Implementação de Modelos de Equações Diferenciais com Álgebra Matricial

Giovanna Castello de Andrade
Larissa Macul Moreno

Agosto 2019

1 Equações Diferenciais Ordinárias

Derivada: a derivada em um ponto de uma função $x = x(t)$ representa a taxa de variação instantânea de x em relação a t neste ponto.

*incluir imagem taxa de variação

Notação derivada: Seja $x = x(t)$ uma função tal que $x : R \longrightarrow R$. Então, a notação para derivadas de primeira ordem é:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \tag{1}$$

Derivada de ordem n:

$$x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n} \tag{2}$$

Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob a forma das respectivas derivadas. Equações diferenciais representam variação ao longo do tempo de um certo fenômeno ou acontecimento.

Definição matemática: Seja $t \in R$. Uma equação da forma:

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0 \tag{3}$$

Exemplos:

$$x'(t) = 2t \tag{4}$$

$$x''(t) = x'(t) + x^2(t)cos(t) \tag{5}$$

Ordem de eq. diferenciais: Chama-se ordem da equação diferencial à maior das ordens das derivadas que nela aparecem.

Nem sempre é possível obter solução analítica para uma equação diferencial. (Quase nunca é possível encontrar solução analítica)

ED linear x ED não linear. Vamos falar de Eq. lineares.

Outras questões relevantes podem ser estudadas:

qual o comportamento de longo prazo das soluções? Serão periódicas? Tenderão para algum valor? Como reagem a pequenas perturbações?

um eq. diferencial linear tem apenas uma única solução geral. Encontra-se uma solução particular utilizando ponto de fronteira ou ponto de valor inicial (PVI). - solução da eq. linear + exemplo.

**resolver uma equação diferencial linear p/ achar a solução exponencial

2 Sistemas de Equações Diferenciais

Muitas vezes estudamos sistemas que não são descritos por uma, mas sim por várias variáveis de estado e nosso objetivo consiste em entender como tais variáveis se comportam ao longo do tempo. Nestes casos é comum escrevermos uma equação diferencial associada à cada uma das variáveis e trabalhamos com elas em conjunto como *sistemas de equações diferenciais.*

A princípio, poderiamos pensar que seria suficiente resolver cada equação diferencial isoladamente, tratando-as como problemas separados como os descritos na sessão anterior. O grande empecilho para isso consiste no fato de que muitas vezes a variação de uma das variáveis com o tempo depende de uma outra variável. Quando desejamos, por exemplo, avaliar o número de indíviduos ao longo de tempo de duas espécies que competem entre si, é intuitivo pensar que a taxa de variação de cada população depende do número de indivíduos da outra população. Quanto maior for a outra população, maior a competição e menor a taxa de crescimento. Isso implica que as equações diferciais precisam ser trabalhadas em conjunto.

De forma geral, considerando um sistema com n variáveis e denotando-as por $x_1, x_2, \dots x_n$, um *sistema de equações diferencias de primeira ordem* pode ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \tag{6}$$

Note que estamos considerando que as variáveis $x_1, \dots, x_n$ são funções do tempo apenas, ou seja, seus valores não dependem das demais variáveis. Isso implica que não há necessidade de trabalhar com derivadas parciais e, portanto, todas as equações diferenciais serão ordinárias. Por outro lado, as taxas de variação $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ dependem das demais variáveis e é exatamente a forma com que essas relações de dependência estão estabelecidas que determinarão qual o tipo de sistema de equações diferencias ordinárias que estamos trabalhando.

A primeira distinção se da quando as funções $F_1, \dots, F_n$ são lineares nas variáveis $x_1, \dots, x_n$. Nesse caso obtemos um *sistema de equações diferenciais de primeira ordem linear*, que de forma geral pode ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)\ x_1 + a_{12}(t)\ x_2 + \cdots + a_{1n}(t)\ x_n + q_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)\ x_1 + a_{22}(t)\ x_2 + \cdots + a_{2n}(t)\ x_n + q_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)\ x_1 + a_{n2}(t)\ x_2 + \cdots + a_{nn}(t)\ x_n + q_n(t) \end{cases} \tag{7}$$

A grande vantagem desses sistemas, quando comparado com sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares é que eles podem ser reescritos em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

ou, de forma reduzida, como

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{x}}}{dt} = A\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{q}},$$

em que

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{x}}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}.$$

Quando o vetor $\vec{q}$ é nulo, obtemos um *sistema de equações diferenciais de primeira ordem linear homogêneo.*

- existência e unicidade de soluções
- transformação de problemas de segunda ordem em sistemas de equações diferenciais de primeira ordem

Como exemplo, podemos escrever o seguite modelo para descrever o crescimeto de actérias em fução do tempo.

