O teorema de Krivine e os espaços de sequências

Lucas Nunes Fernandes Teles
Valentin Raphael Henri Ferenczi (orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - USP

1 Os espaços c_0 e ℓ_p

Espaços de sequências surgem naturalmente no estudo de espaços de vetoriais de dimensão infinita. Na teoria dos espaços de Banach, os seguinte espaços têm importância particular:

$$c_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^n : x_n \to 0\}$$

munido da norma $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ e

$$\ell_p := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^n : \textstyle\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < \infty\}$$

munido da norma $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p)^{1/p}$, para $1 \leq p < \infty$.

Em 1960 Pełczyński provou [3] que c_0 e os espaços ℓ_p são **espaços primos**, i.e. isomorfos a todos os seus subespaços complementados de dimensão infinita. Segue do resultado de Pelczynski a ideia de que os espaços ℓ_p e c_0 são fundamentais na construção de um espaço de Banach de dimensão infinita. Em particular, deixando a seguinte pergunta:

Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém uma cópia de ℓ_p ou c_0?

Após a reposta negativa dada por Tsirelson [4] em 1974, ao construir um espaço de Banach sem subespaços isomorfos a c_0 ou qualquer ℓ_p, o teorema de Krivine afirma o melhor que poderíamos esperar: Que em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita podemos encontrar subespaços finitos, mas arbitrariamente grandes, que são isomorfos a algum subespaço de c_0 ou ℓ_p.

2 Bases de Schauder

Uma propriedade importante dos espaços c_0 e ℓ_p é a de que estes possuem uma **base de Schauder**. Isto é, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores de um espaço de Banach X que nos permite representar qualquer vetor $x \in X$ como

$$x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n,$$

para uma sequência de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ única.

Em particular, os espaços c_0 e ℓ_p tem como base de Schauder a base canônica $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $e_n(n) = 1$ e $e_n(k) = 0$ para $k \neq n$.

Apesar de não podermos afirmar que todo espaço de Banach de dimensão infinita possui uma base de Schauder, temos o seguinte:

Teorema 1. *Todo espaço de Banach de dimensão infinita possui um subespaço com base de Schauder.*

Uma sequência em um espaço de Banach que é uma base de Schauder de um subespaço deste é dita uma **sequência básica**. Pelo critério de Grunblum temos que estas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são caracterizadas por satisfazerem

$$\left\|\sum_{n=1}^m a_n x_n\right\| \leq K \left\|\sum_{n=1}^M a_n x_n\right\|$$

para $K > 1$ fixo e quaisquer $m \leq M$ naturais e $a_1, ..., a_M$ escalares.

3 Finita representabilidade

Para enunciarmos o teorema de Krivine precisamos ainda de uma alternativa finita precisa à ideia de um espaço de Banach conter uma cópia de outro espaço (isto é, um subespaço isomorfo a este), que vem através das definições a seguir.

Definição 2. Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que X é **finitamente representável** em Y se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ e E um subespaço de dimensão finita de X, existir um subespaço F de Y e um isomorfismo $T : E \to F$ tal que

$$\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon.$$

Proposição 3. *O espaço L_p é finitamente representável em ℓ_p para qualquer $1 \leq p < \infty$.*

Usando sequências podemos explorar a finita representabilidade com uma forma mais específica.

Definição 4. Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ é **finitamente representável por blocos** em $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ se dados quaisquer $m \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, existirem blocos

$$z_k = \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k} a_n y_n,$$

para $1 \leq k \leq m$, $1 = n_0 < n_1 < ... < n_m$ números naturais e $(a_1, ..., a_{n_m})$ escalares, tal que o operador $T : \operatorname{span}\{x_1, ..., x_m\} \to \operatorname{span}\{z_1, ..., z_m\}$ definido por

$$T(x_k) = z_k, \qquad 1 \leq k \leq m,$$

é um isomorfismo com $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$.

