Funções de crescimento

Sumario

- Introdução
- Função Exponencial
- Função Logística
- Função de Gompertz
- Função de Mitscherlich
- Função de MM
- Função deRichard
- Calibração
- Aplicações

Introdução

- Funções de crescimento representa a mudança no numero de células (podendo ser população, plantas, bactérias ou compras) durante um período de tempo, podendo ser representada da forma:
  - $\frac{df(t)}{dt} = r, f(t)$
- Vamos dividir em dois tipos de padrões:
  - Exponencial (J-shape)
  - Funções Sigmoides (S-shape)
- Aplicações
  - Muito utilizado na Biologia
    - Crescimento de gramíneas
    - População
    - Câncer
  - Investimento

Introdução

- Valor assimptótico é o valor máximo que o modelo pode, o calculo pode ser feito utilizando o limite de $t \to \infty$

- Ponto de inflexão é um ponto sobre a curva no qual a sua curvatura troca de sinal (a derivada de segunda ordem)
  - Caso seja positivo temos que a taxa estará crescendo
  - Caso seja negativo temos que a taxa estará decrescendo
- Pontos críticos é um ponto no domínio de um função onde a primeira derivada é nula
  - Onde a função atinge seu valor máximo ou mínimo e depois inverte.

Função Exponencial

- Forma Integral
- $y = y_0 e^{kt}$

Forma Diferencial

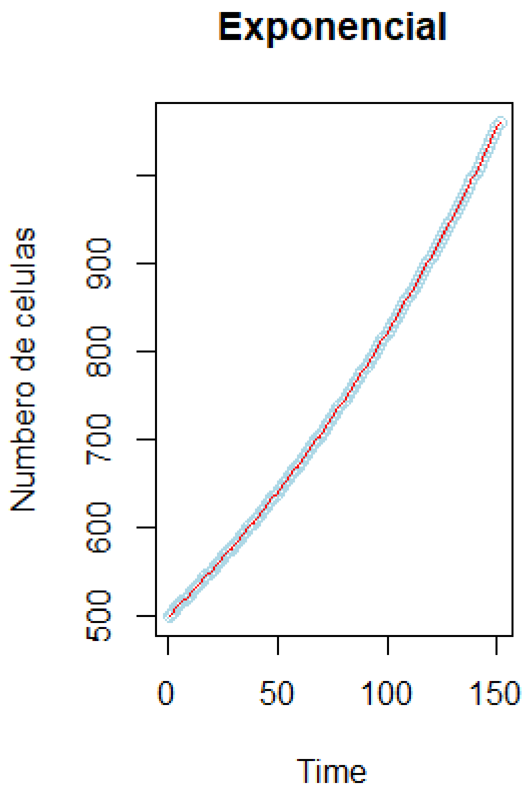
$$\frac{dy}{dt} = ky$$

- Onde: x_0 é o valor inicial em $t = 0$ e k é uma constante positiva ou negativa que determina a taxa de crescimento

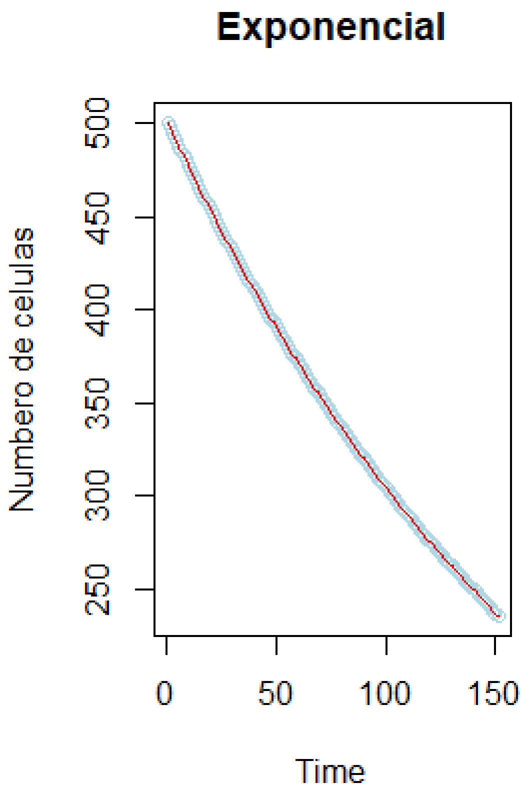
- Problemas do crescimento Exponencial é que não tem valor assintótico
  - Se k > 0 o limite tende a infinito
  - Se k < 0 o limite tende a zero

