Лабораторная работа 1.4.1В

ИЗУЧЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы: 1) на примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями; 2) проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения; 3) убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника; 4) оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

В работе используются: металлический стержень; опорная призма; торцевые ключи; закреплённая на стене консоль; подставка с острой гранью для определения цента масс маятника; секундомер; линейки металлические длиной 30, 50 и 100 см; штангенциркуль; электронные весы; математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях).

Введение

Данная работа посвящена изучению погрешностей, возникающих при экспериментальных измерениях. Перед выполнением работы следует ознакомиться с основными понятиями теории погрешности, например, по пособию *П.В. Попов, А.А. Нозик* «Обработка результатов учебного эксперимента» или просмотреть лекции 1–6 соответствующего видео-курса (см. сайт кафедры общей физики http://mipt.ru/education/chair/physics/S_I/lab).

Физическим маятником называют *твёрдое тело*, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешено за одну из своих точек в поле тяжести. Основное отличие физического маятника от математического в том, что маятник не является точечным объектом, а представляет собой совокупность жёстко связанных точечных масс. В данной работе в качестве такого маятника используется тонкий однородный металлический стержень, подвешиваемый в некоторой точке с помощью небольшой опорной призмы (см. рис. 1). Острое ребро призмы, опирающееся на подставку, задаёт *ось качания* (или вращения) маятника.

Понятие о законе вращательного движения и моменте инерции

Закон, описывающий вращательное движение твёрдого тела вокруг *фиксированной* оси, аналогичен второму закону Ньютона. Получим его для простейшего случая точечной массы (общий вывод см., напр., в [2], Гл. 9). Как известно, для динамики движения точечной массы m под действием силы F вдоль некоторой прямой справедливо уравнение

$$F = \frac{dp}{dt},$$

где $p = mv$ — импульс, v — скорость тела. Рассмотрим точечную массу, движущуюся по окружности радиуса r с угловой скоростью ω. Её скорость линейная скорость $v = \omega r$. При вращательном движении определяющую роль играет не сила, а её *момент* относительно оси вращения — произведение силы на её *плечо*, равное в данном случае $M = Fr$. Тогда, умножая уравнение Ньютона с обеих сторон на r, получим следующее уравнение вращательного движения:

$$M = \frac{dL}{dt}, \tag{1}$$

где введены обозначения $L = J\omega$, и $J = mr^2$. Величину $J = mr^2$ называют *моментом инерции* точечного тела. В законе вращательного движения момент инерции играет роль, аналогичную массе тела при поступательном движении. Величину $L = J\omega$, играющую роль «вращательного импульса» называют *моментом импульса* тела.

В случает *твёрдого тела*, состоящего из совокупности точек, моментом инерции называют сумму (или интеграл) по всем точкам данного тела:

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \tag{2}$$

где r_i — расстояние от точки массой m_i до оси вращения. Видно, что момент инерции зависит от массы тела, его формы, а также от положения оси вращения.

Вычислим момент инерции для тонкого стержня длиной l при вращении вокруг перпендикулярной стержню оси, проходящей через его центр масс. Разбивая стержень на отрезки длиной dr и массой $dm = m \cdot \frac{dr}{l}$, находим:

$$J_C = \int_{-l/2}^{l/2} r^2 \cdot dm = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{mr^2}{l} dr = \frac{ml^2}{12}.$$

Если точка подвеса маятника смещена относительно центра масс на расстояние a, то момент инерции проще всего найти по *теореме Гюйгенса–Штейнера** (см. [2], гл. 9.3.5):

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2. \tag{3}$$

* Для стержня формула (3) может быть получена и непосредственным вычислением: $J = \int_{\frac{l}{2}-a}^{\frac{l}{2}+a} r^2 \cdot dm = \frac{m}{3l}\left[\left(\frac{l}{2}+a\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}+a\right)^3\right] = \frac{ml^2}{12} + ma^2.$

В частности, если стержень подвесить за один из концов, то $a = \frac{l}{2}$ и $J = ml^2/3$.

