Chương 2. MA TRẬN – ĐỊNH THỨC
Bài 1. Ma trận.

Chú ý: Sinh viên có thể tham khảo thêm các dạng bài tập khác trên các tài liệu khác và trên website: http://www.linear.aglebra1.wikispaces.com

I. Các phép tính trên ma trận

1) Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{bmatrix}$. Tính

a) $3A + 2B$;
b) $4A - 3B$;
c) A^T;
d) $A^T A, AA^T$.

Giải

Ta có: $3A+2B=3\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-4 & 3+2 & -3\\ -6 & 3+4 & -12+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5 & -3\\ -6 & 7 & -8\end{bmatrix}$

Sinh viên làm tương tự

Ta có: $A^T=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ -1 & -4\end{bmatrix}$

Ta có. $A.A^T=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ -1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.2+1.1+1 & 2.0+1.1+4\\ 2.0+1+4 & 0+1+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5\\ 5 & 17\end{bmatrix}$.

Sinh viên làm tương tự cho câu còn lại. $A^T A$

2) Tính b) $\begin{bmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$

Giải

Ta có: $\begin{bmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ -3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5.7+0.(-3)+2.2+3.1\\ 4.7+1.(-3)+5.2+3.1\\ 3.7+1.(-3)+(-1).2+2.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}42\\ 41\\ 17\end{bmatrix}$

Sinh viên làm tương tự cho các câu a, c trong tài liệu

3) Tính $A^k, k\in\mathbb{N}$ với A là các ma trận sau:

b) $A=\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Giải

Ta có: $A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}; A^3=\begin{bmatrix}1 & 3\alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Suy ra,

$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (1).

Chứng minh công thức (1) bằng phương pháp quy nạp.

Với n = 1, biểu thức (1) đúng.

Với n = k, giả sử (1) đúng. Ta sẽ chứng minh (1) cũng đúng với n = k+1.

Ta có,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{bmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (n+1)\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

- Sinh viên làm tương tự cho các câu còn lại của bài 3; bài 5 trong tài liệu.

<u>II. Đa thức của ma trận:</u>

4. Tính *f*(*A*), với $f(x) = x^3 - 7x + 5$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Giải

Ta có: $f(A) = A^3 - 7A + 5I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4\alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Sinh viên làm tương tự các phần còn lại của bài tập 4; bài tập 8 trong tài liệu.

<u>III. Ma trận giao hoán.</u>

5. a) Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 giao hoán với ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

Giải

Gọi $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ là ma trận giao hoán với A nên hệ số *a*, *b*, *c*, *d* cần tìm thỏa:

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ 2c+d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases}$$

Ví dụ: $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ thì $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = BA$

Sinh viên làm tương tự cho câu 6 b.

Các bài tập còn lại sinh viên tự làm.

Bài 2. Định thức

I. Tính định thức

1. Các định thức cấp 2, 3:

Áp dụng công thức Sarus để tính các định thức cấp 2, 3.

Bài 9) Tính các định thức cấp 3.

a) Áp dụng công thức Sarus để tính các định thức cấp 2, 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 4.7 + 2.3.3 + (-1).5.0 - 3.4.0 - 3.5.1 + 2.7 = 28 + 17 = 45$$

Sinh viên làm các bài tập tương tự 10a), 10c), 10d).

Kết quả: 10c = 27

10d = -13 – 6i

2. Các định thức cấp lớn hơn bằng 4.

b) Áp dụng định lý Laplace:

Bài 11. Tính định thức

Cách 1: 11d) Áp dụng khai triển Laplace theo dòng hoặc theo cột để tính định thức

Khai triển theo dòng 1 có:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 0 & c \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & a & 0 \\ 1 & b & c \end{vmatrix} = c^2 - 2ac - 2bc + b^2 - 2ba + a^2$$

Cách 2:

11e) Áp dụng tính chất của định thức và dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa định thức về dạng tam giác trên khi đó định thức là tích các phần tử trên đường chéo chính:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Các câu còn lại của bài tập 11.

3) Tính định thức cấp n:

Dùng các phương pháp tính định thức cấp n để tính định thức

PP. Đưa về dạng tam giác:

Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1+a_2+\dots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1+a_1+a_2+\dots+a_n & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1+a_1+a_2+\dots+a_n & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+a_1+a_2+\dots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1+a_2+\dots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1+a_1+a_2+\dots+a_n$$

$$b)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Gọi định thức đã cho là *D*, bằng cách nhân dòng 1 và cột 1 với x ta được định thức $\Delta = x^2 D$. Đối với định thức Δ ta cộng tất cả các cột vào cột đầu, rút thừa số chung. Sau đó nhân dòng đầu với -1 rồi cộng vào các dòng sau. Kết quả $D = (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$.

