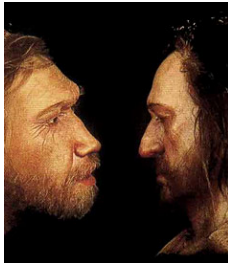


Evolution de la population d'*Homo Néanderthalensis*

Y. Adimy M. Simon H. Vassal

INSA Lyon - Bioinformatique et Modélisation

13 Juin 2016



Plan

- 1 Introduction
 - La disparition mystérieuse de Néandertal
 - Cadre général
- 2 Croissance logistique
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 3 Effet Allee
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 4 Système de Lotka-Volterra
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 5 Conclusion

La disparition mystérieuse de Néandertal

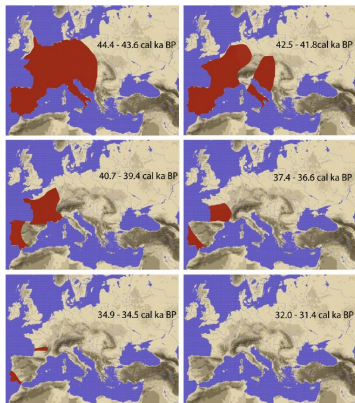


FIGURE: Régions occupées par Néandertal à différentes époques en Europe



FIGURE: La grotte de Bruniquet, plus ancienne construction humaine

Cadre général

Modèle général

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = f(u(t, x)) + d\Delta u(t, x), \quad (1)$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n = 1 \text{ ou } n = 2,$$

$u(t, x)$: Densité de population à la position x et au temps t .

d : Constante de diffusion.

f : Terme de réaction.

Plan

- 1 Introduction
 - La disparition mystérieuse de Néandertal
 - Cadre général
- 2 Croissance logistique
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 3 Effet Allee
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 4 Système de Lotka-Volterra
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 5 Conclusion

Présentation du modèle

Croissance Logistique

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \alpha u(t, x) \left(1 - \frac{u(t, x)}{K} \right) + d \Delta u(t, x),$$

K : Capacité du milieu liée à des facteurs locaux environnementaux ($K > 0$).

α : Taux de croissance intrinsèque de la population ($\alpha > 0$).

Analyse mathématique

Analyse de la partie réaction

0 équilibre instable et K équilibre stable

Analyse de l'équation de réaction-diffusion

L'équation de réaction diffusion est de type **KPP monostable**.

- Pour tout $c > 2\sqrt{\alpha}$ il existe un unique front d'onde $U(z)$ monotone se propageant à la vitesse c tel que $\lim_{z \rightarrow +\infty} U(z) = 0$ et $\lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) = K$.
- Effet "*hair trigger*" : Si on prend une condition initiale positive sur un intervalle borné et nul en dehors de l'intervalle, alors la solution converge vers K à la vitesse $2\sqrt{\alpha}$.

Propagation d'un front d'onde en 1D

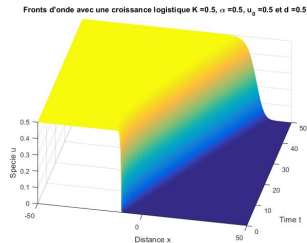
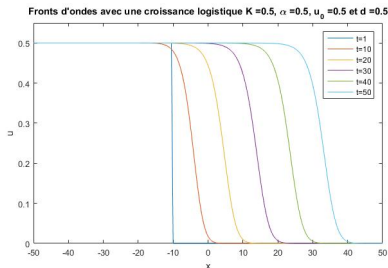


FIGURE: Propagation du front d'onde en 1D (KPP1D.avi)

Effet "hair trigger"

Fronts d'ondes avec une croissance logistique $K=0.5$, $\alpha=0.5$, $u_0=0.1$ et $d=0$.

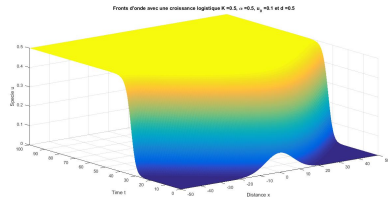
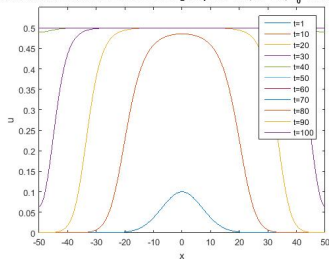


FIGURE: Propagation du front d'onde en 1D avec une petite perturbation initiale à support compact.

