Implementação de Modelos de Equações Diferenciais com Álgebra Matricial

Giovanna Castello de Andrade
Larissa Macul Moreno

Agosto 2019

Organização

Equação Diferencial Ordinária

- Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob a forma de suas respectivas derivadas.
- Equações diferenciais representam a variação ao longo do tempo de um certo fenômeno ou acontecimento.

Exemplo 1

Examples

1. A *second-order*, *nonhomogeneous*, *nonlinear* ODE:

$$\overset{\substack{\text{order} = 2\\ \downarrow}}{\frac{d^2x}{dt^2}} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nonlinear}\\ \text{term}}}{2x}\frac{dx}{dt} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nonlinear}\\ \text{term}}}{x^2} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{term independent}\\ \text{of } x(t)\\ \text{(nonhomogeneous)}}}{\sin t}.$$

Independent variable $= t$; unknown function $= x(t)$.

Figura: Equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem.

Exemplo 2

2. A *third-order, linear, homogeneous* ODE with *nonconstant coefficients:*

order = 3

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2t\frac{dx}{dt} + t^2x = 0$$

nonconstant coefficient of dx/dt

nonconstant coefficient of x

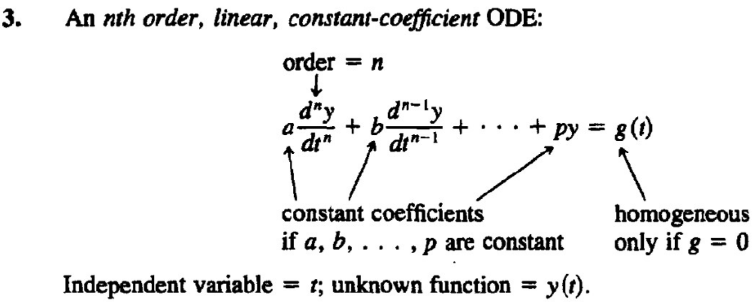
homogeneous equation

(terms linear in x and dx/dt)

Independent variable = t; unknown function = $x(t)$.

Figura: Equação diferencial ordinária linear de terceira ordem.

Exemplo 3



3. An *nth order, linear, constant-coefficient* ODE:

order $= n$

$$a\frac{d^n y}{dt^n} + b\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + py = g(t)$$

constant coefficients
if $a, b, \ldots, p$ are constant

homogeneous
only if $g = 0$

Independent variable $= t$; unknown function $= y(t)$.

Figura: Equação diferencial ordinária linear de ordem n com coeficientes constantes.

Equações Diferenciais Lineares

A partir de agora, vamos nos concentrar em Equações Diferenciais Ordinárias Lineares.

Solução Equação Linear

Resolvendo passo a passo:

Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem Homogênea

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

EDO linear de 1ª ordem homogênea

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

EDO linear de 1ª ordem homogênea

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

Lado direito passa dividindo:

$$\frac{dx}{dt}\frac{1}{(ax)} = 1$$

EDO linear de 1ª ordem homogênea

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

Lado direito passa dividindo:

$$\frac{dx}{dt}\frac{1}{(ax)} = 1$$

"Separar" operadores de derivada:

$$\frac{dx}{(ax)} = dt$$

EDO linear de 1ª ordem homogênea

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

Lado direito passa dividindo:

$$\frac{dx}{dt}\frac{1}{(ax)} = 1$$

"Separar" operadores de derivada:

$$\frac{dx}{(ax)} = dt$$

Integrar dos dois lados:

$$\int \frac{dx}{(ax)} = \int dt$$

EDO linear de 1ª ordem homogênea

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

Lado direito passa dividindo:

$$\frac{dx}{dt}\frac{1}{(ax)} = 1$$

"Separar" operadores de derivada:

$$\frac{dx}{(ax)} = dt$$

Integrar dos dois lados:

$$\int \frac{dx}{(ax)} = \int dt$$

Resolver integral:

$$\frac{\log(ax)}{a} + c_1 = t + c_2$$

Observações

$$\frac{\log(ax)}{a} + c_1 = t + c_2$$

Observações

$$\frac{\log(ax)}{a} + c_1 = t + c_2$$

- A solução dessa equação depende das constantes c_1 e c_2

Observações

$$\frac{\log(ax)}{a} + c_1 = t + c_2$$

- A solução dessa equação depende das constantes c_1 e c_2
- As constantes c_1 e c_2 vem de condições de contorno (fronteira) ou de valores iniciais do sistema.

