

# Inteligență artificială

Versiunea 7 noiembrie 2022

Lucian M. Sasu, Ph.D.

# Cuprins

<b>1</b>	<b>Introducere</b>	<b>5</b>
1.1	Rețele neurale artificiale . . . . .	7
1.1.1	Bazele biologice . . . . .	7
1.1.2	Diferențe între rețele neurale artificiale și naturale . .	9
1.1.3	Aplicabilitate . . . . .	9
1.2	Calcul evoluționist . . . . .	10
1.2.1	Bazele biologice . . . . .	10
1.2.2	Cromozomi . . . . .	11
1.2.3	Diferențe între cromozomii biologici și cei artificiali . .	11
1.2.4	Aplicabilitate . . . . .	11
1.3	Tipuri de învățare în inteligența computațională . . . . .	11
1.3.1	Învățarea supervizată . . . . .	12
1.3.2	Învățarea prin întărire . . . . .	12
1.3.3	Învățarea nesupervizată . . . . .	13
1.4	Auto-organizarea . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Regresia liniară</b>	<b>15</b>
2.1	Exemplu și notații . . . . .	15
2.2	Funcția de eroare . . . . .	19
2.3	Metoda de căutare după direcția gradientului . . . . .	21
2.4	Metoda ecuațiilor normale . . . . .	26
2.5	Overfitting, underfitting, regularizare . . . . .	28
2.5.1	Overfitting, underfitting . . . . .	28
2.5.2	Regularizare . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Regresia logistică</b>	<b>32</b>
3.1	Încadrare, motivație . . . . .	32
3.2	Regresia logistică binară . . . . .	33
3.2.1	Setul de instruire . . . . .	33
3.2.2	Reprezentarea modelului . . . . .	33
3.2.3	Suprafața de decizie a regresiei logistice binare . . . .	36
3.2.4	Funcția de cost . . . . .	37
3.2.5	Algoritmul de instruire . . . . .	40

3.2.6	Regularizare	41
3.3	Regresia logistică multinomială	43
3.3.1	Setul de instruire	43
3.3.2	Funcția softmax	43
3.3.3	Reprezentarea modelului	44
3.3.4	Funcția de cost	45
3.3.5	Calcularea gradientului	46
3.3.6	Algoritmul de instruire	48
3.3.7	Regularizare	49
3.4	Comentarii	49
3.4.1	Redundanța parametrilor pentru regresia logistică multinomială	50
3.4.2	Relația dintre cele două tipuri de regresii logistice	51
3.4.3	Calculul numeric al funcției softmax	51
3.4.4	Trucul “log sum exp”	52
<b>4</b>	<b>Perceptronul liniar</b>	<b>53</b>
4.1	Motivație, definiții, notații	53
4.2	Perceptronul liniar	55
4.3	Algoritmul de instruire a perceptronului	56
4.4	Modificarea ponderilor ca gradient	59
4.5	Convergența perceptronului	59
4.6	Algoritmul lui Gallant	62
4.7	Comentarii	62
<b>5</b>	<b>Perceptronii multistrat</b>	<b>64</b>
5.1	Motivație pentru rețele neurale multistrat	64
5.2	Notații folosite	65
5.3	Setul de instruire	65
5.4	Rețeaua neurală multistrat	65
5.4.1	Arhitectură	65
5.4.2	Funcții de activare	69
5.5	Pasul de propagare înainte	73
5.6	Funcții de cost	75
5.6.1	Funcția de cost pentru problemă de regresie	76
5.6.2	Funcția de cost pentru discriminarea a două clase	77
5.6.3	Funcția de cost pentru $m > 2$ clase independente	78
5.6.4	Funcția de cost pentru clasificare cu $m > 2$ clase	78
5.7	Inițializarea ponderilor rețelei	79
5.8	Algoritmul backpropagation	79
5.9	Justificarea matematică a algoritmului de backpropagation	83
5.10	Utilizarea rețelei	85
5.11	Discuții	86

<b>6</b>	<b>Memorii asociative bidirecționale</b>	<b>88</b>
6.1	Distanța Hamming . . . . .	88
6.2	Asociatori . . . . .	89
6.3	Memoria asociativă bidirecțională . . . . .	90
6.4	Funcția de energie a MAB . . . . .	93
6.5	Comentarii . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Rețele neurale cu funcții de activare radială</b>	<b>96</b>
7.1	Teorema lui Cover . . . . .	96
7.2	Funcții cu activare radială . . . . .	97
7.3	Rețele cu funcții cu activare radială . . . . .	100
7.4	Clustering folosind algoritmul K-means . . . . .	102
7.5	Algoritmul de inițializare K-means++ . . . . .	104
7.6	Determinarea ponderilor pentru RBF . . . . .	105
7.7	Algoritmul de instruire a rețelei RBF . . . . .	105
<b>8</b>	<b>Fuzzy ARTMAP</b>	<b>107</b>
8.1	Învățarea incrementală . . . . .	107
8.2	Proprietăți dezirabile ale sistemelor instruibile . . . . .	107
8.3	Dilema stabilitate–plasticitate . . . . .	108
8.4	Fuzzy ARTMAP . . . . .	109
8.4.1	Arhitectura rețelei FAM . . . . .	110
8.4.2	Algoritmul de învățare pentru FAM . . . . .	112
<b>9</b>	<b>Calcul evoluționist</b>	<b>119</b>
9.1	Taxonomie . . . . .	119
9.2	Algoritmi genetici . . . . .	120
9.3	Fundamente teoretice . . . . .	123
9.4	Problema reprezentării datelor în algoritmii genetici . . . . .	126
9.4.1	Varianta cu penalizare . . . . .	129
9.4.2	Varianta cu reparare . . . . .	129
9.4.3	Codificarea adecvată a indivizilor . . . . .	130
9.5	Exemplu: problema orarului . . . . .	131
<b>10</b>	<b>Mulțimi și logică fuzzy</b>	<b>133</b>
10.1	Prezentare generală . . . . .	133
10.2	Teoria mulțimilor fuzzy . . . . .	134
10.3	Operații cu mulțimi fuzzy . . . . .	136
10.3.1	Egalitatea mulțimilor fuzzy . . . . .	137
10.3.2	Incluziunea mulțimilor fuzzy . . . . .	137
10.3.3	Complementara unei mulțimi fuzzy . . . . .	137
10.3.4	Intersecția a două mulțimi fuzzy . . . . .	138
10.3.5	Reuniunea a două mulțimi fuzzy . . . . .	138
10.3.6	Operatori de compensare . . . . .	139

10.4 Reguli fuzzy . . . . .	139
10.5 Măsuri ale gradului de nuanțare . . . . .	142

# Capitolul 1

## Introducere

Inteligența computațională (IC) este un domeniu care combină elemente de învățare automată, adaptare, evoluție și logică fuzzy pentru a rezolva probleme care, abordate tradițional, sunt dificil sau imposibil de abordat. Este o ramură a inteligenței artificiale. Subdomeniile majore ale inteligenței computaționale sunt:

- modele cu învățare automată (machine learning) – modele liniare, mixturi Gaussiene, rețele neurale (sau “neuronale”) artificiale, Support Vector Machines, arbori de decizie etc.;
- calcul evoluționist;
- mulțimi și logică fuzzy;
- imunitate artificială;
- inteligența mușuroiului.

Fiecare din aceste subdomenii a evoluat rapid și s-au impus ca potențiale metode de rezolvare efectivă a unor probleme complexe și presante, pentru care abordările uzuale sunt neefective. De regulă, prototipizarea unui sistem inspirat din inteligența computațională este rapidă, iar pentru o problemă se pot folosi mai multe abordări: de exemplu, optimizarea se poate face prin algoritmi genetici sau prin anumite familii de rețele neurale.

Cursul de față se axează pe primele două direcții.

Metodele din inteligența computațională sunt frecvent inspirate din biologie: rețelele neurale au pornit de la modelul imaginat pentru neuronul biologic, calculul evoluționist este bazat pe teoria evoluției și pe genetică. Sistemele fuzzy sunt introduse pentru a permite manipularea impreciziei, altfel decât prin teoria probabilităților.

Este o mare diferență între abordarea clasică, algoritmică a unei probleme și cea dată de IC. În primul caz este pusă la bătaie toată abilitatea celui care

imaginează algoritmul pentru a rezolva problema; este un demers creativ, depinzând de imaginația, puterea de abstractizare și experiența persoanei în cauză; este un proces creativ, la ora actuală efectuat de cele mai multe ori de către oameni. Tot aici, de cele mai multe ori rezultatele sunt exacte și se insistă permanent pe micșorarea complexității de calcul sau de memorie a algoritmilor; de multe ori însă o soluție exactă presupune un resurse de timp și memorie prohibitive.

Abordarea IC este total diferită: pentru rețele neurale sau algoritmi genetici, definitorie este capacitatea de *adaptare* și *căutare* automată sau *auto-organizare* la condițiile problemei. Este modelul inspirat din natură: un sistem biologic preia semnale din mediu și printr-un proces de învățare se adaptează, astfel încât să își îndeplinească scopul, sau să obțină o mai bună integrare în mediu. Soluția la care se ajunge nu este întotdeauna optimă, dar este un răspuns “suficient de bun” pentru problema propusă. În implementarea unui sistem din cadrul IC accentul cade mai mult pe abilitatea sistemului rezultat de a se adapta, de a învăța, decât pe imaginația și experiența celui care îl concepe.

Sistemele propuse în cadrul IC sunt cu un mare grad de aplicabilitate. De exemplu, algoritmi genetici pot fi folosiți pentru o clasă largă de funcții, nedepinzând atât de mult – precum se întâmplă în cercetările operaționale – de ipoteze care în practică pot fi prea restrictive.

O definiție a “inteligenței” potrivită pentru contextul de IC este:

**Definiția 1.** *Inteligența este abilitatea unui sistem de a-și adapta comportamentul pentru a-și îndeplini scopurile în mediul său. Este o proprietate a tuturor entităților ce trebuie să ia decizii și al căror comportament este condus de scop.*

Definiția de mai sus a fost dată în 1995 de către David Fogel, scoțând în evidență elementul esențial al comportamentului inteligent și în particular al inteligenței computaționale: adaptarea.

Rețelele neurale artificiale reprezintă grupuri interconectate de neuroni artificiali care au abilitatea de a învăța din și a se adapta la mediul lor, construind un model al lumii. Ele au apărut ca răspuns la modelarea activității creierului biologic, precum și ca modalitate propusă pentru a obține sisteme artificiale capabile să recunoască șabloane. Exemple de rețele neurale și algoritmi de instruire se găsesc în [1], [2].

Sistemele fuzzy sunt introduse pentru a putea gestiona imprecizia, noțiunile vagi (“înalt”, “acum”) și aproximarea. Sunt elemente des întâlnite în modelarea de limbaj sau în situații de cunoaștere incompletă. Teoria mulțimilor fuzzy permite ca un element să aibă un anumit grad de apartenență (număr între 0 și 1) la o mulțime, spre deosebire de teoria clasică a mulțimilor. Logica fuzzy permite considerarea mai multor valori de adevăr decât cele din logica clasică, sau altfel zis, a unor grade de adevăr diferite. Este varianta de realizare a raționamentului aproximativ.

Calculul evoluționist se ocupă în special de optimizarea unor funcții de cost și de probleme de căutare; tehnicile sunt bazate pe concepte preluate din genetică și evoluționism. Se pleacă de la ideea evoluției unei populații de indivizi, fiecare din ei fiind o soluție potențială a problemei ce se vrea rezolvată. Domeniul include algoritmi genetici, programarea evoluționistă, programarea genetică și strategii de evoluție.

Sistemele rezultate prin inteligență computațională pot reprezenta hibridizări ale celor de mai sus; de exemplu, există sisteme neuro-fuzzy, iar ajustarea parametrilor pentru un sistem adaptiv se poate face prin algoritmi genetici. Alegerea uneia potrivite pentru problema în cauză poate fi o provocare, deoarece de regulă se pot folosi mai multe abordări; nu se știe, de regulă, care e varianta cea mai potrivită de abordare.

## 1.1 Rețele neurale artificiale

### 1.1.1 Bazele biologice

Rețeaua neurală biologică a evoluat de-a lungul timpului, ajungând la performanțe care astăzi nu sunt accesibile calculatoarelor electronice: de exemplu, recunoașterea de imagini, specifică animalelor; sau interpretarea ecoului reflectat de către obstacole sau insecte, în cazul liliecilor - chiar dacă au creierul foarte mic, procesarea în cazul lor se face mai rapid și mai eficient decât cu sistemele electronice actuale.

Studiile efectuate în ultimul secol au permis enunțarea unor principii asupra modului de funcționare a sistemelor neurale biologice; suntem însă departe de a cunoaște toate detaliile funcționale și structurale. Chiar și așa, prin implementarea modelelor obținute, rezultatele sunt mai mult decât notabile.

Figura 1.1 ([3]) reprezintă cel mai comun tip de neuron natural. În scoarța neurală există circa 86 de miliarde de neuroni interconectați, fiecare putând avea până la  $10^4$  conexiuni cu alți neuroni; modul de grupare a acestora și interdependențele nu sunt pe deplin cunoscute.

Un neuron artificial are o structură asemănătoare, fiind un element de procesare conectat cu alte elemente ce preia intrare de la niște neuroni și produce o ieșire ce devine intrare pentru alți neuroni; legăturile neurale sunt niște coeficienți numerici, iar prin algoritmi de învățare se obține adaptarea convenabilă a rețelei neurale. Adaptarea (sau învățarea) este aspectul esențial al rețelelor neurale: plecând de la seturi de date, se detectează automat șabloanele existente și se construiesc niste modele care pot fi folosite mai departe.





Figura 1.1: Neuron natural [3]



Figura 1.2: Neuron de tip Purkinje din cortexul cerebelar; sursa <http://en.wikipedia.org/wiki/Neuron>.

### 1.1.2 Diferențe între rețele neurale artificiale și naturale

În mod cert însă, există diferențe: nu sunt modelate toate tipurile cunoscute de neuroni; apoi, o lege biologică spune că un neuron poate să excite sau să inhibe un neuron cu care este conectat; în modelarea de rețele neurale artificiale, o pondere de legătură este fie excitatoare, fie inhibitoare, dar forma ei este fixată după ce s-a făcut învățarea.

O altă diferență (și punct de critică pentru rețelele neurale artificiale) este faptul că modelarea semnalului făcută sub formă de valori continue este de negăsit în rețelele biologice; în rețelele neurale biologice se folosesc de fapt trenuri de impulsuri care sunt transmise către neuroni, apărând variație în frecvența semnalului. Acest aspect a fost abordat relativ târziu, în cadrul rețelelor neurale cu pulsuri.

Viteza rețelelor neurale este iarăși un loc în care apar diferențe. Se estimează că neuronii naturali au cicli de timp între 10 și 100 milisecunde; implementările de rețele neurale artificiale funcționează pe procesoare de câțiva gigahertzi, deci cu un ciclu de mai puțin de o nanosecundă. Chiar și așa, rețelele neurale biologice sunt cu mult mai performante decât cele artificiale, la un consum de energie mult mai redus.

Altă diferență este că neuronii naturali sunt grupați în cantități mari, uneori de sute de milioane de unități. Se ajunge astfel la un grad de paralelism masiv. Modelele neurale .

### 1.1.3 Aplicabilitate

- *Clasificarea* - pe baza unui set de date de forma (intrare - ieșire asociată) se construiește un sistem care detectează asocierile dintre datele de intrare și etichetele ce le sunt asociate; etichetele - sau clasele - sunt dintr-o mulțime discretă, finită. Clasificarea se folosește pentru recunoașterea automată a formelor, recunoașterea vorbirii, diagnoză medicală și altele.
- *Estimarea de probabilitate condiționată* - similar cu clasificarea, dar se produce un sistem care estimează probabilitatea ca un obiect să aparțină unei clase, date fiind trăsăturile de intrare; de exemplu, dat fiind conținutul unui mesaj de email care este probabilitatea ca să fie mail legitim sau spam;
- *Regresie* - asemănător cu clasificarea, dar ieșirile nu sunt dintr-o mulțime discretă și finită, ci valori numerice continue;
- *Regăsirea de date pe baza conținutului*, folosind memorie asociativă - se poate regăsi o dată pe baza unei părți a ei. Este un mecanism diferit de modul în care calculatoarele regăsesc informația - pe baza adreselor sau a unei căutări - dar apropiată de modul în care se face regăsirea elementelor reținute de către o persoană.

- *Grupare automată (clustering)* - pe baza similarităților existente într-un set de date, se detectează grupările de date; elementele dintr-un grup sunt mai apropiate între ele decât de altele din alt grup;
- *Detectarea automată de trăsături* – a acelor elemente care fac ca procesul de recunoaștere a unui obiect să fie mai bun decât dacă se folosesc cunoștințe specifice domeniului;
- *Controlul sistemelor* - folosite pentru cazul în care un proces trebuie să fie ghidat pentru a îndeplini o anumită sarcină, cu anumite constrângeri; utilitatea rețelelor neurale provine din faptul că nu se presupune că există dependențe liniare între acțiune și efect.

## 1.2 Calcul evoluționist

Principalele paradigme<sup>1</sup> ale calculului evoluționist sunt:

- algoritmi genetici - evoluția unei populații de indivizi (cromozomi), folosind selecția, încrucișarea și mutația;
- programarea evoluționistă - similar cu precedenta, dar fără a folosi încrucișarea; este văzută ca evoluția de specii diferite, între care nu există hibridizări;
- strategiile de evoluție - similare cu algoritmi genetici, dar se folosește recombinarea în loc de încrucișare și deseori alte metode de mutație
- programarea genetică - metode evolutive aplicate programelor de calculator.

### 1.2.1 Bazele biologice

Domeniile de inspirație sunt genetica și teoria evoluționistă. Genetica tratează ereditatea, adică transmiterea trăsăturilor de la părinți la urmași. Astfel, adaptarea obținută în generațiile anterioare este preluată de către urmași și continuată. Codificarea caracteristicilor este dată de cromozomi. Noțiunile și mecanismele sunt preluate din teoria eredității întemeiată de Gregor Mendel și teoria evoluționistă a lui Charles Darwin.

---

<sup>1</sup>“Paradigma este o construcție mentală larg acceptată, care oferă unei comunități sau unei societăți pe perioada îndelungată o bază pentru crearea unei identități de sine (a activității de cercetare de exemplu) și astfel pentru rezolvarea unor probleme sau sarcini.”, conform [Wikipedia](#).

### 1.2.2 Cromozomi

Cromozomii sunt structuri din interiorul celulelor care mențin informația genetică. În cazul oamenilor, sunt 46 de cromozomi, jumătate moșteniți de la tată și jumătate de la mamă. Cromozomii sunt alcătuiți din gene, fiecare fiind identificată prin locația pe care o ocupă și prin funcția asociată.

### 1.2.3 Diferențe între cromozomii biologici și cei artificiali

Cromozomii artificiali sunt reprezentări simplificate a celor biologici. În timp ce neuronii biologici sunt secvențe de acizi nucleici, cromozomii artificiali sunt șiruri de cifre binare.

Cromozomii biologici care definesc organismele vii variază în lungime, chiar dacă de la un organism la altul din aceeași specie pentru un cromozom specific lungimea este constantă. În algoritmi genetici, lungimea este fixă.

La reproducerea indivizilor dintr-o populație naturală, jumătate din informația genetică este preluată de la tată și jumătate de la mamă. În algoritmi genetici, procentul de combinație poate să difere.

### 1.2.4 Aplicabilitate

Principală arie de aplicare este optimizarea, pentru situațiile în care căutarea soluției cere un timp îndelungat. Algoritmi genetici sunt folosiți ca o metodă euristică; problemele abordate sunt din cele mai diverse — optimizarea unui plan de lucru sau circuit, balansarea încărcării, optimizarea ingredientelor, design automat, încărcarea containerelor, optimizarea structurilor moleculare, testarea mutațiilor, optimizarea sistemelor de compresie, selectarea modelelor optime, găsirea defectelor hardware *etc.*

## 1.3 Tipuri de învățare în inteligența computațională

Învățarea permite unui sistem să se adapteze la mediul în care operează; pe baza semnalelor provenite din exterior, sistemul inteligent își modifică parametrii pentru o îndeplinire cât mai bună a sarcinii propuse. Trebuie făcută distincția între “învățare” și “memorare cu regăsire exactă” — această din urmă problemă este rezolvată de structuri și baze de date.

Există trei tipuri principale de învățare:

1. supervizată
2. nesupervizată
3. prin întărire

Există și variante intermediare, de exemplu învățarea semi-supervizată și cea activă.

### 1.3.1 Învățarea supervizată

Se presupune că există un “profesor” care poate prezenta un set de date de instruire având forma (intrare — ieșire asociată), relevant, care este preluat de către sistem și învățat. Se folosește o funcție de eroare, care măsoară cât de departe este răspunsul cerut față de cel furnizat de sistem; pe baza erorii se desfășoară un proces de ajustare a valorilor din sistemul computațional inteligent până când eroarea scade sub un anumit prag. Rezultatul final este obținerea unui sistem ce poate să furnizeze o valoare de ieșire adecvată pentru o anumită valoare de intrare ce nu este prezentă în setul de instruire.

Exemple de sisteme ce folosesc instruirea supervizată: perceptronul, perceptronul multistrat, Fuzzy ARTMAP, rețelele cu activare radială, rețelele convoluționale.

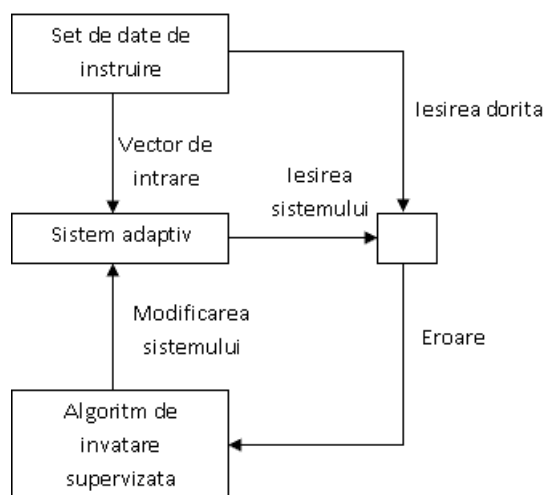


Figura 1.3: Schema de lucru pentru învățare supervizată

### 1.3.2 Învățarea prin întărire

Învățarea prin întărire (eng: reinforcement learning) este similară cu învățarea supervizată, numai că în loc de a se furniza ieșirea asociată unei intrări, se pune la dispoziție o indicație care arată cât de bine a acționat sistemul respectiv. Acesta este un sistem bazat pe critică sau aprobare, fiind instruit în raport cu măsura în care ieșirea obținută de un sistem corespunde valorii dorite (dar fără ca această valoare dorită să fie precizată sistemului!). Rolul profesorului este luat de un critic, care precizează în ce măsură ieșirea obținută se apropie de cea dorită. Pe termen lung, sistemul își va modifica propriul comportament astfel încât să se reducă criticile obținute.

Acest tip de învățare este plauzibil din punct de vedere biologic, deoarece o ființă sau un agent artificial inteligent va încerca să își minimizeze starea

de disconfort prilejuită de comportament neadecvat. Rolul criticului este dat aici de mediul înconjurător. Schema de lucru este dată în figura 1.4.

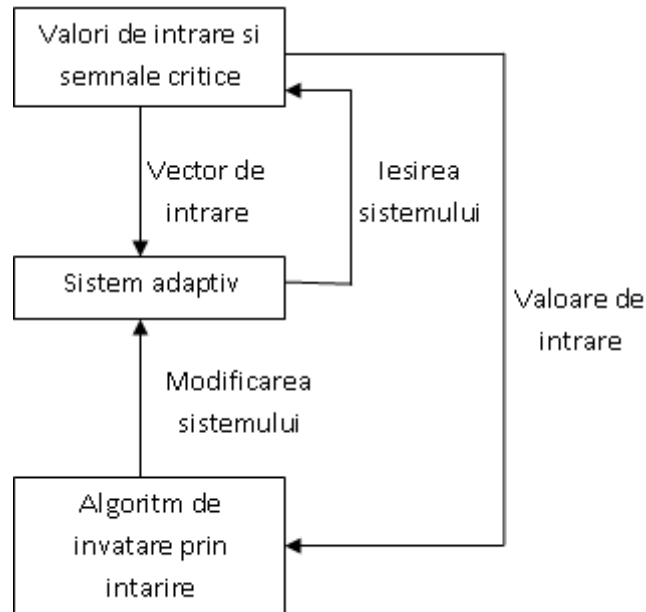


Figura 1.4: Schema de lucru pentru învățare prin întărire

### 1.3.3 Învățarea nesupervizată

Spre deosebire de precedentele moduri de învățare, în acest caz nu se primește niciun semnal de tip ieșire sau critică asociată. Sistemului capabil de grupare i se dau doar valori de intrare. El face o grupare automată sau folosește o învățare de tip competitiv. Aplicațiile clasice sunt analiza asocierilor, gruparea pe baza de similaritate și estimarea de densitate de probabilitate.

Schema de lucru este dată în figura 1.5. Acest tip de adaptare este prezent în modele ce efectuează clustering, analiza de asocieri, analiza componentelor principale, detectarea de anomalii, etc.

## 1.4 Auto-organizarea

Auto-organizarea, alături de învățare, este un alt atribut important al sistemelor computaționale inteligente. Este prezentă în sistemele naturale, de exemplu în creierul nou născuților, unde auto-organizarea se manifestă în principal prin distrugerea legăturilor nefuncționale. Auto-organizarea este definită astfel:

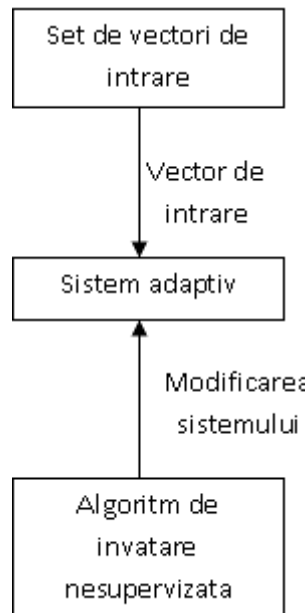


Figura 1.5: Schema de lucru pentru învățare nesupervizată

**Definiția 2.** *Spunem că un sistem se auto-organizează dacă, după ce se primesc intrarea și ieșirea unui fenomen necunoscut, sistemul se organizează singur astfel încât să simuleze fenomenul necunoscut [4].*

sau:

**Definiția 3.** *Sistemele cu auto-organizare se auto-organizează pentru a clasifica percepțiile din mediu în percepții ce pot fi recunoscute, sau șabloane [4].*

Modelele neurale care posedă proprietatea de auto-organizare includ: Self Organizing Maps<sup>2</sup>, variantele de Neural Gas<sup>3,4,5</sup> sau variante de rețele neurale recurente<sup>6</sup>.

<sup>2</sup>T. Kohonen, *Self-Organizing Maps*, Springer, 2001.

<sup>3</sup>T. Martinetz, S. Berkovich, K. Schulten, “Neural-gas network for vector quantization and its application to time-series prediction”, IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 4, no. 4, pp. 558–569, 1993.

<sup>4</sup>B. Fritzke, “A Growing Neural Gas Network Learns Topologies”, Proceedings of the 7th International Conference on Neural Information Processing Systems, NIPS’94, (Cambridge, MA, USA), p. 625–632, MIT Press, 1994.

<sup>5</sup>Y. Prudent, A. Ennaji, “An incremental growing neural gas learns topologies”, Proceedings. 2005 IEEE International Joint Conference on Neural Networks, 2005., vol. 2, pp. 1211–1216 vol. 2, 2005.

<sup>6</sup>D. Han, K. Doya, J. Tani, “Self-organization of action hierarchy and compositionality by reinforcement learning with recurrent neural networks”, Neural networks, vol. 129, pp. 149–162, 2020.

## Capitolul 2

# Regresia liniară

Regresia liniară se încadrează în învățarea supervizată și e utilizată pentru construire de model de regresie.

### 2.1 Exemplu și notații

Regresia liniară este o metodă folosită pentru predicția unei valori numerice dintr-o mulțime infinită de valori. Ca exemplu, să presupunem că vrem să facem predicția costului unui apartament, dată fiind suprafața sa. Se cunosc date anterioare despre vânzarea unor astfel de apartamente, precum în tabelul 2.1.

Suprafața (m <sup>2</sup> )	Prețul (€)
62	87.900
30	62.600
54	85.400
...	...

Tabelul 2.1: Valorile de vânzare ale unor apartamente, pentru care se știe doar trăsătura “suprafața”.

Pe baza acestor date vom construi o funcție care să ne permită aproximarea prețului (număr real) pentru alte apartamente. O exemplificare este dată în figura 2.1.

Să presupunem că se dorește estimarea valorii unui apartament de suprafață  $s = 80$  de metri pătrați; neavând în exemplele setul nostru de date o atare suprafață, va trebui să “ghicim” un preț. Se poate proceda în felul următor: se trasează o dreaptă care să aproximeze “cât mai bine”<sup>1</sup> norul de puncte reprezentat<sup>2</sup>. Valoarea estimată de model pentru apartamentul cu

<sup>1</sup>O formulă pentru a măsura cât de bună e aproximarea rezultată se dă în secțiunea 2.2.

<sup>2</sup>Pentru cazul cu mai multe date de intrare se obține o varietate liniară – adică plan pentru 2 dimensiuni de intrare etc. – dar modul de determinare a varietății este similar cu



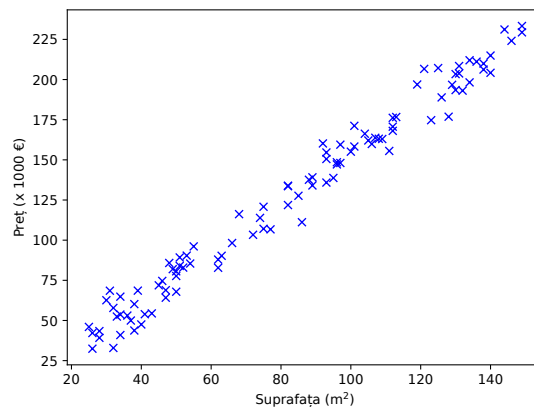


Figura 2.1: Reprezentarea grafică a datelor de vânzare a unor apartamente. Pe abscisă este măsurată suprafața (în metri pătrați), pe ordonată este prețul (în mii de euro).

o suprafață  $s$  se află simplu: se duce verticala prin punctul de coordonate  $(s, 0)$  și se găsește punctul de intersecție cu dreapta dată de model; valoarea ordonatei  $y(s)$  corespunzătoare punctului de intersecție este prețul estimat de model.

Eroarea estimării este influențată de diferența dintre valoarea actuală și cea prezisă de model, pentru cazurile cunoscute.

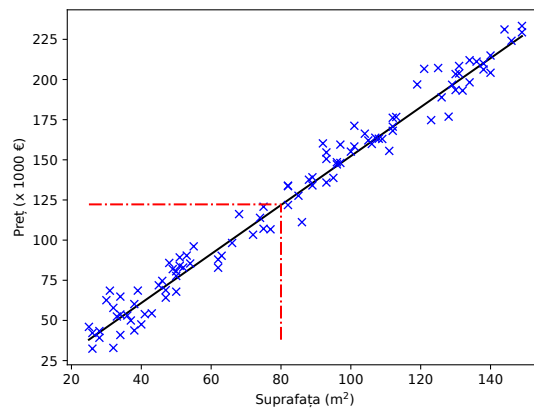


Figura 2.2: Model liniar de predicție și aproximarea costului unui apartament de 80 de metri pătrați.

---

ceea ce se prezintă pentru o singură variabilă.

Modelul liniar are forma:

$$\text{pret\_estimat} = a \cdot \text{suprafata} + b$$

unde  $a$  și  $b$  sunt coeficienți reali ce vor fi determinați;  $a$  se numește pantă (eng: slope) iar  $b$  termen liber (eng: intercept). Desigur, se pot folosi forme polinomiale de grad mai mare decât 1, modele local liniare, rețele neurale artificiale etc. Alegerea celui mai bun model pentru un set de date cunoscut este o problemă în sine. Preferința pentru model liniar se motivează prin aceea că în practică se poate dovedi un punct de plecare bun, iar modelele mai simple se recomandă a fi încercate printre primele. În plus, un model liniar este ușor de interpretat: creșterea valorii variabilei *suprafata* cu o unitate (1 metru pătrat) duce la creșterea prețului total cu  $a$  unități monetare; valoarea  $b$  este prețul de pornire.

Avem mai sus un exemplu de instruire supervizată: se pornește de la un set de date cu perechi formate din valoare de intrare (*e.g.* suprafața) și valoare de ieșire asociată (*e.g.* costul apartamentului de acea suprafață). Se cere determinarea unui model care să fie folosit pentru prezicerea (aproximarea) unor valori de ieșire, date fiind valori de intrare furnizate; pentru exemplul considerat, vrem să vedem care e costul estimat al unor suprafețe.

Formal, într-o problemă de regresie se dau:

- $m$ , reprezentând numărul de perechi de valori (sau cazuri, sau înregistrări) din setul de instruire; pentru desenul din figura 2.1 este numărul de puncte reprezentate, adică numărul de apartamente pentru care se știe prețul de vânzare;
- $\mathbf{x}^{(i)}$  reprezentând  $m$  vectori de intrare,  $1 \leq i \leq m$ ; un astfel de vector este compus de regulă din  $n$  valori numerice, numite attribute sau trăsături (eng: features):  $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})^t$ : suprafața, numărul de camere, numărul de băi etc. Trăsăturile  $x_j^{(i)}$  se mai numesc și variabile predictive sau independente<sup>3</sup>. Dacă nu se precizează altfel, astfel de vectori sunt considerați vectori coloană. Simbolul  $t$  pus în partea superioară reprezintă transpunerea de vector sau de matrice.
- $y^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq m$  – variabila de ieșire (sau de predicție, sau dependentă) aferentă valorii  $\mathbf{x}^{(i)}$ ; în cazul exemplificat este un număr real (prețul), dar în general poate fi un vector de valori reale.

Perechea  $i$  din setul de antrenare este  $(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Întregul set de antrenare se scrie ca:

$$\mathcal{S} = \left\{ (\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) \mid 1 \leq i \leq m \right\} \quad (2.1)$$

---

<sup>3</sup>A nu se confunda cu noțiunea de independență liniară din algebră, sau cu independența evenimentelor și a variabilelor aleatoare din teoria probabilităților.

Setul de antrenare se specifică frecvent sub formă tabelară, precum în tabelul 2.1.

Fluxul de lucru în învățarea automată<sup>4</sup> este dat în figura 2.3: se pornește de la un set de instruire, se aplică un algoritm de învățare și se produce un model. Din motive istorice modelul rezultat se mai numește și “ipoteză” și se notează de regulă cu  $h$ . Algoritmul de instruire are ca scop determinarea unei forme adecvate a modelului, în cazul de față a unor valori potrivite a coeficienților funcției  $h$ .

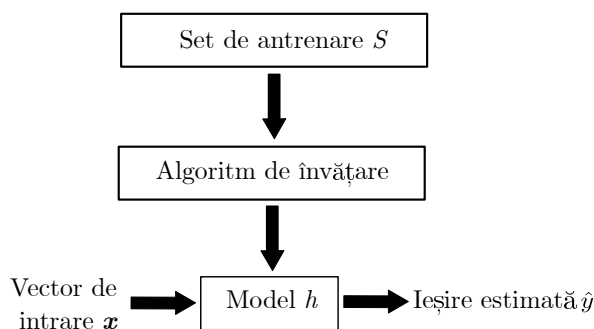


Figura 2.3: Fluxul de lucru într-un proces de instruire automată.

După ce instruirea se termină, modelului rezultat i se furnizează o intrare – în exemplul nostru: suprafața apartamentului – și el va calcula o valoare de ieșire estimată – prețul. În notatie formală avem ecuația 2.2:

$$\hat{y} = h(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

unde notația cu căciulă se folosește pentru valori estimate de model.

Una din întrebările esențiale este: ce formă are modelul  $h$ ? Există mai multe variante. Mai sus am pornit cu presupunerea că prețul crește liniar cu suprafața vândută, deci:

$$h(x) = h_{\theta}(x) = \theta_0 + \theta_1 \cdot x \quad (2.3)$$

unde indicele lui  $h$  este vectorul coloană de coeficienți  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1)^t$ .

Acest model (ipoteză) se numește regresie liniară cu o variabilă, sau regresie liniară univariată. Se poate ca pe lângă suprafață – singura valoare de intrare considerată până acum – să se mai considere și alte variabile de intrare: etaj, număr de balcoane, număr de locuri de parcare, gradul de poluare a zonei etc.; în acest caz, modelul ar fi unul multivariat (mai multe valori de intrare considerate). Coeficienții  $\theta_0$  și  $\theta_1$  din ecuația (2.3) se mai numesc parametri ai modelului de predicție și se determină prin pasul de învățare.

<sup>4</sup>În limba engleză: machine learning.

Modelul (2.3) se mai poate scrie astfel:

$$h_{\theta}(x) = \theta_0 \cdot 1 + \theta_1 \cdot x = \theta_0 \cdot x_0 + \theta_1 \cdot x_1 = \mathbf{x}^t \cdot \boldsymbol{\theta} = \hat{y} \quad (2.4)$$

unde:  $x_0$  e mereu 1,  $x_1 = x$ , vectorul  $\boldsymbol{\theta}$  este  $(\theta_0, \theta_1)^t$  ca mai sus, vectorul  $\mathbf{x}$  este  $(x_0, x_1)^t$ . Valoarea  $x_0 = 1$  permite existența unui termen liber  $\theta_0$  în modelul liniar, adică pentru cazul considerat, dreapta de regresie nu trebuie să treacă neapărat prin punctul de coordonate  $(0, 0)$ .

## 2.2 Funcția de eroare

Există o infinitate de moduri în care se poate trasa dreapta din figura 2.2; altfel zis, există o infinitate de valori pentru coeficienții din modelul dat de ecuația (2.3).

Se pune problema: cum alegem cât mai bine acești coeficienți? O variantă naturală este determinarea acestora de așa manieră încât valorile *prezise* de model,  $h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)})$ , să fie cât mai apropiate de valorile *cunoscute*  $y^{(i)}$ , pentru tot setul de antrenare  $\mathcal{S}$  din (2.1). Pentru toate valorile din setul de instruire, eroarea se poate măsura cu funcția de cost

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left( h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)} \right)^2 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left( \hat{y}^{(i)} - y^{(i)} \right)^2 \quad (2.5)$$

Funcția de eroare  $J$  se mai numește și funcție de eroare – sau de cost – a modelului (în limba engleză: error, loss, cost function; în unele lucrări se face distincție între loss function – eroare pentru un singur caz – și cost function – eroarea agregată peste mai multe valori, de exemplu pe tot setul de antrenare). Se pot folosi și alte funcții de cost, de exemplu incluzând constrângeri impuse valorilor parametrilor  $\boldsymbol{\theta}$  – a se vedea secțiunea 2.5. Funcția de mai sus este o alegere populară pentru problemele de regresie, dar nu singura posibilă. Factorul  $m$  de la numitor apare pentru a calcula media erorii (altfel, eroarea ar crește de fiecare dată când se adaugă în setul de instruire o pereche  $(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$  pentru care  $h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) \neq y^{(i)}$ , în timp ce media permite compararea erorilor modelului peste seturi de date de dimensiuni diferite); numitorul 2 poate fi omis, dar se utilizează din motive estetice pentru calculele de mai târziu. Eroarea  $J$  din 2.5 este jumătate din eroarea pătratică medie (eng: mean squared error):

$$MSE(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \hat{y}^{(i)} - y^{(i)} \right)^2 \quad (2.6)$$

E mai simplu să discutăm comportamentul funcției  $J$  pentru cazuri particulare. De exemplu, dacă  $\theta_0 = 0$ , funcția de eroare  $J(0, \theta_1)$  este o funcție de gradul doi depinzând de o singură variabilă ( $\theta_1$ ) și având minimul

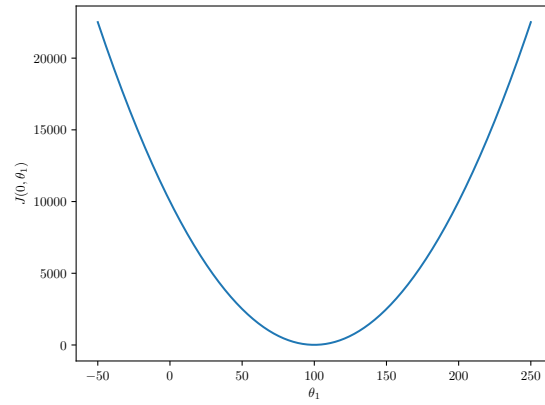


Figura 2.4: Funcția de eroare pătratică, cu  $\theta_0 = 0$  și  $\theta_1$  variabil.

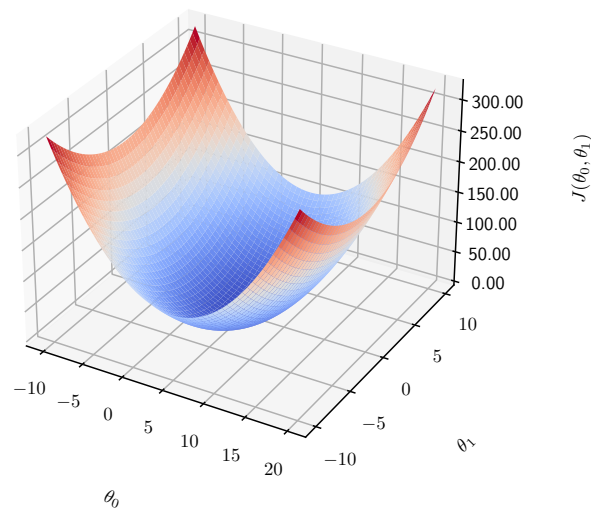


Figura 2.5: Funcția de eroare pentru model liniar univariat cu  $\theta_0$  și  $\theta_1$  variabili.

mai mare sau egal cu zero, a se vedea figura 2.4. Pentru  $\theta_0, \theta_1$  oarecare forma funcției de eroare este dată în figura 2.5.

O altă variantă de reprezentare grafică a funcției de eroare este pe baza curbelor de contur: reprezentarea este plană, având pe cele două axe respectiv pe  $\theta_0, \theta_1$ . Pentru o valoare oarecare  $v$  a funcției de eroare se consideră mulțimea tuturor perechilor de parametri  $\theta_0, \theta_1$  pentru care se obține aceeași valoare a erorii, adică  $J(\theta_0, \theta_1) = v$ . Rezultatul este dat de o mulțime de curbe, precum cele reprezentate în figura 2.6. Se poate arăta că aceste contururi sunt eliptice, pentru model de predicție liniar; pentru valori  $v$  tot mai mari avem elipse tot mai întinse.

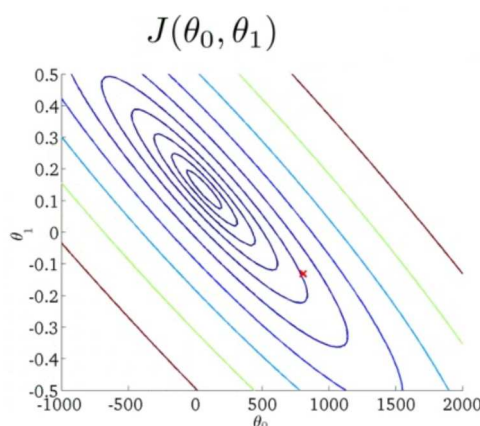


Figura 2.6: Curbe de contur pentru funcția de eroare a unui model liniar univariat, cu parametri  $\theta_0, \theta_1$  variabili.

Trebuie să găsim acele valori ale coeficienților  $\theta_0^{(min)}, \theta_1^{(min)}$  pentru care se atinge minimul funcției de eroare:

$$\begin{aligned} \left(\theta_0^{(min)}, \theta_1^{(min)}\right)^t &= \arg \min_{(\theta_0, \theta_1)^t \in \mathbb{R}^2} J(\theta_0, \theta_1) = \\ &= \arg \min_{(\theta_0, \theta_1)^t \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left(h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Coeficienții  $\theta_0^{(min)}, \theta_1^{(min)}$  pentru care valoarea erorii  $J$  e cea mai mică ne dau modelul de regresie cel mai bun pentru setul pe care s-a făcut antrenarea.

## 2.3 Metoda de căutare după direcția gradientului

În această secțiune se va prezenta o metodă iterativă – coborârea după direcția gradientului (eng: gradient descent) – prin care se face minimizarea funcției de eroare  $J$ .

Ideea e simplă:

- se pornește cu valori  $\theta_0, \theta_1$  inițiale, setate aleator sau chiar 0;
- se modifică în mod iterativ valorile curente ale parametrilor  $\theta_0, \theta_1$  de așa manieră încât  $J$  să scadă.

Pentru ultimul punct: valorile curente ale parametrilor  $\theta_0, \theta_1$  se modifică conform

$$\theta_0 = \theta_0 - \alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial \theta_0}(\theta_0, \theta_1) \quad (2.8)$$

$$\theta_1 = \theta_1 - \alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial \theta_1}(\theta_0, \theta_1) \quad (2.9)$$

și (important!) atribuirile se operează în mod simultan pentru  $\theta_0, \theta_1$ .

Această simultaneitate e cerută din cauză că la calculele (2.8), (2.9) trebuie să ne asigurăm că aceiași  $\theta_0, \theta_1$  sunt folosiți pentru evaluarea ambelor derivate parțiale. Simultaneitatea se poate obține astfel: se calculează expresiile din membrii dreپți ai ecuațiilor (2.8) și (2.9) și se asignează unor variabile temporare  $\theta_0^{(temp)}$  și respectiv  $\theta_1^{(temp)}$ ; doar după ce ambele variabile temporare sunt calculate, valorile lor se atribuie corespunzător:  $\theta_0 = \theta_0^{(temp)}$  și  $\theta_1 = \theta_1^{(temp)}$ . Alternativ, se poate folosi calcul vectorizat, în care se operează simultan peste componentele vectorului  $\theta$ .