Gráficos Exponencial

- K >0



K < 0

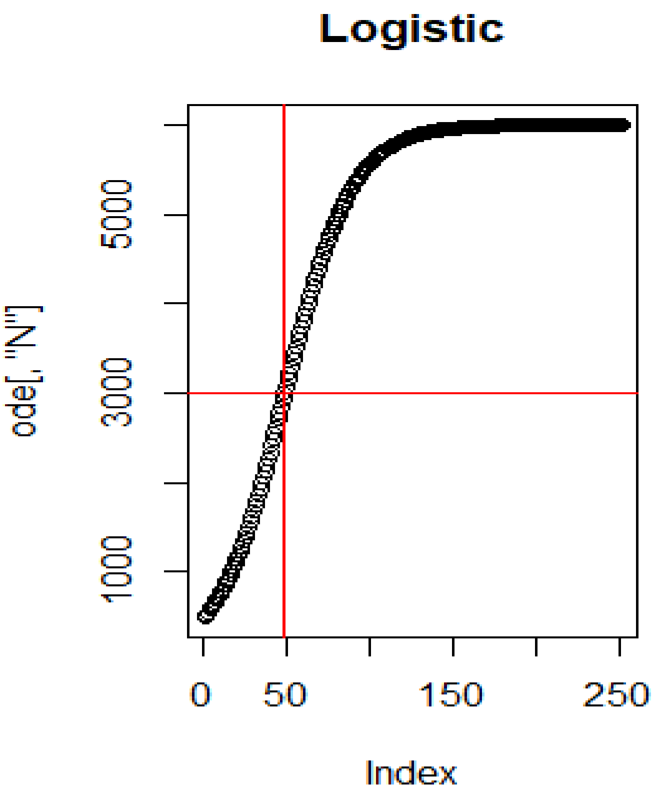


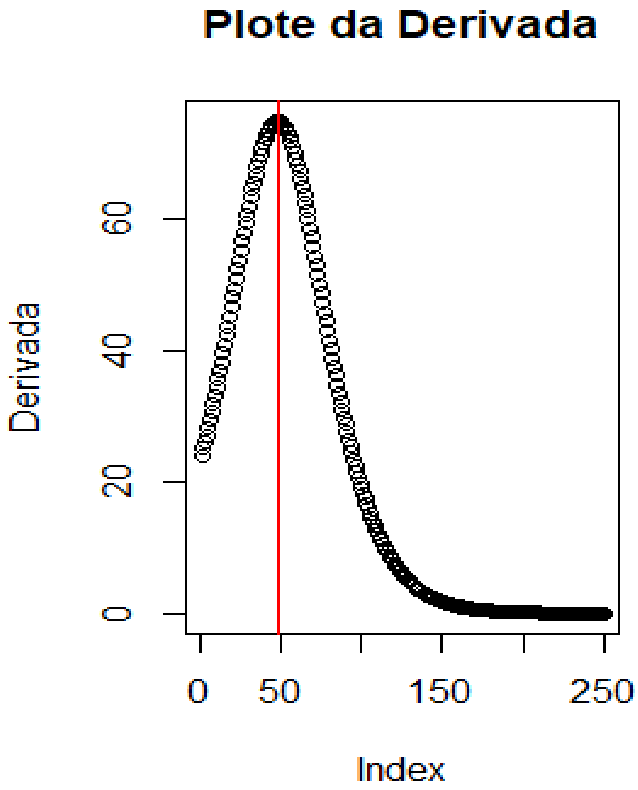
Função Logística

- *Foi um modelo ajustado do modelo exponencial, criado por Verhulst que na época estava criando um modelo de crescimento populacional.*
- *Forma integra* *Forma Diferencial*
- $y = \frac{L}{1+\alpha e^{-kt}}$ $\frac{dy}{dt} = \frac{ky}{L}(L - y)$
- Onde $k\ e\ \alpha$ > 1 são constantes positivas relacionados com a taxa de crescimento, L é a valor máximo que a função pode assumir, $\alpha = \left(\frac{L}{y_0}\right) - 1.$
- $\lim_{t \to \infty} y = L$
- $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k}{L}(L\ - 2y)\frac{dy}{dt}$
  - Ponto de inflexão $y_{inf} = \frac{L}{2}$ e $t_{inf} = \frac{\ln(\alpha)}{k}$

