ლაბორატორია 2

ციფრული ფილტრების დიზაინი 1

1 შესავალი

ეს ლაბორატორია პირველია სამი ციფრული ფილტრების დიზაინის ლაბორატორიიდან. ამ კვირაში მარტივი FIR და IIR ფილტრების სტრუქტურის დანერგვაზე იმუშავებთ, მომდევნო ორი ლაბორატორია კი თითოელი მათგანის დიზაინზე ვკონცენტრირდებით.

ციფრული სიგნალების დამუშავებისას ხშირად არის საჭირო სიგნალიდან ზოგიერთი სიხშირული კომპონენტის წაშლა ან გაძლიერება. სიგნალის სიხშირული კომპონენტების დამუშავებას **ფილტრაცია** ეწოდება. წინა ლაბორატორიულ სამუშაოში თქვენ ნახეთ, როგორ შეიძლება ციფრული ფილტრების აუდიო სიგნალების დასამუშავებლად გამოყენება.

უმეტესად, ციფრული ფილტრების დიზაინი ორივეში, სიხშირულ და დროით სივრცეში მუშაობას მოითხოვს. ფილტრის სპეციფიკაციები ძირითადად სიხშირულ სივრცეშია მოცემული, თუმცა ფილტრის პრაქტიკაში დანერგვა სხვაობიანი განტოლების შესაბამისი სტრუქტურის გამოყენებით დროით სივრცეში ხდება. სიხშირულ ანალიზს Z-გარდაქმნის და დისკრეტული დროის ფურიე გარდაქმნით (DTFT) ვახორციელებთ.

ზოგადად, წრფივი, კაუზალური და დროით-ინვარიანტული ფილტრი შეგვიძლია სხვაობიანი განტოლებით გამოვსახოთ

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[n-i] - \sum_{i=0}^{M} a_i y[n-i]\,, \tag{1}$$

სადაც $x[n]$ და $y[n]$, შესაბამისად, შემავალი და გამომავალი სიგნალებია, b_i და a_i კოეფიციენტები ფილტრის პარამეტრებია. ამ განტოლებით მოცემულ ფილტრს N ნული და M პოლუსი აქვს. ყოველი $y[n]$ შემავალი სიგნალის წარსული და ახლანდელი მნიშვნელობების და გამომავალი სიგნალის წარსული მნიშვნელობების წრფივი კომბინაციით განისაზღვრება. სისტემის იმპულსური მახასიათებელი, $h[n]$, განსაზღვრულია, როგორც სისტემის რეაქცია შემავალ დელტა სიგნალზე, $\delta[n]$. შესაბამისად, $h[n]$ შემდეგი სხვაობიანიგანტოლების ამონახსნია

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \delta[n-i] - \sum_{i=0}^{M} a_i h[n-i]\,. \tag{2}$$

არსებობს ფილტრების ორი ზოგადი კლასი: უსასრულო იმპულსურ მახასიათებლიანი (IIR) და სასრულ იმპულსურ მახასიათებლიანი (FIR) ფილტრები. FIR ფილტრების შემთხვევაში ყველა, $a_i = 0$. ასეთ ფილტრს პოლუსები არ გააჩნია, ის მხოლოდ ნულებისგან შედგება. ამ შემთხვევაში სხვაობიანი განტოლება (2) მოცემულია, როგორც

$$h[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \delta[n-i]\,. \tag{3}$$

სხვაობიანი განტოლება (3), რომელიც რეკურსიული არ არის. შესაბამისად, იმპულსურ მახასიათებელს სასრული სიგრძე აქვს, N.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $a_i \neq 0$, სხვაობაინი განტოლება IIR ფილტრს აღწერს. ამ დროს $y[n] \neq 0$, როდესაც $n \to \infty$. თუმცა არსებობენ შემთხვევები, როდესაც $a_i \neq 0$ და ფილტრს სასრული იმპულსური მახასიათებელი აქვს (როდესაც ყველა პოლუსი ნულებთან იკვეცება.)

ფილტრების სიხშიურლი მახასიათებლის ანალიზისთვის Z-გარდაქმნა უმნიშვნელოვანესი იარაღია. დისკრეტული დროის სიგნალის Z-გარდაქმნა მოცემულია, როგორც

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}, \tag{4}$$

სადაც z კომპლექსური ცვლადია. DTFT Z-გარდაქმნის კონკრეტული შემთხვევას წარმოადგენს, როდესაც $z = e^{j\omega}$, ანუ z კომპლექსური სიბრტყის ერთეულოვან წრეზეა განლაგებული.