Aceleași formule se scriu în mod vectorial ca:

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} - \alpha \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial \theta_0}(\theta_0, \theta_1) \\ \frac{\partial J}{\partial \theta_1}(\theta_0, \theta_1) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Dacă folosim notația nabla pentru vectorul de derivate parțiale (vectorul gradient)<sup>5</sup>:

$$\nabla_{\theta} J = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial \theta_0} \\ \frac{\partial J}{\partial \theta_1} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

atunci mai putem scrie formula de modificare a ponderilor ca:

$$\theta = \theta - \alpha \cdot \nabla_{\theta} J(\theta_0, \theta_1) \quad (2.12)$$

În bibliotecile care permit calcul matriceal atribuirea simultană este implementată automat. O formă matriceală generală pentru gradient este dată în continuare. Coeficientul  $\alpha > 0$  se numește rată de învățare; poate fi o constantă sau o cantitate care variază de-a lungul iterațiilor. Alegerea lui  $\alpha$  este crucială: dacă valoarea lui e prea mică, atunci algoritmul va face foarte multe iterații până se va opri, deci am avea un cost computațional mare. Dacă e prea mare, procesul poate să rateze minimul sau chiar să divergă (valoarea lui  $J$  să crească mereu sau să aibă alterneze perioade de scădere

---

<sup>5</sup>Vectorul de derivate parțiale este un vector de funcții; acestea se vor evalua pentru perechea de valori  $\theta_0, \theta_1$ .

cu cele de creștere). Dacă se constată acest al doilea fenomen, valoarea lui  $\alpha$  trebuie scăzută. Odată ce o valoare potrivită pentru  $\alpha$  este găsită, nu e neapărat nevoie ca aceasta să fie modificată de-a lungul iterațiilor.

Metoda se poate folosi pentru reducerea valorilor unei funcții de oricâte variabile. Menționăm că în general se poate ajunge într-un minim local al funcției căreia i se aplică.

Valorile  $\theta_0, \theta_1$  se inițializează aleator cu valori mici în jurul lui 0, sau chiar cu 0. Algoritmul de căutare după direcția gradientului are forma:

repetă{

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1) \quad \text{simultan pentru } j = 0, 1 \quad (2.13)$$

} pana la convergenta

Condiția de convergență poate fi: de la o iterație la alta valoarea lui  $J$  nu mai scade semnificativ, sau norma diferenței între două valori succesive ale vectorului  $\theta$  este sub un prag mic  $\varepsilon > 0$  setat, sau se atinge un număr maxim de iterații permise etc.

Putem explicita derivatele parțiale pentru forma funcției de eroare considerate:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[ \left( h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)} \right) \cdot x_j^{(i)} \right] \quad (2.14)$$

și formula de modificare a ponderilor din (2.13) devine:

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[ \left( h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)} \right) \cdot x_j^{(i)} \right] \quad \text{simultan pentru } j = 0, 1 \quad (2.15)$$

În ce situație iterațiile din algoritmul de mai sus se opresc? Dacă funcția de cost  $J$  este într-un punct de extrem (local sau global)<sup>6</sup>, gradientul ei în acel punct este vectorul zero (vectorul nul) și deci valoarea parametrilor  $\theta$  nu se va mai modifica, odată ce s-a atins o valoare de minim – global sau local – a lui  $J$ . Această observație explică două din condițiile de convergență.

Se recomandă a se urmări valorile lui  $J$ ; dacă ele au nu o tendință descrescătoare (funcția  $J$  crește sau are scăderi urmate de creșteri) atunci se va încerca o valoare mai mică pentru rata de învățare  $\alpha$ ; dacă valoarea funcției  $J$  scade foarte lent se poate mări valoarea lui  $\alpha$ .

Valoarea optimă a lui  $\alpha$  depinde de setul de date peste care se calculează funcției de eroare  $J$ .  $\alpha$  este un hiperparametru care influențează succesul și viteza învățării.

Extinderea la date de intrare cu mai multe trăsături (date multivariate), *i.e.*  $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})^t$  se poate trata tot prin metoda de căutare după direcția gradientului, prin modificări imediate:

<sup>6</sup>Sau punct de inflexiune; dar pentru funcția de eroare considerată avem doar o valoare de minim.



1. modelul de predicție devine

$$h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \dots \theta_n \cdot x_n = \boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x} \quad (2.16)$$

unde

$$\mathbf{x} = (x_0 = 1, x_1, \dots, x_n)^t, \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)^t \quad (2.17)$$

Am făcut trecerea de la vectorul  $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})^t$  de  $n$  componente la unul de  $n+1$  componente, prin adăugarea unei valori  $x_0 = 1$ , care se va înmulți cu termenul liber  $\theta_0$ .

2. funcția de eroare  $J$  se păstrează, dar modelul  $h$  este cel din ecuația (2.16);
3. ecuația (2.13) din algoritmul de căutare devine:

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\boldsymbol{\theta}) = \theta_j - \alpha \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[ (h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)}) \cdot x_j^{(i)} \right] \quad (2.18)$$

simultan pentru  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Pentru modelul multivariat sde recomandă ca valorile trăsăturilor de intrare să fie în scale similare. Acest lucru se obține făcând în prealabil o scalare a datelor la un interval convenabil ales, *e.g.*  $[0, 1]$ . Alternativ, se poate face standardizarea datelor: datele sunt transformate astfel încât fiecare atribut devine cu media zero și dispersia 1. În ambele cazuri, beneficiul este un număr mult mai mic de iterații până la convergența algoritmului.

Rescriem în cele ce urmează funcția de cost (2.5) și formula de modificare a ponderilor din ecuația (2.18) folosind calcul matriceal. Acest lucru favorizează implementare eficientă în medii precum NumPy sau Matlab.

Pentru început, notăm cu  $\mathbf{X}$  matricea datelor de intrare din setul de instruire  $\mathcal{S}$ :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \dots & x_n^{(m)} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

unde linia  $\mathbf{x}^{(i)}$  conține valorile predictive asociate celui de al  $i$ -lea caz din setul de instruire, iar vectorul coloană de indice  $1 \leq j \leq n$  corespunde unei trăsături predictive. Valorile de ieșire corespunzătoare sunt de asemenea stocate matriceal, folosind un vector coloană:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad (2.20)$$

Aşa cum în (2.17) am adăugat o componentă  $x_0 = 1$  pentru a permite un termen liber în modelul liniar, vom extinde matricea de date  $\mathbf{X}$  din ecuația (2.19) cu o primă coloană plină cu 1; pentru simplitatea notațiilor, vom folosi și în continuare litera  $\mathbf{X}$  pentru această matrice, numită matrice de design:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \dots & x_n^{(m)} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Funcția de cost  $J$  se rescrie matriceal astfel:

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left( h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left( \boldsymbol{\theta}^t \mathbf{x}^{(i)} - y^{(i)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y})^t (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pentru calculul vectorului gradient  $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta})$  vom utiliza următoarele relații cunoscute din algebra liniară și analiza matematică:

- transpusa unei sume de matrice este suma transpuselor:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t \quad (2.23)$$

- transpusa unui produs de matrice este produsul transpuselor matricelor în ordine inversă:

$$(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_p)^t = \mathbf{A}_p^t \cdot \mathbf{A}_{p-1}^t \dots \mathbf{A}_1^t \quad (2.24)$$

- dacă  $a$  este un număr real, atunci el poate fi interpretat ca o matrice cu o linie și o coloană și din acest motiv

$$a^t = a \quad (2.25)$$

- conform lucrării [6] secțiunea 2.4.1, ecuația (69):

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left( \boldsymbol{\theta}^t \mathbf{A} \right) = \mathbf{A} \quad (2.26)$$

- conform aceleiași lucrări secțiunea 2.4.2, ecuația (81):

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \left( \boldsymbol{\theta}^t \mathbf{A} \boldsymbol{\theta} \right) = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^t) \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (2.27)$$

pentru  $\mathbf{A}$  matrice pătratică.

Pentru calculul matriceal al vectorului de derivate parțiale (gradienti)  $\left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta)\right)_{j=0,n}$  dezvoltăm (2.22):

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \frac{1}{2m} (X\theta - \mathbf{y})^t (X\theta - \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ (\mathbf{X}\theta)^t \mathbf{X}\theta - (\mathbf{X}\theta)^t \mathbf{y} - \mathbf{y}^t (\mathbf{X}\theta) + \mathbf{y}^t \mathbf{y} \right\} \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ \theta^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \theta - 2\theta^t \mathbf{X}^t \mathbf{y} + \mathbf{y}^t \mathbf{y} \right\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ținem cont de faptul că derivata parțială e operator liniar, deci derivata parțială a unei sume de funcții este suma derivatelor parțiale ale lor:

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = \frac{1}{2m} \left\{ \nabla_{\theta} (\theta^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \theta) - 2\nabla_{\theta} (\theta^t \mathbf{X}^t \mathbf{y}) + \nabla_{\theta} (\mathbf{y}^t \mathbf{y}) \right\} \quad (2.29)$$

Considerând relațiile (2.23–2.27) și observând că scalarul  $\mathbf{y}^t \mathbf{y}$  nu depinde de  $\theta$ , obținem vectorul gradient:

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = \frac{1}{m} \left\{ \mathbf{X}^t \mathbf{X} \theta - \mathbf{X}^t \mathbf{y} \right\} = \frac{1}{m} \mathbf{X}^t (\mathbf{X} \theta - \mathbf{y}) \quad (2.30)$$

Modificările de ponderi  $\theta_j$  din ecuația (2.18) se scriu matriceal pentru vectorul  $\theta$  ca:

$$\theta = \theta - \alpha \nabla_{\theta} J(\theta) = \theta - \frac{\alpha}{m} \mathbf{X}^t (\mathbf{X} \theta - \mathbf{y}) \quad (2.31)$$

iar rescrierea algoritmului de instruire prin gradient descent este imediată. Avantajele acestei scrieri matriceale sunt:

- Se poate face o implementare vectorizată, mai eficientă la execuție;
- Atribuirile simultane pentru  $\theta_j$  se realizează automat pentru forma matricială.

## 2.4 Metoda ecuațiilor normale

Există o metodă care dă valorile optime  $\theta^{(min)}$  pe baza unui calcul algebric.

Valorile căutate pentru  $\theta$  sunt cele care produc minimul valorii lui  $J$ :

$$\theta^{(min)} = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^{n+1}} J(\theta) \quad (2.32)$$

Conform teoremei lui Fermat, o condiție necesară pentru ca  $\theta^{(min)}$  să minimizeze pe  $J$  este ca vectorul derivatelor parțiale calculat în  $\theta^{(min)}$  să fie vectorul nul:

$$\nabla_{\theta} J(\theta^{(min)}) = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

unde  $\mathbf{0}$  este vector coloană format din  $n + 1$  valori de zero.

Deoarece funcția de eroare  $J$  e și convexă, condiția de minimizare necesară dată de (2.33) este și suficientă și deci se ajunge în unicul minim al lui  $J$ . Înlocuind formula gradientului  $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta})$  din ecuația (2.30) în (2.33) obținem:

$$\mathbf{X}^t \mathbf{X} \boldsymbol{\theta}^{(min)} = \mathbf{X}^t \mathbf{y} \quad (2.34)$$

ce definește un sistem de ecuații numite “ecuații normale”. Mai departe, dacă matricea  $\mathbf{X}^t \mathbf{X}$  este nesingulară, vectorul de parametri  $\boldsymbol{\theta}^{(min)}$  se determină ca

$$\boldsymbol{\theta}^{(min)} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \cdot \mathbf{y} \quad (2.35)$$

Precizări:

1. Expresia  $(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t$  se mai numește și pseudo-inversa Moore–Penrose și se notează cu  $\mathbf{X}^+$ ; pentru o matrice inversabilă inversa și pseudo-inversa ei coincid; pentru calculul pseudoinversei unei matrice  $A$  se poate folosi în Octave și Matlab funcția `pinv`, iar în Python funcția `numpy.linalg.pinv`;
2. Când se folosește metoda ecuațiilor normale, nu este necesar să se facă scalarea trăsăturilor de intrare, precum se recomandă la metoda iterativă.

Una din problemele care trebuie discutată este: cum se procedează când matricea  $\mathbf{X}^t \mathbf{X}$  este singulară? Acest lucru se datorează de regulă uneia din situațiile de mai jos:

- există trăsături de intrare redundante, de exemplu două coloane ale lui  $\mathbf{X}$  sunt liniar dependente; în acest caz avem în mod clar o redundanță informațională și putem elimina oricare din aceste două coloane; mai general, una din coloane poate fi combinație liniară a altor coloane și dacă se știe care e, se poate elimina;
- se folosesc prea multe trăsături față de numărul de cazuri din setul de instruire ( $m < n$ ); în acest caz se poate renunța la câteva trăsături, adică se elimină coloane din  $\mathbf{X}$ , sau se folosește regularizarea – a se vedea secțiunea 2.5.

Ordinea de mai sus este cea sugerată pentru acțiune: se elimină din coloanele redundante, apoi dacă încă e nevoie, se folosește regularizarea.

Dat fiind faptul că avem două metode de determinare a lui  $\boldsymbol{\theta}^{(min)}$ , se pune problema pe care din ele să o preferăm. Iată câteva comparații:

1. În timp ce pentru metoda gradient descent trebuie ca rata de învățare să fie aleasă cu grijă, pentru varianta algebrică așa ceva nu e necesar, neavând de fapt rată de învățare;

2. În timp ce pentru metoda de calcul bazată pe gradient descent sunt necesare mai multe iterații, metoda algebrică necesită un singur pas;
3. Metoda bazată pe gradient descent funcționează bine chiar și pentru valori mari ale lui  $m$  și  $n$ ; pentru valori  $m$  sau  $n$  mari, calculul pseudo-inversei poate fi prohibitiv din punct de vedere al memoriei și timpului de calcul necesar.

## 2.5 Overfitting, underfitting, regularizare

### 2.5.1 Overfitting, underfitting

Pentru problema estimării prețului unei proprietăți, să presupunem că există 5 perechi de valori în setul de instruire, o pereche fiind constituită din variabila predictivă *suprafata* și variabila de ieșire *pret*. Să considerăm 3 modele de predicție:

1. polinom de gradul întâi: prețul estimat este de forma:

$$pret = \theta_0 + \theta_1 x \quad (2.36)$$

2. polinom de gradul al doilea:

$$pret = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 \quad (2.37)$$

3. polinom de gradul 4:

$$pret = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 x^3 + \theta_4 x^4 \quad (2.38)$$

unde pentru fiecare caz  $x$  este suprafața; spunem că am introdus noi trăsături pe baza celor existente, corespunzătoare mai sus cantităților  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $x^4$ . Primul model este cel liniar discutat până acum, iar celelalte două sunt modele polinomiale (de grad 2, respectiv 4). Ca și mai înainte, se pune problema determinării coeficienților  $\theta_0, \theta_1, \dots$ .

Graficele celor trei forme polinomiale sunt date în figura 2.7 [5]. Putem considera cantitățile  $x, x^2, x^3, x^4$  ca fiind variabile de intrare pe baza cărora se realizează predicția; faptul că ele provin de la același  $x$  (suprafața) este o chestiune secundară.

Intuitiv, polinomul de gradul întâi nu reușește să facă o aproximare prea bună a evoluției prețului față de suprafață. Spunem că modelul dat de primul polinom suferă de “underfitting”<sup>7</sup>, fiind prea simplu pentru problema în cauză. Se mai spune despre un asemenea model că are “high bias”<sup>8</sup>, deoarece face o presupunere mult prea simplistă pentru problema tratată.

<sup>7</sup>Aproximativ, în limba română: incapacitate de reprezentare; simplism.

<sup>8</sup>Înclinare prea pronunțată spre un model cu performanță predictivă slabă.



Figura 2.7: Trei polinoame pentru aproximarea prețului pornind de la suprafață, notată  $x$  [5].

Pentru polinomul de grad 4, dacă nu se găsesc două prețuri pe aceeași verticală (adică nu avem două suprafețe egale vândute cu prețuri diferite), se pot determina coeficienții  $\theta_0, \dots, \theta_4$  astfel încât curba să treacă prin toate cele 5 puncte (interpolare polinomială). Remarcăm însă forma nemonotonă, cu variații mari a predicției, fiind cazuri în care valoarea estimată scade în raport cu suprafața. Intuitiv, modelul suferă de “overfitting”<sup>9</sup>, fiind prea fidel construit pe datele din setul de instruire; dacă aceste date conțin zgomot, atunci modelul va învăța perfect zgomotul din setul de date. Deși reprezentarea pe datele de instruire este perfectă, polinomul de gradul 4 dând chiar prețurile cunoscute, în rest nu face o predicție prea credibilă (remarcăm scăderea prețului între al treilea și al patrulea punct din grafic). Se mai spune că modelul are varianță (variabilitate) mare<sup>10</sup>, datorită faptului că e prea complex pentru problema tratată.

Polinomul de gradul 2 prezintă cea mai credibilă formă (în sens intuitiv), chiar dacă nu reprezintă exact cele 5 perechi de valori din setul de instruire. Este un compromis între capacitatea de a reproduce setul de instruire și capacitatea de generalizare, aceasta din urmă fiind abilitatea de a prezice valori de ieșire pentru cazuri care nu fac parte din setul de date de instruire.

Pe scurt, un model care suferă de “underfitting” este incapabil de a reprezenta setul de antrenare, cât și de a face estimări pentru alte valori. Un model care suferă de “overfitting” poate reprezenta foarte precis datele din setul de instruire, dar nu reușește să facă estimări prea bune în afara lui; în ambele cazuri spunem că nu generalizează bine, generalizarea fiind capacitatea unui model de a estima cât mai aproape de adevăr în afara cazurilor cu care a fost instruit.

Exemplificarea s-a făcut plecând de la o variabilă predictivă  $x$  reprezentând suprafața, care produce alte valori de predicție:  $x^2, x^3, x^4$ . Mai general, putem să presupunem că avem trăsături de intrare definite în domeniul problemei; în cazul nostru, poate fi distanța dintre suprafața respectivă și utilități, gradul de poluare al zonei etc. Trebuie însă să fim capabili să

<sup>9</sup>Supraspecializare

<sup>10</sup>Engl: high variance.

detectăm cazurile de overfitting și underfitting și să le tratăm.

O modalitate de evitare a overfitting-ului este reducerea numărului de trăsături: pentru problema noastră se evită folosirea variabilelor  $x^3, x^4$ . O altă variantă este alegerea judicioasă a modelului de predicție. Cea de a treia opțiune este regularizarea: se păstrează variabilele predictive, dar se impun constrângeri asupra parametrilor modelului — în cazul nostru asupra coeficienților  $\theta_i$ .

### 2.5.2 Regularizare

Să considerăm că predicția se formează pe baza funcției polinomiale

$$h_{\theta}(\mathbf{x}) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 x^3 + \theta_4 x^4 \quad (2.39)$$

Intuitiv, vrem ca în funcția de eroare să includem o constrângere asupra coeficienților  $\theta_3, \theta_4$ ; ei se înmulțesc cu cantitățile  $x^3$ , respectiv  $x^4$  care determină o variație rapidă a funcției  $h$ ; altfel zis, o modificare mică a cantității  $x$  duce la o modificare majoră ale lui  $h_{\theta}(x)$ . Constrângerea pe care o impunem este deci ca valorile absolute ale lui  $\theta_3$  și  $\theta_4$  să fie cât mai apropiate de zero.

Pentru aceasta, vom include în expresia funcției de eroare  $J(\cdot)$  și pătratele lui  $\theta_3$  și  $\theta_4$ :

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \left\{ \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \left( h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)} \right)^2 \right\} + 100 \cdot \theta_3^2 + 100 \cdot \theta_4^2 \quad (2.40)$$

Minimizarea lui  $J$  din ec. (2.40) va urmări simultan micșorarea diferenței dintre valorile estimate de model și cele reale, dar și reducerea valorilor absolute ale lui  $\theta_3, \theta_4$ . Exemplul de mai sus este gândit pentru a aduce funcția polinomială de grad patru la una mai apropiată de gradul al doilea, pentru care agreăm ideea că generalizează mai bine.

În general, nu știm care dintre coeficienții care se înmulțesc cu puteri ale lui  $x$  ar trebui să aibă valori absolute mici. Intuitiv, ne dăm seama că valoarea lui  $\theta_0$  nu ar fi necesar a fi supusă unei constrângeri (nu se înmulțește cu nicio variabilă predictivă); vom impune deci constrângeri doar asupra lui  $\theta_1, \theta_2, \dots$  — să aibă valori absolute mici. Scopul final este de a evita overfitting-ul. Principiul se aplică și dacă se pleacă de la variabile de intrare independente, nu neapărat *suprafata, suprafata*<sup>2</sup>,  $\dots$ . Ca atare, ec. (2.40) se rescrie mai general ca:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2m} \left[ \sum_{i=1}^m \left( h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)} \right)^2 \right] + \lambda \sum_{j=1}^n \theta_j^2 \quad (2.41)$$

unde  $\lambda > 0$ . Cu cât  $\lambda$  e mai mare, cu atât constrângerea impusă coeficienților  $\theta_1, \dots, \theta_n$  e mai pronunțată. La extrem, dacă  $\lambda \rightarrow \infty$  atunci se ajunge la  $\theta_1 = \dots = \theta_n = 0$ , deci  $h_{\theta}(\mathbf{x}) = \theta_0$ , ceea ce aproape sigur înseamnă underfitting

(model de aproximare prea simplist): funcția de estimare returnează mereu  $\theta_0$ , indiferent de intrare.

În formă matricială, funcția de eroare incluzând termenul de regularizare se scrie ca:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y})^t (\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}) + \lambda \|\boldsymbol{\theta}[1 :]\|^2 \quad (2.42)$$

unde  $\|\cdot\|$  este norma Euclidiană a vectorului argument. Se observă omiterea termenului liber din calculul de normă de vector.

Algoritmul de căutare după direcția gradientului devine (considerăm că avem coeficienții  $\theta_0, \dots, \theta_n$  inițializați aleator sau chiar cu vectorul nul):

repetă{

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(i)}) - y^{(i)}) \cdot x_0^{(i)} \right]$$

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(i)}) - y^{(i)}) \cdot x_j^{(i)} + 2 \cdot \lambda \cdot \theta_j \right], \quad j = 1, \dots, n$$

} pana la convergenta

unde atribuirile se efectuează în mod simultan.

Pentru metoda algebrică se poate arăta că regularizarea produce următoarea valoare pentru  $\boldsymbol{\theta}$ :

$$\boldsymbol{\theta} = \left( \mathbf{X}^t \mathbf{X} + 2 \cdot \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{(n+1) \times (n+1)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{X} \mathbf{y} \quad (2.43)$$

unde matricea care se înmulțește cu  $\lambda$  se obține din matricea unitate de ordinul  $n+1$ , modificând primul element în 0 (termenul  $\theta_0$  nu se regularizează). Se poate arăta că pentru  $\lambda > 0$  termenul din ecuația (2.43) pentru care se cere inversarea este o matrice nesingulară, indiferent de valorile din matricea  $\mathbf{X}$ .



## Capitolul 3

# Regresia logistică

### 3.1 Încadrare, motivație

Regresia logistică este folosită pentru estimare de probabilitate condiționată și clasificare. Inițial dezvoltată pentru recunoașterea a două clase, a fost ulterior extinsă pentru a discrimina între oricâte categorii.

Ca mod de instruire se folosește învățarea supervizată. Intrările sunt vectori numerici, iar clasele sunt fie două (pentru regresia logistică binară), fie mai multe (pentru regresia logistică multinomială).

Exemple de probleme de clasificare cu două clase, tratate de regresia logistică, sunt:

- clasificarea unui email ca fiind de tip spam sau legitim, dându-se conținutul lui, subiectul emailului, faptul că expeditorul face sau nu parte din lista de contacte etc.
- clasificarea unei tumori ca fiind benignă sau malignă, date fiind rezultatele unor analize;
- clasificarea unei imagini: conține un câine sau o pisică (fiecare imagine are exact unul din aceste două animale); sau dacă conține sau nu un anumit obiect

Exemple de probleme pentru care există mai mult de două clase sunt:

- clasificarea unui email ca fiind de tip: știri, muncă, prieteni, anunțuri, spam etc.;
- clasificarea unui pixel dintr-o imagine ca aparținând unui măr, pară, banană, cireșă sau fundal.

Modelul dat de regresia logistică (fie ea binară sau multinomială) construiește o estimare a probabilității condiționate, dată fiind intrarea curentă (conținut

email, imagine etc.); mai precis, se determină care este probabilitatea ca obiectul descris de vectorul de intrare să fie dintr-o clasă anume:

$$P(clasa_1|vector\_de\_intrare), \dots, P(clasa_K|vector\_de\_intrare) \quad (3.1)$$

de exemplu probabilitățile ca emailul să fie de tip știre, respectiv muncă, prieteni etc. Faptul că se estimează probabilități, adică valori continue din  $[0, 1]$  justifică cuvântul “regresie” din denumirile modelului. Clasificarea se face prin determinarea acelei clase pentru care probabilitatea condiționată  $P(clasa_k|vector\_de\_intrare)$  este maximă.

## 3.2 Regresia logistică binară

### 3.2.1 Setul de instruire

În cazul regresiei logistice binare se urmărește discriminarea între două clase. Clasele sunt convenabil date ca fiind “1” – clasa pozitivă – și respectiv “0” – clasa negativă<sup>1</sup>. Setul de instruire este de forma:

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)} \right) \mid 1 \leq i \leq m \right\} \quad (3.2)$$

unde vectorul  $\mathbf{x}^{(i)} = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})^t \in \mathbf{R}^{n+1}$  conține valorile trăsăturilor obiectului  $i$ , iar  $y^{(i)} \in \{0, 1\}$  este clasa de care aparține obiectul  $i$ . Ca și până acum, notația  $\mathbf{v}^t$  reprezintă transpunerea vectorului sau a matricei  $\mathbf{v}$ , iar  $m$  e numărul de date din setul de instruire. Vom considera că  $x_0^{(i)} = 1$  pentru orice  $i$ , pentru a permite un termen liber în discriminatorul implementat de regresia logistică.

### 3.2.2 Reprezentarea modelului

Pentru regresia logistică modelul de predicție trebuie să producă o valoare reprezentând probabilitatea condiționată  $P(clasa|vector\_de\_intrare)$ . Vom folosi în acest scop o funcție  $h_{\boldsymbol{\theta}}(\cdot)$ :

$$P(y = 1|\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp(-\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x})} = \hat{y} \quad (3.3)$$

unde  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)^t \in \mathbf{R}^{n+1}$  este un vector coloană cu  $n + 1$  coeficienți – sau ponderi (eng: weights) – ce vor fi determinați prin procesul de învățare. Se arată ușor că funcția  $h_{\boldsymbol{\theta}}$  este cu valori în intervalul  $(0, 1)$ , deci putem să o folosim pe post de probabilitate. Mai departe, probabilitatea din (3.3) este o probabilitate condiționată de intrarea curentă – în cazul nostru vectorul  $\mathbf{x}$

---

<sup>1</sup>De exemplu, clasa pozitivă poate fi “mail de tip spam” sau “poză cu pisică”. Clasa negativă este “mail legitim” și respectiv “poză cu câine”.

– și parametrizată de  $\theta$ .  $P(y = 1|\mathbf{x}; \theta)$  este gradul de încredere că obiectul descris de vectorul  $\mathbf{x}$  face parte din clasa 1, iar încrederea este totodată influențată de ponderile din vectorul  $\theta$ .

Funcția care stă la baza definirii modelului  $h_\theta$  este:

$$\sigma : \mathbf{R} \rightarrow (0, 1), \sigma(z) = \frac{1}{1 + \exp(-z)} \quad (3.4)$$

și numită sigmoida logistică<sup>2</sup>; este reprezentată grafic în figura 3.1. Codomeniul funcției logistice este  $(0, 1)$ , compatibil cu valorile admisibile pentru funcție de probabilitate; extremele 0 și 1 care sunt permise pentru probabilități nu se ating însă de către sigmoida logistică. Avem că funcția  $\sigma$  este derivabilă, strict crescătoare și  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \sigma(z) = 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma(z) = 1$ . Denumirea de “sigmoidă” este dată de alura graficului, amintind de litera S.

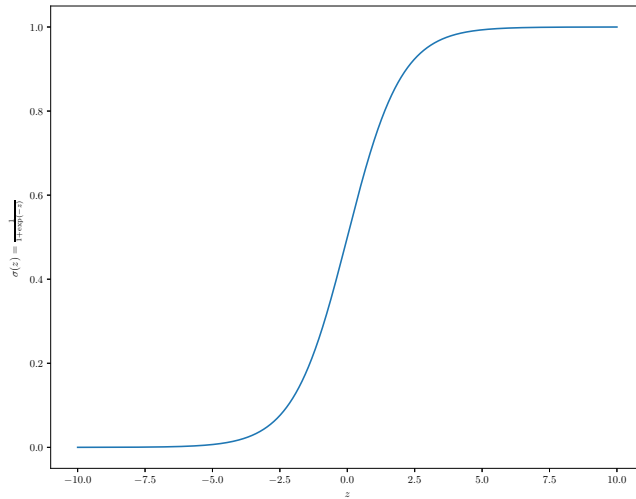


Figura 3.1: Graficul sigmoidei logistice definită în ecuația 3.4

Pentru funcția  $\sigma$  următoarele proprietăți sunt notabile:

$$\sigma(-z) = 1 - \sigma(z) \quad (3.5)$$

iar valoarea derivatei se calculează ușor pe baza valorii lui  $\sigma$ :

$$\sigma'(z) = \sigma(z)(1 - \sigma(z)) \quad (3.6)$$

<sup>2</sup>Eng: logistic sigmoid, expit. Sigmoida logistică este inversa unei alte funcții cunoscute, logit:  $\text{logit} : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\text{logit}(p) = \ln \frac{p}{1-p}$ .

Probabilitatea ca obiectul  $\mathbf{x}$  să fie de clasă 0, sau clasă negativă, este  $P(y = 0|\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$  și e determinată ca fiind complementul față de 1 al evenimentului de a fi de clasă pozitivă<sup>3</sup>:

$$P(y = 0|\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = 1 - P(y = 1|\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\exp(-\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x})}{1 + \exp(-\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x})} \quad (3.7)$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x})} = \sigma(-\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x}) \quad (3.8)$$

Dorim să determinăm ponderile din vectorul  $\boldsymbol{\theta}$  astfel încât:

1. pentru acei vectori  $\mathbf{x}^{(i)}$  pentru care eticheta asociată  $y^{(i)}$  este 1 să avem  $P(y^{(i)} = 1|\mathbf{x}^{(i)}; \boldsymbol{\theta})$  cât mai aproape de 1;
2. pentru datele de intrare  $\mathbf{x}^{(i)}$  cu  $y^{(i)} = 0$  să avem  $P(y^{(i)} = 0|\mathbf{x}^{(i)}; \boldsymbol{\theta})$  cât mai apropiată de 1; echivalent, vrem aici ca  $P(y^{(i)} = 1|\mathbf{x}^{(i)}; \boldsymbol{\theta})$  să fie cât mai aproape de 0.

Ponderile din vectorul  $\boldsymbol{\theta}$  vor fi determinate prin învățare automată (eng. machine learning).

După învățare, modelul probabilist dat de (3.3) este mai departe folosit pentru a face clasificare astfel: dacă pentru un vector de intrare  $\mathbf{x}$  avem

$$P(y = 1|\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \geq P(y = 0|\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \quad (3.9)$$

atunci se decide că obiectul descris de vectorul  $\mathbf{x}$  este din clasa 1, pozitivă; altfel este din clasa 0 – negativă.

Având în vedere că  $P(y = 0|\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = 1 - P(y = 1|\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ , decizia bazată pe inecuația (3.9) se reformulează echivalent ca: vom clasifica obiectul descris de vectorul  $\mathbf{x}$  ca fiind de clasă pozitivă dacă  $P(y = 1|\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \geq 0.5$  și negativă altfel.

Se poate însă să se folosească și alt prag de discriminare pentru clase, de exemplu: obiectul descris de  $\mathbf{x}$  este de clasă pozitivă dacă  $P(y = 1|\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \geq 0.8$  și de clasă negativă altfel. O astfel de setare de prag se efectuează pentru seturi de date în care clasele pozitive și cele negative sunt puternic debalansate (mult mai multe exemple de tip pozitiv decât negativ, sau invers), sau pentru cazul în care penalizarea care se plătește pentru o clasificare eronată de tip pozitiv (un fals pozitiv) este foarte mare față de penalizarea pentru clasificarea eronată de tip negativ (fals negativ) – sau invers. Pentru ultimul caz, un exemplu este: e mai grav dacă un mail legitim este clasificat ca fiind de tip spam și scos din inbox, față de cazul în care un mail spam este clasificat eronat ca fiind legitim: vom impune ca  $P(\text{spam}|\text{email})$  sa fie

---

<sup>3</sup>Avem două evenimente complementare: un obiect e fie de clasă pozitivă, fie negativă. Sumele probabilităților acestor două evenimente este 1, conform axiomelor care fundamentează teoria probabilităților.

comparat cu un prag  $t$  mare (de exemplu 0.8, sau 0.99) pentru a decide că e vorba într-adevăr de spam.

E util să menționăm vectorizarea calculului: notăm cu  $\mathbf{X}$  matricea care are drept linii vectorii  $\mathbf{x}^{(i)t}$  – matricea de design întâlnită și la regresia liniară:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^{(m)} & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & \dots & x_n^{(m)} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

atunci cele  $m$  probabilități  $\hat{y}^{(i)} = P(y^{(i)} = 1 | \mathbf{x}^{(i)}; \boldsymbol{\theta}) = h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(i)})$  sunt componentele vectorului

$$\hat{\mathbf{y}} = \sigma(\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\theta}) \quad (3.11)$$

cu  $\sigma$  aplicată pe fiecare componentă a vectorului coloană  $\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\theta}$  (vectorizare).

### 3.2.3 Suprafața de decizie a regresiei logistice binare

În pofida caracterului neliniar al funcției ce definește modelul – dat în ecuația (3.3) – se arată ușor că suprafața care desparte regiunea  $\mathbf{x}$  de clasă pozitivă și cea de clasă negativă este o varietate liniară<sup>4</sup>, dacă pragul este 0.5.

Inegalitatea (3.9) se scrie echivalent:

$$\begin{aligned} P(y = 1 | \mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \geq P(y = 0 | \mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) & \iff \frac{1}{1 + \exp(-\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x})} \geq \frac{\exp(-\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x})}{1 + \exp(-\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x})} \\ & \iff 1 \geq \exp(-\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x}) \\ (\text{logaritmând}) & \iff 0 \geq -\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x} \\ & \iff \boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Am obținut deci că dacă  $\mathbf{x}$  are proprietatea că  $\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x} \geq 0$  atunci  $\mathbf{x}$  este clasificat ca fiind de clasă 1, altfel este de clasă 0. Separarea dintre cele două clase se face de către varietatea liniară  $\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x} = 0$ : dacă  $\mathbf{x}$  e în partea pozitivă a varietății liniare  $\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x} = 0$  sau chiar pe această varietate, atunci e de clasă 1, altfel e de clasă 0.

Unii autori consideră că dacă avem o intrare  $\mathbf{x}$  pentru care  $P(y = 1 | \mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = P(y = 0 | \mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = 0.5$ , atunci modelul nu ar trebui să facă o clasificare a intrării: este tot atât de probabil să fie de clasă pozitivă pe cât e de probabil să fie de clasă negativă. În inecuația (3.12) am considerat – în mod mai degrabă arbitrar – că situația cu egalitate să fie tratată ca un caz pozitiv.

Dacă se permite ca în componenta vectorului  $\mathbf{x}$  să intre și forme pătratice, cubice etc. ale trăsăturilor originare, atunci suprafața de decizie poate fi

<sup>4</sup>Prin abuz se folosește și denumirea “hiperplan”; în timp ce un hiperplan obligatoriu trebuie să treacă prin origine, varietatea liniară este o formă liniară fără această constrângere.

mai complicată. De exemplu, plecăm de la vectorul  $(x_1, x_2)$  și să considerăm extinderea lui cu trăsături polinomiale,  $\mathbf{x} = (x_0 = 1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2)^t$ ; rezultă că  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^6$ ; avem  $\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x} = \theta_0 + \theta_1x_1 + \theta_2x_2 + \theta_3x_1^2 + \theta_4x_2^2 + \theta_5x_1x_2$ . Pentru valorile<sup>5</sup>  $\theta_0 = -4, \theta_1 = \theta_2 = \theta_5 = 0, \theta_3 = \theta_4 = 1$  se obține ecuația suprafeței de decizie  $x_1^2 + x_2^2 = 4$ , reprezentând un cerc; în funcție de poziția față de cerc (înăuntrul sau în afara lui), obiectul de coordonate  $(x_1, x_2)^t$  este estimat ca fiind de o clasă sau de cealaltă. Am arătat deci că suprafața de separare poate fi neliniară, dacă se introduc trăsături suplimentare.

### 3.2.4 Funcția de cost

Funcția care ne permite să decidem cât de bun este un vector de ponderi  $\boldsymbol{\theta}$  și care e totodată utilizată pentru ajustarea ponderilor în procesul de instruire este notată tradițional cu  $J(\cdot)$ ,  $J : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}_+$ . Argumentul ei este vectorul de ponderi  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)^t \in \mathbf{R}^{n+1}$ . Valoarea se va calcula peste setul de instruire  $\mathcal{S}$  din (3.2), sau peste orice mulțime cu perechi formate din vectori de intrare și clasă de ieșire asociată.

O variantă este dată de utilizarea aceleiași funcții de eroare din capitolul de regresie liniară, ecuația (2.22) pagina 25. Se arată însă că pentru problema estimării de probabilitate condiționată, dată fiind forma funcției  $h_{\boldsymbol{\theta}}$  din ecuația (3.3), funcția de eroare nu mai este convexă și în acest caz o căutare bazată pe gradient se poate opri într-un minim local — situație exemplificată în figura 3.2.

Vom defini  $J$  de așa manieră încât să fie convexă:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{Cost}(h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(i)}), y^{(i)}) \quad (3.13)$$

și în plus funcția  $\text{Cost}(\cdot, \cdot)$  să îndeplinească următoarele condiții:

1. condiția de apropiere: dacă  $h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$  și  $y$  sunt valori apropiate, atunci valoarea lui  $\text{Cost}(h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}), y)$  trebuie să fie apropiată de 0, și reciproc;
2. condiția de depărtare: dacă  $h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$  și  $y$  sunt valori îndepărtate, atunci valoarea lui  $\text{Cost}(h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}), y)$  trebuie să fie mare, și reciproc;

Definim convenabil funcția  $\text{Cost}(\cdot, \cdot)$  astfel:

$$\text{Cost}(h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}), y) = \begin{cases} -\ln h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) & \text{dacă } y = 1 \\ -\ln(1 - h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})) & \text{dacă } y = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

logaritmii fiind în baza  $e$ .

Cele două ramuri ale funcției  $\text{Cost}$  sunt reprezentate în figura 3.3. Dreptele  $x = 0$  și respectiv  $x = 1$  sunt asimptote verticale pentru cele două ramuri ale lui  $\text{Cost}$ .

<sup>5</sup>În mod normal, valorile lui  $\boldsymbol{\theta}$  se determină prin proces de instruire.

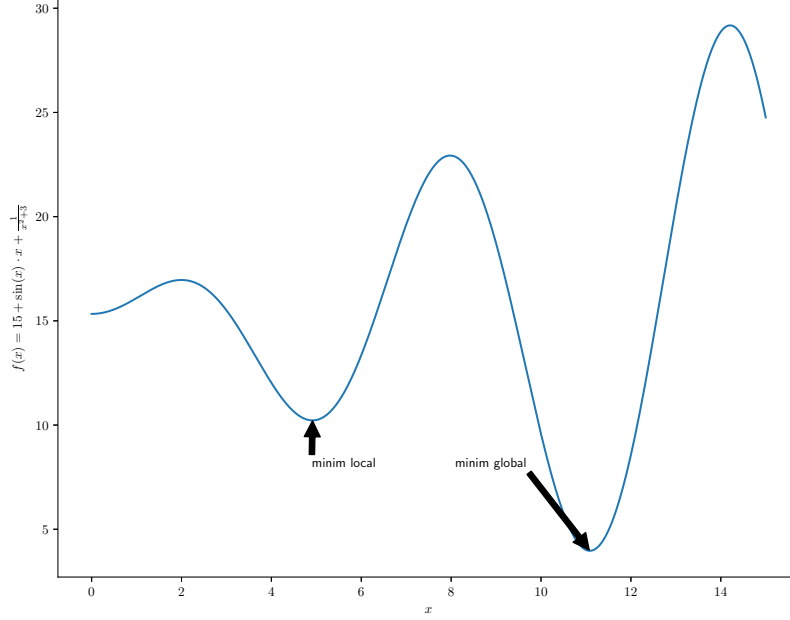


Figura 3.2: Minim global și minim local pentru funcția neconvexă  $f : [0, 15] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 15 + \sin(x) \cdot x + \frac{1}{x^2+3}$

Rescriem funcția  $Cost$  sub forma echivalentă și mai compactă:

$$Cost(h_{\theta}(\mathbf{x}), y) = -y \cdot \ln h_{\theta}(\mathbf{x}) - (1 - y) \cdot \ln(1 - h_{\theta}(\mathbf{x})) \quad (3.15)$$

$$= -y \cdot \ln \hat{y} - (1 - y) \cdot \ln(1 - \hat{y}) \quad (3.16)$$

Să verificăm că se îndeplinesc cele două condiții cerute mai sus. Pentru condiția de apropiere, vrem să verificăm că:

$$Cost(h_{\theta}(\mathbf{x}), y) \approx 0 \Leftrightarrow h_{\theta}(\mathbf{x}) \approx y \quad (3.17)$$

Pentru cazul  $y = 1$  avem:

$$Cost(h_{\theta}(\mathbf{x}), y) \approx 0 \Leftrightarrow -\ln h_{\theta}(\mathbf{x}) \approx 0 \Leftrightarrow h_{\theta}(\mathbf{x}) \approx 1 = y \Leftrightarrow h_{\theta}(\mathbf{x}) \approx y$$

Pentru cazul  $y = 0$ , (3.17) devine:

$$Cost(h_{\theta}(\mathbf{x}), y) \approx 0 \Leftrightarrow -\ln(1 - h_{\theta}(\mathbf{x})) \approx 0 \Leftrightarrow h_{\theta}(\mathbf{x}) \approx 0 = y \Leftrightarrow h_{\theta}(\mathbf{x}) \approx y$$

deci prima condiție, legată de apropiere de 0 a lui  $Cost(h_{\theta}(\mathbf{x}), y)$  este îndeplinită de definiția din ecuația (3.16).



Figura 3.3: Cele două ramuri ale funcției *Cost* din ecuația (3.14)

Pentru condiția de depărtare, dacă<sup>6</sup>  $Cost(h_{\theta}(\mathbf{x}), y) = M \gg 0$ , atunci obținem echivalent  $h_{\theta}(\mathbf{x}) = \exp(-M)$  (pentru  $y = 1$ ) respectiv  $h_{\theta}(\mathbf{x}) = 1 - \exp(-M)$  (pentru  $y = 0$ );  $y$  este unul din capetele intervalului  $[0, 1]$ , iar dacă  $M$  este o valoare din ce în ce mai mare, atunci  $h_{\theta}(\mathbf{x})$  se îndreaptă spre celălalt capăt al intervalului. Rezultă deci că și această a doua condiție este îndeplinită de definiția din formula (3.16).

În plus, deoarece fiecare din cele două ramuri ale funcției de cost din (3.14) e convexă, rezultă că de fapt funcția *Cost* este convexă (ea e una din cele două ramuri, în funcție de valoarea lui  $y^{(i)}$ ). Mai departe, funcția  $J$ , ca sumă a unui număr finit de funcții convexe, este ea însăși convexă. Ca atare, orice punct de minim al lui  $J$  este garantat și minim global.

Funcția de eroare  $J$  se rescrie astfel:

$$J(\theta) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[ y^{(i)} \cdot \ln h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) + (1 - y^{(i)}) \cdot \ln (1 - h_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)})) \right] \quad (3.18)$$

$$= -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[ y^{(i)} \cdot \ln \hat{y}^{(i)} + (1 - y^{(i)}) \cdot \ln (1 - \hat{y}^{(i)}) \right] \quad (3.19)$$

<sup>6</sup>Relația  $\gg$  este “mult mai mare decât”.



și această formă se numește binary cross-entropy.

Dacă considerăm vectorii coloană  $\mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(m)})^t$  și vectorul  $\hat{\mathbf{y}}$  din ecuația (3.11) pagina 36, funcția de eroare binary cross-entropy se rescrie vectorizat ca:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{m} (\mathbf{y}^t \cdot \ln \hat{\mathbf{y}} + (\mathbb{1}_m - \mathbf{y})^t \cdot \ln(\mathbb{1}_m - \hat{\mathbf{y}})) \quad (3.20)$$

unde  $\mathbb{1}_m$  este vectorul coloană cu  $m$  componente, toate egale cu 1, iar funcția logaritm se aplică punctual, pe fiecare componentă a vectorului argument. Observăm că se folosesc produse scalare de vectori, de exemplu  $\mathbf{y}^t \cdot \ln \hat{\mathbf{y}}$ , deci  $J(\boldsymbol{\theta})$  este într-adevăr un număr.

### 3.2.5 Algoritm de instruire

Setul de antrenare  $\mathcal{S}$  este utilizat pentru a deduce valori adecvate ale lui  $\boldsymbol{\theta}$ , astfel încât predicțiile  $h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(i)})$  date de model pentru valorile de intrare  $\mathbf{x}^{(i)}$  să fie cât mai apropiate de valorile actuale ale etichetelor corespunzătoare  $y^{(i)}$ . Datorită proprietăților funcției *Cost* din ecuația (3.14) și a faptului că  $J$  este valoarea medie a funcției *Cost* peste setul de instruire, deducem că minimizând valoarea lui  $J$ , obținem (în medie) valori  $\hat{y}^{(i)} = h_{\boldsymbol{\theta}}(x^{(i)})$  apropiate de  $y^{(i)}$ .

Pentru determinarea lui  $\boldsymbol{\theta}^{(min)}$  care minimizează funcția  $J$ :

$$\boldsymbol{\theta}^{(min)} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^{n+1}} J(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.21)$$

se folosește algoritmul de căutare după direcția gradientului (eng: gradient descent): se pornește cu valori aleatoare setate componentelor vectorului  $\boldsymbol{\theta}$  – sau chiar cu vectorul nul – și se modifică în mod iterativ, scăzând la fiecare pas valoarea gradientului înmulțită cu un coeficient pozitiv mic  $\alpha$ , numit rată de învățare.