Effet d'une barrière géographique franchissable

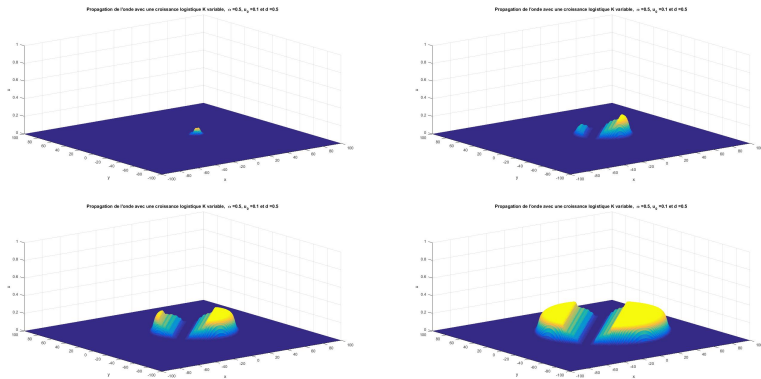


FIGURE: Diffusion 2D de la population face à une barrière géographique franchissable : KPPFranchissable.avi

Effet d'une barrière géographique infranchissable

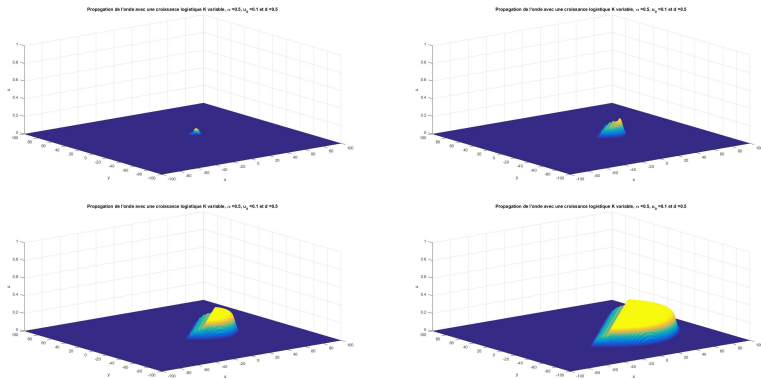


FIGURE: Diffusion 2D de la population face à une barrière géographique infranchissable : KPPNonFranchissable.avi

Plan

- 1 Introduction
 - La disparition mystérieuse de Néandertal
 - Cadre général
- 2 Croissance logistique
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 3 Effet Allee
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 4 Système de Lotka-Volterra
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 5 Conclusion

Présentation du modèle

Modèle Allee

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = f(u(t, x)) + d\Delta u(t, x)$$

$$f(u(t, x)) = ku(1 - u)(u - A)$$

k : Taux de croissance normalisé constant

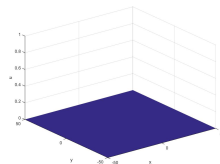
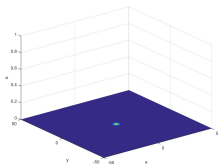
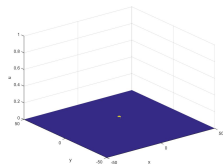
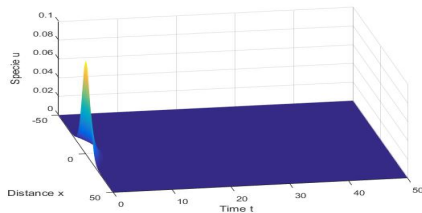
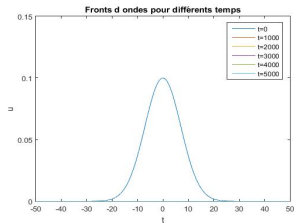
A : Densité critique