Observações

$$\frac{\log(ax)}{a} + c_1 = t + c_2$$

- A solução dessa equação depende das constantes c_1 e c_2
- As constantes c_1 e c_2 vem de condições de contorno (fronteira) ou de valores iniciais do sistema.
- Ainda não encontramos a solução da equação diferencial, só descobrimos a forma "fraca" do problema.

Solução!

$$\frac{\log(ax)}{a} + c_1 = t + c_2$$

Solução!

$$\frac{\log(ax)}{a} + c_1 = t + c_2$$

Vamos supor que c_1 e c_2 são nulos:

$$\frac{\log(ax)}{a} = t$$

Solução!

$$\frac{\log(ax)}{a} + c_1 = t + c_2$$

Vamos supor que c_1 e c_2 são nulos:

$$\frac{\log(ax)}{a} = t$$

Vamos isolar x:

$$log(ax) = at$$

Solução!

$$\frac{\log(ax)}{a} + c_1 = t + c_2$$

Vamos supor que c_1 e c_2 são nulos:

$$\frac{\log(ax)}{a} = t$$

Vamos isolar x:

$$log(ax) = at$$

$$ax = e^{at}$$

Solução!

$$\frac{\log(ax)}{a} + c_1 = t + c_2$$

Vamos supor que c_1 e c_2 são nulos:

$$\frac{\log(ax)}{a} = t$$

Vamos isolar x:

$$log(ax) = at$$

$$ax = e^{at}$$

$$x = \frac{e^{at}}{a}$$

Solução!

$$\frac{\log(ax)}{a} + c_1 = t + c_2$$

Vamos supor que c_1 e c_2 são nulos:

$$\frac{\log(ax)}{a} = t$$

Vamos isolar x:

$$log(ax) = at$$

$$ax = e^{at}$$

$$x = \frac{e^{at}}{a}$$

Escrevendo de outra maneira:

$$x = k_1 e^{at}$$

Observações:

$$x = k_1 e^{at}$$

Observações:

$$x = k_1 e^{at}$$

- As constantes dependem dos coeficientes iniciais da equação a, e de c_1 e c_2.

Observações:

$$x = k_1 e^{at}$$

- As constantes dependem dos coeficientes iniciais da equação a, e de c_1 e c_2.
- A função exponencial é muito importante na solução de equações diferenciais.

Organização

Sistemas de Equações Diferencias Ordinárias

- Surgem na modelagem de sistemas descritos por várias variáveis.
- Interesse em entender como cada uma das variáveis se comportam ao longo do tempo.
- Vamos supor que cada uma das variáveis pode ser descrita por uma equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes.

Sistemas de Equações Diferencias Ordinárias

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as variáveis de interesse, temos, então, de forma geral

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n \\ \dot{x_2} = a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n \\ \\ \dot{x_n} = a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \cdots + a_{nn}\ x_n \end{cases}$$

Forma Matricial

Este sistema pode ser reescrito em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou, utilizando vetores, como

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{x}}}{dt} = A\vec{\boldsymbol{x}},$$

Modelagem Matemática

Exemplo 4

Vamos modelar a população de coelhos nas fazendas de Jones e McGregor, de acordo com o seguinte esquema.

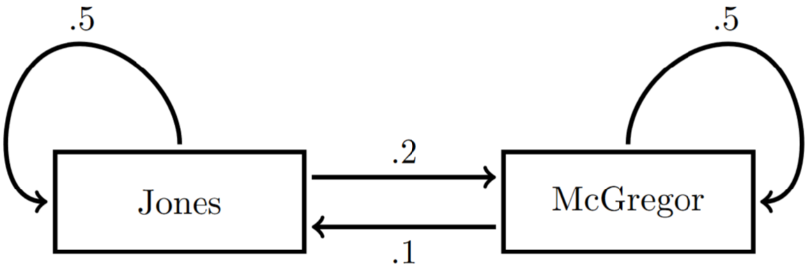


Figura: Esquema de população de coelhos entre duas fazendas.

