ლაბორატორია 8

დისკრეტული დროის შემთხვევითი პროცესები 2

1 ბივარიატული განაწილება

ამ კვირაში ბივარიატულ (ორ ცვლადიან) განაწილებას შეისწავლით და სიგნალების დამუშავებისთვის მისი პრაქტიკული გამოყენების მეთოდებს დანერგავთ. ბივარიატული განაწილება აღწერს როგორ არის ორი შემთხვევითი ცვლადი დაკავშირებული. იხილავთ კორელაციის და კოვარიაციის პრაქტიკულ გამოყენებას შემთხვევითი პროცესების აღწერისთვის.

1.1 ბივარიატული განაწილების მიმოხილვა

ამ ნაწილში მიმოვიხილავთ ლექციაზე დაფარულ საკითხებს თუ ბივარიატული განაწილების საკითხვი თქვენთვის უკვე გასასებია შეგიძლიათ 1.2 ნაწილზე გადახვიდეთ და ამ ნაწილს საჭიროების შემთხვევაში დაუბრუნდეთ.

ხანდახან არა ერთი არამედ რამოდენიმე შემთხვევითი ცვლადის გამოყენება გვჭირდება. ამ ნაწილში ბივარიატულ განაწილებას განვიხილავთ, თუმცა ამ თეორიის განზოგადება ორზე მეტ ცვლადზეც არის შესაძლებელი.

შემთხვევით ცვლადებს X და Y, შესაბამისად, აქვთ კუმულატიური განაწილების ფუნქციები (CDF) $F_X(x)$ და $F_Y(y)$, ამ ფუნქციებს მარგინალური კუმულატიური სიმკვრივის ფუნქციებიც ეწოდებათ. ბივარიატულ (ერთობლივ) CDF-ს განვმარტავთ, როგორც

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y). \tag{1}$$

თუ ერთობლივი კუმულატიური სიმკვრივის განაწილება საკმარისად გლუვია, შეგვიძლია განვმარტოთ ალბათობის სიმკვრივის ფუნქცია

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y). \tag{2}$$

შესაბამისად, ერთობლივი სიმკვრივის ფუნქციის გამოყენებით ერთობლივი CDF გამოთვლა შემდეგნაირად არის შესაძლებელი:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(s,t) ds dt. \tag{3}$$

შემთხვევითი ცვლადები X და Y დამოუკიდებელია იმ შემთხვევაში თუ მათი ერთობლივი CDF და ასევე PDF განცალებადი ფუნქციებია:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y). \tag{4}$$

ცვლადების დამოუკიდებლობა ნიშნავს, რომ ერთი შემთხვევითი ცვლადი მეორეზე არაფერს გვეუბნება. აქედან გამომდინარეობა, რომ თუ X და Y დამოუკიდებელი ცვლადებია მათი ლოდინის ნამრავლი მათი ნამრავლის ლოდინია:

$$E[XY] = E[X]E[Y] \tag{5}$$

მიუხედავად იმსა, რომ ერთობლივი განაწილება ცვლადების, X და Y, სრულ ინფორმაციას შეიცავს, მისი გამოთვლა ხშირად რთულია. ეს უმედესად პრობლემა არ არის, რადგან სიგნალების დამუშავების შემთხვევაში ცვლადებს, X და Y, შორის უბრალო კავშირის აღწერა საკმარისია. სამი სიდიდე, რომელიც ამ კავშირს აღწერს არის კორელაცია, კოვარიაცია და კორელაციის კოეფიციენტი.

- კორელაცია

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy \tag{6}$$

- კოვარიაცია

$$E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{X,Y}(x,y)dxdy \tag{7}$$

- კორელაციის კოეფიციენტი

$$\rho_{XY} = \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{E[XY]-\mu_X\mu_Y}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{8}$$

თუ კორელაციის კოეფიციენტი ნულია, X და Y ცვლადებს შორის კორელაცია არ გვაქვს.

1.2 ორი შემთხვევითი ცვლადის მონაცემები

ამ ექსპერიმენტში გამოიკვლევთ კავშირს (X_i, Z_i) შემთხვევითი ცვლადების მონაცემების გრაფიკს და კორელაციის კოეფიციენტს შორის. როგორც მოსალოდნელია, ვნახავთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტი განსაღვრავს (X_i, Z_i) მონაცემების გრაფიკის ფორმას.

