Aplicações de modelos de efeitos mistos em modelagem e análises experimentais

Michel Colmanetti

Campinas/SP - 2019

Modelos de efeitos mistos

- Definição de modelos de efeitos mistos
- Variáveis aleatórias
- Ajuste de modelos
  - Modelagem da variância
  - Calibração de modelos
- Análise experimental

Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

- Lineares ou não lineares
- Parâmetros são associados com a população

$$Y = \beta_0 + \beta_1 * x + e$$

sendo: β_0 e β_1 *são efeitos fixos*

Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

- Parâmetros associados à unidade experimental de uma população

$$Y = (b_0 + b_1) + \beta_0 + \beta_1 * x + e$$

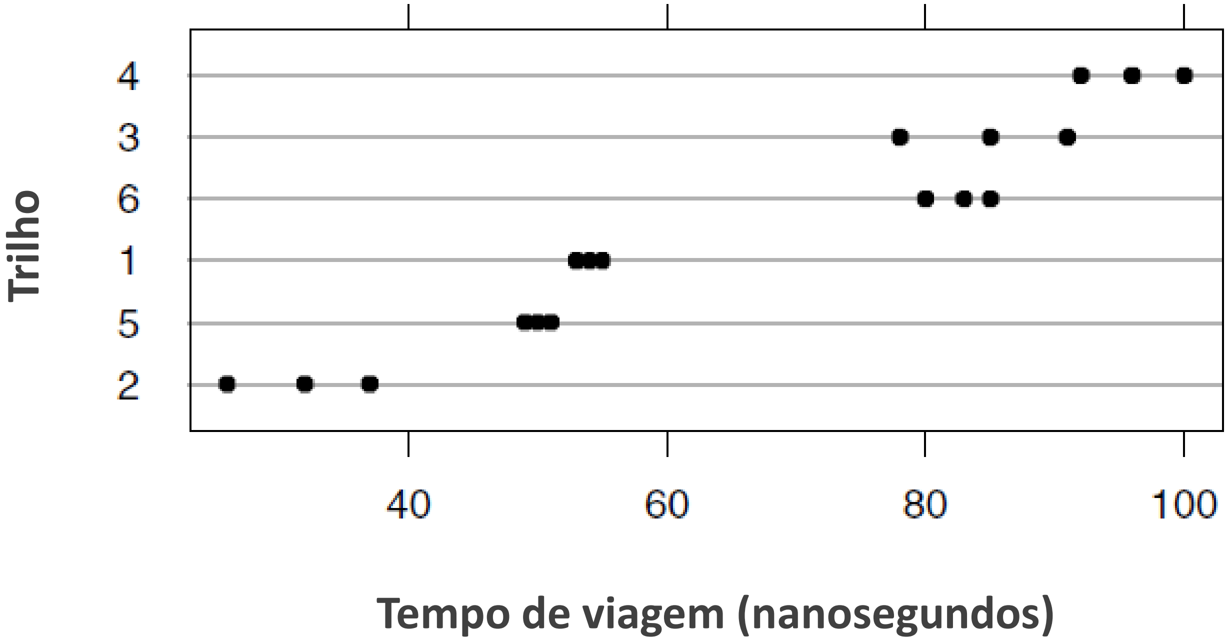
sendo: β_0 e β_1 *são efeitos fixos*; b_0 *e* b_1 *efeitos aleatórios*

- Modelos de efeitos mistos: efeitos fixos e aleatórios

Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

- Exemplo: teste de estresse longitudinal em trilhos (Devore, 2000)
- Experimento
  - Seis trilhos escolhidos aleatoriamente
  - Três medições no tempo



Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

- Questões:
  - O tempo médio de viagem para um trilho “típico”
  - Variação do tempo de viagem para cada trilho (variabilidade dentro dos trilhos)
  - Variação do tempo de viagem entre os trilhos (variabilidade entre os trilhos)

Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

- ***O tempo médio de viagem para um trilho "típico"***

$$y_{ij} = \beta + \epsilon_{ij}$$

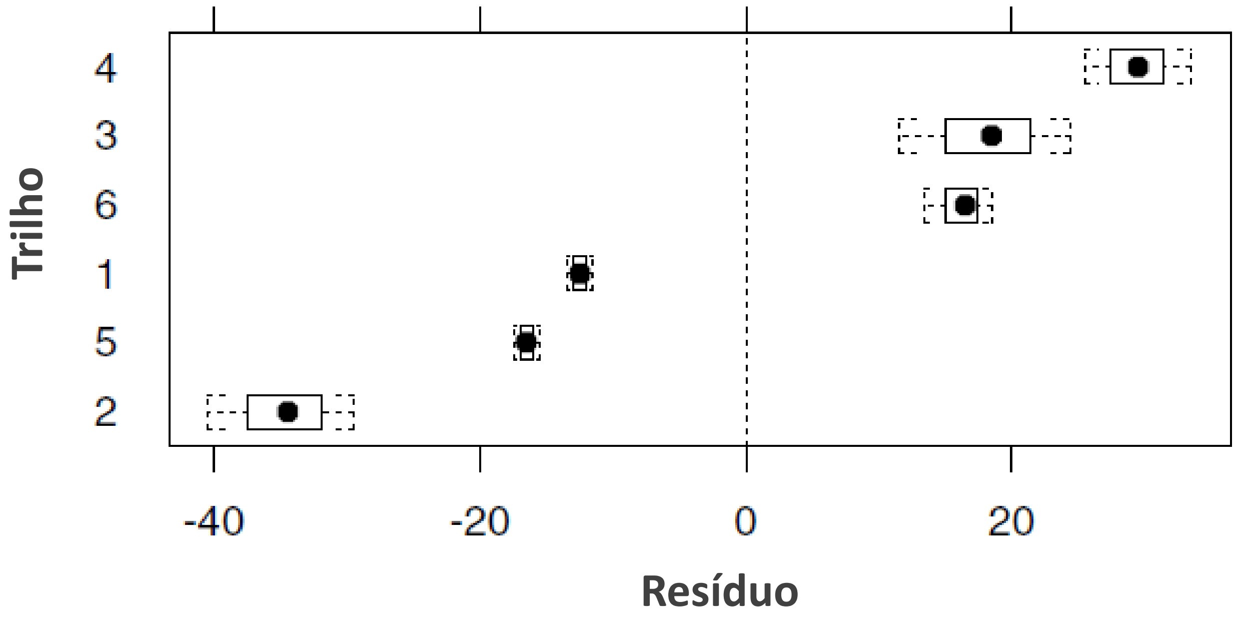
Onde y_{ij} corresponde ao tempo de viagem para cada observação *j* e trilho *i*; e $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$;

β representa a media do tempo de viagem de todos trilhos

Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

- ***O tempo médio de viagem para um trilho “típico”***
  - **β = 66.5**
  - $\hat{\sigma}$ = 23.645



Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

- ***Variação do tempo de viagem para cada trilho (variabilidade dentro dos trilhos)***

$$y_{ij} = \beta_i + \epsilon_{ij}$$

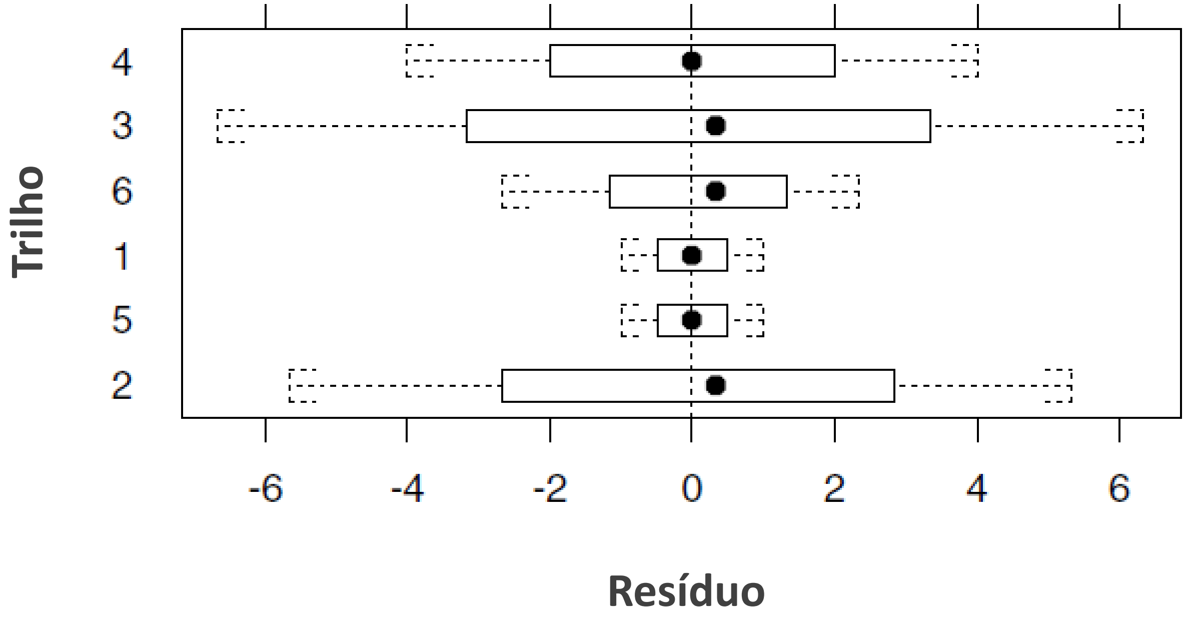
Onde y_{ij} corresponde ao tempo de viagem para cada observação j e trilho i; e $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

β_i há efeito do trilho i

Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

- ***Variação do tempo de viagem para cada trilho (variabilidade dentro dos trilhos)***
  - βi = média para cada trilho *i*
  - $\hat{\sigma}$ **= 4.0208**



Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

- Questões:
  - ✓O tempo médio de viagem para um trilho "típico"
  - ✓Variação do tempo de viagem para um único trilho (variabilidade dentro dos trilhos)
  - ***Variação do tempo de viagem entre os trilhos (variabilidade entre os trilhos)***

Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

- Questões:
  - ✓O tempo médio de viagem para um trilho “típico”
  - ✓Variação do tempo de viagem para um único trilho (variabilidade dentro dos trilhos)
  - ***Variação do tempo de viagem entre os trilhos (variabilidade entre os trilhos)***
- Modelos estão condicionados à amostra, mas o objeto de estudo é sempre uma população.

Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

- ***Variação do tempo de viagem entre os trilhos (variabilidade entre os trilhos)***

$$y_{ij} = \beta + b_i + \epsilon_{ij}$$

Onde y_{ij} corresponde ao tempo de viagem para cada observação j e trilho i; $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$; e $b_{ij} \sim N(0, \sigma_b^2)$

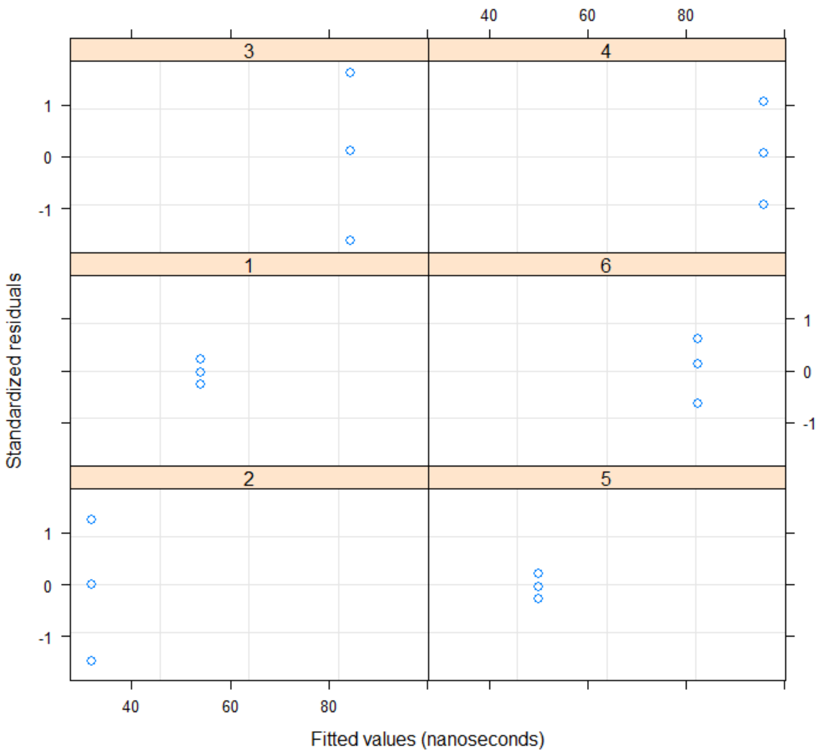
β é a media da população e b_i o efeito aleatório de cada trilho i, que varia em relação à media da população.

Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

Variação do tempo de viagem entre os trilhos (variabilidade entre os trilhos)

- $\beta = 66.5$
- b_i = *-12.4, -34.5, 18.0, 29.2, -16.4, 16.0*
- $\hat{\sigma} = 4.0208$
- $\boldsymbol{\sigma_b^2}$ **= 24.80547**



Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

- Modelos de efeitos mistos descreve uma relação entre a variável resposta e covariávies que estão agrupadas, e um ou mais fatores.

- Podem ser:

  - Dados longitudinais (Medidas repetidas)

  - Dados multi-hieráquicos

  - Design em blocos

Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

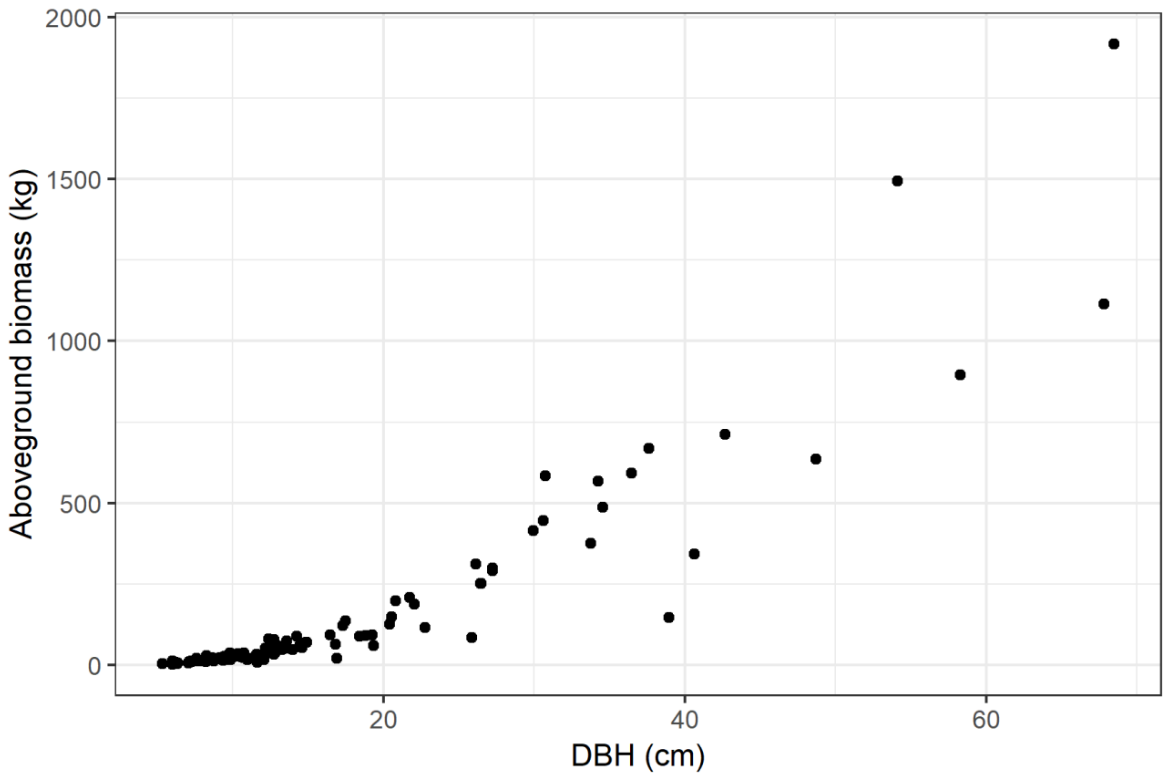
- **nlme**(*model*, *data*, *fixed*, *random*, *groups*, *start*, *correlation*, *weights*, *method*, …)
- *method* (Estimador): ML e REML
  - ML – Máxima verossimilhança (Default)
  - REML – Máxima verossimilhança restrita
- Distribuição Gaussiana

Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

Aplicação em biometria florestal:

- Volume/Biomassa florestal
  - I. Energia
  - II. Madeira
  - III. Celulose
  - IV. Estoque de carbono



Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

Modelo florestal clássico para biomassa/volume:

- $agb_i = \beta_1 . dbh_i^{\beta_2} . \epsilon_i$

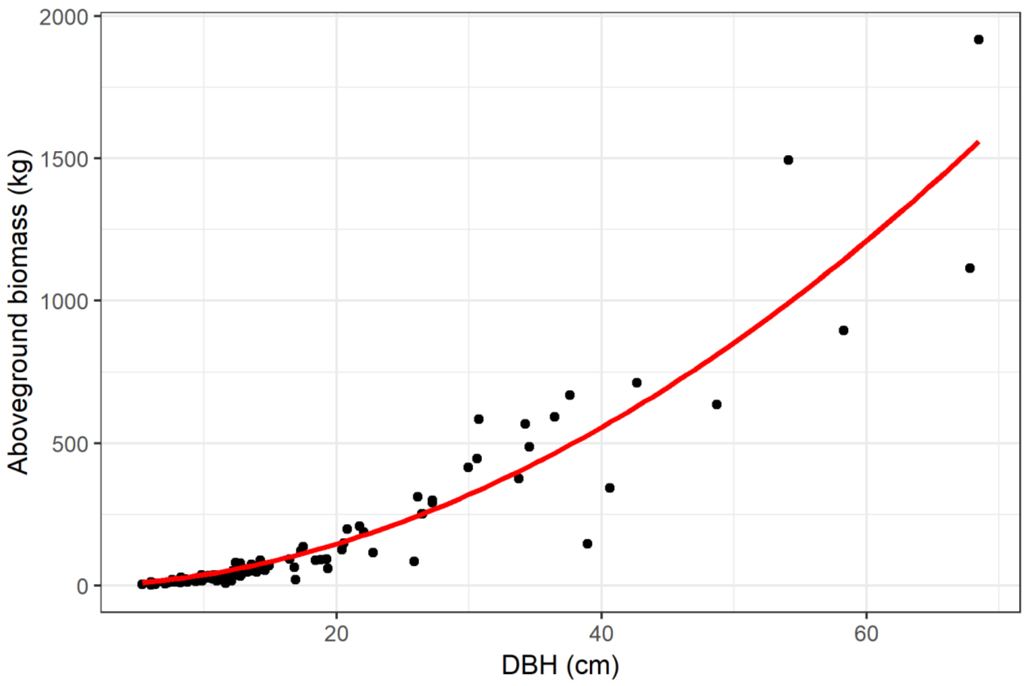
Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS

Modelo florestal clássico para biomassa/volume:

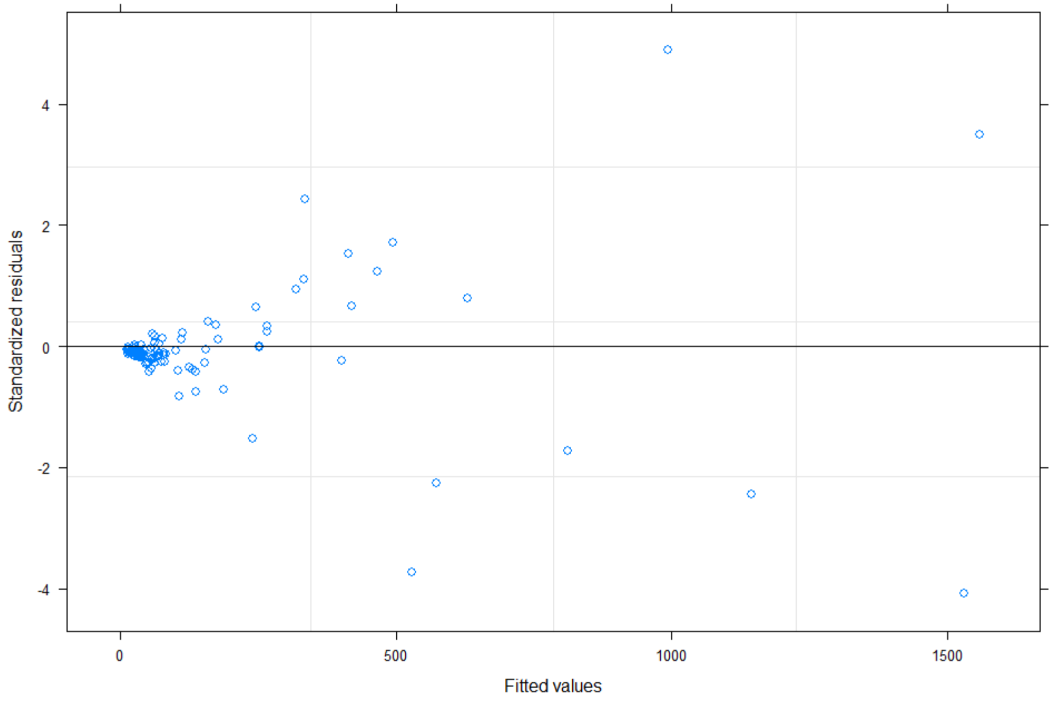
- $agb_i = \beta_1 . dbh_i^{\beta_2} . \epsilon_i$

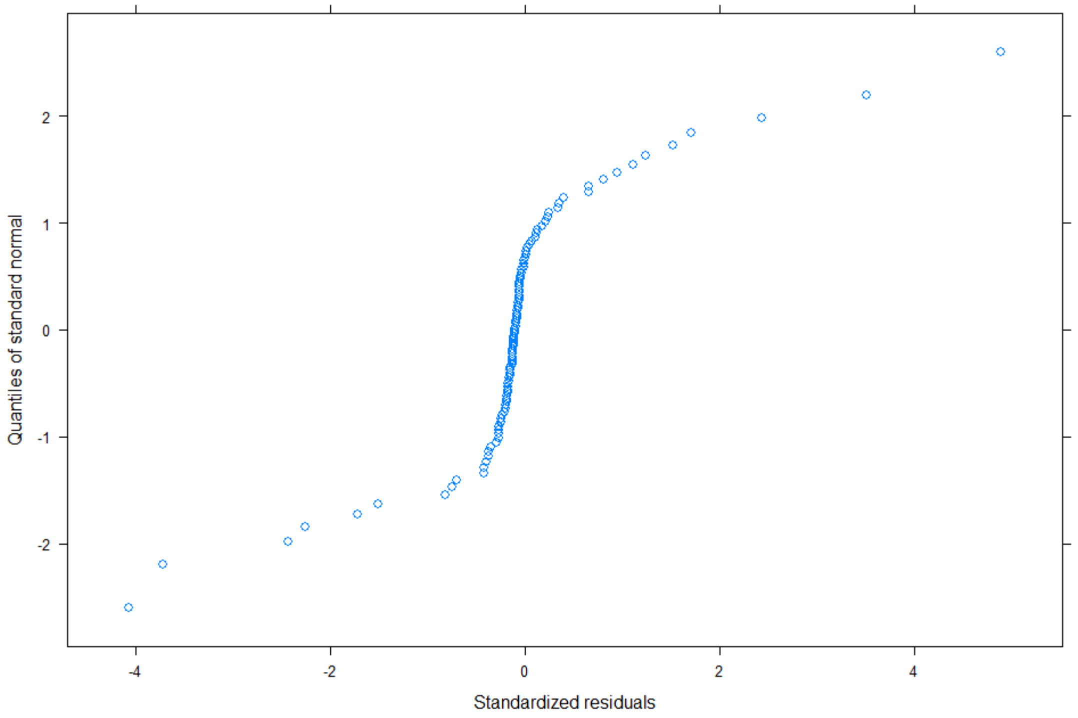
Estimador: OLS; $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$



