MCSCN
TEMA 1

SERGIO PERNICE

ALGEBRA LINEAL SISTEMAS DE ECUACIONES

- Dos bienes
- Curvas de oferta (supply “s”) y demanda (d)
- Si el mercado es libre, los precios se vana a ajustar de modo que $q_i^d = q_i^s, i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
q_1^d &= a_{10}^d + a_{11}^d p_1 + a_{12}^d p_2 \\
q_1^s &= a_{10}^s + a_{11}^s p_1 + a_{12}^s p_2 \\
q_2^d &= a_{20}^d + a_{21}^d p_1 + a_{22}^d p_2 \\
q_2^s &= a_{20}^s + a_{21}^s p_1 + a_{22}^s p_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_1^d &= 10 - 1.0 \times p_1 + 0.5 \times p_2 \\
q_1^s &= 0 + 1.0 \times p_1 + 0.0 \times p_2 \\
q_2^d &= 20 + 0.7 \times p_1 - 2.0 \times p_2 \\
q_2^s &= 0 + 0.0 \times p_1 + 1.5 \times p_2
\end{aligned}$$

ALGEBRA LINEAL SISTEMAS DE ECUACIONES

- Dos bienes
- Curvas de oferta (supply "s") y demanda (d)
- Si el mercado es libre, los precios se vana a ajustar de modo que
- $q_i^d = q_i^s, i = 1, 2$

$$\begin{aligned} a_{10}^d + a_{11}^d p_1 + a_{12}^d p_2 &= a_{10}^s + a_{11}^s p_1 + a_{12}^s p_2 \\ a_{20}^d + a_{21}^d p_1 + a_{22}^d p_2 &= a_{20}^s + a_{21}^s p_1 + a_{22}^s p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(a_{11}^d - a_{11}^s\right) p_1 + \left(a_{12}^d - a_{12}^s\right) p_2 &= \left(a_{10}^s - a_{10}^d\right) \\ \left(a_{21}^d - a_{21}^s\right) p_1 + \left(a_{22}^d - a_{22}^s\right) p_2 &= \left(a_{20}^s - a_{20}^d\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= 4p_1 - 20 \\ p_2 &= 0.2p_1 + 5.71 \end{aligned}$$

ALGEBRA LINEAL SISTEMAS DE ECUACIONES

FORMA MATRICIAL

$$\begin{pmatrix} a^d_{11} - a^s_{11} & a^d_{12} - a^s_{12} \\ a^d_{21} - a^s_{21} & a^d_{22} - a^s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^s_{10} - a^d_{10} \\ a^s_{20} - a^d_{20} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2.0 & 0.5 \\ 0.7 & -3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10.0 \\ -20.0 \end{pmatrix}$$

ALGEBRA LINEAL SISTEMAS DE ECUACIONES

- Dos bienes
- Curvas de oferta (supply “s”) y demanda (d)
- Si el mercado es libre, los precios se vana a ajustar de modo que $q_i^d = q_i^s, i = 1, 2$
- Método alternativo

$$\begin{aligned}
q_1 &= a_{10}^d + a_{11}^d p_1 + a_{12}^d p_2 \\
q_1 &= a_{10}^s + a_{11}^s p_1 + a_{12}^s p_2 \\
q_2 &= a_{20}^d + a_{21}^d p_1 + a_{22}^d p_2 \\
q_2 &= a_{20}^s + a_{21}^s p_1 + a_{22}^s p_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_1 - a_{11}^d p_1 - a_{12}^d p_2 &= a_{10}^d \\
q_1 - a_{11}^s p_1 - a_{12}^s p_2 &= a_{10}^s \\
q_2 - a_{21}^d p_1 - a_{22}^d p_2 &= a_{20}^d \\
q_2 - a_{21}^s p_1 - a_{22}^s p_2 &= a_{20}^s
\end{aligned}$$

ALGEBRA LINEAL SISTEMAS DE ECUACIONES

FORMA MATRICIAL PARA LAS 4 VARIABLES

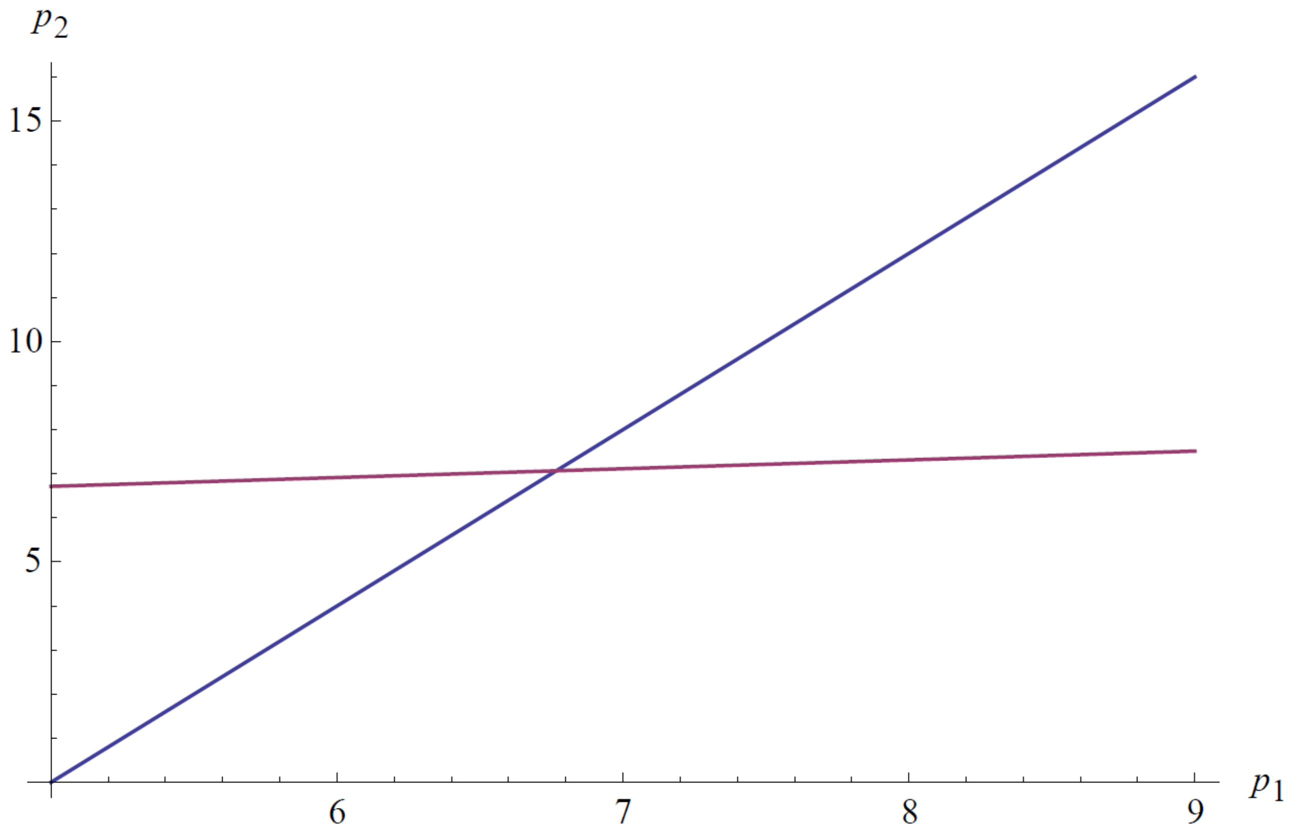
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_{11}^{d} & -a_{12}^{d} \\ 1 & 0 & -a_{11}^{s} & -a_{12}^{s} \\ 0 & 1 & -a_{21}^{d} & -a_{22}^{d} \\ 0 & 1 & -a_{21}^{s} & -a_{22}^{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10}^{d} \\ a_{10}^{s} \\ a_{20}^{d} \\ a_{20}^{s} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.0 & -0.5 \\ 1 & 0 & -1.0 & 0.0 \\ 0 & 1 & -0.7 & 2.0 \\ 0 & 1 & 0.0 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.0 \\ 0.0 \\ 20.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