დავუშვათ X და Y დამოუკიდებელი გაუსის განაწილების მქონე შემთხვევითი ცვლადებია ($\mu = 0;\ \sigma^2 = 1$). განვიხილავთ კორელაციას X და Z ცვლადებს შორის, სადაც

1. $Z = Y$
2. $Z = (X+Y)/2$
3. $Z = (4X+Y)/5$
4. $Z = (99X+Y)/100$

თუ Z ორი გაუსის შემთხვევითი ცვლადის წრფივი კომბინაციაა, თვითონაც გაუსის განაწილება აქვს.

MATLAB-ის გამოყენებით დააგენერირეთ დამოუკიდებელი, იდენტურად განაწილებული X მონაცემები: $X_1, X_2, \dots, X_{1000}$. ანალოგიურად დააგენერირეთ Y ცვლადის 1000 მონაცემი. ზემოთ მოცემული ოთხი Z ცვლადისთვის:

1. განტოლება (8)-ის გამოყენებით ანალიზური მეთოდებით გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი ρ_{XZ}.
2. დაგენერირებული X და Y მონაცემების გამოყენებით შექმენით Z მონაცემები.
3. გრაფიკზე გამოსახეთ წერტილები $(X_1, Z_1), (X_2, Z_2), \dots, (X_{1000}, Z_{1000})$. წერტილების წრფეებით დაკავშირების გარეშე გამოსახვისთვის გამოიყენეთ plot(X,Z,'x'). subplot ბრძანების გამოყენებით Z-ს ოთხივე შემთხვევისთვის ააგეთ გრაფიკები ერთ ფანჯარაში.
4. თქვენი დაგენერირებული მონაცემებისგან გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი
$$\hat{\rho}_{XZ} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \hat{\mu}_X)(Z_i - \hat{\mu}_Z)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \hat{\mu}_X)^2 (Z_i - \hat{\mu}_Z)^2}}$$
რამდენად ახლოსაა $\hat{\rho}_{XZ}$ ანალიტიკურად გამოთვლილ კორელაციასთან?

2 გაფილტრული შემთხვევითი პროცესების ავტოკორელაცია

ლაბის ამ ნაწილში თქვენ დააგენერირებთ დისკრეტული დროის შემთხვევით პროცესებს და მათ გასაანალიზებლად კორელაციას გამოიყენებთ.

2.1 შემთხვევითი პროცესის მიმოხილვა

დისკრეტული დროის შემთხვევითი პროცესი X_n შემთხვევითი ცვლადების მიმდევრობაა. ანუ, ყველა n ინდექსისთვის X_n შემთხვევითი ცვლადია. შემთხვევითი პროცესის ანალიზისთვის ავტოკორელაცია მნიშვნელოვანი ფუნქციაა. თუ X ფართოდ სტაციონარული (WSS (wide-sense stationary)) პროცესია, ავტოკორელაცია მოცემულია როგორც

$$r_{XX} = E[X_n X_{n+m}], \quad m = \cdots, -1,0,1,2 \ldots. \tag{9}$$

ფართოდ სტაციონარული პროცესისთვის, ავტოკორელაცია არ იცვლება n-ის მიმართ. ასევე, რადგან $E[X_n X_{n+m}] = E[X_{n+m} X_n]$, ავტოკორელაცია დაყოვნების, m, ლუწი ფუნქციაა.

ინტუიტიურად ავტოკორელაცია განსაზღვრავს რამდენად ძლიერად არიან ერთმანეთთან ასოცირებული m დაყოვნების მქონე შემთხვევითი პროცესის ელემენტები. მაგალითად, თუ X დამოუკიდებელი, იდენტურად განაწილებული შემთხვევითი ცვლადების მიმდევრობაა ($\mu = 0;\ \sigma^2 = 1$), ავტოკორელაცია მოცემულია როგორც

$$\begin{aligned} r_{XX} &= E[X_n X_{n+m}] \\ &= \begin{cases} E[X_n X_{n+m}], & m \neq 0 \\ E[X_n^2], & m = 0 \end{cases} \\ &= \sigma_X^2 \delta(m). \end{aligned} \tag{10}$$

ასეთი პროცესს თეთრ ხმაურს ვუწოდებთ. თეთრი ხმაურის სპექტრი ყველა სიხშირეს თანაბრად შეიცავს და ასეთი პროცესის მნიშვნელობებს X_n და X_{n+m} ყველა $m \neq 0$ მნიშვნელობისთვის ნულოვანი კორელაცია გააჩნიათ.

