Introdução à Teoria Espectral em espaços de Hilbert e aplicações em Equações Diferenciais

Proc. Fapesp 2021/14684-5

Vigência: 01/07/2023 - 31/06/2024

Bolsista: Lucas N. F. Teles
Orientadora: Nataliia Goloshchapova

[Preliminar, caso essa seja a versão encontrada, por favor entre em contato para conseguir a versão atual]

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução à Teoria Espectral

1.1 Espectro e convenções

1.1.1 Resolvente e espectro

A seguir incluo notas sobre como faço comentários no texto, enquanto o produzo:

Assim eu escrevo partes do texto que eu quero revisar (ex: tirar ou deixar).

Assim eu escrevo partes do texto que eu quero revisar (ex: tirar ou deixar) que eu ache que talvez a senhora possa ajudar a decidir.

[Assim eu escrevo comentários para mim mesmo (dúvidas, anotações, lembretes, ... que não compõe o texto em si do relatório)]

[Assim eu escrevo comentários (dúvidas, anotações, lembretes, ... que não compõe o texto em si do relatório) que eu ache que talvez a senhora possa saber responder/opinar sobre]]

[Que tal usar essa seção para ir ilustrando o motivo pelo qual a teoria espectral é útil? Talvez uma explicação mais 'informal'. "Análogo de dimensão infinita dos autovalores" e etc.]

Um operador linear $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq X \to X$ representa uma transformação específica de um espaço vetorial $\mathrm{Dom}(T)$ contido em $X \neq \{0\}$. Como seu contradomínio também é X, podemos imaginar que T representa uma transformação na estrutura do espaço X. A teoria espectral se preocupa em estudar como as transformações $T - \lambda I$, transformações T associadas à uma "pertubação" por um operador linear $-\lambda I$, afetam a estrutura de X, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e I é o operador identidade de X[1]. Por exemplo, $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ nos revela que λ é um autovalor de T, ou seja, que a transformação T apenas escala por λ o subespaço $\ker(T - \lambda I)$.

Pensando em $(T - \lambda I)$ (denotado simplesmente por $T - \lambda$, ou ainda, T_λ) como uma "transformação pertubada", os autovalores representam pertubações que tornam a transformação "irreversível". A teoria espectral procura estender o estudo de autovalores à operadores em espaços X de dimensão infinita. Em particular, dizemos que $(T - \lambda)^{-1}$ existe quando a "transformação pertubada" é invertível sobre sua imagem (quando $\ker(T - \lambda) = \{0\}$). Chamamos $(T - \lambda)^{-1}$ de *operador resolvente* e o denotamos por $R_\lambda(T)$ (quando o operador T em questão está claro, podemos omiti-lo e escrever R_λ). Como se pode esperar, o caso de dimensão infinta possibilita à pertubação λ algumas formas adicionais de "afetar a reversibilidade de $T - \lambda I$". Por isso, em espaços de dimensão infinita procuramos verificar 3 condições para avaliar se o operador resolvente $R_\lambda(T)$ é suficientemente agradável.

Definição 1.1.1 (Conjunto Resolvente)**.** Tome $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq X \to X$ um operador linear e $X \neq \{0\}$ um espaço normado sobre $\mathbb{C}$. Chamaremos de *conjunto resolvente* o subconjunto $\rho(T) \subseteq \mathbb{C}$ de valores λ tais que

- **(R1):** $(T - \lambda)^{-1}$ existe, isto é, $\ker(T - \lambda) = \{0\}$.
- **(R2):** $(T - \lambda)^{-1}$ é limitado.
- **(R3):** $(T - \lambda)^{-1}$ está definido em um conjunto denso em X.

Escalares $\lambda \in \rho(T)$ são chamados de *valores regulares*.

Chamaremos de *espectro de T* o conjunto

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T).$$

Escalares $\lambda \in \sigma(T)$ são chamados de *valores espectrais* e representam pertubações que "afetam significativamente" a transformação T.

