



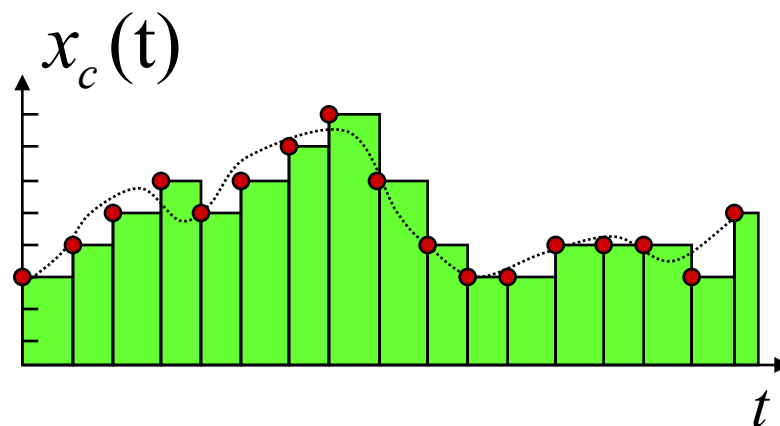
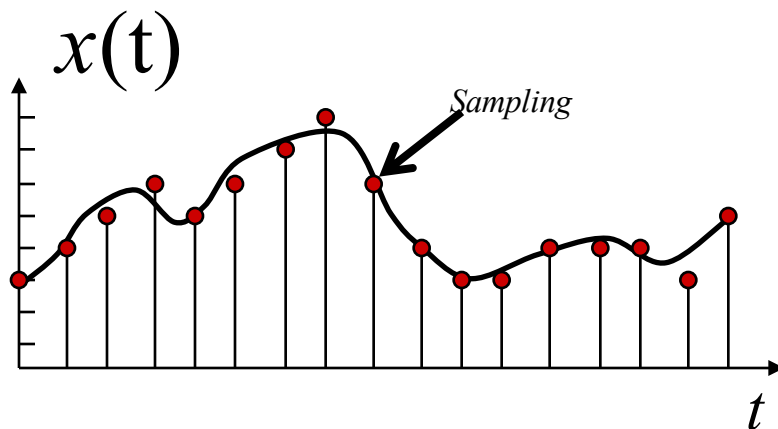
CS,DLMRI,GLMRI