Modelos de efeitos mistos

MODELOS ESTATÍSTICOS





Modelos de efeitos mistos

FLORESTAS NATIVAS

- Elevada diversidade de espécies
    - Heterogêneas
    - Inequiâneas

Modelos de efeitos mistos

FLORESTAS NATIVAS

LOCAL DE ESTUDO

- 0.8 ha
- 90 espécies
- 16 espécies = 73 % de árvores

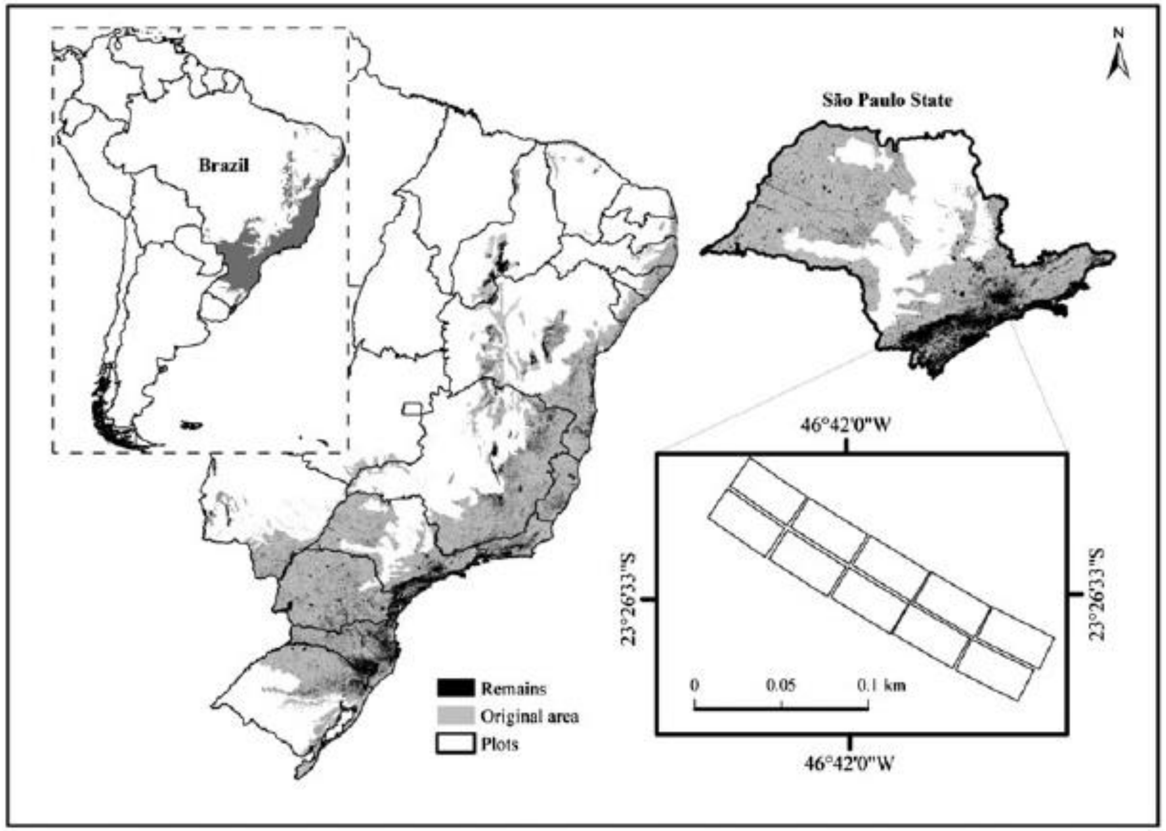


Figure 1. Plots on the study site located in Atlantic Forest near São Paulo, Brazil (souces: SOS Mata Atlântica, 2013; MMA, 2012; IBGE, 2010).

Modelos de efeitos mistos

FLORESTAS NATIVAS

Species	***dbh*** **(cm)**	***wsg*** **(g cm^{-3})**	***ht*** **(m)**	***hcb*** **(m)**	***agb*** **(kg)**	**Carbon (%)**
	Mean (sd)	**Mean (sd)**	**Mean (sd)**	**Mean (sd)**	**Mean (sd)**	**Mean (sd)**
*Alchorneasidifolia*Müll. Arg.[1]	18.8 (12.0)	0.45 (0.01)	9.9 (2.6)	4.2 (1.6)	182.4 (233.4)	45.6 (1.3)
*Allophyluspetiolulatus*Radlk.[3]	13.1 (5.7)	0.53 (0.02)	10.8 (1.4)	6.2 (1.4)	67.0 (71.2)	44.8 (0.7)
Cabraleacanjerana(Vell.) Mart.[3]	9.3 (1.9)	0.42 (0.04)	9.3 (1.0)	5.2 (1.8)	17.5 (7.74)	45.4 (1.3)
*Caseariasylvestris*Sw.[2]	13.2 (4.7)	0.55 (0.02)	9.4 (0.9)	4.0 (1.2)	64.1 (48.5)	45.0 (0.7)
Ceibaspeciosa(A. St.-Hil.)	32.1 (20.8)	0.31 (0.06)	12.3 (3.9)	8.4 (2.9)	294.8 (396.0)	42.9 (1.2)
*Croton floribundus*Spreng.[1]	16.8 (9.4)	0.53 (0.05)	12.4 (2.3)	7.1 (1.0)	153.6 (161.3)	45.3 (1.2)
*Cupaniaoblongifolia*Mart.[2]	12.9 (9.1)	0.68 (0.05)	8.0 (1.7)	3.1 (1.2)	100.4 (170.5)	44.1 (1.0)
*Jacaranda puberula*Cham.[2]*	12.9 (5.8)	0.34 (0.03)	9.7 (2.1)	5.8 (1.9)	44.2(54.9)	47.5 (1.5)
*Machaeriumvillosum*Vogel[3]*	15.3 (7.6)	0.58 (0.02)	11.3 (2.7)	6.8 (1.6)	104.6 (120.6)	45.5 (0.8)
Myrciasplendens(Sw.) DC.[2]	11.8 (3.4)	0.51 (0.03)	8.6 (2.4)	4.8 (1.1)	51.7 (27.6)	45.1 (0.8)
*Nectandraoppositifolia*Ness[2]	15.4 (7.5)	0.45 (0.05)	11.4 (2.2)	7.3 (1.5)	101.7 (96.9)	47.5 (1.0)
Peraglabrata(Schott) Poepp.	25.0 (23.6)	0.57 (0.06)	10.2 (3.9)	4.6 (1.8)	466.0 (701.8)	44.4 (0.8)
Piptadeniagonoacantha (Mart.) J. F.	20.3 (13.2)	0.58 (0.03)	13.9 (3.7)	8.0 (2.9)	250.1 (293.4)	45.5 (0.6)
*Sesseabrasiliensis*Toledo[3]	15.3 (4.6)	0.50 (0.07)	11.2 (2.4)	6.8 (2.7)	70.0 (42.4)	46.6 (1.7)
*Tetrorchidiumrubrivenium*Poepp.[2]	27.1 (20.1)	0.40 (0.03)	14.1 (3.0)	7.7 (1.8)	407.4 (536.1)	47.2 (0.8)
*Vochysiatucanorum*Mart.[2]	12.9 (4.7)	0.43 (0.03)	11.6 (2.7)	7.4 (2.1)	46.1 (34.6)	44.7 (0.9)
Overall	17.3 (13.0)	0.49 (0.10)	10.9 (3.0)	6.2 (2.4)	158.5 (297.7)	45.4 (1.6)

Modelos de efeitos mistos

FLORESTAS NATIVAS

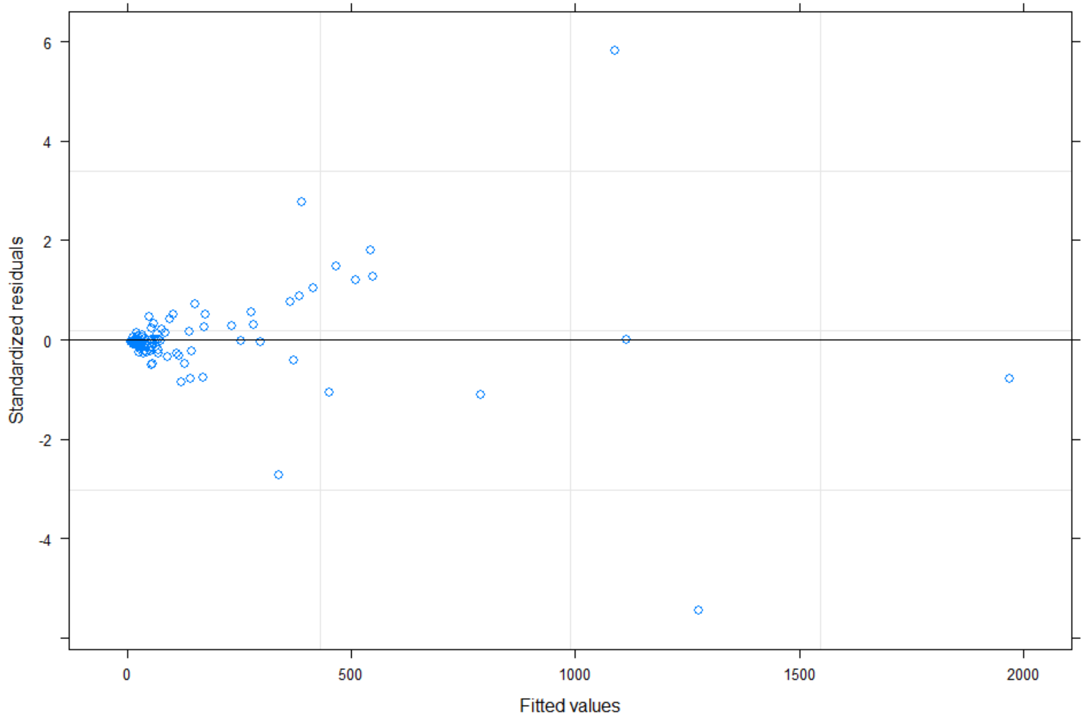
Modelo de efeitos mistos:

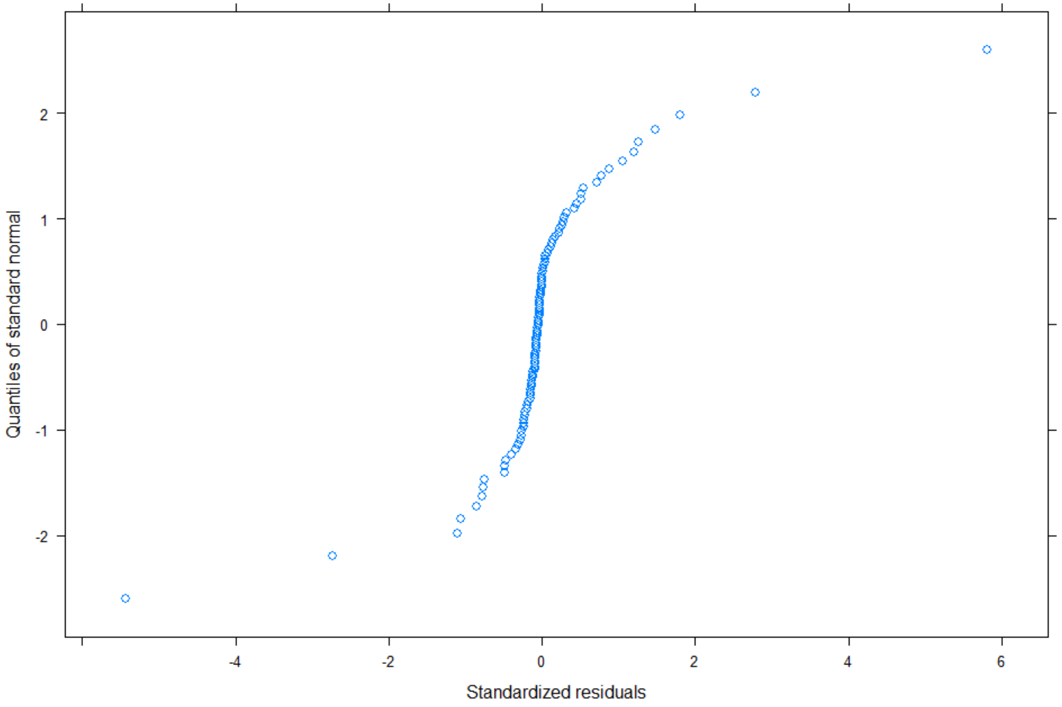
$$agb_{ij} = \beta_1 . dbh_{ij}^{\beta_2} . \epsilon_{ij}$$

- Estimador: nlme; e_{ij} ~$N(0, \sigma^2)$;
- *Sendo i = árvore; j = variável aleatória em nível de espécies.*