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}. \tag{5}$$

ფილტრის სიხშირული მახასიათებლის გამოსათვლელად $H(z)$-ს ერთეულოვან წრეზე, $z = e^{j\omega}$, ვაფასებთ:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i e^{-j\omega i}}{1+\sum_{k=1}^{M} a_k e^{-j\omega k}}. \tag{6}$$

2 მარტივი FIR ფილტრის დიზაინი

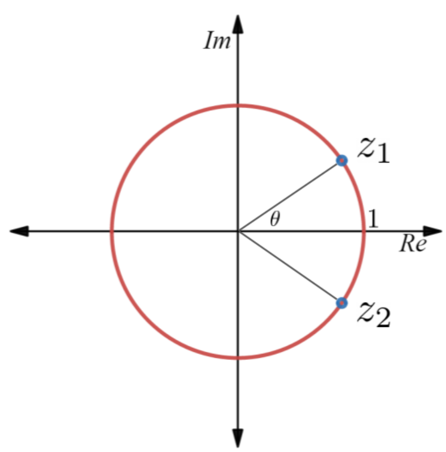

Figure 1 ნულები ერთეულოვან წრეზე

თქვენი მიზანი მეორე რიგის FIR ფილტრის დიზაინია. ფილტრის ნულები Z-სივრცეში ერთეულოვან წრეზეა განლაგებული, როგორც ზემოთაა ნაჩვენები. იმისთვის, რომ ფილტრის იმპულსური მახასიათებელი ნამდვილ-მნიშვნელობიანი მიმდევრობა იყოს, ნულები ერთმანეთის კომპლექსურად შეუღლებულები უნდა იყვნენ:

$$z_1 = e^{j\theta}, \quad z_2 = e^{-j\theta},$$

სადაც θ კუთხეა, რომელიც დადებითი ნამდვილი ღერძის მიმართ აითვლება.

1. ამ ფილტრისთვის ჩაწერეთ გადაცემის ფუნქცია $H(z)$;
2. გაამარტივეთ გადაცემის ფუნქცია (ჩაწერეთ მრავალწევრის ფორმით) და გამოიყენეთ ის ფილტრის სხვაობიანი განტოლების გასაგებად;
3. შექმენით მიღებული სხვაბიანი განტოლების შესაბამისი ბლოკ-სქემა;
4. გამოთვალეთ იმპულსური მახასიათებელი, $h[n]$.

ფილტრი FIR ფილტრია, რადგან იმპულსურ მახასიათებელს სასრული სიგრძე აქვს. ნებისმიერი ფილტრი, რომელსაც მხოლოდ ნულები გააჩნია (გარდა პოლუსებისა $z = 0$-ზე ან $z = \pm\infty$-ზე) FIR ფილტრია. გადაცემის ფუნქციის ნულები იმ სიხშირეებს შეესაბამებიან, რომლებიც ფილტრში ვერ აღწევს. $z_1 = e^{j\theta}, z_2 = e^{-j\theta}$ ნულები ნიშნავს, რომ $H\left(e^{\pm j\theta}\right) = 0$, ანუ ფილტრი სინუსოიდებს სიხშირით $\omega = \theta$ სრულად უკუაგდებს.

MATLAB-ის გამოყენებით გამოთვალეთ და ააგეთ ფილტრის სიხშირული მახასიათებლის მაგნიტუდის გრაფიკები $-\pi < \omega < \pi$ შუალედზე, θ-ს შემდეგი მნიშვნელობებისთვის: $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. სამივე გრაფიკს ერთ ფანჯარაში მოუყარეთ თავი

subplot ბრძანების გამოყენებით. განიხილეთ რა ეფექტი აქვს θ-ს მნიშვნელობას სიხშირული მახასიათებლის მაგნიტუდაზე.

შემდეგ ექსპერიმენტში, თქვენ შემუშავებულ ფილტრს არასასურველი სინუსოიდური ინტერფერენციის გასაფილტრად გამოიყენებთ. პირველ რიგში გადმოწერეთ დისკრეტული დროის ფურიე ტრანსფოირმის გამოსათვლელი M-ფაილი DTFT.m და სინუსოიდური სიგნალით დაბინძურებული აუდიო ფაილი.