林梦然

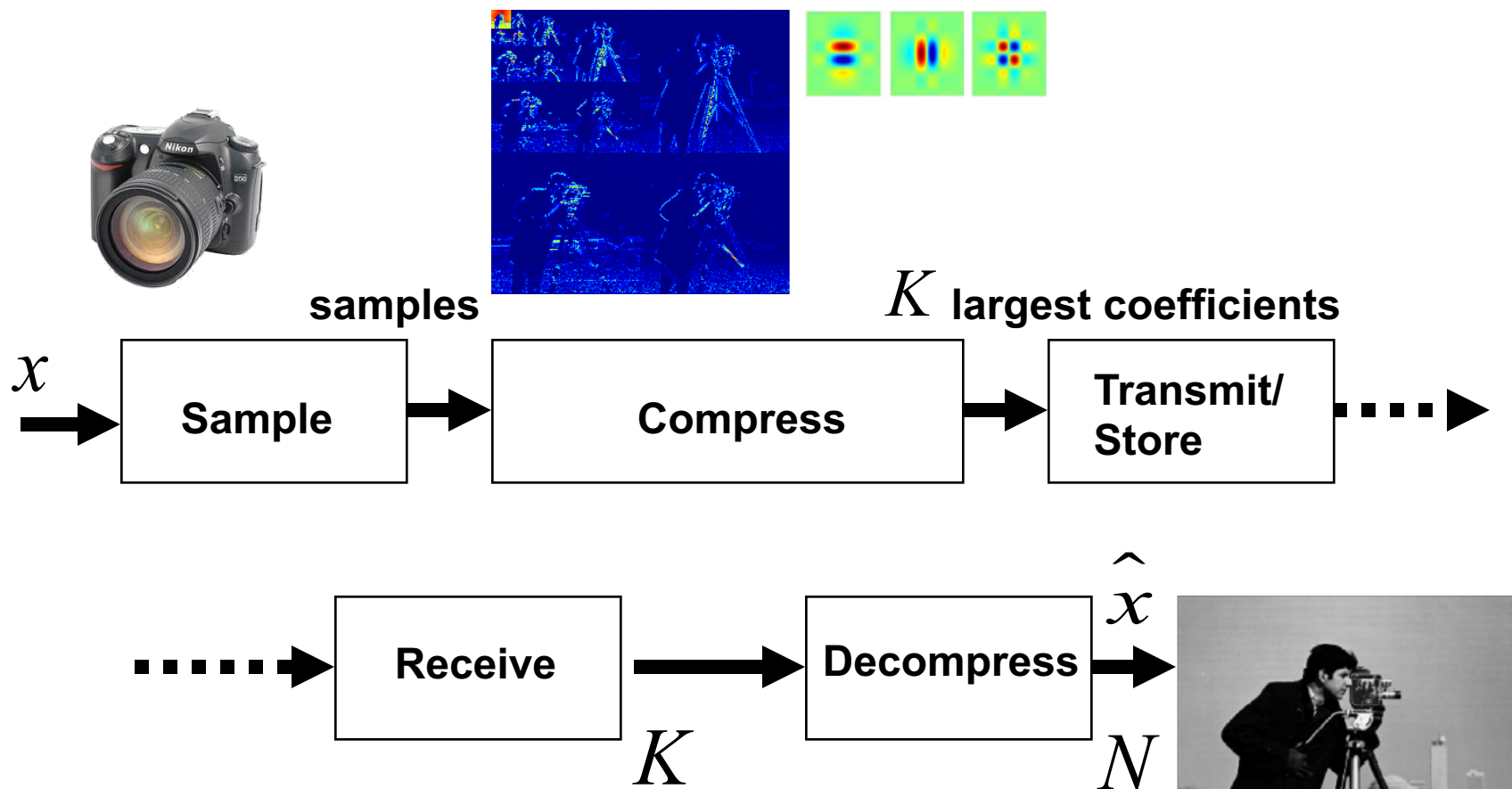
传统的采样定理

■ Nyquist-Shannon采样定理

$$f_{\text{sampling}} \geq 2f_{\text{max}}$$



先采样，再压缩



MP3, JPEG, JPEG200, MPEG...



存在的问题

■ 通常情况下

- 声音: MP3, AAC... ~10:1 compression
- 图像: JPEG, JPEG2000... ~20:1 compression
- 视频: MPEG2, MPEG4... ~40:1 compression

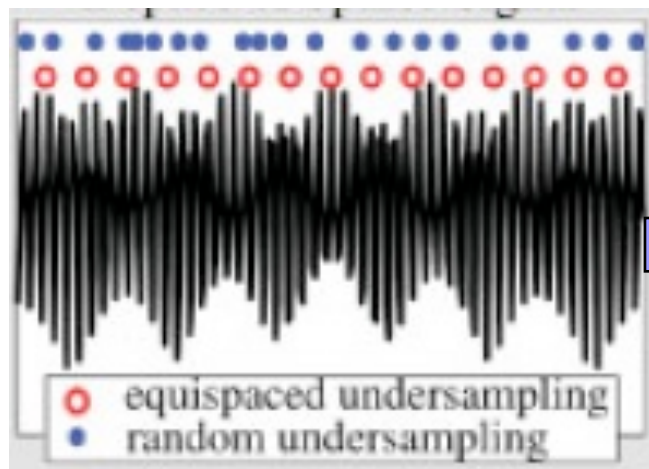
■ 问题

- 传统采样方法浪费严重：先采集所有数据，然后丢弃绝大部分数据。

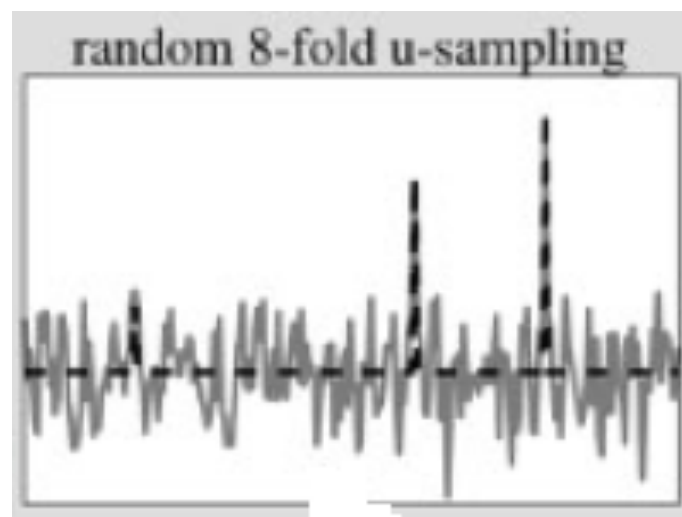
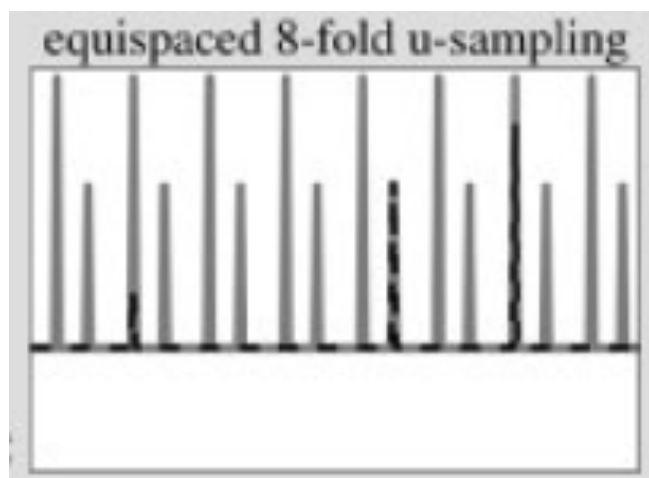
压缩传感（Compressive Sensing）