Modelos de efeitos mistos

FLORESTAS NATIVAS





Modelos de efeitos mistos

FLORESTAS NATIVAS

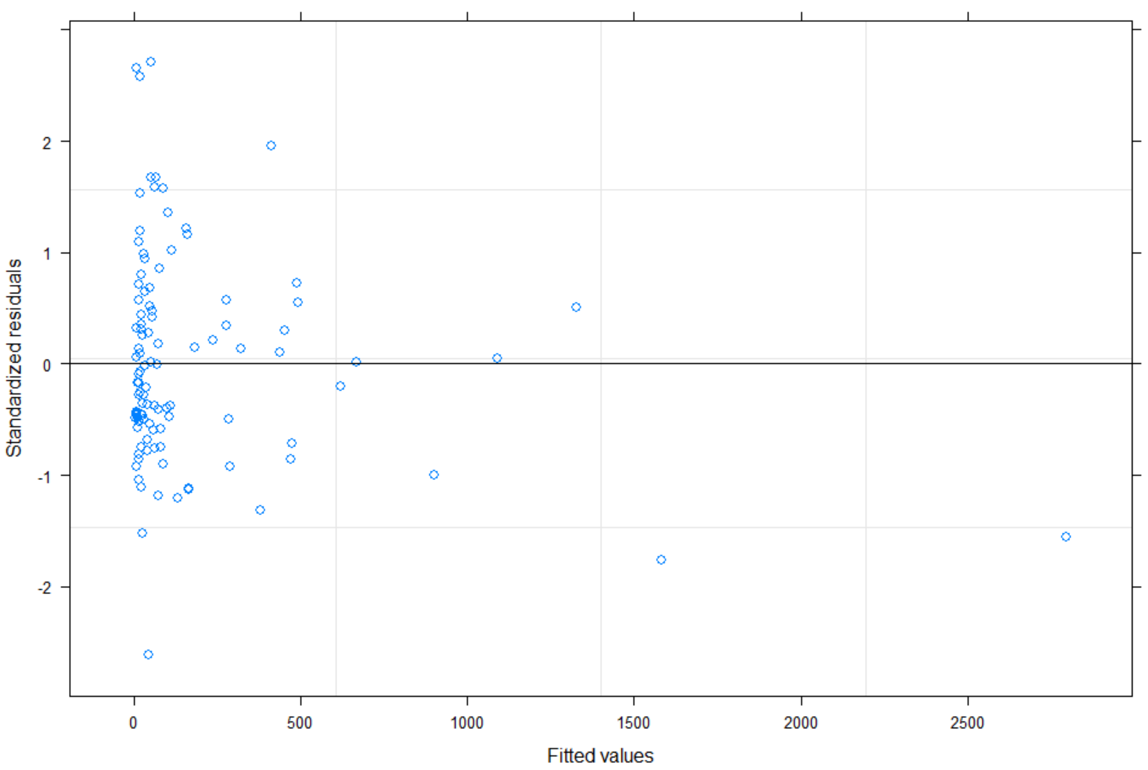
Modelo de efeitos mistos com modelagem da variância:

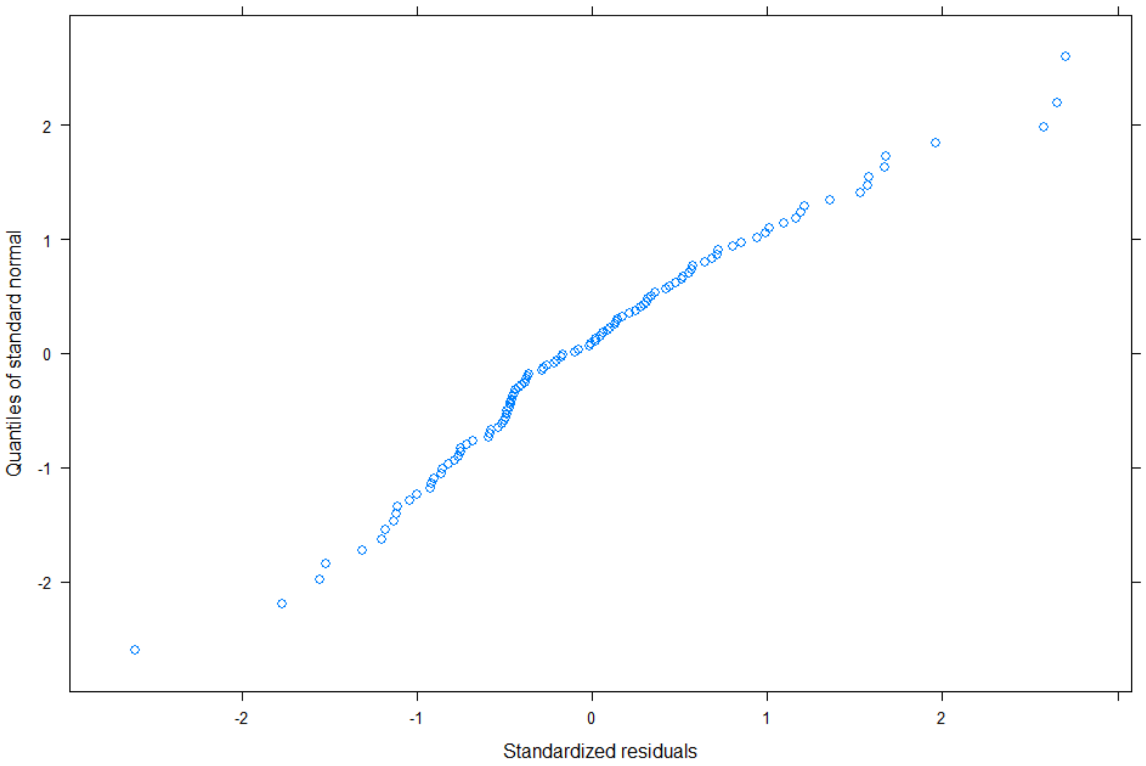
$$agb_{ij} = \beta_1 . dbh_{ij}^{\beta_2} . \epsilon_{ij}$$

- Estimador: nlme; $e \sim N(0, Var(e_{ij}))$
- $Var(e_{ij}) = \sigma^2 . dbh_{ij}^{(0.2)}$

Modelos de efeitos mistos

FLORESTAS NATIVAS

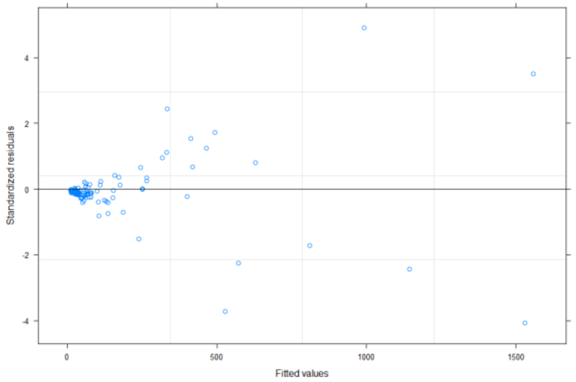


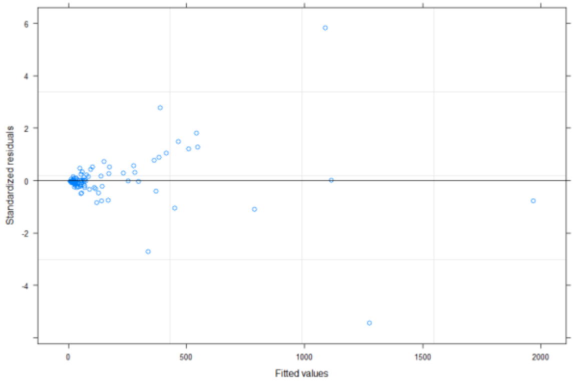


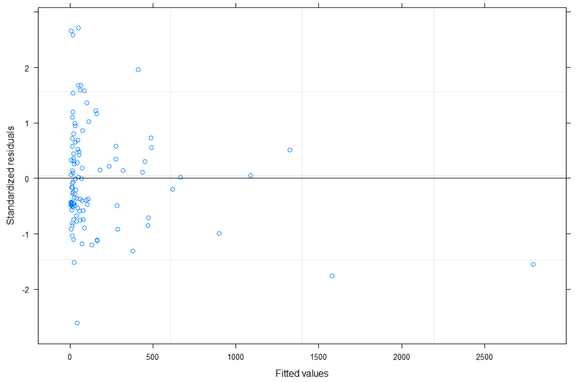
Modelos de efeitos mistos

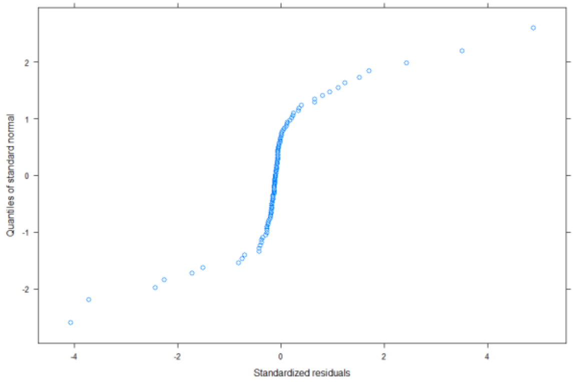
FLORESTAS NATIVAS

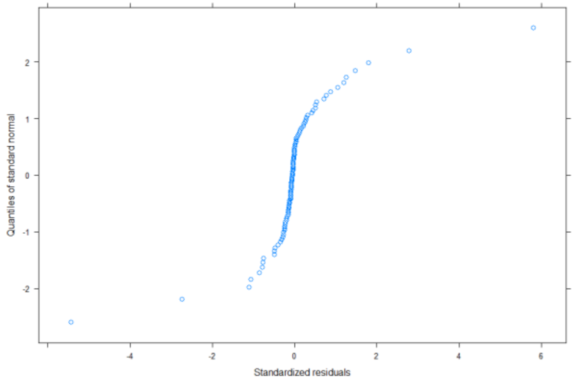
OLS | σ^2	NLME | σ^2	NLME | $\sigma^2.dbh_{ij}^{\,(0.2)}$

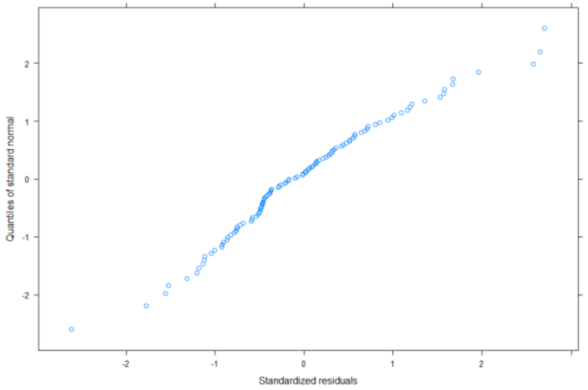












Modelos de efeitos mistos

FLORESTAS NATIVAS

Akaike Information Criteriom (AIC)

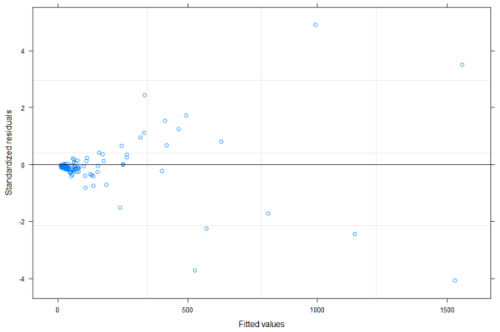
$$AIC = 2k\ .\ 2\ ln(\hat{\mathcal{L}})$$

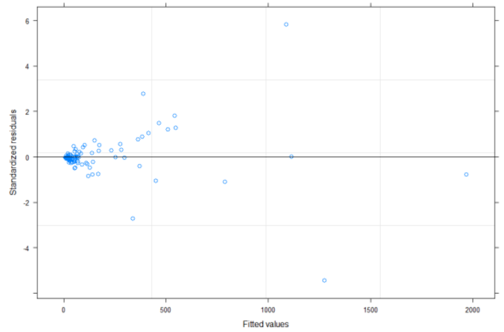
- *Sendo k o número de parâmetros,* $ln(\hat{\mathcal{L}})$ *o de log-verossimilhança do modelo.*

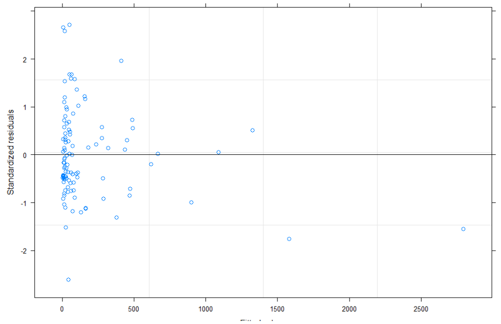
Modelos de efeitos mistos

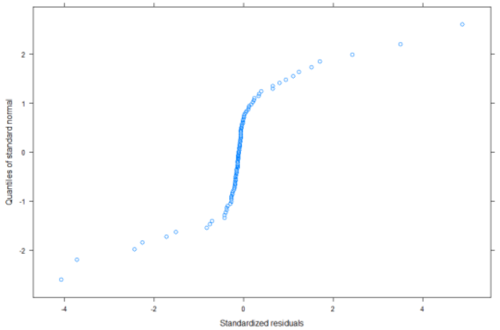
FLORESTAS NATIVAS

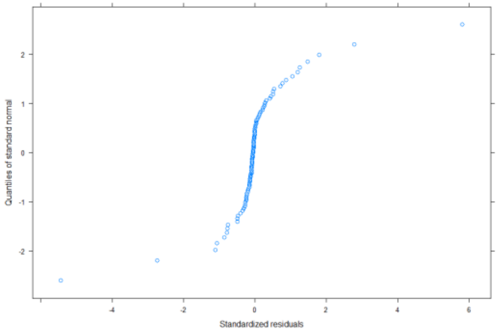
OLS | σ^2	NLME | σ^2	NLME | $\sigma^2.dbh_{ij}^{(0.2)}$
AIC = 1285.7897	AIC = 1225.6837	AIC = 910.1343

