MCCSN
TEMA 3

SERGIO PERNICE

UCEMA

$$f\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

$$f\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} f_1\,[\mathbf{x}] \\ f_2\,[\mathbf{x}] \\ \vdots \\ f_m\,[\mathbf{x}] \end{pmatrix}$$

FUNCIONES LINEALES ESCALARES Y VECTORIALES

- Función lineal escalar f: $R^n \rightarrow R$
- Función lineal vectorial f: $R^n \rightarrow R^m$

FORMA MATRICIAL DE UNA FUNCIÓN LINEAL VECTORIAL

- Notar que una función vectorial (o su matriz correspondiente) le asigna un vector de R^m a cada vector de R^n. Esta asignación se puede pensar como una "transformación" un vector en otro.
- Cada función vectorial tiene asociada una matriz.
- La matriz transforma un vector en otro.

$$f\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

- La multiplicación matriz por vector es "natural" cuando se la mira como una función de R^n en R^m

NOTACIÓN PARA LA MULTIPLICACIÓN MATRIZ POR VECTOR

$$\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{\mathbf{x}} = \underset{m\times 1}{\mathbf{y}} \tag{2.3}$$

The matrix times vector multiplication can be expressed in terms of their components as

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \tag{2.4}$$

In a more compact notation, using the "Einstein summation convention", it can be written as:

$$(A\mathbf{x})_i = a_{ij}x_j \tag{2.5}$$

where the convention is that equal indices (the index "j" in a_{ij} and in x_j) is summed over.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES EN GENERAL Y LINEALES EN PARTICULAR

- $g(x) = x^2$, $f(x) = \text{sen}(x)$: $g(f(x)) = \text{sen}^2(x)$
- $f: R^n \rightarrow R^m$, $g: R^m \rightarrow R^s$, $g(f(\mathbf{x})): R^n \rightarrow R^s$

$$g\left(f\left(\mathbf{x}\right)\right)_i = g\left(\sum_{j=1}^{n} F_{kj}x_j\right)_i = \sum_{k=1}^{m} G_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n} F_{kj}x_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} G_{ik}F_{kj}\right)x_j = \left(\left(GF\right)\mathbf{x}\right)_i$$

$$\sum_{k=1}^{m} G_{ik}F_{kj} \equiv \underset{s\times n}{\left(\underset{s\times m}{G}\ \underset{m\times n}{F}\right)_{ij}}$$

El producto matriz por matriz es lo que tiene que ser para preservar la composición de funciones vectoriales lineales

PENSANDO A LOS VECTORES COMO MATRICES. MATRIZ TRANSPUESTA

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}_{1\times 1} \\
&= \underbrace{(x_1, x_2, \cdots, x_n)}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}
$$

PENSANDO A LOS VECTORES COMO MATRICES EN PYTHON

In [5]:

```
x = np.array([[1],[2],[3]])
xT = x.transpose()
print(x)
print(x.shape)
print(xT)
print(xT.shape)
```

```
[[1]
 [2]
 [3]]
(3, 1)
[[1 2 3]]
(1, 3)
```

In [14]:

```
x = np.array([[1],[2]])
y = np.array([[3],[4]])
print(np.vdot(x,y))
print(np.dot(x.transpose(),y))
```

```
11
[[11]]
```

TRANSFORMACIONES LINEALES, SISTEMAS DE ECUACIONES Y SU FORMA MATRICIAL:

$$X + Y = 3$$
$$X - Y = -1$$

In [10]:
```
r = 5
# evenly sampled
x = np.arange(-r, r, 0.1)
# red line, blue line
plt.plot(x, 3 - x, 'r-', x, x+1, 'b-')
plt.show()
```

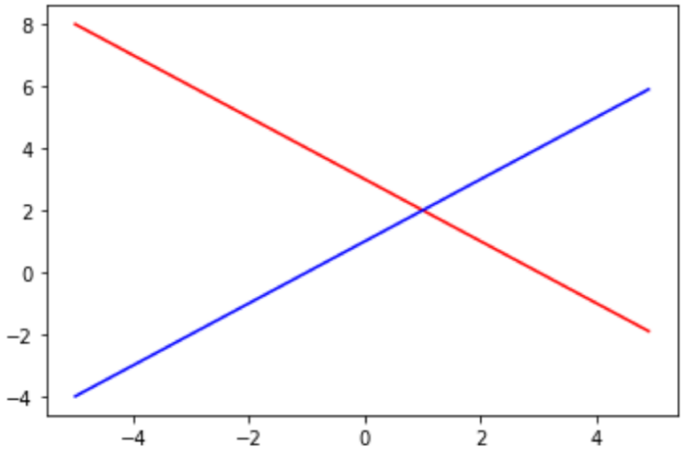
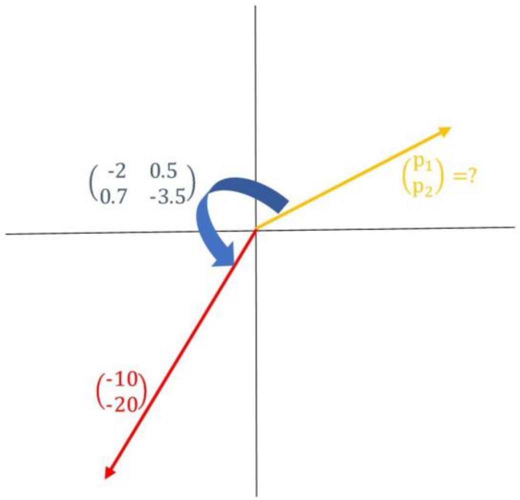