Gráficos

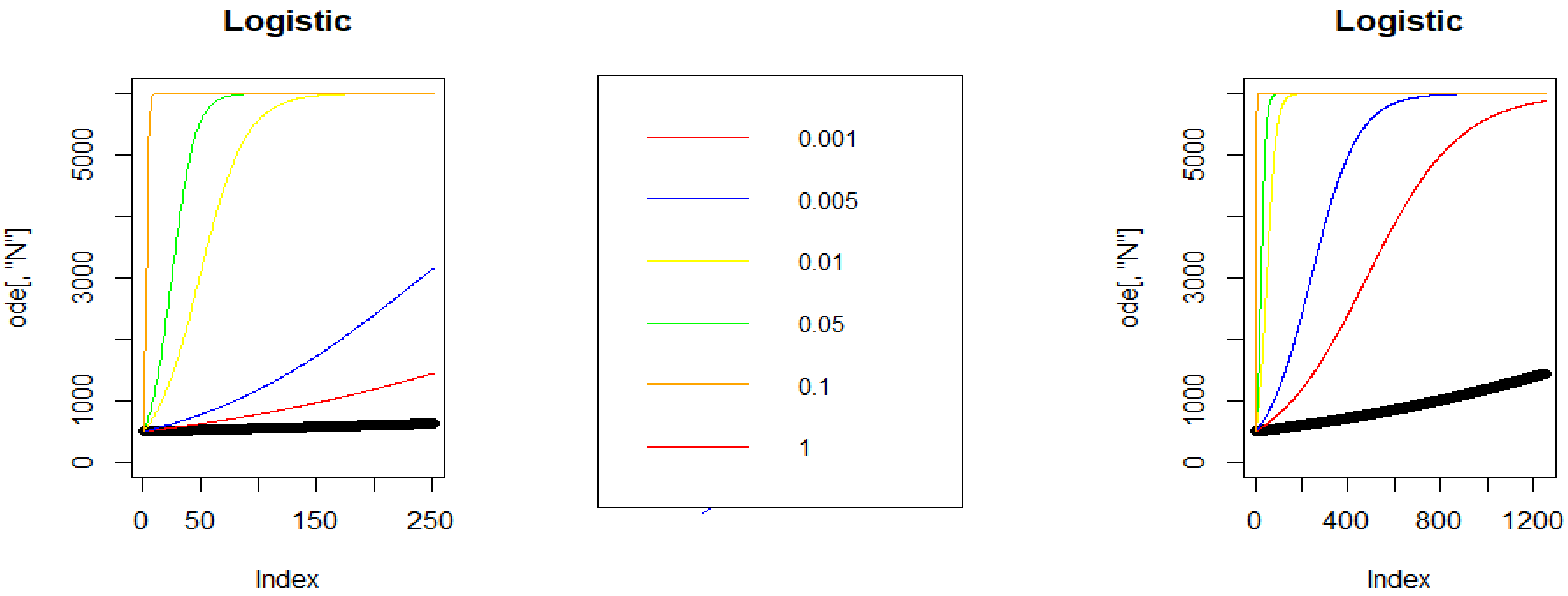
- $y_0 = 500, k = 0.05, L = 6000\ e\ 250\ iterações$
- $\alpha = \left(\frac{6000}{500}\right) - 1 = 11\ , y_{inf} = \frac{6000}{2} = 3000\ e\ t_{inf} = \frac{\ln(11)}{0.05} = 47.95$





Analise do parâmetro de crescimento

- Fazendo uma breve analise do parâmetro de crescimento k é possível realizar os plotes