Стержень как физический маятник

Вернёмся к рассмотрению колебаний физического маятника — стержня, подвешенного в поле тяжести (рис. 1). Маятник подвешен в точке O на расстоянии a до центра масс C. При отклонении стержня от вертикального положения равновесия на угол φ возникает момент силы тяжести, стремящийся вернуть стержень в исходное положение. Плечо этой силы, приложенной к точке C, относительно оси подвеса O равно $a\sin\varphi$, поэтому при небольших углах отклонения $\varphi \ll 1$ возвращающий момент равен

$$M = -mga\sin\varphi \approx -mga\varphi. \tag{4}$$

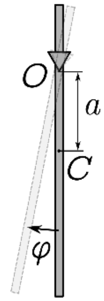

Рис. 1. Стержень как физический маятник

Таким образом, на маятник действует возвращающий момент сил, пропорциональный величине его отклонения от равновесия. Отсюда можно сделать вывод, что при *малых* амплитудах отклонения движение свободного физического маятника будет иметь характер *гармонических колебаний*, аналогично колебаниям груза на пружине или математического маятника.

Чтобы получить формулу периода колебаний физического маятника, воспользуемся аналогией с пружинным маятником, период колебаний которого равен, как известно, $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Здесь роль массы m, как мы уже обсудили, играет момент инерции тела J, а роль коэффициента жёсткости пружины k — коэффициент пропорциональности между моментом силы и величиной отклонения mga. Таким образом, приходим к следующей общей формуле для периода колебаний произвольного физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}} \tag{5}$$

А для стержня длиной l, подвешенного на расстоянии a от центра, с учётом (3) получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ga}}. \tag{6}$$

Сравним результат с известной формулой для математического маятника:

$$T_м = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7}$$

(она получается из (5) подстановкой момента инерции точки $J = mr^2$). Видно, что (6) также *не зависит от массы* маятника, однако зависимость от длины подвеса более сложная.

Определим так называемую *приведённую длину* физического маятника:

$$l_{пр} = a + \frac{l^2}{12a}. \tag{8}$$

Смысл этой длины в том, что физический маятник длиной l, подвешенный в точке a, имеет тот же период малых колебаний, что и математический маятник длиной $l_{пр}$.

С понятием «приведённой длины» связана следующая теорема (*Гюйгенса*). Рассмотрим точку O', отстоящую от точки опоры O на расстояние $l_{пр}$ вдоль стержня (эту точку иногда называют *центром качания* физического маятника). Оказывается, если маятник подвесить за точку O', то период его качания *не изменится*. Иными словами, точка опоры и центр качания маятника взаимно обратимы. Доказательство осуществляется прямым расчётом по формуле (6) или (8). Предлагаем провести его самостоятельно.

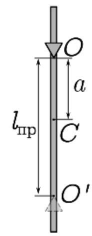

Рис. 2. К теореме Гюйгенса

Гармонические колебания

Приведём основные сведения из теории гармонических колебаний. Формулу для периода колебаний маятника (5) можно получить из анализа *дифференциального уравнения гармонических колебаний*. Воспользуемся основным уравнением вращательного движения (1) и подставим в него момент импульса в виде $L = J\omega$, выражение для момента возвращающей силы (4), а также учтём, что $d\omega/dt \equiv \ddot{\varphi}$ — угловое ускорение. Получим

$$J\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \tag{9}$$

(ср. с уравнением колебаний груза на пружине $m\ddot{x} + kx = 0$). Решением данного дифференциального уравнения являются *гармонические колебания*, описываемые законом

$$\varphi(t) = A\sin(\Omega t + \alpha), \tag{10}$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mga}{J}}$ — *угловая частота* колебаний (не путать с угловой скоростью вращения $\omega \equiv \dot{\varphi}$), A — *амплитуда* (угловая), α — *начальная* *фаза* колебаний. Амплитуда и фаза определяются начальными условиями (тем, как отпускают маятник). При этом угловая частота (и период) малых колебаний *не зависит ни от фазы, ни от амплитуды*. Однако при достаточно больших амплитудах последнее утверждение *нарушается*. Оно справедливо в той мере, в которой справедливо приближение $\sin\varphi \approx \varphi$, сделанное нами при выводе (6).