3 Introdução Álgebra Linear, Autovalores e Autoveres

4 Transformação de Sistemas Lineares em Problemas de Álgebra Matricial

Vamos considerar, em um primeiro momento, um sistema de duas equações diferenciais homogeneas com coeficientes constantes, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 \\ \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 \end{cases} \tag{8}$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{x}}}{dt} = A\vec{\boldsymbol{x}}. \tag{9}$$

De forma análoga ao Exemplo (.), descrito na seção anterior, poderiamos supor uma solução do tipo

$$\vec{\boldsymbol{x}}(t) = \vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t}, \tag{10}$$

com parametros λ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ a determinar.

Substituindo esta solução na equação (9), temos que

$$\frac{d(\vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t})}{dt} = A\vec{\boldsymbol{v}}e^{\lambda t}$$

e, computando a derivada,
$$\lambda \vec{\boldsymbol{v}} e^{\lambda t} = A \vec{\boldsymbol{v}} e^{\lambda t}$$
Nesta expressão, temos que o termo $e^{\lambda t}$ é escalar e diferente de zero e, portanto, pode ser simplificado na equação, resultando em
$$\lambda \vec{\boldsymbol{v}} = A \vec{\boldsymbol{v}}$$
ou
$$A\vec{\boldsymbol{v}} - \lambda I \vec{\boldsymbol{v}} = (A - \lambda I)\vec{\boldsymbol{v}} = 0, \tag{11}$$
em que I é a matriz identidade e, portante, λI corresponde a matriz
$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

A equação (11) corresponde ao problema de autovalores da álgebra matricial, descrito na seção anterior. Isso implica que a relação é satisfeita quando λ é autovalor de A associado ao autovetor $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Para um sistema de dimensão 2×2, obteremos sempre dois autovalores e autovetors correspondentes. Assim, obtemos uma solução geral para o sistema do tipo
$$x(t) = c_1 \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} e^{\lambda_2 t},$$
que corresponde a uma versão reduzida de
$$x_1(t) = c_1 v_{11}\ e^{\lambda_1 t} + c_2 v_{21}\ e^{\lambda_2 t}$$
$$x_2(t) = c_1 v_{12}\ e^{\lambda_1 t} + c_2 v_{22}\ e^{\lambda_2 t}$$

Note que os autovalores podem ser reais identicos, reais distintos ou complexos. Para cada um dos casos, obtemos uma forma de solução diferente.

1. Autovalores Iguais

   Neste caso, conseguimos apenas uma solução linearmente indepentente.

2. Autovalores Reais Distintos

3. Autovalores Complexos

Exemplo 1. *Vamos considerar o sistema*
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2 \\ \\ \frac{dx_2}{dt} = 6x_1 - 4x_2 \end{cases} \tag{12}$$
Na forma matricial ele pode ser reescrito como
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Vimos que para achar as solução $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{v}} e^{\lambda t}$ *do sistema, devemos achar os autovalores* λ *e autovetores* $\vec{\boldsymbol{v}}$ *da matriz* A*. De acordo com a seção anterior, isso pode ser feito através do cálculo de*
$$det(A - I\boldsymbol{v}) = 0.$$
Ou seja, nesse caso temos,
$$0 = det(A - I\boldsymbol{v})$$

$$0 = det\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]$$

$$0 = det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 6 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

Aplicando a regra para cálculo de determinantes temos que

$$0 = (3-\lambda)(-4-\lambda) - (-1)(6)$$
$$0 = \lambda^2 + \lambda - 12 + 6$$
$$0 = \lambda^2 + \lambda - 6$$
$$0 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

Assim, obtemos os autovalores $\lambda = 2$ *e* $\lambda = -3$.

Substituindo agora estes cada um desses valores na equação (11)*, temos*

$$(A - \lambda_1 I)\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = det\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & -1 \\ 6 & -4-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0$$

Como $\lambda_1 = 2$*, temos*

$$det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0$$

ou seja,

$$v_{11} - v_{12} = 0$$
$$6v_{11} - 6v_{12} = 0$$

Estas equações são redundantes e delas concluímos que qualquer vetor tal que $v_{11} = v_{12}$ *obedecem a elas. Assim, vamos tomar*

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Repetindo o mesmo processo para $\lambda_2 = -3$*, temos*

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Com isso, concluímos que as duas soluções do sistema são

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

e, portanto, a solução geral da equação é dada por

$$x(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

5 Equações de Diferenças

Eq de diferenças:a mesma coisa, mas agora com termos infinitesimais.

Conjunto de tempo limitado e discreto.

forma da solução linear homogênea

solução eq. diferenças homogênea

solução sistema linear

6 Implementação e Exemplos

7 Referências

http://arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/56/1/ED$_2.pdf$

mathematical models in biology - Leah Edelstein-Keshet