O espectro pode ser dividido em 3 subconjuntos

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Descritos a seguir:

[1] Note que enquanto I é uma identidade para todo X, para considerarmos $T - \lambda I$ como um operador devemos usar I restrito a $\mathrm{Dom}(T)$.

1. $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \ker(T - \lambda) \neq \{0\}\}$ é chamado de *espectro pontual de T* e representa o conjunto dos autovalores de T.

2. $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \backslash \sigma_p(T) : \overline{\mathrm{Dom}(R_\lambda(T))} = X\}$ é chamado de *espectro contínuo de T* e representa o conjunto de escalares λ tais que $(T - \lambda)^{-1}$ existe e está definido em um subconjunto denso de X mas não é limitado.

3. $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \backslash \sigma_p(T) : \overline{\mathrm{Dom}(R_\lambda(T))} \neq X\}$ é chamado de *espectro residual* e consiste nos escalares λ para o qual $(T - \lambda)^{-1}$ existe e é um operador limitado mas não está definido sobre um conjunto denso em X.

Como discutimos antes, os escalares $\lambda \in \sigma_p(T)$ são os autovalores de T e herdam da intuição geométrica da álgebra linear. [Pensar em usar alguma intuição voltada em T como uma transformação de um subespaço inteiro (o autoespaço) em vez de vetores individuais.]

Por outro lado, o espectro contínuo não tem uma interpretação imediata mas ele segue como uma "correção" a um dos artifícios que espaços de dimensão infinitos podem explorar: a convergência.

Isto é, se $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq X \to X$ é tal que $\lambda \in \sigma_c(T)$ então temos que $R_\lambda(T)$ existe mas é um operador linear ilimitado. Ou seja, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathrm{Dom}(R_\lambda(T))$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|R_\lambda(T)x_n\| \to \infty$. Usando $R_\lambda(T)$ como uma forma de reverter a transformação T podemos construir uma sequência $(\frac{R_\lambda(T)x_n}{\|R_\lambda(T)x_n\|})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_X$ na esfera unitária de X que "aproxima o comportamento de um autovetor", isto é, onde:

$$(T - \lambda)\left(\frac{R_\lambda(T)x_n}{\|R_\lambda(T)x_n\|}\right) = \frac{x_n}{\|R_\lambda(T)x_n\|} \to 0$$

De forma análoga, o espectro residual representa uma correção a [Se eu não pensar em nada para falar sobre o espectro residual removo essa parte] Acho que aqui você poderia mencionar que $\sigma_r(T) = \sigma_p(T^*)$ [Comentar que, no caso de dimensão infinita as 3 condições são satisfeitas quando λ não é um autovalor.]

[Explicitar o porquê de T ser definido partindo e chegando em subconjuntos do mesmo espaço (é pra termos uma identidade).]

[Estou pensando ainda no que escrever aqui, quero discutir um pouco a importância de tomarmos operadores limitados e operadores definidos em todo X. Mas ainda não sei até que ponto discutir e se eu falo isso aqui ou em outra seção.]. Acho que pode ser. Por exemplo pode observar que para tais operadores $\sigma(T) \neq \emptyset$ Conseguimos garantir isso nas seguinte condições:

Teorema 1.1.1. *Se X é um espaço de Banach, $T : X \to X$ é um operador linear limitado e $\lambda \in \rho(T)$, então:*

$$\mathrm{Dom}(R_\lambda) = X.$$

Demonstração. Se $T : X \to X$ é um operador linear, o seu gráfico $\mathcal{G}(T)$ é fechado se, e somente se, para $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}(T)$,

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y) \implies (x, y) \in \mathcal{G}(T).$$

Com T limitado, $x_n \to x \implies T(x_n) \to Tx$. Ou seja, T é fechado se, e somente se, $x_n \to x \in \mathrm{Dom}(T)$ dada qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Dom}(T)$ convergente. Como $\mathrm{Dom}(T) = X$ é Banach, temos que T é um operador fechado.

