# Bases de Riesz e séries de Fourier não harmônicas

### Lucas Nunes Fernandes Teles

Orientador: Alexandre Kawano

30° SIICUSP

Bolsa FAPESP, 2022-2023

Departamento de Eng. Mecatrônica e Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica, USP

#### Introdução

Em disciplinas de Álgebra linear, alunos se familiarizam com o conceito de bases em espaços vetoriais, em particular com a base de Hamel.

**Definição 1** (Base de Hamel). Se V é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) e  $B \subset V$  um subconjunto de vetores linearmente independentes, dizemos que B é uma base de Hamel de V se, para qualquer  $u \in V$ , existem  $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$  (respectivamente  $\mathbb{C}$ ) e  $v_1, ..., v_n \in B$  tais que:

$$u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

Com essa noção podemos gerar, de forma única, qualquer ponto em um espaço vetorial. E, com isso, são introduzidos conceitos como sistemas de coordenada e a noção de dimensão de espaços vetoriais. Em particular, dizemos que a dimensão de um espaço vetorial é a cardinalidade de uma base de Hamel deste espaço.

Porém, o estudo de bases em espaços vetoriais não se restringe a bases de Hamel, outras noções de base, como a base de Schauder, oferecem além da representação única de vetores, vantagens particulares a espaços vetoriais de dimensão infinita.

**Definição 2** (Base de Schauder). Se  $(B, \|\cdot\|)$  é um espaço normado completo de dimensão infinita e  $(b_1, b_2, ...) \subset B$  uma sequência, dizemos que  $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$  é uma base de Schauder de B se para qualquer  $y\in B$  existe uma sequência de escalares  $(a_1, a_2, ...)$  única tal que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = y. \tag{1}$$

I.e.  $||y - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i|| \to 0 \text{ com } n \to \infty$ .

Com a base de Schauder podemos não só gerar, de forma única, os elementos de um espaço vetorial, como podemos aproximá-los com as somas parciais de (1). Com estruturas como a norma e em seguida o produto interno, no contexto de espaços de Banach e espaços de Hilbert respectivamente, podemos definir as séries de Fourier:

**Definição 3.** Se  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é um espaço de Hilbert separável,  $(e_1, e_2, ...)$  uma base de Schauder ortonormal de H e  $f \in H$  um vetor qualquer, chamamos a seguinte série de **expansão de Fourier de** f ou, simplesmente **série de Fourier**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

#### **Objetivos**

Neste projeto de pesquisa temos por objetivo demonstrar um teorema de Pailey & Wiener referente a bases em espaços de Banach e suas aplicações em séries de Fourier não harmônicas. E, no processo introduzir os espaços de Banach, espaços de Hilbert e motivar a representação de funções com séries de Fourier não harmônicas. Os resultados têm aplicações na análise de problemas inversos.

#### Métodos e procedimentos

Introduzimos os conceitos de espaços de Banach, de Hilbert, bases de Schauder e resultados elementares associados a estes. Com essas noções motivamos a definição das séries de Fourier e provamos propriedades e teoremas pertinentes, como o teorema de Riesz-Fischer. Por fim, apresentamos o teorema da aplicação aberta e o teorema da limitação uniforme, a partir dos quais provamos resultados relacionados aos funcionais de coeficiente, em antecipação ao teorema de Paley-Wiener.

#### Resultados e Conclusões

Dentre os resultados obtidos, selecionamos como representativos deste estudo:

• A validade da expansão de Fourier como representação única de vetores f de um espaço de Hilbert H com base de Schauder  $(e_1, e_2, ...)$  ortonormal, isto é,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

- •O teorema de Riesz-Fischer que declara a existência de um isomorfismo entre espaços de Hilbert separáveis e o espaço  $\ell^2$ . Nos permitindo assim, representar qualquer elemento de H como uma sequência em  $\ell^2$  e estabelecendo uma noção de equivalência entre espaços de Hilbert separáveis.
- A limitação dos operadores de soma parcial associados aos coeficientes de Fourier, como descritos a seguir:

$$1 < \sup_{n \in \mathbb{N}} ||S_n(x)|| < +\infty.$$

Onde  $S_n(x)$  é o operador linear que associa à cada  $x \in H$  a soma parcial  $\sum_{i=1}^n \langle x, e_n \rangle e_n$  da sua série de Fourier.

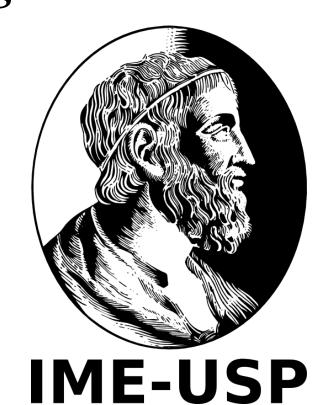
### Referências bibliográficas

Bartle, R. G. (1976), *Introduction to Real Analysis, 2nd edition*, John Wiley & Sons, Incorporated.

Kreyszig, E. (1978), Functional Analysis, John Wiley & Sons.

Young, R. M. (2001), An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Revised first edition, Academic Press.

## Agradecimentos:







Contato: Email: lucasteles@usp.br, tel: (85) 98170-1415.