- 在采样的同时进行压缩
 - 也称为Compressed Sensing, Compressed Sampling。
- 也称为压缩感知

如何实现？



FFT



CS的三个关键因素

- 随机采样
- 信号的稀疏表示
 - 越稀疏，需要的采样越少
- 重建算法
 - 速度快，精度高

模型

$$y_{M \times 1} = \Phi_{M \times N} x_{N \times 1}, N \gg M$$

$$y_1 = \left\langle \begin{array}{c} \text{Image of a person with a camera} \end{array}, \begin{array}{c} \Phi_1 \end{array} \right\rangle$$
$$y_M = \left\langle \begin{array}{c} \text{Image of a person with a camera} \end{array}, \begin{array}{c} \Phi_M \end{array} \right\rangle$$

Φ 称为传感矩阵 (Sensing Matrix)

稀疏表示

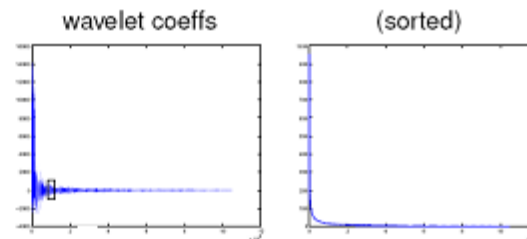
$$x \approx \sum_{i=1}^K \alpha_i \psi_i$$

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{a}$$

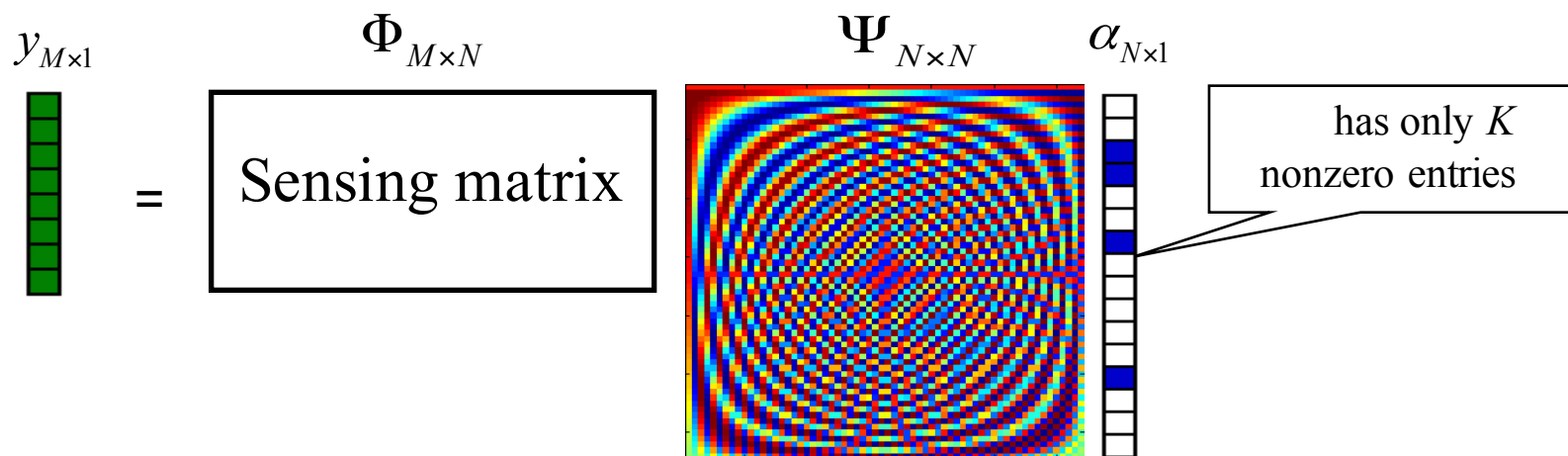
- K = the sparsity level of \mathbf{x} or \mathbf{x} is called K -sparse, $K < M$



1 megapixel image



问题



- 问题：已知 y 和 Φ ，而且 x 在基 Ψ 中具有稀疏表示，如何从 y 重建出 x ？
- 随机性要求 Φ 和 Ψ 之间具有不相关性（Incoherence）
 - 因此， Φ 一般取高斯噪声矩阵

