z = A_1\frac{e^{-jkr}}{r} + A_2\frac{e^{jkr}}{r}$$ - в цилиндрических координатах. (5.4)

Анализ показывает, что фазовый фронт волны (5.3) имеет форму сферы, а волны (5.4) – форму цилиндра. Обычно эти свойства используют в качестве физического определения сферической и цилиндрической волн.

Сферическая волна – волна с фазовым фронтом в виде сферы.

Цилиндрическая волна – волна с фазовым фронтом в виде цилиндра.

Как и в случае плоских волн решения (5.3) и (5.4) состоят из двух волн, распространяющихся в различных направлениях. Члены, содержащие сомножитель A_1, распространяются от области *r=0* в бесконечность. Эти волны называются расходящимися. Члены, содержащие сомножитель A_2 распространяются из бесконечности в область *r=0*. Такие волны называются сходящимися. Источники, создающие расходящиеся волны, находятся в области вблизи *r=0*, источники, создающие сходящиеся волны удалены на бесконечность. Поскольку источники волн пространственно разделены в дальнейшем можно рассматривать только расходящиеся волны. Выражения для комплексных амплитуд магнитного поля можно получить из (5.3), (5.4) используя уравнение Максвелла.

Сферические и цилиндрические монохроматические волны имеют ряд свойств, совпадающих со свойствами плоских волн:

-все волны являются поперечными;

-все волны обладают поляризацией;

-все волны имеют одинаковые численные значения *k*, $\lambda, W, V_ф$;

-все волны обладают общими особенностями в средах с потерями.

В то же время, ряд свойств сферических, цилиндрических и плоских волн не совпадают:

-все волны имеют различные формы фазовых фронтов;

-в среде без потерь амплитуда плоской волны постоянна в пространстве, амплитуда сферической волны убывает как r^{-1} при удалении от точки начала координат в любом направлении, амплитуда цилиндрической волны убывает как r^{-1} при удалении от оси *z*.

Так как сферические и цилиндрические волны являются решениями однородного уравнения Гельмгольца в бесконечном однородном пространстве, то они являются собственными функциями уравнения. Поэтому любое поле в свободном пространстве можно представить в виде разложения не только по плоским, но и по сферическим и цилиндрическим волнам подобно тому, как это показано в 4.7.

Все рассмотренные волны являются физически не реализуемыми. Так как амплитуда плоской волны одинакова в бесконечном пространстве, а амплитуда цилиндрической волны постоянна вдоль всей бесконечной оси *z*, то из теоремы Умова - Пойнтинга следует, что волна с малой конечной амплитудой будет переносить бесконечную мощность, что физически не реально.

Сферические волны переносят мощность конечной величины, но они также физически не реальны из-за свойства поляризации электромагнитного поля. Рассмотрим это на примере рис. 5.1.

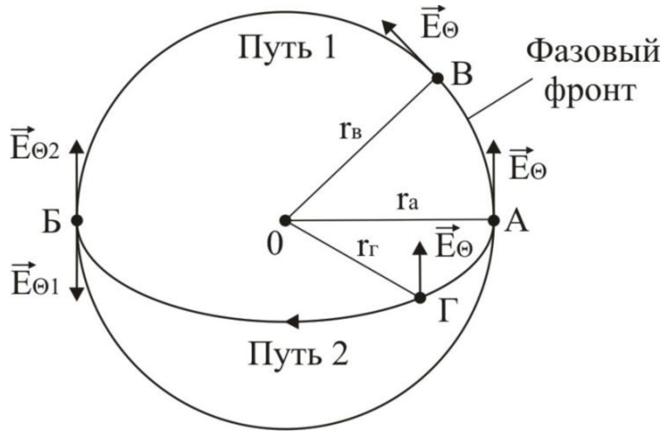

Рис. 5.1. Фазовый фронт сферической волны.

На рисунке показан фазовый фронт сферической волны. Значения фазы поля должны быть одинаковы во всех точках фронта. Пусть в некоторой точке *А* электрическое поле характеризуется вектором $\vec{E}_\theta$, показанным на рис. 5.1.