ALGEBRA LINEAL SISTEMAS DE ECUACIONES

- Intuición detrás de la mirada como Sistema de ecuaciones

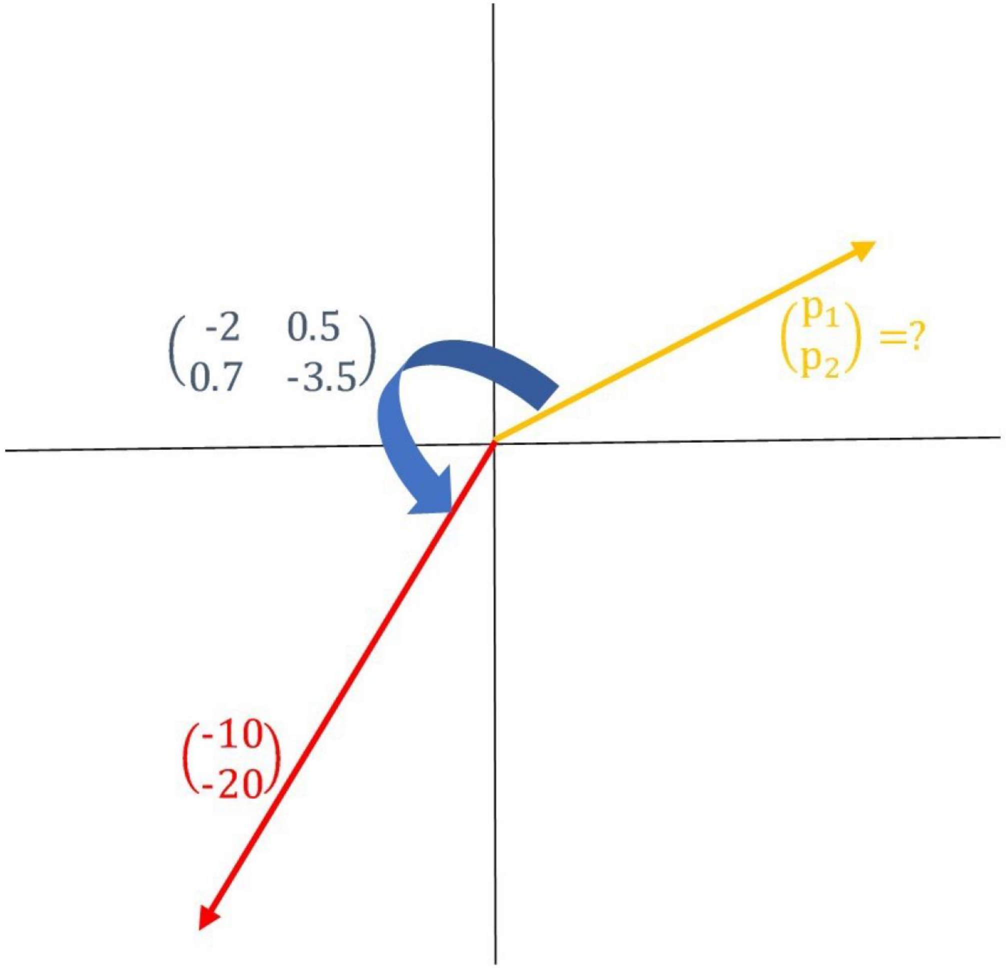
$$p_2 = 4p_1 - 20$$
$$p_2 = 0.2p_1 + 5.71$$



ALGEBRA LINEAL SISTEMAS DE ECUACIONES

- Intuición detrás de la mirada sistema matricial

$$\begin{pmatrix} -2.0 & 0.5 \\ 0.7 & -3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10.0 \\ -20.0 \end{pmatrix}$$

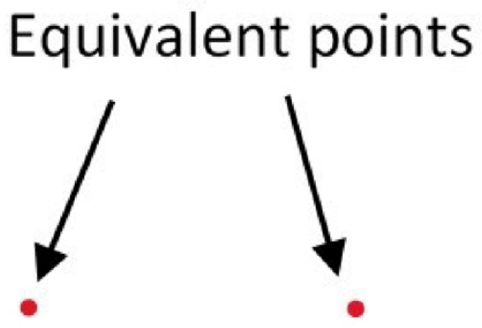


ALGEBRA LINEAL
SISTEMAS DE ECUACIONES

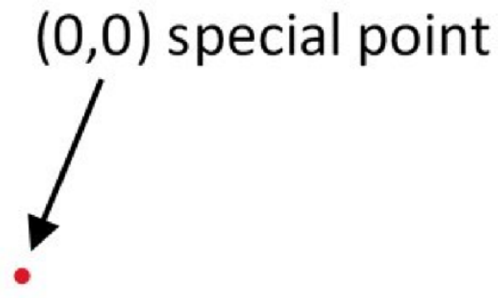
- Las dos imágenes son muy diferentes. Pero, por supuesto, tienen que ser equivalentes, ya que dan el mismo resultado. Hay muchas formas de entender esta equivalencia.
- Empezamos por la primera forma

ALGEBRA LINEAL "MANIFOLD"

- Cuando visualizamos los precios p1 y p2 introducimos sin querer "estructura".
- Tratemos de entender esa estructura y la matemática que la describe
- El "espacio" (manifold) es homogéneo, no tiene un punto especial.



(a) Real space: no special points (homogeneous).

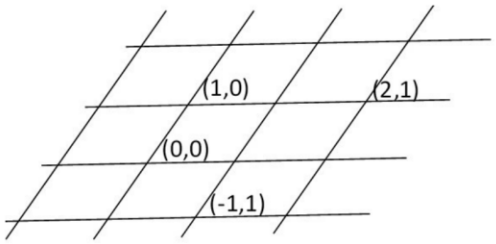


(b) Manifold of prices: $(0, 0)$ is a special point.

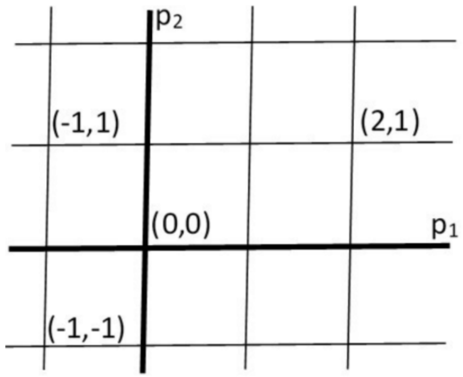
Figure 3: Comparison between the homogeneous real space and the manifold of prices.

ALGEBRA LINEAL “MANIFOLD”

- los puntos de un plano real existen independientemente de cómo los nombremos, de los números que les asignemos
- Ahora bien, eso no quita que la asignación de un par de números reales a puntos de un plano, o, aún más simple, la relación de números reales y puntos en una línea, sea algo maravilloso:
  - ¿cómo pueden dos cosas ontológicamente tan diferentes, como puntos de un línea y números reales, compartir propiedades tan profundamente como para difuminar la diferencia entre ellas?
- Pero es útil para lo que viene mantener la primacía ontológica del plano



(a) The ontological primacy of the manifold makes it obvious the arbitrariness of the assignments of numbers to points, i.e., the election of a coordinate system.

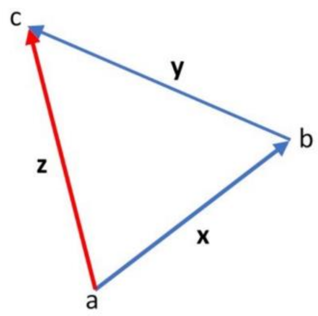


(b) Manifold of prices: “natural" assignments of points to numbers.