稀疏优化

- 记 $\mathbf{A} = \Phi\Psi$

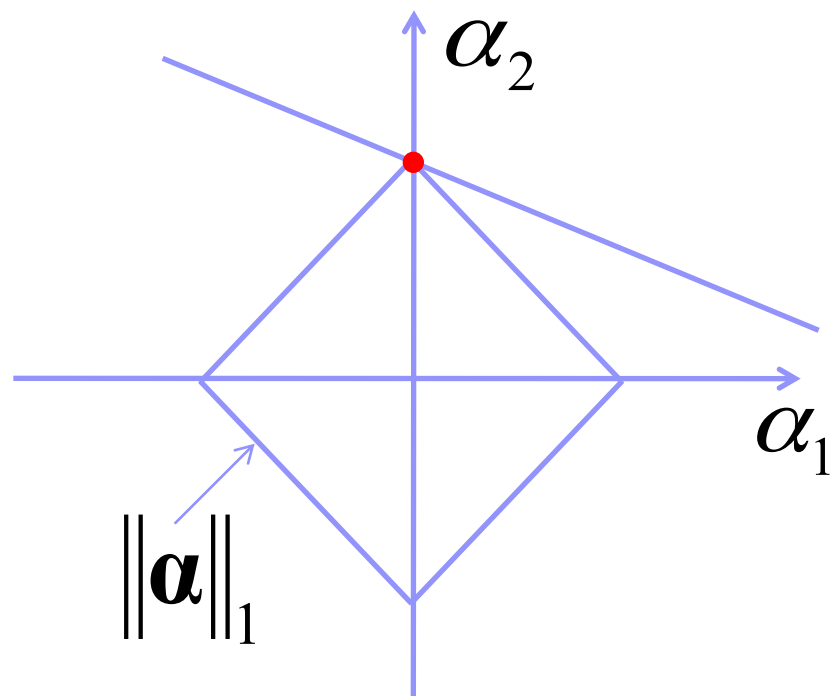
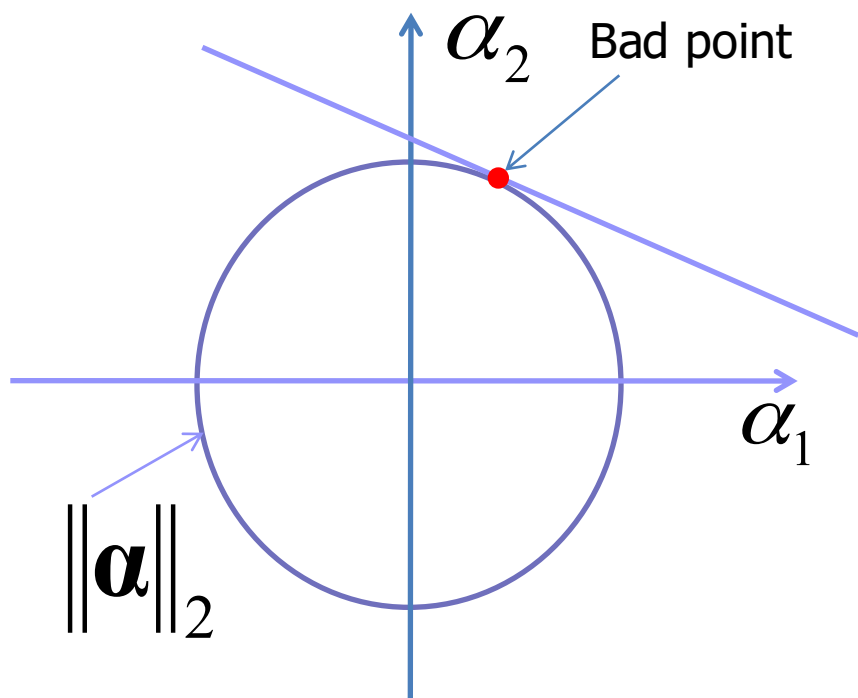
$$\min \|\mathbf{a}\|_0 \quad \text{subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{a}$$

- NP-hard问题，计算不可解

$$\min \|\mathbf{a}\|_1 \quad \text{subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{a}$$

- 凸优化问题，可以用线性规划方法求解。

为什么是1-范数？



为什么是1-范数？（cont.）

- "When a traveler reaches a fork in the road, the L1-norm tells him to take either one way or the other, but the L2-norm instructs him to head off into the bushes."
John F. Claerbout and Francis Muir, 1973

奠基性论文

- Emmanuel Candès and Terence Tao, "Decoding by linear programming" *IEEE Trans. on Information Theory*, 51(12), pp. 4203 - 4215, December 2005
- Emmanuel Candès, Justin Romberg, and Terence Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information," *IEEE Trans. on Information Theory*, 52(2) pp. 489 - 509, Feb. 2006.
- David Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Trans. on Information Theory*, 52(4), pp. 1289 - 1306, Apr. 2006.
- Emmanuel Candès and Michael Wakin, "An introduction to compressive sampling," *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2), pp. 21 - 30, Mar. 2008.