Podemos agora nos restringir ao caso de operadores lineares limitados e fechados: Se T é fechado, $T - \lambda$ é fechado, já que $(x_n, Tx_n - \lambda x_n) \to (x, y)$ implica que $Tx_n \to y + \lambda x$ e portanto $(x, y + \lambda x) \in \mathcal{G}(T)$, com isso, $(x, y) \in \mathcal{G}(T - \lambda)$.

Como $R_\lambda = (T - \lambda)^{-1}$, é claro que R_λ também é um operador linear limitado (por definição) fechado. Suponha que $x_n \to x$ seja uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Dom}(R_\lambda)$ convergente em X,

$$\|R_\lambda x_n - R_\lambda x_m\| \leq \|R_\lambda\|\|x_n - x_m\|, \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

então $(R_\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy. Já que X é Banach, existe y tal que $Tx_n \to y$ e portanto $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$. Como T é fechado, $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$ e portanto $x \in \mathrm{Dom}(R_\lambda)$, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ foi uma sequência convergente arbitrária, $\mathrm{Dom}(R_\lambda)$ é fechado.

$$\mathrm{Dom}(R_\lambda) = \overline{\mathrm{Dom}(R_\lambda)} = X.$$

$\square$

Corolário 1.1.2. *Se X é um espaço de Banach, $T : X \to X$ é um operador linear fechado e $\lambda \in \rho(T)$ então*

$$\mathrm{Dom}(R_\lambda) = X.$$

Demonstração. Pelo teorema do gráfico fechado, segue que $T : X \to X$ é linear e limitado. Podemos então aplicar o teorema 1.1.1 □

[Tirei o ”ou fechado“ do enunciado e deixei como um corolário, caso eu não use em diante tiro]

[Explicar melhor o teorema acima e mencionar que $\lambda \in \rho(T)$ implica que $T - \lambda$ é uma imersão e esse teorema nos garante que, se T é limitado sobre X Banach, T_λ é um isomorfismo.]

[Inserir de forma melhor no texto esse teorema: De que os autovetores associados a diferentes autovalores são linearmente independentes.]

Teorema 1.1.3. *Seja $T : X \to X$ é um operador linear sobre um espaço normado X. Se $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são um diferentes autovalores de T e $\{x_1, ..., x_n\}$ um conjunto de autovalores de cada, este conjunto é linearmente independente.*

Demonstração. Suponha o conjunto não é linearmente independente, suponha então que x_k é o primeiro vetor que torna o conjunto $\{x_1, ..., x_k\}$ linearmente dependente. Então podemos escrever

$$x_k = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{k-1} x_{k-1}.$$

Como x_n é um autovetor associado a λ_k temos que $(T - \lambda_k)x_k = 0$. Substituindo com a relação acima, temos:

$$0 = (T - \lambda_k)x_k = (T - \lambda_k) \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_k)\alpha_j x_j.$$

Como $\lambda_j - \lambda_k \neq 0$ para todo $j \in \{1, ..., k-1\}$ e $\{x_1, ..., x_{k-1}\}$ é linearmente dependente, $\alpha_1 = ... = \alpha_{k-1} = 0$. Ou seja, $x_k = 0$, o que é um absurdo, já que x_k é por hipótese um autovetor. □

1.1.2 Espaços de Banach

O ambiente onde será desenvolvida a Teoria Espectral são os espaços de Banach, em particular, espaços de Banach complexos. A importância do espaço estar construído em cima do corpo dos complexos está relacionada à recorrente utilidade de teoremas relacionados à Análise Complexa. Por exemplo, o Teorema Fundamental da Álgebra, enunciado a seguir:

Teorema 1.1.4 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Todo polinômio de grau n e coeficientes complexos*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$$

pode ser fatorado como

$$p(x) = a_n(x - r_1)...(x - r_n),$$

onde $r_1, ..., r_n$ são as raízes do polinômio.

