1. 已知双曲线 $C: x^2-y^2=\lambda(\lambda>0)$，焦点 F 到其中一条渐近线的距离为 $\sqrt{3}$，

（1） 求 λ

解答 （略）$\lambda=3$ □

（2） 动点 M，N 在曲线 C 上，已知点 A(2,-1)，直线 AM，AN 分别与 y 轴相交的两点关于原点对称，点 Q 在直线 MN 上，$AQ\perp MN$，证明: 存在定点 T，使得 $|QT|$ 为定值,

解答

由（1）知，双曲线方程为 $x^2-y^2=3$，容易观察到，点 A(2,-1) 在双曲线上，

若 MN 的斜率存在，则 MN 的斜率为 k，令 M 的坐标为 (x_1,y_1)，N 的坐标为 (x_2,y_2)，

令 MN 方程为 $y=kx+m$，联立 $x^2-y^2=3$，消去 y，得 $x^2-(kx+m)^2=3$，

整理得 $(1-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$，

由韦达定理，$x_1+x_2=\dfrac{2km}{1-k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-m^2-3}{1-k^2}$，

由题意，直线 AM，AN 分别与 y 轴相交的两点关于原点对称，

令 AM 在 y 轴上的交点为 M_1，AN 在 y 轴上的交点为 N_1，

则 AM 方程为 $y+1=\dfrac{y_1+1}{x_1-2}(x-2)$，

令 $x=0$，得 M_1 的坐标为 $(0,\dfrac{(-2)(y_1+1)}{x_1-2}-1)$ 整理为 $(0,\dfrac{2y_1+x_1}{2-x_1})$，

同理，N_1 的坐标为 $(0,\dfrac{2y_2+x_2}{2-x_2})$，

由题意，M_1，N_1 关于原点对称，

所以 $\dfrac{2y_1+x_1}{2-x_1}+\dfrac{2y_2+x_2}{2-x_2}=0$，

那么 $\dfrac{2(kx_1+m)+x_1}{2-x_1}+\dfrac{2(kx_2+m)+x_2}{2-x_2}=0$，

整理得 $\dfrac{(2k+1)x_1+2m}{2-x_1}+\dfrac{(2k+1)x_2+2m}{2-x_2}=0$

整理得 $(2k+1)(x_1x_2)-(2k-m+1)(x_1+x_2)-4m=0$

代入 x_1+x_2，x_1x_2，得 $\dfrac{(2k+1)(-m^2-3)-(2k-m+1)\frac{2km}{1-k^2}-4m}{k^2-1}=0$，

整理得 $m^2+4km+6k+4m+3=0$，因式分解得 $(m+2k+1)(m+3)=0$，

解得 $m=-2k-1$ 或 $m=-3$，显然当 $M=-2k-1$ 时，MN 方程为 $y=k(x-2)-1$ 恒过点 A(2,-1)，不符合题意，

所以 $m=-3$，此时 MN 方程为 $y=kx-3$，恒过点 $(0,-3)$，

由圆的性质，点 Q 在以 AB 为直径的圆上，圆心为 AB 的中点，半径为 AB 的一半，那么圆心为 $(1,-2)$，半径为 $\sqrt{2}$，

所以点 Q 的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=2$，且 T 的坐标为 $(1,-2)$，$|QT|=\sqrt{2}$

所以存在定点 T，使得 $|QT|$ 为定值

□