Затухание колебаний*

Закон (10) записан для случая *идеального* маятника в отсутствие затухания. Реальный маятник подвержен, в частности, сопротивлению воздуха, а также трению в оси подвеса, что приводит к постепенному *затуханию* его колебаний. Если трение не слишком велико†, колебания маятника всё ещё могут быть описаны формулой (10), но амплитуду колебаний следует считать медленно убывающей функцией времени: $A(t)$. Относительную убыли амплитуды за одно колебание $\gamma = \frac{|\Delta A|}{A}$ называют *декрементом затухания*. Величина γ является характеристикой всех потерь энергии в колебательной системе. Как правило, γ можно считать постоянной, и тогда интегрируя уравнение $\frac{dA}{A} = -\gamma$ получаем экспоненциальную зависимость амплитуды колебаний от времени:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}.$$

Таким образом, величина $\tau_{\text{зат}} = 1/\gamma$ — это время, за которое амплитуда колебаний падает в e раз. Оно может быть легко измерено экспериментально. Затухание можно считать малым, если это время велико по сравнению с временем одного колебания: $\tau_{\text{зат}} \gg T$.

В теории колебаний принято использовать *безразмерную* характеристику затухания, называемую *добротностью* колебательной системы:

$$Q = \pi \frac{\tau_{\text{зат}}}{T}. \tag{11}$$

Пример. Пусть амплитуда колебаний стержня уменьшилась вдвое $A_1 = A_0/2$ за $n = 100$ колебаний. Тогда из соотношения $e^{-\gamma n T} = \frac{1}{2}$ находим добротность $Q = \frac{\pi n}{\ln 2} \approx 450$.

* Необязательный пункт.

† Если трение велико, то колебаний не будет вовсе — маятник остановится, не совершив и одного колебания (*апериодический* режим). В данной работе такой режим не реализуется.

Экспериментальная установка

Тонкий стальной стержень длиной $l \sim 1$ м и массой $m \sim 1$ кг (точные параметры определяются непосредственными измерениями) подвешивается на прикреплённой стене консоли с помощью небольшой призмы. Призма острым основанием опирается на поверхность консоли. Острие ребра призмы образует ось качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, изменяя положение точки подвеса (расстояние a). Период колебаний измеряется непосредственно с помощью секундомера. Для проверки формулы (6) следует измерить зависимость колебаний T маятника расстояния подвеса a. Расстояния измеряются линейками и штангенциркулем. Положение центра масс маятника может быть определено с помощью балансирования маятника на вспомогательной подставке с острой гранью.

Измеряя зависимости периода малых колебаний от положения стержня при качании, можно экспериментально проверить формулу (6) и вычислить значение ускорения свободного падения g.

Расчёт поправок

Обсудим влияние подвесной призмы на результаты измерений. Вообще говоря, следовало бы воспользоваться общей формулой (5) для периода колебаний физического маятника, которая учитывает оба тела:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\text{ст}} + J_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} g a_{\text{ст}} - m_{\text{пр}} g a_{\text{пр}}}}$$

(знак «минус» в знаменателе учитывает, что призма находится *выше* оси подвеса). Если наличие призмы не учитывать и пользоваться формулой (6), это приведёт к *систематической* погрешности результата измерений.

Однако призма имеет малые размеры и массу, и, возможно, эта погрешность будет мала. Проведём соответствующие оценки. Для призмы, используемой в нашей работе, расстояние от ребра до её центра масс составляет $a_{\text{пр}} \sim 1{,}5$ см, её масса $m_{\text{пр}} \sim 70$ г. Поскольку призма находится непосредственно вблизи оси качания, её наличие мало влияет на момент инерции. Действительно, по порядку для призмы имеем $J_{\text{пр}} \sim m_{\text{пр}} a_{\text{пр}}^2 \sim 10^{-5}$ кг $\cdot$ м^2, а при $a = 10$ см имеем $ma^2 \sim 10^{-2}$ кг $\cdot$ м^2, то есть поправка на момент инерции призмы в условиях опыта составляет не более 0,1%. Поскольку такая погрешность заведомо меньше погрешности используемых нами приборов (например, линейки), ей можно спокойно пренебречь. Сравним теперь моменты сил, действующие на призму и стержень при тех же $a = 10$ см:

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} = \frac{m_{\text{пр}} g a_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} g a_{\text{ст}}} \sim 10^{-2}.$$

Видим, что здесь поправка может достигать 1%. Таким образом, если мы хотим (и можем) провести измерения с погрешностью менее 1%, эту поправку нельзя не учитывать.

