ლაბორატორია 7

დისკრეტული დროის შემთხვევითი პროცესები 1

1 შესავალი

ბუნებაში არსებული ფენომენების უმეტესობას გარკვეული განუზღვრელობა გააჩნია, რომელთა აღწერა სტატისტიკურად შემთხვევით პროცესებად არის შესაძლებელი. მაგალითად, ელექტრული წრედების თერმული ხმაურის, რადარული დეტექციის და ალბათური თამაშების აღწერა სტატისტიკური მეთოდებითაა შესაძლებელი.

ამ ლაბორატორიაში შემთხვევითი პროცესების ანალაიზის ფუნდამენტურ მეთოდებს განვიხილავთ. მეორე ნაწილში შემთხვევით ცვლადებთან და მათ გამოთვლასთან დაკავშირებული განსაზღვრებებია მოცემული. მესამე ნაწილი კუმულატიური განაწილების ფუნქციის გამოთვლის მეთოდს შეეხება. მეოთხე ნაწილში შემთხვევითი ცვლადის გარდაქმნებს განვიხილავთ და ბოლოს, მეხუთე ნაწილში ვნახავთ როგორ შეიძლება ჰისტოგრამის გამოყენებით ალბათობის სიმკვრივის ფუნქციის განსაზღვრა.

2 შემთხვევითი ცვლადები

2.1 განმარტებები

შემთხვევითი ცვლადი ერთგვარი ფუნქციაა, რომელიც შემთხვევითი ექსპერიმენტის შედეგებს ნამდვილი რიცვების სიმრავლედ გარდაქმნის. მოვლენის ალბათბის ინტერპრეტირება შესაძლებელია, როგორც ალბათობა, რომ შემთხვევითი ცვლადი ამ მოვლენის შესაბამის მნიშვნელობას მიიღებს. ამ მიდგომის გამოყენებით ალბათური პროცესის სრულიად რიცხვითად აღწერაა შესაძლებელი.

შემთხვევითი ცვლადის აღწერისთვის მნიშვნელოვანი ფუნქცია *კუმულატიური განაწილების ფუნქციაა:*

$$F_X(x) = P(X \le x), \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{1}$$

სადაც X შემთხვევითი ცვლადია, და $F_X(x)$ იმის ალბათობაა, რომ X მიიღებს მნიშვნელობას შუალედიდან $(-\infty, x]$.

კუმულატიური განაწილების ფუნქციის წარმოებული (თუ არსებობს) *ალბათობის სიმკვვირივის ფუნქციაა,* $f_X(x)$. კალკულუსის ფუნდამენტური თეორემის მიხედვით ალბათობის სიმკვრივის ფუნქციას შემდეგი თვისება გააჩნია:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_X(x)dx = F_X(t_1) - F_X(t_0) = P(t_0 < X \le t_1). \tag{2}$$

რადგან იმის ალბათობა, რომ X შუალედში, $(-\infty, \infty)$, არის განლაგებული ერთია, სიმკვრივის ფუნქციის ქვეშ ფართობი ერთის ტოლი უნდა იყოს.

მათემატიკური ლოდინი (მომენტები) შემთხვევით ცვლადებთან ასოცირებული მნიშვნელოვანი სიდიდეებია. X ცვლადის ფუნქციის ($g(X)$ ლოდინი განსაზღვრულია, როგორც

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx, \qquad \textit{უწყვეტი } X \tag{3}$$

$$E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x) P(X = x), \quad \textit{დისკრეტული } X \tag{4}$$

შენიშნეთ, რომ $g(X)$ ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი დეტერმინისტულია. ასევე, ინტეგრაცია და ჯამი წრფივი ოპერაციებია, შესაბამისად ლოდინიც წრფივი ოპერატორია.

