HW5: Matrices simétricas y formas cuadráticas

I. MATRICES SIMÉTRICAS, SUS AUTOVALORES Y SUS AUTOVECTORES

En Python importa las libraries

```
import numpy as np
from numpy import linalg as LA
```

y genera en Python una matriz A al azar de 6x6. "A.T" genera la traspuesta $A^\top$. Imprimilas y verifica que A.T es la traspuesta de A. Genera los autovalores y autovectores de A así:

```
wA, vA = LA.eig(A)
print("autovalores de A =",wA)
print("autovectores de A =\n",vA)
```

Verifica que varios de ellos son complejos.

Cualquier matriz A se puede descomponer en la suma de su parte simétrica y su parte antisimétrica así:

$$A = \frac{A + A^\top}{2} + \frac{A - A^\top}{2} = A_{\text{sim}} + A_{\text{asim}} \tag{1}$$

Crea A_{sim} y A_{asim}, imprimilas y verifica visualmente que, efectivamente, son simétrica y antisimétrica. Volve a imprimir A y $A_{\text{sim}} + A_{\text{asim}}$ y verifica visualmente que $A = A_{\text{sim}} + A_{\text{asim}}$.

Calcula los autovalores y autovectores de A_{sim} y verifica que son reales y además los autovectores son ortonormales:

```
wA_sim, vA_sim = LA.eig(A_sim)
print(wA_sim)
print(vA_sim)
```

Cuando uno trabaja con matrices simétricas conviene usar la función "LA.eigh" en vez de "LA.eig". Verifica que

```
wA_sim, vA_sim = LA.eigh(A_sim)
print(wA_sim)
print(vA_sim)
```

genera los mismos autovalores y autovectores pero ordena los autovalores de menor a mayor.

Hemos dicho en clase que si A_{sim} es simétrica sus autovalores y autovectores son reales, verifica esto visualmente. Además, sus autovectores correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales entre sí, y que las funciones LA.eig o LA.eigh los entrega, además, normalizados a 1. Verifica esto extrayendo diferentes columnas de vA_sim, multiplicandolas escalarmente entre sí, y comprobando que si son columnas diferentes el producto escalar da cero (considerando el error numérico en el ∼16avo decimal) y si son la misma columna da 1.

Esto significa que los autovectores de A_{sim} forman una base ortogonal. Es decir, cualquier vector $\mathbf{x}$ se puede escribir como una combinación lineal de los autovectores $\mathbf{v_i}$ de A_{sim} (que tenes en las columnas de vA_sim):

$$\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{5} a_n \mathbf{v_n} \tag{2}$$

La pregunta es cómo extraer las coordenadas a_n de $\mathbf{x}$ en la base de autovectores de A_{sim}, $\{\mathbf{v_i}\}$. Pero esto es muy simple, como los $\mathbf{v_n}$ (las columnas de vA_sim) son otrtonormales, es decir, como $\mathbf{v_i}^\top \mathbf{v_j} = 0$ si $i \neq j$, y es $= 1$ si $i = j$, multiplicando escalarmente la ecuacion (2) por, digamos $\mathbf{v_2}^\top$, extraemos el coeficiente a_2:

$$\mathbf{v_2}^\top \mathbf{x} = \sum_{n=0}^{5} a_n (\mathbf{v_2}^\top \mathbf{v_n}) = a_2 \tag{3}$$

y así con todos los demás coordenadas (explicar con palabras por que vale la ecuación (3)).

Para comprobar esto, genera en Python un vector $\mathbf{x}$ de 6x1 al azar, extrae las 6 coordenadas con la fórmula (3) y luego verifica numéricamente la fórmula (2).

II. FORMAS CUADRÁTICAS

Dada la forma cuadrática

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 - 5x_2x_3 + x_3x_1$$

encontra la matriz simetrica C de 3x3 tal que

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nota que en una sola variable, una forma cuadrática es de la forma $f(x) = ax^2 = xax$, donde a es simplemente un número (que se puede pensar como una matriz simétrica de 1x1). En palabras describi el gráfico de $f(x)$ en función del valor y signo de a, incluyendo la posibilidad de que a sea cero. Nota también que si una forma cuadrática no tiene términos "cruzados", es decir, es, por ejemplo, de la forma

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + \ x_3^2$$

el comportamiento de f como función de cada variable se puede entender sin considerar las demás variables. Explica en palabras el comportamiento de esta forma cuadrática en términos de sus tres variables, cada una sin importar qué pasa con las otras dos.

