

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH



BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #01: ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN DÙNG KỸ THUẬT TOÁN SƠ CẤP

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

- | | |
|-----------------------|----------|
| 1. Lê Minh Nguyệt | 21521211 |
| 2. Hồ Đức Trưởng | 21522730 |
| 3. Nguyễn Công Nguyên | 21521200 |
| 4. Nguyễn Phương Tùng | 21520524 |

TP.HCM, Ngày 12 tháng 3 năm 2023

Bài 1: Tính tổng hữu hạn

(a)

$$A = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 999$$

A là tổng dãy số cấp số cộng với công sai là 2.

$$A = \left(\frac{999 - 1}{2} + 1 \right) \frac{999 + 1}{2} = 25 \cdot 10^4$$

(b)

$$B = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 1024$$

B là tổng dãy số cấp số nhân với công bội là 2.

$$B = \sum_{i=1}^{10} 2^i = \frac{1(2^1 - 2^{10+1})}{1 - 2} = 2046$$

(c)

$$C = \sum_{i=3}^{n+1} 1 = (n+1) - 3 + 1 = n - 1$$

(d)

$$D = \sum_{i=3}^{n+1} i = (n+1 - 3 + 1) \frac{n+1+3}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 2$$

(e)

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n \end{aligned}$$

(f)

$$F = \sum_{j=1}^n 3^{j+1} = \sum_{j=1}^n (3 \cdot 3^j) = \frac{3(3^1 - 3^{n+1})}{1 - 3} = \frac{9}{2}(3^n - 1)$$

(g)

$$G = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = \sum_{i=1}^n \left(i \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

(h)

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

(i)

$$I = \sum_{j \in \{2,3,5\}} (j^2 + j) = (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (5^2 + 5) = 48$$

(j)

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{100} (i+j) = 101 \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n (i+j) = 101(n+1) \sum_{i=1}^m i + 101 \sum_{i=1}^m \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 101(n+1) \frac{m(m+1)}{2} + 101m \frac{n(n+1)}{2} = \frac{101}{2} (m^2 + m^2n + mn^2 + 2mn + 2m) \end{aligned}$$

Bài 2: Đếm số phép gán và so sánh

1	s=0;	1 gán
2	i=1;	1 gán
3	while (i<=n) do	n+1 ss
4	j=1;	n gán
5	while (j<=i*i) do	$\alpha_i + 1$ ss
6	s=s+1;	α_i gán
7	j=j+1;	α_i gán
8	end do;	
9	i=i+1;	n gán
10	end do;	
11		

Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp while trong (xét độc lập với while ngoài).

Số lần lặp $\alpha_i =$ số con j chạy từ $1 \rightarrow i^2$, bước tăng là 1.

$$\Rightarrow \alpha_i = i^2 - 1 + 1 = i^2$$

$$\begin{aligned} \text{Gán}(n) &= 2 + 2n + \sum_{i=1}^n 2\alpha_i = 2 + 2n + 2 \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} = \frac{2}{3}n^3 + n^2 + \frac{7}{3}n + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SoSánh}(n) &= n + 1 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1) = n + 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n 1 \\ &= 2n + 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1 \end{aligned}$$

Bài 3: Đếm số phép gán và so sánh

1	sum=0;	1 gán
2	i=1;	1 gán
3	while (i<=n) do	$n+1$ ss
4	j=n-i*i;	n gán
5	while (j<=i*i) do	α_i+1 ss
6	sum=sum+i*j;	α_i gán
7	j=j+1;	α_i gán
8	end do;	
9	i=i+1;	n gán
10	end do;	
11		

Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp while trong (xét độc lập với while ngoài).

Số lần lặp $\alpha_i =$ số con j chạy từ $n - i^2 \rightarrow i^2$, bước tăng là 1.

$$\Rightarrow \alpha_i = i^2 - (n - i^2) + 1 = 2i^2 - n + 1$$

Vòng lặp while trong chỉ thực hiện khi $n - i^2 \leq i^2 \Rightarrow i^2 \geq \frac{n}{2}$

Suy ra:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & , \text{ khi } i^2 < \frac{n}{2}. \\ 2i^2 - n + 1 & , \text{ khi } i^2 \geq \frac{n}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Gán}(n) = 2 + 2n + \sum_{i=1}^n 2\alpha_i = 2 + 2n + 2 \sum_{i=\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \rceil}^n (2i^2 - n + 1)$$

$$= 2 + 2n + 2(1 - n) \left(n - \left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil + 1 \right) + 4 \left(\sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^{\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \rceil - 1} i^2 \right)$$

$$= 2 + 2n + 2(1 - n) \left(n - \left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil + 1 \right) + 4 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{\left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil \left(\left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil + 1 \right) \left(2\left\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \right\rceil + 1 \right)}{6} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{SoSánh}(n) &= n + 1 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1) = n + 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n 1 \\ &= 2n + 1 + \sum_{i=\lceil \sqrt{\frac{n}{2}} \rceil}^n (2i^2 - n + 1) \end{aligned}$$