მათემატიკური ლოდინის ყველაზე მნიშვნელობანი ორი შემთხვევა საშუალო μ_X და დისპერსიაა σ_X^2, რომლებიც შემდეგნაირად არიან განსაზღვრული

$$\mu_X = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \tag{5}$$

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \tag{6}$$

შემთხვევითი ცვლადების ერთერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი ტიპი, გაუსის ან ნორმალური შემთხვევითი ცვლადია. მისი სიმკვრივის ფუნქცია მოცემულია, როგორც:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_X^2}(x - \mu_X)^2\right). \tag{7}$$

გაუსის შემთხვევითი ცვლადი სრულად განსაზღვრისთვის მისი საშუალო და დისპერსიაა საჭირო. ნორმალური განაწილების მქონე შემთხვევითი ცვლადის ასაღნიშნად ვიყენებთ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

2.2 შემთხვევითი ცვლადის ანათვალები

დავუშვათ, რომ ექსპერიმენტის აღწერა შესაძლებელია შემთხვევითი ცვლადით, X, რომლის განაწილებაც უცნობია. მაგალითად, შეიძლება ვზომავთ დეტერმინისტულ სიდიდე v-ს, თუმცა გაზომვას შემთხვევითი ცდომილება, ε, ახლავს თან. ექსპერიმენტიდან მიღებული მნიშვნელობა შეგვიძლია ჩავწეროთ, როგორც $X = v + \varepsilon$.

თუ X ცვლადის განაწილება დროში უცვლელია, შეგვიძლია მისი განაწილების შესახებ მეტი გავიგოთ რამოდენიმე დამოუკიდებელი მონაცემის მოგროვებით $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$. ეს მონაცემები, X_i, დამოუკიდებელი შემთხვევითი ცვლადებია და იგივე განაწილება, $F_X(x)$, გააჩნიათ.

დავუშვათ გვსურს ჩვენი მოგროვებული მონაცემებით $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ გამოვთვალოთ X ცვლადის საშუალო და დისპერცია. ამისთვის შეგვიძლია მონაცემების სიმრავლის საშუალო და დისპერსია გამოვითვალოთ:

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \tag{8}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X_i - \hat{\mu}_X)^2 \tag{9}$$

თავისმხრივ ორივე სიდიდე შემთხვევითი ცვლადია, რადგან ისინი სხვა შემთხვევით ცვლადებზე დამოკიდებული ფუნქციებია. შესაბამისად, შეგვიძლია ამ სიდიდეების სტატისტიკური თვისებების განხილვაც. მაგალითად შეგვიძლია მონაცემების საშუალოს, $\hat{\mu}_X$, საშუალო და დისპერსია გამოვთვალოთ.

$$E[\hat{\mu}_X] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[X_i] = \mu_X \tag{10}$$

$$Var[\hat{\mu}_X] = Var\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \frac{1}{N^2} Var\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} Var[X_i] = \frac{\sigma_X^2}{N} \tag{11}$$

ორივე შემთხვევაში გამოვიყენეთ დაშვება, რომ X_i ცვლადები დამოუკიდებლები და იდენტურად განაწილებულები არიან. ასევე შესაძლებელია ვაჩვენოთ, რომ $E[\sigma_X^2] = \sigma_X^2$.

პარამეტრის, a, ესტიმატორს, რომელსაც შემდეგი თვისება გააჩნია $E[\hat{a}] = a$ მიუკერძოებელი ესტიმატორი ეწორება. ესტიმატორი თვისებით $Var[\hat{a}] \to 0$, როდესაც $N \to \infty$, მყარი ესტიმატორია. ეს ორი თვისება სასურველია, რადგან მათგან გამომდინარეობს, რომ დიდი რაოდენობის მონაცემების შემთხვევაში გამოთვლილი მიახლოებითი პარამეტრები ახლოს იქნებიან რეალურ პარამეტრებთან.

დაუშვით, რომ X ნორმალურად განაწილებული ცვლადია, რომლის საშუალო 0 და დისპერსია 1 ერთეულია. გამოიყენეთ MATLAB-ის ფუნქცია random ან randn X-ის 1000 ანათვალის დაგენერირებისთვის $X_1, X_2, \dots, X_{1000}$. ააგეთ მათი გრაფიკი.

