Bài tập chương 1

1. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & k \end{bmatrix}$. Tìm k để A là nghiệm của đa thức

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

2. Tính $A^n; n \in \mathbb{N}; n \geq 1$

1) $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. 1) Tìm các số x, y, z, t nếu:

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{pmatrix}$$

2) Tìm tất cả các ma trận giao hoán với ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

4. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Tính $AB\ C,\ C^T B^T A^T$

2) Tính f(A) biết $f\ x\ = 2x^2 + 3x + 5 - \dfrac{2}{x}$

5. Tìm ma trận X trong các trường hợp sau:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

6. Tính định thức

1) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & a+x & x \\ x & x & a+x \end{vmatrix}$

8) Chứng minh rằng:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ chia hết cho (x – y), (y – z) và (z – x)

9) Biết 204; 527; 255 đều chia hết cho 17. Chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \vdots\ 17$$

10) Không khai triển định thức hãy chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \vdots\ 23$$

11) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & n \end{vmatrix}$$

12) $$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \ldots & 0 & a_2 & a_1 \\ 0 & \ldots & a_3 & a_2 & a_1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \ldots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

13) $$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \dots & -3 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -n & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

14) $$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & y \\ y & 0 & \dots & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

15) $$D_n = \begin{vmatrix} n & a & a & \dots & a \\ a & n & a & \dots & a \\ a & a & n & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a & a & a & \dots & n \end{vmatrix}; \quad E_n = \begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a & n \\ a & a & a & \dots & n & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ n & a & a & \dots & a & a \end{vmatrix}$$

7. Giải phương trình

1) $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = 0$; (với $a^2 \neq b^2$)

2) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$

8. Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

9. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo của A bằng phương pháp Gauss – Jordan.

10. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo của A bằng cách sử dụng định thức.

11. Tìm m để ma trận sau khả đảo:

1) $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ m & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5-m \\ m+1 & 1 & 3 \\ 3 & m-1 & 3 \end{bmatrix}$$

12. Biện luận theo $a \in \mathbb{R}$ hạng của ma trận sau:

1) $$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

2) $$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

3) $$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4) $$A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

5) $$A = \begin{bmatrix} 4 & a & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$