Modelagem Matemática

Assim, seja $x(t)$ o número de coelhos de Jones e $y(t)$ o número de coelhos de McGregor, podemos escrever

$$\begin{cases} \dot{x} = 0.5x - 0.2x + 0.1y \\ \dot{y} = 0.5y - 0.1y + 0.2x \end{cases}$$

ou, de forma simplificada,

$$\begin{cases} \dot{x} = 0.3x + 0.1y \\ \dot{y} = 0.2x + 0.4y \end{cases}$$

e, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Organização

Autovalores e Autovetores

Definição 1

Seja A uma matriz quadrada $(A \in R^{n\times n})$, dizemos que λ é um autovalor de A quando existe um vetor não nulo tal que:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Dizemos que $\vec{v}$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ.

Como encontrar Autovalores e Autovetores?

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Como encontrar Autovalores e Autovetores?

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Subtraindo o lado esquerdo:

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

Como encontrar Autovalores e Autovetores?

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Subtraindo o lado esquerdo:

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

Colocando o vetor $\vec{v}$ em evidência (utilizando a matriz identidade):

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Como encontrar Autovalores e Autovetores?

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Subtraindo o lado esquerdo:

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

Colocando o vetor $\vec{v}$ em evidência (utilizando a matriz identidade):

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Queremos encontrar λ e $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Solução Equação Matricial

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Atenção:

Quais são as condições de solução dessa equação matricial?

Solução Equação Matricial

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Atenção:

Quais são as condições de solução dessa equação matricial?

- Queremos encontrar λ e $\vec{v}$ que satisfazem a equação.

Solução Equação Matricial

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Atenção:

Quais são as condições de solução dessa equação matricial?

- Queremos encontrar λ e $\vec{v}$ que satisfazem a equação.
- **Matriz * Vetor = 0** só acontece se **Vetor = 0** ou **Matriz não é linearmente independente**

Solução Equação Matricial

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Atenção:

Quais são as condições de solução dessa equação matricial?

- Queremos encontrar λ e $\vec{v}$ que satisfazem a equação.
- **Matriz * Vetor = 0** só acontece se **Vetor = 0** ou **Matriz não é linearmente independente**
- Matrizes não linearmente independentes tem determinante nulo.

Solução Equação Matricial

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Atenção:

Quais são as condições de solução dessa equação matricial?

- Queremos encontrar λ e $\vec{v}$ que satisfazem a equação.
- **Matriz * Vetor = 0** só acontece se **Vetor = 0** ou **Matriz não é linearmente independente**
- Matrizes não linearmente independentes tem determinante nulo.

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Polinômio Característico

Vamos chamar de polinômio característico (de autovalores de uma matriz ou de uma **Equação Diferencial**) o seguinte:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

Organização

Método Matricial

- A ideia é buscar entender o comportamento da solução através de propriedades da matriz de coeficientes.
- Análise qualitativa.

Qual o formato da solução?

Lembrando

O problema $\frac{dx}{dt} = ax$ possui uma solução do tipo

$$x(t) = c_1 e^{at},$$

Qual o formato da solução?

Lembrando

O problema $\frac{dx}{dt} = ax$ possui uma solução do tipo

$$x(t) = c_1 e^{at},$$

De forma análoga, poderiamos supor para o problema $\frac{d\vec{\boldsymbol{x}}}{dt} = A\vec{\boldsymbol{x}}$, uma solução do tipo

$$\vec{\boldsymbol{x}}(t) = \vec{\boldsymbol{v}} e^{\lambda t},$$

com parametros λ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ a determinar.

Buscando o valor dos parâmetros

Substituindo esta possível solução no problema, temos que

$$\frac{d(\vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t})}{dt} = A\vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t}$$

e, computando a derivada,

$$\lambda\vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t} = A\vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t}$$

Buscando o valor dos parâmetros

Substituindo esta possível solução no problema, temos que

$$\frac{d(\vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t})}{dt} = A\vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t}$$

e, computando a derivada,

$$\lambda\vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t} = A\vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t}$$

Nesta expressão, temos que o termo $e^{\lambda t}$ é escalar e diferente de zero e, portanto, pode ser simplificado na equação, resultando em

$$\lambda\vec{\boldsymbol{v}} = A\vec{\boldsymbol{v}}$$

ou

$$A\vec{\boldsymbol{v}} - \lambda I\vec{\boldsymbol{v}} = (A - \lambda I)\vec{\boldsymbol{v}} = 0, \tag{1}$$

que corresponde ao problema de autovalor!