აუდიო ფაილის წასაკითხად გამოიყენეთ:

```
[x,Fs] = audioread('gala_sin.wav');
x=x(:,1)';
```

ბრძანების მეორე სტრიქონი ორ არხიანი აუდიო ფაილიდან მხოლოდ ერთს იყენებს. რა თქმა უნდა, შეგიძლიათ ორივე არხი შეინარჩუნოთ და დაამუშავოთ, თუმცა ამჯერად ეს საჭირო არ არის.

მოუსმინეთ ფაილს `sound(x,Fs)` გამოყენებით და გამოსახეთ აუდიო ფაილის ანათვალების გარკვეული რაოდენობა გრაფიკზე. შეგიძლიათ სიგნალის ნებისმიერი თანმიმდევრული 200 ანათვალი აიღოთ. განიხილეთ რატომ შეესაბამება აუდიო და ვიზუალი ერთმანეთს? იპოვეთ დამაბინძურებელი სინუსოიდის სიხშირე. (მინიშნება: აუდიო სიგნალის სწორი დროის ვექტორის მიმართ ასაგებათ შექმენით დროის ვექტორი $T_s = \frac{1}{F_s}$ ბიჯის სიგრძეებით.)

შემდეგი ნაბიჯი სიგნალის DTFT-ის გამოთვლაა, ამისთვის მზა ფუნქცია DTFT.m გამოიყენეთ:

[X,w]=DTFT(x,M),

სადაც x შემავალი სიგნალია და M განსაზღვრავს გამომავალი DTFT წერტილების რაოდენობას. [X,w]=DTFT(x,0) იძლევა გამომავალ DTFT-ს, რომელიც შემავალი სიგრძის ტოლია. (M-ის მითითება მხოლოდ იმ შემთხვევაშია საჭირო, x ძალიან მოკლე ვექტორია). w შესაბამისი სიხშირეების ვექტორია.

გამოთვალეთ აუდიო სიგნალის DTFT და გამოსახეთ მისი ამპლიტუდა სიხშირის მიმართ. შეამჩნევთ, რომ სპექტრში ორი უმაღლესი წერტილია. ისინი სინნუსოიდურ ინტერფერენციას შეესაბამებიან. გამოიყენეთ MATLAB-ის max ბრძანება უმაღლესი წერტილების ზუსტი სიხშირეების გასაგებად. ეს ის θ მნიშვნელობა იქნება, რომელსაც ფილტრის პარამეტრად გამოიყენებთ.

ბრძანება [X_max,I_max]=max(abs(X)) აბრუნებს ვექტორის უდიდეს მნიშვნელობას და მის შესაბამის ინდექსს I_max.

შექმენით ფუნქცია FIR_filt(x), რომელიც სინუსოიდური ინტერფერენციის მოსაშორებლად გამოიყენება. შეგიძლიათ თქვენს ფუნქციაში MATLAB-ის filter ფუნქცია გამოიყენოთ. მოუსმინეთ მიღებულ შედეგს და განიხილეთ თქვენი ფილტრის ეფექტი.

ფილტრის სიხშირული მახასიათებლის შესასწავლად გამოიყენეთ fvtool. აღწერეთ, როგორ შეესაბამება სიხშირული მახასიათებელი თქვენს დამუშავებულ აუდიო სიგნალს. გარდა სინუსოიდის მოშორებისა რა ეფექტი აქვს თქვენს ფილტრს?

3 მარტივი IIR ფილტრის დიზაინი

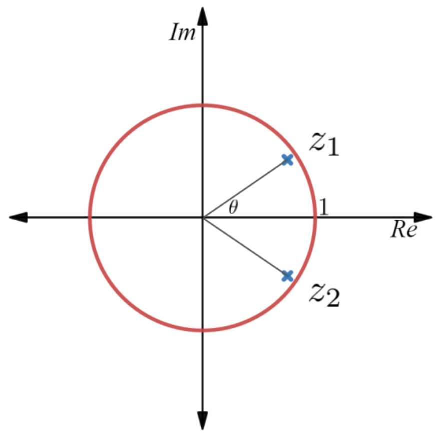

Figure 2 პოლუსები ერთეულოვან წრეში

როგორც ვნახეთ, ნულებიანი რაციონალური გადაცემის ფუნქცია ამცირებს (ანულებს) სიგნალში θ-ს შესაბამისი კომპონენტის ამპლიტუდას. პოლუსები აძლიერებენ სიგნალს თავიანთი სიხშირის სიახლოვეში. ლაბის ამ ნაწილში გამოიკვლევთ თუ როგორ შეიძლება პოლუსების გამოყენებით ვიწროზოლოვანი სიგნალებიდან ფონური ხმაურის მოშორება. ასეთი მეთოდი ხშირად გამოიყენება რადიო-სიხშირეების დემოდულაციაში.