На практике учесть влияние призмы можно следующим образом. Поскольку расстояние $a_{пр}$ трудно поддаётся непосредственному измерению, можно исключить его, измеряя положение центра масс всей системы. Пусть $x_ц$ — расстояние от центра масс *системы* до точки подвеса. По определению имеем

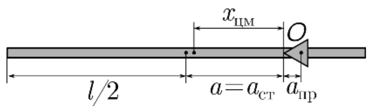

Рис. 3. Смещение центра масс из-за подвесной призмы

$$x_ц = \frac{m_{ст}a_{ст} - m_{пр}a_{пр}}{m_{ст} + m_{пр}}$$

(«минус» учитывает положение призмы). Исключая отсюда $a_{пр}$, получим формулу для периода с нужной нам поправкой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g\beta x_ц}}, \tag{12}$$

где $\beta = 1 + \frac{m_{пр}}{m_{ст}}$.

Таким образом, для более точного измерения g следует для каждого положения призмы измерять величины a (положение призмы относительно центра масс стержня), $x_ц$ (положение центра масс стержня с призмой относительно призмы) и период соответствующих малых колебаний.

Измерение периода колебаний

Измерение периода колебаний маятника (и любых других промежутков времени) с помощью секундомера неизбежно сопровождается погрешностью из-за конечного времени реакции человека. Как правило, время реакции составляет 0,1 – 0,2 с. Однако это время различно для разных людей и зависит от большого числа субъективных факторов (состояние человека, тренированность, время суток, освещённость и т.п.). Для планирования эксперимента и для корректной оценки его погрешностей следует иметь более точное значение погрешности измерения времени.

Найти случайную погрешность из-за времени реакции (а также из-за других сопутствующих случайных факторов) нетрудно экспериментально. Для этого достаточно несколько раз повторить опыт по измерению одного и того же числа колебаний маятника. По полученному набору результатов $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ определить среднее значение $\bar{t}$ и среднеквадратичное отклонение отдельного измерения:

$$\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(t_i - \bar{t})^2}.$$

Кроме того, у каждого секундомера возможна систематическая погрешность $\sigma_t^{\text{сист}}$, максимальная величина которой устанавливается производителем (определить её можно по маркировке на приборе или по его паспорту). Как правило у секундомера есть погрешность цены деления (или погрешность округления у цифрового секундомера), а также систематическая погрешность из-за постепенного «ухода» показаний с течением времени. Последняя зависит от класса точности секундомера: например, от лабораторных механических секундомеров 2-го класса точности следует ожидать погрешности ~0,1 с за 60 с (~ 0,2%). Полная погрешность измерения времени вычисляется среднеквадратично:

$$\sigma_t^{\text{полн}} = \sqrt{(\sigma_t^{\text{сл}})^2 + (\sigma_t^{\text{сист}})^2}.$$

При известной погрешности измерения времени $\sigma_t^{\text{полн}}$ можно спланировать проведение эксперимента исходя из требуемой точности опыта. В частности, можно определить, по какому количеству колебаний маятника следует измерять его период.

> **Пример.** Пусть погрешность измерения времени оказалась равна $\sigma_t \approx 0{,}05$ с. Период колебаний составляет $T \approx 1$ с. Поскольку $T = t/n$, погрешность периода равна $\sigma_T = \sigma_t/n$. Относительная погрешность $\varepsilon_T = \sigma_T/T = \sigma_t/nT$. При требуемой погрешности $\varepsilon = 10^{-3}$ (0,1%), получим $n = \frac{\sigma_t}{T\varepsilon_T} = \frac{0{,}05}{1\cdot 10^{-3}} \approx 50$. Таким образом, для достижения требуемой точности достаточно выполнить *однократное* измерение времени $n \approx 50$ колебаний.

