Bài tập chương 3

1. Cho $V = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Xét xem V có phải là không gian véctơ trên $\mathbb{R}$ với phép cộng và phép nhân vô hướng sau không?

$$+ : \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\bullet : \quad \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)\ ; \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Cho $V = \quad x_1, x_2 \ \in \mathbb{R}^2 \left| x_1 > 0, x_2 > 0 \right.$. Xét xem V có phải là không gian véctơ trên $\mathbb{R}$ với phép cộng và phép nhân vô hướng sau không?

$$1) \quad + : \quad x_1, x_2 \ + \ y_1, y_2 \ = \ x_1 + y_1, x_2 + y_2$$

$$\bullet : \quad \lambda \ x_1, x_2 \ = \ \lambda x_1, \lambda x_2 \ ; \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad + : \quad x_1, x_2 \ + \ y_1, y_2 \ = \ x_1 y_1, x_2 y_2$$

$$\bullet : \quad \lambda \ x_1, x_2 \ = \ x_1^{\lambda}, x_2^{\lambda} \ ; \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

3. P_n là tập các đa thức hệ số thực bậc n với các phép toán thông thường: cộng hai đa thức và nhân đa thức với một số có phải là không gian véctơ trên $\mathbb{R}$ không?

4. Hãy xác định λ sao cho x là tổ hợp tuyến tính của u, v, w

1) $x = 7,-2,\lambda\ ; u = 2,3,5\ ; v = 3,7,8\ ; w = 1,-6,1$

2) $x = \lambda + 9t + 5t^2 ; u = 2 + 2t + 4t^2 ; v = 1 - t - 3t^2 ; w = 3 + 3t + 6t^2$

5. Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véctơ sau trong không gian véctơ tương ứng:

1) $S = \ x = \ 1,0,1,1\ ; y = \ 0,1,1,1\ ; z = \ 1,1,0,1\ ; t = \ 1,1,1,m$ trong $\mathbb{R}^4$

2) $S = \ u = x^2 + x + 1; v = 2x^2 + x + 2; w = 3x^2 + mx + 3$ trong $P_2\ x$

3) $S = \left\{ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 4 & m \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right\}$ trong $M_2\ \mathbb{R}$

6. Cho x, y, z là ba véctơ độc lập tuyến tính trong không gian véctơ V. Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véctơ sau:

1) $S = \quad u = x + y - 2z; v = x - y; w = 3y + z$

2) $S = \quad u = x + y - 3z; v = x + 3y - z; w = y + mz$

7. Xét sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véctơ sau trong các không gian véctơ tương ứng. Tìm hạng cũng như hệ véctơ con độc lập tuyến tính tối đại của các hệ véctơ đó.

1) $u_1 = 1,2,3,4\ ; u_2 = 2,3,4,1\ ; u_3 = 3,4,5,6\ ; u_4 = 4,5,6,7$ trong $\mathbb{R}^4$

2) $u_1 = 1,0,0,0\ ; u_2 = 0,1,0,0\ ; u_3 = 0,0,a,0$ trong $\mathbb{R}^4$

9. Trong các trường hợp sau, xét xem W có là không gian con của $\mathbb{R}^n$ không?

1) $W = \quad x_1, \ldots, x_n \ \in \mathbb{R}^n \, \big| \, x_1 \geq 0$

2) $W = \quad x_1, \ldots, x_n \ \in \mathbb{R}^n \, \big| \, x_1 + 2x_2 = x_3$

3) $W = \quad x_1, \ldots, x_n \ \in \mathbb{R}^n \, \big| \, x_1 = x_2 = 0$

10. Hệ véctơ sau đây có phải là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ không?

1) $S = \ u_1 = \ 3,2,2 \ ; u_2 = \ 4,8,1$

2) $S = \ u_1 = \ 4,1,2 \ ; u_2 = \ 2,0,1 \ ; u_3 = \ 1,3,2 \ ; u_4 = \ 1,1,3$

3) $S = \ u_1 = \ 1,0,0 \ ; u_2 = \ 2,2,0 \ ; u_3 = \ 3,3,3$

4) $S = \ \ m,3,1 \ ; \ 0,m-1,2 \ ; \ 0,0,m+1$

11. Hệ véctơ sau có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không?

1) $S = \quad u_1 = 1,1,1 \; ; u_2 = 2,2,0 \; ; u_3 = 3,0,0$

2) $S = \quad u_1 = 2,-1,3 \; ; u_2 = 4,1,2 \; ; u_3 = 8,-1,8$

3) $S = \quad u_1 = 3,1,4 \; ; u_2 = 2,-3,5 \; ; u_3 = 5,-2,9 \; ; u_4 = 1,4,-1$

4) $S = \quad u_1 = 1,3,3 \; ; u_2 = 1,3,4 \; ; u_3 = 1,4,3 \; ; u_4 = 6,2,1$

5) $S = \quad 0,1,1 \; ; \; 1,2,1 \; ; \; 1,3,m$

6) $S = \quad 1,2,-1 \; ; \; 0,3,1 \; ; \; 1,5,0 \; ; \; 3,9,m$

12. Chứng minh rằng hệ $E = \{1+x+x^2, 1+2x, 1+3x+2x^2\}$ là một cơ sở của $P_2[x]$ và tìm tọa độ của véctơ $u = 3x^2 - x + 7$ đối với cơ sở E.

13. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hai hệ véctơ

$$B = \ u_1 = \ 1,2,3 \ ; u_2 = \ 1,1,2 \ ; u_3 = \ 1,1,1$$

$$E = \ v_1 = \ 2,1,-1 \ ; v_2 = \ 3,2,-5 \ ; v_3 = \ 1,-1,m$$

1) Chứng minh B là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Xác định m để E là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

2) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang E

3) Cho $x_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \ y_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tìm véctơ $x; \ 3x + 2y_E; \ x_B$

14. Cho $B = \; u_1, u_2, u_3 \;$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và các véctơ v_1, v_2, v_3 có tọa độ đối với cơ sở B lần lượt là

$$v_1 \;_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 \;_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad v_3 \;_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) Chứng minh $E = \; v_1, v_2, v_3 \;$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tìm v_1, v_2, v_3 theo u_1, u_2, u_3

2) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở E sang B.

15. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các tập

$$W_1 = \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ \in \mathbb{R}^4 \left| x_1 + x_2 = 2x_3; x_1 - x_2 = 2x_4 \right.$$

$$W_2 = \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ \in \mathbb{R}^4 \left| x_1 = x_2 = x_3 \right.$$

1) Chứng minh rằng W_1, W_2 là các không gian con của $\mathbb{R}^4$

2) Tìm một cơ sở của W_1 , một cơ sở của W_2

16. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véctơ

$$u_1 = \ 1,-1,-4,0 \ ; u_2 = \ 1,1,2,4 \ ; u_3 = \ 2,1,1,6 \ ; u_4 = \ 2,-1,-5,2$$

Đặt $W = \left\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \right\rangle$

1) Tìm hạng của hệ véctơ $S = \ \ u_1, u_2, u_3, u_4$

2) Hệ $S = \ \ u_1, u_2, u_3, u_4$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

3) Tìm một cơ sở và số chiều của W

4) Véctơ $u = \ 6,2,0,16$ có thuộc W không? Nếu $u \in W$ thì tìm tọa độ của u đối với cơ sở vừa tìm được ở câu 3)

5) Hãy bổ sung vào cơ sở ở câu 3) để được một cơ sở của $\mathbb{R}^4$

17. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm một cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình:

1) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

4) $AX = 0$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ -2 & -5 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & -9 \end{bmatrix}$

18. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng Euclide. Hãy áp dụng quá trình trực giao hóa Gram – Schmidt để biến cơ sở e_1, e_2, e_3 thành cơ sở trực chuẩn

1) $e_1 = 1,1,1\ ; e_2 = 1,-1,0\ ; e_3 = 1,2,1$

2) $e_1 = 1,0,0\ ; e_2 = 3,1,-2\ ; e_3 = 0,1,1$

19. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian con của $\mathbb{R}^3$ sau

$$W = \quad x_1, x_2, x_3 \ \in \mathbb{R}^3 \big| 2x_1 + 3x_2 = 5x_3$$

Bài tập tự làm:

1. Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véctơ sau:

1) $S = \quad 1,2,3 \ ; \ 3,6,7 \quad$ trong $\mathbb{R}^3$

2) $S = \quad 4,-2,6 \ ; \ 6,-3,9 \quad$ trong $\mathbb{R}^3$

3) $S = \quad 4,-5,2,6 \ ; \ 2,-2,1,3 \ ; \ 6,-3,3,9 \ ; \ 4,-1,5,6 \quad$ trong $\mathbb{R}^4$

2. Xét sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ véctơ sau trong các không gian véctơ tương ứng. Tìm hạng cũng như hệ véctơ con độc lập tuyến tính tối đại của các hệ véctơ đó.

1) $\left\{u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}; u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; u_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}; u_4 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ trong $M_2\ \mathbb{R}$

2) $u_1 = x^2 - 2x + 2; u_2 = x^2 - 1; u_3 = x^3 + 2x^2 - 2x; u_4 = x^3 + 1$ trong $P_3\ x$

3. Trong các trường hợp sau, xét xem W có là không gian con của $\mathbb{R}^n$ không?

1) $W = \quad x_1, \ldots, x_n \ \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1 + 2x_2 = x_3$

2) $W = \quad x_1, \ldots, x_n \ \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1 + \ldots + x_n = 0$

4. Trong $\mathbb{R}^4$ cho hệ véctơ

$$E = \quad 1,2,-1,-2 \;\; ; \;\; 2,3,0,-1 \;\; ; \;\; 1,2,1,4 \;\; ; \;\; 1,3,-1,0$$

Chứng minh rằng E là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$ và tìm tọa độ của véctơ $x = \; 7,14,-1,2$ đối với cơ sở E.

5. Cho $E = \ u_1, u_2, u_3\ $ là một cơ sở của không gian véctơ V trên $\mathbb{R}$, đặt

$$F = \ v_1 = mu_1 + u_2 + 3u_3, v_2 = mu_1 - 2u_2 + u_3, v_3 = u_1 - u_2 + u_3$$

1) Xác định m để F là cơ sở của V

2) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở E sang F

6. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho

$$B = \ v_1 = \ 1,0,1 \ ; v_2 = \ 1,2,2 \ ; v_3 = \ 0,-1,-1$$

$$E = \ u_1 = \ 1,0,-1 \ ; u_2 = \ 1,1,1 \ ; u_3 = \ -1,2,2$$

1) Chứng minh B, E là các cơ sở của $\mathbb{R}^3$

2) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang E. Cho u = (1, 2, 3).

Tìm u_B; u_E

3) Tìm ma trận chuyển từ E sang B. Cho $v_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tìm

v; v_E

7. Trong không gian $P_2\left[x\right]$ các đa thức hệ số thực bậc không quá 2, cho B là cơ sở chính tắc của $P_2\left[x\right]$ và

$$E=\left\{v_1=1+3x; v_2=x+2x^2; v_3=1+x+x^2\right\}$$

1) Chứng minh E là các cơ sở của $P_2\left[x\right]$

2) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang E

3) Cho $\left[v\right]_E=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$. Tìm v; $\left[v\right]_B$