应用领域

■ 人脸识别

John Wright, Allen Y. Yang, Arvind Ganesh, S. Shankar Sastry, and Yi Ma, “Robust Face Recognition via Sparse Representation”, IEEE Trans. PAMI, Feb. 2009

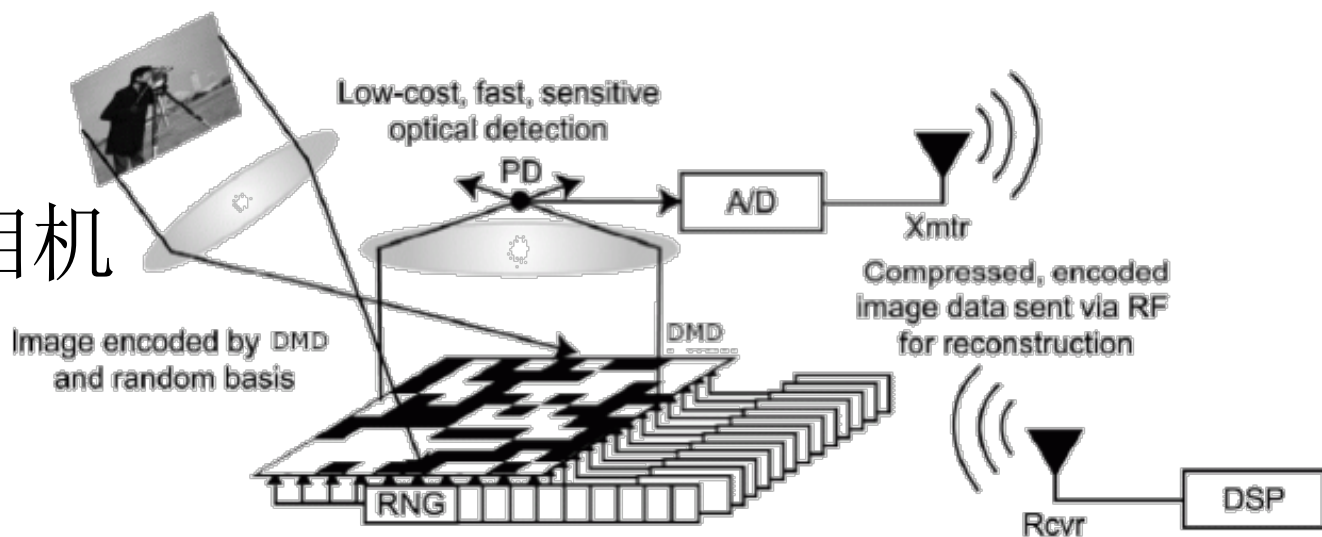
■ 医学成像

M. Lustig, D. L. Donoho, and J. M. Pauly. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging. Magn Reson Med, 58:1182-1195,2007.

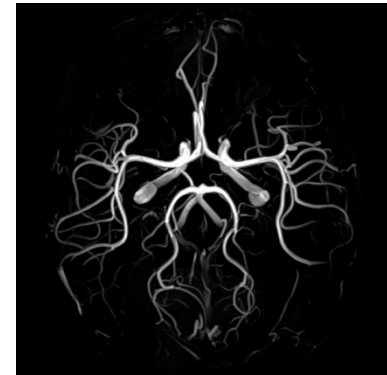
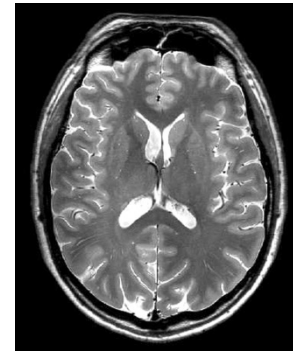
■ 视频编码

■ 容错处理

■ 单像素照相机



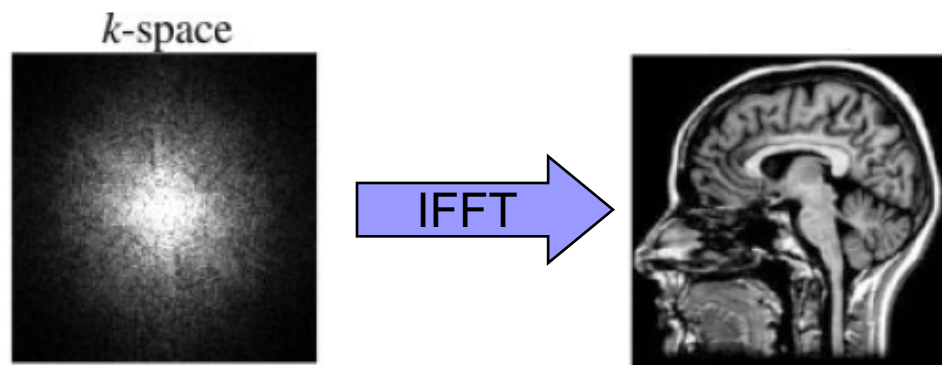
核磁共振成像（MRI）



MRI技术目前已经获得了六次Nobel奖

本质上

- MRI是用硬件的方法实现傅立叶变换
 - 对人体的截面做傅立叶变换，然后采集变换后的数据
 - 通过傅立叶逆变换重建图像



存在的问题

- 扫描时间比较长（几分钟）
 - 扫描过程中，病人必须保持绝对静止
 - 实时成像困难
- 传统解决方法
 - 减少采样量
 - 并行采样
 - 需要硬件支持

减少采样量

- 如果不做任何处理，根据Nyquist-Shannon采样定理，
 - 图像出现混叠（artifacts）
- 在减少采样量的情况下，如何尽可能地重建图像？
 - 正是CS解决的问题

