

Entrega: Curso De Datos Extremales

Laura Montaldo, CI: 3.512.962-7

2024-02-08



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



Índice

Resumen	3
Motivación y objetivo del estudio	4
Marco Teórico	6
Teoría asintótica clásica y las distribuciones extremales y sus dominios de atracción	6
Las distribuciones extremales	7
Distribución de Gumbel	7
Distribución de Weibull	7
Distribución de Fréchet	7
Teorema 1: Relaciones entre las versiones standard de las distribuciones extremales	8
Teorema 2: Algunos datos de las distribuciones extremales	8
Teorema 3: Fischer-Tippet-Gnedenko (FTG)	10
Referencias bibliográficas	12

Resumen

Your abstract goes here.

Motivación y objetivo del estudio

Los índices de *S&P* son una familia de índices de renta variable¹ diseñados para medir el rendimiento del mercado de acciones en Estados Unidos que cotizan en bolsas estadounidenses. Ésta familia de índices está compuesta por una amplia variedad de índices basados en tamaño, sector y estilo. Los índices están ponderados por el criterio *float-adjusted market capitalization* (FMC). Además, se disponen de índices ponderados de manera equitativa y con límite de capitalización de mercado, como es el caso del *S&P 500*. En este sentido, el *S&P500* entraría en el conjunto de índices ponderados por capitalización bursátil ajustada a la flotación (ver [S&P Dow Jones Indices](#)). El mismo mide el rendimiento del segmento de gran capitalización del mercado estadounidense. Es considerado como un indicador representativo del mercado de renta variable de los Estados Unidos, y está compuesto por 500 empresas constituyentes.

Se busca crear un indicador de una posible crisis bursátil. Como variable de referencia de toma la relación de precios al cierre de ayer sobre la de hoy

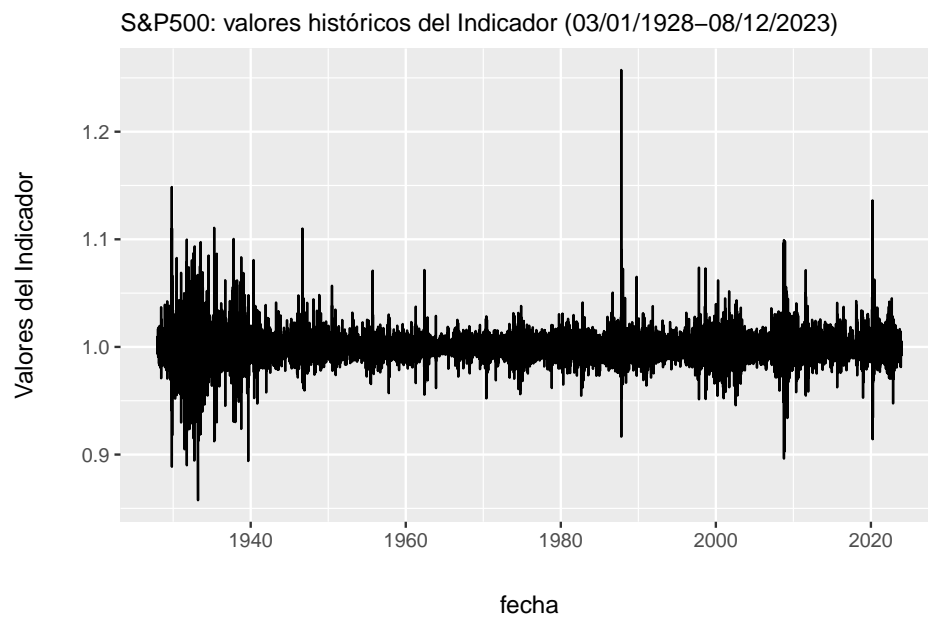
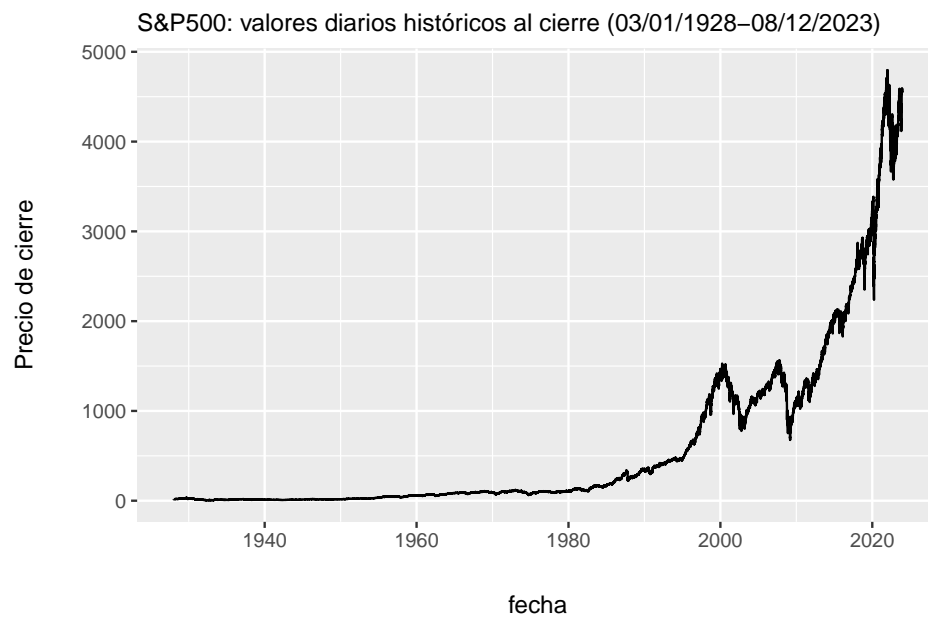
$$Indicador_t = \frac{Precio_{t-1}}{Precio_t}, \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (1)$$