Algoritm de instruire are forma:

1. Setează componentele lui  $\boldsymbol{\theta}$  la valori inițiale aleatoare în jurul lui zero sau chiar zero;
2. **repetă**

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \cdot \frac{\partial J}{\partial \theta_j}(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{simultan pentru } j = 0, 1, \dots, n$$
- } pana la convergenta**

Condiția de convergență poate avea forma:

- valorile succesive ale funcției de eroare scad și diferența dintre două valori succesive este sub un prag  $\varepsilon > 0$  specificat a priori;

- norma diferenței  $L_2$  dintre două valori succesive ale vectorului  $\theta$  este sub un prag  $\varepsilon > 0$ ; cu alte cuvinte, distanța dintre doi vectori succesivi de ponderi devine foarte mică;
- (mai rar) se atinge un număr maxim de iterații, specificat a priori.

Derivatele parțiale  $\partial J / \partial \theta_j$  sunt:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_j}(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)} \right) \cdot x_j^{(i)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \hat{y}^{(i)} - y^{(i)} \right) \cdot x_j^{(i)} \quad (3.22)$$

și modificarea din interiorul iterației devine:

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)} \right) \cdot x_j^{(i)} \quad \text{simultan pentru } j = 0, 1, \dots, n$$

Se observă că modificarea ponderilor  $\theta_0, \dots, \theta_n$  are aceeași formă ca la regresia liniară. Singura diferență este forma funcției  $h_{\theta}$ : liniară la regresie liniară, sigmoidă logistică la regresia logistică.

Atribuirile simultane cerute pentru  $j = 0, 1, \dots, n$  se fac fie prin utilizarea unor variabile temporare  $\theta_j^{temp}$ , fie prin folosirea de calcul vectorizat. Se arată destul de ușor că gradientul lui  $J$  este:

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = \frac{1}{m} \mathbf{X}^t (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) \quad (3.23)$$

și deci modificarea din interiorul iterațiilor de instruire devine:

$$\theta = \theta - \alpha \frac{1}{m} \mathbf{X}^t (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) \quad (3.24)$$

unde vectorul  $\hat{\mathbf{y}}$  e calculat ca în (3.11).

Se păstrează discuția legată de valorile ratei de învățare  $\alpha$  (dinamica funcției de eroare, valori  $\alpha$  prea mari sau prea mici) din secțiunea 2.3, pagina 22.

Nu există o formă analitică de determinare a coeficienților, cum aveam la regresia liniară (metoda ecuațiilor normale).

### 3.2.6 Regularizare

Dacă se permite ca valorile parametrilor<sup>7</sup>  $\theta_1, \dots, \theta_n$  să fie lăsate neconstrânse, atunci valorile lor absolute pot crește și influența negativ performanța de generalizare a modelului: pentru variații mici ale datelor de intrare vom avea variații mari ale valorilor funcției model; mai mult, dacă luăm în considerare trăsături de intrare de forma  $x_i \cdot x_j$ ,  $x_i \cdot x_j \cdot x_k$  etc. modelul poate ajunge să aproximeze foarte bine perechile din setul de instruire, dar fără a

<sup>7</sup>Se remarcă lipsa termenului liber  $\theta_0$ ; el nu este regularizat.

avea o performanță bună pe datele din set de testare<sup>8</sup>. Ca atare, se preferă impunerea unor constrângeri parametrilor  $\theta_1, \dots, \theta_n$  astfel încât aceștia să fie cât mai mici în valoare absolută.

Pentru regularizare se modifică forma funcției de eroare astfel:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[ y^{(i)} \cdot \ln h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(i)}) + (1 - y^{(i)}) \cdot \ln(1 - h_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}^{(i)})) \right] \quad (3.25)$$

Funcția de eroare din ecuația (3.18)

$$+ \underbrace{\frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^n \theta_j^2}_{\text{termenul de regularizare}} \quad (3.26)$$

$$= -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[ y^{(i)} \cdot \ln \hat{y}^{(i)} + (1 - y^{(i)}) \cdot \ln(1 - \hat{y}^{(i)}) \right] \quad (3.27)$$

Funcția de eroare din ecuația (3.19)

$$+ \underbrace{\frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^n \theta_j^2}_{\text{termenul de regularizare}} \quad (3.28)$$

Vectorizat se scrie astfel:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{m} \left( \mathbf{y}^t \cdot \ln \hat{\mathbf{y}} + (\mathbf{1} - \mathbf{y})^t \cdot \ln(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{y}}) \right) + \|\boldsymbol{\theta}[1 :]\|_2^2 \quad (3.29)$$

unde  $\boldsymbol{\theta}[1 :]$  este vectorul format din toate componentele lui  $\boldsymbol{\theta}$  mai puțin prima, iar  $\|\mathbf{v}\|_2$  este norma Euclidiană a vectorului  $\mathbf{v}$ :

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_i v_i^2}$$

Modificarea adusă algoritmului de instruire este simplă: mai trebuie inclusă și derivata parțială a lui  $\theta_i^2$  în raport cu  $\theta_i$ :

repetă{

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)}) \cdot x_0^{(i)}$$

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)}) \cdot x_j^{(i)} + \lambda \theta_j \right]$$

} pana la convergenta

---

<sup>8</sup>Alfel zis: creștem numărul de trăsături din setul de antrenare, dar numărul de exemplare din acest set rămâne același:  $m$ .

unde atribuirile se fac simultan pentru indicii  $0, 1, \dots, n$  ai componentelor vectorului  $\boldsymbol{\theta}$  – se folosesc variabile tempoare sau calcul vectorizat. Forma vectorizată se scrie ca:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} - \alpha \left[ \frac{1}{m} \mathbf{X}^t (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) + \lambda (0, \theta_1, \dots, \theta_n)^t \right] \quad (3.30)$$

unde  $(0, \theta_1, \dots, \theta_n)^t$  este obținut vectorul  $\boldsymbol{\theta}$  punând prima componentă 0.

### 3.3 Regresia logistică multinomială

Pentru cazul în care se cere discriminarea pentru  $K$  clase,  $K > 2$ , regresia logistică se extinde să construiască  $K$  funcții (modele) simultan:

$$h_{\boldsymbol{\Theta}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P(y = 1 | \mathbf{x}; \boldsymbol{\Theta}) \\ P(y = 2 | \mathbf{x}; \boldsymbol{\Theta}) \\ \vdots \\ P(y = K | \mathbf{x}; \boldsymbol{\Theta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_K \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{y}} \quad (3.31)$$

Facem o comparație între valoarea de ieșire a acestui model multinomial și ieșirea produsă de regresia logistică binară: pentru două clase e suficientă construirea unei singure funcții, sigmoida logistică, producând o singură valoare. Pentru  $K > 2$  clase ar fi suficientă construirea a  $K - 1$  funcții, dar pentru comoditate se preferă construirea a  $K$  funcții, oricare din ele fiind acceptată ca redundantă: suma celor  $K$  funcții fiind 1, oricare din ele poate fi determinată ca unu minus suma celorlalte  $K - 1$ . Discutăm suplimentar acest aspect în secțiunile 3.4.1 și 3.4.2.

#### 3.3.1 Setul de instruire

Setul de instruire suferă modificări doar pentru valorile lui  $y^{(i)}$ , care acum pot fi din mulțimea  $\{1, \dots, K\}$ . Formal, setul de instruire se scrie ca:

$$\mathcal{S} = \left\{ (\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) \mid 1 \leq i \leq m \right\} \quad (3.32)$$

unde vectorul de intrare  $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathbf{R}^{n+1}$  – ca și la regresia logistică binară – iar  $y^{(i)} \in \{1, \dots, K\}$ .

#### 3.3.2 Funcția softmax

În cazul regresiei logistice cu două clase s-a folosit sigmoidă logistică, producându-se valori de ieșire ce pot fi folosite direct ca probabilități condiționate. Pentru mai mult de două clase, estimarea de probabilitate condiționată se face cu funcția *softmax*, care transformă un vector oarecare de  $K$  numere într-un vector de  $K$  valori din intervalul  $(0, 1)$  și care însumate dau 1 – un așa-numit vector stohastic.

Pornind de la vectorul  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_K)^t \in \mathbf{R}^K$ , el e transformat de funcția *softmax* astfel:

$$\text{softmax}(\mathbf{z}) = (\text{softmax}(\mathbf{z}; 1), \dots, \text{softmax}(\mathbf{z}; K))^t \quad (3.33)$$

unde  $\text{softmax}(\mathbf{z}; k)$  este:

$$\text{softmax}(\mathbf{z}; k) = \frac{\exp(z_k)}{\sum_{l=1}^K \exp(z_l)} \quad (3.34)$$

pentru  $1 \leq k \leq K$ . Se verifică ușor că  $\text{softmax}(\mathbf{z}; k) \in (0, 1)$  pentru orice  $k$ ,  $1 \leq k \leq K$  și  $\sum_{k=1}^K \text{softmax}(\mathbf{z}; k) = 1$ , adică vectorul  $\text{softmax}(\mathbf{z})$  este stohastic. Vom folosi funcția *softmax* pentru producerea de estimări de probabilități condiționate de intrarea curentă  $\mathbf{x}$ .

### 3.3.3 Reprezentarea modelului

Ponderile instruibile care definesc modelul de clasificare se grupează într-o matrice  $\Theta \in \mathbf{R}^{(n+1) \times K}$ , construită ca:

$$\Theta = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_K \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

unde vectorul coloană  $\theta_k \in \mathbf{R}^{n+1}$  conține ponderile (parametrii instruibili) pentru clasa  $k$ ,  $1 \leq k \leq K$ .

Modelul care conține toate cele  $K$  modele, câte unul pentru fiecare clasă, are forma:

$$h_{\Theta}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P(y=1|\mathbf{x}; \Theta) \\ P(y=2|\mathbf{x}; \Theta) \\ \vdots \\ P(y=K|\mathbf{x}; \Theta) \end{pmatrix} = \text{softmax} \begin{pmatrix} \theta_1^t \cdot \mathbf{x} \\ \theta_2^t \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \theta_K^t \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix} = \quad (3.36)$$

$$= \text{softmax}(\Theta^t \cdot \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_K \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{y}} \quad (3.37)$$

pentru un vector de intrare  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1}$ .

Probabilitatea ca un vector  $\mathbf{x}$  să fie de clasă  $k$  ( $1 \leq k \leq K$ ) este:

$$P(y=k|\mathbf{x}; \Theta) = \frac{\exp(\theta_k^t \cdot \mathbf{x})}{\sum_{l=1}^K \exp(\theta_l^t \cdot \mathbf{x})} = \hat{y}_k \in (0, 1) \quad (3.38)$$

Pentru clasificarea unui vector  $\mathbf{x}$  dat la intrare, se calculează probabilitatea de apartenență la clasa  $k$ ,  $P(y = k|\mathbf{x}; \Theta)$  pentru toți  $k$  între 1 și  $K$  și se alege acel  $k^{(max)}$  care realizează probabilitatea maximă:

$$k^{(max)} = \arg \max_{1 \leq k \leq K} P(y = k|\mathbf{x}; \Theta) = \arg \max_{1 \leq k \leq K} \hat{y}_k \quad (3.39)$$

Predicția făcută de model este că  $\mathbf{x}$  aparține clasei  $k^{(max)}$ . O decizie similară era folosită și pentru regresia logistică binară.

Instruirea vizează determinarea acelei matrice  $\Theta$  pentru care modelul învață să recunoască cât mai bine datele din setul de instruire (eventual adăugându-se și factor de regularizare). Mai clar, dacă un obiect  $\mathbf{x}$  din setul de instruire  $\mathcal{S}$  este de clasă  $k$ , atunci vrem ca valoarea  $P(y = k|\mathbf{x}; \Theta)$  să fie cât mai aproape de 1.

### 3.3.4 Funcția de cost

Ca și în cazul funcției de eroare pentru regresia logistică, se va cuantifica în ce măsură diferă clasa actuală a unei intrări de predicția dată de modelul  $h_{\Theta}$ . Introducem funcția indicator  $I(\cdot)$  care pentru o valoare logică returnează 1 dacă argumentul este adevărat și 0 altfel:

$$I(\text{valoare\_logica}) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \text{valoare\_logica} = \text{adevarat} \\ 0 & \text{dacă } \text{valoare\_logica} = \text{fals} \end{cases} \quad (3.40)$$

Funcția de eroare pentru regresia logistică multinomială se definește ca:

$$J(\Theta) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K \left[ I(y^{(i)} = k) \cdot \ln \hat{y}_k^{(i)} \right] \quad (3.41)$$

$$= -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K \left[ I(y^{(i)} = k) \cdot \ln P(y^{(i)} = k|\mathbf{x}^{(i)}; \Theta) \right] \quad (3.42)$$

$$= -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K \left[ I(y^{(i)} = k) \cdot \ln \frac{\exp(\theta_k^t \mathbf{x}^{(i)})}{\sum_{l=1}^K \exp(\theta_l^t \mathbf{x}^{(i)})} \right] \quad (3.43)$$

și se numește cross-entropy.

Pentru reprezentarea clasei curente  $y^{(i)}$  se folosește frecvent așa-numita codificare one-hot (unul din  $K$ ), astfel: dacă  $y^{(i)} = k$ , atunci codificarea sa  $\mathbf{y}_{ohc}^{(i)}$  este un vector coloană cu  $K$  valori, având pe poziția  $k$  valoarea 1 și 0 în rest. Cu această codificare se rescrie funcția de eroare mai compact ca:

$$J(\Theta) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \mathbf{y}_{ohc}^{(i)} \right)^t \cdot \ln \left( \hat{\mathbf{y}}^{(i)} \right) \quad (3.44)$$

unde logaritmul se aplică pe fiecare componentă a vectorului  $\hat{\mathbf{y}}^{(i)}$ <sup>9</sup>.

În cazul în care se folosesc biblioteci de calcul vectorizat, se poate folosi produsul Hadamard în locul celui algebric: dacă  $\mathbf{A}$  și  $\mathbf{B}$  sunt 2 matrice de tip  $m \times n$ , atunci produsul Hadamard (sau punctual) al lor este  $\mathbf{C}$  de același tip,  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ ,  $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ . Dacă considerăm matricele  $\mathbf{Y}_{ohe}$ , respectiv  $\hat{\mathbf{Y}}$  de tip  $K \times m$ , având fiecare coloana  $i$  vectorul  $\mathbf{y}_{ohe}^{(i)}$ , respectiv  $\hat{\mathbf{y}}^{(i)}$ , atunci putem considera matricea  $-\frac{1}{m} \cdot \mathbf{Y}_{ohe} \odot \ln \hat{\mathbf{Y}}$  pentru care se calculează apoi suma tuturor elementelor folosind funcții eficiente din bibliotecă.

Alternativ, suma elementelor unei matrice  $\mathbf{S}$  de tipul  $m \times n$  se poate obține cu:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S_{ij} = \mathbf{1}_m^t \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}_n \quad (3.45)$$

unde  $\mathbf{1}_p$  este vector coloană de  $p$  elemente egale cu 1. Funcția de eroare din ecuația (3.44) se rescrie ca:

$$J(\Theta) = -\frac{1}{m} \mathbf{1}_m^t \cdot (\mathbf{Y} \odot \ln \hat{\mathbf{Y}}) \cdot \mathbf{1}_K \quad (3.46)$$

Secțiunea 3.4 conține alte discuții legate de calculul funcției de eroare.

### 3.3.5 Calcularea gradientului

Determinarea lui  $\theta^{(min)} = \arg \min_{\theta \in \mathbf{R}^{m \times (n+1)}} J(\theta)$  se face prin căutarea după direcția gradientului. Formula gradientului este, pentru  $1 \leq k \leq K$ :

$$\nabla_{\theta_k} J(\Theta) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[ \mathbf{x}^{(i)} \left( I(y^{(i)} = k) - \hat{y}^{(i)} \right) \right] = \quad (3.47)$$

$$= -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[ \mathbf{x}^{(i)} \left( I(y^{(i)} = k) - P(y^{(i)} = k | \mathbf{x}^{(i)}; \Theta) \right) \right] \quad (3.48)$$

pe care o demonstrăm în cele ce urmează: Având în vedere că gradientul e operator liniar, calculăm gradientul pentru un termen de cost corespunzător

---

<sup>9</sup>Datorită valorilor apropiate de 0 pe care le pot lua componentele lui  $\hat{y}^{(i)}$ , la implementare trebuie făcută o aducere a valorilor mici la niște praguri convenabile – *clipping*.

unei perechi de antrenare  $(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)})$ ,  $J_i(\Theta)$ :

$$J_i(\Theta) = - \sum_{l=1}^K I(y^{(i)} = l) \cdot \ln \frac{\exp(\boldsymbol{\theta}_l^t \mathbf{x}^{(i)})}{\sum_{j=1}^K \exp(\boldsymbol{\theta}_j^t \mathbf{x}^{(i)})} = \quad (3.49)$$

$$= - \sum_{l=1}^K I(y^{(i)} = l) \cdot \ln(\exp(\boldsymbol{\theta}_l^t \mathbf{x}^{(i)})) + \quad (3.50)$$

$$+ \sum_{l=1}^K I(y^{(i)} = l) \cdot \ln \left( \sum_{j=1}^K \exp(\boldsymbol{\theta}_j^t \mathbf{x}^{(i)}) \right) = \quad (3.51)$$

$$= - \sum_{l=1}^K \left[ I(y^{(i)} = l) \cdot \boldsymbol{\theta}_l^t \mathbf{x}^{(i)} \right] + \quad (3.52)$$

$$+ \sum_{l=1}^K \left[ I(y^{(i)} = l) \cdot \ln \left( \sum_{j=1}^K \exp(\boldsymbol{\theta}_j^t \mathbf{x}^{(i)}) \right) \right] \quad (3.53)$$

În suma din linia (3.53), termenul cu logaritm nu depinde de indicele de însumare  $l$ , deci poate fi scos în fața sumei; mai departe, pentru suma rămasă, pentru exact un indice  $l$  avem  $I(y^{(i)} = l) = 1$  și în rest indicatorii sunt 0, deci suma e 1.  $J_i(\Theta)$  devine:

$$J_i(\Theta) = - \sum_{l=1}^K \left[ I(y^{(i)} = l) \cdot \boldsymbol{\theta}_l^t \mathbf{x}^{(i)} \right] + \ln \left( \sum_{j=1}^K \exp(\boldsymbol{\theta}_j^t \mathbf{x}^{(i)}) \right) \quad (3.54)$$

Aplicând gradientul, obținem:

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}_k} J_i(\Theta) = - \nabla_{\boldsymbol{\theta}_k} \sum_{l=1}^K \left[ I(y^{(i)} = l) \cdot \boldsymbol{\theta}_l^t \mathbf{x}^{(i)} \right] + \nabla_{\boldsymbol{\theta}_k} \ln \left( \sum_{j=1}^K \exp(\boldsymbol{\theta}_j^t \mathbf{x}^{(i)}) \right)$$

$$= -I(y^{(i)} = k) \mathbf{x}^{(i)} + \frac{\nabla_{\boldsymbol{\theta}_k} \sum_{j=1}^K \exp(\boldsymbol{\theta}_j^t \mathbf{x}^{(i)})}{\sum_{j=1}^K \exp(\boldsymbol{\theta}_j^t \mathbf{x}^{(i)})} \quad (3.55)$$

$$= -I(y^{(i)} = k) \mathbf{x}^{(i)} + \frac{\mathbf{x}^{(i)} \exp(\boldsymbol{\theta}_k^t \mathbf{x}^{(i)})}{\sum_{j=1}^K \exp(\boldsymbol{\theta}_j^t \mathbf{x}^{(i)})} \quad (3.56)$$

$$= -I(y^{(i)} = k) \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{x}^{(i)} P(y^{(i)} = k | \mathbf{x}^{(i)}; \Theta) \quad (3.57)$$

$$= -\mathbf{x}^{(i)} \left( I(y^{(i)} = k) - P(y^{(i)} = k | \mathbf{x}^{(i)}; \Theta) \right) \quad (3.58)$$

sau forma mai compactă

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}_k} J_i(\Theta) = -\mathbf{x}^{(i)} \left( I(y^{(i)} = k) - \hat{y}^{(i)} \right). \quad (3.59)$$



Calculând media celor  $m$  termeni  $\nabla_{\theta_k} J_i(\Theta)$  se obține formula gradientului total  $\nabla_{\theta_k} J(\Theta)$  din ecuația (3.48).

Calculul de gradienti pentru toată matricea  $\theta$  este:

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = -\frac{1}{m} \mathbf{X}^t \cdot (\mathbf{Y} - \ln \hat{\mathbf{Y}}) \quad (3.60)$$

### 3.3.6 Algoritm de instruire

Modificarea vectorului  $\theta_k$  este:

$$\theta_k = \theta_k - \alpha \cdot \nabla_{\theta_k} J(\Theta) \quad (3.61)$$

$$= \theta_k + \frac{\alpha}{m} \sum_{i=1}^m \left[ \mathbf{x}^{(i)} \left( I(y^{(i)} = k) - \hat{y}^{(i)} \right) \right] \quad (3.62)$$

simultan pentru toți  $1 \leq k \leq K$ . Modificarea se face iterativ, până când matricea  $\Theta$  se stabilizează<sup>10</sup>, funcția de eroare evoluează prea puțin<sup>11</sup>, sau se atinge un număr maxim de iterații.

Algoritm de instruire are forma:

1. Setează componentele lui  $\Theta$  la valori inițiale aleatoare mici (în jurul lui 0) sau chiar 0;
2. repeta{

$$\theta_k := \theta_k + \frac{\alpha}{m} \sum_{i=1}^m \left[ \mathbf{x}^{(i)} \left( I(y^{(i)} = k) - \hat{y}^{(i)} \right) \right] \quad (3.63)$$

} pana la convergenta

Matricial, algoritmul se rescrie ca:

1. Setează componentele lui  $\Theta$  la valori inițiale aleatoare mici (în jurul lui 0) sau chiar 0;
2. repeta{

$$\Theta := \Theta + \alpha \frac{1}{m} \mathbf{X}^t \cdot (\mathbf{Y} - \ln \hat{\mathbf{Y}}) \quad (3.64)$$

} pana la convergenta

Spre deosebire de regresia liniară, nu există o variantă algebrică de determinare a valorilor din matricea  $\Theta$ .

<sup>10</sup>Respectiv: norma diferenței dintre două versiuni succesive ale matricei  $\Theta$  devine mai mică decât un prag  $\varepsilon$  dat, mic și pozitiv. Drept normă se alege de regulă norma Frobenius.

<sup>11</sup>Mai clar:  $|J(\Theta_t) - J(\Theta_{t-1})| < \varepsilon$ , pentru un  $\varepsilon$  dat, pozitiv și mic.

### 3.3.7 Regularizare

În practică se preferă penalizarea valorilor absolute mari ale parametrilor  $\theta_{ik}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq K$ ); nu se penalizează ponderile de termeni liberi  $\theta_{0k}$  ( $1 \leq k \leq K$ ). Se adaugă penalizări pentru pătratele valorilor ponderilor rămase și funcția de eroare devine:

$$J(\Theta) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K \left[ I(y^{(i)} = k) \cdot \ln \hat{y}_k^{(i)} \right] + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \theta_{ki}^2 \quad (3.65)$$

$$= -\frac{1}{m} \mathbb{1}_m^t \cdot (\mathbf{Y} \odot \ln \hat{\mathbf{Y}}) \cdot \mathbb{1}_K + \frac{\lambda}{2} \|\Theta[\mathbf{1} :, :]\|_F^2 \quad (3.66)$$

unde  $\|\mathbf{A}\|_F$  e norma Frobenius a matricei  $\mathbf{A}_{m \times n}$ :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (3.67)$$

Coeficientul  $\lambda$  este un hiperparametru care arată cât de mult contează regularizarea în cadrul funcției de eroare; evident, pentru  $\lambda = 0$  nu avem regularizare, iar dacă  $\lambda$  se alege foarte mare, atunci funcția de eroare cross-entropy este neglijată în favoarea micșorării valorii coeficienților  $\theta_{li}$ , fără a da vreo importanță prea mare nepotrivirilor între clasele estimate și cele reale. Evident, trebuie realizat un echilibru între aceste două extreme.

Formula gradientului folosit în căutarea de tip gradient descent este:

$$\nabla_{\theta_k} J(\Theta) = -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[ \mathbf{x}^{(j)} \left( I(y^{(j)} = k) - \hat{y}^{(i)} \right) \right] + \lambda \cdot [0, \theta_{k,1}]^t \quad (3.68)$$

unde  $[0, \theta_{k,1}]^t$  este vectorul coloană care are pe prima poziție 0 (termenii liberi nu se regularizează) și pe următoarele  $n$  poziții valorile  $\theta_{k1}, \dots, \theta_{kn}$ .

Formula matricială pentru toți gradientii, pentru tot setul de date este:

$$\nabla_{\Theta} J(\Theta) = -\frac{1}{m} \mathbf{X}^t \cdot (\mathbf{Y} - \ln \hat{\mathbf{Y}}) + \lambda \Theta_0 \quad (3.69)$$

unde  $\Theta_0$  este matricea  $\Theta$  cu prima linie umplută cu 0.

Valoarea hiperparametrului  $\lambda$  se determină prin încercări repetate, k fold cross-validation, căutare aleatoare, optimizare Bayesiană, algoritmi genetici sau alte euristici de căutare.

## 3.4 Comentarii

Elementele din această secțiune aduc precizări asupra modelelor de regresie logistică, precum și discuții legate de eficientizarea calculului.

### 3.4.1 Redundanța parametrilor pentru regresia logistică multinomială

Pentru regresia logistică cu două clase a fost suficient un singur parametru  $\boldsymbol{\theta}$ . Pentru modelul de regresie logistică multinomială cu  $K$  clase se folosesc  $K$  vectori  $\boldsymbol{\theta}$  — o discrepanță vizibilă. Discuția care urmează arată că, într-adevăr, regresia logistică multinomială are redundanță de parametri.

Pentru o dată de intrare  $\mathbf{x}$ , modelul estimează probabilitatea condiționată ca:

$$P(y = k | \mathbf{x}; \boldsymbol{\Theta}) = \frac{\exp(\boldsymbol{\theta}_k^t \mathbf{x})}{\sum_{j=1}^K \exp(\boldsymbol{\theta}_j^t \mathbf{x})} \quad (3.70)$$

Dacă scădem din fiecare vector  $\boldsymbol{\theta}_j$  un același vector  $\boldsymbol{\psi}$ , obținem:

$$\frac{\exp((\boldsymbol{\theta}_k - \boldsymbol{\psi})^t \mathbf{x})}{\sum_{j=1}^K \exp((\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\psi})^t \mathbf{x})} = \frac{\exp(-\boldsymbol{\psi}^t \mathbf{x}) \exp(\boldsymbol{\theta}_k^t \mathbf{x})}{\exp(-\boldsymbol{\psi}^t \mathbf{x}) \sum_{j=1}^K \exp(\boldsymbol{\theta}_j^t \mathbf{x})} = \quad (3.71)$$

$$= \frac{\exp(\boldsymbol{\theta}_k^t \mathbf{x})}{\sum_{j=1}^K \exp(\boldsymbol{\theta}_j^t \mathbf{x})} = P(y = k | \mathbf{x}; \boldsymbol{\Theta}) \quad (3.72)$$

deci predicțiile vor fi aceleași ca la setul de parametri original; mai mult, dacă avem vectorii  $\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_K$  care minimizează funcția de cost  $J$ , atunci aceeași valoare minimă poate fi atinsă cu  $\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\psi}, \dots, \boldsymbol{\theta}_K - \boldsymbol{\psi}$  pentru orice vector  $\boldsymbol{\psi}$ . Dacă pe post de  $\boldsymbol{\psi}$  se ia oricare din vectorii  $\boldsymbol{\theta}^k$ , de exemplu  $\boldsymbol{\theta}^K$ , atunci vectorul de parametri devine neredundant,  $\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_K, \boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_K, \dots, \mathbf{0}$  cu același comportament ca mai înainte. Acceptăm însă redundanța, pentru simplitatea și simetria formulelor rezultate. Redundanța este demonstrată și mai jos pentru cazul particular  $K = 2$ , când se regăsește regresia logistică binară.

O observație interesantă e: chiar și în cazul cu redundanță funcția de eroare  $J$  rămâne încă funcție convexă, cu o infinitate de valori minime și egale între ele. Chiar și așa, funcția de eroare nu are minime locale mai mari decât minimul global, deci situația din figura 3.2 nu apare.

### 3.4.2 Relația dintre cele două tipuri de regresii logistice

Pentru regresia logistică multinomială, e de așteptat ca să regăsim regresia logistică binară pentru cazul  $K = 2$ . Într-adevăr, ecuația (3.37) devine:

$$h_{\Theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\exp(\boldsymbol{\theta}_1^t \mathbf{x}) + \exp(\boldsymbol{\theta}_2^t \mathbf{x})} \begin{pmatrix} \exp(\boldsymbol{\theta}_1^t \mathbf{x}) \\ \exp(\boldsymbol{\theta}_2^t \mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

$$= \frac{1}{\exp(\boldsymbol{\theta}_1^t \mathbf{x}) + \exp(\boldsymbol{\theta}_2^t \mathbf{x})} \frac{\exp(\boldsymbol{\theta}_1^t \mathbf{x})}{\exp(\boldsymbol{\theta}_1^t \mathbf{x})} \begin{pmatrix} \exp(\boldsymbol{\theta}_1^t \mathbf{x}) \\ \exp(\boldsymbol{\theta}_2^t \mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

$$= \frac{1}{\exp((\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1)^t \mathbf{x}) + \exp((\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1)^t \mathbf{x})} \begin{pmatrix} \exp((\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1)^t \mathbf{x}) \\ \exp((\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1)^t \mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Notând  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2$ , avem:

$$h_{\Theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp(-\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x})} \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(-\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \exp(-\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x})} \\ 1 - \frac{1}{1 + \exp(-\boldsymbol{\theta}^t \cdot \mathbf{x})} \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

$$= \begin{pmatrix} P(y = 1 | \mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \\ 1 - P(y = 1 | \mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

Tot pentru  $K = 2$ , se verifică ușor că funcția de eroare (3.43) devine cea din (3.19).

### 3.4.3 Calculul numeric al funcției softmax

La implementarea directă a funcției softmax se poate întâmpla ca valoarea funcției exponențiale să depășească posibilitățile de reprezentare numerică, pentru valori  $z_l$  mari. Un truc de calcul frecvent aplicat în practică este următorul: în loc de a se calcula funcția softmax precum în ecuația (3.34), se calculează prima dată valoarea maximă din  $(z_1, \dots, z_K)^t$ , fie ea  $M$ , apoi se calculează softmax pentru vectorul de valori  $\mathbf{z}' = (z_1 - M, \dots, z_K - M)^t$ . Avem că:

$$\begin{aligned} softmax(\mathbf{z}'; l) &= \frac{\exp(z_l - M)}{\sum_{k=1}^K \exp(z_k - M)} = \frac{\exp(z_l)/\exp(M)}{\sum_{k=1}^K [\exp(z_k)/\exp(M)]} = \\ &= \frac{\exp(z_l)}{\sum_{k=1}^K \exp(z_k)} = softmax(\mathbf{z}; l) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Rezultatul e același, dar calculul se face cu exponenți mai mici,  $z_l - M < z_l$ . Se evită astfel depășirea de reprezentare (overflow).

### 3.4.4 Trucul “log sum exp”

Funcția de eroare pentru regresia logistică multinomială are forma:

$$J(\Theta) = -\frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K I(y^{(i)} = k) \cdot \ln \frac{\exp(\theta_k^t \mathbf{x}^{(i)})}{\sum_{j=1}^K \exp(\theta_j^t \mathbf{x}^{(i)})} \right] \quad (3.80)$$

Termenul cu logaritm permite simplificări de calcule:

$$\ln \frac{\exp(\theta_k^t \mathbf{x}^{(i)})}{\sum_{j=1}^K \exp(\theta_j^t \mathbf{x}^{(i)})} = \ln(\exp(\theta_k^t \mathbf{x}^{(i)})) - \ln\left(\sum_{j=1}^K \exp(\theta_j^t \mathbf{x}^{(i)})\right) \quad (3.81)$$

$$= \theta_k^t \mathbf{x}^{(i)} - \ln\left(\sum_{j=1}^K \exp(\theta_j^t \mathbf{x}^{(i)})\right) \quad (3.82)$$

Pentru al doilea termen din (3.82) se folosește un truc asemănător celui din subsecțiunea precedentă, pentru a evita calcul de funcție exponențială cu exponent mare. Trucul “log sum exp” se bazează pe identitatea:

$$\ln\left(\sum_{j=1}^K \exp(z_j)\right) = a + \ln\left(\sum_{j=1}^K \exp(z_j - a)\right) \quad (3.83)$$

pentru un  $a$  oarecare, demonstrată în cele ce urmează:

$$\ln\left(\sum_{j=1}^K \exp(z_j)\right) = \ln\left(\sum_{j=1}^K (\exp(z_j) \exp(a) \exp(-a))\right) = \quad (3.84)$$

$$= \ln\left(\exp(a) \cdot \sum_{j=1}^K (\exp(z_j) \exp(-a))\right) = \quad (3.85)$$

$$= \ln \exp(a) + \ln\left(\sum_{j=1}^K \exp(z_j - a)\right) = \quad (3.86)$$

$$= a + \ln\left(\sum_{j=1}^K \exp(z_j - a)\right) \quad (3.87)$$

Pentru a reduce din magnitudinea exponenților considerăm, în mod convenabil,  $a = \max_i z_i$  și reducem riscul de depășire de reprezentare numerică (overflow).

Trucurile din secțiunea curentă și cea precedentă explică și de ce în unele implementări de biblioteci pentru machine learning, pentru funcția de eroare se cer valorile vectorului  $\mathbf{z}$  (eng: logits) și nu valorile calculate de *softmax*.

## Capitolul 4

# Perceptronul liniar

### 4.1 Motivație, definiții, notații

Un perceptron liniar este cel mai simplu tip de neuron, capabil să învețe să separe două clase de puncte care sunt liniar separabile. Instruirea este supervizată.

**Definiția 4.** (Clase liniar separabile) Mulțimile  $\mathcal{C}_1$  și  $\mathcal{C}_2$  din spațiul  $\mathbb{R}^n$  se numesc liniar separabile dacă există o funcție  $y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de forma:

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i + b \quad (4.1)$$

astfel încât:

$$\begin{cases} y(\mathbf{x}) > 0 \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{C}_1 \\ y(\mathbf{x}) < 0 \text{ pentru } \mathbf{x} \in \mathcal{C}_2 \end{cases} \quad (4.2)$$

În condițiile de mai sus, numim clasa  $\mathcal{C}_1$  clasă pozitivă, iar  $\mathcal{C}_2$  clasă negativă.

Plecând de la un set de instruire format din mulțimile  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  despre care se știe că sunt liniar separabile – dar pentru care funcția  $y(\cdot)$  nu se cunoaște – perceptronul liniar determină coeficienții (ponderile)  $b, w_1, \dots, w_n$  pentru care condițiile din (4.2) sunt îndeplinite.

Ecuția  $y(\mathbf{x}) = 0$ , precum și mulțimile  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  pe care  $y$  le separă au interpretări geometrice simple. Punctele  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  pentru care  $y(\mathbf{x}) = 0$  formează o varietate liniară – notată cu  $S$  – de dimensiune  $n - 1$ ; dacă  $b = 0$  atunci  $y(\mathbf{x}) = 0$  este un hiperplan (subspațiu afin de dimensiune  $n - 1$  și deci trecând prin origine); prin abuz de limbaj, în literatură se folosește tot denumirea de hiperplan pentru suprafața  $y(\mathbf{x}) = 0$ , chiar dacă  $b \neq 0$ .

Pentru cazul  $n = 2$ ,  $w_1 > 0$ ,  $w_2 > 0$ ,  $b < 0$  a se vedea reprezentarea din figura 4.1.

Suprafața liniară  $y(\mathbf{x}) = 0$  separă planul în două submulțimi – în cazul  $n = 2$ , în două semiplane. Oricum am alege un punct  $\mathbf{x}$  dintr-o submulțime

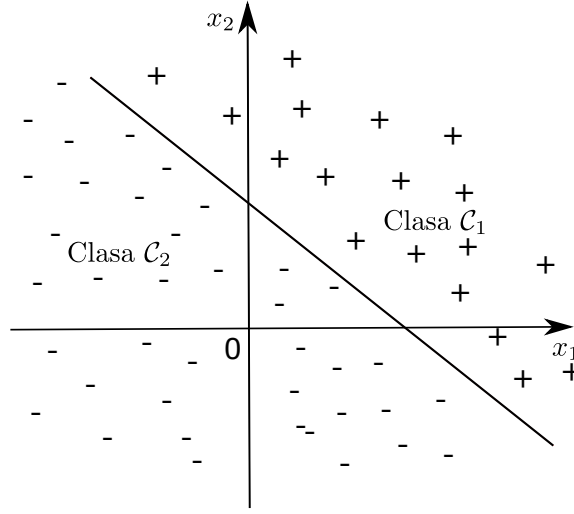


Figura 4.1: Mulțimi separabile liniar și suprafață de separare liniară  $y(\mathbf{x}) = w_1x_1 + w_2x_2 + b$ ,  $w_1 > 0$ ,  $w_2 > 0$ ,  $b < 0$ . Clasa  $\mathcal{C}_1$  e clasă pozitivă, clasa  $\mathcal{C}_2$  e clasă negativă

(semiplan) oarecare, semnul lui  $y(\mathbf{x})$  este mereu același, iar la trecerea în cealaltă submulțime semnul se schimbă. Pentru  $n = 2$  vorbim de semiplan pozitiv și semiplan negativ.

Dacă  $\mathbf{x}_1$  și  $\mathbf{x}_2$  sunt două puncte de pe varietatea liniară  $S$ , atunci:

$$y(\mathbf{x}_1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}_1 + b = 0 \quad (4.3)$$

$$y(\mathbf{x}_2) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}_2 + b = 0 \quad (4.4)$$

Scăzând (4.4) din (4.3) obținem  $\mathbf{w}^t \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0$ , sau, echivalent, vectorul  $\mathbf{w}$  este perpendicular pe varietatea liniară  $y(\mathbf{x}) = 0$ , a se vedea figura 4.2.

Distanța dintre un punct de coordonate  $\mathbf{x}$  și suprafața  $S$  este:

$$z = \frac{|y(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{w}\|} \quad (4.5)$$

unde  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^t$  iar  $\|\mathbf{w}\|$  este norma Euclidiană<sup>1</sup> a vectorului  $\mathbf{w}$ ,  $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{w_1^2 + \dots + w_n^2}$ .

Putem renota termenul liber  $b$  din (4.1) cu  $w_0$ , putem considera că vectorul  $\mathbf{x}$  mai are o componentă  $x_0 = 1$ ; dacă notăm tot cu  $\mathbf{w}$  vectorul de ponderi extins  $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n)^t$  și  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)^t$ , cu  $x_0 = 1$  și  $w_0 = b$ , atunci funcția de separare  $y$  din (4.1) se rescrie ca:

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x} \quad (4.6)$$

<sup>1</sup>Peste tot în cursul de azi considerăm norma Euclidiană.

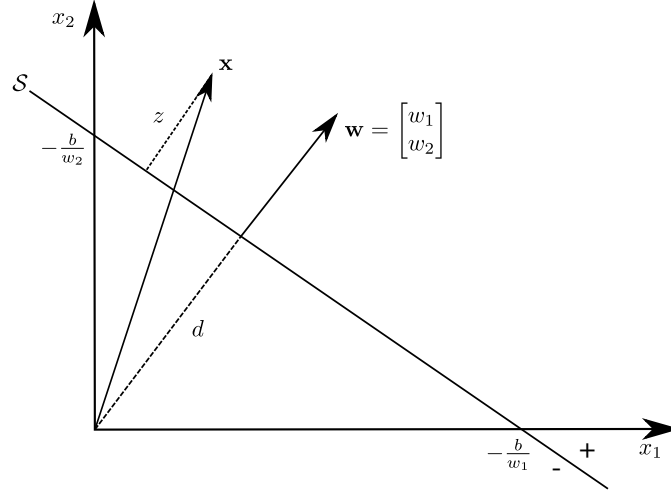


Figura 4.2: Suprafața de decizie  $S$ , distanța de la punctul de coordonate  $\mathbf{x}$  la  $S$ , poziția vectorului de ponderi  $\mathbf{w}$  față de  $S$

## 4.2 Perceptronul liniar

Setul de instruire este

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)} \right) \mid \mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^n, y^{(i)} \in \{-1, 1\}, 1 \leq i \leq m \right\} \quad (4.7)$$

unde  $y^{(i)}$  este eticheta vectorului de intrare  $\mathbf{x}^{(i)}$ . Putem partiționa vectorii de intrare  $\mathbf{x}^{(i)}$  în submulțimi:

- $\mathcal{C}_1$  - clasa pozitivă, acei  $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^n$  pentru care  $y^{(i)} = +1$ ,
- $\mathcal{C}_2$  - clasa negativă, acei  $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^n$  pentru care  $y^{(i)} = -1$ .

Setul  $\mathcal{S}$  este astfel dat încât mulțimile  $\mathcal{C}_1$  și  $\mathcal{C}_2$  sunt liniar separabile – aceasta fiind condiția în care perceptronul poate învăța să construiască o suprafață de separare.

Reprezentarea unui perceptron este dată în figura 4.3.

Valoarea de activare a perceptronului este  $z = \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=0}^n w_i \cdot x_i$ . Valoarea de ieșire a perceptronului se calculează cu funcția de activare “treaptă”:

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } z > 0 \\ -1, & \text{dacă } z < 0 \\ \text{nedefinit}, & \text{dacă } z = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Valoarea produsă pentru ponderile  $\mathbf{w}$  și intrarea  $\mathbf{x}$  este:

$$\hat{y} = f(\mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}) \quad (4.9)$$

La inferență, pentru un vector  $\mathbf{x}$ :



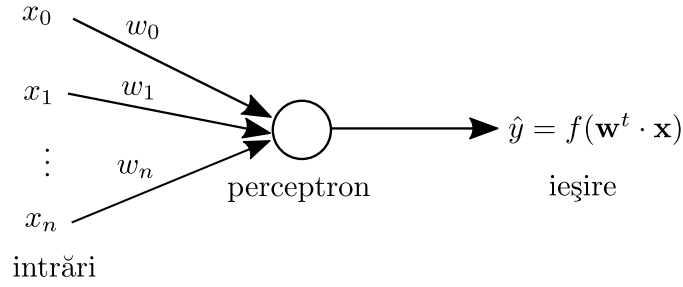


Figura 4.3: Reprezentarea unui perceptron liniar

- dacă  $\mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x} > 0$ , atunci  $f(\mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}) = 1$  și spunem că perceptronul indică  $\mathbf{x}$  ca fiind de clasă pozitivă
- dacă  $\mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x} < 0$ , atunci  $f(\mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}) = -1$  și spunem că perceptronul indică  $\mathbf{x}$  ca fiind de clasă negativă

Valoarea funcției  $f$  este deliberat nedefinită în 0: dacă  $\mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x} = 0$  atunci punctul  $\mathbf{x}$  se află pe suprafața de separare și deci pentru un atare caz nu se poate spune despre el că ar fi de clasă pozitivă sau negativă.

### 4.3 Algoritmul de instruire a perceptronului

Scopul algoritmului este ca, plecând de la setul de instruire  $\mathcal{S}$  din ecuația (4.7), să obținem ponderile  $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n)^t$  astfel încât:

$$\begin{cases} \text{pentru } \mathbf{x}^{(i)} \in \mathcal{C}_1 \text{ să avem } \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} > 0 \\ \text{pentru } \mathbf{x}^{(i)} \in \mathcal{C}_2 \text{ să avem } \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} < 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Se demonstrează (vezi secțiunea 4.5) că dacă  $\mathcal{C}_1$  și  $\mathcal{C}_2$  sunt liniar separabile, atunci algoritmul de instruire poate să determine o funcție de separare  $y$  precum în ecuația (4.6).

Instruirea pornește de la ponderi aleatoare pentru valorile  $w_0, w_1, \dots, w_n$ ; acestea pot fi luate chiar și 0. Notăm acest vector inițial cu  $\mathbf{w}(1)$ . Printr-un proces iterativ vom obține vectorii de ponderi  $\mathbf{w}(2), \dots, \mathbf{w}(k), \dots$ . Vectorii de ponderi se vor stabiliza la un moment dat:  $\mathbf{w}(l) = \mathbf{w}(l+1) = \dots$ .

Pentru un vector de ponderi curente  $\mathbf{w}(k)$ , intrarea curentă  $\mathbf{x}^{(i)}$  și eticheta asociată  $y^{(i)}$ , estimarea produsă de perceptron este  $\hat{y}^{(i)} = f(\mathbf{w}(k)^t \mathbf{x}^{(i)})$ . Dacă pentru un vector de ponderi  $\mathbf{w}(k)$  avem  $\hat{y}^{(i)} = y^{(i)}$  pentru tot setul de instruire, atunci perceptronul recunoaște corect clasele datelor din  $\mathcal{S}$ . Altfel, este necesar să se opereze modificări pentru vectorul de ponderi curent  $\mathbf{w}(k)$ , detaliile fiind date în cele ce urmează.

Să considerăm ponderile de la momentul  $k$ ,  $\mathbf{w}(k)$ . Algoritmul de instruire a perceptronului iterează peste setul de instruire. Dacă pentru o pereche

$(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) \in \mathcal{S}$  avem că  $\hat{y}^{(i)} = y^{(i)}$ , atunci pentru acest caz vectorul de ponderi  $\mathbf{w}(k)$  nu trebuie modificat: perceptronul clasifică corect intrarea  $\mathbf{x}^{(i)}$ . Dacă  $\hat{y}^{(i)} \neq y^{(i)}$ , atunci avem unul din următoarele două cazuri:

1.  $\mathbf{x}^{(i)}$  e de clasă pozitivă, dar e clasificat momentan ca negativ:  $y^{(i)} = +1$  și  $\hat{y}^{(i)} = -1$
2.  $\mathbf{x}^{(i)}$  e de clasă negativă, dar e clasificat momentan ca pozitiv:  $y^{(i)} = -1$  și  $\hat{y}^{(i)} = +1$

Pentru cazul **1** avem că  $\mathbf{w}(k)^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} < 0$  dar ar trebui ca produsul să fie pozitiv. Trebuie deci modificat vectorul  $\mathbf{w}(k)$  astfel încât, pentru noul vector  $\mathbf{w}(k+1)$  valoarea produsului scalar cu  $\mathbf{x}$  să crească:  $\mathbf{w}(k+1)^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} > \mathbf{w}(k)^t \cdot \mathbf{x}^{(i)}$ , în speranța că asta va duce la  $\mathbf{w}(k+1)^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} > 0$  și deci la  $\hat{y}^{(i)} = f(\mathbf{w}(k+1)^t \cdot \mathbf{x}^{(i)}) = +1 = y^{(i)}$ . Modificarea propusă  $\Delta \mathbf{w}(k)$  este:

$$\Delta \mathbf{w}(k) = \alpha \cdot \mathbf{x}^{(i)} \quad (4.11)$$

unde  $\alpha$  este un coeficient strict pozitiv. Noul vector de ponderi va fi:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \Delta \mathbf{w}(k) = \mathbf{w}(k) + \alpha \cdot \mathbf{x}^{(i)} \quad (4.12)$$

Verificăm că vectorul  $\mathbf{w}(k+1)$  duce la creșterea valorii produsului scalar dintre ponderi și vectorul de intrare.