模型

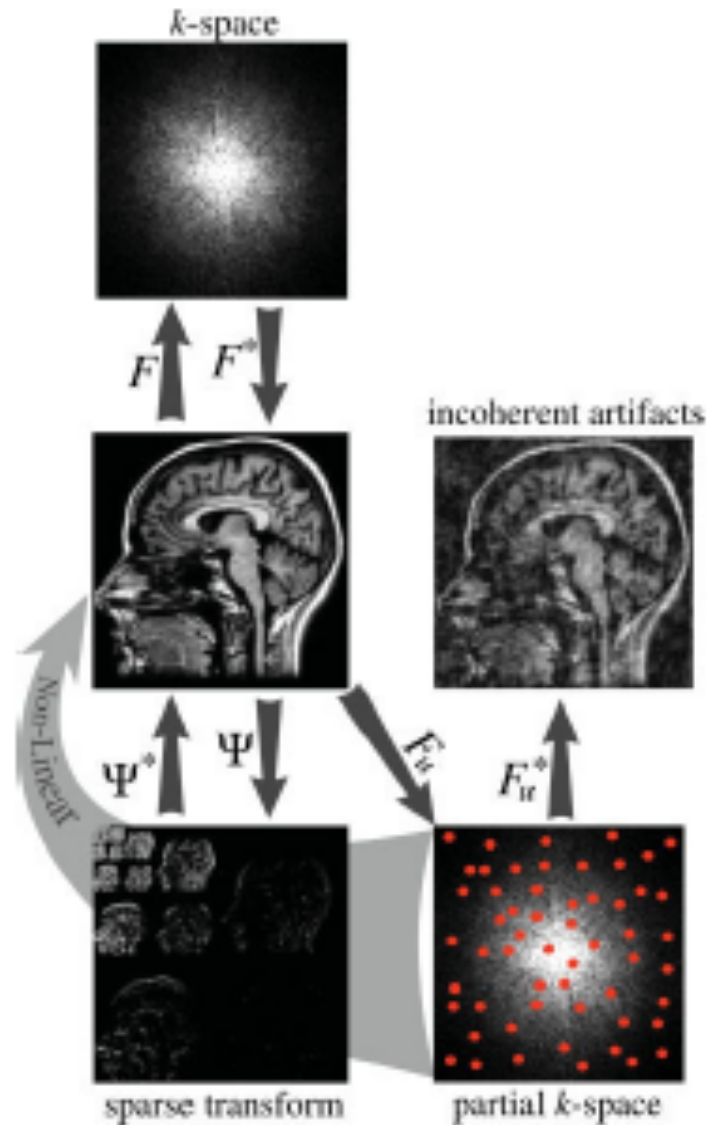
$$\begin{aligned} & \textit{Minimize} : \| \Psi(\mathbf{m}) \|_0 \\ & s.t., \| \Phi_F(\mathbf{m}) - \mathbf{y} \|_2 < \varepsilon \end{aligned}$$