თუ თეთრ შემთხვევით პროცესს X_n LTI ფილტრში გავატარებთ, გამომავალი შემთხვევით ცვლადებს, Y_n, შორის შესაძლოა არა-ნულოვანი კორელაცია არსებობდეს. შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ გამომავალი სიგნალის ავტოკორელაცია $r_{YY}(m)$ ფილტრის იმპულსური მახასიათებლით, $h[n]$, არის დაკავშირებული შემავალი სიგნალის ავტოკორელაციასთან, $r_{XX}(m)$:

$$r_{YY} = h(m) * h(-m) * r_{XX} \tag{11}$$

2.2 LTI ფილტრი და შემთხვევითი პროცესი

განვიხილოთ გაუსის შემთხვევითი ცვლადი X_n საშუალოთი 0 და დისპერსიით 1, რომელიც შემავალია შემდეგი სხვაობიანი განტოლებით მოცემულ ფილტრში

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + x[n-2] \tag{12}$$

(10) და (11)-ის გამოყენებით გამოთვალეთ გამომავალი სიგნალის, Y_n, თეორიული ავტოკორელაცია.

დააგენერირეთ გაუსის შემთხვევითი ცვლადის, X $(\mu = 0;\ \sigma^2 = 1)$, 1000 მონაცემი. გაფილტრეთ მონაცემები (12)-ის გამოყენებით. გაფილტრულ სიგნალს ავღნიშნავთ $Y_i, i = 1,2, \ldots, 1000$.

დაიტანეთ გაფილტრული წერტილები 4 სხვადასხვა გრაფიკზე შემდეგნაირად:

- პირველი გრაფიკი შედგება წერტილებისგან (Y_i, Y_{i+1}). მონაცემები ერთეული დაყოვნებით არიან დაცილებული.
- დანარჩენი სამი გრაფიკი შედგება, შესაბამისად, (Y_i, Y_{i+2}), (Y_i, Y_{i+3}) და (Y_i, Y_{i+4}) მონაცემებისგან.
- რას დასკვნა შეგიძლიათ გამოიდანოთ ამ გრაფიკებიდან?

რეალურ სისტემებზე მუშაობისას ავტოკორელაციის თეორიული მნიშვნელობა ხშირად უცნობია. შესაბამისად გვჭირდება მისი მიახლოების გამოთვლა მონაცემების ავტოკორელაციის გამოყენებით:

$$r'_{YY} = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} Y[n]Y[n+|m|], \qquad -(N-1) \leq m \leq N-1, \tag{13}$$

სადაც N ცვლადის, Y, მონაცემების რაოდენობაა.

MATLAB-ის გამოყენებთ გამოთვალეთ Y_n მონაცემების ავტოკორელაცია (13). შუალედზე $-20 \leq m \leq 20$ გამოსახეთ ორივე, თეორიული და გენერირებული მონაცემებით გამოთვლილი ავტოკორელაცია. რამდენად კარგი მიახლოებაა (13)? M-ის რა მნიშვნელობებისთვის არის r_{YY} da r'_{YY} მაქსიმუმი?

3 ორი შემთხვევითი პროცესის კორელაცია

ავტოკორელაციასთან ერთად შეგვიძლია ორი სხვადასხვა შემთხვევითი კორელაციის გამოთვლა. თუ X და Y ერთობლივი WSS შემთხვევითი პროცესებია, კორელაცია მოცემულია როგორც

$$c_{XY}(m) = E[X_n X_{n+m}], \quad m = \cdots, -1,0,1,2 \ldots.. \tag{14}$$

როგორც ავტოკორელაციის შემთხვევაში შეგვიძლია განვსაზღვროთ სხვადასხვა პროცესის კორელაცია მათი მონაცემების გამოყენებით.

$$c'_{XY} = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} X[n]Y[n+m], \qquad 0 \le m \le N-1, \tag{15}$$

$$c'_{XY} = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=|m|}^{N-1} X[n]Y[n+m], \qquad -(N-1) \le m \le 0, \tag{16}$$

რადგან ორი განსხვავებული ცვლადის კორელაცია m-ის ლუწი ფუნქცია არ არის მისი ორმხრივი განმარტებაა საჭირო, როგორც (15) და (16) განტოლებებშია მოცემული.