Avem:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1)^t \cdot \mathbf{x} &= (\mathbf{w}(k) + \alpha \cdot \mathbf{x}^{(i)})^t \cdot \mathbf{x} = \mathbf{w}(k)^t \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot (\mathbf{x}^{(i)})^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} = \\ &= \mathbf{w}(k)^t \cdot \mathbf{x} + \|\mathbf{x}^{(i)}\|^2 \geq \mathbf{w}(k)^t \cdot \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.13)$$

cu inegalitate strictă pentru  $\|\mathbf{x}^{(i)}\| \neq 0$  (și intrucât  $x_0^{(i)} = 1$ , avem că norma lui  $\mathbf{x}^{(i)}$  e strict pozitivă, deci inegalitatea (4.13) e de fapt strictă). Avem deci creșterea produsului scalar dintre ponderi și vectorul de intrare, așa cum ne-am propus.

Pentru cazul **2**, facem modificarea ponderilor astfel:

$$\Delta \mathbf{w}(k) = -\alpha \cdot \mathbf{x}^{(i)} \quad (4.14)$$

deci

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \Delta \mathbf{w}(k) = \mathbf{w}(k) - \alpha \cdot \mathbf{x}^{(i)} \quad (4.15)$$

cu aceeași condiție pentru  $\alpha$ . Se verifică, similar ca în (4.13) că  $\mathbf{w}(k+1)^t \cdot \mathbf{x} < \mathbf{w}(k)^t \cdot \mathbf{x}$ .

Avem deci că:

$$\Delta \mathbf{w}(k) = \begin{cases} \mathbf{0}_{n+1}, & \text{dacă } y^{(i)} = \hat{y}^{(i)} \\ \alpha \cdot \mathbf{x}^{(i)}, & \text{dacă } y^{(i)} = +1 \text{ și } \hat{y}^{(i)} = -1 \\ -\alpha \cdot \mathbf{x}^{(i)}, & \text{dacă } y^{(i)} = -1 \text{ și } \hat{y}^{(i)} = +1 \end{cases} \quad (4.16)$$

$$= \begin{cases} \mathbf{0}_{n+1}, & \text{dacă } y^{(i)} = \hat{y}^{(i)} \\ \alpha y^{(i)} \mathbf{x}^{(i)}, & \text{dacă } y^{(i)} \neq \hat{y}^{(i)} \end{cases} \quad (4.17)$$

Putem scrie modificările din ecuația (4.17), astfel:

$$\Delta \mathbf{w}(k) = \frac{\alpha}{2} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}) \cdot \mathbf{x}^{(i)} \quad (4.18)$$

E posibil ca o singură modificare a ponderilor să nu fie suficientă pentru ca tot setul de instruire  $\mathcal{S}$  să ajungă să fie clasificat corect. Dacă în decursul unei epoci de instruire – epocă înseamnă parcurge în întregime a setului de instruire  $\mathcal{S}$  – apare măcar o modificare, se va efectua o nouă epocă. Procesul se încheie când ponderile se stabilizează, deci setul de instruire  $\mathcal{S}$  e învățat.

Algoritmul de instruire a perceptronului este:

1. Inițializează  $\mathbf{w}(1)$  cu componente aleatoare sau cu vectorul nul; setează  $k = 1$
2. Repetă:
  - (a) *corectClasificat* = *adevarat*
  - (b) pentru  $i = 1, m$ 
    - i. calculează  $\hat{y}^{(i)} = f(\mathbf{w}(k)^t \cdot \mathbf{x}^{(i)})$
    - ii. dacă  $\hat{y}^{(i)} \neq y^{(i)}$  atunci:
      - A. *corectClasificat* = *fals*
      - B.  $\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \alpha y^{(i)} \mathbf{x}^{(i)}$
      - C.  $k = k + 1$
3. Până când *corectClasificat* = *adevarat*
4. Vectorul  $\mathbf{w}(k)$  este vectorul final de ponderi pentru perceptron, iar  $k$  este numărul total de setări ale vectorului de ponderi  $\mathbf{w}$ .

Deși algoritmul modifică instantaneu ponderile pentru fiecare caz în care ieșirea furnizată de perceptron nu coincide cu eticheta cunoscută, algoritmul nu este incremental în sensul dat în secțiunea 8.1, având de regulă nevoie de mai multe epoci de instruire.

Faptul că algoritmul se oprește după un număr finit de pași este demonstrat în secțiunea 4.5. Notăm cu  $\mathbf{w}$  vectorul de ponderi produs la terminarea algoritmului,  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(k)$ .

După ce algoritmul de instruire se oprește, clasificarea unui vector ca fiind de clasă pozitivă sau negativă se face ca în secțiunea 4.2.

## 4.4 Modificarea ponderilor ca gradient

Algoritmii de instruire pentru regresia liniară și cea logistică au folosit gradientii unei funcții de eroare. Putem da și pentru perceptron o regulă de instruire cu gradienti, considerând funcția de eroare:

$$J(\mathbf{w}) = \sum_{i: \hat{y}^{(i)} \neq y^{(i)}} \hat{y}^{(i)} \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} \quad (4.19)$$

unde mulțimea peste care se face însumarea este mulțimea acelor cazuri pentru care perceptronul are erori de clasificare.

În mod evident:

- atunci când perceptronul face clasificare corectă pentru tot setul de instruire, funcția  $J$  are valoarea 0, deoarece suma se calculează peste o mulțime vidă;
- pentru un caz  $\hat{y}^{(i)} \neq y^{(i)}$  avem că  $\hat{y}^{(i)} \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} > 0$  conform justificărilor din cele două cazuri tratate la pagina 57.

Pentru un caz  $\hat{y}^{(i)} \neq y^{(i)}$  fixat, gradientul lui  $\hat{y}^{(i)} \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}^{(i)}$  este:

$$\nabla_{\mathbf{w}} [\hat{y}^{(i)} \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}^{(i)}] = \hat{y}^{(i)} \nabla_{\mathbf{w}} [\mathbf{w}^t \cdot \mathbf{x}^{(i)}] = \hat{y}^{(i)} \mathbf{x}^{(i)} \quad (4.20)$$

și recunoaștem termenul de modificare a ponderilor din algoritmul de instruire a perceptronului.

Se poate remarca o deosebire între algoritmul perceptronului și cei de la regresia liniară sau logistică: la aceștia din urmă funcția de eroare este calculată pe tot setul de instruire, pe când în algoritmul perceptronului se calculează eroarea și se aplică gradientul ei pentru fiecare caz de clasificare greșită. Modificarea algoritmului perceptronului pentru a folosi funcția agregată (4.19) și gradientii aferenți este imediată. Am preferat forma dată mai sus, fiind clasică.

## 4.5 Convergența perceptronului

Vom demonstra că algoritmul de instruire a perceptronului se termină în număr finit de pași, dacă setul de instruire  $\mathcal{S}$  este compus din două mulțimi  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  liniar separabile.

Condiția de liniar separabilitate ne permite să spunem că există un vector  $\mathbf{w}_* \in \mathbb{R}^{n+1}$  cu:

$$\begin{cases} \text{pentru } \mathbf{x}^{(i)} \in \mathcal{C}_1 \text{ să avem } \mathbf{w}_*^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} > 0 \\ \text{pentru } \mathbf{x}^{(i)} \in \mathcal{C}_2 \text{ să avem } \mathbf{w}_*^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} < 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

(a se revedea condițiile 4.10), sau, mai pe scurt,

$$y^{(i)} \cdot \mathbf{w}_*^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} > 0 \text{ pentru orice } i, 1 \leq i \leq m \quad (4.22)$$

Putem presupune că vectorul  $\mathbf{w}_*$  este de normă 1; în caz contrar se poate face normarea lui<sup>2</sup>, iar inegalitatea din (4.22) rămâne adevărată.

Întrucât numărul de elemente din setul de instruire este finit, putem găsi  $\gamma > 0$  astfel încât:

$$y^{(i)} \cdot \mathbf{w}_*^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} > \gamma \text{ pentru orice } i, 1 \leq i \leq m \quad (4.23)$$

de exemplu

$$\gamma = \frac{1}{2} \cdot \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ y^{(i)} \cdot \mathbf{w}_*^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} \right\} > 0 \quad (4.24)$$

Deoarece vectorul  $\mathbf{w}_*$  nu este cunoscut (știm însă că există, pentru că  $\mathcal{C}_1$  și  $\mathcal{C}_2$  sunt liniar separabile), cantitatea  $\gamma$  e și ea necunoscută. Considerarea ei e totuși utilă pentru demonstrarea convergenței algoritmului de instruire a perceptronului.

Tot datorită faptului că mulțimea de instruire e finită, avem că există un  $R > 0$  astfel încât  $\|\mathbf{x}^{(i)}\| \leq R$ : toți vectorii de intrare din setul de instruire sunt cuprinși în interiorul unei sfere centrate în origine și de rază  $R$  suficient de mare. Mai clar, luăm

$$R = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \|\mathbf{x}^{(i)}\| \right\} \quad (4.25)$$

Două presupuneri care simplifică partea de demonstrație pentru teorema ce urmează sunt:

1.  $\alpha = 1$ ; valoarea lui  $\alpha$  nu are de fapt importanță, atâta timp cât e mai mare ca zero;
2. inițial vectorul  $\mathbf{w}(1)$  are toate elementele 0.

**Teorema 1.** *(Teorema de convergență a perceptronului) Algoritmul de instruire a perceptronului efectuează cel mult  $R^2/\gamma^2$  modificări ale ponderilor, după care returnează un hiperplan de separare.*

*Demonstrație.* Pentru  $k \geq 1$ , fie un  $\mathbf{x}^{(i)}$  clasificat greșit de perceptron, adică  $f(\mathbf{w}(k)^t \mathbf{x}^{(i)}) \neq y^{(i)}$ , sau, echivalent:

$$f(\mathbf{w}(k)^t \mathbf{x}^{(i)}) \neq y^{(i)} \Leftrightarrow y^{(i)} \cdot \mathbf{w}(k)^t \mathbf{x}^{(i)} < 0 \quad (4.26)$$

Pentru această situație de clasificare greșită a unui vector din setul de instruire, algoritmul efectuează modificare a lui  $\mathbf{w}(k)$  conform ecuației (4.17).

Avem:

---

<sup>2</sup>Un vector nenul împărțit la norma lui produce un vector de normă 1. Se observă că norma lui  $\mathbf{w}_*$  nu poate fi 0: dacă ar fi, atunci tot vectorul ar fi 0, iar inecuația 4.22 nu ar mai putea fi îndeplinită pentru niciun  $i$ .

$$\mathbf{w}(k+1)^t \cdot \mathbf{w}_* = (\mathbf{w}(k) + y^{(i)} \mathbf{x}^{(i)})^t \cdot \mathbf{w}_* \quad (4.27)$$

$$= \mathbf{w}(k)^t \cdot \mathbf{w}_* + \underbrace{y^{(i)} (\mathbf{x}^{(i)})^t \cdot \mathbf{w}_*}_{>\gamma \text{ cf. (4.24)}} \quad (4.28)$$

$$> \mathbf{w}(k)^t \cdot \mathbf{w}_* + \gamma \quad (4.29)$$

Prin inducție matematică și ținând cont că  $\mathbf{w}(1) = \mathbf{0}$ , se arată că:

$$\mathbf{w}(k+1)^t \cdot \mathbf{w}_* > k\gamma \quad (4.30)$$

Folosim inegalitatea Cauchy—Schwartz ( $|\mathbf{a}^t \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$ ), faptul că pentru orice număr real  $a$ ,  $a \leq |a|$  și obținem:

$$\mathbf{w}(k+1)^t \cdot \mathbf{w}_* \leq |\mathbf{w}(k+1)^t \cdot \mathbf{w}_*| \leq \|\mathbf{w}(k+1)\| \cdot \|\mathbf{w}_*\| = \|\mathbf{w}(k+1)\| \quad (4.31)$$

și din ultimele două inegalități avem:

$$\|\mathbf{w}(k+1)\| > k\gamma \quad (4.32)$$

Pe de altă parte, avem că:

$$\|\mathbf{w}(k+1)\|^2 = \|\mathbf{w}(k) + y^{(i)} \mathbf{x}^{(i)}\|^2 \quad (4.33)$$

$$= \|\mathbf{w}(k)\|^2 + \|y^{(i)} \mathbf{x}^{(i)}\|^2 + 2\mathbf{w}(k)^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} \cdot y^{(i)} \quad (4.34)$$

$$= \|\mathbf{w}(k)\|^2 + \underbrace{|y^{(i)}|^2}_{=1} \cdot \|\mathbf{x}^{(i)}\|^2 + \underbrace{2\mathbf{w}(k)^t \cdot \mathbf{x}^{(i)} \cdot y^{(i)}}_{<0 \text{ cf. (4.26)}} \quad (4.35)$$

$$< \|\mathbf{w}(k)\|^2 + \|\mathbf{x}^{(i)}\|^2 \quad (4.36)$$

$$\leq \|\mathbf{w}(k)\|^2 + R^2 \quad (4.37)$$

Ținând cont că  $\mathbf{w}(1) = \mathbf{0}$ , prin inducție matematică se arată că:

$$\|\mathbf{w}(k+1)\|^2 < kR^2 \quad (4.38)$$

Din inecuațiile (4.32) și (4.38) rezultă că:

$$k^2\gamma^2 < \|\mathbf{w}(k+1)\|^2 \leq kR^2 \quad (4.39)$$

și deci  $k < R^2/\gamma^2$ . □

Am obținut deci că indicele  $k$  pentru care se fac modificare de ponderi nu poate fi oricât de mare, adică algoritmul se termină în timp finit. Finalizarea lui înseamnă totodată obținerea unui set de ponderi pentru forma de separare liniară care să clasifice corect cazurile din setul de instruire.

*Comentariu:* Deoarece valoarea lui  $\gamma$  nu e cunoscută, rezultatul de mai sus nu ne spune care e numărul maxim de pași necesari. Totuși, s-a găsit o dovadă că algoritmul nu rulează la infinit.

## 4.6 Algoritmul lui Gallant

Algoritmul lui Gallant – sau algoritmul “buzunarului” – tratează cazul în care setul de instruire nu este liniar separabil. Ideea algoritmului este de a menține vectorul  $\mathbf{w}$  de ponderi care face cele mai puține erori de clasificare pentru date succesive. La finalul unei epoci se contorizează câte cazuri din setul de instruire sunt corect clasificate de vectorul curent de ponderi. Dacă numărul de clasificări corecte este mai mare decât pentru vectorul menținut până până acum într-un “buzunar” (la început: vectorul  $\mathbf{w}(1)$  cu număr de clasificări corecte produse de el), atunci se actualizează conținutul “buzunarului”: vectorul curent de ponderi și numărul de clasificări corecte. Procesul se repetă de un număr de ori specificat. La final se returnează vectorul de ponderi din “buzunar”.

## 4.7 Comentarii

Spre deosebire de regresia logistică, perceptronul liniar nu produce o valoare care să exprime în ce măsură modelul consideră că un vector de intrare aparține clasei pozitive,  $P(\mathcal{C}_1|\mathbf{x})$ . Totuși, vine cu demonstrație matematică pentru convergență, dacă un separator liniar desparte clasa pozitivă de cea negativă.

La momentul apariției, perceptronul liniar a fost privit ca un motiv clar pentru care problemele cele mai complexe sunt rezolvabile prin perceptroni. Cartea *Perceptrons*<sup>3</sup> a lui Minsky și Papert, din 1969, arată însă că perceptronul nu poate rezolva probleme care sunt neseparabile liniar, de exemplu problema XOR. Conjectura lor că utilizarea de mai mulți perceptroni nu poate să ducă la rezolvarea de probleme neseparabile liniar a devenit extrem de populară, motiv pentru care cercetările în domeniul rețelelor neurale artificiale au fost descurajate. Revenirea s-a produs în 1986, când Rumelhart, Hinton și Williams<sup>4</sup> au propus o procedură de învățare pentru rețele cu mai multe straturi de neuroni neliniari care permitea abordarea claselor neseparabile liniar.

Setul de instruire pentru problema XOR este următorul:

$$\left\{((0, 0)^t, 0), ((1, 1)^t, 0), ((1, 0)^t, 1), ((0, 1)^t, 1)\right\}$$

unde fiecare din cele 4 tuple conține o pereche de valori de intrare din  $\{0, 1\}^2$  împreună cu eticheta de clasă asociată, 0 sau 1. Reprezentarea este dată în figura 4.4.

---

<sup>3</sup>Marvin Minsky și Seymour Papert, *Perceptrons: an introduction to computational geometry*, MIT Press, 1969.

<sup>4</sup>David E. Rumelhart, Geoffrey E. Hinton, Ronald J. Williams, *Learning representations by back-propagating errors*, Nature, volume 323, issue 6088, pp. 533-536, 1986.

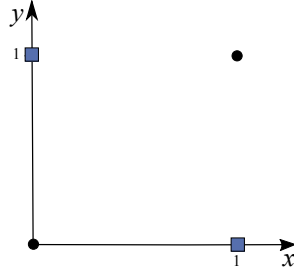


Figura 4.4: Problema XOR. Clasele sunt marcate cu forme și culori diferite. Se poate demonstra că nu se poate trasa o dreaptă în plan care să aibă de o parte a ei doar puncte din clasa “0” și de cealaltă parte doar puncte de clasă “1”.

Demonstrăm algebric că nu există un vector de 3 ponderi  $(w_0, w_1, w_2)^t \in \mathbb{R}^3$  pentru care:

$$\text{sgn}(w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0) = \text{sgn}(w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1) = 1 \quad (4.40)$$

iar

$$\text{sgn}(w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1) = \text{sgn}(w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 0) = -1 \quad (4.41)$$

Incompatibilitatea sistemului de ecuații (4.40, 4.41) se arată ușor: să presupunem că ar exista  $w_0, w_1, w_2$  care să satisfacă (4.40, 4.41), pe care le rescriem echivalent:

$$w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 > 0 \quad (4.42a)$$

$$w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 > 0 \quad (4.42b)$$

$$w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 < 0 \quad (4.42c)$$

$$w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 0 < 0 \quad (4.42d)$$

Grupând primele și ultimele două inecuații și adunând, obținem:

$$2 \cdot w_0 + w_1 + w_2 > 0 \quad (4.43a)$$

$$2 \cdot w_0 + w_1 + w_2 < 0 \quad (4.43b)$$

Pentru problema  $n$ -dimensională, clasa de ieșire pentru vectorul binar  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$  este 1 dacă numărul de componente 1 este impar, altfel 0. Se poate arăta că și pentru cazul  $n$  dimensional problema nu e rezolvabilă printr-un separator liniar.



## Capitolul 5

# Perceptronii multistrat

Rețelele neurale multistrat — sau perceptronii multistrat, multilayer perceptrons (MLPs) — sunt folosite pentru probleme de regresie, de clasificare și de estimare de probabilități condiționate. Instruirea este supervizată. Sunt cea mai populară variantă de rețele neurale artificiale și fac parte din familia mai mare a rețelelor cu propagare înainte.

### 5.1 Motivație pentru rețele neurale multistrat

Conform celor din cursul precedent, un perceptron liniar este capabil să găsească un hiperplan de separare pentru două mulțimi, dacă — și numai dacă — ele sunt liniar separabile. Există însă exemple de probleme simple care nu sunt liniar separabile — și deci nerezolvabile de către perceptronul liniar — dar care pot fi totuși separate. În plus, dorim să rezolvăm și altfel de probleme decât de clasificare binară: regresie (estimare de valoare de ieșire de tip continuu), estimare de probabilitate condiționată, clasificare pentru mai mult de două clase. Cursul de față conține modele bazate pe neuroni neliniari în care se pot rezolva toate aceste tipuri de probleme.

În capitolul anterior s-a dat un exemplu simplu de două clase care nu sunt liniar separabile și pe care un perceptron liniar nu le poate rezolva. Un alt exemplu este dat în figura 5.1.

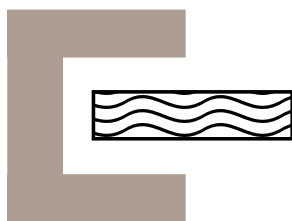


Figura 5.1: Două clase de puncte ce nu sunt liniar separabile

Intuim că un singur neuron e prea puțin pentru probleme complexe de

separare. Pe de altă parte, concatenarea mai multor neuroni cu funcție de activare liniară este echivalentă cu produsul dintre înmulțirea unei secvențe de matrice cu vectorul de intrare. Datorită faptului că înmulțirea de matrice produce tot o matrice, operația este echivalentă cu înmulțirea unei matrice cu vectorul de intrare. Obținem de aici că succesiunea de neuroni cu funcție de activare liniară este echivalentă cu un singur strat de neuroni cu funcție de activare liniară.

Vom folosi deci mai mulți neuroni, iar funcțiile lor de activare vor fi neliniare.

## 5.2 Notății folosite

Tabelul 5.1 conține notațiile principale care se folosesc în acest curs.

## 5.3 Setul de instruire

Rețelele din acest capitol sunt pentru instruire de tip supervizat. Setul de instruire este:

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{d}^{(1)} \right), \left( \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{d}^{(2)} \right), \dots, \left( \mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{d}^{(p)} \right) \right\} \quad (5.1)$$

unde  $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^n$  iar  $\mathbf{d}^{(i)}$  este, după caz:

- pentru o problemă de regresie: vector oarecare din  $\mathbb{R}^m$ ;
- pentru o problemă de clasificare sau estimare de probabilități pentru  $m$  clase: vectori de forma  $(1, 0, \dots, 0)^t, (0, 1, 0, \dots, 0)^t, \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)^t$  cu  $m$  valori binare, din care cea de pe poziția aferentă clasei curente este unu iar restul sunt zero<sup>1</sup>.

## 5.4 Rețeaua neurală multistrat

### 5.4.1 Arhitectură

Există mai multe modalități de dispunere a neuronilor; noi vom folosi o arhitectură de tip multistrat, feedforward, numită perceptron multistrat – chiar dacă neuronii folosiți nu sunt perceptroni, ci neuroni cu funcție de activare neliniară. O rețea multistrat se compune din minim trei straturi:

- strat de intrare ce preia valorile de intrare; nu are rol computațional, nu este format din neuroni<sup>2</sup>;

<sup>1</sup>Așa-numita codificare *one-hot* sau *1-din-m*.

<sup>2</sup>Motiv pentru care unii autori nu îl consideră un strat propriu-zis; frecvent se folosește exprimarea că o rețea are “ $k$ ” straturi ascunse, cele de intrare și ieșire existând oricum. În cele ce urmează considerăm intrarea ca formând un strat.

Noțiune sau notație	Explicație
$p$	numărul de perechi din setul de instruire
$\mathbf{x}^{(i)}$	vector de intrare din setul de instruire, $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})^t, 1 \leq i \leq p$
$\mathbf{d}^{(i)}$	ieșirea asociată intrării $\mathbf{x}^{(i)}$ , din setul de instruire, $\mathbf{d}^{(i)} = (d_1^{(i)}, \dots, d_m^{(i)})^t, 1 \leq i \leq p$
$L$	numărul de straturi din rețeaua neurală, inclusiv straturile de intrare și de ieșire
nod	neuron – dacă apare în stratul $1, 2, \dots, L-1$ – sau nod de intrare – dacă apare în primul strat (de indice 0)
$n_l$	numărul de noduri din stratul $l, 0 \leq l \leq L-1$ ;
$z_i^{[l]}$	starea neuronului $i$ din stratul $l$ , $1 \leq l \leq L-1, 0 \leq i \leq n_l$
$\mathbf{z}^{[l]}$	vectorul conținând stările neuronilor din stratul $l, \mathbf{z}^{[l]} = (z_1^{[l]}, \dots, z_{n_l}^{[l]})^t, 1 \leq l \leq L-1$
$a_i^{[l]}$	activarea, valoarea de ieșire a celui de al $i$ -lea nod din stratul $l$ , $0 \leq l \leq L-1, 1 \leq i \leq n_l$
$\mathbf{a}^{[l]}$	vectorul cu activările nodurilor din stratul $l$ , $0 \leq l \leq L-1, \mathbf{a}^{[l]} = (a_1^{[l]}, \dots, a_{n_l}^{[l]})^t$
$w_{ij}^{[l]}$	ponderea legăturii între neuronul $i$ de pe stratul $l$ și nodul $j$ de pe stratul $l-1, 1 \leq l \leq L-1$ , $1 \leq i \leq n_l, 1 \leq j \leq n_{l-1}$
$\mathbf{W}^{[l]}$	matricea de ponderi dintre straturile $l-1$ și $l$ , $1 \leq l \leq L-1, \mathbf{W}_{ij}^{[l]} = w_{ij}^{[l]}, 1 \leq i \leq n_l, 1 \leq j \leq n_{l-1}$
$\mathbf{W}_i^{[l]}$	linia $i$ a matricei $\mathbf{W}^{[l]}, 1 \leq l \leq L-1, 1 \leq i \leq n_l$
$b_i^{[l]}$	ponderea de bias pentru neuronul $i$ din stratul $l$ , $1 \leq l \leq L-1, 1 \leq i \leq n_l$
$\mathbf{b}^{[l]}$	vectorul ponderilor de bias către stratul $l$ , $\mathbf{b}^{[l]} = (b_1^{[l]}, \dots, b_{n_l}^{[l]})^t, 1 \leq l \leq L-1$
$f^{[l]}$	funcție de activare a neuronilor din stratul $l, 1 \leq l \leq L-1$
$\mathbf{W}$	secvența de matrice de ponderi ( $\mathbf{W}^1, \mathbf{W}^2, \dots, \mathbf{W}^{L-1}$ )
$\mathbf{b}$	secvența de vectori de ponderi de bias ( $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^{L-1}$ )
$J(\mathbf{W}, \mathbf{b})$	eroare empirică pentru set de vectori cu etichete cunoscute
$J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{d}^{(i)})$	eroarea pentru perechea de vectori $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{d}^{(i)})$
$\mathbf{o}^{(i)}$	vector (coloană) de ieșire corespunzător intrării $\mathbf{x}^{(i)}$ , calculat de rețea
$\delta^l$	vectorul cu semnalul de eroare pentru stratul $l, 1 \leq l \leq L-1$
$\odot$	produs Hadamard

Tabelul 5.1: Notății folosite în acest curs

- măcar un strat ascuns, compus din neuroni;
- strat de ieșire, de asemenea compus din neuroni, produce valori estimate care sunt apoi comparate cu ieșirile dorite.

Numerotarea straturilor începe de la 0. Neuronii ascunși produc trăsături noi pe baza vectorilor de intrare și a funcțiilor de activare neliniare, trăsături care sunt mai apoi necesare rețelei neurale pentru producerea unei estimări. Este posibil ca o rețea să aibă mai mult de un neuron în stratul de ieșire, așa cum se vede în figura 5.3.

Se consideră că instruirea e mai eficientă dacă pe lângă valorile de intrare și pe lângă valorile calculate de un strat de neuroni se mai furnizează o valoare constantă, de regulă +1, înmulțită cu o pondere de *bias*<sup>3</sup>. Ponderile dintre straturi precum și aceste ponderi de *bias* sunt instruibile, adică se vor modifica prin procesul de învățare<sup>4</sup>.

O reprezentare de rețea neurală cu trei straturi și o ieșire este dată în figura 5.2; o rețea cu 4 straturi și două ieșiri este reprezentată în figura 5.3. Nu există o relație anume între numărul de straturi ascunse, numărul de neuroni de pe aceste straturi și numărul de noduri de intrare și ieșire.

Vom considera că avem  $L \geq 3$  straturi și în fiecare strat ascuns  $l$  ( $1 \leq l \leq L - 1$ ) un număr de  $n_l$  noduri. Stratul de intrare are  $n_0 = n$  noduri, numărul de neuroni din stratul de ieșire este  $n_{L-1} = m$  dat de: numărul de clase pentru care se face recunoașterea (la problemă de clasificare sau estimare de probabilitate condiționată) respectiv numărul de ieșiri care se doresc a fi approximate (la regresie).

Pentru oricare dintre figurile 5.2 și 5.3:

- valorile  $x_1, x_2, x_3$  sunt componentele vectorului de intrare  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ ; se mai consideră încă o intrare cu valoarea constantă +1, aferentă *bias*-ului;
- valoarea  $a_i^{[l]}$  este ieșirea nodului  $i$  din stratul  $l$ ,  $0 \leq l \leq L - 1$ ,  $1 \leq i \leq n_l$ ; se remarcă în figuri prezența valorilor constante +1 în toate straturile, exceptând cel de ieșire. Pentru stratul de intrare,  $a_i^{[0]} = x_i$ ;
- valoarea  $h_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(\mathbf{x})$  este ieșirea calculată de către rețea pentru vectorul curent de intrare  $\mathbf{x}$ ;  $h_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$  pentru figura 5.2;  $h_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$  pentru figura 5.3. Rețeaua din figura 5.2 poate fi folosită pentru estimarea unei valori continue (problemă de regresie) sau pentru estimare de probabilitate condiționată pentru două clase. Rețeaua din figura 5.3 se poate folosi pentru estimarea a două valori de ieșire, numere reale – problemă de regresie.

<sup>3</sup>Unii autori consideră valoarea constantă -1; nu este esențial, deoarece ponderile sunt coeficienți ce pot avea orice semn.

<sup>4</sup>O discuție asupra necesității considerării *bias*-ului este la <https://web.archive.org/web/20210207195343/ftp://ftp.sas.com/pub/neural/FAQ2.html>

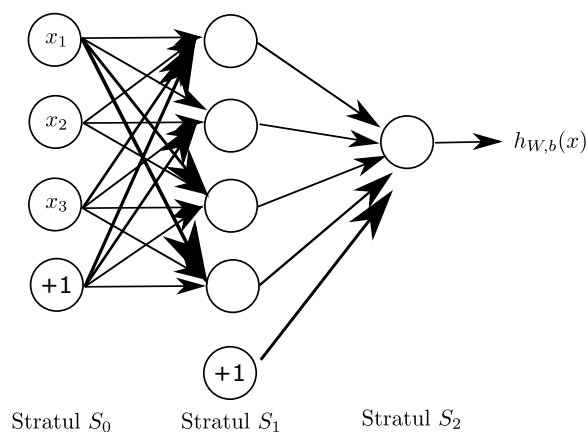


Figura 5.2: Rețea MLP cu 3 straturi. Poate fi folosită pentru estimarea unei valori continue (problemă de regresie) sau pentru discriminare /estimare de probabilitate condiționată pentru două clase

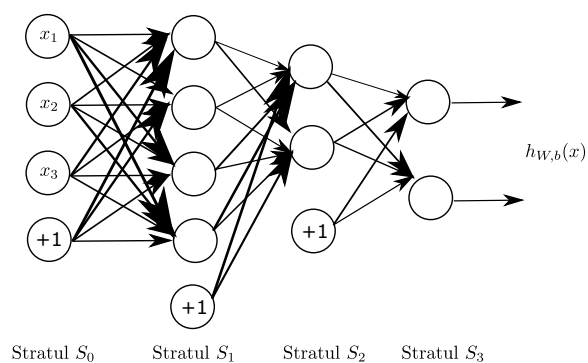


Figura 5.3: Rețea MLP cu 4 straturi ce se poate folosi pentru estimarea a două valori de ieșire, numere reale (regresie)

Perechea  $(\mathbf{W}, \mathbf{b})$  formează mulțimea ponderilor și a valorilor de bias din în rețea. Folosim următoarele notații:

- ponderile dintre stratul de intrare și stratul ascuns sunt conținute în matricea  $\mathbf{W}^{[1]}$ :  $w_{ij}^{[1]}$  este ponderea legăturii dintre neuronul  $i$  al stratului al doilea (de indice 1) și nodul  $j$  din stratul de intrare; se remarcă ordinea indicilor inferiori, utilă mai departe pentru operațiile de algebră liniară ce vor fi folosite;
- în general, notăm cu  $w_{ij}^{[l]}$  ponderea legăturii dintre al  $i$ -lea neuron din stratul de indice  $l$  și al  $j$ -lea nod (neuron sau nod de intrare) din stratul  $l - 1$  ( $1 \leq l \leq L - 1$ );
- valoarea ponderii dintre intrarea constantă  $+1$  din stratul de intrare și neuronul  $i$  din primul strat ascuns este  $b_i^{[1]}$ ,  $1 \leq i \leq n_2$ ;
- în general, coeficientul de bias provenind din stratul  $l - 1$  ( $1 \leq l \leq L - 1$ ) și care afectează neuronul  $i$  din stratul  $l$  este notat cu  $b_i^{[l]}$ ,  $1 \leq i \leq n_l$ .

În ce privește numărul de ponderi instruibile – atât cele din matricele  $\mathbf{W}^{[l]}$  cât și ponderile de bias – avem, pentru  $1 \leq l \leq L - 1$ :

- matricea  $\mathbf{W}^{[l]}$  de ponderi dintre stratul  $l - 1$  și stratul  $l$  are  $n_l$  linii și  $n_{l-1}$  coloane;
- vectorul coloană de coeficienți bias  $\mathbf{b}^{[l]}$  conține  $n_l$  valori, având forma  $\mathbf{b}^{[l]} = (b_1^{[l]}, b_2^{[l]}, \dots, b_{n_l}^{[l]})^t$ .

### 5.4.2 Funcții de activare

Fiecare neuron agregă valorile din nodurile din stratul anterior – incluzând și termenul constant  $+1$  multiplicat cu coeficientul de bias. Neuronul de indice  $i$  din stratul  $l \geq 1$  are starea calculată ca:

$$z_i^{[l]} = w_{i1}^{[l]} \cdot a_1^{[l-1]} + w_{i2}^{[l]} \cdot a_2^{[l-1]} + \dots + w_{i, n_{l-1}}^{[l]} \cdot a_{n_{l-1}}^{[l-1]} + b_i^{[l]} \quad (5.2)$$

$$= \mathbf{W}_i^{[l]} \cdot \mathbf{a}^{[l-1]} + b_i^{[l]}, \quad 1 \leq i \leq n_l \quad (5.3)$$

unde:  $\mathbf{W}_i^{[l]}$  este linia  $i$  a matricei  $\mathbf{W}^{[l]}$ ,  $a_i^{[l-1]}$  este, după caz: valoarea de ieșire a neuronului  $i$  din stratul  $l - 1$  (dacă  $l \geq 1$ ) sau valoarea  $x_i$  din vectorul de intrare curent (dacă  $l = 0$ ). Notând cu  $\mathbf{z}^{[l]}$  vectorul coloană  $(z_1^{[l]}, z_2^{[l]}, \dots, z_{n_l}^{[l]})^t$ , putem scrie matricial:

$$\mathbf{z}^{[l]} = \mathbf{W}^{[l]} \cdot \mathbf{a}^{[l-1]} + \mathbf{b}^{[l]}, \quad 1 \leq l \leq L - 1 \quad (5.4)$$

Pe baza stării  $z_i^{[l]}$  a neuronului  $i$  din stratul  $l$  se calculează ieșirea – sau activarea – sa folosind funcția de activare  $f^{[l]}$ :

$$a_i^{[l]} = f^{[l]}(z_i^{[l]}) \quad (5.5)$$

pentru  $1 \leq l \leq L-1, 1 \leq i \leq n_l$ . Dacă folosim notația  $f^{[l]}((z_1, z_2, \dots, z_k)^t) \stackrel{\text{def}}{=} (f^{[l]}(z_1), f^{[l]}(z_2), \dots, f^{[l]}(z_k))^t$  – adică se aplică funcția  $f^{[l]}$  pe fiecare valoare din vectorul argument, de exemplu prin vectorizare – atunci putem scrie mai compact ecuația (5.5) sub forma:

$$\mathbf{a}^{[l]} = f^{[l]}(\mathbf{z}^{[l]}) \quad (5.6)$$

Funcția de activare  $f^{[l]}(\cdot)$  este necesară în pasul de propagare înainte; pentru pasul de propagare înapoi a erorii este folosită derivata ei. Funcția de activare poate avea formele<sup>5</sup>:

#### 1. funcția logistică sigmoidă:

$$f = \sigma : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1), f(z) = \sigma(z) = \frac{1}{1 + \exp(-z)} \quad (5.7)$$

Derivata acestei funcții este:

$$f'(z) = f(z) \cdot (1 - f(z)) \quad (5.8)$$

#### 2. funcția tangentă hiperbolică:

$$f = \tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), f(z) = \tanh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{\exp(z) + \exp(-z)} \quad (5.9)$$

a cărei derivată este:

$$f'(z) = 1 - f^2(z) \quad (5.10)$$

Se arată ușor că între cele două funcții de activare  $\tanh$  și  $\sigma$  există relația:

$$\tanh(z) = 2 \cdot \sigma(2z) - 1 \quad (5.11)$$

În practică funcția  $\tanh$  dă rezultate mai bune decât sigmoida logistică. O explicație teoretică se găsește în [8]; rezultate empirice sunt în [9].

#### 3. funcția liniară:

$$f(z) = a \cdot z + b \quad (5.12)$$

cu derivata  $f'(z) = a$ ; frecvent se iau  $a = 1, b = 0$ . Este utilizată dacă se dorește ca la ieșire valorile să fie în afara intervalelor  $(0, 1)$  și  $(-1, 1)$ , cum se întâmplă la funcțiile de activare de mai sus.

---

<sup>5</sup>Alte funcții de activare mai pot fi considerate, de exemplu combinații liniare de polinoame Hermite.

#### 4. funcția softmax:

$$\text{softmax}(\mathbf{z}; i) = \frac{\exp(z_i)}{\sum_{j=1}^m \exp(z_j)} \quad (5.13)$$

unde  $i$  este indicele neuronului, iar  $m$  este numărul total de neuroni din stratul său. Funcția softmax a mai fost folosită la regresia logistică pentru cazul a mai mult de două clase;  $\mathbf{z}$  este vector cu valori de stare a neuronilor,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)^t$ .

Funcția softmax este utilă pentru a transforma un vector de valori oarecare în distribuție de probabilitate: se arată ușor că  $\text{softmax}(\mathbf{z}; c) \in (0, 1) \forall c$  și  $\sum_{c=1}^m \text{softmax}(\mathbf{z}; c) = 1$ . De regulă,  $\text{softmax}$  se folosește pentru stratul de ieșire și valorile furnizate se interpretează convenabil drept probabilitatea ca intrarea curentă să fie de clasă  $c$ ,  $1 \leq c \leq m$ ; clasificarea se face găsind acel indice  $1 \leq c \leq m$  pentru care  $\text{softmax}(\mathbf{z}; c)$  este maxim. Se utilizează în stratul de ieșire a rețelei neurale de clasificare sau estimare de probabilitate.

Derivatele parțiale ale funcției softmax sunt:

$$\frac{\partial \text{softmax}(\mathbf{z}; i)}{\partial z_j} = \begin{cases} \text{softmax}(\mathbf{z}; i) \cdot (1 - \text{softmax}(\mathbf{z}; i)) & \text{dacă } i = j \\ -\text{softmax}(\mathbf{z}; i) \cdot \text{softmax}(\mathbf{z}; j) & \text{dacă } i \neq j \end{cases} \quad (5.14)$$

Putem folosi funcția delta al lui Kronecker:  $\delta_{ij} = 1$  dacă  $i = j$  și 0 altfel și rescriem (5.14) ca:

$$\frac{\partial \text{softmax}(\mathbf{z}; i)}{\partial z_j} = \text{softmax}(\mathbf{z}; i) \cdot (\delta_{ij} - \text{softmax}(\mathbf{z}; j)) \quad (5.15)$$

#### 5. funcția Rectified Linear Unit (ReLU):

$$f(z) = \max(0, z) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } z \leq 0 \\ z & \text{dacă } z > 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

Derivatele pe subintervale sunt ușor de calculat și cu execuție rapidă. În plus, spre deosebire de sigmoida logică și de tangenta hiperbolică, ele nu saturează.

Reprezentarea grafică e dată în figura 5.4.

Chiar dacă funcția este liniară pe porțiuni, ea este neliniară în ansamblu. Faptul că doar într-un punct nu e derivabilă nu deranjează în practică.

#### 6. funcția Parametric ReLU (PReLU):

$$f(z) = \begin{cases} \alpha z & \text{dacă } z \leq 0 \\ z & \text{dacă } z > 0 \end{cases} \quad (5.17)$$



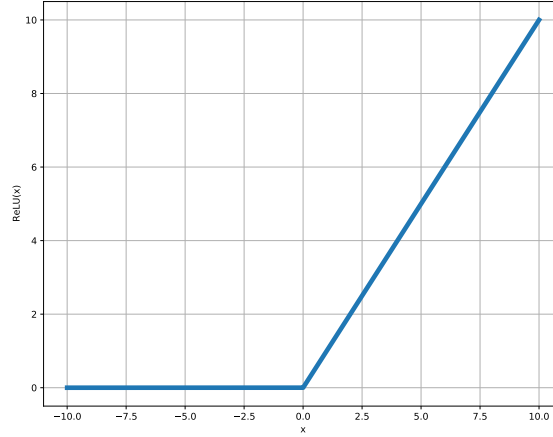


Figura 5.4: Graficul funcției de activare ReLU

unde  $\alpha > 0$  [10], reprezentând o ușoară generalizare a funcției ReLU. Graficul funcției pentru  $\alpha = 0.1$  este dat în figura 5.5. Derivatele pe subintervale sunt ușor de calculat.

Pentru  $\alpha = 0.01$  se obține un caz particular vehiculat în literatură, Leaky ReLU.

## 7. funcția Swish:

$$f(z) = z \cdot \sigma(\beta z) = \frac{z}{1 + \exp(-\beta z)} \quad (5.18)$$

unde  $\sigma$  este logistica sigmoidă,  $\beta$  este parametru constant sau antrenabil. Se arată<sup>6</sup> că pentru rețele cu foarte multe straturi, ea tinde să funcționeze mai bine decât ReLU. Reprezentarea ei este dată în figura 5.6. Derivata ei este:

$$f'(z) = \sigma(\beta z)(1 + \beta z - \beta z \sigma(\beta z)) \quad (5.19)$$

Lista funcțiilor de activare poate continua. Este admis ca funcția de activare să difere de la strat la strat sau de la neuron la neuron. În practică, se preferă folosirea aceleiași funcții de activare, exceptând poate ultimul strat.

<sup>6</sup>Prajit Ramachandran, Barret Zoph, Quoc V. Le, “Searching for Activation Functions”, <https://arxiv.org/abs/1710.05941>

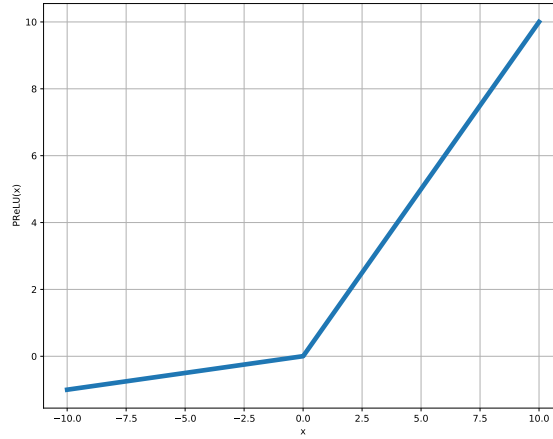


Figura 5.5: Graficul funcției de activare PReLU pentru  $\alpha = 0.1$

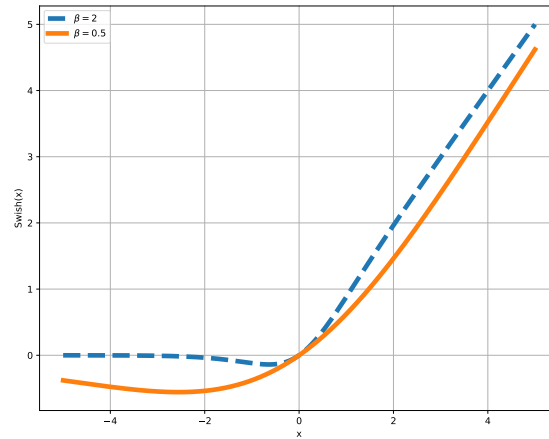


Figura 5.6: Graficul funcției de activare Swish pentru  $\beta \in \{0.5, 2\}$

## 5.5 Pasul de propagare înainte

Odată ce arhitectura rețelei e fixată – numărul de straturi ascunse și numărul de neuroni în fiecare strat, precum și funcțiile de activare – se poate trece la instruirea și apoi utilizarea ei. Pasul de propagare înainte preia un vector de intrare  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$  și produce modificări în starea neuronilor rețelei pornind de la intrare, acționând succesiv asupra straturilor  $1, \dots, L-1$ . Aceasta dă și numele familiei din care face parte rețeaua: “cu propagare

înainte” – eng. “feedforward”. Ieșirile din ultimul strat sunt folosite pentru predicție – regresie, estimare de probabilitate condiționată sau clasificare.