Các dạng bài tập còn lại sinh viên tham khảo các phương pháp trong tài liệu và giải.

II. Áp dụng các tính chất của định thức để giải các bài toán:

Bài 10). Cộng các cột vào cột 1 ta có:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = \left(\alpha+\beta+\gamma\right)\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 1 & \gamma & \alpha \\ 1 & \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

α, β, γ là các nghiệm của phương trình $x^3 + px + q = 0$ nên $\alpha+\beta+\gamma = 0$ nên định thức bằng 0.

Bài 12) Giải phương trình:

Ta có : $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 48 - 52x + 18x^2 - 2x^3 = 0$

Sinh viên giải phương trình trên sẽ tìm được x.

Bài 13) Chứng minh định thức bằng 0.

Áp dụng tính chất của định thức chứng minh các định thức này có hai dòng hoặc hai cột bằng nhau hoặc 2 cột tỉ lệ; có một dòng (một cột) bằng 0; hoặc có một dòng (cột) là tổ hợp tuyến tính của các dòng (cột) còn lại.

a) Chứng minh $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$

Cộng cột 2 vào cột 1 rồi thì có định thức có hai cột tỉ lệ nên định thức này bằng 0.

$$\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & c & 1 \\ a+b+c & a & 1 \\ a+b+c & b & 1 \end{vmatrix}$$

b) Áp dụng công thức cộng $\sin(a+d) = \sin a \cos d + \sin d \cos a$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\theta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\theta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\alpha+\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha\cos\theta + \sin\theta\cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin\beta\cos\theta + \sin\theta\cos\beta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\alpha\cos\theta + \sin\theta\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha\cos\theta \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin\beta\cos\theta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\alpha\cos\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\theta\cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin\theta\cos\beta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin\theta\cos\alpha \end{vmatrix} = 0$$

h) $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-(a+3)^2 & (a+1)^2-(a+2)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2-(b+3)^2 & (b+1)^2-(b+2)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2-(c+3)^2 & (c+1)^2-(c+2)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2-(d+3)^2 & (d+1)^2-(d+2)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (-3)(2a+3) & (-1)(2a+3) & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ (-3)(2b+3) & (-1)(2b+3) & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ (-3)(2c+3) & (-1)(2c+3) & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ (-3)(2d+3) & (-1)(2d+3) & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Sinh viên làm các câu còn lại tương tự.

Bài 14) Chứng minh $A \in M(n;K)$, n lẻ, A là ma trận phản xứng thì det$A$ = 0.

Vì A là ma trận phản xứng nên $A = -A^T$. Suy ra,

$\det A = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det(A)$ (do n lẻ).

Vậy det A = 0.

Bài 15) Chứng minh một đẳng thức có chứa định thức.

$$a) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (cột) và áp dụng các tính chất của định thức để đưa đến điều cần chứng minh.

a) Cộng dòng 2 và dòng 3 vào dòng 1 ta được:

$$a) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Nhân cột 1 với (-1) rồi cộng vào cột 2 và 3.

Ta có:

$$(a+b+c).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \text{ (đpcm).}$$

- Sinh viên làm tương tự cho các câu còn lại.

Bài 3. Hạng ma trận

I. Tính hạng của ma trận:

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận về dạng bậc thang hoặc dạng tam giác. Từ đó số dòng khác 0 của ma trận chính là hạng của ma trận.

Bài 18) k).

a) Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận còn lại là ma trận bậc thang.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{....} \begin{bmatrix} 1 & 3/4 & 0 & 1/2 & -11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hạng của ma trận của này là: 2.

$$k)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_4 \to d_4 - d_1]{\substack{d_2 \to d_2 - d_1 \\ d_3 \to d_3 - d_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Hạng của ma trận này bằng 4.

- Sinh viên làm các bài tập còn lại.

Bài 19). Tìm hạng của ma trận cấp n.

$$a)\begin{bmatrix} 1+a & a & ... & a \\ a & 1+a & ... & a \\ ... & ... & ... & ... \\ a & a & .... & 1+a \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \to c_1 + ... + c_n} \begin{bmatrix} 1+na & a & ... & a \\ 1+na & 1+a & ... & a \\ ... & ... & ... & ... \\ 1+na & a & .... & 1+a \end{bmatrix} \xrightarrow{d_i \to d_i - d_1} \begin{bmatrix} 1+na & a & ... & a \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & .... & 1 \end{bmatrix}$$

Nếu a = 0 thì ma trận trở thành là I_n suy ra hạng ma trận là n.