Para aproveitar das técnicas da Teoria Espectral no contexto de um espaço de Banach real X, dedicamos uma seção do Apêndice para uma discussão breve de como poderíamos adaptar um espaço de Banach real para agir sobre o corpo dos complexos e como os resultados neste afetam o espaço original.

Tendo em vista essa discussão, adiante, quando não explicitado o contrário, assumiremos que um espaço de Banach é complexo.

[Outra questão que pode ser considerada é o porquê do enfoque em espaços de Banach? Posso discutir mais da motivação adiante, conforme usamos essa hipótese em teoremas, mas no geral quando vamos estudar a inversão de operadores e, especialmente quando queremos que estes tenham um domínio denso, a completude do espaço é essencial.] Acho que aqui pode observar a importância de usar os espaços de Banach é por uso do Teorema do Gráfico fechado [Que tal incluir aqui que o espectro é não-vazio para espaços complexos? A demonstração já vai ter que ser omitida em grande parte pois não vou escrever sobre análise complexa. Só não sei se devo incluir uma demonstração assumindo que o leitor entende de análise complexa ou essencialmente omitir a demonstração toda. Ela usa algo que eu acho que só mostro depois de séries de Neumann, então eu teria que referenciar algo que ainda não apareceu, mas acho que o mesmo aconteceria com séries de Neumann, de ter que mencionar antes da demonstração que o espectro é não vazio.]Acho que seria legal incluir aqui que o espectro é não-vazio para espaços complexos.

1.2 Propriedades espectrais

Um resultado dá origem a vários teoremas fundamentais na teoria espectral de espaços de Banach, este é o da convergência das *séries de Neumann*, séries $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ de operadores $T \in B(X, X)$ para $\|T\| < 1$.

1.2.1 Séries de Neumann

Teorema 1.2.1. *Se X é um espaço de Banach e $T \in B(X,X)$ é tal que $\|T\| < 1$, temos que $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ é um operador em $B(X,X)$ e*

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k = (I-T)^{-1}.$$

Demonstração. Para mostrar que $S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ está bem definido como um operador, veja que para qualquer $x \in X$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k x$$

converge já que X é Banach e $\left(\sum_{k=0}^{n} T^k x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy, dado que

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} T^k x - \sum_{k=0}^{m} T^k x \right\| = \left\| \sum_{k=m}^{n} T^k x \right\| \leq \sum_{k=m}^{n} \|T^k\| \|x\|,$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k$ é uma série convergente em $\mathbb{R}$ para $\|T\| < 1$ e $\|T^k\| \leq \|T\|^k$. Em particular, com $n \to \infty$:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} T^k x - \sum_{k=0}^{m} T^k x \right\| \leq \left(\sum_{k=m}^{\infty} \|T\|^k \right) \|x\|. \tag{1.1}$$

Tomando $m = 0$ verificamos que S é limitada. A linearidade de S, por sua vez, é uma consequência da linearidade dos operadores T^k:

$$\begin{aligned} S(x+\alpha y) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k(x+\alpha y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k x + \alpha T^k y \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k x + \alpha \sum_{k=0}^{n} T^k y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k x + \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k y \\ &= Sx + \alpha Sy, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

Por fim, tome $x \in X$ qualquer, verificamos:

$$
\begin{aligned}
S(I-T)x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k((I-T)x) = \lim_{n\to\infty} (T^0x - T^{n+1}x) \\
&= x - \lim_{n\to\infty} T^{n+1}x = x, \\
(I-T)Sx &= (I-T) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k(x) = \lim_{n\to\infty} (I-T)\left(\sum_{k=0}^{n} T^k x\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (T^0x - T^{n+1}x) = x.
\end{aligned}
$$

Ou seja, $S = (I-T)^{-1}$. Por fim, note que $(I-T)$ é limitada por ser uma combinação de operadores lineares limitados. □

Observação. *Note que este teorema garante que $(T-I)^{-1}$ existe, é limitado e está definido em todo o espaço X.*

[Esse teorema ilustra a utilidade/importância de assumirmos operadores limitados.]