După cum s-a mai afirmat, stratul de intrare nu are rol computațional; valoare sa de ieșire este chiar vectorul de intrare – considerat ca vector coloană –  $\mathbf{x}$  furnizat rețelei:

$$\mathbf{a}^{[0]} = \mathbf{x} \quad (5.20)$$

Dacă se cunosc valorile de ieșire ale nodurilor din stratul  $l - 1$  se pot calcula stările neuronilor din stratul  $l$  și apoi valorile lor de ieșire, astfel:

$$\mathbf{z}^{[l]} = \mathbf{W}^{[l]} \cdot \mathbf{a}^{[l-1]} + \mathbf{b}^{[l]} \quad (5.21)$$

$$\mathbf{a}^{[l]} = f^{[l]}(\mathbf{z}^{[l]}) \quad (5.22)$$

pentru  $l = 1, \dots, L - 1$ , cu  $f^{[l]}(\cdot)$  funcție de activare. Vom nota cu  $\mathbf{o}$  vectorul de  $m$  valori de ieșire produs de către rețea:

$$\mathbf{o} = \mathbf{a}^{[L-1]} \quad (5.23)$$

Pentru cazul în care se lucrează pe un set de date format din perechi vectori intrare-ieșire, vectorii coloană de date de intrare se pot stivui pe orizontală într-o matrice  $\mathbf{X}$ . De exemplu, datele din setul de instruire  $\mathcal{S} = \left\{ \left( \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{d}^{(1)} \right), \left( \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{d}^{(2)} \right), \dots, \left( \mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{d}^{(p)} \right) \right\}$ , matricea  $\mathbf{X}$  se formează ca:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} - & \mathbf{x}^{(1)t} & - \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \mathbf{x}^{(p)t} & - \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

În cele ce urmează, se poate să considerăm  $\mathbf{X}$  ca fiind matricea formată cu toate datele  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(p)}$  din setul de instruire, sau doar cu un eșantion al acestora (eng. mini-batch). În particular, acest minibatch poate fi format dintr-un singur vector de date  $\mathbf{x}^{(i)}$ .

Propagarea înainte presupune că la intrare este furnizat un set de date  $\mathbf{X}$  de  $k$  linii. Rețeaua transmite această rețea mai departe prin straturile sale, succesiv:

$$\mathbf{Z}^{[1]} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{W}^{[1]t} + \mathbf{b}^{[1]t} = \mathbf{A}^{[0]} \cdot \mathbf{W}^{[1]t} + \mathbf{b}^{[1]t} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{A}^{[1]} = f^{[1]}(\mathbf{Z}^{[1]}) \quad (5.26)$$

$$\mathbf{Z}^{[2]} = \mathbf{A}^{[1]} \cdot \mathbf{W}^{[2]t} + \mathbf{b}^{[2]t} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{A}^{[2]} = f^{[2]}(\mathbf{Z}^{[2]}) \quad (5.28)$$

$$\dots \quad (5.29)$$

$$\mathbf{Z}^{[L-1]} = \mathbf{A}^{[L-2]} \cdot \mathbf{W}^{[L-1]t} + \mathbf{b}^{[L-1]t} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{A}^{[L-1]} = f^{[L-1]}(\mathbf{Z}^{[L-1]}) \quad (5.31)$$

$\mathbf{Z}^{[l]}$  și  $\mathbf{A}^{[l]}$  sunt matrice cu  $k$  linii și  $n_l$  coloane. Pentru adunările din (5.25, 5.27, 5.30) se consideră că se aplică mecanismul de “broadcasting”: vectorii  $\mathbf{b}^{[l]}$  produc prin copiere matrice cu același număr de linii ca  $\mathbf{X}$ .

Se recomandă ca operațiile date mai sus să fie implementate folosind biblioteci optimizate de algebră liniară, ce permit înmulțirea eficientă de matrice și calcul vectorizat pe CPU sau GPU — Octave, Matlab, NumPy, PyTorch, Tensorflow, CuPy etc.

## 5.6 Funcții de cost

O pereche  $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^m)$  va produce valoare pentru funcția de eroare astfel: se furnizează vectorul  $\mathbf{x}$  ca intrare în rețea și se calculează un vector de ieșire  $\mathbf{o}$ , reprezentând estimarea produsă de rețea pentru intrarea furnizată; se folosește o funcție de cost, sau de eroare,  $J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d})$  care se dorește a fi cu atât mai mică cu cât vectorul  $\mathbf{o}$  e mai apropiat de  $\mathbf{d}$ , și cu atât mai mare cu cât cei doi vectori sunt mai depărtați. În plus, se mai consideră un factor de regularizare care împiedică ponderile să devină prea mari în valoare absolută, caz asociat de regulă cu un comportament instabil al rețelei: variații mici ale intrării duc la salturi mari în straturile ascunse și la ieșire.

Să considerăm că avem un set de date pentru care dorim să calculăm funcția de eroare (de cost). Vectorii de intrare sunt stivuiți orizontal în matricea  $\mathbf{X}$  de forma:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} - & \mathbf{x}^{(1)t} & - \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \mathbf{x}^{(k)t} & - \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

unde pentru fiecare vector coloană  $\mathbf{x}^{(i)}$  avem o etichetă  $\mathbf{y}^{(i)}$  asociată (eng. ground truth). Setul de date peste care se calculează funcția de eroare este: parte din setul de antrenare  $\mathcal{S}$  sau tot  $\mathcal{S}$ , parte din setul de testare etc. Esențial este ca datele să fie etichetate, adică valorile de ieșire  $\mathbf{d}$  asociate vectorilor de intrare să fie cunoscute.

Forma generală a funcției de eroare calculată pentru setul de date etichetate  $\mathbf{X}$  cu  $k$  date etichetate este:

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{b}) = \underbrace{\left[ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \overbrace{J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{d}^{(i)})}^{\text{eroare empirică pentru } (\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{d}^{(i)})} \right]}_{\text{Eroarea empirică pe setul } \mathbf{X}} + \underbrace{\frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{i=1}^{n_l} \sum_{j=1}^{n_{l-1}} (w_{ij}^{[l]})^2}_{\text{Factor de regularizare}} \quad (5.33)$$

unde  $\lambda > 0$  este coeficientul de regularizare. Factorul de regularizare este aici regularizarea  $L_2$ , o sumă de pătrate de norme Frobenius ale matricelor

$\mathbf{W}^{[1]}, \dots, \mathbf{W}^{[L-1]}$ :

$$\|\mathbf{W}^{[l]}\|_F^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_l} \sum_{j=1}^{n_{l-1}} \left(w_{ij}^{[l]}\right)^2 \quad (5.34)$$

Regularizarea impune o presiune asupra ponderilor – ele sunt favorizate să fie în jurul lui 0. O subliniere importantă este că ponderile de bias nu sunt regularizate; de aceea vectorii  $b^{[1]}, \dots, b^{[L-1]}$  nu apar în termenul de regularizare; acest lucru s-a întâmplat și la modelele studiate anterior.

### 5.6.1 Funcția de cost pentru problemă de regresie

În cazul unei probleme de regresie, cea mai utilizată funcție de eroare  $J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d})$  ce măsoară calitatea unei predicții pentru perechea  $(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  este jumătate din eroarea  $L_2$  pătratică:

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{d} - \mathbf{o}\|^2 \quad (5.35)$$

unde  $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$  este vectorul de ieșire din rețeaua neurală corespunzând intrării  $\mathbf{x}$ , iar  $\|\mathbf{v}\|$  este norma  $L_2$  (Euclidiană) a vectorului  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_q)^t$ :

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^q v_i^2}$$

În acest caz funcția de eroare pentru un set de date cu  $k$  perechi  $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{d}^{(i)})$  și incluzând termen de regularizare devine:

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{b}) = \left[ \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^k \|\mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{o}^{(i)}\|^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{L-1} \|\mathbf{W}^{[l]}\|_F^2 \quad (5.36)$$

Termenul  $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|\mathbf{d}^{(i)} - \mathbf{o}^{(i)}\|^2$  se numește eroare pătratică medie (mean squared error, MSE). Deși larg folosită pentru probleme de regresie, la o analiză mai atentă se observă că dă mai multă importanță erorilor mai mari. De exemplu, dă aceeași importanță unei norme de diferență  $\|\mathbf{d} - \mathbf{o}\| = 10$  ca la 100 de cazuri pentru care  $\|\mathbf{d} - \mathbf{o}\| = 1$ . Se tinde deci a se preocupa de cazuri ce produc erori mari, dar puține, în detrimentul unor cazuri frecvente cu erori mai mici. Altfel zis, funcția de eroare este dominată de valorile de eroare extreme.

O altă funcție de eroare frecvent folosită este eroarea absolută medie (mean absolute error, MAE; eroarea  $L_1$ ), definită ca:

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d}) = \frac{1}{m} \|\mathbf{d} - \mathbf{o}\|_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |d_i - o_i| \quad (5.37)$$

MAE are avantajul că nu e atât de afectată de erorile mari comparativ cu MSE; pentru același exemplu: o eroare de 10 este echivalentă cu doar 10 erori de 1. Dezavantajul ei este că nu e derivabilă peste tot.

O variantă care combină diferențiabilitatea lui MSE și mai mica sensibilitate la erori extreme a lui MAE este funcția de eroare a lui Huber, exprimată în continuare pentru perechea  $(\mathbf{d}, \mathbf{o})$ :

$$HL(\mathbf{d}, \mathbf{o}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|\mathbf{d} - \mathbf{o}\|^2 & \text{dacă } \|\mathbf{d} - \mathbf{o}\| \leq \delta \\ \delta(\|\mathbf{d} - \mathbf{o}\|_1 - \frac{\delta}{2}) & \text{dacă } \|\mathbf{d} - \mathbf{o}\| > \delta \end{cases} \quad (5.38)$$

unde  $\delta$  este un hiper-parametru care stabilește zona de trecere de la o funcție la alta; valoarea adecvată a lui  $\delta$  poate fi determinată prin încercări repetate. Reprezentările MAE, MSE și Huber loss pentru o diferență  $\|\mathbf{d} - \mathbf{o}\|$  fixată sunt date în figura 5.7.

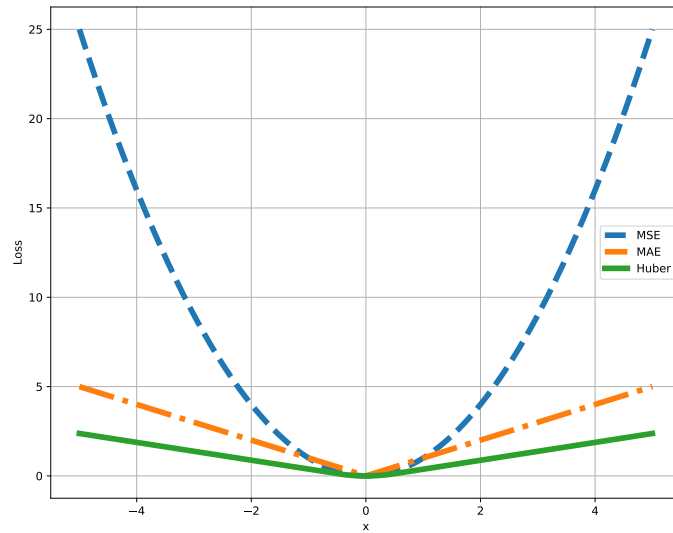


Figura 5.7: Funcțiile mean squared error, mean absolute error, Huber ( $\delta = 0.5$ ) pentru cazul unidimensional

### 5.6.2 Funcția de cost pentru discriminarea a două clase

Dacă problema este de discriminare a două clase, atunci stratul de ieșire conține un singur neuron, cu funcția de activare sigmoidă logistică – idee preluată de la regresia logistică binară. Funcția de eroare pentru o singură

pereche  $(\mathbf{x}, d)$ ,  $J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, d)$  este<sup>7</sup>:

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, d) = -d \ln o - (1 - d) \ln (1 - o) \quad (5.39)$$

deci funcția de eroare totală va fi:

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{b}) = - \sum_{i=1}^k \left[ d^{(i)} \ln o^{(i)} + (1 - d^{(i)}) \ln (1 - o^{(i)}) \right] + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{L-1} \|\mathbf{W}^{[l]}\|_F^2 \quad (5.40)$$

Pentru forma vectorizată a erorii empirice (prima sumă din ecuația de mai sus) a se vedea ecuația (3.29), pagina 42.

### 5.6.3 Funcția de cost pentru $m > 2$ clase independente

Dacă în stratul de ieșire se folosesc funcții de activare sigmoidă logistică, iar ieșirile sunt independente unele de altele, atunci funcția de eroare pentru o singură pereche  $(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  este:

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d}) = - \sum_{j=1}^m [d_j \ln o_j + (1 - d_j) \ln (1 - o_j)] \quad (5.41)$$

unde pentru vectorul  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m)^t$  se folosește codificarea one-hot, a se vedea pagina 45. În acest fel, funcția totală de eroare  $J(\mathbf{W}, \mathbf{b})$  calculată pentru setul de instruire devine:

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{b}) = - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \left[ d_j^{(i)} \ln o_j^{(i)} + (1 - d_j^{(i)}) \ln (1 - o_j^{(i)}) \right] + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{L-1} \|\mathbf{W}^{[l]}\|_F^2 \quad (5.42)$$

### 5.6.4 Funcția de cost pentru clasificare cu $m > 2$ clase

Pentru probleme de clasificare se preferă utilizarea funcției de eroare cross-entropy iar în stratul de ieșire funcția de activare să fie softmax. Funcția de eroare pentru o singură pereche  $(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ ,  $J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d})$  este:

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d}) = - \sum_{j=1}^m d_j \log o_j \quad (5.43)$$

unde folosim, ca mai sus, codificarea one-hot. Eroarea totală este:

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{b}) = - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m d_j^{(i)} \log o_j^{(i)} + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{L-1} \|\mathbf{W}^{[l]}\|_F^2 \quad (5.44)$$

Pentru forma vectorizată a erorii empirice (suma compusă din 5.44) se poate vedea ecuația (3.46), pagina 46.

---

<sup>7</sup>Pentru probleme de clasificare binară eticheta de clasă este  $d \in \{0, 1\}$ . Ieșirea  $o$  este un număr în intervalul  $(0, 1)$ .

## 5.7 Inițializarea ponderilor rețelei

Valorile inițiale ale ponderilor  $\mathbf{W}$  și  $\mathbf{b}$  sunt setate aleator, în jurul lui zero. Este necesar ca valorile ponderilor să nu fie toate egale; dacă ar fi toate egale, fiecare neuron ar avea exact aceeași stare, deoarece: fiecare neuron e legat la exact aceleași intrări ca și ceilalți din stratul său; mai departe, dacă ponderile cu care se înmulțesc intrările sunt egale, atunci valoarea de activare a fiecărui neuron de pe acel strat e aceeași (ponderea constantă folosită se dă factor comun); argumentul e valabil începând cu primul strat ascuns. Am ajunge deci ca neuronii de pe același strat să calculeze exact aceleași valori, ceea ce e redundant și inutil, iar pentru stratul de ieșire s-ar prezice valori egale pe toți neuronii de ieșire. Efectul de simetrie obținut cu ponderi egale în  $\mathbf{W}$  se elimină prin inițializare cu numere aleatoare. În ce privește ponderile de bias – din  $\mathbf{b}$  – ele se pot inițializa cu 0; inițializarea aleatoare a ponderilor  $\mathbf{W}$  este suficientă pentru “spargerea simetriei”.

Strategii rafinate de inițializare pentru ponderile din  $\mathbf{W}$  sunt cele propuse de Xavier Glorot *et al.* [11] și He *et al.* [10].

Pentru arhitecturile de tip deep learning se preferă o preantrenare nesupervizată a ponderilor [8] sau preluarea unor ponderi care au fost antrenate pentru un set de date (o problemă) similară cu cea curentă – transfer de învățare (transfer learning).

## 5.8 Algoritmul backpropagation

Se dorește modificarea ponderilor din matricele  $\mathbf{W}^{[l]}$  și a coeficienților de bias  $\mathbf{b}^{[l]}$  astfel încât valoarea funcției de eroare  $J(\mathbf{W}, \mathbf{b})$  să scadă; dacă eroarea scade, numim modificările ponderilor “învățare”. Se va folosi algoritmul de căutare după direcția gradientului (gradient descent), în care modificarea unei ponderi  $w_{ij}^{[l]}$  se efectuează astfel:

$$w_{ij}^{[l]} = w_{ij}^{[l]} - \alpha \frac{\partial J}{\partial w_{ij}^{[l}}}(\mathbf{W}, \mathbf{b}) \quad (5.45)$$

Ponderile de bias  $b_i^{[l]}$  se modifică similar:

$$b_i^{[l]} = b_i^{[l]} - \alpha \frac{\partial J}{\partial b_i^{[l}}}(\mathbf{W}, \mathbf{b}) \quad (5.46)$$

Pentru ambele ecuații de mai sus  $\alpha > 0$  este rata de învățare.

Avem trei variante de lucru pentru modificarea ponderilor:

1. **stochastic gradient descent:** pentru fiecare pereche din setul de instruire  $(\mathbf{x}^{(t)}, \mathbf{d}^{(t)})$  se calculează valoarea erorii  $J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}^{(t)}, \mathbf{d}^{(t)})$ , se calculează și se aplică modificările pentru toate ponderile  $w_{ij}^{[l]}$  și  $b_i^{[l]}$ ;



următoarea pereche de instruire folosește valorile de ponderi modificate la acest pas;

2. **off-line** sau **batch**: se calculează gradientii pentru ponderile  $w_{ij}^{[l]}$  și bias-urile  $b_i^{[l]}$  pentru fiecare pereche de vectori din setul de instruire; la final se calculează media tuturor acestor gradienti și se actualizează fiecare pondere  $w_{ij}^{[l]}$  și  $b_i^{[l]}$ , scăzându-se din ea media înmulțită cu rata de învățare  $\alpha$ . Algoritmul dat mai jos implementează această versiune.
3. **minibatch**: se împarte setul de instruire  $\mathcal{S}$  în subseturi disjuncte (mini-batches), de exemplu de câte 100 de perechi  $(\mathbf{x}^{(t)}, \mathbf{d}^{(t)})$ . Pentru fiecare minibatch se calculează media gradientilor; se modifică toate ponderile  $w_{ij}^{[l]}$  și  $b_i^{[l]}$  folosind media înmulțită cu rata de învățare, apoi se trece la următorul minibatch. Este o variantă intermediară între stochastic gradient descent – modificarea se face imediat după fiecare pereche din  $\mathcal{S}$  – și cea batch – în care modificarea ponderilor se face doar după ce se procesează tot setul  $\mathcal{S}$ ; în practică este cea mai folosită strategie.

În toate cazurile de mai sus: o trecere completă peste setul de instruire se numește epocă. Se execută mai multe epoci de instruire. Condiția de oprire a etapei de instruire poate fi:

- numărul de epoci parcurse este egal cu un număr dat a priori, de exemplu 200;
- se urmărește valoarea funcției de eroare peste un set de validare, un set disjunct față de setul de instruire  $\mathcal{S}$ . Dacă se constată că eroarea pe setul de validare începe să crească în timp ce eroarea pe setul de instruire continuă să scadă, atunci se decide încetarea instruirii – figura 5.8;
- se urmărește evoluția normelor gradientilor: dacă suma acestor norme e aproape de zero, înseamnă că s-a ajuns într-un punct de minim (local sau global) și ponderile nu vor mai fi modificate semnificativ;
- valoarea funcției de eroare scade sub un anumit prag; etc.

Vom prezenta varianta de instruire *batch*, întrucât poate fi ușor adaptată la minibatch sau stochastic gradient descent. Trecerea la cazul în care se face antrenarea pe minibatch-uri este imediată: media gradientilor pentru  $p$  termeni din setul de instruire se substituie cu media gradientilor calculați pe datele din acel minibatch. Evident, pentru stochastic gradient descent, media este chiar gradientul calculat pentru exemplarul de instruire curent.

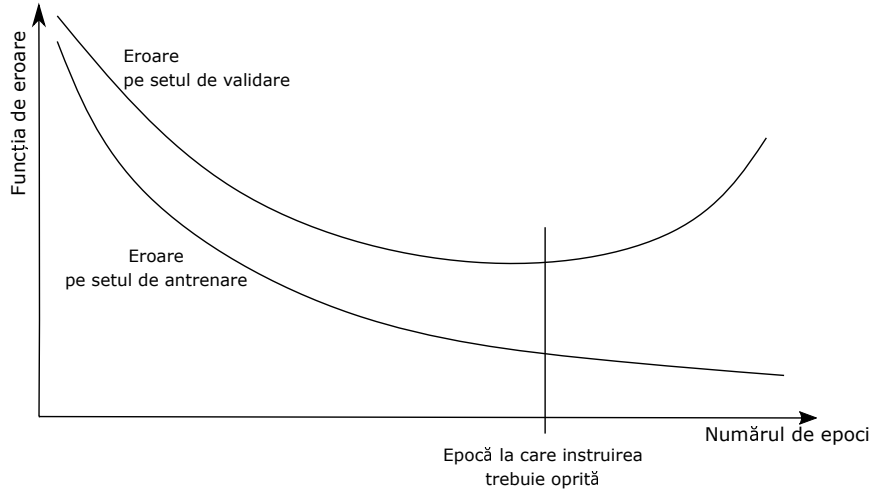


Figura 5.8: Evoluția valorilor funcției de eroare pentru setul de antrenare, respectiv cel de validare. Dacă se continuă antrenarea, eroare pe setul de antrenare scade, dar pentru setul de testare începe să crească de la o anumită epocă. Se recomandă oprirea instruirii dacă eroarea pe setul de validare începe să crească.

Profitând de faptul că funcția de eroare este o sumă de termeni și derivata unei sume de funcții este suma derivatelor, avem:

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ij}^{[l]}}(\mathbf{W}, \mathbf{b}) = \left( \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \frac{\partial J}{\partial w_{ij}^{[l]}}(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}) \right) + \lambda w_{ij}^{[l]} \quad (5.47)$$

respectiv pentru ponderile de bias

$$\frac{\partial J}{\partial b_i^{[l]}}(\mathbf{W}, \mathbf{b}) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \frac{\partial J}{\partial b_i^{[l]}}(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)}) \quad (5.48)$$

deci este de interes calculul pentru  $\frac{\partial J}{\partial w_{ij}^{[l]}}(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d})$  și  $\frac{\partial J}{\partial b_i^{[l]}}(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d})$ . Algoritmul backpropagation arată care e ordinea de calcul a derivatelor parțiale. Odată calculate, ele pot fi folosite pentru modificarea ponderilor (învățare).

Algoritmul funcționează astfel: pentru o pereche de instruire  $(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  se face pasul de propagare înainte și se obține vectorul de ieșire  $\mathbf{o}$ ; pentru fiecare strat de neuroni  $l$ , începând de la ultimul, se calculează un termen de eroare  $\delta^{[l]} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[l]}}$  care măsoară cât de mult e “responsabil” stratul  $l$  (și deci fiecare neuron din stratul  $l$ ) pentru discrepanța dintre ieșirea  $\mathbf{o}$  și valoarea dorită  $\mathbf{d}$ . În decursul pasului de propagare înainte ponderile nu se modifică.

Înainte de detalia algoritmul de instruire a rețelei MLP, definim produsul Hadamard a două matrice; produsul se notează de regula cu  $\odot$  și se aplică pentru două matrice care au același număr de linii și respectiv același număr

de coloane: dacă  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq r}$  și  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq r}$  sunt cele două matrice, atunci matricea produs Hadamard  $C = A \odot B = (c_{ij})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq r}$  are elementele:

$$c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij} \quad (5.49)$$

Algoritmul backpropagation detaliat – varianta batch – este:

1. Inițializează  $\Delta \mathbf{W}^{[l]}$ ,  $\Delta \mathbf{b}^{[l]}$  cu 0, pentru  $l = 1, \dots, L - 1$ :

$$\Delta \mathbf{W}^{[l]} = \mathbf{0}_{n_l \times n_{l-1}} \quad (5.50)$$

$$\Delta \mathbf{b}^{[l]} = \mathbf{0}_{n_l}, \text{ vector coloană} \quad (5.51)$$

2. Pentru fiecare din cele  $p$  perechi  $(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  din batch calculează corecția pentru ponderi și ponderile de bias<sup>8</sup>:

- 2.1. Efectuează pasul de propagare înainte, conform secțiunii 5.5, și obține ieșirea estimată  $\mathbf{o}$ ;
- 2.2. Pentru fiecare strat  $l = L - 1, \dots, 1$  se calculează semnalul de eroare: la ultimul strat semnalul de eroare este

$$\boldsymbol{\delta}^{[L-1]} = \nabla_a J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d}) \odot f^{[L-1]'}(\mathbf{z}^{[L-1]}) \quad (5.52)$$

iar la restul de straturi

$$\boldsymbol{\delta}^{[l]} = \left[ (\mathbf{W}^{[l+1]})^t \cdot \boldsymbol{\delta}^{[l+1]} \right] \odot f^{[l]'}(\mathbf{z}^{[l]}) \quad (5.53)$$

Am presupus mai sus că derivatele funcțiilor de activare se vectorizează peste vectorii de stări.

Putem acum calcula derivatele parțiale pentru ponderi și derivatele parțiale:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^{[l]}}(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d}) = \boldsymbol{\delta}^{[l]} \cdot (\mathbf{a}^{[l-1]})^t \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}^{[l]}}(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d}) = \boldsymbol{\delta}^{[l]} \quad (5.55)$$

- 2.3. Acumulează semnalul de corecție<sup>9</sup>, pentru  $l = L - 1, \dots, 1$ :

$$\Delta \mathbf{W}^{[l]} = \Delta \mathbf{W}^{[l]} + \frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^{[l]}}(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (5.56)$$

$$= \Delta \mathbf{W}^{[l]} + \boldsymbol{\delta}^{[l]} \cdot (\mathbf{a}^{[l-1]})^t \quad (5.57)$$

$$\Delta \mathbf{b}^{[l]} = \Delta \mathbf{b}^{[l]} + \frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}^{[l]}}(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (5.58)$$

$$= \Delta \mathbf{b}^{[l]} + \boldsymbol{\delta}^{[l]} \quad (5.59)$$

---

<sup>8</sup>Respectiv: se iterează peste datele din minibatch.

<sup>9</sup>Evident, acumularea se poate face imediat după calculul derivatelor parțiale de pe stratul curent.

3. După ce toate perechile de instruire din batch au fost considerate, modifică valorile ponderilor și coeficienții de bias, pentru  $l = 1, \dots, L-1$ :

$$\mathbf{W}^{[l]} = \mathbf{W}^{[l]} - \alpha \left[ \left( \frac{1}{p} \Delta \mathbf{W}^{[l]} \right) + \lambda \mathbf{W}^{[l]} \right] \quad (5.60)$$

$$\mathbf{b}^{[l]} = \mathbf{b}^{[l]} - \alpha \left( \frac{1}{p} \Delta \mathbf{b}^{[l]} \right) \quad (5.61)$$

4. Ciclare: se repetă de la pasul 1 până când: eroarea  $J(\mathbf{W}, \mathbf{b})$  scade sub un prag  $E_{max}$ , sau diferența absolută dintre două valori succesive ale funcției de eroare este sub un prag  $\varepsilon$ , sau se atinge un număr maxim de epoci.

Pentru cazul în care se folosește clasificare și funcția de activare din ultimul strat este softmax, iar funcția de eroare este cross-entropy, se arată că pentru perechea  $(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ :

$$\delta^{[L-1]} = \mathbf{a}^{[L-1]} - \mathbf{d} \quad (5.62)$$

substituind formula de calcul (5.52). Utilizarea funcției de eroare cross entropy duce la o viteză mai mare de învățare pentru probleme de clasificare decât dacă se folosește eroarea pătratică [9].

Dacă problema rezolvată este una de regresie, atunci funcția de eroare este bazată pe mean squared error. În acest caz, pentru perechea  $(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ :

$$\delta^{[L-1]} = (\mathbf{a}^{[L-1]} - \mathbf{d}) \odot f^{[L-1]'}(\mathbf{z}^{[L-1]}) \quad (5.63)$$

## 5.9 Justificarea matematică a algoritmului de back-propagation

Figura 5.9 prezintă, pentru o rețea neurală cu un strat ascuns, propagarea înainte și înapoi prin rețea. Propagarea înainte preia o pereche de vectori  $(\mathbf{x}, \mathbf{o})$ . Se calculează succesiv:

- vectorul de stări pentru neuronii din stratul ascuns:

$$\mathbf{z}^{[1]} = \mathbf{W}^{[1]} \mathbf{x} + \mathbf{b}^{[1]} \quad (5.64)$$

- vectorul de valori de ieșire din stratul ascuns:

$$\mathbf{a}^{[1]} = f^{[1]}(\mathbf{z}^{[1]}) \quad (5.65)$$

- vectorul de stări pentru neuronii din stratul de ieșire:

$$\mathbf{z}^{[2]} = \mathbf{W}^{[2]} \mathbf{a}^{[1]} + \mathbf{b}^{[2]} \quad (5.66)$$

- vectorul de valori de ieșire din rețea:

$$\mathbf{o} = \mathbf{a}^{[2]} = f^{[2]}(\mathbf{z}^{[2]}) \quad (5.67)$$

- Valoarea de eroare  $J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, \mathbf{d})$ , notată în figura 5.9 cu  $J(\mathbf{a}^{[2]}, \mathbf{d})$ .

Avem nevoie de derivatele parțiale:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^{[2]}}, \frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}^{[2]}}, \frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^{[1]}}, \frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}^{[1]}} \quad (5.68)$$

pentru a face modificarea ponderilor.

Conform algoritmului backpropagation, vom calcula gradientii pornind de la ultimul strat. E utilă aici formula de derivare a funcțiilor compuse: dacă avem compunerea de funcții  $h(x) = f(g(x))$ , atunci derivata lui  $f$  în raport cu  $x$  este:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} \quad (5.69)$$

Mai general, pentru funcții multivariate de forma<sup>10</sup>

$$h(x_1, \dots, x_m) = f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)) \quad (5.70)$$

derivatele parțiale se calculează cu:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial g_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial g_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial g_n} \cdot \frac{\partial g_n}{\partial x_i} \quad (5.71)$$

Noi vom folosi aceste proprietăți pentru derivate parțiale ale funcției de eroare în raport cu ponderile instruibile.

Pentru calculul derivatelor parțiale  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^{[2]}}$  avem:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^{[2]}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[2]}} \frac{\partial \mathbf{z}^{[2]}}{\partial \mathbf{W}^{[2]}} \quad (5.72)$$

Derivata parțială  $\frac{\partial \mathbf{z}^{[2]}}{\partial \mathbf{W}^{[2]}}$  se calculează simplu, ținând cont de forma liniară din ec. (5.66):

$$\frac{\partial \mathbf{z}^{[2]}}{\partial \mathbf{W}^{[2]}} = \mathbf{a}^{[1]} \quad (5.73)$$

deci (5.72) devine:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^{[2]}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[2]}} \mathbf{a}^{[1]} \quad (5.74)$$

Pentru derivata parțială  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}^{[2]}}$  avem:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}^{[2]}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[2]}} \frac{\partial \mathbf{z}^{[2]}}{\partial \mathbf{b}^{[2]}} \quad (5.75)$$

---

<sup>10</sup>Numerele  $m$  și  $n$  din definiția lui  $h$  nu au neapărat legătură cu dimensiunea vectorilor de intrare și ieșire din setul de instruire.

unde al doilea termen din partea dreaptă se calculează simplu, folosind definiția din ec. (5.66):

$$\frac{\partial \mathbf{z}^{[2]}}{\partial \mathbf{b}^{[2]}} = \mathbf{1} \quad (5.76)$$

unde  $\mathbf{1}$  este vector coloană cu același număr de elemente ca și vectorul  $\mathbf{b}^{[2]}$ ; (5.75) devine:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}^{[2]}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[2]}} \quad (5.77)$$

Observăm că în ambele ecuații (5.74) și (5.77) apare cantitatea  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[2]}}$  care se calculează simplu, astfel:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[2]}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}^{[2]}} \frac{\partial \mathbf{a}^{[2]}}{\partial \mathbf{z}^{[2]}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}^{[2]}} \cdot f^{(2)'}(\mathbf{z}^{[2]}) \quad (5.78)$$

Termenul  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[2]}}$  este semnalul de eroare pentru stratul 2. Termenul  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}^{[2]}}$ , notat cu  $da^{[2]}$  în figura 5.9 depinde de forma concretă a funcției de eroare  $J$ .

Pentru derivatele parțiale după  $\mathbf{W}^{[1]}$  și  $\mathbf{b}^{[1]}$  procedăm similar:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}^{[1]}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[1]}} \frac{\partial \mathbf{z}^{[1]}}{\partial \mathbf{W}^{[1]}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[1]}} \mathbf{x} \quad (5.79)$$

respectiv

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}^{[1]}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[1]}} \frac{\partial \mathbf{z}^{[1]}}{\partial \mathbf{b}^{[1]}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[1]}} \quad (5.80)$$

unde semnalul de eroare  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[1]}}$  pentru stratul 1 este

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{z}^{[1]}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}^{[1]}} \frac{\partial \mathbf{a}^{[1]}}{\partial \mathbf{z}^{[1]}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}^{[1]}} \cdot f^{[1]'}(z^{[1]}) \quad (5.81)$$

## 5.10 Utilizarea rețelei

După ce se face antrenarea rețelei, ea se poate folosi pentru a face predicții pentru date din setul de testare  $\mathcal{T} = \{\mathbf{x}^{(j)} | 1 \leq j \leq q\}$ . Fiecare vector din  $\mathcal{T}$  este trecut prin rețea, conform pasului de propagare înainte și se obțin valori de ieșire estimate (predicții)  $\mathbf{o}^{(1)}, \dots, \mathbf{o}^{(q)}$ , toate din  $\mathbb{R}^m$ .

Dacă valorile de ieșire sunt văzute ca probabilități condiționate, adică:

$$o_i = P(\text{clasa } i | \mathbf{x}), 1 \leq i \leq m \quad (5.82)$$

atunci clasificarea se face găsind acel indice  $i$  pentru care  $o_i$  e maxim și acesta este indicele clasei prezise de rețeaua MLP.

## 5.11 Discuții

- problema minimelor locale și a punctelor de inflexiune
- arhitectura rețelei: număr de straturi ascunse, număr de neuroni pe strat
- dependența de ordinea de prezentare a datelor în etapa de învățare
- alți algoritmi de optimizare decât vanilla gradient descent
- learning rate scheduling
- capacitatea de aproximare universală

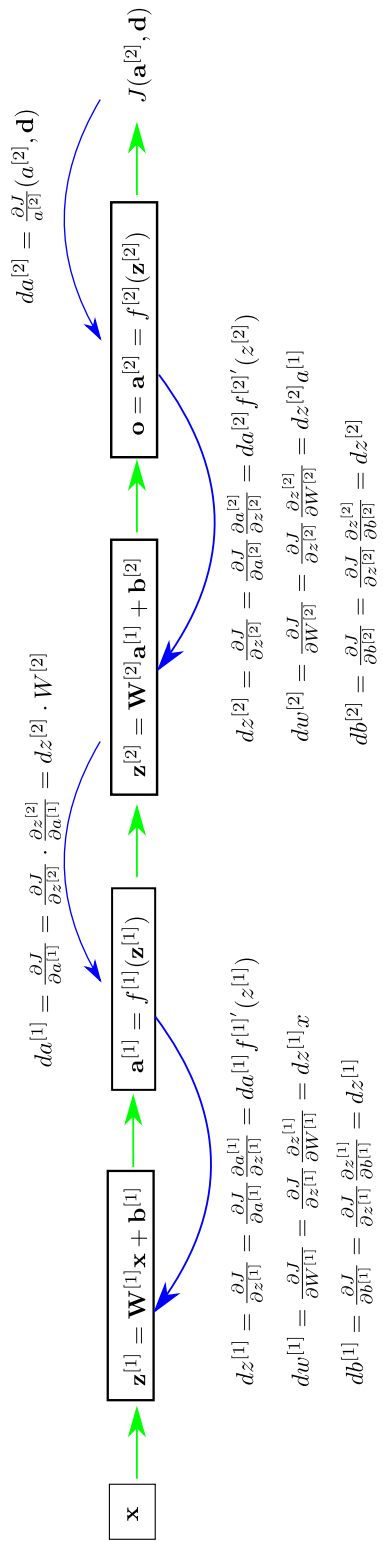


Figura 5.9: Reprezentarea procesului de propagare înainte (arcele verzi) și înapoi (arcele albastre). Valoarea de eroare  $J(\mathbf{a}^{[2]}, \mathbf{d})$  este asociată unei perechi  $(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ .



## Capitolul 6

# Memorii asociative bidirecționale

Memoriile asociative bidirecționale (MAB) permit stocarea și regăsirea datelor. Căutarea se face pe baza similarității care există între vectorul furnizat ca intrare și ceea ce este stocat în rețea. Se lucrează cu perechi de vectori asociați, memorați de rețea; plecând de la oricare dintre vectori sau de la unul similar cu unul din ei se reușește reconstituirea celuilalt. Datele memorate sunt reprezentate în ponderile rețelei.

Instruirea poate fi atât supervizată, cât și nesupervizată. Spre deosebire de modelele anterioare, MAB-urile nu se folosesc pentru regresie, clasificare sau estimare de probabilitate condiționată. Este sunt utile pentru regăsirea pe bază de conținut, reconstituire și corectare de date.

Întrucât memoria regăsește datele de instruire pe baza similarității, este necesară o discuție despre distanțe și spațiul din care fac parte datele.

### 6.1 Distanța Hamming

Fie  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$  și  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$  doi vectori  $n$ -dimensionali din spațiul Euclidian având restricțiile  $x_i, y_i \in \{-1, +1\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Cea mai frecvent utilizată metrică, distanța Euclidiană, dintre doi vectori este:

$$d_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (6.1)$$

Având în vedere valorile pe care le pot lua componentele vectorilor  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$ , avem că:

$$(x_i - y_i)^2 = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x_i = y_i \\ (\pm 2)^2 = 4 & \text{dacă } x_i \neq y_i \end{cases} \quad (6.2)$$

deci distanța Euclidiană este  $d_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{4 \cdot \text{diferente}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$  unde prin  $\text{diferente}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  am notat numărul de indici  $i$  pentru care  $x_i \neq y_i$ . Pentru

doi vectori  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  ca mai sus se definește funcția de *distanță Hamming*  $d_H$  ca fiind tocmai numărul de diferențe de pe pozițiile corespunzătoare:

$$d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n I(x_i \neq y_i) \quad (6.3)$$

unde  $I(\cdot)$  este funcția indicator (3.40) de la pagina 45.

Există deci relația:

$$d_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2\sqrt{d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \quad (6.4)$$

Considerăm hipercubul  $n$ -dimensional centrat în origine cu latura de lungime 2:

$$\mathbf{H}^n = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n, x_i \in \{-1, +1\} \right\} = \{-1, +1\}^n \quad (6.5)$$

$\mathbf{H}^n$  se mai numește și cub Hamming.

## 6.2 Asociatori

Considerăm mulțimea de  $p$  perechi de vectori de instruire:

$$\mathcal{S} = \left\{ (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}), \dots, (\mathbf{x}^{(p)}, \mathbf{y}^{(p)}) \right\} \quad (6.6)$$

unde  $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y}^{(i)} \in \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq i \leq p$ . Există trei tipuri de memorii asociative:

1. *Memorii heteroasociative*, implementând o funcție  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  cu proprietatea că  $\Phi(\mathbf{x}^{(i)}) = \mathbf{y}^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq p$ . În plus, cerem ca dacă un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  este cel mai apropiat de un exemplar  $\mathbf{x}^{(i)}$  din  $\mathcal{S}$  ( $1 \leq i \leq p$ ), atunci  $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}^{(i)}) = \mathbf{y}^{(i)}$ . Aproximarea se consideră în sensul unei distanțe convenabil alese - motiv pentru care s-a discutat în prima parte a cursului despre distanțe.
2. *Memorii interpolative*, implementând o funcție  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  astfel încât  $\Phi(\mathbf{x}^{(i)}) = \mathbf{y}^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq p$ . În plus, dacă vectorul  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  este  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{d}$  unde  $\mathbf{x}^{(i)}$  e cel mai apropiat de  $\mathbf{x}$ , atunci ieșirea memoriei este:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{d}) = \mathbf{y}^{(i)} + \mathbf{e}, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^m \quad (6.7)$$

3. *Memorie autoasociativă*: dacă  $\mathbf{y}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq p$ , atunci o memorie autoasociativă trebuie să respecte proprietățile date de memoria heteroasociativă:  $\Phi(\mathbf{x}^{(i)}) = \mathbf{x}^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq p$  și dacă  $\mathbf{x}$  este cel mai apropiat de un exemplar  $\mathbf{x}^{(i)}$ , atunci  $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}^{(i)}) = \mathbf{x}^{(i)}$ .

Pentru cazul în care setul de vectori  $\{\mathbf{x}^{(i)} | 1 \leq i \leq p\}$  este ortonormat<sup>1</sup> putem construi simplu un asociator interpolativ: Definim funcția  $\Phi$  ca fiind:

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}^{(1)}\mathbf{x}^{(1)t} + \dots + \mathbf{y}^{(p)}\mathbf{x}^{(p)t})\mathbf{x} \quad (6.8)$$

Avem că:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}^{(i)}) &= (\mathbf{y}^{(1)}\mathbf{x}^{(1)t} + \dots + \mathbf{y}^{(p)}\mathbf{x}^{(p)t})\mathbf{x}^{(i)} = \sum_{j=1}^p ((\mathbf{y}^{(j)}\mathbf{x}^{(j)t})\mathbf{x}^{(i)}) = \\ &= \sum_{j=1}^p (\mathbf{y}^{(j)}(\mathbf{x}^{(j)t}\mathbf{x}^{(i)})) = \sum_{j=1}^p (\mathbf{y}^{(j)} \cdot I(i=j)) = \mathbf{y}^{(i)}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Dacă un argument  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  are forma  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{d}$ , atunci:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{d}) = \mathbf{y}^{(i)} + \mathbf{e} \quad (6.10)$$

unde

$$\mathbf{e} = \left( \sum_{j=1}^p \mathbf{y}^{(j)}\mathbf{x}^{(j)t} \right) \cdot \mathbf{d} \quad (6.11)$$

### 6.3 Memoria asociativă bidirecțională

O memorie asociativă bidirecțională (MAB) este o memorie heteroasociativă constând în două straturi de elemente de procesare (noduri) care sunt interconectate. Elementele pot sau nu să aibă legături cu ele însele (bucle). O reprezentare este dată în figura 6.1. Valorile  $\mathbf{x}$  sunt din  $\mathbf{H}^n$  iar  $\mathbf{y}$  din  $\mathbf{H}^m$ . Între noduri există legături cu diferite ponderi.

Spre deosebire de alte tipuri de rețele neurale, ponderile pot fi calculate aprioric dacă se cunoaște de dinainte setul de exemplare ce trebuie memorat. Conexiunile sunt bidirecționale: putem furniza ca intrare o valoare în stratul  $\mathbf{x}$  iar ieșirea să fie dată de stratul  $\mathbf{y}$  sau invers.

Pentru construirea matricii ponderilor se poate folosi o idee similară cu cea de la memoria interpolativă:

$$\mathbf{W} = \mathbf{y}^{(1)}\mathbf{x}^{(1)t} + \dots + \mathbf{y}^{(p)}\mathbf{x}^{(p)t}. \quad (6.12)$$

Nu se aplică în prealabil procedeul Gram-Schmidt de ortonormare pentru vectorii  $\mathbf{x}^{(i)}$ , pentru că s-ar putea ajunge la valori care nu mai sunt din  $H^n$ .

---

<sup>1</sup>Vectorii  $\{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(p)} | 1 \leq i \leq p\}$  sunt ortonormați dacă  $\mathbf{x}^{(i)t} \cdot \mathbf{x}^{(j)} = I(i=j)$ ,  $1 \leq i, j \leq p$ . Dintr-un set de vectori liniar independenți putem obține întotdeauna un sistem de vectori ortonormați prin procedeul Gram-Schmidt de ortonormare. Pentru a reduce din efectul erorilor de rotunjire, se poate folosi procedeul Gram-Schmidt modificat.

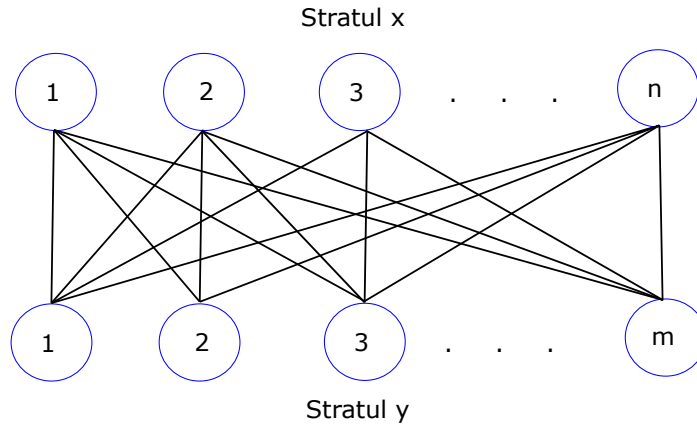


Figura 6.1: Arhitectura unei memorii asociative bidirecționale

Matricea  $\mathbf{W} = (w_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  dă ponderile legăturilor de la stratul  $\mathbf{x}$  la stratul  $\mathbf{y}$ . Matricea ponderilor în sens invers este  $\mathbf{W}^t$ . Memoria poate deveni autoasociativă prin stabilirea lui  $\mathbf{W}$  ca fiind:

$$\mathbf{W} = \mathbf{x}^{(1)}\mathbf{x}^{(1)t} + \dots + \mathbf{x}^{(p)}\mathbf{x}^{(p)t} \quad (6.13)$$

Odată matricea de ponderi contruită, se poate utiliza MAB pentru regăsirea datelor stocate prin furnizarea unor date cheie, suficient de apropiate de cele din setul de instruire. Vom vedea că această intrare poate fi obținută prin perturbarea unei valori din setul de instruire, iar MAB poate încă să determine cheia originală și valoarea asociată ei.

Pașii de lucru sunt următorii:

1. se aplică perechea inițială de vectori  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  celor două straturi de neuroni;
2. se propagă informația de la stratul  $\mathbf{x}$  la stratul  $\mathbf{y}$  și se modifică valorile din stratul  $\mathbf{y}$ ;
3. se propagă informația de la  $\mathbf{y}$  la  $\mathbf{x}$  și se modifică valorile din stratul  $\mathbf{x}$ ;
4. se repetă pașii 2 și 3 până când nu mai apare nicio modificare în nodurile celor două straturi.

Se poate ca datele să înceapă să se propage de la stratul  $\mathbf{y}$  la stratul  $\mathbf{x}$ . Plimbarea informației în ambele sensuri dă natura bidirecțională a rețelei. Când rețeaua se stabilizează, de regulă se regăsește în stratul  $\mathbf{x}$  valoarea  $\mathbf{x}^{(i)}$  care este cea mai apropiată de  $\mathbf{x}$  relativ la distanța Hamming și valoarea  $\mathbf{y}^{(i)}$  asociată cu  $\mathbf{x}^{(i)}$  — sau complementele acestora, a se vedea exemplele următoare.