Φ_F Partial Fourier Transform

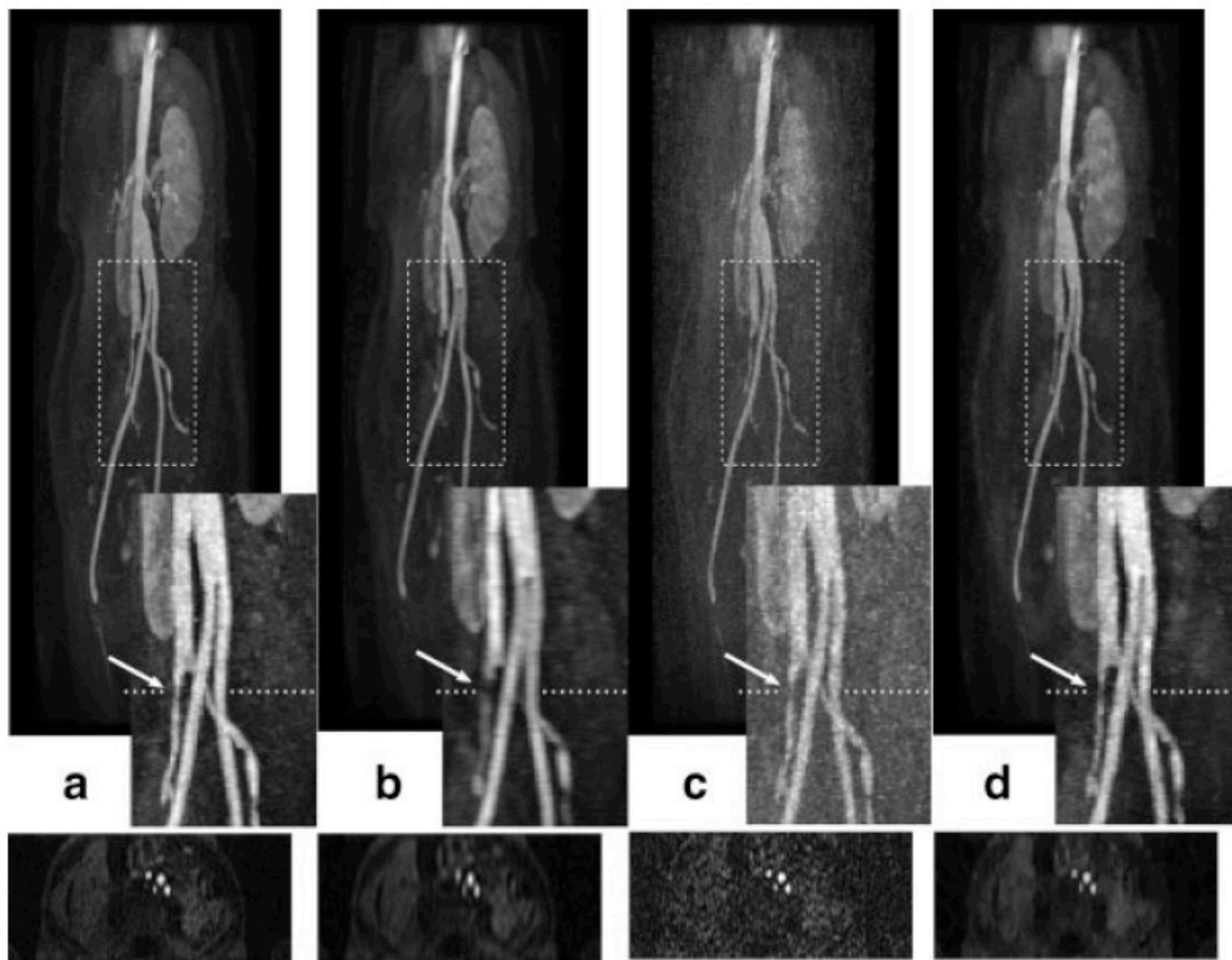
Ψ Sparsifying transform

L. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, Nonlinear Total Variation based noise removal algorithms, Physica D, 60, 259-268, 1992

模型 (cont.)



结果 (cont.)





存在的问题

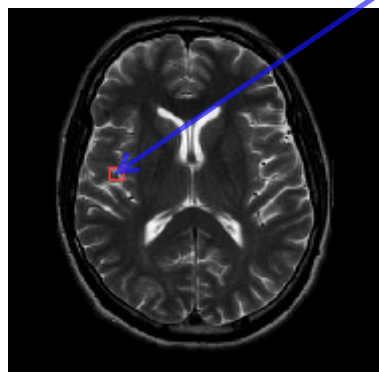
Ψ 是预定义的，对不同图像的适应性参差不齐

DLMRI

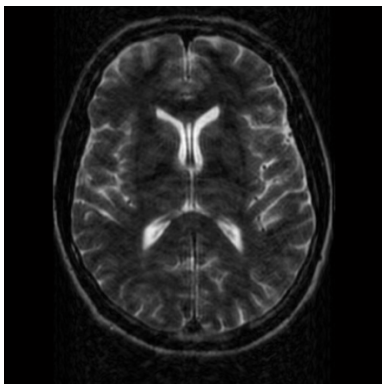
■ 如基于学习的局部稀疏技术

- 字典即稀疏变换是从具体的图像中学习得到的
- 针对图像块的稀疏技术

$$x_{ij} = D\alpha_{ij}$$



要求: overcomplete



D



KSVD



模型

$$P_0 : \min_{x, D, \tau} \sum_{ij} \|R_{ij}x - D\alpha_{ij}\|_2^2 + \nu \|F_u x - y\|_2^2$$

$$s.t. \quad \|\alpha_{ij}\|_0 \leq T_0 \quad \forall i, j.$$

$$P_1 : \min_{D, \tau} \sum_{ij} \|R_{ij}x - \textcolor{red}{D}\alpha_{ij}\|_2^2$$

$$s.t. \quad \|d_k\|_2 = 1 \quad \forall k, \|\alpha_{ij}\|_0 \leq T_0 \quad \forall i, j$$

$$P_2 : \min_x \sum_{ij} \|R_{ij}\textcolor{red}{x} - D\alpha_{ij}\|_2^2 + \nu \|F_u \textcolor{red}{x} - y\|_2^2$$

存在的问题

$$P_0 : \min_{x, D, \tau} \sum_{ij} \|R_{ij}x - D\alpha_{ij}\|_2^2 + \nu \|F_u x - y\|_2^2$$
$$s.t. \quad \|\alpha_{ij}\|_0 \leq T_0 \quad \forall i, j.$$