ЗАДАНИЕ

1. Познакомьтесь с используемыми в работе измерительными приборами: линейками, штангенциркулем, секундомером. Определите максимальную систематическую погрешность каждого из них (абсолютное и относительное значение). Оцените, с какой относительной погрешностью ε_{max} имеет смысл измерять период колебаний маятника. Учтите, что поскольку при вычислении произведения величин их относительные погрешности *складываются* (квадратично), погрешность итогового результата (косвенно вычисленной величины) не может оказаться меньше погрешности самого неточного измерения.

> **Пример**. Погрешность конечного результата (величины g) определяется точностью измерения длин и периода колебаний. Длины измеряются металлической линейкой или штангенциркулем (для расстояний < 15 см). Пусть наименьшее расстояние равно 100 мм (измерено штангенциркулем), а наиболь-

шее — 500 мм (измерено линейкой). Абсолютное значение погрешности металлической линейки $\sigma^{\text{лин}} \approx 0{,}5$ мм, а штангенциркуля – $\sigma^{\text{шт}} \approx 0{,}1$ мм. Тогда относительная погрешность измерения длин составит порядка $\varepsilon_{max} \sim 0{,}1\%$ ($\frac{0{,}1\ \text{мм}}{100\ \text{мм}} \cdot 100\% = 0{,}1\%\ \frac{0{,}5\ \text{мм}}{500\ \text{мм}} \cdot 100\% \sim 0{,}1\%$).

Вывод. Используемые в работе инструменты позволяют вести измерения длин с точностью вплоть до 0,1%. Для получения конечного результата с данной точностью период колебаний следует измерять с той же относительной погрешностью: не хуже, чем $\varepsilon \sim 0{,}1\%$.

2. Измерьте длину стержня l. Взвесьте штангу и призму на электронных весах. Оцените погрешности измерений (абсолютные и относительные значения). Рассчитайте значение множителя $\beta = 1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}}$ (до скольких знаков его следует округлить?).
3. Снимите со стержня призму и с помощью подставки определите положение центра масс стержня. Установите призму на расстоянии $a \approx l/4$ от центра стержня, измерьте точное положение a острия призмы относительно центра стержня. Измерьте положение центра масс конструкции $x_{\text{ц}}$, сбалансировав маятник *с призмой* на острие вспомогательной подставки. Оцените погрешности измерения расстояний a и $x_{\text{ц}}$. Какие факторы, кроме цены деления, влияют на точность этих измерений? Если относительные погрешности окажутся больше ожидаемых, скорректируйте величину ε_{max}, определённую в п. 1.
4. Проведите первый предварительный опыт по измерению периода колебаний.
   а. Установите маятник на консоли и отклоните маятник на малый угол (не более 5°). Убедитесь, что он качается без помех, призма не проскальзывает, и колебания затухают слабо.
   б. Измерьте время $n = 10$ полных колебаний маятника.

Указание. При измерениях лучше фиксировать моменты прохождения маятником *крайних* положений (почему?), а секундомер запускать не сразу с отпусканием маятника, а в один из моментов максимального отклонения — это уменьшит систематическую погрешность из-за времени вашей реакции.

   в. Вычислите период колебаний $T = t/n$ и по формуле (12) рассчитайте предварительное значение g. Убедитесь, что оно отличается от табличного не более, чем на 10%.
5. Проведите серию измерений для экспериментального определения случайной погрешности измерения времени с помощью секундомера (эта погрешность связана с такими случайными факторами, как время реакции экспериментатора, случайные колебания воздуха и т.п.).

а. Повторите измерение периода $n = 10$ колебаний 8–10 раз, *каждый раз* останавливая и *заново* отклоняя маятник примерно на один и тот же малый угол; результаты занесите в таблицу.