განვიხილავთ შემდეგ გადაცემის ფუნქციას მეორე რიგის IIR ფილტრისთვის. პოლუსებიც, როგორც ნულების შემთხვევაში გვქონდა, კომპლექსურად შეუღლებული წევრებია:

$$H(z) = \frac{1-r}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{1-r}{1-2rcos(\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}} \tag{7}$$

პოლესებს შემდეგი ფორმა აქვს: $p_1 = re^{j\theta},\ p_2 = re^{-j\theta}$, სადაც r მანძილია ათვლის წერტილიდან, θ კი კუთხეა ნამდვილი ღერძის მიმართ. კაუზალური ფილტრებისთვის პოლუსები აუცილებლად ერთეულოვანი წრის შიგნით უნდა იყვნენ განლაგებული, $|r| < 1$. ვნახავთ, რომ პოლუსების ერთეულოვანი წრის სიახლოვეში განლაგებით გადაცემის ზოლის სიგანის დრამატულად შემცირებაა შესაძლებელი. ეს ორ-პოლუსიანი ფილტრი IIR ფილტრია, რადგან მისი იმპულსური მახასიათებელი უსასრულო სიგრძისაა. ნებისმიერი ფილტრი, რომელსაც არატრივიალური პოლუსები გააჩნია (ტრივიალური პოლუსები $z = 0$ და $z = \pm\infty$-ზე მდებარეობენ) IIR სისტემაა, გარდა იმ შემთხვევისა როდესაც პოლუსები და ნულები იკვეცებიან.

1. $H(z)$-დან გაიგეთ მოცემული ორ-პოლუსიანი ფილტრის სხვაობიანი განტოლება.

2. შექმენით მიღებული სხვაბიანი განტოლების შესაბამისი ბლოკ-სქემა.
3. გამოთვალეთ ფილტრის სიხშირული მახასიათებელი $|H(e^{j\omega})|$, $|\omega| < \pi$ შუალედზე $\theta = \pi/3$ კუთხისთვის და r-ის შემდეგი სამი მნიშვნელობისთვის $r = 0.99, r = 0.9,\ r = 0.7.$

სამივე გრაფიკს ერთ ფანჯარაში მოუყარეთ თავი subplot ბრძანების გამოყენებით. განიხილეთ რა ეფექტი აქვს r-ს მნიშვნელობას სიხშირული მახასიათებლის მაგნიტუდაზე.

შემდეგ ექსპერიმენტში, თქვენ შექმნით ფილტრს $H(z)$ მოდულირებული სინუსოიდის ფონური ხმაურისგან მოსაშორებლად. გადმოწერეთ ფაილი pcm.mat და მოუსმინეთ მას ბრძანება sound-ის გამოყენებით. დისკრეტიზაციის სიხშირედ მიუთითეთ $F_s = 8000Hz$.

ააგეთ pcm სიგნალის გრაფიკი ასი ანათვალისთვის (pcm(100:200)) და გამოთვალეთ DTFT. ააგეთ DTFT-ის მაგნიტუდის გრაფიკი $|\omega| < \pi$ შუალედისთვის. სპექტრში არსებული ორი წვერო მოდულირებული სიგნალის ცენტრალურ სიხშირეს შეესაბამება. დაბალი ამპლიტუდის მქონე ზოლი ფონური ხმაურის სპექტრია. ხმაურის მოსაშორებლად და სასურველი სიგნალის გასაძლიერებლად ორ-პოლუსიან IIR ფილტრს გამოვიყენებთ.

Pcm სიგნალი მოდულირებულია სიხშირით $F_c = 3146Hz$ და დისკრეტიზირებულია სიხშირით $F_s = 8000Hz$. ამ მნიშვნელობების გამოყეებით

გამოთვალეთ θ-ს მნიშვნელობა $H(z)$ ფილტრისთვის. (დისკრეტიზაციის თეორემის მიხედვით 2π წრიული სიხშირე დისკრეტიზაციის სიხშირეს შეესაბამება).