Рассмотрим, какой должна быть ориентация вектора в диаметрально противоположенной точке *Б*. Для этого по поверхности фазового фронта проложим два пути. Путь 1 – меридиональный и путь 2 – экваториальный. В каждой точке пути вектора $\vec{E}_\theta$ должны быть такими же как в исходной точке *А*. Так в промежуточной точке *В* первого пути вектор $\vec{E}_\theta$ должен быть перпендикулярен радиусу и направлен в соответствующую сторону. Тогда в точке *Б* вектор $\vec{E}_\theta$ займет положение $\vec{E}_{\theta 1}$. В промежуточной точке *Г* второго пути $\vec{E}_\theta$ также перпендикулярен радиусу и направлен в соответствующую сторону. В точке *Б* этот вектор займет положение $\vec{E}_{\theta 2}$. Так как $\vec{E}_{\theta 1} \neq \vec{E}_{\theta 2}$, то это свидетельствует о невозможности физического создания идеальных сферических волн.

Реальные электромагнитные поля существуют в виде, похожем на идеальные сферические волны. Отличие заключается в том, что амплитуда реальных полей зависит от угловых координат θ, φ и в каких-то направлениях обращается в нуль.

5.2 Условия представления сферических и цилиндрических волн в виде квазиплоских волн

Плоские волны имеют более простую пространственную структуру, чем сферические и цилиндрические волны, и описываются более простыми соотношениями. Это же выделяет плоские волны по отношению к реальным электромагнитным полям. Если электродинамическая задача позволяет применить модель плоской волны для описания поля, то это позволяет получить решение более простыми путями. Рассмотрим условия представления сферической волны в виде квазиплоской. Используем представление, показанное на рис.5.2.

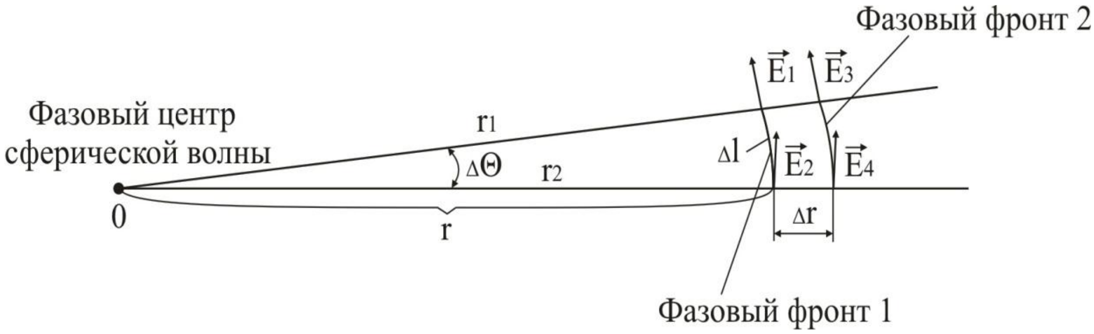

Рис.5.2 Определение условий применимости квазиплоской модели.

Пусть из фазового центра O распространяется расходящаяся сферическая волна. Выделим на удалении r от центра объём при помощи плоских границ проходящих через лучи r_1,r_2 и r_3,r_4 (которые не показаны на рисунке), и помощи участков двух фазовых фронтов, разнесённых на расстояние Δr. Пусть угол между лучами r_1,r_2 и r_3,r_4 равен $\Delta\theta$, а угол между лучами r_1,r_3 и r_2,r_4 составляет $\Delta\phi$.

Из-за сферичности фазовых фронтов вектора $\vec{E}_1,\vec{E}_2$ и $\vec{E}_3$, $\vec{E}_4$, характеризующие поле в крайних точках выделенного объема не параллельны, максимальный угол между ними составляет $\Delta\theta$ или $\Delta\phi$. Но в случае, когда $\Delta\theta$ и $\Delta\phi$ одновременно малы, не параллельность векторов будет также пренебрежимо мала. Малые углы $\Delta\theta$ и $\Delta\phi$ будут в том случае, когда поперечные размеры объема $\Delta l << r$. При выполнении этого условия в пределах выделенного объема фазовые фронты сферической волны можно считать квазиплоскими.

Амплитуда поля сферической волны в выделенном объеме зависит от положения точки наблюдения.

Амплитуда поля изменяеться в пределах $E_0 / r \div E_0 /(r + \Delta r)$. Но в случае, когда $\Delta r << r$ изменением амплитуды поля в выделенном объеме можно пренебречь.

Поэтому, при одновременном выполнении условий

$$\Delta l << r \text{ и } \Delta r << r \qquad (5.5)$$

поле сферической волны в пределах выделенного объема можно считать квазиплоским. Например, если в пределах объема находиться приемная антенна, то с высокой точностью можно считать, что на неё падает не сферическая, а плоская волна.

Такие же условия можно применять при замене реальных полей моделью квазиплоской волны.