只考虑图像块级的稀疏，没有顾及到图像整体的结构信息

我的工作

■ 找问题

□ 目前主要的稀疏变换特点

- 图像级的稀疏变换，如小波，DCT
- 图像块级的稀疏变换，如字典学习

□ 将两种稀疏变换（字典）结合起来

- 兼顾了全局稀疏和局部稀疏

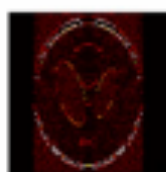
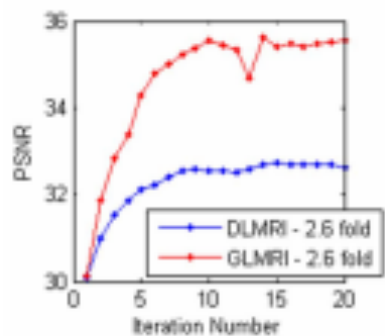
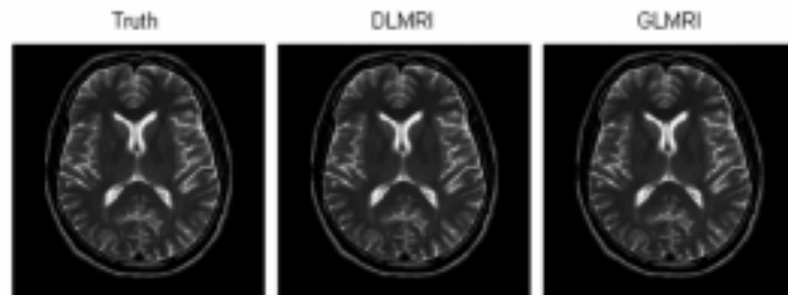
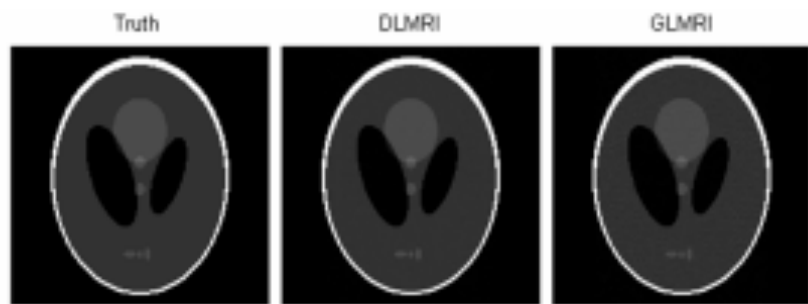
GLMRI

$$P_0 : \min_{x, D, \alpha} \gamma \sum_{ij} \|R_{ij}x - D\alpha_{ij}\|_2^2 + \|F_u x - y\|_2^2 + \beta \|\psi x\|_1$$
$$s.t. \quad \|\alpha_{ij}\|_0 \leq T_0 \quad \forall i, j.$$

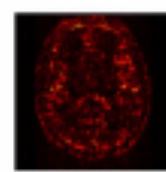
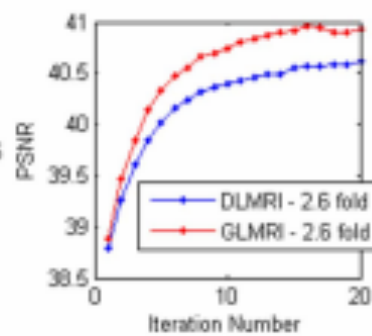
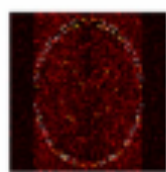
$$P_1 : \min_{D, \alpha} \sum_{ij} \|R_{ij}x - D\alpha_{ij}\|_2^2$$
$$s.t. \quad \forall k, \|\alpha_{ij}\|_0 \leq T_0 \quad \forall i, j$$

$$P_2 : \min_x \gamma \sum_{ij} \|R_{ij}x - D\alpha_{ij}\|_2^2 + \|F_u x - y\|_2^2 + \beta \|\psi x\|_1$$

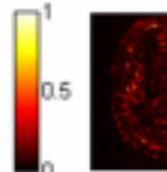
结果



(a)



(b)




GLMRI

$$P_0 : \min_{x, D, \alpha} \gamma \sum_{ij} \|R_{ij}x - D\alpha_{ij}\|_2^2 + \|F_u x - y\|_2^2 + \beta \|\psi x\|_1$$
$$s.t. \quad \|\alpha_{ij}\|_0 \leq T_0 \quad \forall i, j.$$

$$P_1 : \min_{D, \alpha} \sum_{ij} \|R_{ij}x - D\alpha_{ij}\|_2^2$$
$$s.t. \quad \forall k, \|\alpha_{ij}\|_0 \leq T_0 \quad \forall i, j$$

$$P_2 : \min_x \gamma \sum_{ij} \|R_{ij}x - D\alpha_{ij}\|_2^2 + \|F_u x - y\|_2^2 + \beta \|\psi x\|_1$$


$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

谢谢