დაწერეთ MATLAB-ის ფუნქცია IIR_filt(x), რომელიც თქვენ შემუშავებულ ორ-პოლუსიან ფილტრს დანერგავს, თქვენი გამოთვლილი θ-სთვის და $r = 0.995$. გაფილტრეთ pcm სიგნალი და გამოთვალეთ მისი DTFT, გამოსახხეთ მიღებული DTFT-ის მაგნიტუდა შუალედზე $\omega \in [\theta - 0.02, \theta + 0.02]$, $\omega = \theta$-ს გარშემო. მოუსმინეთ გაფილტრულ სიგნალს, განიხილეთ რამდენად საგრძნობია ხმაურის შემცირება თავდაპირველ სიგნალთან შედარებით?

შეიძლება r-ის უფრო დიდი მნიშვნელობის გამოყენება? მაგალითად $r = 0.9999$.
რატომ არ არის ასეთი მნიშვნელობის გამოყენება რეკომენდირებული?

4 ფილტრის დიზაინი იდეალური ფილტრის შემოკლებით

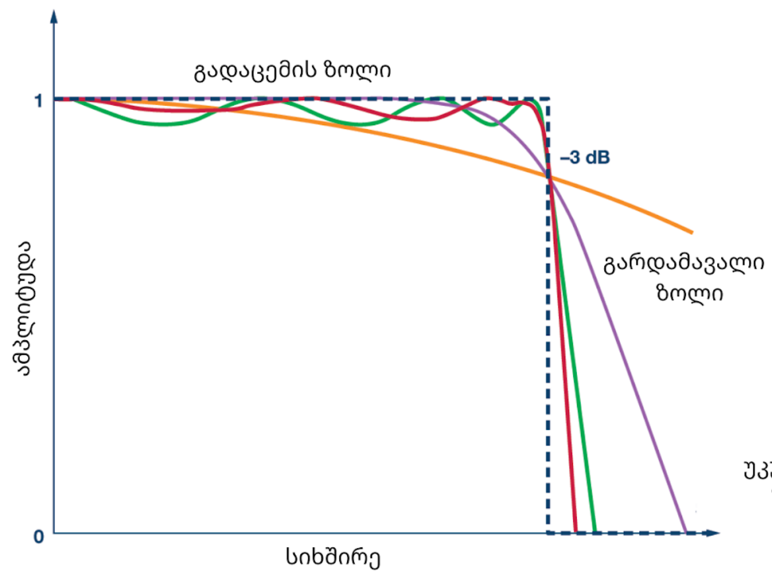

Figure 3 დაბალსიხშირული ფილტრის სიხშირული ზოლები

ხშირად გვჭირდება დაბალსიხშირული, მაღალსიხშირული ან ზოლირგამტარი ფილტრის კარგი მიახლოების შემუშავება. ზემოთ ნაჩვენებია დაბალსიხშირული ფილტრის ტიპიური სპეციფიკაციები. სიხშირეები $|\omega| < \omega_p$ გადაცემის ზოლს ჰქმნიან, ხოლო სიხშირეები $\omega_s < |\omega| < \pi$ უკუგდების ზოლს. ნებისმიერი რეალური ფილტრისთვის $\omega_p < \omega_s$. სიხშირეთა შუალედით $\omega_p < \pi < \omega_s$ გარდამავალი ზოლია მოცემული. ფილტრის სიხშირული მახასიათებლის მაგნიტუდა, $|H(e^{j\omega})|$, გადაცემის და უკუგდების ზოლებში შემდეგი ორი განტოლებით არის შეზღუდული

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right) - 1\right| \leq \ \delta_p, \ \ |\omega| < \omega_p,$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \leq \ \delta_s, \ \ \omega_s < \ |\omega| \leq \pi,$$

სადაც δ_p და δ_s, შესაბამისად, გატარების და უკუგდების ზოლის ტოლერანტობებია. უმეტესი დაბალსიხშირული ფილტრის შემუშავების მეთოდები ამ ოთხ პარამეტრზეა დამოკიდებული.

ამ პარამეტრების შერჩევის სადემონსტრაციოდ განვიხილავთ საუბრის სიგნალიდან ფონური ხმაურის გაფილტრვის პრობლემას. ქვემოთ მოცემულია სიგნალის სპექტრი, რომელშიც მაღალი სიხშირეები ხმაურს, დაბალი სიხშირეები კი სიგნალის საუბრის ნაწილს წარმოადგენენ. ხმაური $|\omega| > 2.2$ შუალედშია განთავსებული, დაბალ სიხშირული საუბარი კი $|\omega| < 1.8$ შუალედზე. გადმოწერეთ აუდიო ფაილი nspeech, გახსენით MATLAB-ში და მოუსმინეთ სიგნალს ბრძანება sound-ის გამოყენებით. მიუთითეთ $F_s = 8000Hz$. თქვენი მიზანია იდეალური დაბალსიხშირული ფილტრის

იმპულსური მახასიათებლის შემოკლებით შექმნათ ფილტრი, რომელიც სიგნალში საუბარს და ფონურ ხმაურს გააცალკევებს.