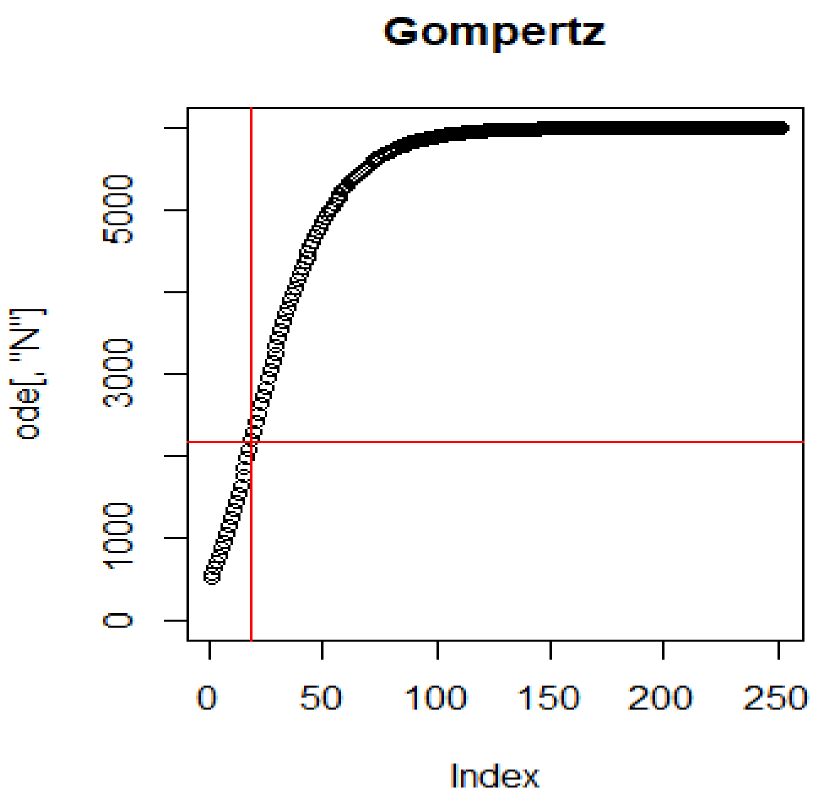


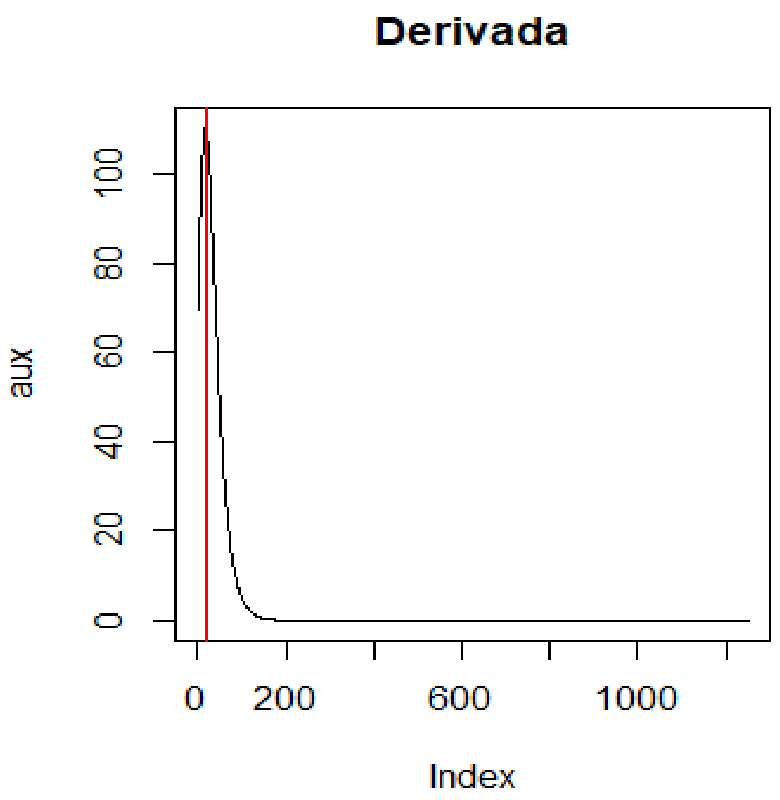
Função de Gompertz

- *O modelo foi criado para detalhar a lei de mortalidade humana, criado para a royal Society de Londres*
- *Forma integra* — *Forma Diferencial*
- $y = Le^{-\alpha e^{kt}}$ — $\frac{dy}{dt} = k * y * \ln\left(\frac{L}{y}\right)$
- Onde $k\ e\ \alpha$ > 1 são constantes positivas relacionados com a taxa de crescimento, L é a valor máximo que a função pode assumir , onde $\alpha = \ln(\frac{L}{y_o})$
- $\lim_{t\to\infty} y = L$
- $\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha k^2 e^{-kt}\left(\alpha e^{-kt} - 1\right)y$
  - $t_{inf} = \frac{\ln(\alpha)}{k}\ e\ y_{inf} = 0.37L$

Gráficos

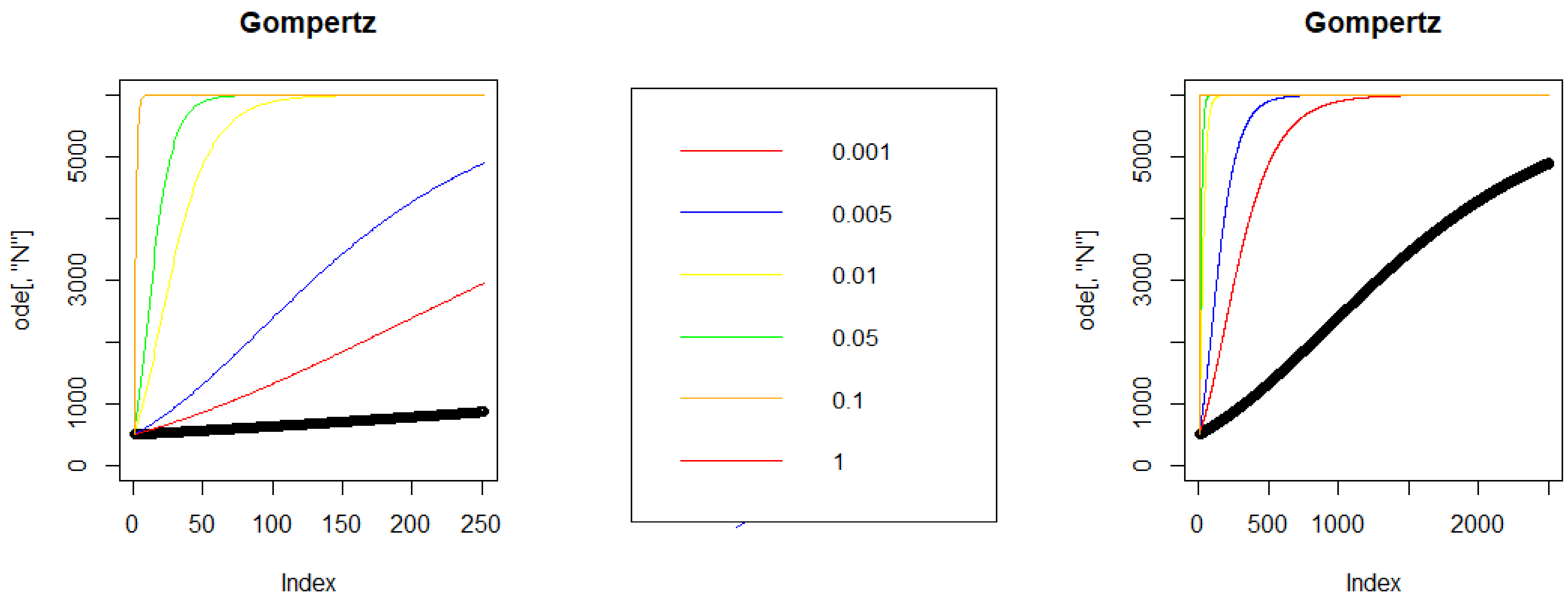
- $y_0 = 500, k = 0.05, L = 6000\ e\ 250\ iterações$
- $\alpha = ln\left(\frac{6000}{500}\right) = 2.484\ , y_{inf} = 0.36 * 6000 = 2160\ e\ t_{inf} = \frac{\ln(\alpha)}{0.05} = 47.95$