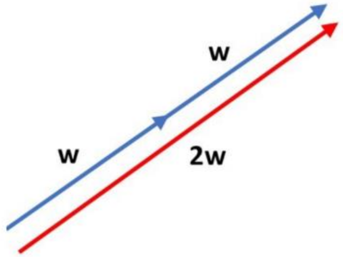
Figure 4: Comparison between real space and the manifold of prices: 2.

ALGEBRA LINEAL VECTORES COMO DESPLAZAMIENTOS EN EL ESPACIO

- Propiedades más y menos intuitivas de los desplazamientos

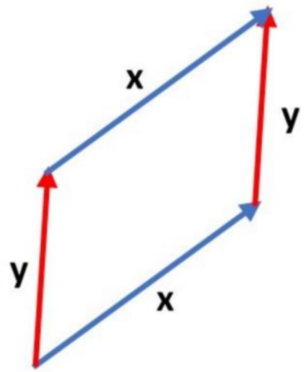


(a) Different displacements to go from a to c.

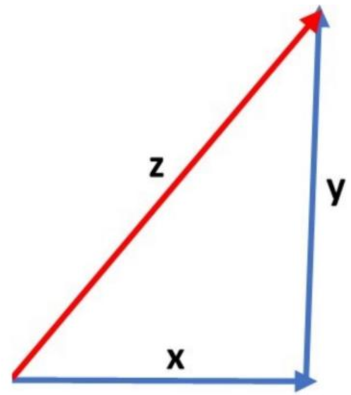


(b) A sequence of two identical displacements is equivalent to a displacement in the same direction but twice as large.

Figure 5: Properties of displacements.



(a) Commutativity of displacements.



(b) Pythagoras theorem for perpendicular displacements.

Figure 6: Properties of displacements.

ALGEBRA LINEAL ESPACIOS VECTORIALES ABSTRACTOS

- Todas esas propiedades se pueden “axiomatizar”
- Notar que pares ordenados de números, con la obvia suma y multiplicación por escalares, satisfacen los axiomas: R^2
- Lo mismo pasa con colecciones de N números ordenados : R^N

Axioms of the sum between vectors:

- Associativity: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.
- Commutativity: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
- Identity element: there exist a vector $\mathbf{z} \in V$ such that for any other vector $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} + \mathbf{z} = \mathbf{a}$. It is customary to call to this vector the zero vector: $\mathbf{0}$.
- Inverse element: for every vector $\mathbf{a} \in V$, there is another vector $\mathbf{d} \in V$ such that $\mathbf{a} + \mathbf{d} = 0$. It is customary to call $-\mathbf{a}$ to the inverse vector of $\mathbf{a}$.

Axioms of the product between a real number and a vector:

- Compatibility of scalar multiplication with number multiplication: $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$.
- Identity element of scalar multiplication: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, where 1 is the real number one.
- Distributivity of scalar multiplication with respect to vector addition: $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$.
- Distributivity of scalar multiplication with respect to real numbers addition: $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$.

ALGEBRA LINEAL
INDEPENDENCIA LINEAL, BASES, SUBESPACIOS LINEALES, SUBESPACIOS AFINES, ETC.

- Combinación lineal, p.15
- Dependencia lineal, p.16
- “Span” de un conjunto de vectores, p.16
- Base de un espacio vectorial V, p.17
- Base de vectores linealmente independientes p.17
  - Si la base es linealmente independiente, cualquier vector se puede escribir como una combinación lineal UNICA de esos vectores base.
- **Dimensión de un espacio vectorial**: el número de vectores de cualquier base linealmente independiente de un espacio vectorial V es el mismo. Este número es, por definición, la dimensión de V.

ALGEBRA LINEAL
INDEPENDENCIA LINEAL, BASES, SUBESPACIOS LINEALES, SUBESPACIOS AFINES, ETC.

- **Dimensión de la manifold asociada a un espacio vectorial V**: La dimensión de V es también la dimensión de la variedad correspondiente a V.
- **Subespacios lineales del espacio de los sectores V**: si un espacio vectorial V tiene dimensión n, el span W de cualquier conjunto de vectores en V es un subespacio de V con dimensión ≤ n.
  - el vector **0** pertenece a cualquier subespacio de V.
- **Subespacios afines** de un espacio vectorial V: el conjunto S de todos los vectores de la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{w}$$

donde $\mathbf{w} \in W$, un subespacio de V, y $\mathbf{a}$ es un vector fijo en V, es un subespacio afín de V.

ALGEBRA LINEAL INDEPENDENCIA LINEAL, BASES, SUBESPACIOS LINEALES, SUBESPACIOS AFINES, ETC.

- Notar que si nuestra estrategia es asignar a cada intuición que tenemos sobre el espacio una estructura matemática, la perpendicularidad (ortogonalidad), en la que, entre otras cosas, se basa el teorema de Pitágoras, no tiene aun tal estructura.

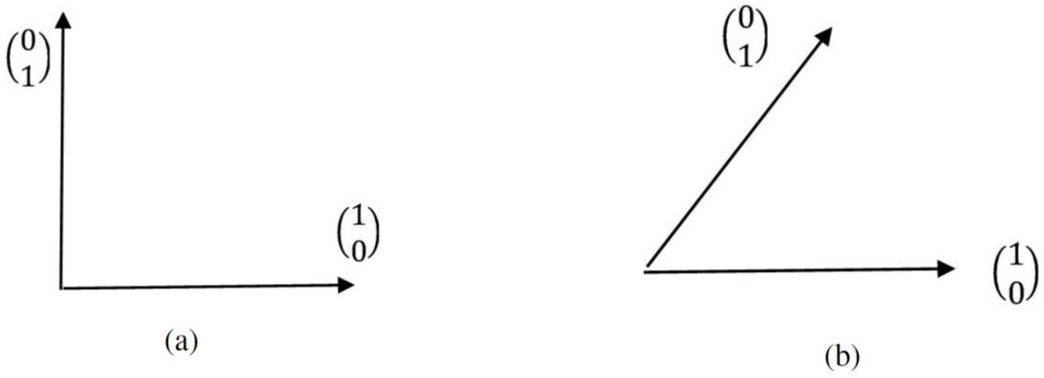


Figure 7: The axioms of vector spaces do not have a way to conceptualize whether two vectors are orthogonal. The graphical difference between 7a and 7b does not have a mathematical counterpart yet.

Solo existe, por ahora, la noción de independencia lineal, pero aun no la de perpendicularidad. Pensar la diferencia entre ambas.