$$k = \frac{4}{(1 - A)^2}$$

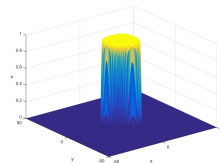
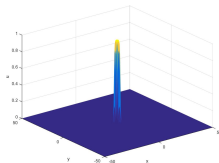
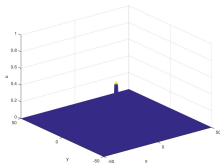
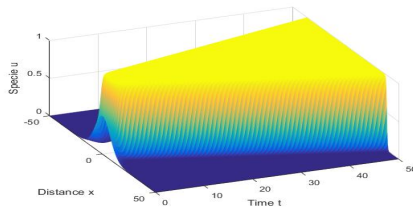
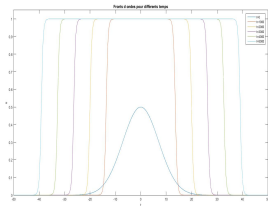
Analyse mathématique

- Équilibres : $u = 0$, $u = A$ et $u = 1$
- BISTABLE
- 2 scénarios selon la valeur de A :
 - $A < 0.5$: $c > 0 \rightarrow$ "1 envahit 0"
 - $A > 0.5$: $c < 0 \rightarrow$ "0 envahit 1"

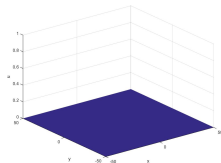
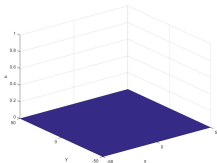
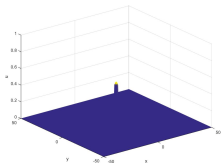
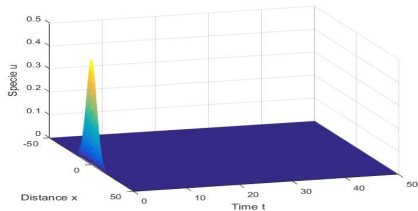
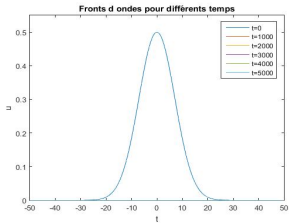
$$d = 0.5, A = 0.25 (k = 64), u_0 = 0.1$$



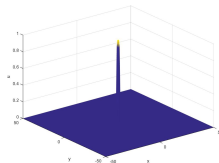
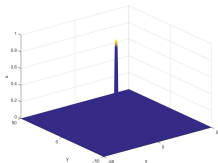
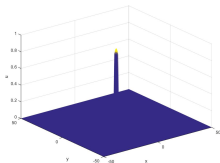
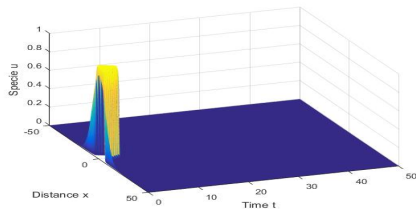
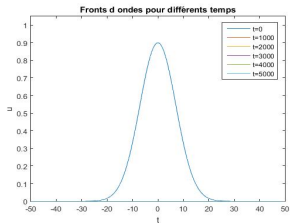
$$d = 0.5, A = 0.25(k = 64), u_0 = 0.5$$



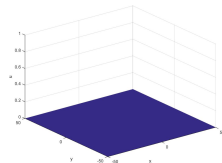
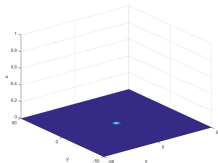
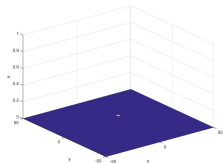
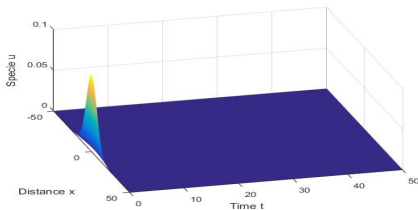
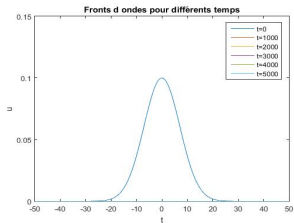
$$d = 0.5, A = 0.75(k = 7.1), u_0 = 0.5$$