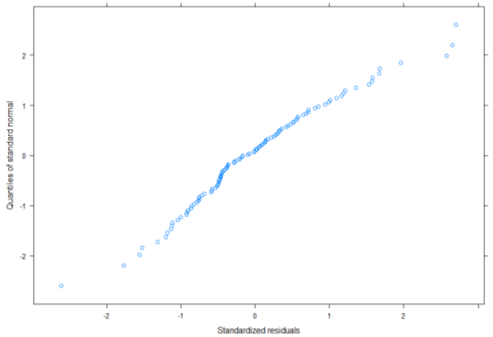












Modelos de efeitos mistos

FLORESTAS NATIVAS

- Elevada diversidade de espécies
  - Heterogêneas
  - Inequiâneas
  - **Legalmente protegidas**

Modelos de efeitos mistos

FLORESTAS NATIVAS

- Elevada diversidade de espécies
  - Heterogêneas
  - Inequiâneas
  - **Legalmente protegidas**
    - **Calibração de modelos**

Modelos de efeitos mistos

Calibração de modelos mistos:

- $agb_{ij} = \phi_1 . dbh_{ij}^{\phi_2} . \epsilon_{ij}$

- $\ln(agb_{ij}) = \phi_1 + \phi_2 . \ln\left(dbh_{ij}\right) + \epsilon_{ij}$

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \beta + b$$

$$b \sim N(0,\Psi), \quad \epsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$$

Modelos de efeitos mistos

Calibração de modelos mistos:

- $ln\left(agb_{ij}\right) = \left(\beta_0 + b_{0j}\right) + \left(\beta_1 + b_{1j}\right).\, ln\left(dbh_{ij}\right) + \epsilon_{ij}$

$$\mathrm{BLUP}\left(\mathrm{b_j}\right) = \hat{\mathrm{b}}_\mathrm{j} = \mathrm{DZ}'(\mathrm{ZDZ}' + \mathrm{R})^{-1}\,(y - \mu)$$

$$\mathrm{var}\left(\hat{\mathrm{b}}_\mathrm{j} - \mathrm{b_j}\right) = \mathrm{D} - \mathrm{DZ}'(\mathrm{ZDZ}' + \mathrm{R})^{-1}\,\mathrm{ZD}$$

Sendo: D a matriz de variância e covariância dos efeitos aleatórios; Z matriz design nxp (n=número de árvores e p o número de parâmetros); R a variância dos efeitos aleatórios vezes a matriz I; y_j a média das novas observações; e μ a média para as mesmas observações preditas pelo parâmetros fixos da equação antes da calibração.

Modelos de efeitos mistos

FLORESTAS NATIVAS

LOCAL DE ESTUDO

- 0.8 ha
- 90 espécies
- 15 espécies = amostra
    - Calibração para nova espécie

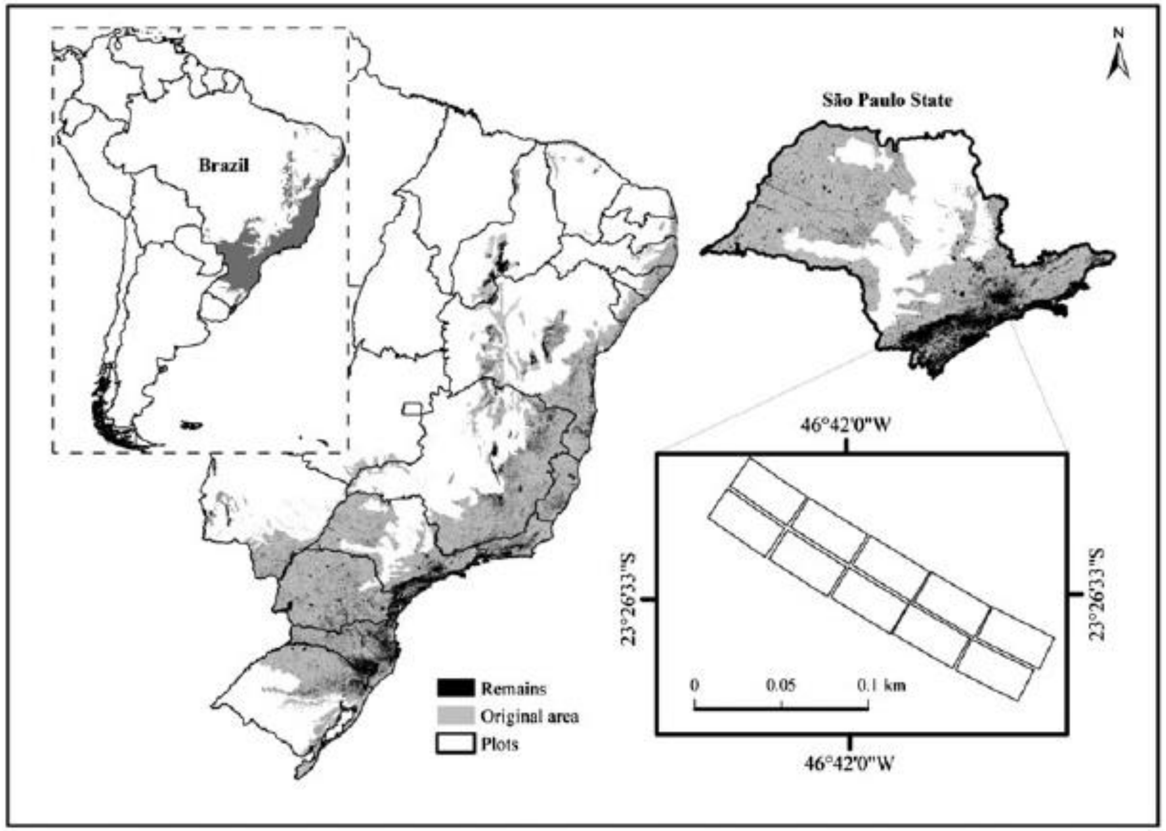


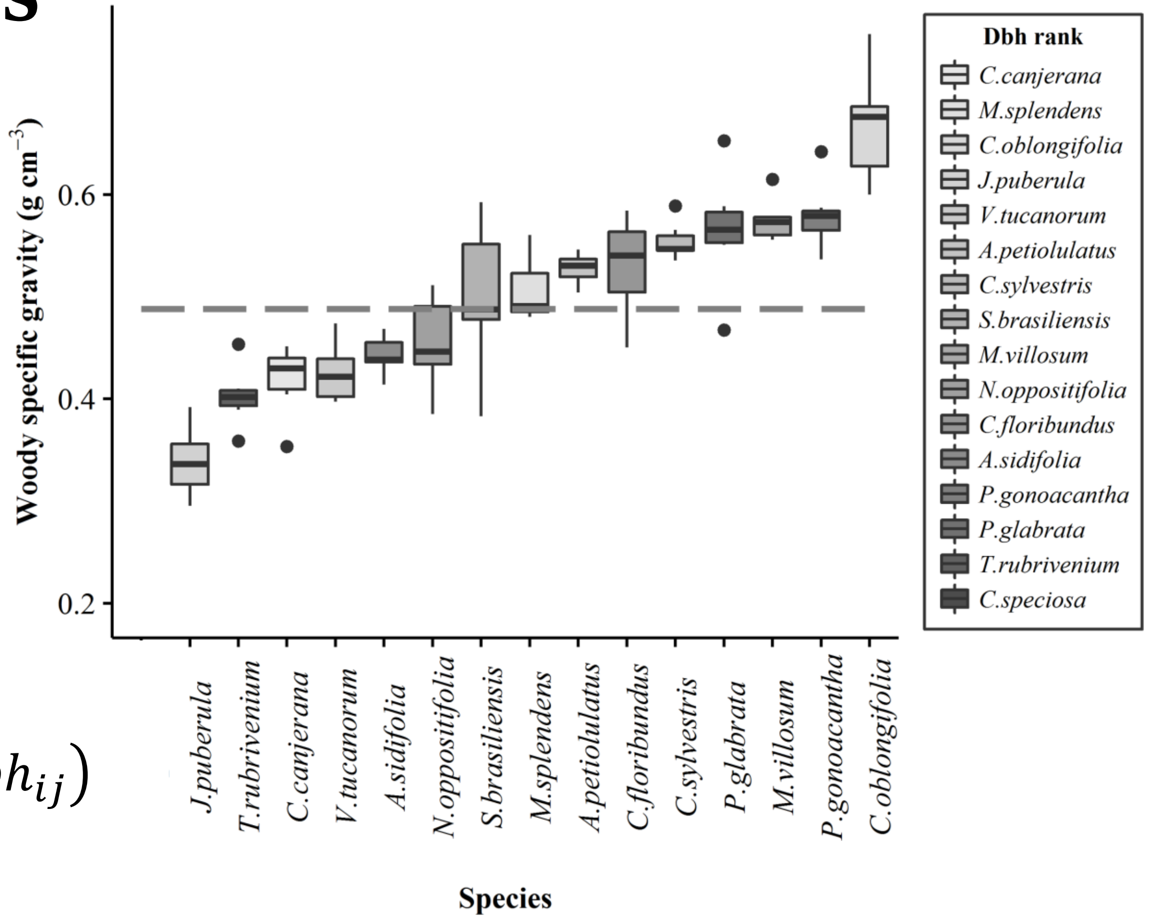
Figure 1. Plots on the study site located in Atlantic Forest near São Paulo, Brazil (souces: SOS Mata Atlântica, 2013; MMA, 2012; IBGE, 2010).

Modelos de efeitos mistos

Calibração de modelos mistos

Exemplo:

- *15 espécies*
- ρ *= 0.34 – 0.68 g cm^{-3} (0.5 g cm^{-3})*
- *DBH = 5.4 – 68.5 cm (16.1 cm)*
- $ln(a|ij) = \left(2.178 + b_{0j}\right) + \left(2.356 + b_{1j}\right) . ln\left(dbh_{ij}\right)$

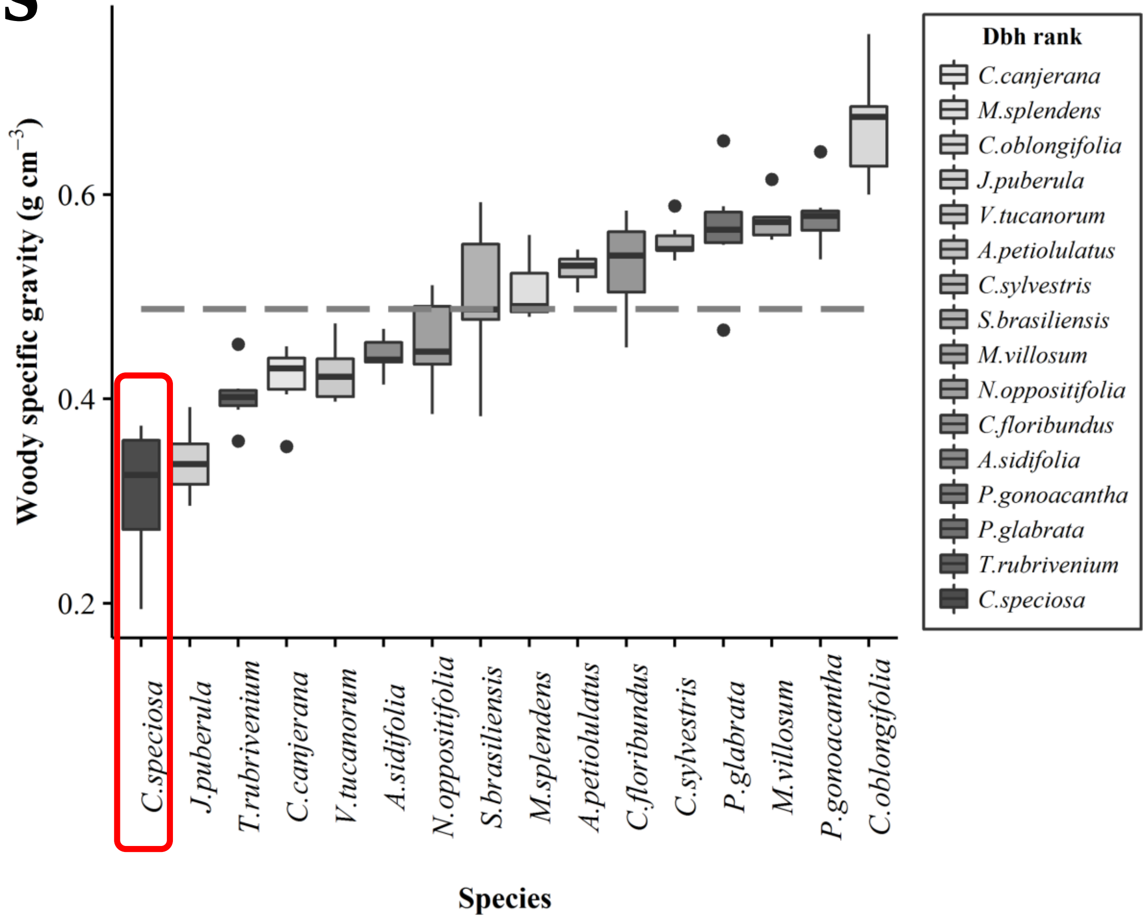


Modelos de efeitos mistos

Calibração de modelos mistos

Exemplo:

- *Ceiba speciosa (paineira)*
- $\rho = 0.31\ g\ cm^{-3}$
- *DBH = 6.0 - 67.8 cm (32.1cm)*



Modelos de efeitos mistos

Calibração de modelos mistos

$$ln(a|ij) = (2.178 + \ b_{0i}) + (\ 2.356 + \ b_{1i})\ .\ ln\left(dbh_{ij}\right) + \epsilon_{ij}$$

- Predizendo um efeito aleatório com três árvores de *C. speciosa*:

$$dbh = \begin{bmatrix} 6.00 \\ 25.85 \\ 40.65 \end{bmatrix} \text{cm}, \qquad agb = \begin{bmatrix} 2.3 \\ 85.77 \\ 342.42 \end{bmatrix} \text{kg}$$

Modelos de efeitos mistos

Calibração de modelos mistos

- O efeito aleatório pode ser obtido:

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 6.00\\1 & 25.85\\1 & 40.65\end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix}0.0476 & 0 & 0\\0 & 0.0476 & 0\\0 & 0 & 0.0476\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}1 & 6.00\\1 & 25.85\\1 & 40.65\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}0.03318 & 0\\0 & 2.3\,e^{-13}\end{bmatrix}\right)^{-1} . \begin{bmatrix}1 & 6.00\\1 & 25.85\\1 & 40.65\end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix}0.0476 & 0 & 0\\0 & 0.0476 & 0\\0 & 0 & 0.0476\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}\log(2.3) - 2.053\\ \log(85.77) - 5.479\\ \log(342.42) - 6.541\end{bmatrix} =$$

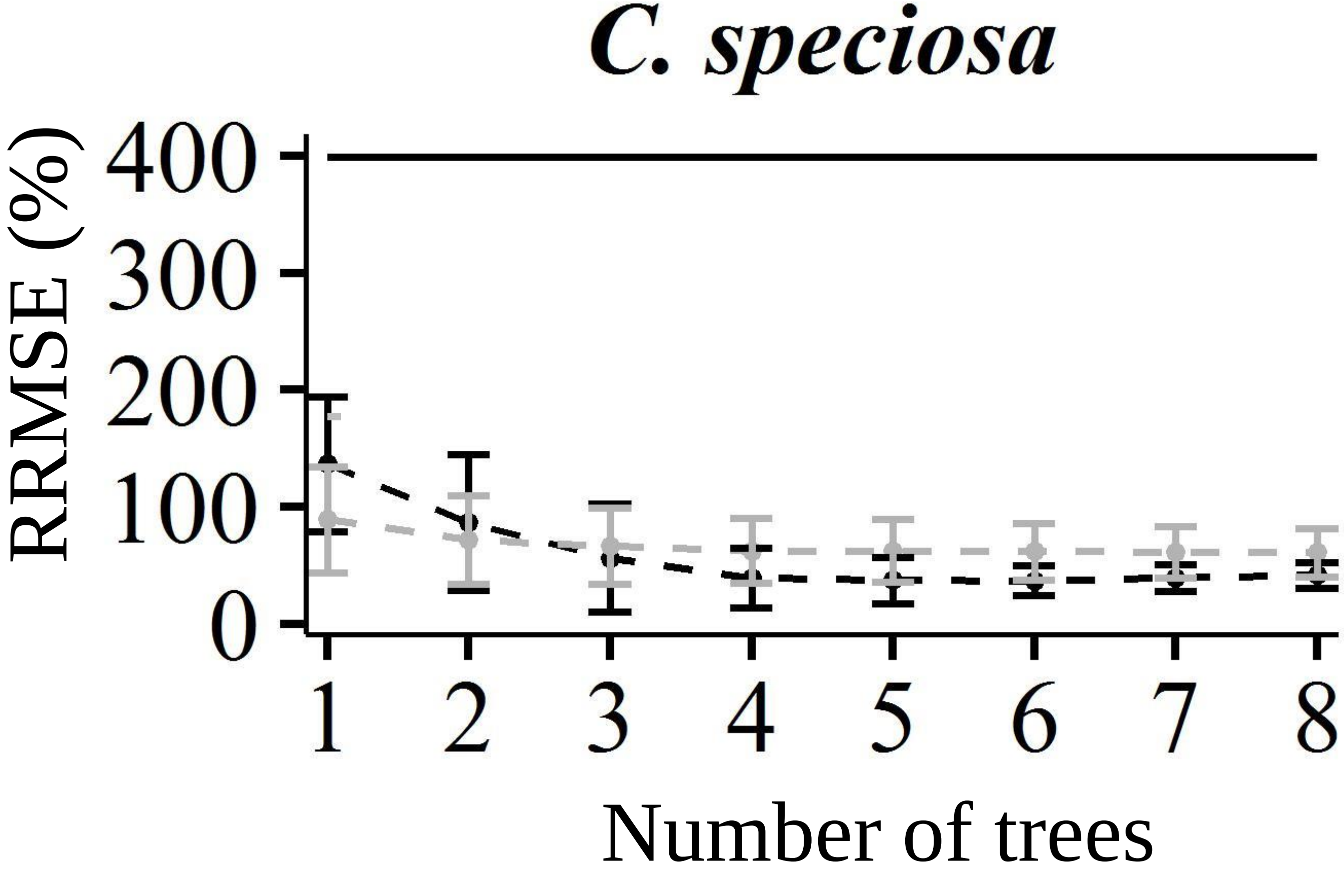
$$\begin{bmatrix}-0.6998\\-0.0050\end{bmatrix}$$

- Modelo calibrado para *C. speciosa*:

$$ln(a|ij) = (2.178 - \mathbf{0.6998}) + (2.356 - \mathbf{0.0050}\ ).\, ln\left(dbh_{ij}\right) + \epsilon_{ij}$$

Modelos de efeitos mistos

Calibração de modelos mistos



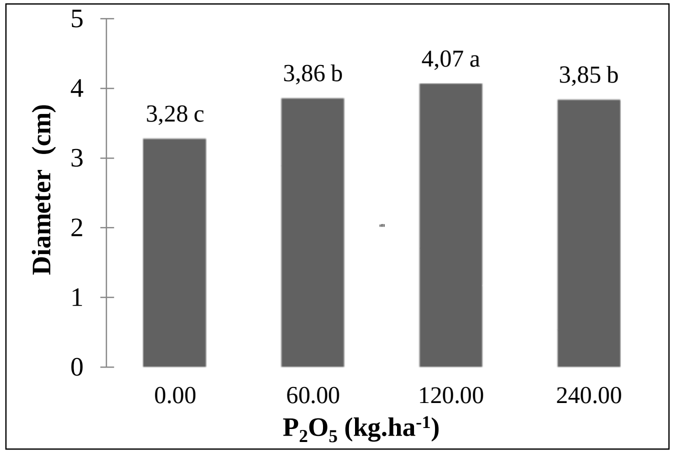
Modelos de efeitos mistos

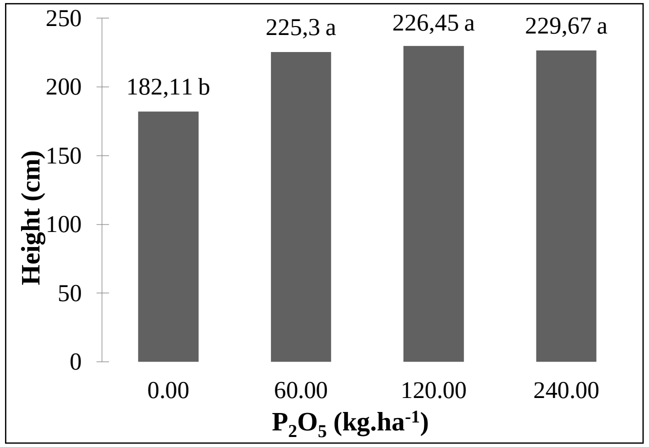
- Análise experimental, comparação de modelos e o uso de modelos de efeito misto.

Modelos de efeitos mistos

Schizolobium amazonicum Huber ex. Ducke (Paricá)

- Rápido crescimento
- Production of plywood



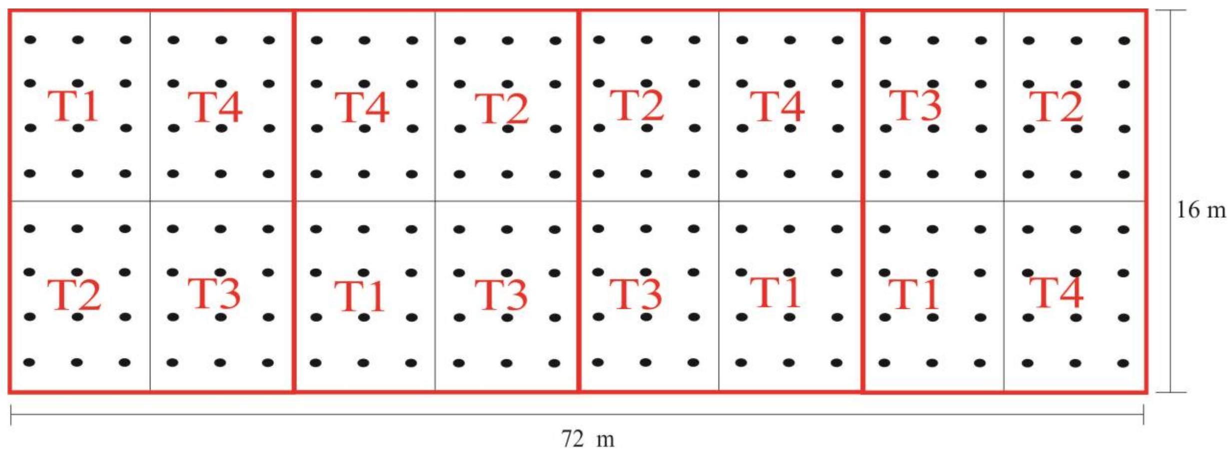


12 months after planting

Modelos de efeitos mistos

Design experimental

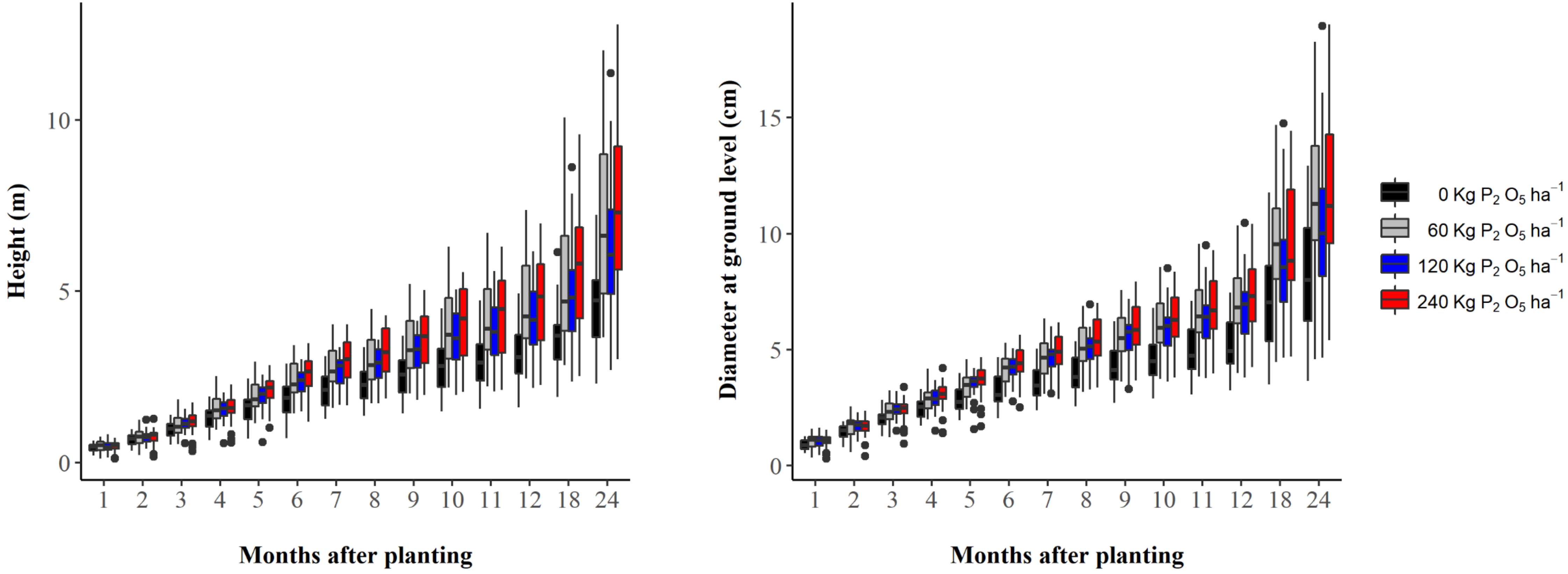
- Four treatments
  - 0 Mg P_2O_5 ha^{-1}
  - 0.06 Mg P_2O_5 ha^{-1}
  - 0.12 Mg P_2O_5 ha^{-1}
  - 0.24 Mg P_2O_5 ha^{-1}