ALGEBRA LINEAL
PRODUCTO ESCALAR (O CÓMO INTRODUCIR LA NOCIÓN DE PERPENDICULARIDAD Y CUANTIFICAR LA NOCIÓN DE "TAMAÑO")

- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \hat{\mathbf{e}}^i$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \, \hat{\mathbf{e}}^i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \, \hat{\mathbf{e}}^j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \, \hat{\mathbf{e}}^i \cdot \hat{\mathbf{e}}^j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \, \delta^{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i
\end{aligned}$$

ALGEBRA LINEAL
PRODUCTO ESCALAR (O CÓMO INTRODUCIR LA NOCIÓN DE PERPENDICULARIDAD Y CUANTIFICAR LA NOCIÓN DE MAGNITUD)

- Base ortogonal

- Base ortonormal

- Construyendo una base ortonormal a partir de una ortogonal

ALGEBRA LINEAL
PRODUCTO ESCALAR (O CÓMO INTRODUCIR LA NOCIÓN DE PERPENDICULARIDAD Y CUANTIFICAR LA NOCIÓN DE MAGNITUD)

- Magnitud ("norma") de un vector (p.25) (o la extensión del teorema de Pitágoras a n-dimensiones)

- $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \hat{\mathbf{e}}^i$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

ALGEBRA LINEAL PRODUCTO ESCALAR (O CÓMO INTRODUCIR LA NOCIÓN DE PERPENDICULARIDAD Y CUANTIFICAR LA NOCIÓN DE MAGNITUD)

- Magnitud ("norma") de un vector (p.25) (o la extensión del teorema de Pitágoras a n-dimensiones)
- $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$

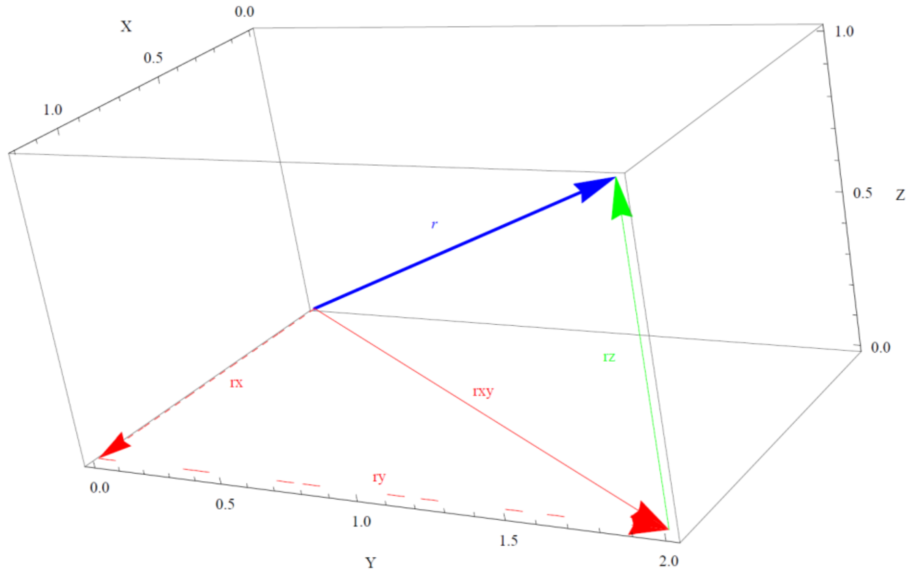
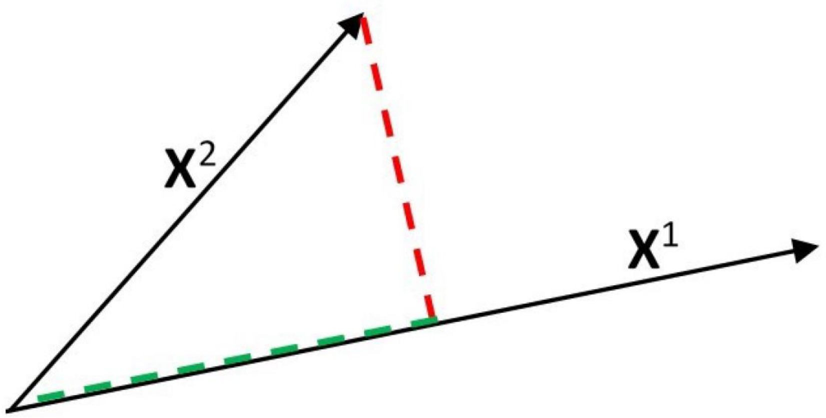


Figure 8: Pythagoras in 3-D: $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{r_{xy}}\|^2 + \|\mathbf{r_z}\|^2$. But, $\|\mathbf{r_{xy}}\|^2 = \|\mathbf{r_x}\|^2 + \|\mathbf{r_y}\|^2$. Therefore: $\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{r_x}\|^2 + \|\mathbf{r_y}\|^2 + \|\mathbf{r_z}\|^2$.

ALGEBRA LINEAL
PRODUCTO ESCALAR (O CÓMO INTRODUCIR LA NOCIÓN DE PERPENDICULARIDAD Y CUANTIFICAR LA NOCIÓN DE MAGNITUD)

- Desigualdad de Cauchy–Schwarz: $|\mathbf{x}^1 \cdot \mathbf{x}^2| \leq \|\mathbf{x}^1\| \|\mathbf{x}^2\|$
  - El producto escalar entre dos vectores es el producto del modulo de uno de ellos por la proyección del otro en el primero



- Desigualdad triangular: $\|\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2\| \leq \|\mathbf{x}^1\| + \|\mathbf{x}^2\|$

ALGEBRA LINEAL
PRODUCTO ESCALAR (DEFINICIÓN DE DISTANCIA)

- $dist(X, Y) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (vectores y espacio, o manifold, subyacente)

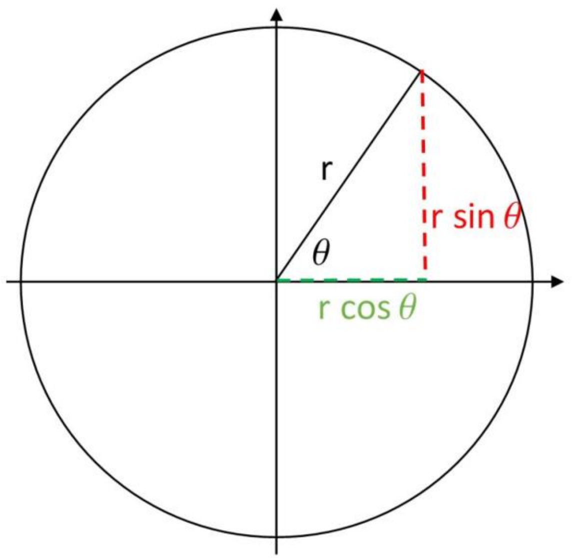


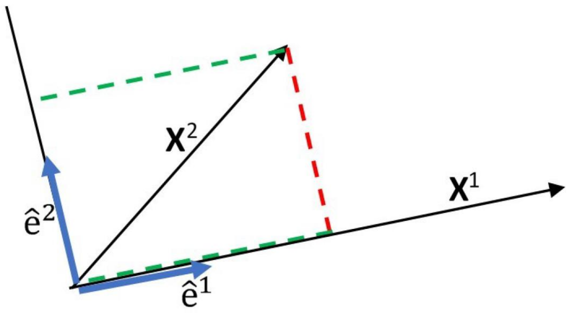
Figure 10: Definition of the functions $\cos\theta$ and $\sin\theta$.

$$\mathbf{x}^1 \cdot \mathbf{x}^2 = ||\mathbf{x}^1||\,||\mathbf{x}^2|| \cos\theta$$