Solução

Ou seja $\vec{\boldsymbol{x}}(t) = \vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t}$ é de fato solução do sistema e, além disso, λ é autovalor da matriz de coeficientes e $\vec{\boldsymbol{v}}$ é autovetor associado!

Solução

Ou seja $\vec{\boldsymbol{x}}(t) = \vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t}$ é de fato solução do sistema e, além disso, λ é autovalor da matriz de coeficientes e $\vec{\boldsymbol{v}}$ é autovetor associado!

Note que λ pode ser real positivo, real negativo ou complexo! Que diferença isso faz no formato da solução?

Como se comporta a função exponencial?

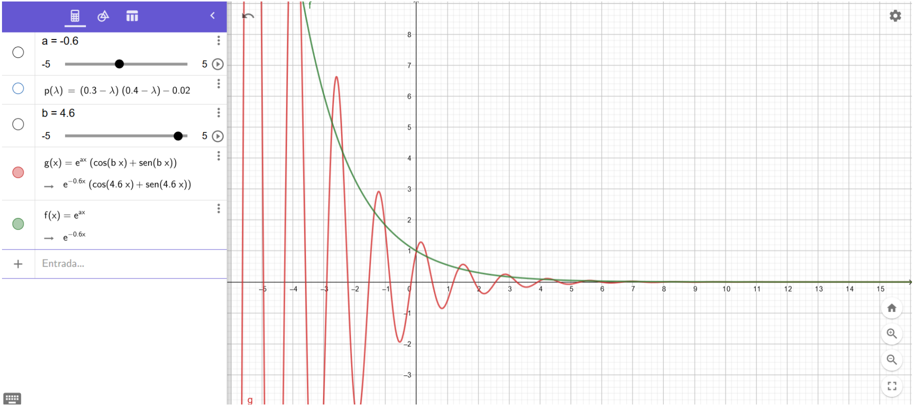


Figura: Simulação da função exponencial em `https://www.geogebra.org/graphing`.

Exponenciais Complexas

Vamos reescrever uma exponencial complexa utilizando a fórmula de Euler.

Formula de Euler

$$e^{ikx} = cos(kx) + isen(kx)$$

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt}$$

$$e^{at}e^{ibt} = e^{at}(cos(bt) + isen(bt))$$

Autovalores Reais

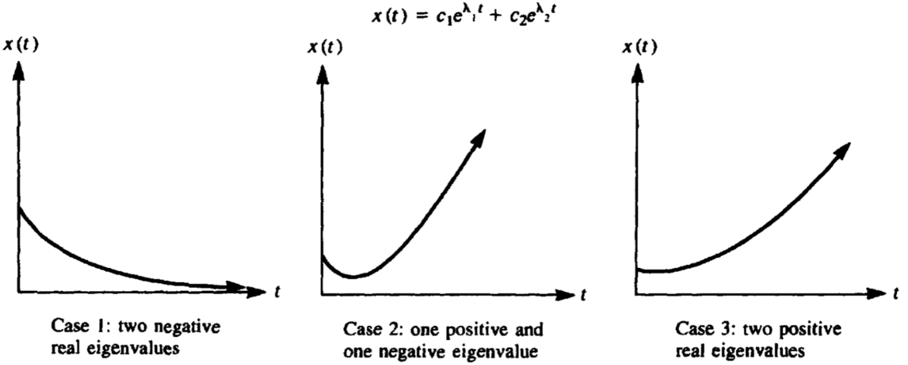


Figura: Comportamento das soluções quando a matriz de coeficientes tem autovalores reais.