- Four Blocks
- 14 measurements of diameter and height

Modelos de efeitos mistos

- Análise experimental e comparação de modelos



Modelos de efeitos mistos

MODELOS DE CRESCIMENTO:

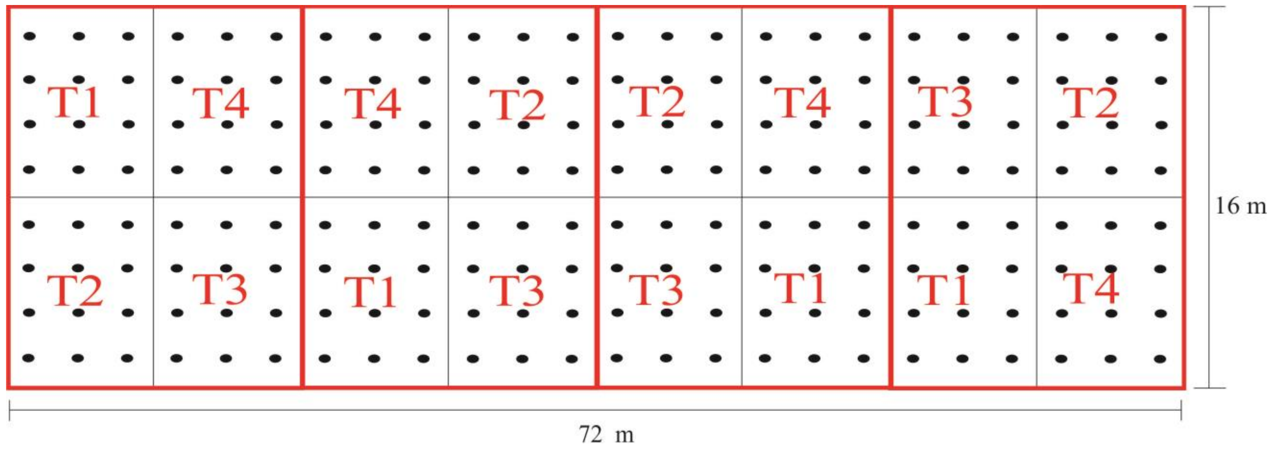
- Shumacher equation
  - $y_{ijk} = \phi_{1ijk}\, exp\left[-\phi_{2ijk}/t\right] + \epsilon_{ijk}$ $(eq.1)$
- General logistic equation
  - $y_{ijk} = \frac{\phi_{1ijk}}{1+exp\,[-(t-\phi_{2ijk})\,/\,\phi_{3ijk}]} + \epsilon_{ijk}$ $(eq.2)$
- Monomolecular equation
  - $y_{ijk} = \phi_{1ijk}\,.\,(1-\phi_{2ijk}\,.\,ex\,p\left[-\phi_{3ijk}\,.\,t\right]) + \epsilon_{ijk}$ $(eq.3)$

Modelos de efeitos mistos

- $b_{ijk} \sim N(0,\Psi)$, $\epsilon_{ijk} \sim N(0,\sigma^{**})$
- $\sigma^{**} = Var\ (\epsilon_{ij}) = \sigma^2\ |\text{months}|^{2\delta}$
- Pacote *nlme*
- Níveis de efeitos aleatórios
- Variável indicativa entre os tratamentos para comparar os modelos

Modelos de efeitos mistos

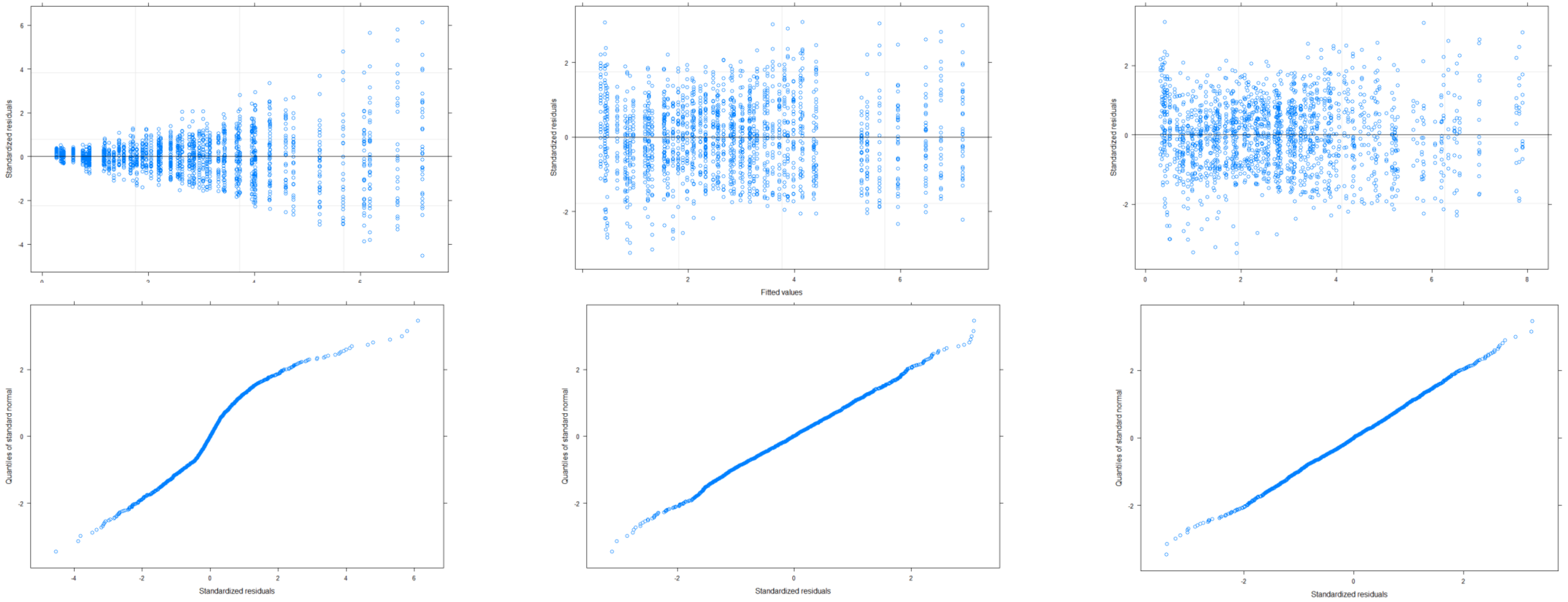
- Mais de um nível de efeito aleatório: modelos multiníveis
- Os efeitos aleatórios são “aninhados” (nested) em níveis hierárquicos
- Efeito aleatórios: bloco / tratamento



Modelos de efeitos mistos

- **Modelagem da variância e níveis hierárquicos de efeitos aleatórios para o diâmetro de paricá**

NLME | trat | σ^2	**NLME | trat | σ^2.*months* $^{(2\delta)}$**	**NLME | bloc/trat | σ^2.*months* $^{(2\delta)}$**
AIC = 4766.921	AIC = 3319.933	AIC = 3092.573



Modelos de efeitos mistos

- **Comparação de modelos**

Model	**AIC**	
	Height	**Diameter**
Monomolecular (eq.3)	3066.968	4467.239
Logistic (eq.2)	3245.770	4838.033
Shumacher (eq.1)	3948.514	5849.342

Modelos de efeitos mistos

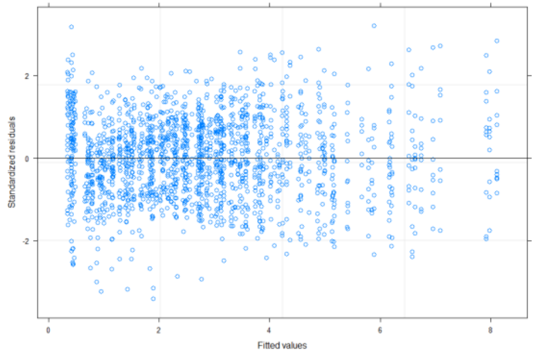
Modelagem da altura (m) de *S. amazonicum* em diferentes concentrações de fósforo.

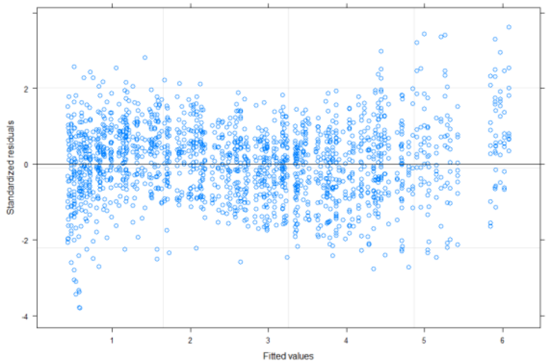
Model	β_1	β_2	β_3	[kg P_2O_5 ha^{-1}]	Indicator variable	F-value	p-value
Monomolecular	9.014	0.982	0.048	0	-	-	-
				60	0.029	0.500	0.470
				120	0.021	0.200	0.625
				240	0.033	6.200	**0.013**
Logistic	5.230	6.502	3.049	0	-	-	-
				60	1.231	9.482	**0.002**
				120	0.766	1.528	0.217
				240	1.292	55.631	**<.0001**
Shumacher	6.237	4.276	-	0	-	-	-
				60	1.811	10.069	**0.002**
				120	0.989	0.115	0.735
				240	1.973	47.238	**<.0001**

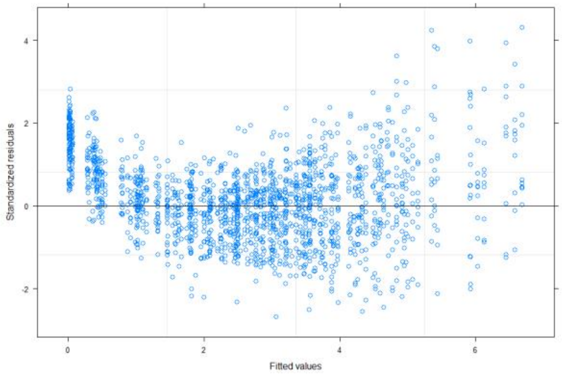
Modelos de efeitos mistos

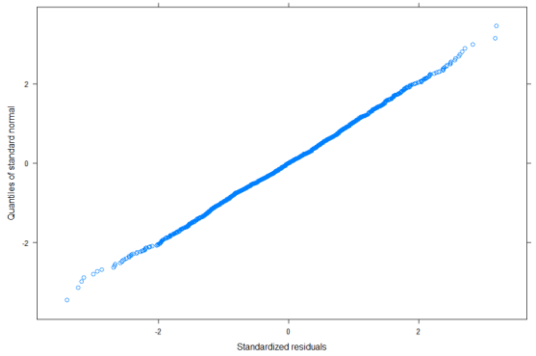
Comparando modelos com variáveis indicativas para altura

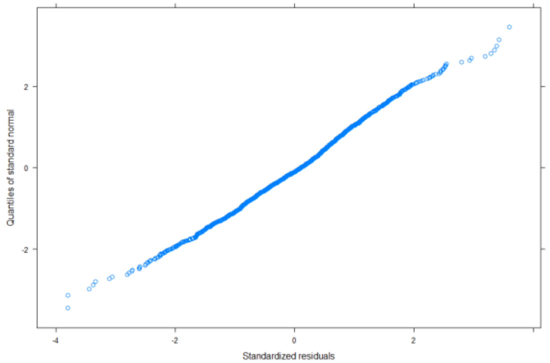
<table>
<tr><th>Monomolecular | bloc/trat | σ^2.months $^{(2\delta)}$</th><th>Logistic | bloc/trat | σ^2.months $^{(2\delta)}$</th><th>Shumacher | bloc/trat | σ^2.months $^{(2\delta)}$</th></tr>
<tr><td>AIC = 3066.968</td><td>AIC = 3245.770</td><td>AIC = 3948.514</td></tr>
</table>

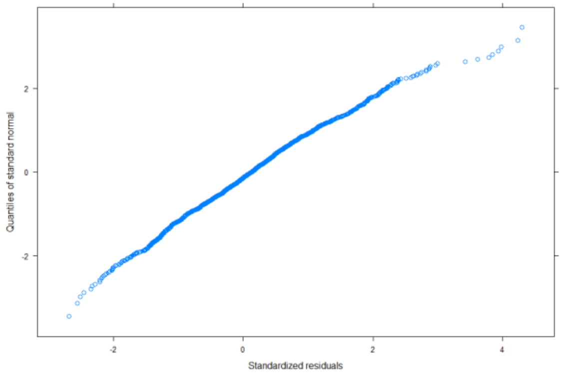












Modelos de efeitos mistos

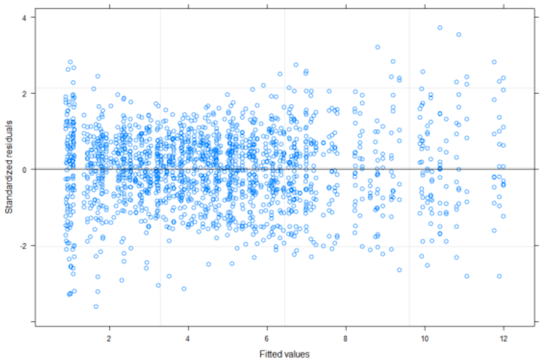
Modelagem do diâmetro (cm) de *S. amazonicum* em diferentes concentrações de fósforo.