Figure 4

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{y}$$



PRODUCTO MATRIZ-VECTOR, LA VISTA DE LAS FILAS

$$A = \begin{pmatrix} \text{—}\mathbf{r_1}\text{—} \\ \text{—}\mathbf{r_2}\text{—} \\ \vdots \\ \text{—}\mathbf{r_m}\text{—} \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \text{—}\mathbf{r_1}\text{—} \\ \text{—}\mathbf{r_2}\text{—} \\ \vdots \\ \text{—}\mathbf{r_m}\text{—} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{r_2} \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r_m} \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

PRODUCTO MATRIZ-VECTOR, LA VISTA DE LAS COLUMNAS
HACIA UN ENTENDIMIENTO COMPLETO DE LAS ECUACIONES LINEALES

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & \cdots & \mathbf{c_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c_i} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{c_1} + x_2\mathbf{c_2} + \cdots + x_n\mathbf{c_n}$$

PRODUCTO MATRIZ-VECTOR, LA VISTA DE LAS COLUMNAS
HACIA UN ENTENDIMIENTO COMPLETO DE LAS ECUACIONES LINEALES

- A **x** = y
- A: m x n, conocida, **x**: n x 1, desconocido, **y**: m x 1 conocido
- A **x**, para todo posible **x**, es el span de los vectores columna de A.
- El subespacio “spaneado” por los vectores columnas de A se llama “Espacio Columna de A: C(A)”
- Entonces la única manera de que haya solución es si $\mathbf{y} \in C(A)$.
- Si $\mathbf{y} \notin C(A)$, no hay solución.

PRODUCTO MATRIZ-VECTOR, LA VISTA DE LAS COLUMNAS
HACIA UN ENTENDIMIENTO COMPLETO DE LAS ECUACIONES LINEALES

- Si $\mathbf{y} \in C(A)$ pueden pasa 2 cosas:
  - Los vectores columna de A son linealmente independientes, entonces el teorema de unicidad nos asegura que va a haber una y solo una solución.
  - Los vectores columna de A NO son linealmente independientes, entonces va a haber infinitas soluciones.
- Recuerden que A: m x n (n columnas, donde cada columna es un vector de R^m)
- Si m > n, lo más probable es que el sistema no tenga solución.
- Si m < n, lo más probable es que el sistema tenga infinitas soluciones.
- Si m = n y los vectores columna son linealmente independientes va a haber una única solución.

PRODUCTO MATRIZ-VECTOR, LA VISTA DE LAS COLUMNAS
HACIA UN ENTENDIMIENTO COMPLETO DE LAS ECUACIONES LINEALES

- A **x** = **y**
- Como vimos, la única manera de que haya solución es si $\boldsymbol{y} \in C(A)$.
- Otra manera de decir lo mismo es $\mathbf{Proj}_{C(A)}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$
- Una manera de hacer esta proyección es con el método de Gram-Smidth a partir de los vectores columna. (ver Jupyter Notebook SistemasLinealesEspaciosColumnaYNulo)

PRODUCTO MATRIZ-VECTOR, LA VISTA DE LAS COLUMNAS
HACIA UN ENTENDIMIENTO COMPLETO DE LAS ECUACIONES LINEALES

- Dijimos que si $\mathbf{y} \in C(A)$ pueden pasa 2 cosas:
  - Los vectores columna de A son linealmente independientes, entonces el teorema de unicidad nos asegura que va a haber una y solo una solución.
  - Los vectores columna de A NO son linealmente independientes, entonces va a haber infinitas soluciones.
- Consideremos este último caso: si los vectores columna son linealmente dependientes, existen constantes $z_i, i = 1, \dots, n$, no todas cero, tal que $A\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i \boldsymbol{c_i} = \mathbf{0}$
- Multiplicando todo por una constante λ vemos que λ**z** también satisfice A (λ**z**) = **0**.
- Y si hay otras constantes $z'_i, i = 1, \dots, n$, no todas cero, tal que $A\boldsymbol{z}' = \sum_{i=1}^{n} z'_i \boldsymbol{c_i} = \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}'$ también satisfacen la misma ecuación.
- De modo que las soluciones de A**z** = **0** forman un subespacio, que llamamos el "Espacio Nulo de A", N(A).