Interpretación del Indicador:

- Si el $Indicador_t \leq 1$, el precio de cierre de hoy es mayor o igual que el de ayer, lo cual podría ser considerado una señal positiva.
- Si el $Indicador_t > 1$, el precio de cierre de hoy es menor que el de ayer, lo cual podría considerarse una señal de alerta.

En la siguiente figura @ref(fig:plot1) se muestra la evolución histórica desde la fecha 03/01/1928 hasta 08/12/2023 del precio al cierre del día del indicador S&P 500.

¹En inglés se llaman equity indices



Marco Teórico

Teoría asintótica clásica y las distribuciones extremales y sus dominios de atracción

Siguiendo Gonzalo y Segura (2024) se dice que tenemos datos extremos cuando cada dato corresponde al máximo o mínimo de varios registros. Son un caso particular de evento raro o gran desviación respecto a la media.

Asumiremos que nuestros datos son *iid* (independientes e idénticamente distribuidos, son dos suposiciones juntas). Esta doble suposición suele no ser realista en aplicaciones concretas (ninguna de sus dos componentes, incluso) pero para comenzar a entender la teoría clásica, la utilizaremos por un tiempo.

Si tenemos datos X_1, \dots, X_n *iid* con distribución F , entonces $X_n^* = \max(X_1, \dots, X_n)$ tiene distribución F_n^* dada por $F_n^*(t) = F(t)_n$. Si conocemos la distribución F conoceríamos la distribución F_n^* , pero en algunos casos la lectura que queda registrada es la del dato máximo y no la de cada observación que dio lugar al mismo, por lo que a veces ni siquiera es viable estimar F . Pero aún en los casos en que F es conocida o estimable, si n es grande, la fórmula de F_n^* puede resultar prácticamente inmanejable. En una línea de trabajo similar a la que aporta el Teorema Central del Límite en la estadística de valores medios, un teorema nos va a permitir aproximar F_n^* por distribuciones más sencillas. Este es el Teorema de Fischer-Tippet-Gnedenko (FTG, para abreviar) que presentaremos en breve.

Como X_1, \dots, X_n *iid*, definimos $Y_i = -X_i$ para todo valor de i , entonces Y_1, \dots, Y_n *iid* y además $\min(X_1, \dots, X_n) = -\max(Y_1, \dots, Y_n)$ la teoría asintótica de los mínimos de datos *iid* se reduce a la de los máximos, razón por la que nos concentramos aquí en estudiar el comportamiento asintótico de los máximos exclusivamente.

Las distribuciones extremales

Las distribuciones extremales son tres: la distribución de Gumbel; la distribución de Weibull; la distribución de Fréchet.

Distribución de Gumbel

Se dice que una variable tiene distribución de Gumbel si su distribución es:

$$\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} \quad \text{para todo } x \text{ real}$$

Distribución de Weibull

Se dice que una variable tiene distribución de Weibull de orden $\alpha > 0$ si su distribución es:

$$\Psi_{\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-x)^{\alpha} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Distribución de Fréchet

Se dice que una variable tiene distribución de Fréchet de orden $\alpha > 0$ si su distribución es:

$$\Phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Teorema 1: Relaciones entre las versiones standard de las distribuciones extremales

X tiene distribución $\Phi_\alpha(x)$ si y sólo si $(-1/X)$ tiene distribución $\Psi_\alpha(x)$ si y sólo si $\log(X^\alpha)$ tiene distribución Λ .

Teorema 2: Algunos datos de las distribuciones extremales

Parte 1 Si X tiene distribución $\Lambda^{(\mu, \beta)}$ entonces tiene:

- a) Valor esperado: $E(X) = \mu + \beta\gamma$, donde γ es la constante de Euler-Mascheroni, cuyo valor aproximado es 0.5772156649.
- b) Moda: μ
- c) Mediana: $\mu - \beta \log(\log 2) \approx \mu - 0.36651\beta$.
- d) Desviación estándar: $\beta\pi\sqrt{6} \approx 1.2825\beta$.
- e) Si $X^+ = \max(X, 0)$, entonces $E(X + k)$ es finito para todo valor de k natural.
- f) Para simular computacionalmente X , se puede tomar U uniforme en $(0, 1)$ y hacer $X = \mu - \beta \log(-\log U)$.