Autovalores Complexos

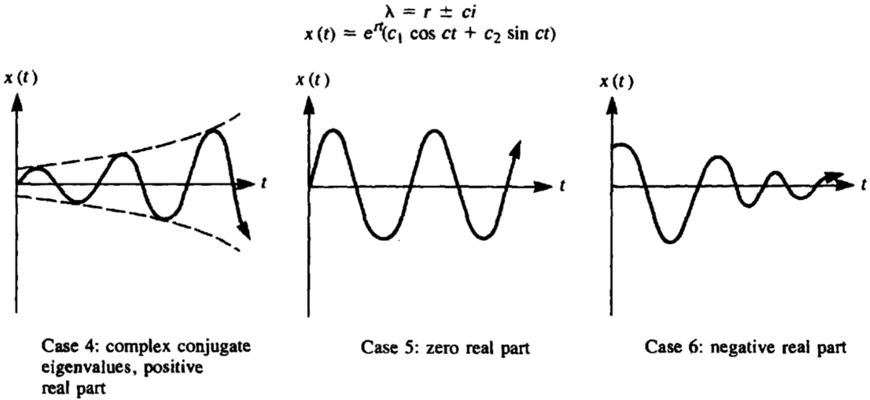


Figura: Comportamento das soluções quando a matriz de coeficientes tem autovalores complexos.

Resolução de Exemplo

Continuação Exemplo Jones e McGregor

Queremos resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

em que $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$.

Resolução de Exemplo

Continuação Exemplo Jones e McGregor

Queremos resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

em que $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$.

Supondo $\vec{\boldsymbol{x}}(t) = \vec{\boldsymbol{v}} e^{\lambda t}$ solução, vamos achar os autovalores λ e autovetores $\vec{\boldsymbol{v}}$ associados.

Resolução de Exemplo

Os autovalores λ podem ser computados através do cálculo de

$$det(A - I\boldsymbol{v}) = 0.$$

Ou seja, nesse caso temos,

$$0 = det(A - I\boldsymbol{v})$$

$$0 = det\left[\begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]$$

$$0 = det\begin{pmatrix} 0.3 - \lambda & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 - \lambda \end{pmatrix}$$

Resolução de Exemplo

Computando o determinante, obtemos o polinômio característico

$$p(\lambda) = (0.3 - \lambda)(0.4 - \lambda) - 0.02,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 0.2$ e $\lambda_2 = 0.5$. Os autovalores respectivos podem ser computados pela equação $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ e, nesse caso correspondem a

$$\vec{\boldsymbol{v_1}} = [-1, 1]$$

e

$$\vec{\boldsymbol{v_2}} = [2, 1]$$

Solução do Exemplo

Assim, concluímos que a solução do sistema é

$$\vec{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0.2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0.5t}.$$

Ou seja,

$$x(t) = -c_1 e^{0.2t} + c_2 e^{0.5t}$$
$$y(t) = c_1 e^{0.2t} + c_2 e^{0.5t}$$

Gráfico da Solução

Figura: Simulação da função exponencial em `https://www.geogebra.org/graphing`.

Organização

Tempo Discreto

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, y_0)$$

Tempo Discreto

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, y_0)$$

- Em muitas aplicações da matemática o tempo é discreto.

Tempo Discreto

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, y_0)$$

- Em muitas aplicações da matemática o tempo é discreto.
- As grandezas são medidas em instantes isolados, formando uma **sequência**.

Tempo Discreto

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, y_0)$$

- Em muitas aplicações da matemática o tempo é discreto.
- As grandezas são medidas em instantes isolados, formando uma **sequência**.
- Neste caso, vamos substituir as Equações Diferenciais por Equações de Diferença.

Equação de Diferenças Lineares

Equação de diferenças:

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \ldots, y_1, y_0)$$

Equação de Diferenças Lineares

Equação de diferenças:

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_1, y_0)$$

Equação de Diferenças Linear:

$$y_k = \alpha_{k-1} y_{k-1} + \alpha_{k-2} y_{k-2} + \cdots + \alpha_1 y_1 + \alpha_0 y_0$$

Sistema de Equação de Diferenças

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as variáveis de interesse e x_i^k a variável de interesse em um ponto discreto no tempo, temos, então, de forma geral:

$$\begin{cases} x_1^k = f(x_1^{k-1}, \ldots x_1^0,\ x_2^{k-1}, \ldots, x_2^0, \ldots, x_n^{k-1}, \ldots, x_n^0) \\ x_2^k = f(x_1^{k-1}, \ldots x_1^0,\ x_2^{k-1}, \ldots, x_2^0, \ldots, x_n^{k-1}, \ldots, x_n^0) \\ x_n^k = f(x_1^{k-1}, \ldots x_1^0,\ x_2^{k-1}, \ldots, x_2^0, \ldots, x_n^{k-1}, \ldots, x_n^0) \end{cases}$$