Analise do parâmetro de crescimento

- Fazendo uma breve analise do parâmetro de crescimento k é possível realizar os plotes



Função de Mitscherlich

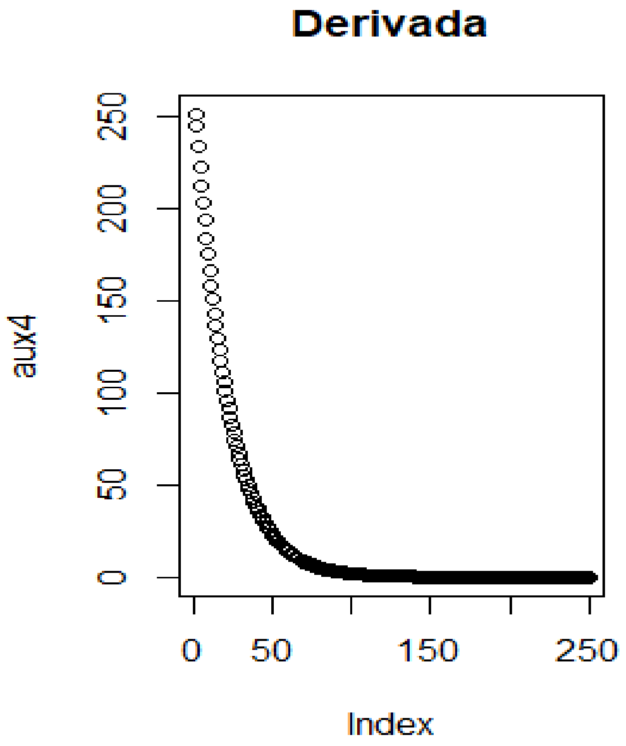
- *Forma integra*
- $y = L(1 - e^{-kt})$

Forma Diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - L)$$

- Onde k é constante positiva relacionada com a taxa de crescimento, L é a valor máximo que a função pode assumir.
- $\lim_{t \to \infty} y = L$
- Não tem ponto de inflexão
- Criou a equação para relacionar o crescimento

ao fornecimento de nutriente para as plantas.



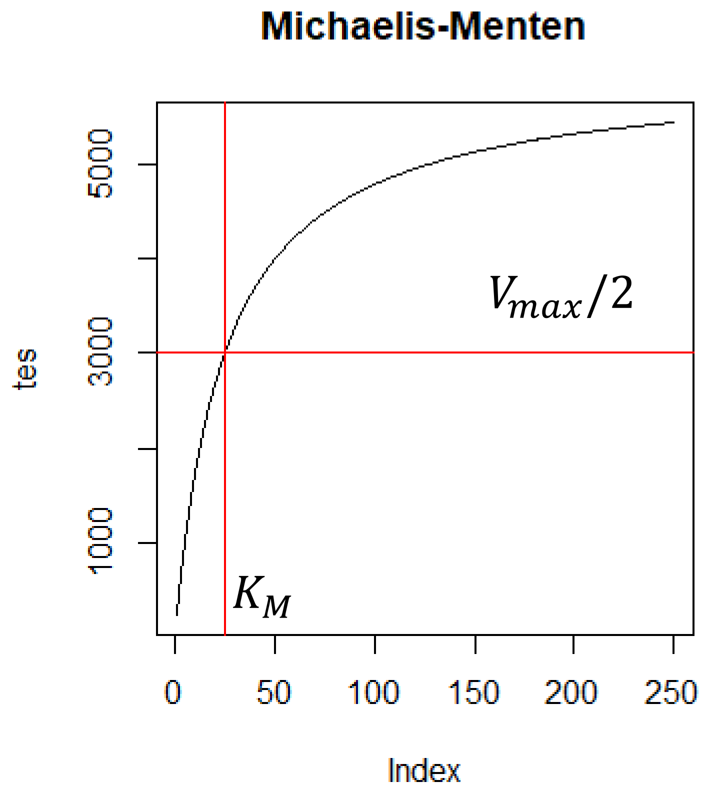
Função de Michaelis-Menten

- Um dos modelos mais conhecidos entre a relação de reações químicas entre enzimas
- $v = \frac{d[P]}{dt} = \frac{V_{max}[S]}{K_M+[S]}$
- Onde V_{max} representa a taxa máxima que o sistema pode atingir na saturação do substrato.K_Mé a concentração de substrato em que a taxa de reação é metade V_{max}. v é a taxa das reações enzimáticas em relação a concentração do substrato $[S]$.