დაწერეთ MATLAB-ის ფუნქცია მონაცემთა სიმრავლის საშუალოს და დისპესიის გამოთვლისთვის (განტოლებები (8) და (9)). გამოიყენეთ თქვენი ფუნქცია დაგენერირებული მონაცემების საშუალოს და დისპერსიის გამოსათვლელად. რატომ გვაქვს აცდენა ნამდვილი საშალოს და დისპერსიის მნიშვნელობებისგან? რა შემთხვევაში მიუახლოვდებიან გამოთვლილი მნიშვნელობები ნამდვილს?

2.2 შემთხვევითი ცვლადის ანათვალები

შემთხვევითი ცვლადის, X, წრფივ გარდაქმნას შემდეგი ფორმა აქვს:

$$Y = aX + b, \tag{12}$$

სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია ($a \neq 0$). წრფივი გარდაქმნა გარდაქმნილი ცვლადის განაწილების ფორმას ინარჩუნებს, ანუ Y შემთხვევით ცვლადს იგივე განაწილება აქვს, რაც X-ს. მაგალითად თუ X ნორმალური შემთხვევითი ცვლადია ასევე იქნება Y, თუმცა განსხვავებული საშუალოს და დისპერსიის მნიშვნელობებით.

მათემატიკური ლოდინის წრფივობის თვისების გამოყენებით გამოიყვანეთ საშუალო μ_Y და დისპერსია σ_Y^2. (დაიწყეთ საშუალოს გამოთვლით და გამოიყენეთ მიღებული შედეგი დისპერსიის გამოთვლისთვის.)

განიხილეთ ნორმალური შემთხვევითი ცვლადის, X, წრფივი გარდაქმნა. $\mu_X = 0$ და $\sigma_X^2 = 1$. იპოვეთ მუდმივები a და b, რომელთათვის გარდაქმნით მიღებული ცვლადის, Y, საშუალო იქნება 3 და დისპერსია იქნება 9. განტოლება (7)-ს გამოყენებით იპოვეთ Y ცვლადის ალბათობის სიმკვრივის ფუნქცია.

დააგენერირეთ X-ის 1000 ანათვალი და გამოთვალეთ Y-ს ანათვალები წრფივი გარდაქმნის (12) და თქვენი გამოთვლილი a და b მუდმივების გამოყენებით. ააგეთ მიღებული მონაცემების გრაფიკი და გამოიყენეთ თქვენი შექმნილი ფუნქცია Y-ს საშუალოს და დისპერსიის გამოსათვლელად.

3 კუმულატიური განაწილების ფუნქციის გამოთვლა

დავუშვათ, რომ გვჭირდება გარკვეული პროცესის მოდელირება, როგორც შემთხვევითი ცვლადი, X, რომელსაც გააჩნია განაწილება $F_X(x)$. როგორ შეგვიძლია შევაფასოთ ასეთი მოდელის სიზუსტე? ამის ერთი გზა არის დიდი რაოდენობით მონაცემის მოგროვება და მათი განაწილების ფუნქციის გამოთვლა. თუ მიღებული განაწილება ახლოსაა ჩვენს მოდელთან, $F_X(x)$, მაშინ გვაქვს საფუძველი ვიფიქროთ, რომ ჩვენი მოდელი პროცესს მეტ-ნაკლებად ზუსტად აღწერს. ან ნაწილში კუმულატიური განაწილების ფუნქციის სიზუსტის შეფასების მეთოდს გაეცნობით.

მოცემულია დამოუკიდებელი, იდენტურად განაწილებული შემთხვევითი ცვლადების სიმრავლე $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ კუმულატიური განაწილების ფუნქციით $F_X(x)$. ***ემპირიულ*** *კუმულატიური განაწილების ფუნქციას,* $\hat{F}_X(x)$, განვსაზღვრავთ, როგორც

$$\hat{F}_X(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_{\{X_i \le x\}} \tag{13}$$

$$I_{\{X_i \le x\}} = \begin{cases} 1, & X_i \le x \\ 0, & სხვა \end{cases} \tag{14}$$

ანუ, $\hat{F}_X(x)$ გვაძლევს იმ X_i მონაცემების წილს, რომლებიც x-ის ტოლი ან მასზე მცირეა (ასეთი მონაცემების რაოდენობას ავღნიშნავთ, როგორც N_x).