სიგნალების კორელაცია ხშირად გამოიყენება სონარულ და რადარულ სისტემებში, სამიზნემდე მანძილის გამოთვლისთვის. რადარულ სისტემაში ნულოვანი საშუალოს მქონე სიგნალი $X[n]$ გადაიცემა, რომელიც სამიზნიდან $D/2$ წამში ირეკლება. არეკლილი სიგნალი მიღების შემდეგ, ძლიერდება და მისი გაციფრულებით მიიღება $Y[n]$. მიღებული სიგნალის გაძლიერება შეგვიძლია მუდმივა α-ზე გამრავლებით ავღნიშნოთ. გვაქვს

$$Y[n] = \alpha X[n-D] + W[n], \tag{14}$$

სადაც $W[n]$ გარემოს, გადამცემის და მიმღების ერთიანი ხმაურია.

სამიზნემდე არსებული მანძილის გამოსათვლელად გვჭირდება დაყოვნების, D, გამოთვლა. ეს კი კორელაციით არის შესაძლებელი. c_{XY}-ის გამოსათვლელად (17)-ს (14)-ში ვსვავთ:

$$\begin{aligned} c_{XY}[m] &= E\big[X[n]Y[n+m]\big] \\ &= E[X[n](\alpha X[n-D+m] + W[n+m])] \\ &= \alpha E\big[X[n]X[n-D+m]\big] + E\big[X[n]\big]E[W[n+m]\big] \\ &= \alpha E\big[X[n]X[n-D+m]\big]. \end{aligned}$$

ბოლო ნაბიჯზე დავუშვით, რომ $X[n]$ და $W[n+m]$ სიგნალებს ნულოვანი კორელაცია და საშუალო აქვთ. შესაბამისად, ავტოკორელაციის განმარტების გამოყენებით, გვაქვს

$$c_{XY}[m] = \alpha r_{XX}(m-D). \tag{15}$$

რადგან $r_{XX}(m-D)$ მაქსიმალურ მნიშვნელობასი იღებს, როდესაც $m = D$, შეგვიძლია კორელაციაში $c_{XY}(m)$-ის მაქსიმუმის პოვნით დაყოვნება D ვიპოვოთ. როგორც წესი,, გადამული სიგნალის, $X[n]$, ავტოკორელაციის მაქსიმუმი $m = 0$-ზეა: $\max\big(r_{XX}(m)\big) = r_{XX}(0)$.

3.1 რადარული დეტექცია

ამ ექსპერიმენტისთვის გადმოწერეთ რადარის მონაცემების ფაილი radar.mat.

განტოლებების (15) და (16) გამოყენებით დაწერეთ MATLAB-ის ფუნქცია C = corR(X,Y,m) ორ დისკრეტული დროის შემთხვევით პროცესს შორის კორელაციის გამოსათვლელად, დაყოვნება m-ისთვის.

თქვენი ფუნქციის გამოსაცდელად დააგენერირეთ ნულოვანი საშუალოს მქონე გაუსის შემთხვევითი ცვლადის 1000 ელემენტიანი ორი მიმდევრობა, X_n და Z_n. შემდეგ გამოთვალეთ ახალი მიმდევრობა $Y_n = X_n + Z_n$ და თქვენი ფუნქციის გამოყენებით იპოვეთ კორელაცია X და Y მიმდევრობებს შორის დაყოვნებებისთვის $-10 \le m \le 10$. ააგეთ კორელაციის ფუნქციის გრაფიკი.

რომელი დაყოვნების მნიშვნელობები იძლევა უდიდეს კორელაციას? რატომ?

რა არის კორელაციის ფუნქციის ტიპი, ლუწი თუ კენტი? რა არის ამის მიზეზი?

გახსენით გადმოწერილი radar.mat ფაილი MATLAB-ში ბრძანებით load radar. ვექტორები trans და received რადარის სისტემის მიერ გადაცემული და მიღებული სიგნალებია. გამოთვალეთ სიგნალის, trans, ავტოკორელაცია დაყოვნებებისთვის, $-100 \leq m \leq 100$, თქვენი ფუნქციის, corR, გამოყენებით.

გამოთვალეთ კორელაცია trans და received სიგნალებს შორის დაყოვნებებისთვის, $-100 \leq m \leq 100$. იპოვეთ დაყოვნება D.

ააგეთ გადაცემული და მიღებული სიგნალების გრაფიკები ერთ ფანჯარაში. შეგიძლიათ დაყოვნების, D, მიღებული სიგნალის ვიზუალური ინსპექციით?

ააგეთ გადაცემული სიგნალის ავტოკორელაციის გრაფიკი, $r'_{XX}(m), -100 \leq m < 100$.

ააგეთ გადაცემული და მიღებული სიგნალების კორელაცია, $c'_{XY}(m), -100 \leq m < 100$.

გამოთვალეთ დაყოვნება, D, კორელაციიდან, $c'_{XY}(m)$.