Gráfico

- Utilizando o $V_{max} = 6000 \; e \; K_M = 25$

- No gráfico as retas vermelhas se encontram mostrando a relação entre a concentração do substrato e a taxa de reação

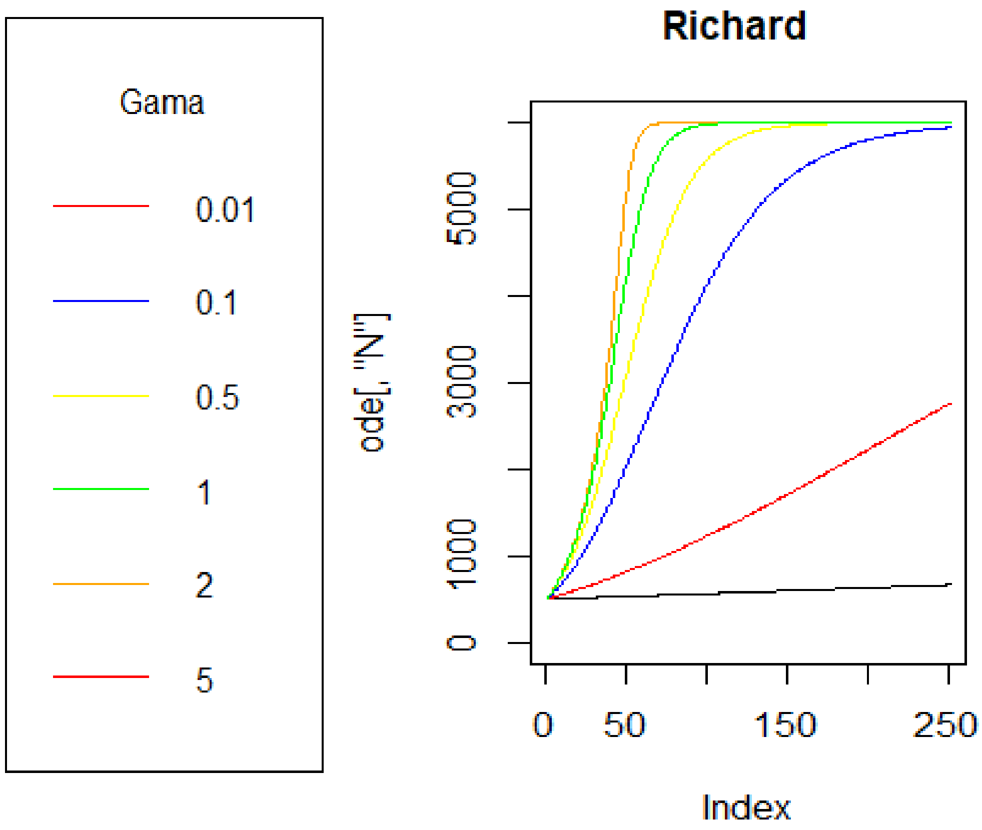


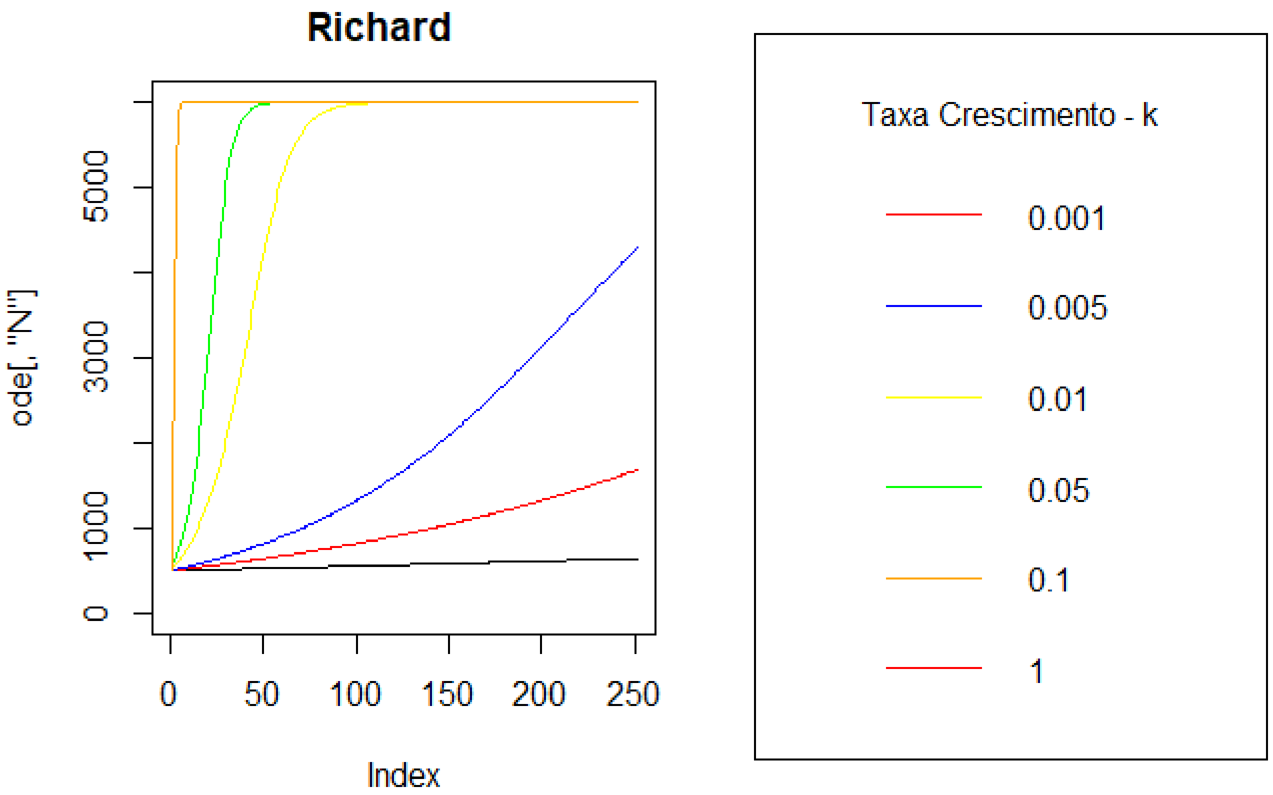
Função de Richard’s

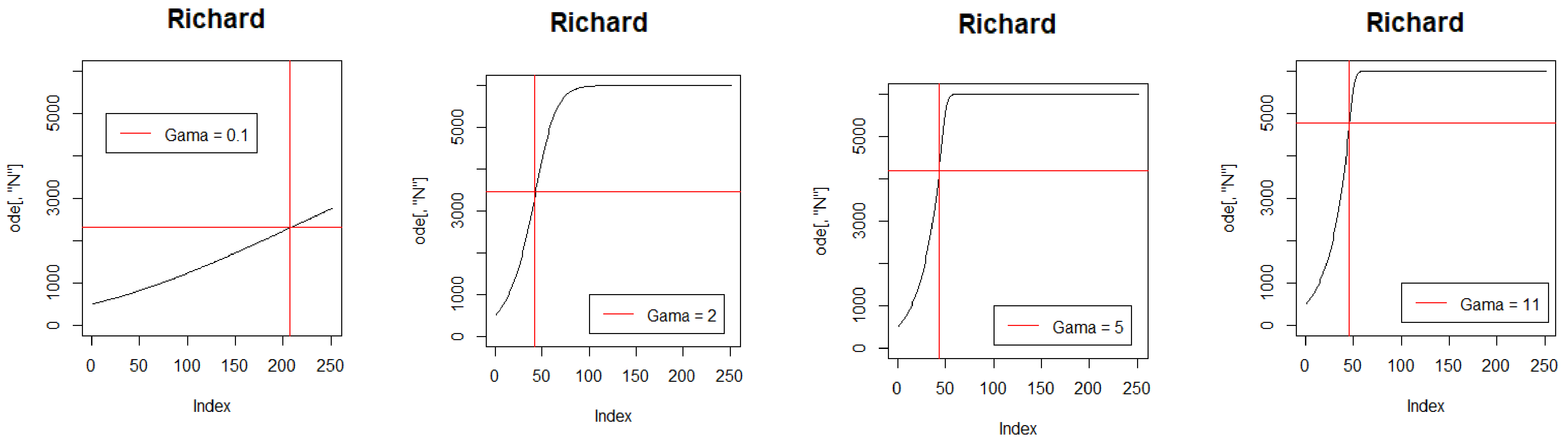
- *Foi criado para ser uma função de crescimento mais genérica.*
- *Forma integra* *Forma Diferencial*
- $y = \frac{L}{\left(1+\alpha e^{-k\gamma t}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}$ $\frac{dy}{dt} = ky\left[1 - \left(\frac{y}{L}\right)^{\gamma}\right]$
- Agora foi adiciona ϒ é um parâmetro que torna o ponto de inflexão variável e $\alpha = \left(\frac{L}{y_0}\right)^{\gamma} - 1.$
- $\lim_{t\to\infty} y = L$
- $\frac{d^2y}{dt^2} = -k\left[\left(\frac{y}{L}\right)^{\gamma}(\gamma+1) - 1\right]\frac{dy}{dt}$
  - Ponto de inflexão $y_{inf} = \frac{L}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}$ e $t_{inf} = \frac{-1}{\gamma k}\ln\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$

