FCN(5)——DenseCRF推导

冯超
《强化学习精要》《深度学习轻松学》作者,咨询请值乎

本文收录在无痛的机器学习第一季。

经过前两篇文章，我们了解了CRF的基本概念，了解了许许多多的CRF模型，也了解了Mean field variational inference的基本概念，那么这一回我们开始真刀真枪地进行公式推导。其实公式推导的部分在论文的补充材料里有，但是不够详尽，这里我们尽可能地补充一下，让推导过程更加完整。

DenseCRF

前面我们已经看过了DenseCRF的能量函数，如下所示

$$E(x)=\sum_i \psi_u(x_i)+\sum_{i<j}\psi_p(x_i,x_j)$$

其他内容在这就不说了，我们抓紧时间推导。

Variational Inference推导

我们首先给出denseCRF的Gibbs分布：

$$P(X)=\frac{1}{Z}\tilde{P}(X)=\frac{1}{Z}exp(\sum_i \psi_u(x_i)+\sum_{i<j}\psi_p(x_i,x_j))$$

下面给出KL散度部分的推导，其实就是补充材料中的推导，搬运工来了……

$$D(Q||P)=\sum_x Q(x)log(\frac{Q(x)}{P(x)}) \; =-\sum_x Q(x)logP(x)+\sum_x Q(x)logQ(x)$$
$$=-E_{X\in Q}[logP(X)]+E_{X\in Q}[logQ(X)]$$
$$=-E_{X\in Q}[log\tilde{P}(X)]+E_{X\in Q}[logZ]+\sum_i E_{X_i\in Q}[logQ_i(X_i)]$$

$$=-E_{X\in Q}[log\tilde{P}(X)]+logZ+\sum_i E_{X_i\in Q_i}[logQ_i(X_i)]$$

由于我们要求的是Q，而logZ项中没有Q，所以这一项可以省略。

同时Q还需要满足：

$$\sum_{x_i}Q_i(x_i)=1$$

所以利用拉格朗日乘子法，可以得到

$$L(Q_i)=-E_{X_i\in Q}[log\tilde{P}(X)]+\sum_i E_{x_i\in Q_i}[logQ_i(x_i)]+\lambda(\sum_{x_i}Q_i(x_i)-1)$$

这个公式的后面两项相对比较简单，但是前面一项比较复杂，我们单独做一下处理：

$$-E_{X_i\in Q}[log\tilde{P}(X)]=-\int\prod_i Q_i(x_i)[log\tilde{P}(X)]dX$$

$$=-\int Q_i(x_i)\prod_i Q(\bar{x}_i)[log\tilde{P}(X)]dx_i d\bar{X}$$

$$=-\int Q_i(x_i)E_{\bar{X}\in Q}[log\tilde{P}(X)]dx_i$$

经过上面的公式整理，我们可以求出偏导，

$$\frac{\partial L(Q_i)}{\partial Q_i(x_i)} = -E_{\bar{X} \in Q_i}[log\tilde{P}(X|x_i)] - logQ_i(x_i) - 1 + \lambda$$

令偏导为0，就可以求出极值：

$$Q_i(x_i) = exp(\lambda - 1)exp(-E_{\bar{X} \in Q_i}[log\tilde{P}(X|x_i)])$$

由于每一个Q的 $exp(\lambda - 1)$ 都相同，我们将其当作一个常数项，之后在renormalize的时候将其抵消掉，于是Q函数就等于：

$$Q(x_i) = \frac{1}{Z_1}exp(-E_{\bar{X} \in Q_i}[log\tilde{P}(X|x_i)])$$

我们将文章开头关于 $\tilde{P}$ 的定义带入，就得到了

$$Q(x_i) = \frac{1}{Z_1}exp(-E_{\bar{X} \in Q}[(\sum_i \psi_u(x_i) + \sum_{j \neq i} \psi_p(x_i, x_j))|x_i])$$

这里面xi的由于是已知的，所以我们可以得到补充材料里的结果（但是变量名不太一样）：

$$Q_i(x_i = l) = \frac{1}{Z_i}exp[-\psi_u(l) - \sum_{j \neq i} E_{\bar{X} \in Q_j} \psi_p(l, X_j)]$$

继续扩展，就可以得到

$$= \frac{1}{Z_i}exp[-\psi_u(l) - \sum_{m=1}^{K} w^{(m)} \sum_{j \neq i} E_{X \in Q_j}[\mu(l, X_j)k^{(m)}(f_i, f_j)]]$$

$$= \frac{1}{Z_i}exp[-\psi_u(l) - \sum_{m=1}^{K} w^{(m)} \sum_{j \neq i} \sum_{l' \in L} Q_j(l')\mu(l, l')k^{(m)}(f_i, f_j)]$$

$$= \frac{1}{Z_i}exp[-\psi_u(l) - \sum_{l' \in L} \mu(l, l') \sum_{m=1}^{K} w^{(m)} \sum_{j \neq i} Q_j(l')k^{(m)}(f_i, f_j)]$$

这样，一个类似message passing的公式推导就完成了。其中最内层的求和可以用截断的高斯滤波完成。搬运最后的一点公式，可以得：

$$Q_i^{\tilde{(m)}}(l) = \sum_{j \neq i} Q_j(l')k^{(m)}(f_i, f_j) = \sum_j Q_j(l)k^{(m)}(f_i, f_j) - Q_i(l)$$

上面公式的第一项可以转化成卷积操作。

完成了这些推导，下面我们暂时不给出denseCRF的单独结果，我们下面看看FCN和DenseCRF结合的效果，FCN已经等的花都谢了......