$$\hat{\mathbf{e}}^1 \equiv \frac{\mathbf{x}^1}{||\mathbf{x}^1||}$$

$$\mathbf{x}^1 = ||\mathbf{x}^1||\;\hat{\mathbf{e}}^1$$

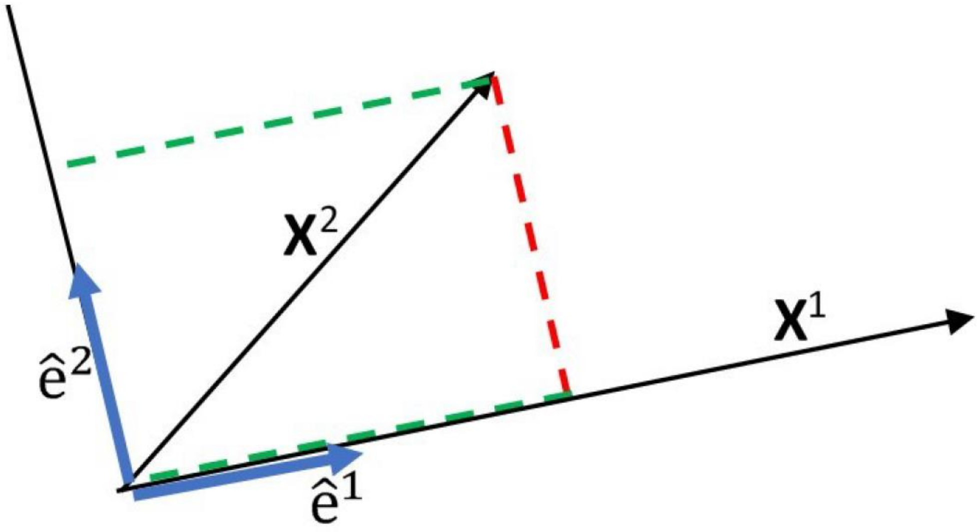
$$\mathbf{Proj}_{\mathbf{x}^1}(\mathbf{x}^2) = \mathbf{Proj}_{\hat{\mathbf{e}}^1}(\mathbf{x}^2) \equiv (\hat{\mathbf{e}}^1 \cdot \mathbf{x}^2)\,\hat{\mathbf{e}}^1 = \left(\frac{\mathbf{x}^1 \cdot \mathbf{x}^2}{\mathbf{x}^1 \cdot \mathbf{x}^1}\right) \mathbf{x}^1$$



ALGEBRA LINEAL
PRODUCTO ESCALAR: SIGNIFICADO GEOMÉTRICO

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{Proj}_{\hat{\mathbf{e}}^1}(\mathbf{x}^2) + \mathbf{Proj}_{\hat{\mathbf{e}}^2}(\mathbf{x}^2)$$

$$\mathbf{Proj}_{\hat{\mathbf{e}}^2}(\mathbf{x}^2) = \mathbf{x}^2 - \mathbf{Proj}_{\hat{\mathbf{e}}^1}(\mathbf{x}^2) = \mathbf{x}^2 - \left(\frac{\mathbf{x}^1 \cdot \mathbf{x}^2}{\mathbf{x}^1 \cdot \mathbf{x}^1}\right)\mathbf{x}^1$$



ALGEBRA LINEAL
PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

ALGEBRA LINEAL PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

- El proceso de Gram-Schmidt consiste en transformar un conjunto J = $\{x_i\}$, i = 1, -, n, de n vectores linealmente dependientes, en otro conjunto K = $\{v_i\}$ de n vectores ortogonales que "span" el mismo subespacio que J.
- Y por una extensión trivial, en el conjunto E = $\{\hat{e}_i\}$ de n vectores ortonormales que span el mismo subespacio como J

$$\mathbf{v}^1 \equiv \mathbf{x}^1$$

$$\hat{\mathbf{e}}^1 = \frac{\mathbf{v}^1}{||\mathbf{v}^1||}$$

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{x}^2 - \mathbf{Proj}_{\mathbf{v}^1}(\mathbf{x}^2) = \mathbf{x}^2 - \left(\frac{\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{x}^2}{\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^1}\right)\mathbf{v}^1$$

$$\hat{\mathbf{e}}^2 = \frac{\mathbf{v}^2}{||\mathbf{v}^2||}$$

ALGEBRA LINEAL PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

- El proceso de Gram-Schmidt consiste en transformar un conjunto J = $\{x_i\}$, i = 1, -, n, de n vectores linealmente dependientes, en otro conjunto K = $\{v_i\}$ de n vectores ortogonales que “span” el mismo subespacio que J.
- Y por una extensión trivial, en el conjunto E = $\{\hat{e}_i\}$ de n vectores ortonormales que span el mismo subespacio como J

$$\mathbf{v}^3 = \mathbf{x}^3 - \mathbf{Proj}_{\mathbf{v}^1}(\mathbf{x}^3) - \mathbf{Proj}_{\mathbf{v}^2}(\mathbf{x}^3) = \mathbf{x}^3 - \left(\frac{\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{x}^3}{\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^1}\right)\mathbf{v}^1 - \left(\frac{\mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{x}^3}{\mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{v}^2}\right)\mathbf{v}^2$$

$$\hat{\mathbf{e}}^3 = \frac{\mathbf{v}^3}{||\mathbf{v}^3||}$$

$$\mathbf{v}^j = \mathbf{x}^j - \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{Proj}_{\mathbf{v}^i}(\mathbf{x}^j) = \mathbf{x}^j - \sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{x}^j}{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}^i}\right)\mathbf{v}^i$$

$$\hat{\mathbf{e}}^j = \frac{\mathbf{v}^j}{||\mathbf{v}^j||}$$

ALGEBRA LINEAL PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

- **Teorema:** todo subespacio lineal distinto de cero de un espacio vectorial V con producto escalar tiene una base ortogonal.
- **Teorema: toda** colección ortogonal de vectores $\mathbf{v}^i$, i = 1,..., j, que span un subespacio W del espacio V, cada vector w ∈ W tiene una expansión (única) en términos de $\mathbf{v}^i$ como se ve más abajo
- Si los $\mathbf{v}^i$ son ortonormales el denominador es 1

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^i}{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}^i} \right) \mathbf{v}^i \qquad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{j} \left(\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{e}}^i \right) \hat{\mathbf{e}}^i$$

ALGEBRA LINEAL
COMPLEMENTO ORTOGONAL DE UN ESPACIO VECTORIAL CON PRODUCTO ESCALAR

- **Complemento ortogonal:** dado un subespacio W de un espacio vectorial con producto escalar V, el conjunto de todos los vectores ortogonales a W es el complemento ortogonal, $W^{\perp}$ de W:

$$W^{\perp} = \{\mathbf{u} \in V, \text{ such that } \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ for all } \mathbf{w} \in W\}$$

- **Teorema:** dado un vector **v** en un espacio de producto escalar V, y un subespacio W de V, hay una forma única de expresar a **v** como una suma

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$$

donde $\mathbf{w} \in W$ y $\mathbf{u} \in W^{\perp}$.

- **Teorema:** $\dim(W^{\perp}) = \dim(V) - \dim(W)$

ALGEBRA LINEAL
MANIFOLDS Y ESPACIOS VECTORIALES

- Una vez que elegimos un origen (arbitrario) en la manifold, hay una relación uno a uno entre los vectores en el espacio vectorial y los puntos en la manifold.
- Considere dos vectores linealmente independientes, $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$, que forman una base de V. Todo vector $\mathbf{g} \in$ V puede escribirse como una combinación lineal de los $\mathbf{x}^i$ s de una manera única:

$$\mathbf{g} = x_1\mathbf{x}^1 + x_2\,\mathbf{x}^2$$

- **Sistema de coordenadas:** (x_1, x_2) son las coordenadas del punto de la manifold en el sistema de coordenadas determinado por el origen O y los vectores base $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$.