Comparação

- Mesmo valores utilizados anteriormente
  - $k = 0.05$ $\gamma = 2$

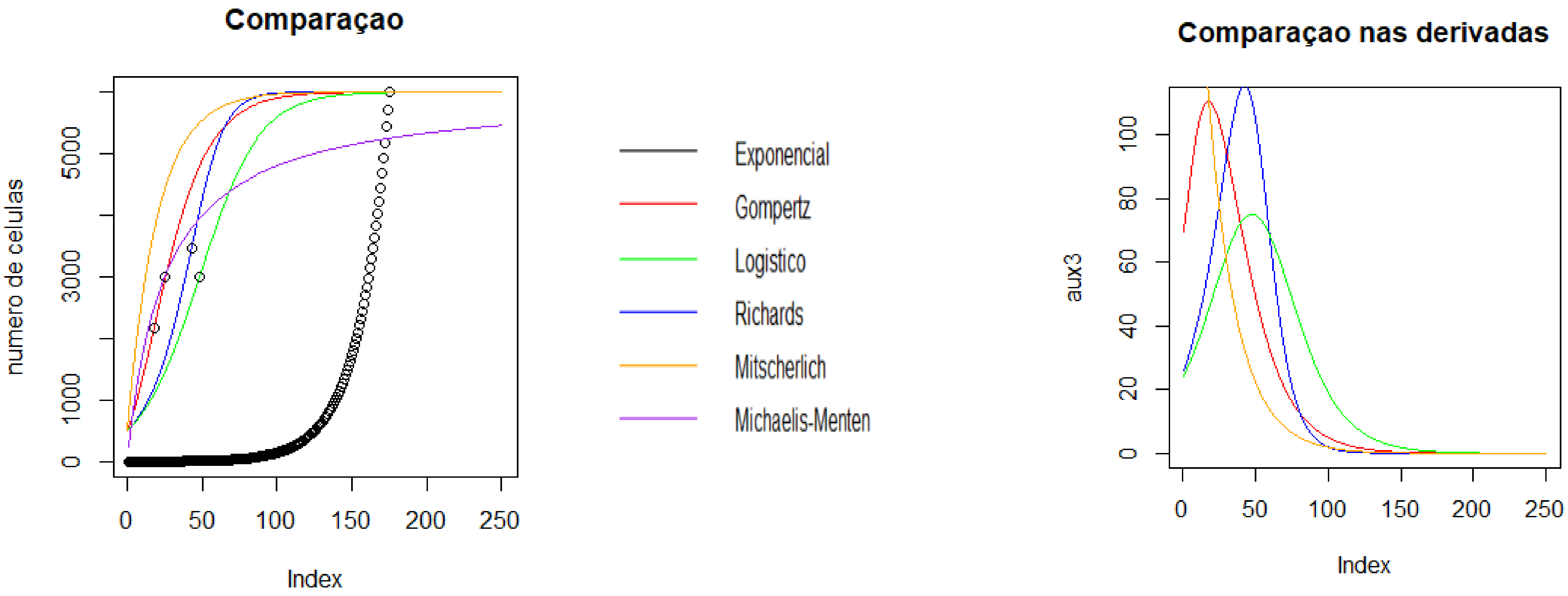






Diferenças de Gama

Gráficos comparando métodos



Calibração

- Geralmente esses parâmetros podem ser calibrados a modo de serem otimizados
- Para calibrar é necessário dados
- Primeiro calcularemos as somas dos quadrados do resíduo:
  - $\sum_{i=1}^{N}(x(i) - \hat{x}(i))^2$, onde $x(i)$ são os dados observados e $\hat{x}(i)$ são os dados calculados
- Agora a ideia é minimizar o resíduo utilizando algum método de otimização
  - Nelder-Mead

Aplicações

- Função Logística
  - Analysis of bacterial population growth using extended logistic Growth model with distributed delay
- Função de Gompertz
  - Growth curve by Gompertz nonlinear regression model in female and males in tambaqui (Colossoma macropomum)
- Função de Mitscherlich
  - The application of Mitscherlich's growth law pot method of soil testing to nutritional studies with raspberries and oats
- Função de Michaelis-Menten
  - Michaelis-Menten Kinetics under Spatially Constrained Conditions: Application to Mibefradil Pharmacokinetics
- Função de Richards
  - Comparison of three nonlinear and spline regression models for describing chicken growth curves

Referências

- Panik, Michael J. Growth curve modeling: theory and applications
- Guimarães, Daniel P e Castro, Luis H. R. Analise de Funções de Crescimento, EMBRAPA CPAC.
- Goshu,Ayele T., Koya, Purnachandra R.Derivation of inflection points of nonlinear regression curves - implications to statistics, American Journal of Theoretical and Applied Statistics 2013; 2(6): 268-272