Abri en tu compu el archivo ".ggb" que esta en el webcampus, que podes abrir con Geogebra 3D online. Clickeando los circulitos de la izquierda podes borrar o incluir lo que quieras. Inclui la forma cuadratica diagonal $f(x, y) = I1x^2 + I2y^2$ y juga con distintos valores de $I1$ e $I2$. Fijate que si ambos son positivos la forma cuadratica es positiva, etc. Girando el grafico con el mouse mira el grafico "desde arriba" y desde los costados, y nota que los ejes naturales de Geogebra (que si no aparecen los podes poner y/o borrar en "settings" en el angulo superior derecho) coinciden con el grafico de la forma cuadratica.

Comproba que la forma cuadrática diagonal se puede escribir así:

$$f(x, y) = I1x^2 + I2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I1 & 0 \\ 0 & I2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4}$$

Verifica que los autovalores de la matriz diagonal son $I1$ e $I2$ y los autovectores son los vectores canónicos, que espanean subespacios que coinciden con los ejes naturales de Geogebra. Esto sugiere lo siguiente:

> **En la base de autovectores de la matriz simétrica C asociada a forma cuadrática, toda forma cuadrática es diagonal, por lo que podemos analizarla en cada subespacio de esa base sin tener en cuenta las demás direcciones. En cada dirección va a ser una parábola positiva, negativa, o cero, y lo que determina cual es, es simplemente el correspondiente autovalor de C!**

Para verificar que esto es correcto vamos a estudiar la forma cuadrática $f(x, y) = x^2 + 2xy$. Comprobar que esa forma cuadrática se puede escribir así:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5}$$

Nuestro objetivo es ahora mirar esa forma cuadrática en la base de autovectores de la matriz C de (5).

Calcular los autovectores y autovalores y verificar que, a dos decimales, son:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.53 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1.62, \ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -0.53 \\ 0.85 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -0.62 \tag{6}$$

(notar que Python te puede dar esos autovectores o alguno de ellos, o ambos, multiplicados por -1, explicar por qué).

Borra en Geogebra la forma cuadrática que tenias, borra también los ejes naturales de Geogebra, y fijate, mas abajo, que clickeando los círculos apropiados vas a poder ver los autovectores de C, los subespacios correspondientes a esos ejes, también el eje z (que sirve simplemente para graficar la función, y la forma cuadrática que estamos analizando. Girarla con el mouse lo que sea necesario hasta que te convenzas de que en esos ejes (correspondientes a los autovectores de C), la forma cuadrática es tan simple como lo era la forma cuadrática sin términos cruzado que analizamos anteriormente.

Por último vamos a verificar algebraicamente que lo que viste en el gráfico es efectivamente así, es decir, en la base de autovectores de C, la forma cuadrática no tiene términos cruzados y los coeficientes son los autovalores de C.

Como vimos en la sección anterior, cualquier vector $\mathbf{x}$ se puede escribir en la base de autovectores de C. Para nuestra C particular esto significa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} = a_1 \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.53 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -0.53 \\ 0.85 \end{pmatrix} \tag{7}$$

donde la coordenada a_i lo conseguis multiplicando escalarmente $a_i = \mathbf{v_i}^\top \mathbf{x}$, $i = 1, 2$.

Ahora fijate esta demostración:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2 + 2xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} && (8) \\
&= \left[a_1 \begin{pmatrix} 0.85 & 0.53 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -0.53 & 0.85 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[a_1 \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.53 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -0.53 \\ 0.85 \end{pmatrix}\right] && (9) \\
&= \left[a_1 \begin{pmatrix} 0.85 & 0.53 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -0.53 & 0.85 \end{pmatrix}\right] \left[a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.53 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.53 \\ 0.85 \end{pmatrix}\right] && (10) \\
&= \left[a_1 \begin{pmatrix} 0.85 & 0.53 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -0.53 & 0.85 \end{pmatrix}\right] \left[1.62\ a_1 \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.53 \end{pmatrix} - 0.62\ a_2 \begin{pmatrix} -0.53 \\ 0.85 \end{pmatrix}\right] && (11) \\
&= 1.62\ a_1^2 - 0.62\ a_2^2 && (12)
\end{aligned}$$

Explica con palabras, *y en detalle*, cada paso. Es decir, en la base de autovectores de C la forma cuadrática es diagonal (sin términos cruzados) y los coeficientes son los autovalores de C. Esto comprueba analíticamente lo que veías en el gráfico!