HW4

Sergio A. Pernice

Queremos entender la ecuación $Ax = y$, con $A \in \mathbb{R}^{mn}$ conocida, $y \in \mathbb{R}^{m1}$ conocido, y $x \in \mathbb{R}^{n1}$ desconocido. Queremos entender que:

1. Si $m > n$, lo más probable es que el sistema no tenga solución.
2. Si $m < n$, lo más probable es que el sistema tenga infinitas soluciones.
3. Si $m = n$ y los vectores columna son linealmente independientes va a haber una única solución.

Vamos a generar la matriz A y el vector y asi:

```
import numpy as np
from numpy import linalg as LA  # Notar que importamos linalg con nickname LA

A = 2*(np.random.rand(m,n)-0.5)
y = 2*(np.random.rand(m,1)-0.5)
```

1. Analizamos el caso $m > n$ con $m = 3, n = 2$.
Como vamos a utilizar el la función

```
x = LA.solve(A, y)
```

para resolver sistemas lineales, que asume que la matriz A es cuadrada, en vez de utilizar la matriz de 3×2, la hacemos 'ficticiamente' de 3×3 agregando una columna de ceros. Entonces, genera una matriz aleatoria de 3×2 como te indique antes, y encontra la manera de agregarle una columna de ceros, de modo que tenes lo siguiente

$$A = (\mathbf{a_0}\ \ \mathbf{a_1}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 \\ a_{20} & a_{21} & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{a_0}\ \ \mathbf{a_1}\ \ \mathbf{0}) \tag{1}$$

nota que estoy usando la convención de Python, donde la numeración empieza en cero. $\mathbf{a_0}$ en negrita significa el primer vector columna, $\mathbf{a_1}$ el segundo y $\mathbf{0}$ el vector column de todos ceros. Todo esto no es otra cosa que un truco para que Python nos permite usar "LA.solve(A, y)".

Comprobar que $x = LA.solve(A, y)$ no tiene solución. Python te va a decir "LinAlgError: Singular matrix", que significa que no hay solución.

Explica CLARAMENTE el hecho de que no hay solución en términos de mirar al producto Ax como combinación lineal de los vectores columna de A y el hecho de que y fue generado al azar.

2. Analizamos el caso $m < n$ con $m = 2, n = 3$.

Genera una matriz A aleatoria de 2×3 y un vector y aleatoria de 2×1 como te indique antes, de modo que tenes lo siguiente. Explica CLARAMENTE el hecho de que la ecuación

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

va a tener infinitas soluciones en términos de mirar al producto Ax como combinación lineal de los 3 vectores columna de A, que viven en dos dimensiones, y hay 3 de ellos.

Ahora vamos a comprobar que, efectivamente, hay infinitas soluciones. Primero corta de A la tercera columna, de modo que generas la matriz B así:

$$B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ahora resolve el sistema

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

que va a tener una unica solucion.

Proba que el vector

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

es solucion de la ecuación (2).

Acabamos de encontrar una solución, es decir, acabamos de encontrar un vector $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, pero sabemos que hay infinitas. Cómo encontramos a las otras?

La tercer columna de A va a ser combinación lineal de las primeras dos, es decir, van a existir λ_0 y λ_1 tal que

$$\begin{pmatrix} a_{02} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \end{pmatrix} \lambda_0 + \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{11} \end{pmatrix} \lambda_1 \tag{6}$$

EXPLICAR POR QUÉ ESTAMOS SEGUROS DE QUE λ_0 y λ_1 VAN A EXISTIR.

EXPLICAR POR QUÉ, PARA ENCONTRAR λ_0 y λ_1 TENEMOS QUE RESOLVER EL SIGUIENTE SISTEMA:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{02} \\ a_{12} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Resolvé el sistema de ecuaciones con $\lambda = LA.solve(A, \mathbf{a_2})$ (EXPLICAR POR QUÉ ESTO TE DA LA SOLUCIÓN. ¿QUÉ ES $\mathbf{a_2}$? Y λ? (ayuda: es un vector).

Nota que podemos escribir la ecuación (6) como

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \end{pmatrix} \lambda_0 + \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{11} \end{pmatrix} \lambda_1 - \begin{pmatrix} a_{02} \\ a_{12} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Y si al vector cero lo multiplico por una constante α arbitraria (generala al azar en Python), sigue siendo cero, entonces:

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \end{pmatrix} \alpha\lambda_0 + \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{11} \end{pmatrix} \alpha\lambda_1 - \alpha \begin{pmatrix} a_{02} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\lambda_0 \\ \alpha\lambda_1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \tag{9}$$

Es decir que el vector

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha\lambda_0 \\ \alpha\lambda_1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \tag{10}$$

es tal, que $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para cualquier valor de α.

Recorda que (5) es una solución de la ecuación, es decir, que $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, y acabamos de encontrar infinitos vectores $\mathbf{v}$ tal que $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, por lo tanto los infinitos vectores $\mathbf{x}+\mathbf{v}$ son las infinitas soluciones, ya que $A(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = A\mathbf{x}+A\mathbf{v} = \mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x}$.

Es decir las infinitas soluciones tienen la forma

$$\mathbf{x} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_0 + \alpha\lambda_0 \\ x_1 + \alpha\lambda_1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \tag{11}$$

Verificar numéricamente generando un α al azar y comprobando que el vector en (11) efectivamente satisface la ecuación $A(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{y}$.