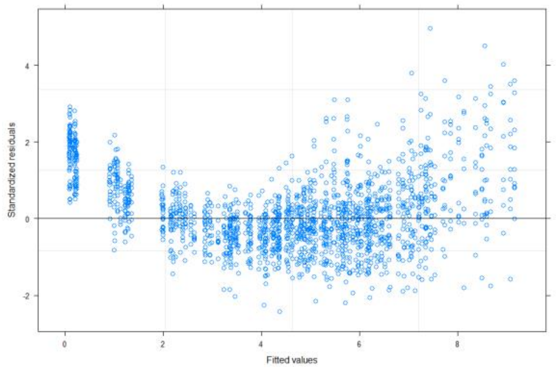
Model	β_1	β_2	β_3	[kg P_2O_5 ha^{-1}]	Indicator variable	F-value	p-value
Monomolecular	15.563	0.964	0.044	0			
				60	0.02074	0.900	0.331
				120	0.009	0.500	0.461
				240	0.022	2.900	0.090
Logistic	10.094	8.147	4.269	0			
				60	0.995	9.351	**0.002**
				120	0.161	2.612	0.106
				240	0.771	8.869	**0.003**
Shumacher	12.471	6.142	-	0			
				60	1.547	26.347	**<.0001**
				120	0.242	5.416	**0.020**
				240	1.119	19.488	**<.0001**

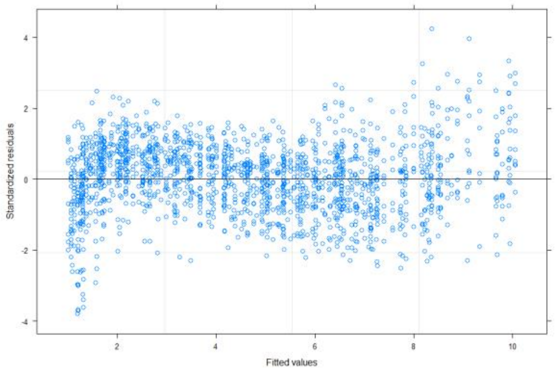
Modelos de efeitos mistos

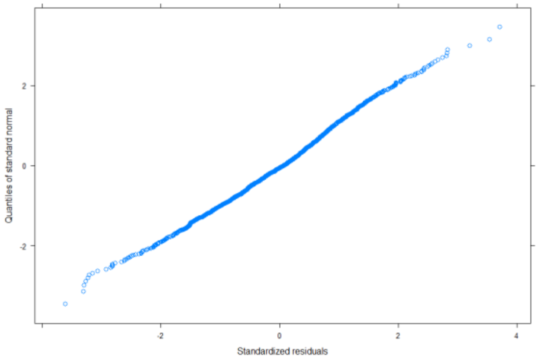
Comparando modelos com variáveis indicativas para diâmetro

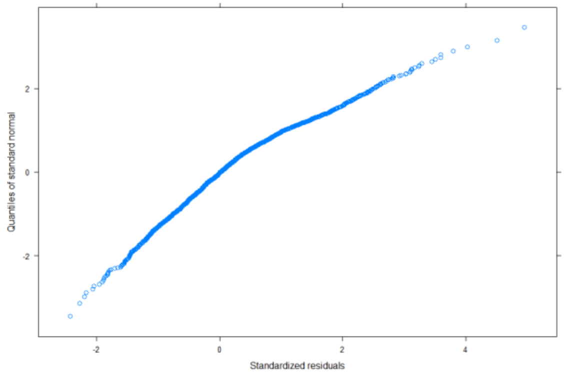
<table>
<tr><th>Monomolecular | bloc/trat | σ^2.months $^{(2\delta)}$</th><th>Logistic | bloc/trat | σ^2.months $^{(2\delta)}$</th><th>Shumacher | bloc/trat | σ^2.months $^{(2\delta)}$</th></tr>
<tr><td>AIC = 4467.239</td><td>AIC = 4838.033</td><td>AIC = 5849.342</td></tr>
</table>

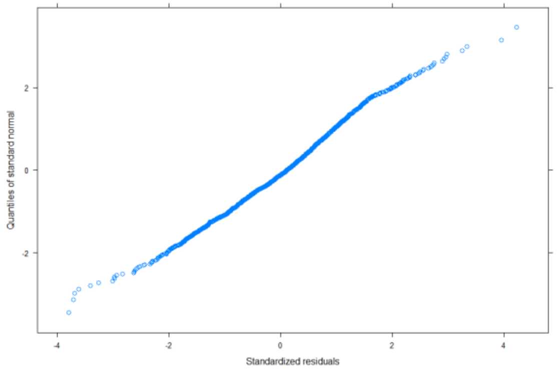






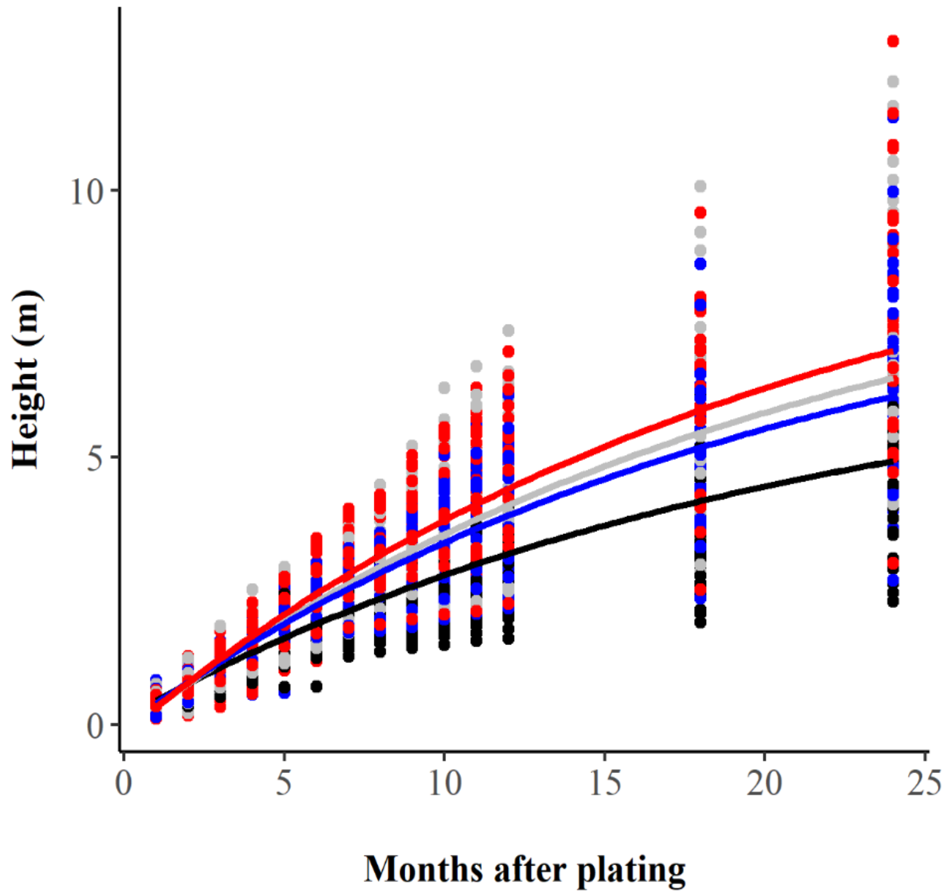


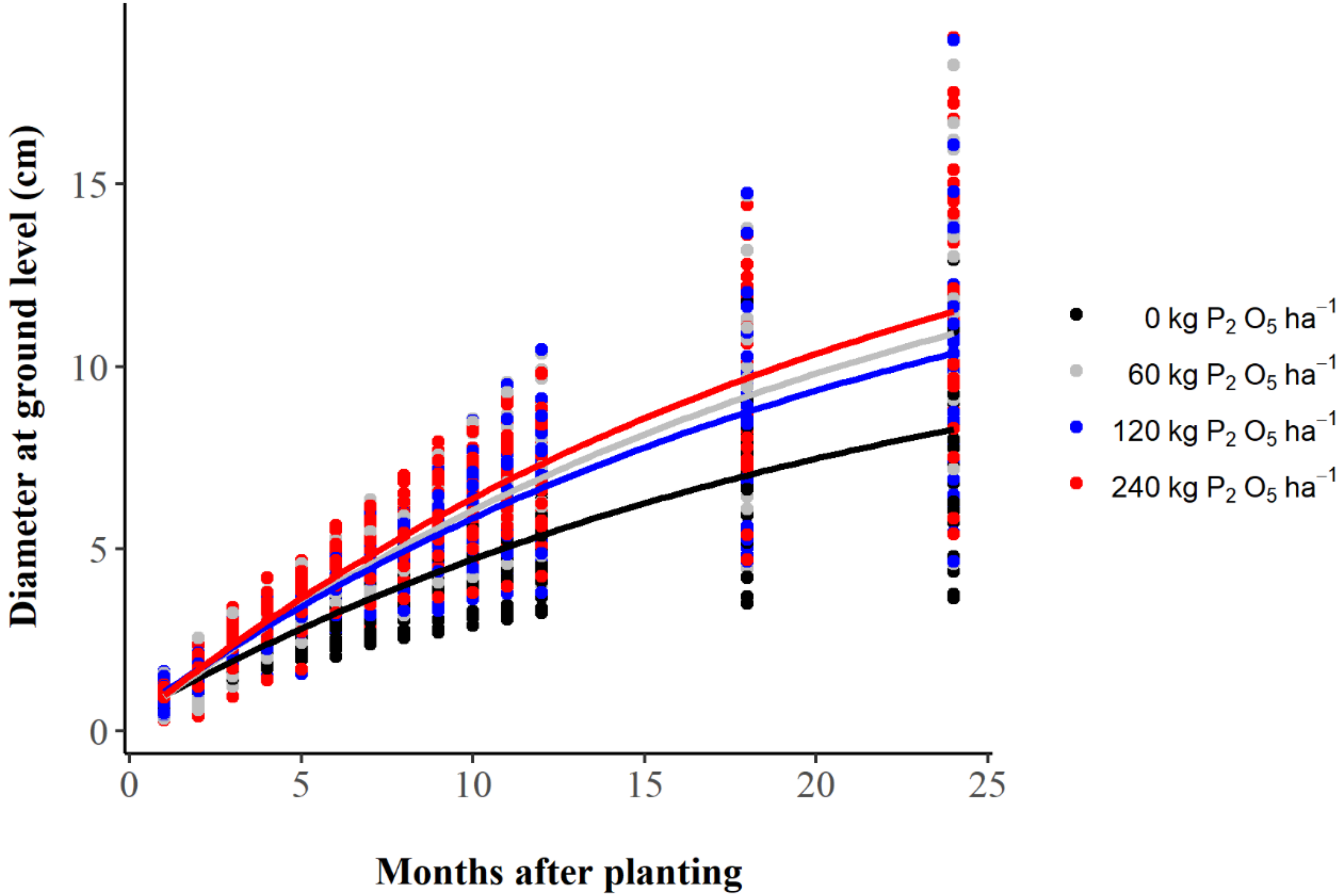




Modelos de efeitos mistos

- **Ajuste com modelos de efeito mistos**





Referências

- Lappi, J. 1991. Calibration of height and volume equations with random parameters. For. Sci. 37: 781–801.

- Pinheiro and Bates, 2000. Mixed-effects models in S and S-plus.

- Burkhart, E.H.; Tomé, M. 2012. Modeling Forest Trees and Stands. Springer, New York, NY, USA.

- Colmanetti, MAA. 2018. Aboveground biomass and carbon estimate at Brazilian Atlantic Forest.

- R Development Core Team (2018). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL http://www.R-project.org.