

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷理科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $z = 5 + i$ ，则 $i(\bar{z} + z) =$ ()

- A. $10i$ B. $2i$ C. 10 D. 2

2. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\}$ ，则 $\partial_A(A \cap B) =$ ()

- A. $\{1, 4, 9\}$ B. $\{3, 4, 9\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3, 5\}$

3. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x - 3y - 3 \geq 0 \\ x - 2y - 2 \leq 0 \\ 2x + 6y - 9 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x - 5y$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 0 C. $-\frac{5}{2}$ D. $-\frac{7}{2}$

4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_5 = S_{10}$ ， $a_5 = 1$ ，则 $a_1 =$ ()

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{7}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{7}{11}$

5. 已知双曲线的两个焦点分别为 $(0, 4), (0, -4)$ ，点 $(-6, 4)$ 在该双曲线上，则该双曲线的离心率为 ()

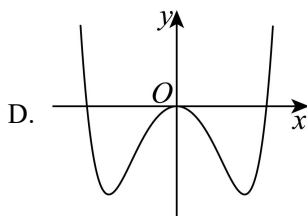
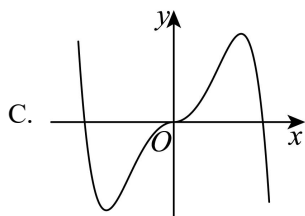
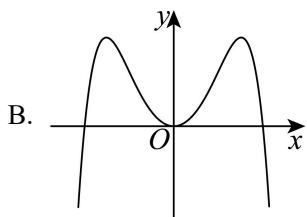
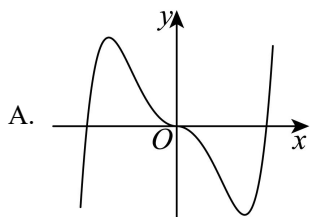
- A. 4 B. 3 C. 2 D. $\sqrt{2}$

6. 设函数 $f(x) = \frac{e^x + 2\sin x}{1+x^2}$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为

()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8, 2.8]$ 的图象大致为 ()



8. 已知 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. $2\sqrt{3} + 1$ B. $2\sqrt{3} - 1$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $1 - \sqrt{3}$

9. 设向量 $\vec{a} = (x+1, x)$, $\vec{b} = (x, 2)$, 则 ()

- A. “ $x = -3$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的必要条件 B. “ $x = 1 + \sqrt{3}$ ”是“ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ”的必要条件
C. “ $x = 0$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的充分条件 D. “ $x = -1 + \sqrt{3}$ ”是“ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ”的充分条件

10. 设 α, β 为两个平面, m, n 为两条直线, 且 $\alpha \cap \beta = m$. 下述四个命题:

- ①若 $m \parallel n$, 则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \parallel \beta$ ②若 $m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$ 或 $n \perp \beta$
③若 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$ ④若 n 与 α, β 所成的角相等, 则 $m \perp n$

其中所有真命题的编号是 ()

- A. ①③ B. ②④ C. ①②③ D. ①③④

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $B = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = \frac{9}{4}ac$, 则 $\sin A + \sin C =$ ()

- A. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$ B. $\frac{\sqrt{39}}{13}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

12. 已知 b 是 a, c 的等差中项, 直线 $ax + by + c = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 4 D. $2\sqrt{5}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\left(\frac{1}{3} + x\right)^{10}$ 的展开式中, 各项系数中的最大值为_____.

14. 已知圆台甲、乙的上底面半径均为 r_1 , 下底面半径均为 r_2 , 圆台的母线长分别为 $2(r_2 - r_1), 3(r_2 - r_1)$, 则圆台甲与乙的体积之比为_____.

15. 已知 $a > 1$ 且 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

16. 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1、2、3、4、5、6, 从中无放回地随机取 3 次, 每次取 1 个球. 记 m 为前两次取出的球上数字的平均值, n 为取出的三个球上数字的平均值, 则 m 与 n 之差的绝对值不大于 $\frac{1}{2}$ 的概率为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 题~第 21 题为必考题, 每个考题考生必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. 某工厂进行生产线智能化升级改造, 升级改造后, 从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验, 数据如下:

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100

总计	96	52	2	150
----	----	----	---	-----

(1) 填写如下列联表:

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异? 能否有 99% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异?

(2) 已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p = 0.5$, 设 \bar{p} 为升级改造后抽取的 n 件产品的优级品率. 如果

$\bar{p} > p + 1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, 则认为该工厂产品的优级品率提高了, 根据抽取的 150 件产品的数据, 能否认为

生产线智能化升级改造后, 该工厂产品的优级品率提高了? ($\sqrt{150} \approx 12.247$)

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

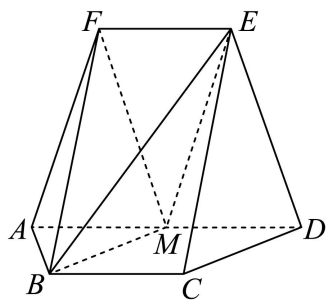
$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $4S_n = 3a_n + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = (-1)^{n-1}na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 如图, 在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中, 四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形, $EF \parallel AD, BC \parallel AD$, $AD = 4, AB = BC = EF = 2$, $ED = \sqrt{10}, FB = 2\sqrt{3}$, M 为 AD 的中点.



(1) 证明: $BM \parallel$ 平面 CDE ;

(2) 求二面角 $F-BM-E$ 的正弦值.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在 C 上, 且 $MF \perp x$ 轴.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $P(4, 0)$ 的直线交 C 于 A, B 两点, N 为线段 FP 的中点, 直线 NB 交直线 MF 于点 Q , 证明: $AQ \perp y$ 轴.

21. 已知函数 $f(x) = (1 - ax) \ln(1 + x) - x$.

(1) 当 $a = -2$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分, 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将所选题号涂黑, 多涂、错涂、漏涂均不给分, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \rho \cos \theta + 1$.

(1) 写出 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 $l: \begin{cases} x = t \\ y = t + a \end{cases}$ (t 为参数), 若 C 与 l 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2$, 求 a .

[选修 4-5: 不等式选讲]

23. 已知实数 a, b 满足 $a + b \geq 3$.

(1) 证明: $2a^2 + 2b^2 > a + b$;

(2) 证明: $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$.

绝密★启用前

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷理科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

【1 题答案】

【答案】A

【2 题答案】

【答案】D

【3 题答案】

【答案】D

【4 题答案】

【答案】B

【5 题答案】

【答案】C

【6 题答案】

【答案】A

【7 题答案】

【答案】B

【8 题答案】

【答案】B

【9 题答案】

【答案】C

【10 题答案】

【答案】A

【11 题答案】

【答案】C

【12 题答案】

【答案】C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

【13 题答案】

【答案】5

【14 题答案】

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【15 题答案】

【答案】64

【16 题答案】

【答案】 $\frac{7}{15}$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17 题~第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

【17 题答案】

【答案】（1）答案见详解

（2）答案见详解

【18 题答案】

【答案】（1） $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$

（2） $T_n = (2n-1) \cdot 3^n + 1$

【19 题答案】

【答案】（1）证明见详解；

(2) $\frac{4\sqrt{3}}{13}$

【20 题答案】

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 证明见解析

【21 题答案】

【答案】(1) 极小值为 0，无极大值.

(2) $a \leq -\frac{1}{2}$

(二) 选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答，并用 2B 铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分，如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

【22 题答案】

【答案】(1) $y^2 = 2x + 1$

(2) $a = \frac{3}{4}$

[选修 4-5：不等式选讲]

【23 题答案】

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析