Sistema de Equação de Diferenças Linear

Geralmente, é possível escrever Sistemas de Equações de Diferenças Lineares utilizando só a variável no tempo anterior:

$$\begin{cases} x_1^k = a_{11}\ x_1^{k-1} + a_{12} - x_2^{k-1} + \cdots + a_{1n}\ x_n^{k-1} \\ x_2^k = a_{21}\ x_1^{k-1} + a_{22} - x_2^{k-1} + \cdots + a_{2n}\ x_n^{k-1} \\ x_n^k = a_{n1}\ x_1^{k-1} + a_{n2} - x_2^{k-1} + \cdots + a_{nn}\ x_n^{k-1} \end{cases}$$

Forma Matricial

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{k-1} \\ x_2^{k-1} \\ \vdots \\ x_n^{k-1} \end{bmatrix}$$

Exemplo 5

Vamos modelar o crescimento populacional das tilápias com taxas de sobrevivência.

- *Tilápias são peixes de água doce que apresentam três estágios em seu ciclo de vida: ovos, jovens e adultos.*
- *A capacidade de reproduzir dos adultos ocorre aproximadamente aos 4 meses de idade.*
- *As tilápias podem desovar a cada 2 meses quando a temperatura da água permanece acima de 20ºC.*
- *As fêmeas pões seus ovos nos ninhos que são fecundados pelos machos.*
- *Após a fecundação, as fêmeas recolhem os ovos na boca para a incubação, eclosão e proteção de larvas.*
- *Dependendo do tamanho da fêmea, o número de ovos produzidos pode variar de 100 a 600 por desova com uma taxa de mortalidade igual a 50%.*

Modelagem Matemática

Considerações para o modelo matemático:

Modelagem Matemática

Considerações para o modelo matemático:

1. Somente a fêmea adulta desova e o faz a cada 2 meses;

Modelagem Matemática

Considerações para o modelo matemático:

1. Somente a fêmea adulta desova e o faz a cada 2 meses;
2. Após 4 meses um alevino torna-se adulto;

Modelagem Matemática

Considerações para o modelo matemático:

1. Somente a fêmea adulta desova e o faz a cada 2 meses;
2. Após 4 meses um alevino torna-se adulto;
3. As probabilidades de nascer macho ou fêmea são iguais

Modelagem Matemática

Considerações para o modelo matemático:

1. Somente a fêmea adulta desova e o faz a cada 2 meses;
2. Após 4 meses um alevino torna-se adulto;
3. As probabilidades de nascer macho ou fêmea são iguais

Seja c a quantidade de ovos de uma desova. Então

$$\text{n}^{\text{o}} \text{ de ovos} \times \text{n}^{\text{o}} \text{ de fêmeas} = \frac{1}{2} a_n c$$

é a quantidade de ovos num estágio n, onde a_n é a quantidade de peixes adultos em n. Se α é a taxa de eclosão de ovos então $\alpha c \frac{1}{2} a_n$ são os ovos sobreviventes no estágio n.

Modelagem Matemática

Considerações para o modelo matemático:

1. Somente a fêmea adulta desova e o faz a cada 2 meses;
2. Após 4 meses um alevino torna-se adulto;
3. As probabilidades de nascer macho ou fêmea são iguais

Seja c a quantidade de ovos de uma desova. Então

$$\text{n}^{\text{o}} \text{ de ovos} \times \text{n}^{\text{o}} \text{ de fêmeas} = \frac{1}{2} a_n c$$

é a quantidade de ovos num estágio n, onde a_n é a quantidade de peixes adultos em n. Se α é a taxa de eclosão de ovos então $\alpha c \frac{1}{2} a_n$ são os ovos sobreviventes no estágio n.