იდეალურ დაბალსიხშირულ ფილტრს აქვს შემდეგი სიხშირული მახასიათებელი

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_c\\ 0, & \omega_c\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

და შესაბამისი იმპულსური მახასიათებელია

$$h[n]=\frac{\omega_c}{\pi}sinc\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right),\qquad -\infty<n<\infty$$

რა თქმა უნდა, არც ერთ რეალურ ფილტრს არ შეიძლება უსასრულოდ გრძელი იმპულსური მახასიათებელი ჰქონდეს. იმისთვის, რომ ასეთი ფილტრის რეალიზებადი მიახლოებადი გვქონდეს შეგვიძლია უსასრულო მახასიათებლის შემოკლებული ვერსია გამოვიყენოთ

$$h_t[n]=\begin{cases}\frac{\omega_c}{\pi}sinc\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right), & n=-M,\dots,-1,0,1,\dots,M\\ 0, & სხვა\end{cases}$$

DTFT-ის მოდულაციის თეორემის მიხედვით შემოკლებული ფილტრის სიხშირული მახასიათებელი იდეალური ფილტრის მახასიათებლის (მართკუთხა ფუნქცია) და შემოკლებისთვის გამოყენებული ფანჯრის DTFT-ს კონვოლუციაა. ფანჯრის DTFT Figure 1-ზეა მოცემული. შეამჩნევთ, რომ ფანჯრის DTFT-ს დიდი ამპლიტუდის გვერდითი ბორცვები აქვს, ეს მიღებული ფილტრის უკუგდების ზოლში დიდი რხევის ამპლიტუდად გარდაისახება.

შემოკლებილი ფილტრის იმპულსური მახასიათებელი სასრული სიგრძისაა, თუმცა ფილტრი არაკაუზალურია. იმისთვის, რომ ფილტრი კაუზალურად ვაქციოთ, მახასიათებელი M ერთეულით მარჯვნივ უნდა წავანაცვლოთ. $N=2M+1$ სიგრძის ფილტრისთვის გვაქვს:

$$h[n]=\begin{cases}\frac{\omega_c}{\pi}sinc\left(\frac{\omega_c}{\pi}\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right) & n=0,1,\dots,N-1\\ 0 & სხვა\end{cases}\qquad(4)$$

დროით სივრცეში $\frac{N-1}{2}$ ერთეულით წანაცვლება სიხშირული მახასიათებლის $e^{-j\omega(N-1)/2}$-ზე გამრავლების ექვივალუნტურია. ეს ფილტრის სპექტრის მაგნიტუდაზე გავლენას არ ახდენს, თუმცა ფაზურ მახასიათებელს $-j\omega(N-1)/2$ წევრი ემატება. ასეთ ფილტრს წრფივი ფაზა აქვს, რადგან დამატებული ფაზა სიხშირის, ω, წრფივი ფუნქციაა.

დააპროგრამეთ იმპულსური მახასიათებელი სხვადასხვა M ფილტრის სიგრძისთვის ($M=7,21,101$) და გაფილტრეთ ხმაურიანი სიგნალი მათი გამოყენებით. (სიგნალის გასაფილტრად გამოიყენეთ MATLAB-ის conv ფუნქცია.)

მოუსმინეთ გაუფილტრავ და გაფილტრულ სიგნალს. შეგიძლიათ სხვადასხვა სიგრძის ფილტრებს შორის განსხვავების შემჩნევა? გაფილტრული სიგნალის უკეთ მოსასმენად შეგიძლიათ გაფილტრული სიგნალი 2-ზე ან 3-ზე გაამრავლოთ.

ააგეთ თითოეული ფილტრის სიხშირული მახასიათებლის მაგნიტუდის გრაფიკი და განიხილეთ მათ შორის განსხვავება.

- რა ეფექტი აქვს ფილტრის სიგრძეს უკუგდების ზოლში არსებული რხევების ამპლიტუდაზე? რატომ აქვს ეს ეფექტი?
- განიხილეთ მიღებული სიგნალის ხარისხი. რა ეფექტი აქვს ფილტრის ზომას დამუშავებული აუდიოს ხარისხზე?