Procesarea care se face în momentul transmiterii informației de la stratul  $\mathbf{x}$  la stratul  $\mathbf{y}$  este dată de ecuația:

$$\mathbf{net}^y = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} \quad (6.14)$$

sau pe componente:

$$net_i^y = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j, \quad 1 \leq i \leq m \quad (6.15)$$

unde  $\mathbf{net}^y$  este vectorul de stare pentru stratul  $\mathbf{y}$ . Pentru transmiterea în sens invers are loc un proces asemănător:

$$\mathbf{net}^x = \mathbf{W}^t \mathbf{y} \quad (6.16)$$

sau pe componente:

$$net_i^x = \sum_{j=1}^m w_{ji} \cdot y_j, \quad 1 \leq i \leq n \quad (6.17)$$

Valoarea de ieșire a unui neuron depinde de intrări și de valoarea lui curentă. Mai clar, valoarea de la momentul  $t + 1$  pentru nodul  $y_i$  este dată de:

$$y_i(t+1) = \begin{cases} +1, & \text{dacă } net_i^y > 0 \\ y_i(t), & \text{dacă } net_i^y = 0 \\ -1, & \text{dacă } net_i^y < 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

Valorile de ieșire pentru stratul  $\mathbf{x}$  se calculează similar.

Exemplu numeric: plecăm de la perechea de vectori

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1)^t \quad (6.19)$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = (1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, -1)^t \quad (6.20)$$

cu ieșirile corespunzătoare asociate

$$\mathbf{y}^{(1)} = (1, -1, -1, -1, -1, 1)^t \quad (6.21)$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = (1, 1, 1, 1, -1, -1)^t \quad (6.22)$$

Matricea ponderilor este:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

Vom considera ca vector de intrare  $\mathbf{x} = (-1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1)^t$  cu vectorul  $\mathbf{y}$  asociat  $(1, 1, 1, 1, -1, -1)^t$ . Remarcăm că vectorii  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  dați nu sunt printre vectorii învățați. Vectorul de ieșire  $\mathbf{y}$  poate fi dat ca un vector binar bipolar cu componente aleatoare. Propagarea valorilor dinspre stratul  $\mathbf{x}$  către  $\mathbf{y}$  duce la determinarea valorii  $\mathbf{net}^y = (4, -12, -12, -12, -4, 12)^t$ . Noul vector din stratul  $\mathbf{y}$  este  $\mathbf{y} = (1, -1, -1, -1, -1, 1)^t$ . Propagând înapoi către stratul  $\mathbf{x}$  obținem  $\mathbf{x} = (1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1)^t$ . Propagări succesive într-un sens sau în celălalt nu duc la modificări ale valorilor din straturile  $\mathbf{x}$  sau  $\mathbf{y}$ . Perechea de vectori la care se stabilizează rețeaua este chiar perechea  $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)})$ . S-a regăsit astfel o pereche de exemplare din cele cu care s-a instruit rețeaua, chiar dacă s-a plecat de la valori care nu se regăsesc printre cele învățate.

Să considerăm situația în care se pleacă de la valorile inițiale:

$$\mathbf{x} = (-1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1)^t, \mathbf{y} = (-1, 1, -1, 1, -1, -1)^t$$

Propagând de la stratul  $\mathbf{x}$  la  $\mathbf{y}$ , obținem  $\mathbf{y} = (-1, 1, 1, 1, 1, -1)^t$ . Propagând în direcția inversă, obținem  $\mathbf{x} = (-1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1)^t$  și rețeaua se stabilizează. Se observă că valorile stabile  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  sunt chiar  $(\mathbf{x}^{(1)c}, \mathbf{y}^{(1)c})$  unde  $\mathbf{a}^c$  este vectorul format cu valorile complementate ce compun pe  $\mathbf{a}$ :  $\mathbf{a}^c = -\mathbf{a}$ . Aceasta este o proprietate a MAB: dacă memoria stochează perechea  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , atunci stochează și perechea  $(\mathbf{x}^c, \mathbf{y}^c)$  și stabilizarea rețelei se poate face pe o astfel de pereche de complemente.

## 6.4 Funcția de energie a MAB

În timpul propagării valorilor dinspre stratul  $\mathbf{x}$  spre  $\mathbf{y}$  sau invers, valorile din nodurile rețelei se modifică, ceea ce ne permite să vedem evoluția stării acestora ca o funcție de timp. Vom asocia memoriei o funcție de energie a cărei valoare este dependentă de valorile  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  din noduri; vrem să arătăm că funcția de energie converge la un punct limită pe durata propagării datelor între cele două straturi. Convergența se traduce prin stabilizarea rețelei.

Funcția de energie considerată este:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{y}^t \mathbf{W} \mathbf{x} = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i w_{ij} x_j$$

Avem următoarea teoremă privitoare la comportamentul MAB pentru funcția de energie:

**Teorema 2.** 1. Orice modificare a stării stratului  $\mathbf{x}$  sau  $\mathbf{y}$  în timpul procesării din MAB duce la scăderea lui  $E$ ;

2.  $E$  este mărginită inferior de  $E_{min} = -\sum_{i,j} |w_{ij}|$ ;

3. Dacă valoarea lui  $E$  se schimbă, atunci modificarea nu este arbitrar de mică.

*Demonstrație.* Pentru cazul în care se face propagare dinspre stratul  $x$  către stratul  $y$ , presupunem că se face o modificare pentru vectorul  $\mathbf{y}$  pe o singură poziție, fie ea  $l$ ,  $1 \leq l \leq m$ . Energia asociată stării curente este:

$$E = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i w_{ij} x_j = - \sum_{j=1}^n y_l w_{lj} x_j - \sum_{i=1, i \neq l}^m \sum_{j=1}^n y_i w_{ij} x_j \quad (6.24)$$

Dacă se face modificarea valorii  $y_l$  în  $y_l^{nou}$ , noua valoare a energiei va fi:

$$E^{nou} = - \sum_{j=1}^n y_l^{nou} w_{lj} x_j - \sum_{i=1, i \neq l}^m \sum_{j=1}^n y_i w_{ij} x_j \quad (6.25)$$

și deci variația energiei este:

$$\Delta E = E^{nou} - E = (y_l - y_l^{nou}) \sum_{j=1}^n w_{lj} x_j = (y_l - y_l^{nou}) net_l^y \quad (6.26)$$

Avem posibilitățile:

1. dacă  $y_l = +1$ , atunci  $y_l^{nou} = -1$ . Avem  $y_l - y_l^{nou} = 2 > 0$ ; pe de altă parte, dacă  $y_l^{nou} = -1$ , asta se datorează lui  $net_l^y < 0$  (a se vedea ecuația 6.18). Valoarea lui  $\Delta E$  este produsul a doi termeni întregi nenuli și de semn contrar și deci este o valoare întreagă strict mai mică decât zero.
2. dacă  $y_l = -1$ , atunci  $y_l^{nou} = +1$  și de aici  $y_l - y_l^{nou} = -2 < 0$ . Pe de altă parte, trecerea de la  $y_l = -1$  la  $y_l^{nou} = +1$  se datorează lui  $net_l^y > 0$  (ecuația 6.18) și din nou  $\Delta E$  este produsul a două valori întregi nenule și de semn contrar, ca atare de valoare întreagă strict mai mică decât zero.

Situația în care mai mult de un termen din  $\mathbf{y}^{nou}$  este modificat față de  $\mathbf{y}$  se tratează similar, cu observația că scăderea lui  $\Delta E$  este și mai accentuată.

Similar se arată că modificarea stării unui neuron din stratul de intrare de asemenea scade valoarea funcției de energie.

Pentru cea de a doua parte a teoremei avem:

$$\begin{aligned} -E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i w_{ij} x_j \stackrel{a \leq |a|}{\leq} \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i w_{ij} x_j \right| \stackrel{|a+b| \leq |a| + |b|}{\leq} \\ &\stackrel{|a+b| \leq |a| + |b|}{\leq} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |y_i| \cdot |w_{ij}| \cdot |x_j| \stackrel{|x_j| = |y_i| = 1}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |w_{ij}|. \end{aligned} \quad (6.27)$$

de unde  $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |w_{ij}|$ .

Partea a treia a teoremei rezultă din cele obținute în demonstrația primei părți a teoremei: dacă a apare modificare în stările neuronilor,  $\Delta E$  este un număr întreg strict mai mic decât zero.  $\square$

Punctele 2 și 3 ale teoremei arată că MAB se stabilizează într-un numiar finit de pași. Primele două puncte arată că funcția  $E$  este de tip Lyapunov, o clasă de funcții des folosite pentru studiul sistemelor dinamice.

Demonstrație practică: <http://facstaff.cbu.edu/~pong/ai/bam/bamapplet.html>.

## 6.5 Comentarii

MAB este un model în care ordinea de prezentare a vectorilor în setul de instruire  $\mathcal{S}$  din ecuația (6.6) nu e relevantă: suma pe baza căreia se creează matricea de ponderi  $\mathbf{W}$  – a se vedea ecuația (6.12) – este o operație comutativă. Altfel zis, MAB este un model *order independent*.

Totodată, MAB este un model de învățare în care creșterea sau reducerea setului de instruire  $\mathcal{S}$  (uitarea) nu necesită reluarea instruirii pe întregul set de instruire:

- la adăugarea unei noi perechi de vectori  $(\mathbf{x}^{(p+1)}, \mathbf{y}^{(p+1)})$  setului de instruire, la matricea  $\mathbf{W}$  formată cu  $p$  termeni se mai adună matricea  $\mathbf{y}^{(p+1)} \cdot \mathbf{x}^{(p+1)t}$ ;
- dacă se dorește “uitarea” perechii  $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})$ , atunci din matricea  $\mathbf{W}$  se scade termenul  $\mathbf{y}^{(i)} \cdot \mathbf{x}^{(i)t}$ .

Capacitatea de memorare a unei memorii asociative bidirecționale este insuficient studiată. După unii autori ea este  $\min(m, n)$ , alții estimează însă că un prag superior pentru numărul de perechi de vectori care pot fi memorate ar fi  $\sqrt{\min(m, n)}$ .



## Capitolul 7

# Rețele neurale cu funcții de activare radială

Rețelele neurale cu funcții de activare radială se folosesc pentru probleme de clasificare, estimare de probabilitate condiționată și regresie. Instruirea este nesupervizată (clustering) pentru determinarea centrilor neuronilor din stratul ascuns și supervizată pentru învățarea ponderilor dintre stratul ascuns și cel de ieșire.

### 7.1 Teorema lui Cover

Pentru cazul vectorilor ce nu pot fi separați liniar, perceptronul multistrat poate determina o funcție de separare, datorită caracterului de aproximator universal. Există și o altă variantă de rezolva problema discernerii între clase ce nu se pot separa liniar, *folosind însă un separator liniar*, ce lucrează în doi pași:

1. mulțimea de instruire dată în spațiul original este transformată într-un alt spațiu, în care, în anumite condiții, liniar separabilitatea poate apărea cu probabilitate mare; fundamentul matematic este dat de teorema lui Cover (vedeți mai jos);
2. prin utilizarea unui model de separare liniară (perceptron, SVM liniar, regresie logistică etc.) se separă clasele în cel de-al doilea spațiu.

Rezultatul se poate materializa printr-o rețea cu funcții de activare radială, formată din 3 straturi:

- stratul de intrare alcătuit din noduri de intrare care conectează rețeaua la mediu;
- stratul de neuroni ascunși ce aplică transformări neliniare pe datele din spațiul de intrare. Neuronii din acest strat sunt antrenați prin instruire nesupervizată;

- stratul de ieșire produce o transformare liniară, iar ponderile dintre stratul ascuns și stratul de ieșire sunt obținute prin instruire supervizată. Acesta furnizează valoarea de ieșire pentru vectorul de intrare curent.

Următoarea teoremă arată motivul pentru care se face o transformare a datelor originare în alte date dintr-un spațiu cu mai multe dimensiuni decât cel original:

**Teorema 3** (Cover, 1965). *Printr-o transformare neliniară a unui set de date de intrare dintr-un spațiu  $A$  într-un spațiu  $B$  cu dimensiune mai mare, crește probabilitatea de a obține clase liniar separabile, dacă  $A$  nu este dens populat.*

Rezultatul este util, deoarece pentru cazuri liniar separabile, un perceptron discret poate să obțină un hiperplan de separare în timp finit; se pot folosi și alte modele de clasificatori liniari - regresie logistică, Support Vector Machines etc. Pentru a se obține o asemenea transformare, se pleacă de la spațiul  $A$   $n$  dimensional în care se găsesc vectorii  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(p)}$  și se ajunge la un spațiu  $m$  dimensional ( $m \geq n$ ) prin funcția:

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\phi} \phi(\mathbf{x}) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))^t \in \mathbb{R}^m \quad (7.1)$$

unde  $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$  sunt funcții neliniare; în rețeaua neurală funcția  $\varphi_i$  e calculată de neuronul  $i$  din stratul ascuns.

Exemplu: considerăm problema XOR, în care 4 puncte sunt asignate la două clase, astfel: punctele de coordonate  $(0, 0)^t$  și  $(1, 1)^t$  aparțin unei clase, iar  $(0, 1)^t$  și  $(1, 0)^t$  aparțin celeilalte clase. S-a arătat în secțiunea 4.7 pagina 62 că nu există o dreaptă în plan care să separe cele două clase de puncte. Considerăm funcțiile  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_1\|), \mathbf{t}_1 = (1, 1)^t$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{t}_2\|), \mathbf{t}_2 = (0, 0)^t$$

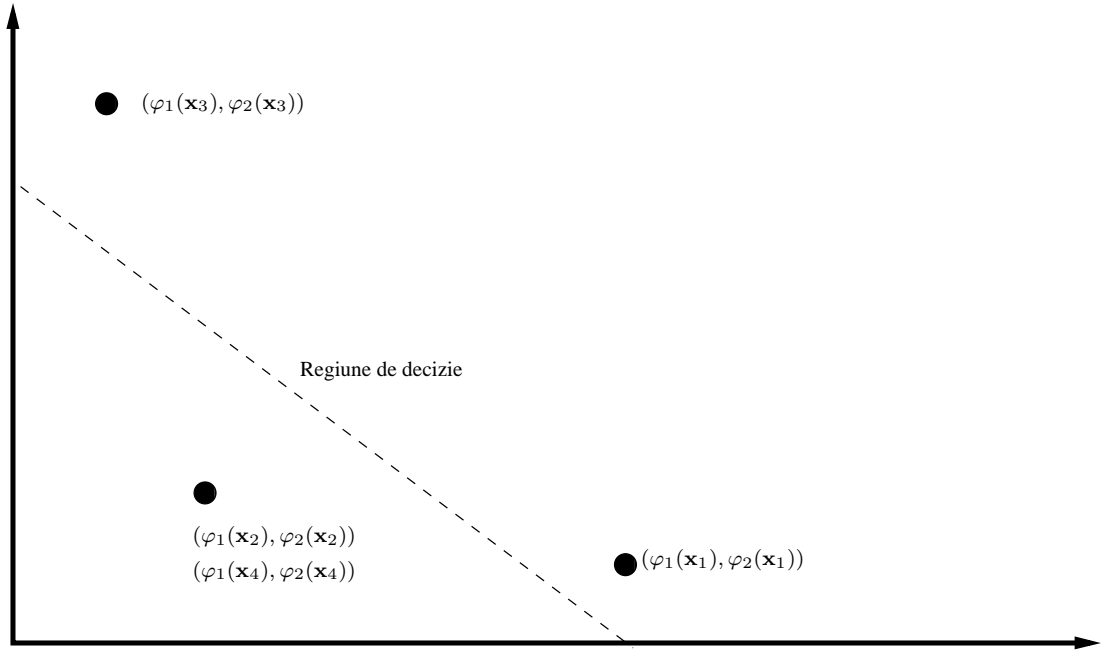
unde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  iar  $\|\cdot\|$  este norma Euclidiană  $L_2$  în  $\mathbb{R}^2$ . Pornind de la un vector de intrare  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  se ajunge la un vector tot din  $\mathbb{R}^2$  dat de  $(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}))$ . Valorile rezultate pentru funcțiile  $\varphi_{1,2}$  calculate în cele 4 puncte ale problemei XOR sunt date în tabelul 7.1. Figura 7.1 dă reprezentarea punctelor transformate prin aplicarea celor două funcții. Se observă că problema devine una liniar separabilă, folosind modificări neliniare ale datelor inițiale; mai mult, nu a fost nevoie în acest caz să se mărească dimensiunea spațiului de ieșire.

## 7.2 Funcții cu activare radială

Teorema lui Cover afirmă că pentru o problemă ce nu e liniar separabilă, prin transformare adecvată cresc șansele de a se transforma într-una care e

Vector de intrare	$\varphi_1(\mathbf{x}_i)$	$\varphi_2(\mathbf{x}_i)$
$\mathbf{x}_1 = (1, 1)^t$	1	0.1353
$\mathbf{x}_2 = (0, 1)^t$	0.3678	0.3678
$\mathbf{x}_3 = (0, 0)^t$	0.1353	1
$\mathbf{x}_4 = (1, 0)^t$	0.3678	0.3678

Tabelul 7.1: Valorile funcțiilor  $\varphi$  pentru punctele problemei XOR



liniar separabilă. Să considerăm o rețea neurală de tip feedforward cu un strat de intrare cu  $n$  noduri, un singur strat ascuns și un strat de ieșire cu un singur nod<sup>1</sup>. Această rețea produce o funcție de la un spațiu  $n$ -dimensional la unul unidimensional:

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (7.2)$$

Funcția  $F$  poate fi văzută ca o hipersuprafață  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ; hipersuprafața  $\Gamma$  este necunoscută și se determină pe baza setului de instruire.

Se lucrează în două etape: una de instruire și alta de generalizare. În etapa de instruire se folosește o procedură oarecare prin care se determină hipersuprafața  $\Gamma$ , plecând de la setul de date de antrenare, adică se obține funcția  $F$ . În etapa de generalizare se folosește un procedeu de interpolare pentru a determina valori de ieșire corespunzătoare unor vectori din spațiul

<sup>1</sup>În cele ce urmează în acest capitol, ieșirea unică este pentru simplificarea prezentării. Pentru cazul în care ieșirea este din spațiul  $\mathbb{R}^m$  sau dacă avem o problemă de clasificare cu  $m$  clase, stratul de ieșire va avea  $m$  neuroni.

de intrare  $\mathbb{R}^n$ .

Problema de interpolare este:

*Dându-se un set de instruire de  $p$  perechi*

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( \mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)} \right) \mid \mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^n, y^{(i)} \in \mathbb{R}, i = \overline{1, p} \right\}$$

*se cere să se determine o funcție  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  care satisface proprietatea de interpolare:*

$$F(\mathbf{x}^{(i)}) = y^{(i)}, \quad i = \overline{1, p} \quad (7.3)$$

Tehnica funcțiilor cu activare radială (Radial Basis Functions, RBF) consideră că funcția  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  are forma:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p w_i \varphi_i \left( \left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)} \right\| \right) \quad (7.4)$$

unde  $\varphi_i$  sunt funcții neliniare reale, cunoscute ca funcții cu activare radială. Punctele  $\mathbf{x}^{(i)}$  sunt “centrele” (parametri ai) funcțiilor RBF. Pentru un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , valoarea returnată de funcția  $\varphi_i$  se bazează pe distanța dintre  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{x}^{(i)}$ .

Impunând condiția (7.3) asupra formei (7.4), avem următorul sistem liniar în care necunoscutele sunt  $w_i, i = \overline{1, p}$ :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1p} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{p1} & \varphi_{p2} & \cdots & \varphi_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(p)} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

unde

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \left( \left\| \mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(i)} \right\| \right), \quad i, j = \overline{1, p} \quad (7.6)$$

Notăm  $\mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(p)})^t$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_p)^t$ ,  $\Phi = (\varphi_{ij})_{i,j=\overline{1,p}}$ . Numim  $\Phi$  matricea de interpolare. Se poate rescrie (7.5) sub forma:

$$\Phi \cdot \mathbf{w} = \mathbf{y} \quad (7.7)$$

Dacă matricea  $\Phi$  este nesingulară, atunci ponderile sunt  $\mathbf{w} = \Phi^{-1} \mathbf{y}$ . Pentru discuția asupra caracterului nesingular al matricei  $\Phi$ , considerăm teorema lui Michelli:

**Teorema 4** (Michelli, 1986). *Fie  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=\overline{1,p}}$  un set de puncte distincte din  $\mathbb{R}^n$ . Atunci matricea de interpolare  $\Phi$  este inversabilă dacă funcțiile  $\varphi_i$  au una din formele:*

1. *funcție multipătratică:*

$$\varphi_i(r_i) = \sqrt{r_i^2 + c^2}, \quad c > 0 \quad (7.8)$$

2. funcție inversă de multipătratică:

$$\varphi_i(r_i) = \frac{1}{\sqrt{r_i^2 + c^2}}, \quad c > 0 \quad (7.9)$$

3. funcție Gaussiană:

$$\varphi_i(r_i) = \exp\left(-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0 \quad (7.10)$$

unde în toate cele trei cazuri  $r_i$  este distanța Euclidiană dintre vectorii  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{x}^{(i)}$  — echivalent: norma diferenței dintre  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{x}^{(i)}$ ,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}\|$ .

### 7.3 Rețele cu funcții cu activare radială

O rețea cu funcții cu activare radială este ilustrată în figura 7.1; ea constă din trei straturi:

1. *stratul de intrare*, care constă din  $n$  noduri, unde  $n$  este dimensiunea spațiului de intrare.
2. *stratul ascuns*, care e format din același număr de neuroni ca numărul de date din setul de antrenare,  $p$ ; fiecare neuron  $i$ ,  $i = \overline{1, p}$  are funcție cu activare radială  $\varphi_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}\|)$ , unde  $\varphi_i$  e funcție cu una din formele enunțate în Teorema 4;
3. *stratul de ieșire*, care în cazul exemplificat este format dintr-un singur neuron. Stratul de ieșire poate avea  $m$  neuroni, pentru a trata problemele de clasificare sau de estimare de probabilitate condiționată pentru  $m$  clase, sau pentru probleme de regresie din  $\mathbb{R}^n$  în  $\mathbb{R}^m$ .

Pentru funcțiile  $\varphi_i$  vom considera în continuare funcțiile Gaussiene:

$$\varphi_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}\|) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_i^2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}\|^2\right), \quad i = \overline{1, p} \quad (7.11)$$

cu  $\sigma_i > 0$  este parametru al funcției Gaussiene  $\varphi_i$  centrate în  $\mathbf{x}^{(i)}$ . De regulă tuturor Gaussianelor li se asignează aceeași lățime  $\sigma$ ; diferența dintre funcții este dată în acest caz de centrele  $\mathbf{x}^{(i)}$ .

Din punct de vedere practic se evită folosirea tuturor datelor din setul de instruire pentru crearea de funcții de activare de tip radial. Un motiv ar fi că setul  $\left\{(\mathbf{x}^{(i)}, y^{(i)}) \mid i = \overline{1, p}\right\}$  poate prezenta zgomot, de exemplu datorită erorilor de măsurare. Folosirea unui procedeu de aproximare plecând de la un set de date cu zgomot duce la model de predicție slab. În plus, numărul de noduri rezultat în rețeaua din figura 7.1 s-ar putea să fie prohibitiv. Ca atare,

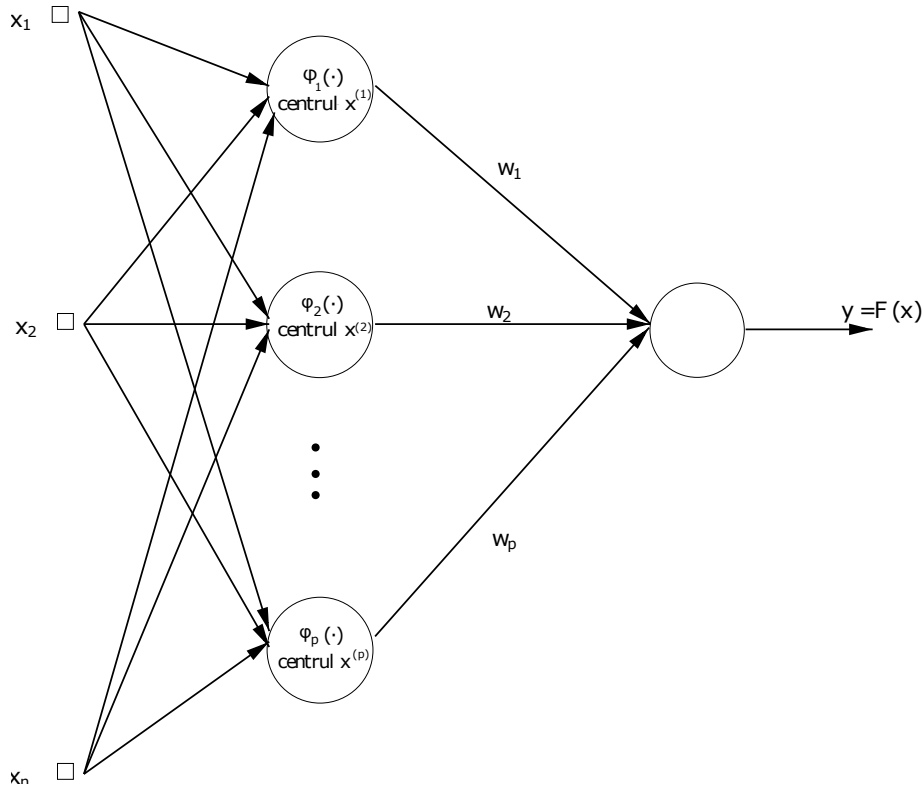


Figura 7.1: Structura unei rețele RBF, plecând de la funcția de interpolare din ecuația 7.4.

în practică numărul de noduri din stratul ascuns este mult redus. Funcția  $F$  se transformă într-o funcție de aproximare de forma:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k w_i \varphi_i(\|\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_i\|) \quad (7.12)$$

unde dimensiunea vectorului de intrare  $\mathbf{x}$  este aceeași ca și cea de până acum,  $k < p$  iar punctele  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_i$  nu sunt neapărat din setul de instruire – ele pot proveni dintr-un proces de grupare automată (clustering). Interpretarea ca rețea neurală este dată în figura 7.2. Diferențele față de figura 7.1 sunt că stratul ascuns are  $k$  neuroni în loc de  $p$ , iar funcțiile de activare radială sunt centrate în vectori  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_k$  în locul datelor din setul de instruire,  $\mathbf{x}^{(i)}$ .

Pentru determinarea celor  $k$  centri  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_i$ ,  $i = \overline{1, k}$  ale centrilor din stratul ascuns se poate utiliza o metodă oarecare de grupare automată pe baza similarităților (clustering), dar care să producă noțiunea de centroid<sup>2</sup>. Vom prezenta în cele ce urmează metoda  $K$ -means clustering.

<sup>2</sup>Excludem deci algoritmi de clustering precum DBSCAN sau OPTICS.

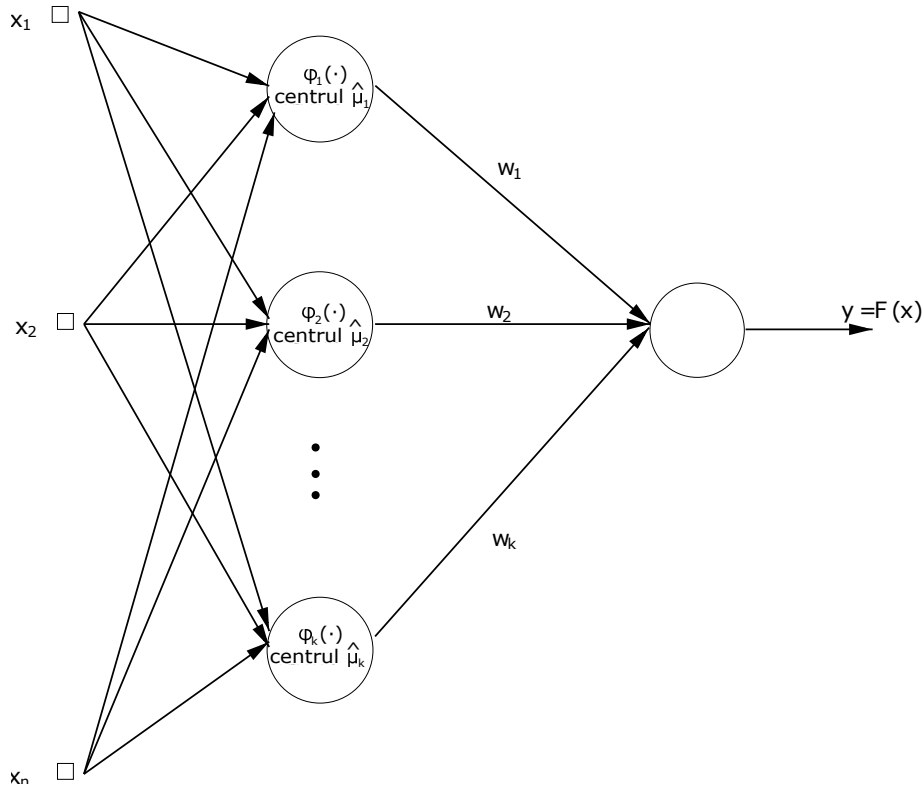


Figura 7.2: Structura unei rețele RBF, folosind mai puține noduri decât în figura 7.1. Centrii  $\hat{\mu}_i$ ,  $i = \overline{1, k}$  se obțin printr-un procedeu de clustering.

## 7.4 Clustering folosind algoritmul K-means

Clustering-ul este o formă de învățare nesupervizată în care un set de vectori este partiționat în grupuri. Se urmărește minimizarea unei funcții de cost definită convenabil, care cuantifică disimilaritatea totală a vectorilor. Clusterele ar trebui obținute de așa manieră încât vectorii similari să fie grupați în același cluster, iar doi vectori nesimilari să fie dispuși în clustere diferite.

Considerăm un set de  $p$  puncte,  $\{\mathbf{x}^{(i)}\}_{i=\overline{1, p}}$  ce urmează să fie partiționat în  $k$  clustere<sup>3</sup>; de regulă,  $k \ll p$ . Fie  $C(i)$  indicele de cluster de care aparține vectorul  $\mathbf{x}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, p}$ . Evident,  $1 \leq C(i) \leq k$ . Considerăm  $d(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$  o măsură a deosebirii – a ne-similarității – dintre perechile de vectori  $\mathbf{x}^{(i)}$  și

<sup>3</sup>Cel mai frecvent, valoarea lui  $k$  este furnizată de utilizator.

$\mathbf{x}^{(j)}$ . Pentru clustering se cere minimizarea funcției:

$$J(C) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^k \sum_{i:C(i)=l} \sum_{j:C(j)=l} d(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) \quad (7.13)$$

unde  $C$  este partiționarea dată de cele  $k$  clustere:

$$C = \left\{ \{i | 1 \leq i \leq p, C(i) = l\} | l = \overline{1, k} \right\}$$

În algoritmul  $K$ -means drept măsură de ne-similaritate se folosește pătratul distanței Euclidiene:

$$d(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}\|^2 \quad (7.14)$$

În urma procesului de clustering vor rezulta  $k$  centroizi – centri de clustere – notați  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_l \in \mathbb{R}^n$ ,  $l = \overline{1, k}$ .

Modificăm forma funcției de eroare  $J$  astfel încât să se ia în considerare distanțele dintre vectorii  $\mathbf{x}^{(i)}$  și centroizii  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_l$  ai clusterelor de care aparțin:

$$J(C) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^k \sum_{i:C(i)=l} \|\mathbf{x}^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_l\|^2 \quad (7.15)$$

Presupunând partiționarea  $C$  cunoscută, cum anume se poziționează centroizii astfel încât să se minimizeze  $J(C)$ ? Algoritmul  $K$ -means determină niște valori pentru  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_l$  printr-un proces iterativ, astfel încât  $J(C)$  să scadă. Este un algoritm euristic, nu garantează faptul că se ajunge la minimul global al lui  $J(C)$ .

Algoritmul alege aleator  $k$  centroizi inițiali  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_l^{(1)}$ ,  $l = \overline{1, k}$ , inițializându-i cu valori fie din setul de instruire, sau setate la întâmplare cu valori din spațiul de intrare, sau conform algoritmului  $K$ -means++, a se vedea secțiunea 7.5. Avem apoi o succesiune de iterații cu pașii:

- *Pasul de asignare:* Calculează pentru orice  $l$ ,  $l = 1 \dots k$ :

$$S_l^{(t)} = \left\{ \mathbf{x}^{(i)} : \|\mathbf{x}^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_l^{(t)}\| \leq \|\mathbf{x}^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^{(t)}\|, j = \overline{1, k}, j \neq l, i = \overline{1, p} \right\}$$

adică pentru fiecare punct  $\mathbf{x}^{(i)}$  se determină care este cel mai apropiat centroid de care aparține;  $S_l^{(t)}$  este mulțimea vectorilor din setul de instruire ce sunt cel mai apropiate de centroidul  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_l^{(t)}$ , la iterația  $t$ .

- *Modificarea centroizilor:*

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_l^{(t+1)} = \frac{1}{|S_l^{(t)}|} \cdot \sum_{\mathbf{x}^{(i)} \in S_l^{(t)}} \mathbf{x}^{(i)}, l = \overline{1, k}$$

unde  $|S_l^{(t)}|$  este numărul de elemente ale mulțimii  $S_l^{(t)}$ .



Algoritmul  $K$ -means se oprește atunci când pasul de asignare nu mai modifică mulțimile  $S_l^{(t)}$ .

În general, algoritmul nu converge către minimul global al funcției  $J$ ; fiind însă rapid în practică – adică necesitând puțini pași până la oprire – se poate reporni cu alte valori ale centroizilor inițiali  $\hat{\mu}_l^{(1)}$ ,  $l = \overline{1, k}$ . Situația (centrozii) pentru care  $J(C)$  are valoarea cea mai mică în aceste încercări este reținută.

## 7.5 Algoritmul de inițializare K-means++

Se poate considera că inițializarea centroizilor inițiali  $\hat{\mu}_l^{(1)}$ ,  $l = \overline{1, k}$  nu ar trebui lăsată la voia întâmplării și că se poate îmbunătăți considerabil performanța algoritmului printr-o alegere îngrijită a lor. Un caz nefavorabil este dat în figura 7.5. Să considerăm un dreptunghi cu laturile de lungime  $L \gg l$ , având în cele patru vârfuri câte un punct  $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . Dacă considerăm  $k = 2$  și centrozii sunt aleși inițial la jumătatea laturilor de lungime mai mare, atunci algoritmul se oprește după o iterație cu  $J(C) = \frac{1}{2} \cdot 4 \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{2}$  (punctele  $\mathbf{x}^{(1)}$  și  $\mathbf{x}^{(3)}$  aparțin clusterului de centroid  $\hat{\mu}_1$ , iar celelalte două celui de al doilea cluster). Dacă alegerea punctelor se face ca în figura 7.5, atunci se obține valoarea  $J(C) = \frac{l^2}{2}$  – și se poate arăta că aceasta este și valoarea minimă a lui  $J$ . Având în vedere că  $L$  poate fi luat oricât de mare față de  $l$ , rezultă că o alegere neinspirată a centroizilor poate să ducă la o valoare oricât de depărtată față de optim pentru funcția  $J$ .

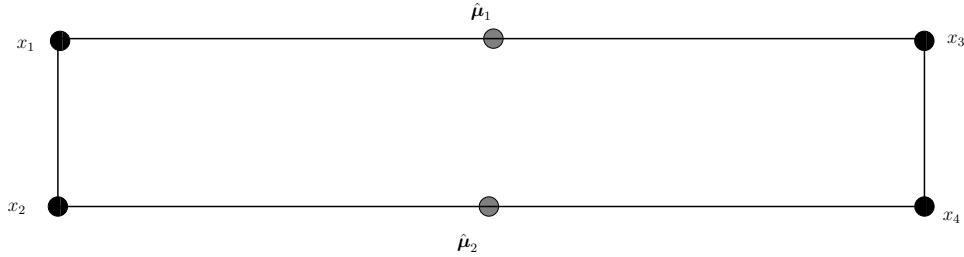


Figura 7.3: Caz nefavorabil pentru  $K$ -means la alegerea centroizilor inițiali.

Ca atare, s-a dezvoltat algoritmul  $K$ -means++ care are ca scop determinarea unor centroizi inițiali aleși mai potrivit. Alegerea celor  $K$  centroizi se face după următorii pași [12]:

1. Alege primul centroid aleator din setul de antrenare;
2. Pentru fiecare punct ce nu a fost încă ales drept centroid  $\mathbf{x}^{(i)}$  calculează  $D(\mathbf{x}^{(i)})$  ( $1 \leq i \leq p$ ), distanța de la el până la cel mai apropiat din centrozii determinați până la pasul curent;



Figura 7.4: Alegerea optimă a centroizilor inițiali.

3. Alege aleator un nou punct din setul de antrenare, folosind o probabilitate de alegere o funcție crescătoare cu distanța dată de  $D$ ;
4. Repetă pașii 2 și 3 până când s-au ales toți cei  $k$  centroizi;

Se aplică apoi algoritmul  $K$ -means pentru centroizii astfel determinați.

Costul suplimentar indus de determinarea celor  $k$  centroizi ca mai sus este neglijabil față de efectele benefice asupra rezultatului final. Motivațiile teoretice pentru  $K$ -means++ se găsesc în [12].

## 7.6 Determinarea ponderilor pentru RBF

Determinarea ponderilor legăturilor dintre stratul ascuns și cel de ieșire este următorul pas. Problema este una de determinare a ponderilor pentru o problemă de regresie liniară și se tratează cu tehnicile din secțiunile 2.3 și 2.4.

Pentru cazul în care problema este una de regresie în care vectorii de ieșire sunt din  $\mathbb{R}^m$ , fiecare neuron de ieșire își poate ajusta setul de ponderi independent de ponderile celorlalte ieșiri; se aplică una din cele două metode de mai sus.

## 7.7 Algoritm de instruire a rețelei RBF

Sintetizăm pe baza expunerii de până acum procedura de instruire a unei rețele RBF. Stratul de intrare este fix, având numărul de noduri dat de dimensiunea intrării. Stratul ascuns se obține rulând algoritm de clustering (*e.g.*  $K$ -means precedat de  $K$ -means++) peste setul de antrenare și rezultând  $k$  centroizi  $\hat{\mu}_j, j = \overline{1, k}$ . Acești centri de clustere devin centrii unor funcții Gaussiene asiguate nodurilor ascunse. Pentru fiecare astfel de Gaussiană este asignată o aceeași lățime  $\sigma$ , calculată ca:

$$\sigma = \frac{d_{max}}{\sqrt{2 \cdot k}} \quad (7.16)$$

unde  $d_{max}$  este distanța maximă dintre perechile de centroizi. În stratul de ieșire sunt tot atâtea noduri cât este dimensiunea spațiului de ieșire. Ponderile legăturilor dintre stratul ascuns și stratul de ieșire se calculează ca pentru o problemă de regresie sau clasificare, definind o funcție de eroare și minimizând-o printr-un procedeu adecvat (gradient descent, metoda pseudoinversei etc.)

## Capitolul 8

# Fuzzy ARTMAP

Rețelele Fuzzy ARTMAP folosesc instruirea supervizată pentru a crea clasificatoare, estimatoare de probabilitate condiționată și modele de regresie.

Rețelele Fuzzy ARTMAP (FAM) au capacitatea de învățare incrementală, posedă o mare parte din proprietățile dorite pentru sisteme instruibile și rezolvă dilema stabilitate–plasticitate.

### 8.1 Învățarea incrementală

Învățarea incrementală este o caracteristică asociată unor sisteme adaptive care:

1. agregă cunoștințe noi din date noi;
2. nu cer acces la datele utilizate pentru a antrena sistemul până la momentul curent;
3. păstrează cunoștințele deprinse anterior;
4. se pot acomoda cu noi categorii care pot fi introduse de noi date de instruire.

### 8.2 Proprietăți dezirabile ale sistemelor instruibile

Pentru un sistem instruibil următoarele proprietăți sunt văzute ca fiind esențiale:

1. învățare rapidă;
2. învățare din noi date fără a fi nevoie să se reantreneze cu datele parcurse anterior – regăsită în învățarea incrementală;
3. rezolvarea de probleme neseparabile liniar – o varietate liniară nu este întotdeauna o suprafață de separare bună;

4. în cazul unui clasificator: abilitate de a da nu doar clasa de apartenență a unui vector de intrare, ci și plauzibilitatea acestei apartenențe; sunt favorizați aici estimatorii de probabilitate condiționată de forma  $P(\text{clasa}|\text{intrare})$ ; de exemplu,  $P(\text{email} = \text{spam}|\text{continut email})$ ;
5. pentru clasificatori: oferire de explicații asupra modului în care datele sunt clasificate, de ce sunt clasificate într-un anumit mod; prin această trăsătură se evită tratarea clasificatorului ca o cutie neagră ce nu poate să explice modul de producere a deciziilor;
6. posibilitate de reglare automată a hiperparametrilor modelului; de exemplu, pentru perceptronul multistrat hiperparametrii de interes sunt rata de învățare, numărul de straturi ascunse, numărul neuronilor din fiecare strat ascuns etc.;
7. aproximarea de funcții fără a cunoaște distribuția inițială a datelor; rareori datele se supun unei distribuții clasice;
8. pentru clase care prezintă suprapuneri, să se creeze regiuni în spațiul de intrare care să realizeze cea mai mică suprapunere; problema asocierilor de tip un vector de intrare-la-mai multe clase trebuie tratată explicit.

### 8.3 Dilema stabilitate-plasticitate

Un sistem instruibil ar trebui să aibă două proprietăți:

1. *plasticitate* - înseamnă adaptarea la mediul din care provin vectorii de instruire. Altfel zis, plasticitatea este capacitatea de învățare.
2. *stabilitate* - se referă la păstrarea cunoștințelor învățate anterior.

Atunci când se prezintă noi intrări unei rețele neurale, cele vechi pot fi uitate. Ponderile rețelei trebuie să fie suficient de flexibile pentru a învăța noi cunoștințe (trăsătura de plasticitate), dar nu atât de mult încât să uite ceea ce s-a învățat anterior (trăsătura de stabilitate). Acest conflict dintre stabilitate și plasticitate se numește *dilema stabilitate-plasticitate*. Cele mai multe dintre rețelele neurale existente sunt fie stabile dar incapabile de a învăța rapid noi vectori, fie plastice dar instabile; de aceea, dilema menționată este una din problemele de interes în domeniul modelelor instruibile. S-a formulat întrebarea: cum poate un sistem de învățare să fie atât stabil cât și plastic?

Dilema a fost abordată de Carpenter și Grossberg în [13]. Teoria rezonanței adaptive (Adaptive Resonance Theory, ART) dezvoltată de cei doi autori este unul din răspunsurile concrete date dilemei. De asemenea, sistemul prezintă abilitate de învățare incrementală și mare parte din proprietățile dezirabile ale sistemelor instruibile.

## 8.4 Fuzzy ARTMAP

Familia Fuzzy ARTMAP de rețele neurale (FAM) este cunoscută ca una din puținele care posedă capacitate de învățare incrementală, rezolvă dilema stabilitate-plasticitate și are multe din proprietățile dorite pentru un sistem instruibil.

Carpenter și Grossberg au fost interesați de obținerea de sisteme care se pot organiza singure. Paradigma ART poate fi descrisă ca un tip de grupare incrementală a datelor, având posibilitatea de a învăța fără antrenare supervizată și este de asemenea în acord cu modelele cognitive și de comportament. Folosește învățare nesupervizată; rețeaua este capabilă să găsească automat categoria asociată intrării curente sau să creeze una nouă atunci când este nevoie: numărul de neuroni din rețea nu este fixat aprioric.

Rețelele neurale Fuzzy ART sunt capabile să producă rapid o învățare stabilă a unor categorii de semnale ca răspuns la secvențe arbitrare de intrări binare sau continue. Fuzzy ART încorporează operatori din teoria mulțimilor fuzzy.

Sistemele de tip Fuzzy ARTMAP învață în mod autonom arbitrar de mulți vectori, formând categorii de recunoaștere în funcție de succesul de predicție. Acest sistem de învățare supervizată este construit dintr-o pereche de module ART capabile de auto-organizare și obținere de categorii de recunoaștere stabile.

Succesul rețelelor bazate pe teoria rezonanței adaptive este dat de avantajele pe care le au față de alte rețele multistrat dezvoltate anterior:

- permit crearea dinamică a nodurilor (neuronilor) fără distrugerea celor existente;
- necesită mai puține cicluri de antrenare cerute, se pot folosi chiar cu învățare incrementală, adică să treacă o singură dată peste setul de instruire;
- are convergență garantată datorită utilizării unor ponderi mărginite și monotone.

Fuzzy ARTMAP este utilizabil pentru probleme de clasificare, estimare de probabilitate și regresie. S-a demonstrat că FAM este aproximativ universal. Deoarece atât clasificarea cât și estimarea de probabilitate sunt cazuri particulare ale regresiei, rezultă că FAM poate fi utilizat în orice problemă ce presupune stabilirea de legături dintre două submulțimi din  $\mathbb{R}^n$  și respectiv din  $\mathbb{R}^m$ .

În final, mai precizăm că FAM mai are o calitate: reprezentarea vectorilor învățați prin categorii facilitează extragerea de reguli sub forma de reguli, aspect esențial în domeniul extragerii de cunoștințe din date.

### 8.4.1 Arhitectura rețelei FAM

O rețea FAM constă într-o pereche de module ART notate  $ART_a$  și  $ART_b$ , conectate printr-un modul numit Mapfield, notat  $F^{ab}$ .  $ART_a$  și  $ART_b$  sunt folosite pentru codificarea vectorilor de intrare și respectiv de ieșire, iar Mapfield permite asocierea între intrări și ieșiri. Figura 8.1 conține componentele unei arhitecturi FAM.