Modelagem Matemática

Sejam:

Modelagem Matemática

Sejam:

- $\gamma = \frac{\alpha c}{2}$ a taxa de sobrevivência da população de ovos;

Modelagem Matemática

Sejam:

- $\gamma = \frac{\alpha c}{2}$ a taxa de sobrevivência da população de ovos;
- b_n a quantidade de jovens (alevinos) em cada estágio

Modelagem Matemática

Sejam:

- $\gamma = \frac{\alpha c}{2}$ a taxa de sobrevivência da população de ovos;
- b_n a quantidade de jovens (alevinos) em cada estágio
- β a taxa de conversão de alevinos para adultos;

Modelagem Matemática

Sejam:

- $\gamma = \frac{\alpha c}{2}$ a taxa de sobrevivência da população de ovos;
- b_n a quantidade de jovens (alevinos) em cada estágio
- β a taxa de conversão de alevinos para adultos;
- δ a taxa de sobrevivência dos adultos;

Modelagem Matemática

Sejam:

- $\gamma = \frac{\alpha c}{2}$ a taxa de sobrevivência da população de ovos;
- b_n a quantidade de jovens (alevinos) em cada estágio
- β a taxa de conversão de alevinos para adultos;
- δ a taxa de sobrevivência dos adultos;
- a_n a quantidade de adultos em cada estágio n: (adultos que sobreviveram no estágio $(n-1)$+(jovens que chegaram à fase adulta)$a_n = \delta a_{n-1} +_{n-1}$

Modelagem Matemática

Sejam:

- $\gamma = \frac{\alpha c}{2}$ a taxa de sobrevivência da população de ovos;
- b_n a quantidade de jovens (alevinos) em cada estágio
- β a taxa de conversão de alevinos para adultos;
- δ a taxa de sobrevivência dos adultos;
- a_n a quantidade de adultos em cada estágio n: (adultos que sobreviveram no estágio $(n-1)$+(jovens que chegaram à fase adulta)$a_n = \delta a_{n-1} +_{n-1}$
- c_n a quantidade de ovos viáveis em cada estágio n: $c_n =$ (ovos provenientes das desovas de adultos) + (ovos provenientes da desova dos alevinos que chegaram na fase adulta) $c_n = \gamma a_{n-1} + \gamma\beta b_{n-1}$

Modelagem Matemática

Sejam:

- $\gamma = \frac{\alpha c}{2}$ a taxa de sobrevivência da população de ovos;
- b_n a quantidade de jovens (alevinos) em cada estágio
- β a taxa de conversão de alevinos para adultos;
- δ a taxa de sobrevivência dos adultos;
- a_n a quantidade de adultos em cada estágio n: (adultos que sobreviveram no estágio $(n-1)$+(jovens que chegaram à fase adulta)$a_n = \delta a_{n-1} +_{n-1}$
- c_n a quantidade de ovos viáveis em cada estágio n: $c_n =$ (ovos provenientes das desovas de adultos) + (ovos provenientes da desova dos alevinos que chegaram na fase adulta) $c_n = \gamma a_{n-1} + \gamma\beta b_{n-1}$
- b_n jovens sobreviventes do estágio $(n-1)$ $b_n = c_{n-1}$

Sistema Linear

Assim obtemos um sistema linear de ordem 3:

$$\begin{cases} a_n = \delta a_{n-1} + \beta b_{n-1} \\ \\ b_n = c_{n-1} \\ \\ c_n = \gamma a_{n-1} + \gamma\beta b_{n-1} \end{cases}$$

Sistema Linear

Assim obtemos um sistema linear de ordem 3:

$$\begin{cases} a_n = \delta a_{n-1} + \beta b_{n-1} \\ \\ b_n = c_{n-1} \\ \\ c_n = \gamma a_{n-1} + \gamma\beta b_{n-1} \end{cases}$$

Escrevendo este sistema na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \\ b_n \\ \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & \beta & 0 \\ \\ 0 & 0 & 1 \\ \\ \gamma & \gamma\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ \\ b_{n-1} \\ \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Solução Equação

Os autovalores são dados pelas raízes da equação característica:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} \delta - \lambda & \beta & 0 \\ 0 & 0 - \lambda & 1 \\ \gamma & \gamma\beta & 0 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2\delta + \gamma\beta\lambda + (\gamma\beta + \gamma\beta\delta) = 0$$