Lema 5. *As relação de finita representabilidade e finita representabilidade por blocos são transitivas.*

Com essas noções podemos enunciar o teorema principal deste trabalho:

Teorema 6 (Krivine)**.** *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência básica normalizada em um espaço de Banach X. Então existe $1 \leq p < \infty$ tal que a base canônica de ℓ_p é finitamente representável por blocos em $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou a base canônica de c_0 é finitamente representável por blocos em $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

4 Refinamento de sequências

O primeiro passo para provar o teorema de Krivine consiste em encontrar uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

i. **Invariante por dispersão**, isto é, que satisfaça

$$\left\|\sum_{n=1}^m a_n x_n\right\| = \left\|\sum_{n=1}^m a_n x_{i_n}\right\|$$

para qualquer escolha de escalares $a_1, ..., a_m$ e de índices $i_1 < ... < i_m$.

ii. 1**-incondicional**, ou seja, tal que

$$\left\|\sum_{n=1}^m a_n x_n\right\| = \left\|\sum_{n=1}^m \epsilon_n a_n x_n\right\|$$

para qualquer escolha de escalares $a_1, ..., a_m$ e sinais $\epsilon_1, ..., \epsilon_m \in \{-1, 1\}$.

No entanto, dado uma sequência básica normalizada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arbitrária conseguimos apenas garantir a seguinte propriedade:

Para todo $m \in \mathbb{N}$ existem $0 < c(m) < C(m)$ tais que

$$c(m) < \left\|\sum_{n=1}^m a_n x_n\right\| < C(m) \qquad (\spadesuit)$$

para todos escalares $a_1, ..., a_m$ onde $\sum_{n=1}^m |a_n| = 1$.

Para lidar com isso, recorremos à versão infinita do teorema de Ramsey:

Teorema 7 (Ramsey)**.** *Sejam A um conjunto infinito e r, k números naturais quaisquer. Então dada qualquer k-coloração de $[A]^r := \{C \subseteq A : |C| = r\}$, existe um subconjunto infinito $B \subseteq A$ tal que $[B]^r$ é monocromático.*

Dado $m \in \mathbb{N}$ e uma escolha de escalares $a_1, ..., a_m$, criamos uma coloração que associa os conjuntos de índices em $[\mathbb{N}]^m$ à partições arbitrariamente finas do intervalo $[c(m), C(m)]$, e encontramos uma "subsequência monocromática" que aproxima a invariância por dispersão. Partindo disso, conseguimos provar ainda existe uma sequência satisfazendo as propriedades (i) e (ii) e finitamente representável por blocos na nossa sequência original.

Teorema 8. *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X com a propriedade ($\spadesuit$). Então existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ invariante por dispersão e 1-incondicional em um espaço de Banach Y que é finitamente representável por blocos em $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Segue então do Lema 5 que podemos assumir uma sequência invariante por dispersão e 1-incondicional para provar o teorema de Krivine.

A partir disso usamos de alguns resultados da teoria espectral com autovalores aproximados e da teoria dos números para concluir a demonstração.

5 O teorema de Dvoretzky

A partir do teorema de Krivine pode ser provado outro resultado ilustre da interface entre combinatória infinita e a teoria dos espaços de Banach, conhecido como o teorema de Dvoretzky (em sua forma qualitativa).

Teorema 9 (Dvoretzky)**.** *O espaço ℓ_2 é finitamente representável em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita.*

Para prová-lo, nos resta mencionar apenas a seguinte proposição:

Proposição 10. *Para qualquer $1 \leq p < \infty$, o espaço L_p contém uma cópia de ℓ_2.*

Para a demonstração do Teorema 9, suponha que c_0 é finitamente representável por blocos em um espaço de Banach X. Como ℓ_∞ é finitamente representável em c_0 e ℓ_2 finitamente representável em ℓ_∞, segue do Lema 5 que ℓ_2 é finitamente representável em X.

Por outro lado, se ℓ_p para $1 \leq p < \infty$ é finitamente representável em X, então L_p é finitamente representável em X (Proposição 3) e por fim ℓ_2 é finitamente representável em X (Proposição 10).

Agradecimentos

Agradecemos ao 2° Encontro de Combinatória no Infinito pelo apoio financeiro, que possibilitou a apresentação deste trabalho.

Referências

[1] F. Albiac and N. J. Kalton. *Topics in Banach Space Theory*. Springer, 2006.

[2] S. Artstein-Avidan, V. D. Milman, and A. Giannopoulos. *Asymptotic Geometric Analysis, part II*. Mathematical surveys and monographs, vol. 261, 2021.

[3] A. Pełczyński. Projections in certain Banach spaces. *Studia Mathematica*, 19:209–228, 1960.

[4] B. S. Tsirelson. Not every Banach space contains an imbedding of ℓ_p or c_0. *Funct. Anal. and Its Appl.*, 8(2):138–141, 1974.