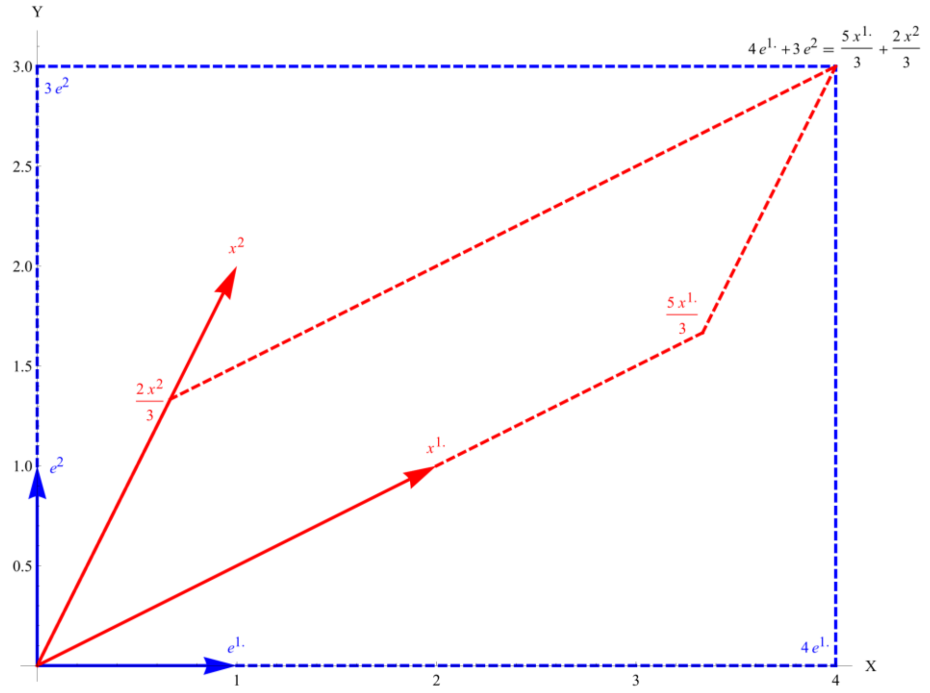
$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1 = 5/3$$

$$x_2 = 2/3$$



ALGEBRA LINEAL
MANIFOLDS Y ESPACIOS VECTORIALES: EJEMPLO

ALGEBRA LINEAL MANIFOLDS Y ESPACIOS VECTORIALES: SISTEMAS DE COORDENADAS

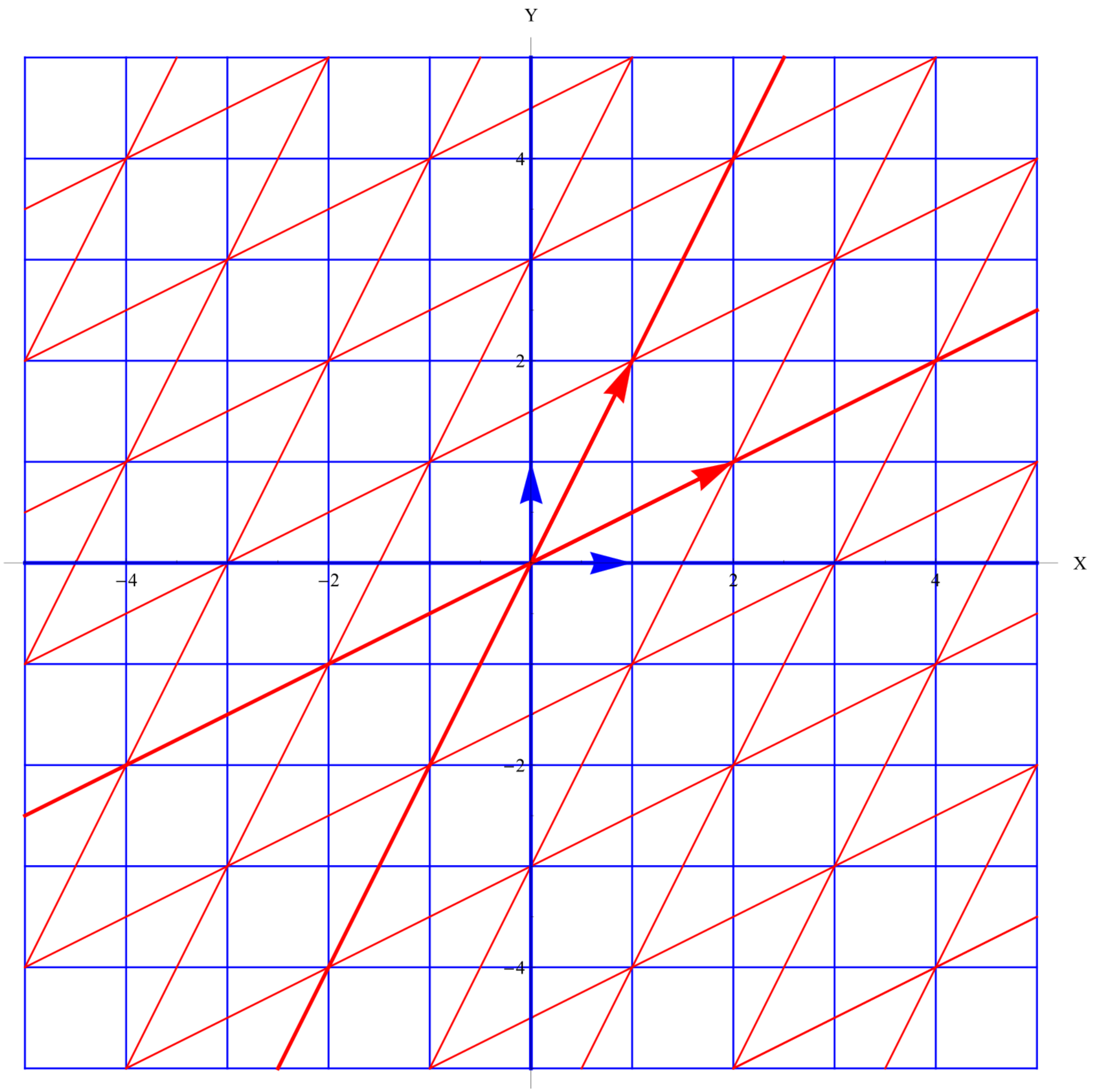
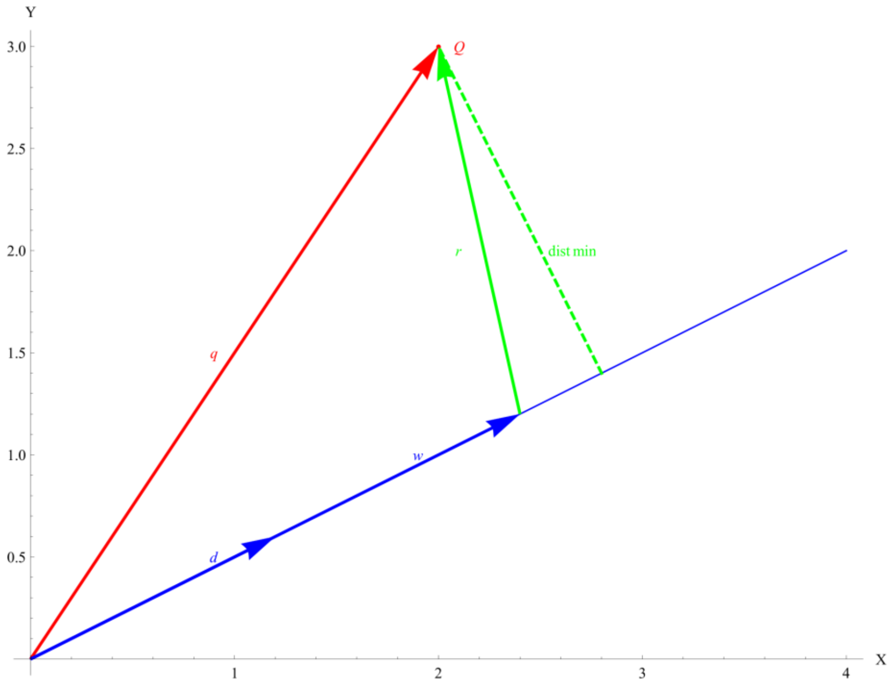


Figure 13: Coordinate systems in the manifold can be visualized as grids. The blue grid is generated by the orthogonal vectors $\hat{\mathbf{e}}^1 = (1,0)^T$ and $\hat{\mathbf{e}}^2 = (0,1)^T$. The red grid is generated by the non-orthogonal vectors $\mathbf{x}^1 = 2\hat{\mathbf{e}}^1 + \hat{\mathbf{e}}^2 = (2,1)^T$ and $\mathbf{x}^2 = \hat{\mathbf{e}}^1 + 2\hat{\mathbf{e}}^2 = (1,2)^T$.