Gọi 1 + na = 0 thì a = -1/n. Suy ra, hạng của ma trận này là n-1.

Nếu 1+ na khác 0 thì hạng của ma trận này là n.

$$c)A = \begin{bmatrix} a & b & ... & b \\ b & a & ... & b \\ ... & ... & ... & ... \\ b & b & ... & a \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \to c_1 + ... + c_n} \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & ... & b \\ a+(n-1)b & a & ... & b \\ ... & ... & ... & ... \\ a+(n-1)b & b & ... & a \end{bmatrix} \xrightarrow{d_i \to d_i - d_1} \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & ... & b \\ 0 & a-b & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a-b \end{bmatrix}$$

TH a = b.

Nếu a = b = 0 thì A = 0 suy ra rank A = 0.

Nếu $a = b \neq 0$ thì rank A = 1

TH $a \neq b$

Nếu $a \neq -(n-1)b$ thì rank A = n

Nếu $a = -(n-1)b$ thì rank A = n-1.

II. Tìm điều kiện của tham số để được ma trận có hạng là một hằng số cho trước.

Bài 20) Tìm điều kiện của λ để ma trận sau có hạng bằng 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6-\lambda & 9 \\ 4 & 8-\lambda & 12 \end{bmatrix}$$

Ma trận trên có hạng bằng 1 khi có duy nhất một dòng khác 0 sau khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng. Suy ra hai dòng còn lại của ma trận phải tỉ lệ với dòng thứ 1 suy ra $\lambda = 0$. Sinh viên làm tương tự các câu còn lại của bài 20.

Bài 4. Ma trận nghịch đảo.

I. Tìm ma trận nghịch đảo:

A. Dùng phương pháp định thức:

Bài 21. Tìm các ma trận nghịch đảo sau:

$$a) A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ta có: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} P_A$ với det A = 9-10 = -1 và

Ma trận $P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$ trong đó,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} 3 = 3; A_{12} = (-1)^{1+2} 2 = -2$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} 5 = -5; A_{22} = (-1)^{2+2} 3 = 3$$

Suy ra, $A^{-1} = -\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

Sinh viên làm tương tự cho các câu còn lại của bài 21 bằng cách sử dụng phương pháp định thức và ma trận phụ hợp.

B. Phương pháp khử Gauss:

Bổ sung vào bên vế phải của ma trận A ma trận đơn vị I_n như sau: $\left[A \,|\, I_n\right]$ sau đó dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận A về dạng ma trận đơn vị như sau: $[I_n \,|\, B]$ khi đó ma trận B chính là ma trận nghịch đảo cần tìm.

Bài 21. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dùng phương pháp khử Gauss ta thực hiện các bước như sau:

$$\left[A\,|\,I_n\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}-1&1&1&1&1&0&0&0\\1&-1&1&1&0&1&0&0\\1&1&-1&1&0&0&1&0\\1&1&1&-1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[d_4\to d_4+d_1]{\substack{d_2\to d_2+d_1\\ d_3\to d_3+d_1}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}-1&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&2&2&1&1&0&0\\0&2&0&2&1&0&1&0\\0&2&2&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_4\to d_4-d_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}-1&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&2&2&1&1&0&0\\0&2&0&2&1&0&1&0\\0&0&2&-2&0&0&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{d_4\to d_4-d_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}-1&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&2&2&1&1&0&0\\0&2&0&2&1&0&1&0\\0&0&0&-4&-1&-1&-1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{d_2\to d_2/2\\ d_3\to d_3/2\\ d_4\to d_4/(-4)\\ d_1\to -d_1}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&-1&-1&-1&0&0&0\\0&0&1&1&1/2&1/2&0&0\\0&1&0&1&1/2&0&1/2&0\\0&0&0&1&1/4&1/4&1/4&-1/4\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{d_1\to d_1+d_3\\ d_2\to d_2-d_4}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&-1&0&-1/2&0&1/2&0\\0&0&1&0&1/4&1/4&-1/4&1/4\\0&1&0&1&1/2&0&1/2&0\\0&0&0&1&1/4&1/4&1/4&-1/4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_1\to d_2+d_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-1/4&1/4&1/4&1/4\\0&0&1&0&1/4&1/4&-1/4&1/4\\0&1&0&1&1/2&0&1/2&0\\0&0&0&1&1/4&1/4&1/4&-1/4\end{array}\right]\xrightarrow{d_2\leftrightarrow d_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-1/4&1/4&1/4&1/4\\0&1&0&1&1/2&0&1/2&0\\0&0&1&0&1/4&1/4&-1/4&1/4\\0&0&0&1&1/4&1/4&1/4&-1/4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_2\to d_2-d_4}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-1/4&1/4&1/4&1/4\\0&1&0&0&1/4&-1/4&1/4&1/4\\0&0&1&0&1/4&1/4&1/4&-1/4\\0&0&0&1&1/4&1/4&1/4&-1/4\end{array}\right]$$