$\hat{F}_X(x)$ ფუნქციის უკეთ გააზრებისთვის გამოვითვალოთ მისი საშუალო და დისპერსია.

$$N_x = \sum_{i=1}^{N} I_{\{X_i \le x\}} = N\hat{F}_X(x) \tag{15}$$

რადგან $P(X_i \le x) = F_X(x)$, გვაქვს

$$P\big(I_{\{X_i \le x\}} = 1\big) = \hat{F}_X(x),$$

$$P\big(I_{\{X_i \le x\}} = 0\big) = 1 - \hat{F}_X(x).$$

შეგვიძია გამოვთვალოთ $\hat{F}_X(x)$-ის საშუალო:

$$E\big[\hat{F}_X(x)\big] = \frac{1}{N}E[N_x] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[I_{\{X_i \le x\}}] = \frac{1}{N}NE\big[I_{\{X_i \le x\}}\big] =$$

$$= 0 \times P\big(I_{\{X_i \le x\}} = 0\big) + 1 \times P\big(I_{\{X_i \le x\}} = 1\big) = F_X(x)$$

ეს ნიშნავს, რომ $\hat{F}_X(x)$ განაწილების, $F_X(x)$, მიუკერძიებელი ესტიმატორია. მსგავსი გზით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$Var\left[\hat{F}_X(x)\right] = \frac{1}{N} F_X(x)\big(1 - F_X(x)\big).$$

შესაბამისად, ემპირიული კუმულატიური განაწილების ფუნქცია $\hat{F}_X(x)$ ნამდვილი კგფ-ს მიუკერძოებელი და მყარი ესტიმატორია.

> დაწერეთ ფუნქცია F = empcdf(X,t) მოცემული X მონაცემების ვექტორის ემპირიული კუმულატიური განაწილების ფუნქციის გამოსათვლელად. t ვექტორია რომელიც გამოთვლაში გამოსაყენებელ ინდექსებს უთითებს. (ბრძანება sum(X<=s) აბრუნებს s-ზე ნაკლების X-ის ელემენტების რაოდენობას).
>
> თქვენი ფუნქციის გამოსაცდელად დააგენერირეთ თანაბარი განაწილების შემთხვევითი ცვლადები ბრძანებით X = rand(1,N). ააგეთ ორი კუმულატიური განაწილების ფუნქციის გრაფიკი: N=20 და N=200. გამოსახეთ ეს ფუნქციები შუალედზე t=[-1:0.001:2] და იგივე გრაფიკზე დაიტანეთ რეალური თანაბარი განაწილების ფუნქცია.

4 განაწილებიდან მონაცემების გენერირება

ხშირად გვჭირდება კონკრეტული განაწილების მიხედვით მონაცემების გენერირება. მაგალითად, შეიძლება გვაინტერესებდეს როგორ იქცევა გარკვეული ალგორითმი ხმაურიანი შემავალი სიგნალის შემთხვაში. როგორც წესი, ასეთ დროს ხმაურის მოდელირებისთვის სხვადასხვა განაწილების მქონე შემთხვევით სიგნალებს ვიყენებთ. ამ ნაწილში ვნახავთ როგორ შეიძლება შემთხვევითი რიცხვების დაგენერირება მოცემული განაწილების, $F_X(x)$, მიხედვით.

დავუშვათ, რომ გვაქვს უწყვეტი შემთხვევითი ცვლადი, X, განაწილებით $F_X(x)$ და ვქმნით ახალ შემთხვევით ცვლადს $\boldsymbol{Y = F_X(x)}$. ანუ Y შემთხვევითი ცვლადი X-ის კუმულატიური განაწილების ფუნქციაა.

$$X \longrightarrow \boxed{F_X(\cdot)} \longrightarrow Y$$

როგორ არის განაწილებული Y? რადგან $F_X(x)$ მონოტონურად მზარდი ფუნქციაა, მოვლენა $\{Y \leq y\}$ მოვლენის $\{X \leq x\}$ ექვივალენტურია თუ გვაქვს $y = F_X(x)$. რადგან $0 \leq y \leq 1$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(F_X(X) < F_X(x)) \\ &= P(X \leq x) \\ &= y. \end{aligned}$$

შესაბამისად, Y ერთგვაროვნად არის განაწილებული შუალედზე $[0,1]$.