$$\mathbf{w} = \lambda\,\mathbf{d}$$

$$\mathbf{w} + \mathbf{r} = \lambda\,\mathbf{d} + \mathbf{r} = \mathbf{q}$$

$$\mathbf{r}_{\text{min}} \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{q} - \lambda\,\mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} = 0$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}$$

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}\right)\mathbf{d}$$

ALGEBRA LINEAL
PUNTO EN UNA LÍNEA MÁS CERCANO A UN PUNTO Q EXTERNO A ELLA

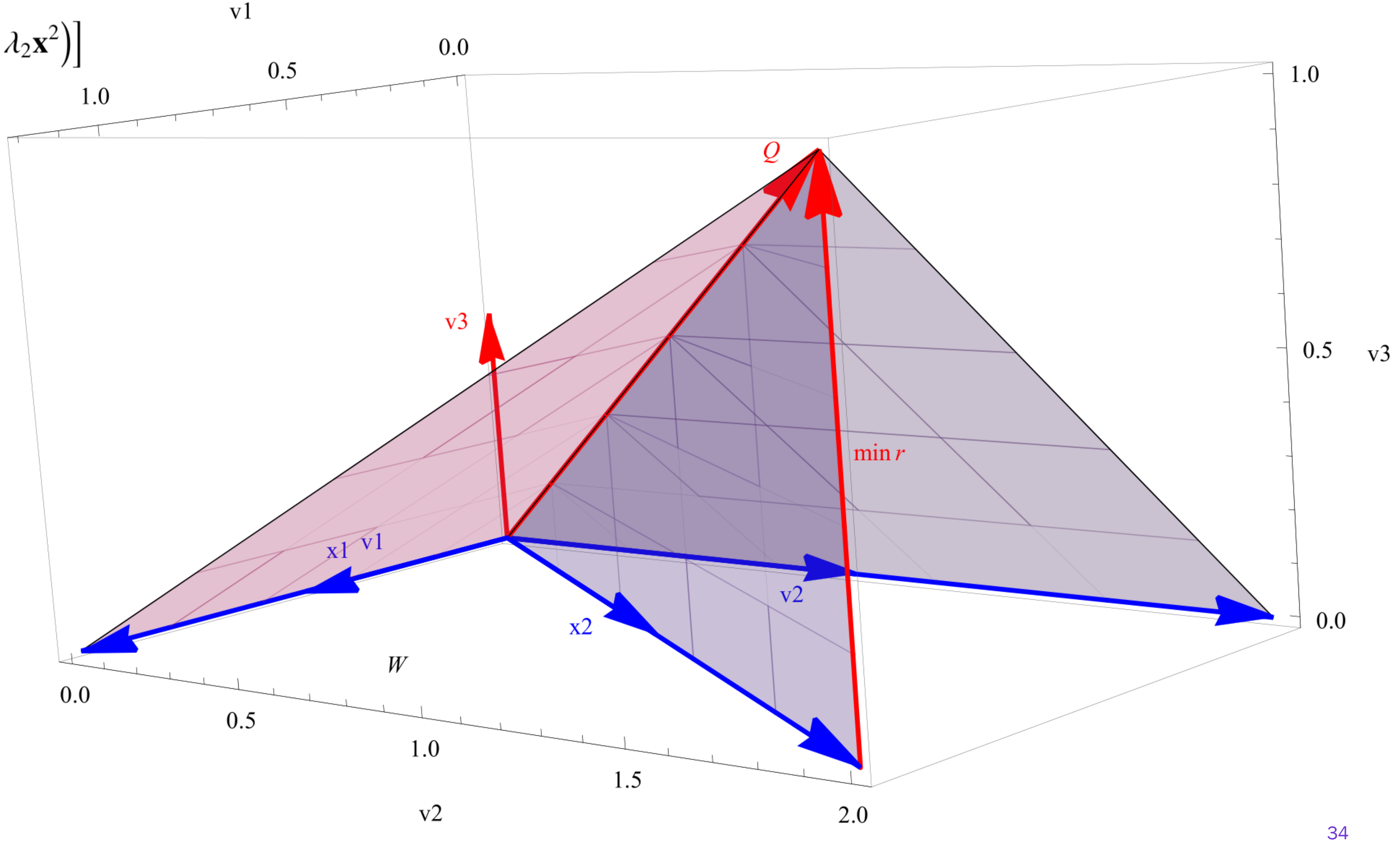
ALGEBRA LINEAL
PUNTO EN UNA LÍNEA MÁS CERCANO A UN PUNTO Q EXTERNO A ELLA

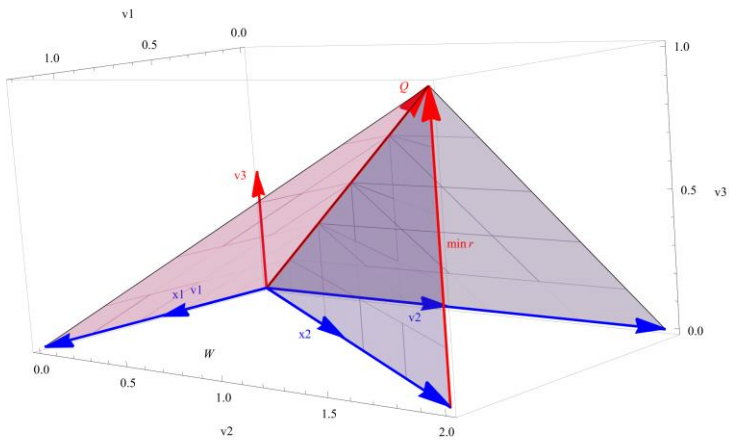
- Línea en R^n
- Una línea unidimensional y un punto Q externo a esa línea determinan un plano único independientemente de la dimensión del espacio en el que estén "sumergidos".
- Noten que las ecuaciones no hacen referencia explícita a la dimensión de ese espacio. Por lo tanto, no debería ser demasiado sorprendente que las ecuaciones anteriores son la solución del problema independientemente de la dimensión del espacio de en el que estemos trabajando!
  - Las ecuaciones sólo hacen referencia a que $\mathbf{r}_{min}$ y $\mathbf{d}$ tienen que ser ortogonales. Pero para esto ya tenemos un elemento matemático independiente de la dimensión: $\mathbf{r}_{min} \cdot \mathbf{d} = 0$.

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2} \left\| \mathbf{q} - \left(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2\right) \right\|$$

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2} \left[\mathbf{q} - \left(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2\right)\right] \cdot \left[\mathbf{q} - \left(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2\right)\right]$$

ÁLGEBRA LINEAL PUNTO EN UN PLANO MÁS CERCANO A UN PUNTO Q EXTERNO A ÉL PLANO EN R^3 GENERADO POR LOS VECTORES X^1 Y X^2 NO NECESARIAMENTE ORTOGONALES





1. From the non-orthogonal basis $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2\}$ of W, find the orthogonal basis $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\}$. This can be done with the Gram-Smidth process.

2. Once $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\}$ has been found, simply project $\mathbf{q}$ into that basis:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}^i} \right) \mathbf{v}^i \tag{7.18}$$

   $\mathbf{w}$ is the vector corresponding to the point in W closest to Q.

3. The minimum distance is the magnitude of the vector $\mathbf{r}_{\min}$, such that $\mathbf{w} + \mathbf{r}_{\min} = \mathbf{q}$. It's square is:

$$\min \operatorname{dist}^2 (Q, W) = \|\mathbf{r}_{\min}\|^2 = \left\| \mathbf{q} - \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}^i} \right) \mathbf{v}^i \right\|^2 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\left(\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{q}\right)^2}{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}^i} \tag{7.19}$$

   $\mathbf{r}_{\min} \in W^{\perp}$ is a side of the right triangle whose other side is $\mathbf{w}$ of (7.18) and has $\mathbf{q}$ as the hypothenuse. (7.19) is Pythagoras' theorem applied to this triangle.