Sinh viên thực hiện phương pháp khử Gauss để tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận còn lại của bài 21.

II. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận cấp n.

Nhận xét:

Đối với ma trận tam giác trên (hoặc tam giác dưới) thì khả nghịch khi và chỉ khi các phần tử trên đường chéo chính khác 0. Trong trường hợp đó, ma trận nghịch đảo của nó cũng là ma trận tam giác. Đặc biệt đối với việc tìm ma trận tam giác trên ta chỉ cần tìm ma trận nghịch đảo của ma trận này ta sẽ dùng phương pháp gauss để khử từ dòng n lên dòng 1.

Nếu A là ma trận lũy linh thì $I + A$ là ma trận khả nghịch, khi đó ma trận

$B = I - A + A^2 + ... + (-1)^{r-1}A^{r-1}$ là ma trận khả nghịch của A và A là khả nghịch.

Ví dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau: $A=\begin{bmatrix}1&1&...&1\\0&1&...&1\\...&...&...&...\\0&0&...&1\end{bmatrix}$

Sử dụng phương pháp Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & .... & .... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[1<i<n-1]{d_i \to d_i - d_n} \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 & -1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & .... & .... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[1<i<n-2]{d_i \to d_i - d_{n-1}} \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & .. & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & -1 & -1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & .... & .... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{....} \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & ... & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & ... & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & -1 & -1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & .... & .... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Bài 22 d) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1+a \end{bmatrix}$$

Giải

Lập ma trận ($A|I$). Cộng dòng 1 với tất cả các dòng còn lại, ta thấy điều kiện cần để A khả nghịch là $a+n\neq 0$. Chia dòng 1 cho 1 + a ta đưa về dòng toàn 1. Sau đó, lần lượt trừ đi dòng thứ 1, ta thấy điều kiện cần nữa là $a\neq 0$. Bây giờ chia các dòng thứ 2 trở đi cho 1/a, rồi bớt đi từ dòng 1 tổng tất cả các dòng còn lại, ta sẽ được ma trận nghịch đảo là:

$$A^{-1} = -\frac{1}{a(n+a)}\begin{bmatrix} 1-n-a & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1-n-a & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 1-n-a & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1-n-a \end{bmatrix}$$

III. Tìm điều kiện cho ma trận khả nghịch từ đó suy ra ma trận nghịch đảo:

Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $\det A \neq 0$

Bài 23. Tìm điều kiện để ma trận sau khả nghịch.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & m+5 \\ -m & 2m & 1 \end{bmatrix}$

Giải

$\det A = m^2 + 3m + 2$. Suy ra, $\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1 \wedge m \neq -2$.

Khi đó, ma trận khả nghịch của ma trận này là:

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{7+2m^2+10m}{2+m^2+3m} & \dfrac{4m+3}{2+m^2+3m} & -\dfrac{3m+1}{2+m^2+3m} \\ -\dfrac{m^2+5m+3}{2+m^2+3m} & \dfrac{2m+1}{2+m^2+3m} & -\dfrac{m-1}{2+m^2+3m} \\ -\dfrac{m}{2+m^2+3m} & \dfrac{m}{2+m^2+3m} & 2\dfrac{1}{2+m^2+3m} \end{bmatrix}$$

Sinh viên làm tương tự cho các câu còn lại của bài 23.

Bài 24). Cho $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Tính $\left(B^{-1}AB\right)^k, k\in\mathbb{N}$

Nhận xét: $\left(B^{-1}AB\right)^k = B^{-1}AB.B^{-1}AB....B^{-1}AB = B^{-1}A^kB, k\in\mathbb{N}$

Sinh viên thực tập việc tìm lũy thừa của ma trận A và nghịch đảo của B để suy ra kết quả.