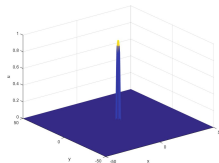
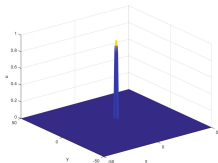
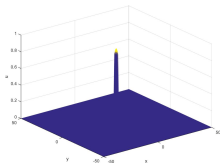
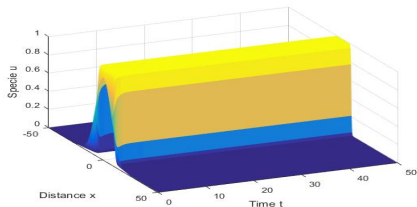
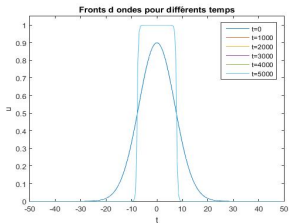
$$d = 0.5, A = 0.75(k = 7.1), u_0 = 0.9$$



$$d = 0.5, A = 0.5(k = 16), u_0 = 0.1$$



$$d = 0.5, A = 0.5(k = 16), u_0 = 0.9$$



Plan

- 1 Introduction
 - La disparition mystérieuse de Néandertal
 - Cadre général
- 2 Croissance logistique
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 3 Effet Allee
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 4 **Système de Lotka-Volterra**
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 5 Conclusion

Présentation du modèle

Modèle de compétition

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = f(u, v) + d_1 \Delta u \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = g(u, v) + d_2 \Delta v \end{cases}$$

$$f(u, v) = \alpha_1 u \left(1 - \frac{u}{K_1} - \gamma_1 \frac{v}{K_1} \right), \quad g(u, v) = \alpha_2 v \left(1 - \frac{v}{K_2} - \gamma_2 \frac{u}{K_2} \right)$$

$u(t,x)$: Densité de population des Hommes Modernes

$v(t,x)$: Densité de population des Hommes de Néanderthal

K_1 et K_2 : Capacités d'accueil du milieu

γ_1 et γ_2 : Coefficients de compétition

α_1 et α_2 : Taux de croissance

Analyse mathématique

- On prend $\gamma_1 < \frac{K_1}{K_2}$ et $\gamma_2 > \frac{K_2}{K_1}$
- Trois équilibres $(0, 0)$, $(0, K_2)$, $(K_1, 0)$.
- En posant $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, $K = K_1 = K_2$, $D = d_1 = d_2$ et $\gamma_1 + \gamma_2 = 2$: existence de fronts d'ondes reliant 0 et K.
- $c_{min} = 2\sqrt{\alpha D(1 - \gamma_1)}$

Front d'ondes

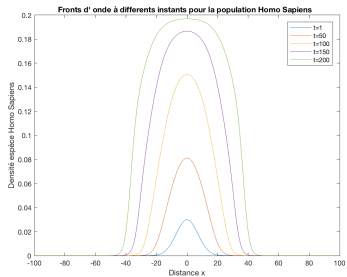
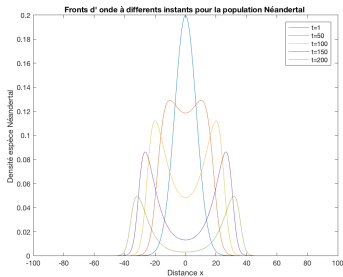


FIGURE: Evolution des fronts d'onde au cours du temps (Competition.avi)

Diffusion 1D

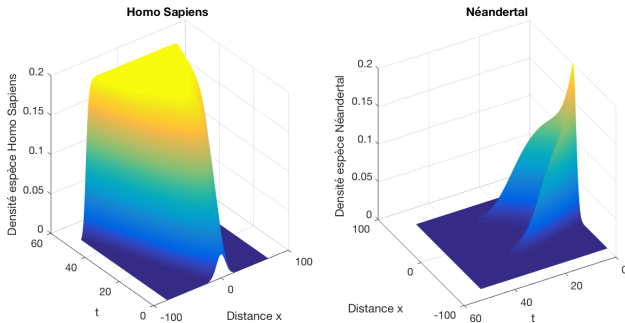


FIGURE: Diffusion 1D

Plan

- 1 Introduction
 - La disparition mystérieuse de Néandertal
 - Cadre général
- 2 Croissance logistique
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 3 Effet Allee
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 4 Système de Lotka-Volterra
 - Présentation du modèle
 - Analyse mathématique
 - Simulations numériques
- 5 Conclusion