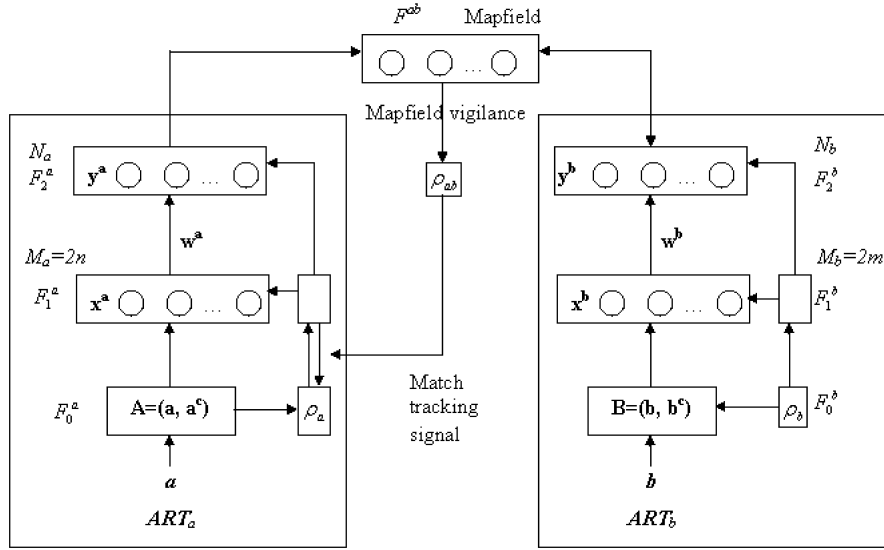


Figura 8.1: Arhitectura Fuzzy ARTMAP

Modulul Fuzzy  $ART_a$  conține stratul de intrare  $F_1^a$  și stratul competitiv  $F_2^a$ . Se adaugă de asemenea un strat de preprocesare  $F_0^a$  înaintea lui  $F_1^a$ . Straturi echivalente apar în  $ART_b$ .

Vectorii de intrare inițiali<sup>1</sup> sunt dați sub forma:

$$\mathbf{a}^{(i)} = (a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}), \quad a_j^{(i)} \in [0, 1], \quad j = \overline{1, n}, i = \overline{1, p} \quad (8.1)$$

$p$  fiind numărul de vectori din setul de instruire.

În cazul în care datele inițiale nu sunt din intervalul  $[0, 1]$ , se poate aplica o scalare globală:

$$a_j^{(i)} \rightarrow \frac{a_j^{(i)} - MIN}{MAX - MIN}, \quad j = \overline{1, n}, i = \overline{1, p}$$

<sup>1</sup>În acest capitol vectorii sunt văzuți ca matrice cu o linie.

pentru fiecare vector de intrare  $\mathbf{a}^{(i)} = (a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq p$ , unde  $MIN$  și  $MAX$  sunt valoarea minimă și respectiv maximă din vectorii de intrare:

$$MIN(MAX) = \min(\max) \left\{ a_j^{(i)} \right\}, \quad j = \overline{1, n}, i = \overline{1, p}$$

sau se poate lua un minorant (respectiv majorant) al valorilor de intrare. Alternativ, fiecare din trăsături (coloane) poate fi scalată independent de celelalte. În urma aplicării oricărei din aceste scalări, vectorii din setul de instruire vor avea valori în intervalul  $[0, 1]$ .

O tehnică de preprocesare numită *codificare complementară* este efectuată în cele două module fuzzy ART de către stratul  $F_0^a$ , respectiv  $F_0^b$  pentru a evita proliferarea nodurilor. S-a dovedit că fără codificarea complementară se vor produce numeroase categorii grupate lângă origine, fără a crea altele care să le înlocuiască. Codificarea complementară este utilizată pentru a obține vectori normalizați, adică vectori cu normă constantă:

$$|\mathbf{A}| = \text{const} \quad (8.2)$$

unde  $|\cdot|$  este o funcție normă. În cazul de față  $|\cdot|$  reprezintă norma  $L_1$ : pentru un vector  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k)$

$$|\mathbf{z}| = L_1(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^k |z_i| \quad (8.3)$$

Fiecare vector de intrare  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  produce vectorul:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}^c) = (\mathbf{a}, \mathbf{1} - \mathbf{a}) = (a_1, \dots, a_n, 1 - a_1, \dots, 1 - a_n) \quad (8.4)$$

a cărui normă este:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n (1 - a_i) = n = \text{constant} \quad (8.5)$$

motiv pentru care spunem că vectorul  $\mathbf{A}$  este normalizat.

Pentru  $ART_a$  folosim următoarele notații:  $M_a$  este numărul de noduri în  $F_1^a$  și  $N_a$  este numărul de noduri din  $F_2^a$ . Datorită pasului de preprocesare,  $M_a = 2n$ . Fiecare nod  $F_2^a$  reprezintă un grup de intrări similare (numit în alte contexte cluster); vom folosi termenul “categorie” pentru a ne referi la un nod  $F_2^a$ . Fiecare categorie  $F_2^a$  are propriul set de ponderi adaptive stocate sub forma unui vector:

$$\mathbf{w}_j^a = (w_{j,1}^a, \dots, w_{j,M_a}^a), \quad j = \overline{1, N_a}. \quad (8.6)$$

Aceste ponderi formează memoria pe termen lung a sistemului. Inițial, toți vectorii au valorile:

$$w_{ji}^a = 1, \quad j = \overline{1, N_a}, \quad i = \overline{1, M_a} \quad (8.7)$$



Spunem că un nod din  $F_2^a$  este *necomis* dacă nu a învățat încă nici un vector de intrare, *comis* în caz contrar. Modulul  $ART_a$  este responsabil cu crearea grupărilor de vectori de intrare. În timpul etapei de învățare,  $N_a$  este numărul de noduri (categorii) comise. Notății și afirmații similare se folosesc pentru  $ART_b$ , care primește vectori  $m$ -dimensionali. Pentru o problemă de clasificare, adică o problemă pentru care numărul – total sau inițial – de clase de ieșire este aprioric cunoscut, indexul de clasă este același cu indexul de categorie din  $F_2^b$  și astfel  $ART_b$  poate fi substituit de un vector  $N_b$ -dimensional. Într-o astfel de codificare, valoarea lui  $N_b$  poate să crească – dacă noi clase de ieșire sunt adăugate la setul de instruire.

Modulul Mapfield permite FAM să creeze legături între cele două module  $ART$ , stabilind legături de tip mulți-la-unu între categorii din  $ART_a$  și  $ART_b$ . Numărul de noduri din  $F^{ab}$  este egal cu numărul de noduri din  $F_2^b$ . Fiecare nod  $j$  din  $F_2^a$  este legat cu fiecare nod din  $F_2^b$  via un vector de ponderi  $\mathbf{w}_j^{ab}$ , unde  $\mathbf{w}_j^{ab}$  este a  $j$ -a linie dintr-o matrice  $\mathbf{w}^{ab}$  ( $j = \overline{1, N_a}$ ). Toate ponderile din  $\mathbf{w}^{ab}$  sunt inițializate cu 1:

$$w_{jk}^{ab} = 1, \quad j = \overline{1, N_a}, \quad k = \overline{1, N_b} \quad (8.8)$$

#### 8.4.2 Algoritm de învățare pentru FAM

În următorul algoritm, operatorul  $\wedge$  este așa-numitul operator fuzzy AND, care pentru doi vectori

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k), \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_k) \quad (8.9)$$

cu  $0 \leq p_i, q_i \leq 1, i = \overline{1, k}$  este definit ca:

$$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})_i = \min(p_i, q_i), i = \overline{1, k} \quad (8.10)$$

1. Se setează parametrul de factor de vigilență  $\rho_a$  la o valoare egală cu o valoare de bază prestabilită:  $\rho_a = \bar{\rho}_a \in [0, 1)$  și se consideră că toate categoriile din  $F_2^a$  sunt neinhibate – adică fiecare nod participă la căutarea unei categorii adecvate pentru vectorul de intrare curent;
2. Pentru fiecare vector de intrare preprocesat  $\mathbf{A}$ , o funcție fuzzy este folosită pentru a obține un răspuns de la fiecare categorie  $F_2^a$ :

$$T_j(\mathbf{A}) = \frac{|\mathbf{A} \wedge \mathbf{w}_j^a|}{\alpha_a + |\mathbf{w}_j^a|}, \quad j = \overline{1, N_a} \quad (8.11)$$

3. Fie  $J$  indicele de nod neinhibat care dă cea mai mare valoare calculată precum în (8.11):

$$J = \arg \max \{T_j | 1 \leq j \leq N_a \text{ și nodul } j \text{ nu este inhibat}\} \quad (8.12)$$

4. Verifică condiția de rezonanță, i.e. dacă intrarea este suficient de similară cu prototipul câștigătorului:

$$\frac{|\mathbf{A} \wedge \mathbf{w}_J^a|}{|\mathbf{A}|} \geq \rho_a \quad (8.13)$$

Dacă condiția este îndeplinită, atunci mergi la pasul 5, altfel inhibă nodul  $J$  astfel încât el nu va mai participa la competiția pentru vectorul curent. Dacă există noduri neinhibate, atunci mergi la pasul 3, altfel recrutează o nouă categorie (creează un nou nod în  $F_2^a$ ) pentru a reprezenta vectorul de intrare și fie  $J$  indicele acestui nou nod.

5. Un proces similar se desfășoară și în  $ART_b$ . Fie  $K$  indicele nodului câștigător din  $ART_b$ . Vectorul de ieșire  $N_b$ -dimensional  $F_2^b$  este setat la:

$$y_k^b = I(k = K), \quad k = \overline{1, N_b} \quad (8.14)$$

unde  $I$  este funcția indicator (3.40) de la pagina 45.

În Mapfield se formează vector de ieșire  $\mathbf{x}^{ab}$ :

$$\mathbf{x}^{ab} = \mathbf{y}^b \wedge \mathbf{w}_J^{ab} \quad (8.15)$$

6. Un test de verificare în Mapfield controlează potrivirea dintre valoarea prezisă  $\mathbf{x}^{ab}$  și vectorul de ieșire atașat vectorului de instruire curent  $\mathbf{y}^b$ :

$$\frac{|\mathbf{x}^{ab}|}{|\mathbf{y}^b|} \geq \rho_{ab} \quad (8.16)$$

unde  $\rho_{ab} \in [0, 1]$  este un parametru de vigilență Mapfield. Dacă testul din inecuația (8.16) este trecut, atunci se face învățare  $ART_a$ ,  $ART_b$  și Mapfield (pasul 7). Altfel, se inițiază o secvență de pași numită *match tracking* (pasul 8).

7. În modulele fuzzy ART și în Mapfield se efectuează învățare:

$$\mathbf{w}_J^{a(new)} = \beta_a \left( \mathbf{A} \wedge \mathbf{w}_J^{a(old)} \right) + (1 - \beta_a) \mathbf{w}_J^{a(old)} \quad (8.17)$$

(și analog în  $ART_b$ ) și

$$w_{Jk}^{ab} = I(k = K) \quad (8.18)$$

Se merge la pasul 9.

8. Faza de match tracking, în care se intră doar dacă inecuația (8.16) nu e îndeplinită: mărește  $\rho_a$ :

$$\rho_a = \frac{|\mathbf{A} \wedge \mathbf{w}_J^a|}{|\mathbf{A}|} + \delta \quad (8.19)$$

unde  $0 < \delta < 1$ . Dacă  $\rho_a > 1$  atunci vectorul curent de instruire este rejectat, altfel mergi la pasul 3.

9. Dacă mai sunt vectori în setul de învățare, mergi la pasul 1, altfel STOP.

Urmează câteva comentarii privind pașii de mai sus:

1. La pasul 2, fiecare vector este preprocesat datorită straturilor  $F_0^a$  și respectiv  $F_0^b$ .  $\alpha_a > 0$  este un parametru de alegere. Pentru doi vectori  $\mathbf{p}$  și  $\mathbf{q}$ , raportul:

$$r = \frac{|\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}|}{|\mathbf{q}|} \quad (8.20)$$

cu  $0 \leq r \leq 1$  dă gradul în care  $\mathbf{p}$  este subset fuzzy al lui  $\mathbf{q}$  și deci pentru  $0 < \alpha_a \ll 1$ ,  $T_j(\mathbf{A})$  din ecuația 8.11 măsoară gradul în care  $\mathbf{A}$  este o submulțime fuzzy a categoriei  $w_j^a$ . Dacă se crește valoarea lui  $\alpha_a$  atunci se va mări numărul de categorii, lucru nu întotdeauna benefic. Este deci sugerat ca să se mențină  $\alpha_a$  la o valoare mică, de exemplu  $\alpha_a = 0.001$ ; valori mai mici ale lui  $\alpha_a$  nu duc la o diferență semnificativă.

2. La pasul 3, dacă există mai multe categorii ale căror funcție de alegere atinge maximul, vom considera pe acea categorie care are indicele minim.
3. Parametrul  $\rho_a$  calibrează încrederea minimă pe care  $ART_a$  trebuie să o aibă vizavi de o categorie activată de o intrare pentru ca  $ART_a$  să accepte această categorie, în loc de a căuta o categorie mai bună. Valori mici  $\rho_a$  duc la un grad mare de generalizare și un număr mai mic de categorii  $ART_a$ .
4. Dacă inecuația (8.13) este îndeplinită, spunem că avem rezonanță în  $ART_a$  pentru vectorul de intrare curent. Datorită pasului de preprocesare, conform (8.5), numitorul din (8.13) este exact dimensiunea originală a vectorilor de intrare,  $n$ .
5. Aceiași pași ca în 1 – 4 sunt efectuați în paralel pentru modulul  $ART_b$ , dacă nu cumva acesta este substituit cu un vector  $N_b$ —dimensional; în acest din urmă caz indicele nodului câștigător  $K$  este indicele de clasă corespunzător intrării curente;
6. Când se intră în pasul 5, avem rezonanță atât în  $ART_a$  cât și în  $ART_b$ . Vectorul  $\mathbf{x}^{ab}$  dă activarea Mapfield și se folosește atât când ambele module  $F_2^a$  și  $F_2^b$  sunt active, *i.e.* la faza de învățare, cât și când  $F_2^a$  este activ și  $F_2^b$  e inactiv (faza de predicție). În faza de învățare  $\mathbf{x}^{ab}$  are forma din ecuația (8.15); în faza de predicție acest vector este calculat ca:

$$\mathbf{x}^{ab} = \mathbf{w}_J^{ab} \quad (8.21)$$

7. Atunci când ambele module  $F_2^a$  și  $F_2^b$  sunt active – lucru valabil la instruirea rețelei, când se furnizează atât vectorul de intrare cât și cel de ieșire – a  $J$ -a categorie câștigătoare din  $ART_a$  va corespunde unui vector de ponderi  $\mathbf{w}_J^{ab}$  din Mapfield care leagă nodul  $F_2^a$  cu categoria  $F_2^b$  prezisă. În paralel, pentru modulul  $ART_b$  am obținut vectorul de ieșire  $\mathbf{y}^b$  ca în ecuația (8.14). Operația fuzzy AND ne asigură că  $\mathbf{x}^{ab}$  nu e plin cu valoarea zero dacă și numai dacă valoarea de ieșire prezisă și cea actuală coincid. Atunci când categoria  $J$  este necomisă avem:

$$\mathbf{w}_J^{ab} = (1, 1, \dots, 1) \quad (8.22)$$

și deci  $\mathbf{x}^{ab} = \mathbf{y}^b$ . Când doar modulul  $F_2^a$  este activ, matricea  $\mathbf{w}^{ab}$  dă valoarea prezisă: indicele categoriei din  $ART_b$  asociată cu intrarea curentă este unica poziție  $k$  din linia  $j$  a matricei  $\mathbf{w}^{ab}$  pentru care  $w_{jk}^{ab} = 1$ .

Ecuația (8.18) indică faptul că al  $J$ -lea nod din  $ART_a$  este legat cu categoria de ieșire  $K$ , iar legătura, odată făcută, nu se mai schimbă.

8. Pentru  $\beta_a$  (Pasul 7), există două moduri de învățare:
- (a) *fast learning* corespunde la a seta  $\beta_a = 1$  atât pentru nodurile comise cât și pentru cele necomise;
  - (b) *fast-commit and slow-recode learning* corespunde la a seta  $\beta_a = 1$  pentru nod necomis și  $\beta_a < 1$  pentru cele comise.
9. La faza de match tracking, datorită creșterii valorii lui  $\rho_a$  conform ecuației (8.19), nodul  $J$  nu va mai fi în stare să câștige în competițiile următoare pentru vectorul de intrare curent. Match tracking-ul va declanșa o nouă căutare în  $ART_a$  pentru a găsi un alt nod câștigător. Se poate ca asta să ducă la crearea unui nou nod în  $ART_a$ . Căutarea se repetă până când  $\rho_a > 1$ , sau până când se găsește o categorie adecvată în  $ART_a$ .
10. O valoare mare a lui  $\delta$  în pasul 8 va crește numărul de categorii. Se folosește de regulă o valoare mică  $\delta = 0.001$
11. Ordinea de prezentare a vectorilor din setul de instruire influențează comportamentul rețelei, adică numărul și pozițiile categoriilor va diferi. Putem face antrenarea în paralel cu diferite permutări ale setului de intrare, apoi se contorizează voturile pentru fiecare vector care trebuie clasificat.

Pasul de învățare este repetat până când nu mai este nicio eroare pentru setul de învățare, sau până se atinge o eroare acceptabilă; dacă se vrea învățare incrementală atunci se face o singură trecere pe setul de antrenare. După învățare, FAM poate fi utilizat pentru predicție. În această fază, stratul

$F_2^b$  este inactiv și  $F_2^a$  este activ. Conform ecuației (8.21), predicția este făcută doar pe baza lui  $\mathbf{w}_j^{ab}$ .

Există o interpretare geometrică interesantă a categoriilor  $ART_a$ : fiecare categorie de intrare  $\mathbf{w}_j^a$  se reprezintă ca un hiper-dreptunghi  $R_j$ , deoarece vectorul de ponderi poate fi scris ca:

$$\mathbf{w}_j^a = (\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j^c) \quad (8.23)$$

unde

$$\mathbf{v}_j^c = (v_{j1}^c, \dots, v_{jn}^c) \quad (8.24)$$

(atât  $\mathbf{u}$  cât și  $\mathbf{v}$  au  $n$  elemente). Vectorul  $\mathbf{u}_j$  definește un colț al hiper-dreptunghiului  $R_j$  iar  $\mathbf{v}_j$  este colț diagonal opus lui. Pentru  $n = 2$ , reprezentarea grafică este dată în figura 8.2. Dimensiunea lui  $R_j$  este definită ca:

$$|R_j| = |\mathbf{v}_j - \mathbf{u}_j| \quad (8.25)$$

O interpretare similară este valabilă și pentru modulul  $ART_b$ .

În modulul  $ART_a$ , atunci când se creează un nou nod în pasul 4, acesta va fi de fapt vectorul de intrare preprocesat curent:  $\mathbf{w}_j^{(new)} = \mathbf{A} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}^c)$ ; cu alte cuvinte,  $R_j^{(new)}$  este de fapt un punct reprezentând vectorul de intrare preprocesat  $A$ . În timpul fiecărui pas de învățare fast-learning ( $\beta_a = 1$ ),  $R_j$  se expandează la  $R_j \oplus \mathbf{a}$ , hiper-dreptunghiul minim care conține  $R_j$  și  $\mathbf{a}$  – a se vedea figura 8.3; dacă punctul  $\mathbf{A}$  este chiar în interiorul lui  $R_j$ , atunci  $R_j$  nu se modifică. Colțurile lui  $R_j \oplus \mathbf{a}$  sunt definite de  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{u}_j$  și  $\mathbf{a} \vee \mathbf{v}_j$ , unde operatorul  $\vee$  este definit ca operatorul fuzzy OR:

$$(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})_i = \max(p_i, q_i), \quad i = 1 \dots, n \quad (8.26)$$

pentru  $\mathbf{p}$  și  $\mathbf{q}$  vectori precum în ecuația (8.9).

Se poate arăta că:

$$|R_j| = n - |\mathbf{w}_j| \quad (8.27)$$

iar hiper-dreptunghiul corespunzător unei categorii nu poate crește oricât de mult:

$$|R_j| \leq (1 - \rho_a)n \quad (8.28)$$

Proprietate similară este valabilă și pentru  $ART_b$ .

Aceste proprietăți sunt sumarizate de teorema:

**Teorema 5.** [14] *Un sistem Fuzzy ART cu codificarea complementară, fast learning și termen de vigilență constant formează categorii hiper-dreptunghiuri care converg în limită la o secvență arbitrară de vectori analogici sau binari. Hiper-dreptunghiurile cresc monoton în toate dimensiunile. Dimensiunea  $|R_j|$  a unui hiper-dreptunghi este  $n - |\mathbf{w}_j|$ , unde  $\mathbf{w}_j$  este vectorul pondere corespunzător. Dimensiunea  $|R_j|$  este mărginită superior de  $n(1 - \rho)$ . Dacă*

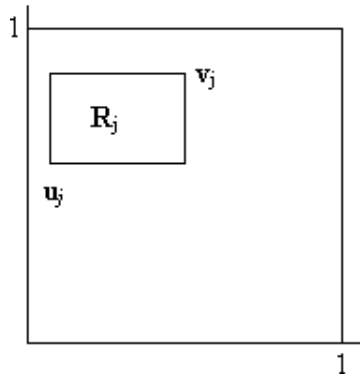


Figura 8.2: Fiecare vector pondere  $\mathbf{w}_j^a$  are o interpretare geometrică precum un hiper-dreptunghi  $R_j$  cu colțurile definite de  $\mathbf{u}_j$  și  $\mathbf{v}_j$

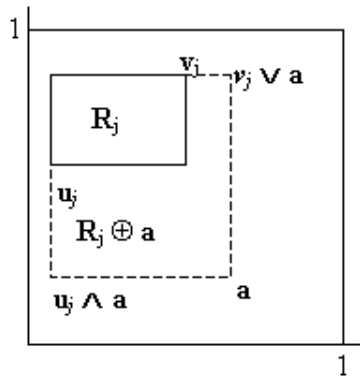


Figura 8.3: Expandarea de categorie în timpul fast learning: de la  $R_j$  la hiper-dreptunghiul mai mare conținând  $R_j$  și  $\mathbf{a}$ .

$0 \leq \rho < 1$ , numărul de categorii este mărginit, chiar dacă numărul de exemple din setul de antrenare este infinit. Proprietăți similare au loc pentru fast-learn, slow-recode, exceptând cazul în care este nevoie de prezentări repetate ale fiecărei intrări înainte de stabilizarea sistemului.

Sumarizând: FAM aplică o învățare bazată pe potrivire, conform căreia vectorii sunt grupați în categorii pe baza unor măsuri de similaritate. Dacă un vector din setul de instruire nu se potrivește suficient de bine cu o categorie existentă, atunci se va crea una nouă pentru a o reprezenta. Datorită acestui comportament, FAM nu încearcă să minimizeze o funcție de cost, evitând problemele întâlnite în optimizarea funcțiilor. Strategia de învățare prezentată este deci diferită de cea bazată pe minimizarea erorii, care cere continuarea antrenării prin epoci suplimentare, dacă valoarea erorii este inacceptabilă sau ponderile nu se stabilizează.

## Capitolul 9

# Calcul evoluționist

Calculul evoluționist este inspirat din teoria evoluției dezvoltate de către Charles Darwin și de genetică – știința eredității, având ca părinte pe Gregor Mendel. Au în comun faptul că folosesc populații de elemente care sunt folosite pentru căutarea soluției unei probleme, spre deosebire de alte abordări care încearcă îmbunătățirea printr-un proces iterativ a unei singure valori.

### 9.1 Taxonomie

Calculul evoluționist se împarte în:

1. algoritmi genetici;
2. programare evoluționistă;
3. strategii de evoluție;
4. programare genetică.

Domeniile enumerate au concepte comune; dintre toate, cele mai multe rezultate sunt în domeniul algoritmulor genetici, dar la ora actuală există hibridizări ale acestor 4 arii.

Cel care este creditat ca fiind pionierul domeniului algoritmilor genetici este John T. Holland de la Universitatea din Michigan. El a introdus conceptul de populație de indivizi care participă la căutarea unei soluții; de asemenea, a dat teorema schemelor. El a fost cel care a stabilit operațiile care trebuie să se aplice unei populații genetice - selecția, încrucișarea și mutația.

Programarea evoluționistă (avându-l ca pionier pe Larry J. Fogel) folosește ca operatori selecția celui mai potrivit individ și mutația, dar nu și încrucișarea. În timp ce algoritmi genetici văd procesul evolutiv ca fiind aplicat pe o *populație de indivizi din aceeași specie*, programarea evoluționistă vede



evoluția ca aplicându-se unei *populații de specii*. Fiecare element din populație este interpretat ca o specie întreagă.

Strategiile de evoluție au fost dezvoltate de Ingo Rechenberg și Hans-Paul Schwefel, care au experimentat diferite variante de mutație pentru rezolvarea unor probleme legate de optimizarea unor suprafețe aflate în contact cu un fluid. Mutațiile reprezentau perturbări ale unor stări, efectuând o căutare în vecinătate. Multiplele variante de perturbare au construit un întreg domeniu.

Programarea genetică (Richard Friedberg) a pornit cu coduri program de lungime fixă. Prin modificări efectuate în mod automat asupra acestor programe se dorea obținerea unor variante de cod optimizate. Esențiale sunt aici modul de reprezentare a acestor programe și funcțiile de măsurare a calității codului.

De cele mai multe ori, pentru o abordare dintr-unul din cele patru domenii se urmează pașii:

1. Inițializează populația
2. Calculează performanța fiecărui element din populație;
3. Aplică un pas de selecție;
4. Aplică operații precum încrucișarea sau mutația;
5. Reia de la pasul 2 până când se îndeplinește o anumită condiție.

Diferența între domenii constă în detaliile fiecărui pas. Pașii sunt bazați pe alegeri de valori aleatoare, ceea ce dă de înțeles că rulări diferite pot duce la valori diferite. Totodată algoritmi nu garantează descoperirea unei valori optime. De cele mai multe ori, însă nu este nevoie să se cunoască exact optimul, ci o valoare suficient de bună. În practică, calculul evoluționist dă rezultate bune într-un timp rezonabil.

În cele ce urmează vom prezenta algoritmi genetici.

## 9.2 Algoritmi genetici

Rolul mediului ca factor modelator în teoria evoluționistă este preluat în algoritmi genetici de către o funcție scop (sau funcție obiectiv). Vom detalia algoritmul pentru maximizarea unei funcții  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ . Indivizii care alcătuiesc populația se numesc *cromozomi* (șiruri de biți) și sunt alcătuiți din *gene* (biți).

Constrângerea ca funcția  $f$  să fie strict pozitivă poate fi asigurată prin adunarea unei cantități convenabile la funcția inițială, dacă are și porțiuni negative, sau considerarea funcției  $g(x) = \max(\varepsilon, f(x))$ , unde  $\varepsilon$  este o constantă strict pozitivă și mică. Alegerea de a maximiza funcția obiectiv este

convenabilă. Dacă se dorește minimizarea funcției, se poate ține cont de relația:

$$\min_x f(x) = -\max_x [-f(x)] \quad (9.1)$$

Se pornește cu o populație inițială, care este supusă apoi unei secvențe de procese de tipul:

1. selecție: indivizii care sunt cei mai buni (considerând valoarea funcției  $f$  ce se vrea maximizată) sunt favorizați să apară de mai multe ori într-o populație nouă față de indivizii mai puțin performanți;
2. încrucișare: are loc un schimb de gene între perechi de părinți, formându-se copii; aceștia se presupune că moștenesc și combină performanțele părinților.
3. mutație: se efectuează niște modificări minore asupra materialului genetic existent.

**Pas 1. Crearea unei populații inițiale de cromozomi.** Se consideră mai multe valori pentru variabila  $x \in [a, b]$ . Numărul acestor valori – numit dimensiunea populației – este dat ca parametrul al algoritmului,  $n$ , dependent de problemă. Toate valorile sunt cuantificate prin cromozomi care sunt șiruri de  $k$  biți – un bit reprezintă în acest caz o genă a cromozomului,  $k$  fiind alt parametru de intrare.

Generarea celor  $n$  cromozomi se face aleator, prin setarea fiecărei gene la valoarea 0 sau 1, la întâmplare. Se obține astfel o populație inițială formată din cromozomii  $c_1, \dots, c_n$ .

Fiecare cromozom  $c$  – șir de  $k$  biți – va produce un număr  $x(c)$  din intervalul  $[a, b]$ , astfel: dacă valoarea în baza 10 a cromozomului este  $v(c)$  ( $0 \leq v(c) \leq 2^k - 1$ ) atunci valoarea asociată din intervalul  $[a, b]$  este:

$$x(c) = a + v(c) \cdot \frac{b-a}{2^k-1} \in \left\{ a, a + \frac{b-a}{2^k-1}, a + 2 \cdot \frac{b-a}{2^k-1}, \dots, b \right\} \quad (9.2)$$

**Pas 2. Evoluția populației.** În acest pas se obțin generații succesive plecând de la populația inițială; populația de la generația  $g+1$  se obține pe baza populației de la generația  $g$ . Operatorii sunt selecția, împerecherea (crossover, încrucișarea) și mutația.

**Pas 2.1. Selecția.** Pentru fiecare cromozom  $c_i$  din populație se calculează funcția obiectiv  $y_i = f(x(c_i))$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Apoi se însumează valorile funcțiilor obiectiv obținute pentru fiecare cromozom în parte:

$$S = \sum_{i=1}^n y_i \quad (9.3)$$

Pentru fiecare din cei  $n$  cromozomi se calculează probabilitatea de selecție:

$$p_i = \frac{y_i}{S}, 1 \leq i \leq n \quad (9.4)$$

Se observă că  $0 < p_i < 1$ ,  $1 \leq i \leq n$  și  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

Pentru fiecare cromozom se calculează probabilitatea cumulativă de selecție:

$$q_j = \sum_{i=1}^j p_i, 1 \leq j \leq n \quad (9.5)$$

Remarcăm că se obține  $0 < p_1 = q_1 < q_2 < \dots < q_n = 1$ . Cu cât cromozomul  $c_i$  determină o valoare mai mare pentru funcția  $f$  (*i.e.* cu cât valoarea  $f(x(c_i))$  este mai mare), cu atât diferența dintre  $q_i$  și  $q_{i-1}$  – adică lungimea intervalului  $(q_{i-1}, q_i]$  – este mai mare.

Se selectează  $n$  numere aleatoare uniform distribuite în  $(0, 1]$ . Pentru fiecare număr, dacă el se găsește în intervalul  $(0, q_1]$  atunci cromozomul  $c_1$  este ales și depus într-o populație nouă; dacă acest număr se află în intervalul  $(q_i, q_{i+1}]$  atunci se alege cromozomul  $c_{i+1}$ . Remarcăm că numărul de cromozomi prezenți în noua populație este tot  $n$ . Cu cât valoarea  $y = f(x(c))$  asociată unui cromozom  $c$  este mai mare, cu atât cresc șansele lui spre a fi selectat și depus în noua populație. Este foarte probabil ca un astfel de cromozom valoros să apară de mai multe ori în populația nouă; de asemenea, este foarte probabil ca un cromozom cu o valoare mică pentru funcția  $f$  să nu apară deloc.

**Pas 2.2. Încrucișarea** (împerecherea, crossover) Pentru fiecare cromozom care a rezultat la pasul anterior se alege o valoare aleatoare, uniform distribuită în intervalul  $(0, 1]$ . Dacă această valoare este mai mică decât un parametru  $p_c$  (parametru al aplicației, *e.g.* 0.1), atunci cromozomul este ales pentru încrucișare. Se procedează astfel încât să se obțină un număr par de cromozomi (de exemplu se renunță la ultimul dacă numărul lor este impar).

Cromozomii aleși se încrucișează astfel: primul selectat cu al doilea selectat, al 3-lea cu al 4-lea etc. Încrucișarea decurge astfel:

- se alege un număr aleator  $t$  între 1 și  $k - 1$ ;
- se obțin 2 cromozomi copii astfel: primul va conține primele  $t$  gene ale primului părinte și ultimele  $k - t$  gene ale celui de-al doilea părinte; al doilea copil conține primele  $t$  gene ale celui de-al doilea părinte și ultimele  $k - t$  gene ale primului părinte;
- cei doi cromozomi copii îi vor înlocui în populație pe părinții din care provin.

**Pas 2.3. Mutația.** Populației obținute i se aplică operator de mutație, astfel: pentru fiecare genă a fiecărui cromozom se alege o valoare aleatoare, uniform distribuită în  $(0, 1]$ ; dacă acest număr este mai mic decât o probabilitate de mutație  $p_m$  (parametru al aplicației, *e.g.*  $p_m = 0.01$ ), atunci se modifică valoarea curentă a genei cu complementul său față de 1.

Populația obținută în pasul 2 reia ciclul de evoluție. După ce se obțin câteva astfel de generații (sau se epuizează un timp alocat procesului, sau se observă că media populației nu se îmbunătățește în ultimele iterații efectuate), se raportează valoarea celui mai bun cromozom din ultima generație<sup>1</sup>.

Avantajul primar al algoritmilor genetici constă în schimbul de informație dintre indivizi realizat la etapa de încrucișare, adică schimbarea de blocuri de date care au evoluat. O utilizare eficientă a algoritmilor genetici presupune crearea unor structuri de date pentru gene și a unor operatori adecvați problemei ce trebuie rezolvată<sup>2</sup> – a se vedea secțiunea 9.4.

### 9.3 Fundamente teoretice

Studiul comportamentului algoritmilor genetici se face pe baza unor scheme (sau șabloane) care descriu colecții de cromozomi. O schemă se reprezintă ca un șir de caractere construit cu simbolurile “0”, “1” și “\*”, unde “\*” poate fi substituit cu orice bit; simbolul “\*” poate apărea de oricâte ori, inclusiv niciodată. De exemplu, schema (\*0101) se potrivește cu doi cromozomi<sup>3</sup>: (00101) și (10101). Dacă o schemă are  $l$  simboluri “\*”, atunci ea poate să fie reprezentată de  $2^l$  cromozomi, iar un cromozom de lungime  $k$  poate fi descris de  $C_k^0 + C_k^1 + \dots + C_k^k = 2^k$  scheme.

Pentru o schemă  $S$  definim ordinul ei (și îl notăm cu  $o(S)$ ) numărul de poziții pe care se află valorile 0 sau 1, adică numărul de poziții fixate. De exemplu, pentru schema  $S = (* 0 * 1 1 0)$ ,  $o(S) = 4$ . Ordinul unei scheme dă gradul de specializare a ei și este utilă mai departe în calcularea probabilității de supraviețuire a sa în cadrul mutațiilor.

Lungimea unei scheme  $S$ , notată cu  $\delta(S)$ , este distanța dintre prima și ultima poziție fixată. Pentru schema dată mai sus,  $\delta(S) = 6 - 2 = 4$  (sau  $\delta(S) = 5 - 1 = 4$ , după cum indicieră începe de la 1 sau de la 0). Noțiunea de lungime a unei scheme este utilă pentru calculul probabilității de supraviețuire a unei scheme în cadrul operațiilor de încrucișare.

Pentru o populație de indivizi aflată la momentul  $t$  al evoluției, vom nota cu  $n(S, t)$  numărul de cromozomi din populație care reprezintă (se potrivesc

<sup>1</sup>În practică se preferă strategia elitistă: se returnează cel mai bun individ al tuturor generațiilor.

<sup>2</sup>S-a stabilit “ecuația” Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs, [15].

<sup>3</sup>În acest caz spunem că schema este reprezentată de cei doi cromozomi.

cu) schema  $S$ . De asemenea, vom considera valoarea medie a schemei din populația de la un timp  $t$ , notată cu  $f(S, t)$  și definită ca suma valorilor cromozomilor din populație care reprezintă schema  $S$  împărțită la numărul acestor cromozomi,  $n(S, t)$ .

La pasul de selecție, un cromozom  $A$  este copiat în populația următoare cu probabilitatea:

$$P(A) = \frac{f(A)}{\sum_c f(c)} \quad (9.6)$$

unde însumarea se face după toți cromozomii  $c$  ai populației curente. Reamintind că  $n$  este numărul de cromozomi din populație, avem:

$$n(S, t+1) = n(S, t) \cdot \frac{f(S, t)}{\frac{1}{n} \sum_c f(c)} \quad (9.7)$$

Cantitatea  $\overline{f(t)} = \sum_c f(c)/n$  este chiar valoarea medie a populației de la momentul  $t$ , deci avem:

$$n(S, t+1) = n(S, t) \cdot \frac{f(S, t)}{\overline{f(t)}} \quad (9.8)$$

Interpretarea ecuației de mai sus este următoarea: numărul de reprezentanți ai schemei  $S$  care vor exista la momentul  $t+1$  este dependent de valoarea schemei dată de cromozomii care există în populația de la momentul  $t$ . De exemplu, o schemă  $S$  care produce o valoare relativ mare a lui  $f(S, t)$  față de  $\overline{f(t)}$  va impune creșterea numărului de reprezentanți ai săi. Dacă presupunem de exemplu că  $f(S, t) = \overline{f(t)} + \varepsilon \cdot \overline{f(t)} = \overline{f(t)}(1 + \varepsilon)$ ,  $\forall t > 0$  (unde  $\varepsilon > 0$ ) atunci se arată prin inducție că:

$$n(S, t) = n(S, 0)(1 + \varepsilon)^t, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots\} \quad (9.9)$$

adică pentru scheme care au valoare medie desupra valorii medii a populației numărul de reprezentanți va crește exponențial în timp – respectiv dacă valoarea schemei este sub medie, numărul de reprezentanți obținuți prin selecție scade exponențial.

În ceea ce privește încrucișarea, să presupunem că cromozomul cu 7 gene  $c = (1010100)$  este selectat pentru reproducere; există  $2^7$  scheme care îl au pe  $c$  drept reprezentant, de exemplu:

$$S_1 = (*01****) \quad (9.10)$$

și

$$S_2 = (1****0*) \quad (9.11)$$

Să presupunem că în procesul de încrucișare tăietura se face după a patra genă:

$$\begin{array}{lcl} c & = & (1 \ 0 \ 1 \ 0 \mid 1 \ 0 \ 0) \\ S_1 & = & (* \ 0 \ 1 \ * \mid * \ * \ *) \\ S_2 & = & (0 \ * \ * \ * \mid * \ 0 \ *) \end{array} \quad (9.12)$$

Se observă că pentru exemplul considerat schema  $S_1$  sigur se va regăsi într-un descendent (deci schema supraviețuiește), deoarece valorile 0 și 1 se regăsesc pe pozițiile inițiale, în timp ce  $S_2$  are șanse de a fi distrusă<sup>4</sup>. Intuitiv, este clar faptul că lungimea mică a schemei  $S_1$  mărește șansa de supraviețuire, față de  $S_2$  care poate fi ușor “spartă” în cromozomii copii. Desigur, contează poziția tăieturii.

Tăietura poate să apară uniform aleator (echiprobabil) în  $k - 1$  poziții. Probabilitatea de distrugere a unei scheme este:

$$P_d(S) = \frac{\delta(S)}{k - 1} \quad (9.13)$$

și evident probabilitatea evenimentului contrar, reprezentând supraviețuirea schemei este

$$P_s(S) = 1 - P_d(S) = 1 - \frac{\delta(S)}{k - 1} \quad (9.14)$$

Conform strategiei de alegere a cromozomilor ce se supun împerecherii, probabilitatea ca un cromozom să participe la încrucișare este  $p_c$ , deci probabilitatea de supraviețuire a unei scheme  $S$  este:

$$P_s(S) = 1 - p_c \cdot \frac{\delta(S)}{k - 1} \quad (9.15)$$

Se mai poate lua în considerare faptul că o schemă  $S$  poate totuși să supraviețuiască, dacă cromozomii care se încrucișează au pe pozițiile fixe ale schemei chiar valorile din  $S$ . Așa ceva este posibil și trebuie considerat ca mărinș șansele de supraviețuire a unei scheme. Ca atare, șansa de supraviețuire este de fapt dată printr-o inegalitate:

$$P_s(S) \geq 1 - p_c \cdot \frac{\delta(S)}{k - 1} \quad (9.16)$$

deci schemele de lungime mică au șanse crescute de supraviețuire.

Combinând rezultatele obținute pentru partea de selecție și încrucișare, obținem:

$$n(S, t + 1) \geq n(S, t) \cdot \frac{f(S, t)}{f(t)} \cdot \left[ 1 - p_c \cdot \frac{\delta(S)}{k - 1} \right] \quad (9.17)$$

Mutația schimbă aleator biți din cromozom cu complementul lor. Este clar că pentru ca o schemă să supraviețuiască, pozițiile sale fixe nu trebuie să fie alese pentru mutație. Probabilitatea ca un bit oarecare să nu fie modificat este  $(1 - p_m)$ . Alegerile biților care să sufere mutație sunt evenimente independente, deci probabilitatea ca cei  $o(S)$  biți ficși ai unei scheme să se mențină (și deci ca întreaga schemă să se mențină) este:

$$P_s(S) = (1 - p_m)^{o(S)} \quad (9.18)$$

---

<sup>4</sup>În exemplul dat, schema  $S_2$  nu e distrusă dacă al doilea cromozom care participă la încrucișare vine cu aceleași gene pe pozițiile fixe din schemă.

Pentru că  $p_m \ll 1$ , putem aproxima  $(1 - p_m)^{o(S)}$  cu  $1 - p_m o(S)$ . Am obținut că schemele cu ordinul mic au șanse crescute de supraviețuire.

Efectul combinat al operațiilor de selecție, încrucișare, mutație este deci:

$$n(S, t + 1) \geq n(S, t) \cdot \frac{f(S, t)}{f(t)} \cdot \left[ 1 - p_c \cdot \frac{\delta(S)}{k - 1} - p_m \cdot o(S) \right] \quad (9.19)$$

Se poate da acum enunțul teoremei schemelor, teorema fundamentală a algoritmilor genetici datorată lui Holland (1975):

**Teorema 6** (Teorema schemelor). *Schemele scurte, de ordin mic, cu valoare peste medie cresc ca număr de reprezentanți în decursul generațiilor.*

S-a formulat următoarea ipoteză:

**Ipoteza blocurilor de construcție**, [15]. Un algoritm genetic execută un proces de căutare prin suprapunerea unor scheme scurte, de ordin mic și de valoare mare, numite blocuri de construcție. Se poate arăta că pentru o populație de  $n$  cromozomi, numărul de scheme efectiv procesate este în ordinul lui  $n^3$ , ceea ce dă caracter de paralelism implicit al algoritmilor genetici: se procesează nu doar o singură schemă, ci mai multe.

## 9.4 Problema reprezentării datelor în algoritmii genetici

Reprezentarea indivizilor ca șiruri de biți este nenaturală pentru multe probleme practice. Să presupunem, de exemplu, problema comis-voiajorului: fiind date  $n$  orașe și distanțele dintre ele, să se determine un tur al lor, astfel încât fiecare oraș să fie vizitat exact o singură dată, să se revină la orașul de plecare iar costul total al drumului să fie minim<sup>5</sup>. O soluție este dată ca o permutare a mulțimii  $\{1, \dots, n\}$ .

Pentru cazul  $n = 20$ , dacă folosim reprezentarea binară, putem vedea că cinci biți sunt suficienți pentru a reprezenta orice număr de la 1 la 20, deci ar trebui să folosim  $20 \cdot 5 = 100$  de biți pentru reprezentarea unei soluții potențiale. Să presupunem că la un moment dat avem grupul de 5 biți 01101 reprezentând orașul cu numărul 13; prin aplicarea mutației este posibil să se ajungă la valoarea binară 11101, adică în zecimal 29, un oraș care nu există. S-ar obține deci o valoare invalidă datorată unei reprezentări neadecvate a elementelor din problemă sau a unor operatori care nu sunt adaptați corespunzător. La fel de bine, se poate ca prin mutație sau încrucișare să se obțină valori de orașe repetate, deci un ciclu prematur.

Pentru cei 100 de biți asociați problemei, spațiul de căutare realizat este  $2^{100} \simeq 10^{30}$ , în timp ce mulțimea tuturor ciclurilor hamiltoniene este – considerând primul oraș ca fiind fixat și neconsiderând soluțiile simetrice de

<sup>5</sup>În termeni de grafuri: se cere determinarea unui ciclu Hamiltonian de lungime minimă.

forma  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \equiv A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  – mulțimea permutărilor cu  $19!/2 < 10^{17}$  elemente. În situația dată deducem că utilizarea unei codificări binare conduce la un spațiu de căutare mărit artificial, existând zone mari din spațiul binar care nu corespund unor soluții viabile.

Alte exemple de probleme aflate în aceeași situație pot fi încă date; se ajunge la concluzia că varianta naivă de reprezentare a valorilor și a operatorilor genetici nu se potrivește neapărat la orice problemă de căutare. Modelarea unui individ și a operatorilor asociați trebuie să se facă ținând cont de domeniu și de particularitățile problemei. Vor fi exemplificate codificări adecvate pentru câteva probleme clasice.

O altă problemă care trebuie tratată este: cum procedăm când există constrângeri? De exemplu, dacă vrem să maximizăm funcția:

$$f(x, y) = x^2 - y^3 + 2 \cdot x \cdot \sin(y) \quad (9.20)$$

cu condiția ca variabilele  $x$  și  $y$  să satisfacă constrângerea:

$$1 \leq x^3 - \cos(y) + y^2 \leq 5 \quad (9.21)$$

cum încorporăm restricția în algoritmul genetic? Dacă folosim varianta clasică de codificare a unui individ, împreună cu operatorii de încrucișare și de mutație prezenți, cum asigurăm faptul că operatorii dați nu duc indivizii în zone în care constrângerea (9.21) nu este îndeplinită?

Pentru această din urmă problemă s-au dat următoarele variante:

1. impunerea de penalizări pentru indivizii care încalcă constrângerile;
2. implementarea unei metode de “reparare” a indivizilor care nu satisfac constrângerile;
3. implementarea unor operatori de încrucișare și de mutație care păstrează indivizii în condițiile impuse.

Pe marginea fiecăreia din cele trei variante există multiple versiuni:

- pentru penalizări, valoarea acestora poate fi constantă, sau să varieze cu gradul în care se încalcă constrângerile date; această ultimă variantă poate fi codificată sub forma unei funcții logaritmice, liniare, pătratică etc. O formă extremă de penalizare este eliminarea indivizilor care încalcă restricțiile, dar trebuie dat răspuns la întrebarea: cu ce se umple locul lăsat gol prin eliminare? sau cumva se permite populației de dimensiune variabilă? cei mai mulți autori afirmă că această eliminare este prea dură, în timp ce menținerea unor indivizi penalizați oferă variabilitate populației – se pot produce descendenți valizi, chiar și din cei care nu respectă constrângerile.