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2} \left\| \mathbf{q} - \left(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2 \right) \right\|$$

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2} \left[\mathbf{q} - \left(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2 \right) \right] \cdot \left[\mathbf{q} - \left(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2 \right) \right]$$

ÁLGEBRA LINEAL
PUNTO EN UN PLANO MÁS CERCANO A UN PUNTO Q EXTERNO A ÉL
PLANO EN R^3 GENERADO POR LOS VECTORES X^1 Y X^2 NO NECESARIAMENTE ORTOGONALES

ÁLGEBRA LINEAL
PUNTO EN UN PLANO MÁS CERCANO A UN PUNTO Q EXTERNO A ÉL
PLANO EN R^N GENERADO POR LOS VECTORES X^1 Y X^2 NO NECESARIAMENTE ORTOGONALES

- Plano en R^n
- Si el plano generado por $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ está en R^n, uno pensaría que el problema se vuelve mucho más complicado.
- Pero, como pasó en el caso de la línea, este no es el caso con la maquinaria que hemos construido.
- De hecho, el proceso de 3 pasos descrito anteriormente brinda la solución en cualquier dimensión!

ALGEBRA LINEAL PUNTO EN UN SUBESPACIO W DE DIMENSIÓN D MÁS CERCANO A UN PUNTO $Q \in V = R^N$, $D < N$

$$\min_{\lambda_1,\cdots,\lambda_r} \left\| \mathbf{q} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{x}^i \right\| \tag{7.20}$$

1. From the non-orthogonal basis $\{\mathbf{x}^1, \cdots, \mathbf{x}^r\}$ of W, find the orthogonal basis $\{\mathbf{v}^1, \cdots, \mathbf{v}^r\}$. This can be done with the Gram-Smidth process.

2. Once $\{\mathbf{v}^1, \cdots, \mathbf{v}^r\}$ has been found, simply project $\mathbf{q}$ into that basis:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}^i} \right) \mathbf{v}^i \tag{7.21}$$

   $\mathbf{w}$ is the vector corresponding to the point in W closest to Q.

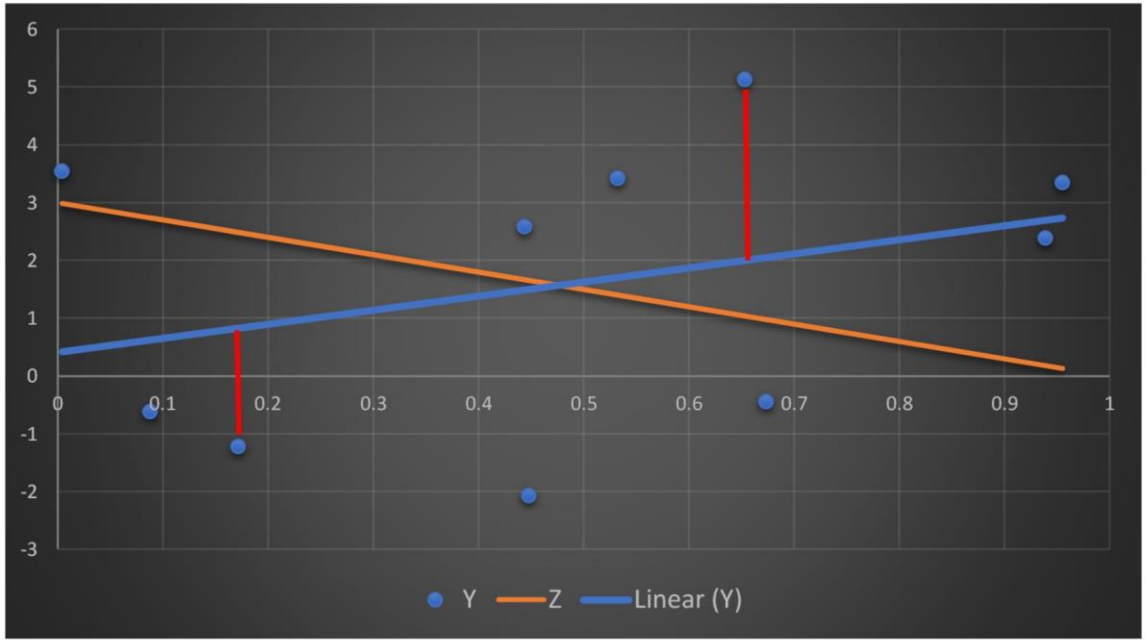
3. The minimum distance is the magnitude of the vector $\mathbf{r}_{\min}$, such that $\mathbf{w} + \mathbf{r}_{\min} = \mathbf{q}$. The square of the minimum distance is:

$$\min \operatorname{dist}^2(Q, W) = \|\mathbf{r}_{\min}\|^2 = \left\| \mathbf{q} - \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}^i} \right) \mathbf{v}^i \right\|^2 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} - \sum_{i=1}^{r} \frac{(\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{q})^2}{\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}^i} \tag{7.22}$$

   $\mathbf{r}_{\min} \in W^{\perp}$ is a side of the right triangle whose other side is $\mathbf{w}$ of (7.21) and has $\mathbf{q}$ as the hypothenuse. (7.22) is Pythagoras' theorem applied to this triangle.

Table 1: Regression data

X	Y
0.00	3.54
0.65	5.13
0.44	2.58
0.94	2.38
0.53	3.42
0.17	-1.23
0.09	-0.61
0.45	-2.07
0.95	3.34
0.67	-0.45



ÁLGEBRA LINEAL
REGRESIONES, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

ÁLGEBRA LINEAL REGRESIONES, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

$$y_i = \lambda_1 + \lambda_2 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2} S = \min_{\lambda_1,\lambda_2} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \min_{\lambda_1,\lambda_2} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (\lambda_1 + \lambda_2\, x_i)]^2$$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \hat{\mathbf{e}}^i$$

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} 1\, \hat{\mathbf{e}}^i$$

$$\mathbf{w} = \lambda_1\, \mathbf{1} + \lambda_2\, \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 + \lambda_2 x_i)\, \hat{\mathbf{e}}^i$$

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \hat{\mathbf{e}}^i$$

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2} S = \min_{\lambda_1,\lambda_2} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \lambda_1 - \lambda_2 x_i\right)^2 = \min_{\lambda_1,\lambda_2} (\mathbf{y} - \lambda_1\, \mathbf{1} - \lambda_2\, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \lambda_1\, \mathbf{1} - \lambda_2\, \mathbf{x})$$

ÁLGEBRA LINEAL
REGRESIONES, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Geométricamente, encontrar los parámetros λ_1 y λ_2 que minimicen la expresión que más abajo corresponde a encontrar el punto en el plano spaned by $\mathbf{1}$ y $\mathbf{x}$ más cercano al punto y . Y todo lo que hicimos antes sirve para entender qué estamos haciendo cuando resolvemos una regresión!

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \hat{\mathbf{e}}^i$$

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} 1 \, \hat{\mathbf{e}}^i$$

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_1 + \lambda_2 x_i) \, \hat{\mathbf{e}}^i$$

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \hat{\mathbf{e}}^i$$

$$\min_{\lambda_1,\lambda_2} S = \min_{\lambda_1,\lambda_2} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \lambda_1 - \lambda_2 x_i\right)^2 = \min_{\lambda_1,\lambda_2} (\mathbf{y} - \lambda_1 \mathbf{1} - \lambda_2 \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \lambda_1 \mathbf{1} - \lambda_2 \mathbf{x})$$