Parte 2 Si X tiene distribución $\Psi_\alpha^{(\mu, \beta)}$ entonces tiene:

- a) Valor esperado: $E(X) = \mu + \beta\Gamma(1 + 1/\alpha)$.
- b) Moda: μ si $\alpha \leq 1$ y $\mu - \beta\{(\alpha - 1)/\alpha\}^{(1/\alpha)}$ si $\alpha > 1$.
- c) Mediana: $\mu - \beta \log(2)^{(1/\alpha)}$.
- d) Desviación estándar: $\beta\{\Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma(1 + 1/\alpha)^2\}^{1/2}$.

Parte 2 Si X tiene una distribución $\Phi_{\alpha}^{(\mu, \beta)}$ entonces se tiene:

- a) Valor esperado: $E(X) = \mu + \beta\Gamma(1 - 1/\alpha)$ si $\alpha > 1$, ∞ en caso contrario.
- b) Moda: $\mu + \beta\Gamma(1 - 1/\alpha)$ si $\alpha > 1$.
- c) Mediana: $\mu + \beta \log(2)^{(-1/\alpha)}$.
- d) Desviación estándar: $\beta|\Gamma(1 - 2/\alpha) - \Gamma(1 - 1/\alpha)^2|$ si $\alpha > 2$, ∞ si $1 < \alpha \leq 2$.

Teorema 3: Fischer-Tippet-Gnedenko (FTG)

Si X_1, \dots, X_n *iid* con distribución F “continua”, llamamos F_n^* a la distribución de $\max(X_1, \dots, X_n)$ y n es grande, entonces existen μ real y $\beta > 0$ tales que alguna de las siguientes tres afirmaciones es correcta:

- 1) F_n^* se puede aproximar por la distribución de $\mu + \beta Y$ con Y variable con distribución Λ .
- 2) Existe $\alpha > 0$ tal que F_n^* se puede aproximar por la distribución de $\mu + \beta Y$ con Y variable con distribución Φ_α .
- 3) Existe $\alpha > 0$ tal que F_n^* se puede aproximar por la distribución de $\mu + \beta Y$ con Y variable con distribución Φ_α .

Lo anterior equivale a decir que la distribución del máximo de datos “continuos” e *iid*, si n es grande, puede aproximarse por una Gumbel, una Fréchet o una Weibull. Una aproximación será válida dependiendo de la distribución de F . En este sentido, cuando F sea normal entonces F_n^* se puede aproximar como una Gumbel. Cuando F sea uniforme, se puede aproximar F_n^* como una Weibull y cuando F sea Cauchy entonces F_n^* se puede aproximar por una Fréchet.

Más precisamente, cuál de las tres aproximaciones es la aplicable depende de la cola de F (los valores de $F(t)$ para valores grandes de t). En concreto, Weibull aparece cuando F es la distribución de una variable acotada por arriba (como la Uniforme), Gumbel para distribuciones de variables no acotadas por arriba pero con colas muy livianas (caso Exponencial y Normal) y Fréchet para colas pesadas (caso Cauchy)².

Como consecuencia del *FTG* cuando se tengan datos máximos, las distribuciones maximales podrían ser candidatas de uno de los ajustes si

- la cantidad de registros es lo suficientemente grande
- los registros son *iid* aunque con versiones más generales del *FTG* este supuesto puede no cumplirse

²Si bien la hipótesis de continuidad de F no es esencial, si F tiene la distribución Binomial o Poisson, por ejemplo, no se puede aplicar ninguna de las tres aproximaciones anteriores.

Como la mayoría de tests de ajustes suponen datos *iid*, se van a realizar dos tests de aleatoriedad³ a los datos:

- Runs up and down
- Spearman correlation of ranks

Se emplea la prueba de ajuste χ^2 que requiere seleccionar una partición más o menos arbitraria de la recta real de intervalos siendo importante que en cada intervalo haya una cantidad lo suficientemente importante de datos de la muestra. En este sentido, se pueden tomar como extremos de los intervalos los quintiles empíricos de la muestra. Cabe mencionar que este test requiere estimar parámetros por el método de Máxima Verosimilitud Categórica.

Cabe mencionar que para este estudio la distribución de la variable a incorporar en este estudio no tiene que ser degenerada, es decir $H(t) = 0$ ó $H(t) = 1$.

³En inglés se expresa como *randomness*

Referencias bibliográficas

Gonzalo, P., Segura, A., 2024. Notas del curso.