მეორესმხრივ, თუ $F_X()$ ერთი ერთზე ფუნქციაა, შეგვიძლია მისი შებრუნებულის, $F_X^{-1}(U)$, გამოყენებით ერთგვაროვანი შემთხვევითი ცვლადი, U, ნებისმიერი განაწილების მქონე შემთხვევით ცვლადად გარდავქმნათ.

$$U \longrightarrow \boxed{F_X^{-1}(\cdot)} \longrightarrow X$$

ამ ორი გარდაქმნის გაერთიანებით შეგვიძლია ნებისმიერი შემთხვევითი ცვლადის ნებისმიერ სხვა ცვლადად გარდაქმნა: $X \sim F_X(x) \to Z \sim F_Z(z)$, იმ პირობით, რომ $F_Z()$ ერთი ერთზე ფუნქციაა.

$$X \longrightarrow \boxed{F_X(\cdot)} \xrightarrow{U} \boxed{F_Z^{-1}(\cdot)} \longrightarrow Z$$

თქვენი მიზანია იდენტურად განაწილებული ერთგვაროვანი შემთხვევითი ცვლადებისგან, $X \sim U[0,1]$, მიიღოთ ექსპონენციალურად განაწილებული ცვლადი კუმულატიური განაწილების ფუნქციით

$$F_X(x) = (1 - e^{-3x})u(x).$$

გამოიყვანეთ ამისთვის საჭირო გარდაქმნა.

მინიშნება: $F_X^{-1}\big(F_X(X)\big) = X$; რადგან მოცემული ფუნქციაა $F_X(x) = (1 - e^{-3x})u(x)$, უნდა გამოთვალოთ მისი შებრუნებული. ($F_X(X)$ ერთგვაროვნად არის განაწილებული.)

rand(1,N) ბრძანების გამოყენებით დააგენერირეთ ერთგვაროვნად განაწილებული შემთხვევითი ცვლადები. თქვენი შექმნილი empcdf ფუნქციის გამოყენებით ააგეთ ექსპონენციალურად განაწილებული შემთხვევითი ცვლადების გრაფიკები შემდეგი ორი შემთხვევისთვის: $N = 20$ და $N = 200$, შუალედზე $x = [-1: 0.001: 2]$, იგივე გრაფიკზე გამოსახეთ $F_X(x) = (1 - e^{-3x})u(x)$.

5 ალბათობის სიმკვრივის ფუნქციის მიახლოებით გამოთვლა

შემთხვევითი ცვლადის სტატისტიკური თვისებები სრულად აღიწერება მისი ალბათობის სიმკვრივის ფუნქციით (PDF) (იმ დაშვებით, რომ ის არსებობს). შესაბამისად, გამოსადეგია შემთხვევითი ცვლადის მონაცემებიდან PDF-ის შეფასება.

სიმკვირივის ფუნქციის მიღება ემპირიული კუმულატიური სიმკვრივის ფუნქციის გაწარმოებით ვერ მიიღება, რადგან ის წვეტებს შეიცავს. გაწარმოების ნაცვლად, გვჭირდება გამოვთვალოთ ალბათობა, რომ შემთხვევითი ცვლადი რეალური ღერძის კონკრეტულ შუალედში იღებს მნიშვნელობას. ამისთვის ***ჰისტოგრამას*** გამოვიყენებთ.