- pentru algoritmii de reparare – este posibil să se integreze cunoștințe din domeniu în metodele de corecție; trebuie zis însă că elaborarea unui algoritm de corecție poate uneori să fie o problemă la fel de grea ca și rezolvarea problemei de la care s-a plecat.
- pentru ultima variantă – este cunoscut deja că orice tip de date trebuie să vină cu un set de operatori dedicați care să permită prelucrarea tipurilor; o codificare potrivită a problemei împreună operatorii asociați trebuie să favorizeze (ideal: să garanteze) generarea de indivizi valizi. Aici se intervine cu cunoștințe despre problema care trebuie rezolvată, cunoștințe care, prin implementare, favorizează obținerea de indivizi care nu încalcă (prea mult, sau deloc) restricțiile;

Pentru fiecare din abordări s-au studiat variante și comportamente; studiul s-a făcut în mare măsură empiric, pe probleme concrete; la ora actuală, un rezultat precum teorema schemei este inexistent pentru alte codificări decât cea binară. Desigur, se poate folosi și o combinație a celor trei variante de mai sus.

Pentru numeroase probleme practice s-a constatat experimental că reprezentarea adecvată a indivizilor, împreună cu definirea unor operatori particularizați și cele 3 metode de mai sus dau rezultate mai bune decât aplicarea *ad literam* a algoritmului genetic peste o formă binarizată a problemei.

Vom exemplifica pentru problema discretă a rucsacului: se dă un rucsac de capacitate  $C$ , un set de  $m$  obiecte având greutatea  $G_i > 0$  și valorile asociate  $V_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Un obiect poate fi luat doar în întregime în rucsac; problema este: care sunt obiectele care trebuie încărcate, astfel încât greutatea totală să nu depășească  $C$  iar valoarea cumulată să fie maximă?

Problema este NP-completă, deci la ora actuală nu cunoaștem un algoritm de complexitate polinomială care să o rezolve. Multe probleme pot fi reduse la aceasta, de aici interesul acordat.

O reprezentare naturală a unui individ – respectiv încărcare de rucsac – este un vector  $\mathbf{x}$  cu elementele  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $x_i \in \{0, 1\}$ , valoarea 0 însemnând că obiectul nu este luat, iar 1 – că e adăugat în rucsac. Se impune, evident, condiția de viabilitate a unui vector  $\mathbf{x}$ :

$$\sum_{i=1}^m x_i \cdot G_i \leq C$$

iar funcția de maximizat – numită și profit în acest caz – este:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m x_i \cdot V_i$$

### 9.4.1 Varianta cu penalizare

Pentru fiecare individ  $\mathbf{x}$  se va considera valoarea sa  $val(\mathbf{x})$ :

$$val(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m x_i \cdot V_i - Pen(\mathbf{x})$$

unde  $Pen(\cdot)$  este funcția de penalizare:

$$Pen(\mathbf{x}) \begin{cases} = 0, & \text{dacă } \mathbf{x} \text{ este viabil} \\ > 0, & \text{dacă } \mathbf{x} \text{ nu este viabil} \end{cases}$$

Dacă valoarea funcției de penalizare depinde de gradul în care se face încălcarea restricțiilor – gradul de încălcare poate fi de exemplu de diferența dintre  $\sum_{i=1}^m x_i \cdot G_i$  și  $C$  – atunci se poate folosi o funcție de tip logaritmic, liniar, pătratic, exponențial etc. Efectele alegerii unei asemenea funcții au fost analizate pe diferite situații; a se vedea [15] pentru rezultate experimentale și interpretarea lor.

### 9.4.2 Varianta cu reparare

Putem folosi aici tot codificarea binară. Algoritmul de corectare este simplu: dacă setul de obiecte ales depășește ca greutate totală capacitatea  $C$ , atunci se scot obiecte până când greutatea celor rămase devine acceptabilă (cel mult  $G$ ). Vom transforma deci vectorul  $\mathbf{x}$  în  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_m)$  astfel încât  $\sum_{i=1}^m x'_i G_i \leq C$ .

Algoritmul de reparare a unui individ este:

Listing 9.1: Repararea unui vector invalid

```
function reparare( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $C$ ) returns a vector
begin
  rucsac-supraincarcat := false
   $\mathbf{x}' := \mathbf{x}$ 
  if  $\sum_{i=1}^m x'_i \cdot G_i > C$ 
    then rucsac-supraincarcat := true
  end if
  while rucsac-supraincarcat = true
    i := selecteaza un obiect din rucsac (#)
    scoate obiectul i din rucsac:  $x'_i := 0$ 
    if  $\sum_{i=1}^m x'_i \cdot G_i \leq C$ 
      then rucsac-supraincarcat := false
    end if
  end while
  return  $\mathbf{x}'$ 
end
```

În ce privește metoda de selectare a lui  $i$  din linia marcată cu (#), avem variantele:

- (reparare aleatoare) valoarea  $i$  se alege aleator din setul indicilor obiectelor care se găsesc în rucsac;
- (reparare greedy) se alege obiectul cel mai ușor, sau cel care are raportul  $P_i/G_i$  cel mai mic.

### 9.4.3 Codificarea adecvată a indivizilor

Vom prezenta o strategie de codificare a indivizilor, diferită de cea binară utilizată până acum, numită reprezentarea ordinală. Codificarea este larg utilizată și în alte probleme care presupun manipularea unor secvențe de valori, de exemplu în problema comis-voiajorului. Vectorul  $\mathbf{x}$  este cu cele  $m$  componente în baza 10, fiecare element  $x_i$  având proprietatea că  $1 \leq x_i \leq m - i + 1$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ . De exemplu, pentru vectorul  $\mathbf{x} = (3, 3, 4, 1, 1, 1)$  asociat listei de obiecte  $L = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ , decodificarea se obține astfel: se scoate elementul de indice  $x_1 = 3$  din lista  $L$ , adică obiectul 3 și îl adăugăm în rucsac;  $L$  devine  $(1, 2, 4, 5, 6)$ ; apoi se scoate elementul de indice  $x_2 = 3$  (adică obiectul 4) din  $L$  și îl adăugăm în rucsac,  $L$  devine  $(1, 2, 5, 6)$ ; se scoate elementul de indice  $x_3 = 4$  din  $L$ , adică obiectul 6,  $L$  devine  $(1, 2, 5)$  etc. Obținem astfel ordinea de depunere în rucsac: 3, 4, 6, 1, 2, 5. Fiecare cromozom codifică astfel o ordine de adăugare a obiectelor în rucsac. Adăugarea obiectului în rucsac se face numai dacă nu duce la depășirea capacității  $C$ .

Se poate vedea că operație de încrucișare va duce întotdeauna la copii valizi, adică pentru un copil  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$  avem că  $1 \leq z_i \leq m - i + 1$  dacă și părinții au aceeași proprietate. Mutația este similară cu cea de la cazul binar: o componentă aleasă pentru mutație, fie ea  $x_i$  este modificată cu o valoare aleatoare uniform distribuită în mulțimea  $\{1, \dots, m - i + 1\}$  diferită de  $x_i$ .

Listing 9.2: Utilizarea codificării ordinale

```
procedure decodificare( $\mathbf{x}$ )
begin
  construiește o lista  $L$  de obiecte
  greutateTotala := 0
  profitTotal := 0
  for  $i = 1, m$ 
     $j := x_i$ 
     $o := L_j$ 
    sterge elementul al  $j$ -lea din lista  $L$ 
    if greutateTotala +  $G_o \leq C$ 
      then begin
```

```

    greutateTotala := greutateTotala +  $G_o$ 
    profitTotal := profitTotal +  $P_o$ 
  end
end if
end for
end

```

Lista  $L$  se poate crea într-o ordine aleatoare, ca o permutare a mulțimii  $\{1, \dots, n\}$ . Indivizii rezultați — adică cei care realizează populația inițială — vor fi deci generați aleatori.

Rezultate experimentale pentru cele trei variante de rezolvare sunt date în [15]. Concluziile experimentelor însă nu pot fi generalizate la orice problemă care vine cu impunere de restricții. Se exemplifică însă că diferențele de performanță pot fi mari pentru aceste abordări.

## 9.5 Exemplu: problema orarului

Problema orarului este o altă situația practică care se abordează prin intermediul algoritmilor genetici. Problema este NP-completă. Are diferite enunțuri, vom prezenta varianta dată în [15].

Se dau următoarele:

- o mulțime de profesori  $\{T_1, \dots, T_m\}$
- o listă de intervale de timp (ore)  $\{H_1, \dots, H_n\}$
- o listă de săli de clasă  $\{C_1, \dots, C_k\}$

Orarul *trebuie* să respecte următoarele cerințe:

- există un număr predefinit de ore pentru fiecare profesor și clasă;
- la un moment dat, la o clasă predă un singur profesor;
- un profesor nu poate predă la mai multe clase simultan;
- la fiecare clasă programată la o anumită oră trebuie să existe exact un profesor

Mai avem și constrângeri care *ar trebui* respectate; acestea sunt legate de:

- nicio “fereastră” în orarul elevilor, cât mai puține în cel al profesorilor;
- preferințe exprimate de profesori sau elevi: ore doar într-o anumită parte a zilei sau săptămânii;
- împărțire cât mai echilibrată a orelor;

- număr maxim de ore pe zi pentru elevi/profesor

Codificarea binară pentru această problemă, cu toate că este posibilă, poate apărea drept nenaturală; mai mult decât atât, există riscul ca spațiul de căutare să se mărească artificial, precum la problema comis voiajorului. Putem să codificăm un orar (un individ) ca fiind o matrice  $\mathbf{O}$  cu  $m$  linii și  $n$  coloane, unde liniile corespund profesorilor iar coloanele – orelor disponibile. Fiecare celulă este fie liberă, fie conține o clasă  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Pentru reprezentarea dată, operatorii genetici ar putea fi<sup>6</sup>:

- mutația de ordin  $k$ : se iau 2 secvențe adiacente formate din  $p$  elemente și se interschimbă
- mutația de zile: se iau două zile și se interschimbă între ele
- încrucișare: se pornește de la două orare părinte  $O_1$  și  $O_2$ , se efectuează tăietură pe orizontală sau pe verticală și se face interschimbarea de porțiuni, întocmai ca la cromozomii binari

Este posibil ca să fie nevoie să se intervină cu algoritmi de corecție după aplicarea unor astfel de operatori. Din punct de vedere practic, abordarea prin algoritmi genetici este confirmată ca o metodă funcțională de către mai mulți autori.

---

<sup>6</sup>Dar nimic nu ne împiedică să concepem alți operatori.

## Capitolul 10

# Mulțimi și logică fuzzy

### 10.1 Prezentare generală

Capitolul conține o introducere a logicii fuzzy și mulțimilor fuzzy<sup>1</sup>. Domeniile vizează modelarea incertitudinii din lumea reală, raționamentul aproximativ, imprecizia în exprimare. Majoritatea conceptelor folosite în lumea reală sunt neclare, vagi, ambigue, dar cu toate acestea oamenii operează cu ele foarte bine.

Termenul de “fuzzy” a fost introdus de către Lotfi A. Zadeh, profesor la University of California at Berkley, în lucrarea sa “Fuzzy Sets” [16]. Mulțimile fuzzy – sau mulțimile nuanțate – se bazează pe conceptul de grad de apartenență a unui element la o mulțime; acest grad este un număr din intervalul  $[0, 1]$ , spre deosebire de mulțimile clasice care sunt văzute ca asignând grade de apartenență fie 0, fie 1<sup>2</sup>. Într-o mulțime fuzzy, gradul de apartenență se exprimă printr-o funcție cu valori în intervalul  $[0, 1]$ .

Alături de teoria probabilităților, sistemele fuzzy sunt folosite pentru modelarea incertitudinii. Incertitudinea existentă în ceea ce privește rezultatul aruncării unui zar este modelată prin variabile aleatoare - urmărindu-se determinarea probabilităților asociate diferitelor valori, sau comportamentul obținut prin repetarea experimentelor etc. Tipul de incertitudine pe care îl abordează sistemele fuzzy este însă diferit. De exemplu, propoziția “Maria este destul de înaltă” nu are o incertitudine de tip statistic în ea: nu este vorba de evenimente aleatoare repetate sau condiționări probabiliste. Caracterul vag al unui sistem este o caracteristică intrinsecă a sa; ea nu este dată în vreun fel de observații repetate sau încrederea în legătura dintre o stare cunoscută și una posibil influențată de ea.

---

<sup>1</sup>Fuzzy: vag, neclar; în acest context este tradus în limba română și ca “nuanțat”.

<sup>2</sup>Se poate face o paralelă cu funcția caracteristică definită pentru o submulțime  $A$  a lui  $X$ :

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \in X \setminus A \end{cases}$$

Insistând pe direcția aceasta, putem afirma că modul în care se enunță regulile de producție bazate pe logica tradițională:

**Daca A atunci B**

este aplicabil doar pentru cazul în care caracterul vag lipsește cu desăvârșire, de exemplu în matematică. Totuși, considerând regula: “Dacă e înnorat, atunci va ploua” realizăm că enunțul este vag, cel puțin din cauza următoare: noțiunea de înnorat este vagă – rareori cerul este în totalitate acoperit de nori; vorbim de “parțial înnorat” sau “un pic înnorat” sau “foarte înnorat” și niciunul din acești termeni nu are o caracterizare clară; dacă nu luăm în considerare aceste nuanțe, atunci regula anterioară ar fi utilizabilă doar pentru cazul în care cerul e complet acoperit de nori. Chiar și “ploaia” poate fi nuanțată – picură, plouă torențial etc.

Logica fuzzy este asociată deci cu incertitudinea nestatistică. Trăsătura esențială a teoriei mulțimilor și a logicii fuzzy este manipularea riguroasă a incertitudinii. Se pun la dispoziție modalități de definire, descriere și analiză a caracteristicilor vagi.

## 10.2 Teoria mulțimilor fuzzy

În teoria clasică a mulțimilor, un element fie face parte dintr-o mulțime, fie nu. În mulțimile fuzzy însă, apartenența la o mulțime se exprimă printr-un grad de apartenență, pentru care valoarea este un număr cuprins între 0 și 1. Putem vedea aceasta ca o generalizare a mulțimilor clasice: dacă un element aparține unei mulțimi clasice, atunci valoarea funcției de apartenență este 1, altfel 0 - de fapt, funcția caracteristică a unei mulțimi.

Să considerăm de exemplu mulțimea oamenilor înalți. Evident, putem spune că o persoană care are înălțimea de 2.10 metri face parte din această mulțime. La fel se poate spune și despre un om cu înălțimea de 2 m sau de 1.90 m; putem nuanța aici faptele, spunând că ultimele două persoane aparțin într-o măsură mai mică acestei mulțimi. O persoană de 1.60 m sau mai puțin nu mai poate fi considerată ca făcând parte din mulțimea oamenilor înalți. Soluția schițată aici este asignarea unor grade de apartenență la o mulțime pentru elementele în discuție. Să considerăm tabelul 10.1 în care pentru diferite exemple de înălțimi vom specifica gradul de apartenență la mulțimea considerată. Mulțimea oamenilor înalți este considerată din acest moment o mulțime fuzzy (nuanțată).

Observăm că o mulțime fuzzy se poate specifica prin perechi de elemente de grad de apartenență/element. O notație mai compactă pentru tabelul 10.1 este:

$$\hat{\text{Inalt}} = \{1/2.10, 0.8/2, 0.6/1.90, 0.4/1.80, 0.2/1.70, 0/1.60\}$$

Persoană	Înălțime	Grad de apartenență
A	2.10 m	1
B	2 m	0.8
C	1.90 m	0.6
D	1.80 m	0.4
E	1.70 m	0.2
F	1.60 m	0.0

Tabelul 10.1: Înălțimi și gradul de apartenență la mulțimea fuzzy a oamenilor înalți.

Valorile extreme 0 și 1 se pot interpreta astfel: dacă  $\mu_A(x) = 1$  atunci spunem că  $x$  cu certitudine aparține lui  $A$ , dacă  $\mu_A(x) = 0$  atunci  $x$  cu certitudine nu aparține lui  $A$ .

O altă variantă este specificarea unei funcții de apartenență  $\mu_A(x)$ , unde  $\mu_A$  este o funcție cu valori în intervalul  $[0, 1]$ ,  $A$  este o mulțime fuzzy,  $x$  este un element din universul discursului pentru care se stabilește gradul de apartenență la mulțimea  $A$ . Astfel,  $\mu_{\text{Înalt}}(2.10 \text{ m}) = 1$ ,  $\mu_{\text{Înalt}}(1.90 \text{ m}) = 0.6$  etc.

Funcțiile de apartenență se pot reprezenta grafic, pe axa orizontală fiind valori ale elementelor, iar pe verticală valoarea funcției de apartenență, precum în figurile 10.1 sau 10.2.

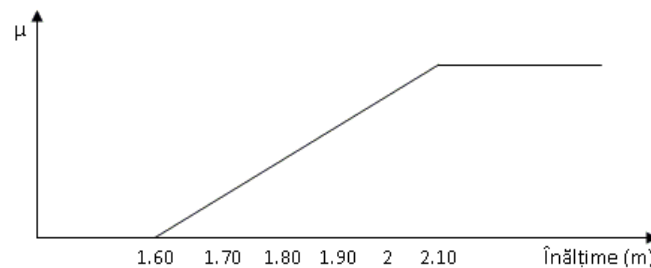


Figura 10.1: Reprezentarea grafică a funcției de apartenență pentru mulțimea “Înalt”

Formele poligonale date în graficele din figura 10.1 și 10.2 nu sunt singurele care se pot folosi. Se poate de exemplu utiliza o funcție de tip Gaussian pentru modelarea gradului de apartenență:

$$\mu_{\text{Cald}}(T) = e^{-\frac{(T-25)^2}{50}}$$

unde  $T$  este temperatura exprimată în grade Celsius. Totuși, funcțiile formate cu porțiuni liniare sunt mai ușor de calculat și în practică au un comportament bun. Din rațiuni evidente, spunem că funcția din figura 10.2 este triunghiulară.



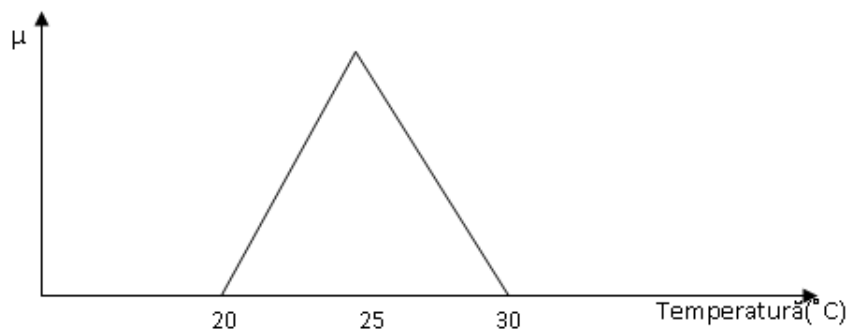


Figura 10.2: Reprezentarea grafică a funcției de apartenență pentru mulțimea “cald”

În sistemele fuzzy un element poate să aparțină la două mulțimi fuzzy, simultan. De exemplu, o persoană cu înălțimea de 1.75 metri face parte din mulțimea oamenilor înalți în măsura 0.3<sup>3</sup> și totodată aparține mulțimii oamenilor de înălțime medie în măsura 0.45 - a se vedea graficele din figura 10.3. Remarcăm că noțiunile nu se exclud reciproc.

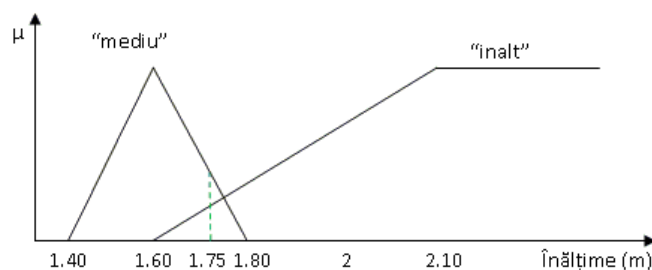


Figura 10.3: Valorile fuzzy “Mediu” și “Înalt” reprezentate pe același grafic

### 10.3 Operații cu mulțimi fuzzy

Răționamentul presupune operații logice; o mare parte din noțiunile și operațiile din algebra booleană au fost preluate și adaptate la logica fuzzy.

Înainte de a defini aceste operații, este cazul să enumerăm două paradoxuri din logica binară:

1. (Paradoxul mincinosului, paradoxul cretanului) O persoană spune: “eu mint”. Dacă presupunem că această propoziție este adevărată, atunci înseamnă că spusele persoanei sunt false, deci de fapt ea nu minte,

<sup>3</sup>Valoarea exactă se află intersectând o dreaptă verticală care trece prin valoarea 1.75 de pe abscisă cu graficul funcției de apartenență.

ceea ce e o contradicție cu presupunerea inițială. Dacă presupunem că afirmația persoanei este falsă, atunci înseamnă că dimpotrivă, persoana nu minte, deci din nou contradicție cu presupunerea noastră. Oricare din cele două valori de adevăr am vrea să asociem afirmației “eu mint”, ajungem la o contradicție. Ori, cum doar una din valorile Adevărat și Fals pot fi asociate unei propoziții<sup>4</sup>, avem un paradox.

2. (Paradoxul bărbierului) Într-un sat există un bărbier care barbiereste pe toți bărbații care nu se barbieresc singuri. Care este valoarea de adevăr a propoziției “Bărbierul se barbiereste singur”? Printr-un procedeu asemănător cu cel anterior, se ajunge la concluzia că niciuna din cele două valori de adevăr nu pot fi asociate propoziției, pentru că s-ar ajunge la contradicție.

Aceste probleme sunt rezolvate de către logica fuzzy, putându-se da valori de adevăr pentru propozițiile discutate. Intuitiv, pentru ambele afirmații am putea spune că ele sunt tot atât de adevărate pe cât sunt de false.

Vom trece acum la definirea operațiilor pentru mulțimi fuzzy. Definițiile îi aparțin lui Zadeh.

### 10.3.1 Egalitatea mulțimilor fuzzy

În teoria clasică a mulțimilor, două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elemente. Pentru că o mulțime fuzzy înseamnă elemente cu grad de apartenență la ea, spunem că două mulțimi fuzzy sunt egale dacă pentru domenii de valori identice au exact aceleași valori ale funcțiilor de apartenență.

### 10.3.2 Incluziunea mulțimilor fuzzy

În teoria clasică a mulțimilor, o mulțime  $A$  este o submulțime a mulțimii  $B$  dacă orice element din  $A$  se găsește și în  $B$ . Pentru cazul mulțimilor fuzzy, folosim următorul exemplu ca suport intuitiv pentru definirea incluziunii: mulțimea oamenilor foarte înalți este inclusă în mulțimea oamenilor înalți. Evident, pentru un element  $x$  pentru care  $\mu_{\text{foarte înalt}}(x) = m$ , valoarea asociată lui față de mulțimea oamenilor înalți este cel puțin la fel de mare:  $\mu_{\text{înalt}}(x) = m + \varepsilon, \varepsilon \geq 0$ . Ca atare, spunem că mulțimea fuzzy  $A$  este inclusă în mulțimea fuzzy  $B$  dacă cele două mulțimi conțin aceleași elemente și  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x$ . Desigur, și alte definiții sunt posibile.

### 10.3.3 Complementara unei mulțimi fuzzy

În teoria clasică a mulțimilor, complementul unei mulțimi  $A$  este mulțimea formată din toate elementele care nu aparțin lui  $A$ .

---

<sup>4</sup>Conform principiului terțului exclus, a treia variantă nu este posibilă.

Pentru definiția relativ la mulțimi fuzzy, pornim de la un exemplu: considerăm mulțimea oamenilor de înălțime medie, pentru care funcția de apartenență este dată în figura 10.3. Se pune problema: când spunem că o persoană nu este de înălțime medie? Dacă persoana are înălțimea 1.75 m, evident că face parte din mulțimea oamenilor de înălțime medie; dacă are 1.90 m sau 1.80 m, atunci e evident că nu face parte din ea. Pentru o persoană pentru care gradul de apartenență la mulțimea oamenilor de înălțime medie este, să spunem, 0.3, pare rezonabil să spunem că ea nu aparține la această mulțime cu măsura  $1 - 0.3 = 0.7$ . Putem deci defini valoarea de apartenență a complementului mulțimii ca fiind unu minus valoarea de apartenență la mulțime. Desigur, și alte definiții sunt posibile.

Definiția dată contrazice principiul terțului exclus: în logica clasică se spune că ceva fie este A, fie este non-A. Gradul de adevăr pentru afirmațiile discutate în cele două paradoxuri poate fi luat 0.5, deci fiecare propoziție are aceeași valoare de adevăr ca și contrara ei.

### 10.3.4 Intersecția a două mulțimi fuzzy

În varianta clasică, intersecția a două mulțimi este o mulțime formată din elementele comune celor care se intersectează.

Definirea pentru mulțimi fuzzy nu este unică; oricare ar fi varianta folosită, trebuie să se respecte următoarele:

1. operația să fie comutativă:  $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_{B \cap A}(x)$
2. de asemenea, să avem asociativitate:  $\mu_{(A \cap B) \cap C}(x) = \mu_{A \cap (B \cap C)}(x)$
3. monotonie: dacă valoarea funcției de apartenență a unui element la o mulțime scade, atunci valoarea funcției de apartenență pentru mulțimea respectivă intersectată cu o alta nu trebuie să crească.

În practică, cel mai mic grad de apartenență relativ la cele două mulțimi determină gradul de apartenență la intersecție. Varianta de operator de intersecție dată de către Zadeh este:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$$

Se poate arăta ușor că dacă  $A \subset B$ , atunci  $A \cap B = A$ , în sens fuzzy, ceea ce este în concordanță cu ceea ce avem și în teoria clasică a mulțimilor. Desigur, și alte definiții sunt posibile pentru acest operator.

### 10.3.5 Reuniunea a două mulțimi fuzzy

În teoria clasică a mulțimilor, reuniunea a două mulțimi este o mulțime formată din toate elementele care se regăsesc în ele. Pentru definirea relativ la mulțimi fuzzy, se iau în considerare proprietăți similare cu cele de la

intersecție (doar la monotonie apare diferența), iar varianta dată de către Zadeh este:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}$$

Se pot da și alte definiții pentru acest operator.

### 10.3.6 Operatori de compensare

În timp ce operațiile din cadrul teoriei clasice a mulțimilor sunt unic definite, pentru mulțimile fuzzy există și alte posibilități de definire a lor decât cele date mai sus. Operatorii de compensare tratează în special cazul reuniunii și al intersecției de mulțimi fuzzy. Intersecția este des întâlnită în cadrul regulilor fuzzy.

Folosind definiția intersecției dată de Zadeh, valoare funcției de apartenență pentru intersecția a 2 mulțimi fuzzy este controlată de cea mai mică din valorile existente. De exemplu, pentru regula “dacă A și B și C atunci D”, dacă valorile de apartenență ale lui A, B și C sunt respectiv 0.2, 0.8, 0.9, efectul pe care îl are A asupra rezultatului final este prea pronunțat. În practică, definiția intersecției dată de Zadeh nu e întotdeauna adecvată.

S-au definit mai mulți operatori de compensare. Ei formulează răspunsuri la întrebarea: cât de mult poate să compenseze creșterea unor variabile valorile mici ale altora? Vom prezenta două variante ale acestor operatori: operatorul de medie și operatorul gama.

Prin operatorul de medie se stabilește că valoarea funcției de apartenență este media valorilor individuale:

$$\mu_{X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{X_i}(x)}{n}$$

Operatorul gama este mai complex și pare să reprezinte mai bine procesul de decizie umană decât definițiile lui Zadeh. El este definit ca:

$$\mu_\gamma = \left( \prod_{i=1}^n \mu_i \right)^{1-\gamma} \cdot \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mu_i) \right)^\gamma$$

unde  $0 \leq \gamma \leq 1$ , iar  $n$  este numărul de valori fuzzy implicate în intersecție. În practică, cel mai frecvent valorile lui  $\gamma$  sunt între 0.2 și 0.4.

## 10.4 Reguli fuzzy

Regulile clasice au forma următoare:

$$\text{Dacă } A_1 \text{ și } A_2 \text{ și } \dots \text{ și } A_n \text{ atunci } C$$

unde “ $A_1$  și  $A_2$  și  $\dots$  și  $A_n$ ” se numește antecedent sau premisă iar  $C$  este consecvent sau consecință sau concluzie. De exemplu:

*Dacă înălțimea bărbatului este mai mare de 1.80 m, atunci masa lui este mai mare de 50 kg.*

Regulile fuzzy păstrează această formă generală, dar pot să apară diferențe pe partea de consecvent. Cele două variante des folosite sunt datorate lui Mamdani:

*Dacă  $X_1$  este  $A_1$  și ... și  $X_n$  este  $A_n$  atunci  $Y$  este  $B$*

și respectiv lui Takagi, Sugeno și Kang:

*Dacă  $X_1$  este  $A_1$  și ... și  $X_n$  este  $A_n$  atunci  $Y = p_0 + p_1X_1 + \dots + p_nX_n$*

unde  $X_i$  sunt variabile fuzzy de intrare,  $A_i$  sunt mulțimi fuzzy peste variabilele  $X_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $Y$  este o variabilă fuzzy de ieșire,  $B$  este o mulțime fuzzy definită peste valorile lui  $Y$  iar  $p_j$  sunt coeficienți reali ( $0 \leq j \leq n$ ).

Pentru probleme de clasificare există următoarea formă de regulă:

*Dacă  $X_1$  este  $A_1$  și ... și  $X_n$  este  $A_n$  atunci  $Y$  face parte din clasa  $i$  în măsura  $GC_i$ .*

Nuanțarea<sup>5</sup> este pasul prin care se combină valorile din antecedentul unei reguli, folosind operațiile cu mulțimi fuzzy; pasul se aplică pentru fiecare regulă în parte. Prin combinarea regulilor date la pas de denuanțare se obține o ieșire care poate fi folosită ca rezultat inferențial sau ca indicație de control al unui sistem.

Exemplificarea acestor reguli se face pentru cazul unei centrale de încălzire, pentru care sunt date niște reguli privind reglarea debitului de gaz astfel încât să se obțină o temperatură potrivită. Se pleacă de la reguli în care se folosesc noțiuni vagi (temperatură potrivită, variație mare, mărește debitul etc.) și se obține o indicație pentru regulatorul de gaz.

Vom considera că avem valori de intrare precum temperatura interioară (notată *TempIn*), cea exterioară (*TempExt*), modificarea de temperatură interioară în ultimele 5 minute (*DeltaTempIn*); ca valoare de ieșire avem *ModificareDebit*. Fiecare valoare de intrare concretă va avea un grad de apartenență fuzzy la diferite mulțimi (de exemplu, pentru *TempIn* avem apartenență la mulțimi precum *rece*, *confortabil* etc.

Pentru valoarea *TempIn* avem trei mulțimi fuzzy: *rece*, *confortabil*, *prea cald*. Pentru *TempExt* avem mulțimile fuzzy *foarte rece*, *rece*, *cald*, *foarte cald* și *fierbinte*. Pentru *DeltaTempIn* definim mulțimile fuzzy: *larg negativ*, *mic negativ*, *aproximativ zero*, *pozitiv mic*, *larg pozitiv*<sup>6</sup>, iar pentru *ModificareDebit* avem seturile fuzzy *scade mult*, *scade puțin*, *nu schimbă*, *crește puțin*, *crește mult*.

Vom considera doar câteva reguli, suficiente pentru exemplificarea nuanțării și denuanțării:

**Regula 1:** *Dacă  $TempIn$  este confortabilă și  $DeltaTempIn$  este aproximativ zero, atunci  $ModificareDebit$  este nu schimbă;*

<sup>5</sup>În original: fuzzyfication.

<sup>6</sup>“Mic” și “larg” se referă la valorile absolute ale cantităților măsurate.

**Regula 2:** Dacă  $TempExt$  este rece și  $DeltaTempIn$  este mic negativ, atunci  $ModificareDebit$  este crește puțin;

**Regula 3:** Dacă  $TempIn$  este prea cald și  $DeltaTempIn$  este larg pozitivă, atunci  $ModificareDebit$  este scade mult;

**Regula 4:** Dacă  $TempIn$  este rece și  $DeltaTempIn$  este aproximativ zero, atunci  $ModificareDebit$  este crește puțin.

Pentru  $TempIn$ , mulțimea *confortabil* se definește ca  $\{0/15^\circ, 1/21^\circ, 0/27^\circ\}$ , interpretată ca o funcție de apartenență de tip triunghiular. De exemplu, pentru  $18^\circ$  și  $24^\circ$  gradele de apartenență sunt ambele 0.5. Pentru *rece* avem mulțimea fuzzy  $\{1/10^\circ, 1/16^\circ, 0/21^\circ\}$ , iar *prea cald* este mulțimea  $\{0/21^\circ, 1/27^\circ, 1/33^\circ\}$ .

Pentru  $DeltaTempIn$ :

$$\begin{aligned} negativ\ mic &= \{0/-4^\circ, 1/-2^\circ, 0/0^\circ\} \\ aproape\ zero &= \{0/-2^\circ, 1/0^\circ, 0/+2^\circ\} \\ larg\ pozitiv &= \{0/2^\circ, 1/4^\circ, 1/6^\circ\} \end{aligned}$$

Pentru  $TempExt$ ,  $rece = \{0/-1^\circ, 1/10^\circ, 0/21^\circ\}$ .

Să presupunem că temperatura interioară este de  $20^\circ$ , diferența de temperatură din ultimele 5 minute este  $-1.5^\circ$  iar temperatura exterioară este de  $11^\circ$ .

Conform mulțimilor fuzzy date anterior, avem:

- pentru  $TempIn$ ,  $\mu_{rece}(20^\circ) = 0.25$ ,  $\mu_{confortabil}(20^\circ) = 0.75$ ,  $\mu_{prea\ cald}(20^\circ) = 0$ ;
- pentru  $DeltaTempIn$ ,  $\mu_{mic\ negativ}(-1.5^\circ) = 0.80$ ,  $\mu_{aproximativ\ zero}(-1.5^\circ) = 0.20$ ,  $\mu_{larg\ pozitiv}(-1.5^\circ) = 0$
- pentru  $TempExt$ ,  $\mu_{rece}(11^\circ) = 0.90$

Aplicăm aceste valori celor 4 reguli fuzzy de mai sus. Ținem cont de faptul că antecedentele din reguli sunt exprimate cu conjuncție, corespunzătoare intersecției de mulțimi, ceea ce în logica fuzzy se implementează prin funcția min. Obținem:

**Regula 1:**  $\min\{0.75, 0.20\} = 0.20 = \mu_{nu\ schimba}(ModificareDebit)$

**Regula 2:**  $\min\{0.90, 0.80\} = 0.80 = \mu_{creste\ putin}(ModificareDebit)$

**Regula 3:**  $\min\{0, 0\} = 0 = \mu_{scade\ mult}(ModificareDebit)$

**Regula 4:**  $\min\{0.25, 0.20\} = 0.20 = \mu_{creste\ putin}(ModificareDebit)$

Activarea acestor reguli se face în paralel. Observăm că pentru regula a treia ieșirea este zero, deci ea nu se va aplica. Din regulile 2 și 4 avem două valori pentru apartenența  $\mu_{crește puțin}(ModificareDebit)$ ; se va lua maximul celor două valori, deci  $\mu_{crește puțin}(ModificareDebit) = 0.8$ .

Variația de debit este modelată la rândul ei fuzzy, așa cum se arată în figura 10.4.

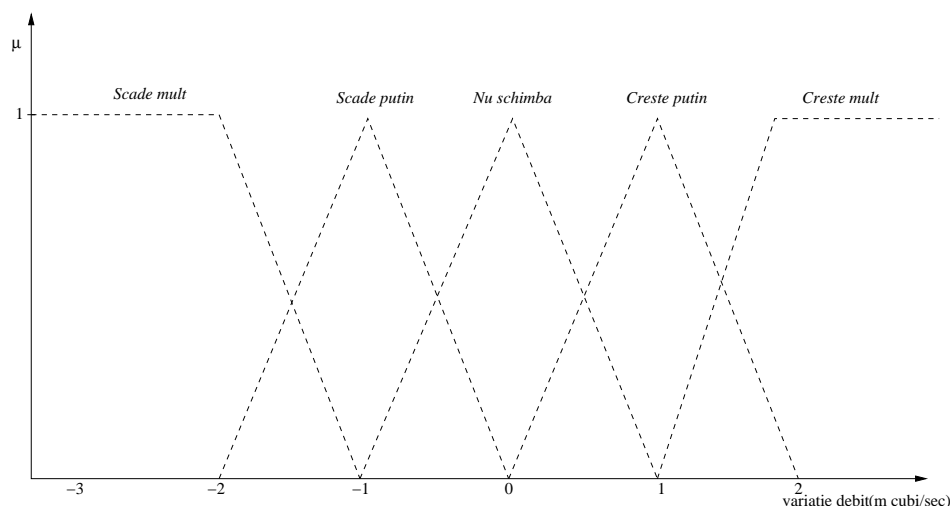


Figura 10.4: Mulțimi fuzzy pentru debitul de gaz

Denuanțarea este operația prin care se obține un răspuns concret la problemă, adică se furnizează o valoare exprimată în metri cubi pe secundă pentru debitul de gaz. Plecând de la graficul anterior, se trasează conturul mărginit de orizontalele  $y = 0.2$  - pentru *nu schimbă* - și  $y = 0.8$  - pentru *crește puțin*. Se obține figura geometrică desenată cu linie continuă în figura 10.5, pentru care se determină centrul de greutate; verticala dusă prin acest centru de greutate intersectează axa debitului la valoarea  $+0.76$ , aceasta fiind indicația dată regulatorului de gaz: crește cu  $0.76 \text{ m}^3/\text{s}$  debitul de gaz.

Există mai multe metode care se pot folosi pentru denuanțare; a se vedea [4] pentru detalii.

## 10.5 Măsuri ale gradului de nuanțare

În cazul unei mulțimi fuzzy se poate pune întrebarea: cât este ea de nuanțată? Pentru o mulțime fuzzy discretă, se pot introduce câteva măsuri care cuantifică gradul de nuanțare. Acestea au ca scop măsurarea gradului de incertitudine, care apare, de exemplu, în cazul exprimării vagi. În continuare, prezentarea merge pe exemplele din [4].

Dacă considerăm mulțimea peștilor, atunci pentru diferite elemente de mai jos avem gradele exprimate:  $\mu_{pești}(biban) = 1.0$ ,  $\mu_{pești}(peștisor auriu) = 1.0$ ,

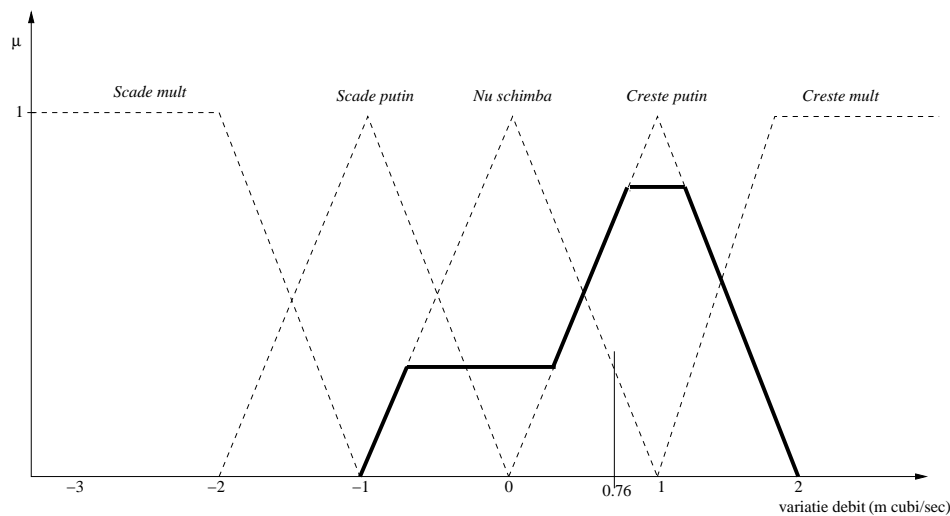


Figura 10.5: Procesul de denuanțare.

$\mu_{pești}(c\acute{a}lu\text{ț de mare}) = 0.8$ ,  $\mu_{pești}(balen\acute{a}) = 0.0$ . Pentru mulțimea fuzzy *flori*, gradul de apartenență ar putea fi:  $\mu_{flori}(trandafir) = 1.0$ ,  $\mu_{flori}(p\grave{a}ine) = 0.0$ ,  $\mu_{flori}(lemn\ c\acute{a}inesc) = 0.5$ . Intuitiv, putem spune c\^a mulțimea de flori exemplificat\^a este mai vag\^a dec\^at mulțimea peștilor: \^n ultimul caz, valorile de apartenență sunt mai apropiate de cele ale unei funcții de apartenență din cazul unei mulțimi clasice, 0 și 1.

Se preia din fizic\^a și din teoria informației noțiunea de *entropie*, care m\^asoar\^a gradul de dezorganizare a unui sistem. Spre deosebire de teoria informației unde m\^asura entropiei este unic determinat\^a<sup>7</sup>, \^n teoria mulțimilor fuzzy sunt mai multe variante acceptate. Se pleac\^a de la o sum\^a de propriet\^ați pe care ar trebui s\^a le respecte o astfel de m\^asur\^a entropic\^a și se introduc mai multe funcții care respect\^a o parte sau toate aceste propriet\^ați. De exemplu, pentru o mulțime clasic\^a, din care un element fie face parte, fie nu, m\^asura gradului de nuanțare ar trebui s\^a dea rezultatul 0 - *i.e.* o mulțime clasic\^a nu este vag\^a. De asemenea, cu c\^at sunt mai multe valori pentru care valoarea funcției de apartenență este 0.5 sau apropiat\^a de aceasta, cu at\^at mulțimea este mai vag\^a: un element care aparține cu m\^asura 0.5 la o mulțime fuzzy face și nu face parte din mulțimea dat\^a \^n aceeași m\^asur\^a.

\^nainte de a da diferite variante de m\^asurare a gradului de nuanțare, se introduce noțiunea de “mulțime mai clar\^a”, ce exprim\^a relația \^ntre dou\^a mulțimi fuzzy: spunem c\^a o mulțime  $S^*$  este *mai clar\^a* dec\^at o alt\^a mulțime fuzzy  $S$  – ambele definite peste același univers al discursului – dac\^a  $\mu_{S^*}(x) \leq \mu_S(x)$  pentru cazul \^n care  $\mu_S(x) < 0.5$  și  $\mu_{S^*}(x) \geq \mu_S(x)$  dac\^a  $\mu_S(x) > 0.5$ ; pentru  $\mu_S(x) = 0.5$  valoarea  $\mu_{S^*}(x)$  poate fi oric\^at.

Propriet\^ațile de mai jos sunt punct de plecare pentru determinarea

<sup>7</sup>Abstracție f\^ac\^and de o constant\^a multiplicativ\^a



diferitelor funcții de măsurare a gradului de nuanțare.

**caracterul exact:**  $H(A) = 0$  dacă și numai dacă  $A$  este o mulțime clasică;

**maximalitatea:**  $H(A)$  este maximă dacă  $\mu_A(x) = 0.5, \forall x$  din universul discursului;

**claritatea:**  $H(A) \geq H(A^*)$  dacă  $A^*$  este mai clară decât  $A$ ;

**simetria:**  $H(A) = H(\overline{A})$ ;

**principiul includerii și excluderii:**  $H(A \cup B) = H(A) + H(B) - H(A \cap B)$

O variantă de funcție de măsurare a gradului de nuanțare, introdusă de DeLuca și Termini și care respectă toate cele 5 proprietăți de mai sus este:

$$H_{DT}(A) = -K \sum_{i=1}^n (\mu_i \log \mu_i + (1 - \mu_i) \log(1 - \mu_i)) \quad (10.1)$$

unde  $K$  este un număr pozitiv oarecare. Varianta introdusă de Pal și Pal este:

$$H_{PP}(A) = K \sum_{i=1}^n (\mu_i e^{1-\mu_i} + (1 - \mu_i) e^{\mu_i}) \quad (10.2)$$

Se pot defini și alte variante de măsurare a gradului de nuanțare a unei mulțimi vagi.

# Bibliografie

- [1] S. S. Haykin, *Neural networks and learning machines*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, third ed., 2009.
- [2] R. Andonie and A. Cațaron, *Inteligență computațională*. Universitatea Transilvania din Brașov, 2002. [http://vega.unitbv.ro/~cataron/Publications/curs\\_rn.pdf](http://vega.unitbv.ro/~cataron/Publications/curs_rn.pdf).
- [3] A. P. Engelbrecht, *Computational Intelligence: An Introduction*. Wiley, 2002.
- [4] R. C. Eberhart and Y. Shi, *Computational intelligence - concepts to implementations*. Elsevier, 2007.
- [5] “Stanford Machine Learning, curs online Coursera.” <https://www.coursera.org/learn/machine-learning>, 2019. Accesat: 2021-02-24.
- [6] K. B. Petersen and M. S. Pedersen, “The matrix cookbook,” 2008. Version 20081110.
- [7] J. Zurada, *Introduction to Artificial Neural Systems*. West Publishing Co., 1992.
- [8] I. Goodfellow, Y. Bengio, and A. Courville, *Deep Learning*. MIT Press, 2016. <http://www.deeplearningbook.org>.
- [9] M. A. Nielsen, *Neural Networks and Deep Learning*. Determination Press, 2018.
- [10] K. He, X. Zhang, S. Ren, and J. Sun, “Delving deep into rectifiers: Surpassing human-level performance on imagenet classification,” in *Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, ICCV ’15, p. 1026–1034, IEEE Computer Society, 2015.
- [11] X. Glorot and Y. Bengio, “Understanding the difficulty of training deep feedforward neural networks,” in *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics* (Y. W. Teh and M. Titterton, eds.), vol. 9 of *Proceedings of Machine Learning Research*, pp. 249–256, PMLR, 13–15 May 2010.

- [12] D. Arthur and S. Vassilvitskii, “k-means++: the advantages of careful seeding,” in *SODA '07: Proceedings of the eighteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, (Philadelphia, PA, USA), pp. 1027–1035, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [13] G. A. Carpenter and S. Grossberg, “The art of adaptive pattern recognition by a self-organizing neural network,” *Computer*, vol. 21, no. 3, pp. 77–88, 1988.
- [14] G. A. Carpenter, S. Grossberg, N. Markuzon, J. H. Reynolds, and D. B. Rosen, “Fuzzy artmap: A neural network architecture for incremental supervised learning of analog multidimensional maps,” *IEEE transactions on neural networks*, vol. 3 5, pp. 698–713, 1992.
- [15] Z. Michalewicz, *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, third ed., 1996.
- [16] L. Zadeh, “Fuzzy sets,” *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338 – 353, 1965.