б. Вычислите среднее значение полученных результатов $\bar{t}$, а также определите случайную погрешность измерения времени как среднеквадратичное отклонение полученных результатов:

$$\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(t_i - \bar{t})^2}.$$

№ оп.	t, с
1	
…	
10	
$\bar{t}$	
$\sigma_t^{\text{случ}}$	
$\sigma_t^{\text{сист}}$	
$\sigma_t^{\text{полн}}$	

в. Определите инструментальную (систематическую) погрешность используемого секундомера $\sigma_t^{\text{сист}}$ и вычислите полную погрешность $\sigma_t^{\text{полн}}$ измерения времени.

6. Используя погрешность измерения времени из предыдущего пункта, оцените число колебаний n, по которому следует измерять период, чтобы относительная погрешность измерений *периода* соответствовала точности измерений ε_{max}, оценённой в п. 1 (см. Пример на стр. 8).

7. Поместите призму в другое положение, измерьте её положение a относительно центра, положение центра масс системы $x_{\text{ц}}$ и время n полных колебаний, где значение n выбрано в п. 6. Проведите измерения периода для 10–12 значений a. Для каждого измерения рассчитайте значения g (по формуле (12)). Занесите результаты в таблицу.

№ оп.	a, мм	$x_{\text{ц}}$, мм	n	t_n, с	T, с	g, м/с^2

Указание. Во избежание «промахов» (например, в подсчёте числа колебаний) каждое измерение рекомендуется разбить на 3–4 (например, вместо одного опыта с $n = 60$ колебаний, провести 3 опыта по $n = 20$ колебаний) и затем усреднить результаты. Если результат какого-то из измерений существенно отличается от остальных, его следует отбросить, и провести ещё 2–3 дополнительных измерений.

8. Проведите опыт по определению приведённой длины маятника:

а. для одного значения a вычислите приведённую длину физического мятника по формуле (8);

б. установите соответствующую длину математического маятника и проверьте равенство периодов колебаний физического и математического маятников (с учётом погрешностей измерений);

в. поместите призму в центр качания и переверните маятник; убедитесь, что период колебаний не изменился в пределах погрешности.

9. *Для оценки затухания измерьте число колебаний, за которое их амплитуда уменьшается в 2 раза. Оцените время затухания $\tau_{\text{зат}}$, декремент затухания γ и добротность Q колебательной системы.

Обработка результатов измерений

10. Усредните значения ускорения свободного падения g, полученные в п. 7. Оцените погрешность результата.
11. Постройте график зависимости периода колебаний T от высоты подвеса a. При необходимости нанесите на график кресты погрешностей. Убедитесь, что зависимость $T(a)$ имеет минимум; определите по графику положение минимума и сравните его с расчётом по формуле (6).
12. Постройте график, откладывая по оси абсцисс величину $u = T^2 x_{\text{ц}}$, а по оси ординат величину $v = a^2$. При необходимости нанесите на график кресты погрешностей. Согласно формуле (12), этот график должен иметь вид прямой линии — убедитесь в этом.
13. Методом наименьших квадратов определите параметры (k, b) наилучшей прямой $u = kv + b$ и их погрешности (σ_k и σ_b). По наклону прямой, используя формулу (12), рассчитайте величину ускорения свободного падения g.
14. Оцените погрешность измерения величины g в п. 13. Учтите, что погрешность может включать как случайную составляющую (определяемую по методу наименьших квадратов), так и систематическую (погрешность величин $T^2 x$ и a^2). Сравните результат расчёта по п. 13 с непосредственным усреднением, проведённым в п. 10. Какой из методов расчёта g предпочтительнее и почему?
15. Сопоставьте полученные результаты с целями работы. Сделайте выводы по результатам проведённых измерений.

Литература

1. *Попов П.В., Нозик А.А.* Обработка результатов учебного эксперимента. — Москва : МФТИ, 2021.
2. *Кириченко Н.А., Крымский К.М.* Общая физика. Механика. — Москва : МФТИ, 2013. — Гл. 10.3.
3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 1. Механика. — Москва : Физматлит, 2005. — § 46.
4. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 1. Механика. Под ред. А.Д. Гладуна. — Москва : МФТИ, 2012. — Раздел IV.

Составители:

Смирнова О.И., Попов П.В.

29.08.2021