5.1 ჰისტოგრამა

ჩვენი მიზანია x-ღერძის სასრულ შუალედზე გამოვთვალოთ ნებისმიერი ალბათობის სიმკვრივის ფუნქციის მიახლოება. ამისთვის შუალედს L თანაბარი სიგანის ქვე-შუალედებად, "ყუთებად" დავყოფთ და თითოეული ყუთისთვის გამოვითვლით $f_X(x)$ მიახლოებას. შუალედის საწყისად და დასასრულად ავიღოთ წერტილები x_0 და x_L. L შუალედი მოთავსებული იქნება შუალედებზე $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{L-1}, x_L]$. თითოეული შუალედის სიგრძეა $\Delta = \frac{x_L - x_0}{L}$. ნოტაციის სიმარტივისთვის k-ური ყუთი ავღნოშნოთ როგორც $b(k)$.

ასევე, განვსაზღვროთ $\hat{\mathrm{f}}(k)$, როგორც ალბათობა, რომ X k-ურ ყუთს, $b(k)$, ეკუთვნის.

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{f}}(k) &= P\big(X \in b(k)\big) \\ &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_X(x)dx \\ &= f_X(x)\Delta,\end{aligned}$$

სადაც ბოლო ნაბიჯში დავუშვით, რომ ყუთის სიგანე Δ ძალიან მცირეა.

ჰისტოგრამის თითო სვეტის სიმაღლე შეესაბამება ალბათობას, რომ X შესაბამის ყუთს ეკუთვნის. ანუ, $\hat{\mathrm{f}}(k) = \frac{H(k)}{N} \approx f_X(x)$, სადაც N ყუთების რაოდენობა, ხოლო $H(k)$, $b(k)$ ყუთში ელემენტების რაოდენობაა.

U შუალედგზე $[0,1]$ ერთგვაროვნად განაწილებული შემთხვევითი ცვლადია შემდეგი კუმულატიური განაწილებით, $F_U(u)$:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ u, & 0 \leq u \leq 1 \\ 1, & u > 1 \end{cases}$$

შეგვიძლია ახალი შემთხვევითი ცვლადის, $X = U^{1/3}$, კუმულატიური განაწილება გამოვთვალოთ

$$\begin{aligned}F_X(x) &= P(X \leq x) = P\left(U^{\frac{1}{3}} \leq x\right) \\ &= P(U \leq x^3) = F_U(u)|_{u=x^3} \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

ააგეთ $F_X(x)$ გრაფიკი $[0,1]$ შუალედზე და ანალიტიკურად გამოიყვანეთ ალბათობის სიმკვრივის ფუნქცია, $f_X(x)$. იგივე შუალედზე ააგეთ მისი გრაფიკი.

$L = 20; x_0 = 0; x_L = 1$ მონაცემებისთვის MATLAB-ის გამიყენებით გამოთვალეთ $\hat{\mathrm{f}}(k)$: ალბათობა, რომ X $b(k)$ ყუთს ეკუთვნის. გამოიყენეთ შემდეგი ტოლობა: $\hat{\mathrm{f}}(k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$. ააგეთ $\hat{\mathrm{f}}(k), k = 1,2, \ldots, L$ stem ბრძანების გამოყენებით.

დააგენერირეთ ერთგვაროვნად განაწილებული შემთხვევითი ცვლადის, U, 1000 მონაცემი rand ბრძანების გამოყენებით. გამოთვალეთ შემთხვევითი ვექტორი $X = U^{1/3}$. (შუალედზე $[0,1]$)

იგივე შუალედზე MATLAB-ის ფუნქციის, hist, გამოყენებით შექმენით X მონაცემების ნორმალიზებული ჰისტოგრამა, თანაბარდაშორებული 20 ყუთის გამოყენებით. ჯერ გამოთვალეთ H = hist(X,(0.5:19.5)/20), შემდეგ მოახდინეთ მისი ნორმალიზება. გამოსახეთ ნორმალიზებული ჰისტოგრამა $H(k)/N$ და $\hat{\mathrm{f}}(k)$ ერთ ფანჯარაში. შეადარეთ ეს ორი ჰისტოგრამა. რა არის მცირე და დიდი ზომის ყუთის სიგანის არჩევის უარყოფითი და დადებითი მხარე?