广告时间

更多精彩尽在《深度学习轻松学：核心算法与视觉实践》！

编辑于 2017-11-22

机器学习 深度学习（Deep Learning） 概率图模型

推荐阅读

FCN(3)——DenseCRF

本文收录在无痛的机器学习第一季。上一回我们简单介绍了无向图模型和CRF的基本概念，下面我们来看看CRF在图像分割问题上的具体应用。我们简单回忆一下CRF中的两个关键变量，这时我们需要...

冯超

FCN(2)——CRF通俗非严谨的入门

本文收录在无痛的机器学习第一季。 前面我们简单介绍了FCN——这个将High-Level任务转到Low-Level任务的模型。这里的High和Low并不是我们通常意义中的High和Low，两种任务并没有高低之...

冯超

《机器学习》笔记-概率（14）

刘才权 发表于机器

20 条评论 ⇄ 切换为时间排序

写下你的评论...

GD hao 1 年前

公式没有加$$?

赞

冯超 (作者) 回复 GD hao 1 年前

?

赞 查看对话

Zephyr-D 1 年前

建议最关键的Message Passing和Gaussian Filter部分可以展开一下..

赞

冯超 (作者) 回复 Zephyr-D 1 年前

好，我后面扩展一下

赞 查看对话

chiehchiu 1 年前

请问下公式中的P（x）和Q（x）分别带到图像分割中分别代表什么呢?

赞

冯超 (作者) 回复 chiehchiu 1 年前

p(x)和Q(x)实际上描述的是同一个东西，p(x)描述了x的联合概率，这里的x指的是每一个像素所属类别。

Q(x)只是满足mean field的联合概率，含义和上面那个一样，只是相对好求些

赞 查看对话

高首 1 年前

想请问一下是在哪搬运的?

赞

冯超 (作者) 回复 高首 1 年前

论文的补充材料有一些推导，但里面的推导不够细致

赞 查看对话

董明辉 1 年前

你好 文中的有些公式好像显示不出来了 可否更新一下，或者是我网络的问题？非常感谢

赞

▲ 赞同 27 ▼ 20 条评论 分享 收藏 ···

cjfuture 1 年前

请问，单独处理的那一部分第一步怎么得到的，没看懂，谢谢

赞

Hatiim 1 年前

您好，我在读DenseCRF的源码时发现，对于兼容度转换使用最简单的方法Potts模型[xi != xj]，兼容度转换u(l,l')在代码中具体好像什么都没做，而直接是把两个核加起来乘以权重。而我理解的不是应该将不同类别的Qi(l')(除当前类别l外)求和吗？请问博主清楚吗？

赞

parallel shadow 1 年前

冯老爷你好，“经过上面的公式整理，我们可以求出偏导，可得”后面的那个公式，我推出来的结果是把-logQi(xi)-1改成logQi(xi)+1。请教一下哪里出问题了~

赞

冯超 (作者) 回复 parallel shadow 1 年前

你的公式推导过程是怎样的？

赞 查看对话

parallel shadow 回复 冯超 (作者) 1 年前

就是L(Qi)的中间项：\sum_i E_{xi \in Qi}[log Qi(xi)]。对里面的E_{xi \in Qi}[log Qi(xi)]求导，再进Qi(xi) log Qi(xi) 求导，不就是log Qi(xi) + 1吗？

赞 查看对话

Don't 回复 冯超 (作者) 10 个月前

我求导后那部分也是和shadow一样，上面的公式推导写错了吧；另外单独处理的部分实在没看懂怎么就变成积分里还连乘了，整个单独处理部分都没太懂，楼主有什么参考文献吗？

赞 查看对话

艺小洲 回复 Don't 4 个月前

补充材料里面的公式(3)写错了，应该是
$$
P(X) = \frac{1}{Z} \exp(-E(X))
$$
然后这篇文章求导部分符号推错了

2 查看对话

艺小洲 回复 Don't 4 个月前

连乘是因为变量假设独立 $Q(X)=\prod_*i* Q_*i*(X_i)$

赞 查看对话

Jane 2 个月前

建议大神把Gaussian Filter部分展开一下~

赞

liang 1 个月前

"公式推导的部分在论文的补充材料里有"，能不能给个论文补充材料的链接？我没找到，谢谢！

赞

陈亮 回复 冯超 (作者) 1 个月前

冯老师扩展了吗？给下链接

赞 查看对话

▲ 赞同 27 ▼ 20 条评论 分享 收藏 ···