PRODUCTO MATRIZ-VECTOR, LA VISTA DE LAS COLUMNAS HACIA UN ENTENDIMIENTO COMPLETO DE LAS ECUACIONES LINEALES

- Si los vectores columna de A NO son linealmente independientes, entonces va a haber infinitas soluciones de A **x** = **y**.
- De lo anterior resulta obvio que si encontramos una solución **x** de esa ecuación, la totalidad de las soluciones van a ser de la forma $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$, donde $\boldsymbol{z} \in N(A)$.
- Ver Jupyter Notebook: SistemasLinealesEspaciosColumnaYNulo

DIMENSIONES DE C(A) Y N(A)

- A: m x n, n vectores columna, cada uno $\in R^m$
- Si todos los vectores columna son linealmente independientes, cosa que solo puede ocurrir si $n \leq m$, entonces $N(A) = \mathbf{0}$, en ese caso $\dim(N(A)) = 0$ y $\dim(C(A)) = n$, entonces

$$\dim(N(A)) + \dim(C(A)) = n$$

- Supongamos ahora que $\dim(C(A)) = c_A < n$, cuál es la dimensión de N(A)?
- Si $\dim(C(A)) = c_A < n$, hay c_A columnas linealmente independientes. Supongamos, para fijar ideas, que las primeras c_A columnas son linealmente independientes, y que todas las columnas, desde $c_A + 1$ hasta n, son linealmente <u>dependientes</u> de las primeras c_A. Considere un número entero j tal que $c_A + 1 \leq j \leq n$ y el vector

$$\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_{cA,}\ 0_{cA+1}, 0_{cA+2},\ldots, 1_j, 0_{j+1},\ldots,0_n)^T$$

DIMENSIONES DE C(A) Y N(A)

- $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{cA,}\ 0_{cA+1}, 0_{cA+2}, \ldots, 1_j, 0_{j+1}, \ldots, 0_n)^T$
- $A\,\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + \ldots + x_{cA}\mathbf{c}_{cA} + \mathbf{c}_j$
- Pero por hipótesis $\mathbf{c}_j$ es linealmente dependiente de $\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{cA}\}$, entonces van a existir constantes $x_1, \ldots, x_{cA}$ que val a hacer $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{cA,}\ 0_{cA+1}, 0_{cA+2}, \ldots, 1_j, 0_{j+1}, \ldots, 0_n)^T \in N(A)$$

- Lo mismo se puede hacer con j desde c_A+1 hasta n, y notar que todos estos **x**s, por construcción, son linealmente independientes entre sí, por lo que

$$\dim(N(A)) = n - c_A$$

- Por lo tanto, en este caso también ocurre que $\dim(N(A)) + \dim(C(A)) = n$
- **Teorema:** para toda matriz A: m x n,

$$\dim(N(A)) + \dim(C(A)) = n$$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

- Dada una matriz A: n x n (cuadrada), un vector no nulo **v** es un *autovector* de A si existe un escalar λ tal que $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$
- λ es el autovalor correspondiente al autovector **v.**
- A partir de la definición de **v,** $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
- Es decir que **v** ϵ N(A – λ I).
- Recordemos que si el espacio nulo de una matriz no es **0**, entonces la matiz tiene determinante = 0.

$$Det(A - \lambda I) = 0$$

- Es entonces la ecuación que determina los autovalores de A

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

$$Det(A - \lambda I) = 0$$

- Esta ecuación es un polinomio en λ de orden n, por lo que si dejamos que λ tome valores complejos, siempre tiene n soluciones.
- El problema es que esas soluciones, en general, van a estar asociada a autovectores complejos.
- Si nos restringimos a autovalores y autovectores reales, supongamos que la ecuación tiene r autovalores reales ($r \leq n$).
- Cada autovalor tiene asociado un *subespacio* de autovectores (que puede ser de mas de una dimensión)
  - ver que si **v** y **w** son autovectores de A con igual autovalor, entonces a **v** + b **w** también lo es
- Si λ_1 y λ_2 son dos autovalores distintos y $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ sus respectivos autovectores, entonces $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ son linealmente independientes.
- Si r = n, entonces hay una base de autovectores de A en V.

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

- Si r = n, entonces hay una base de autovectores de A en V.
- Esa base es muy conveniente para calcular la acción de A sobre cualquier vector **x**, porque si escribimos **x** como combinación lineal de los autovectores $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v_i}$

$$\boldsymbol{Ax} = A\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{Av_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i \boldsymbol{v_i}$$

- Un caso especialmente interesante es cuando la matriz A es simétrica.
- Si A es simétrica, sus atovectores correspondientes a auovalores diferentes son ortogonales entre si.
- Entonces la base de autovectores es ortogonal (y como si **v** es un autovector correspondiente al autovalor λ, a **v** (donde "a" es cualquier escalar) también lo es, esa base se puede seleccionar ortogonal)