E autovetores associados da forma:

$$v = [\frac{-\beta}{(\delta - \lambda)}, 1, \lambda]$$

Solução tipo 1:Autovalores e Autovetores

$$\delta = 0.99$$

$$\gamma = 0.9$$

$$\beta = 0.9$$

Solução tipo 1:Autovalores e Autovetores

$$\delta = 0.99$$

$$\gamma = 0.9$$

$$\beta = 0.9$$

Obtemos três autovetores:

$$\lambda_1 \approx -0.524 \quad \vec{v}_1 = [-0.594,\ 11,\ -0.524]$$

$$\lambda_2 \approx -0.01 \quad \vec{v}_2 = [-0.9,\ 1,\ -0.01]$$

$$\lambda_3 \approx 1.52 \quad \vec{v}_3 = [-1.698,\ 1,\ 1.52]$$

Solução tipo 1: Forma geral

Então, encontramos uma solução do tipo:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \\ b_n \\ \\ c_n \end{pmatrix} = e^{-0.524t} \begin{pmatrix} -0.594 \\ \\ 1 \\ \\ -0.524 \end{pmatrix} + e^{-0.01t} \begin{pmatrix} -1.698 \\ \\ 1 \\ \\ -0.01 \end{pmatrix} + e^{1.52t} \begin{pmatrix} -0.9 \\ \\ 1 \\ \\ 1.52 \end{pmatrix}$$

Solução tipo 1: Gráfico

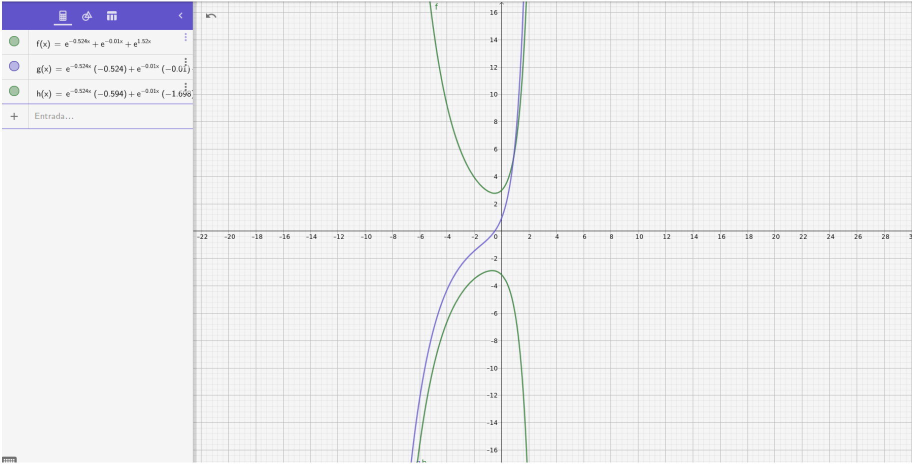


Figura: Gráfico Soluções do Exemplo.

Solução tipo 2: Autovalores e Autovetores

$$\delta = 0.5$$

$$\gamma = 0.2$$

$$\beta = 0.1$$

Solução tipo 2: Autovalores e Autovetores

$$\delta = 0.5$$

$$\gamma = 0.2$$

$$\beta = 0.1$$

Obtemos dois autovetores ($lambda_1$ com multiplicidade 2):

$$\lambda_1 \approx 0.812 \quad \vec{v}_1 = [1,\ 3.12,\ 2.53]$$

$$\lambda_2 \approx -0.156 + i0.45 \quad \vec{v}_2 = [1,\ -6.5 + i4.5,\ 2.56 + i4.77]$$

$$\lambda_2 \approx -0.156 - i0.45 \quad \vec{v}_2 = [1,\ -6.5 - i4.5,\ 2.56 + i4.77]$$

Solução tipo 2: Forma Geral

Então, encontramos uma solução do tipo:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \\ b_n \\ \\ c_n \end{pmatrix} = e^{0.812t} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 3.12 \\ \\ 2.53 \end{pmatrix} + e^{-0.156t}(cos(0.45t) + sen(0.45t)) \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -6.5 \\ \\ 2.56 \end{pmatrix}$$

$$+ e^{-0.156t}(cos(0.45t) - sen(0.45t)) \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 4.5 \\ \\ 4.77 \end{pmatrix}$$

Solução tipo 2: Gráfico

Figura: Gráfico Soluções do Exemplo.

Bibliografia

- Arthur Mattuck, Haynes Miller, Jeremy Orloff, and John Lewis. 18.03SC Differential Equations. Fall 2011. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. License: Creative Commons BY-NC-SA.
- Edelstein, L. Mathematicals Models in Biology. Classics in Applied Mathematics (Book 46). SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics; 1 edition (February 28, 2005).