A relevância das séries de Neumann pode ser escondida pela aparente restrição de sua utilidade à um nicho muito específico de operadores com norma $\|T\| < 1$. Porém, ela é uma ferramenta muito pertinente a operadores no geral, como veremos adiante. O primeiro exemplo da sua importância que exploraremos é ilustrado no teorema a seguir:

Teorema 1.2.2. *Se $T : \mathrm{Dom}(T) \to X$ é um operador linear sobre X, um espaço de Banach complexo, então $\rho(T)$ é um conjunto aberto. Em particular, se $\lambda_0 \in \rho(T)$ temos:*

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}(T)\|} \implies \lambda \in \rho(T).$$

Neste caso, $R_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_{\lambda_0}^{k+1}(T)$.

Demonstração. Se $\rho(T) = \emptyset$, é um aberto. Se $\rho(T) \neq \emptyset$ tome $\lambda_0 \in \rho(T)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Podemos pensar em $T - \lambda$ como uma transformação $T - \lambda_0$ com uma pertubação adicional $-(\lambda - \lambda_0)$:

$$T - \lambda = (T - \lambda_0) - (\lambda - \lambda_0) = (T - \lambda_0)(I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T)).$$

Assim, se $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}(T)\|}$, temos que $\|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T)\| < 1$ e pelo teorema 1.2.1, $(I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(T))$ é invertível com inversa $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R_{\lambda_0}^k(T)$. Como composição de operadores invertíveis com inversas limitadas, $(T - \lambda)$ é invertível e limitado com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) &= (I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T))^{-1}(T - \lambda_0)^{-1} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^k R_{\lambda_0}^k(T)\right) R_{\lambda_0}(T) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^k R_{\lambda_0}^{k+1}(T). \end{aligned}$$

Além disso, note que $R_\lambda(T)$ está definido para todo $x \in \mathrm{Dom}(R_{\lambda_0}(T)) = X$ portanto $\overline{\mathrm{Dom}(R_\lambda(T))} = \overline{\mathrm{Dom}(R_{\lambda_0}(T))} = X$. Daí, temos $\lambda \in \rho(T)$. Com isso, temos que $B_{\mathbb{C}}(\lambda_0, \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}) \subseteq \rho(T)$ para λ_0 arbitrário. Portanto $\rho(T)$ é aberto e $\sigma(T)$, como seu complemento, é fechado. $\square$

[Havia um comentário meu sobre porque poderíamos usar o teorema 1.2.1 se $\mathrm{Dom}(R_{\lambda_0}) \neq X$ (com resposta da senhora), mas acho que o problema é ainda maior já que na demonstração acima eu escrevo $T - \lambda$ como uma combinação linear dos operadores $I : X \to X$ e $R_{\lambda_0} : \mathrm{Dom}(R_{\lambda_0}) \to \mathrm{Dom}(T)$. Mesmo lidando com o domínio eu acho que o contradomínio daria problema. Acho que devo substituir $\mathrm{Dom}(T)$ por X no enunciado (conferi no Kreyszig e nesse teorema ele não explicita o domínio ou contradomínio do operador, só escreve "T").] [Em virtude do comentário anterior eu penso que talvez seja uma boa ideia escrever um pouco sobre o porque usamos $T : X \to X$ e as vezes $T : \mathrm{Dom}(T) \to X$. Dizendo que, por exemplo, é difícil lidar com a identidade $I : X \to X$ com $R_\lambda(T)$ tendo contradomínio $\mathrm{Dom}(T)$. Que, neste caso, deveríamos usar $I : \mathrm{Dom}(T) \to \mathrm{Dom}(T)$ e, a partir desse ponto, deve fazer mais sentido simplesmente chamar $\mathrm{Dom}(T)$ de X.]

Ainda usando séries de Neumann conseguimos outra restrição sobre o conjunto $\sigma(T)$ para $T \in B(X, X)$ sobre um espaço de Banach:

[O teorema a seguir, e o das séries de Neumann, explicitam X como domínio de T. Acho que seria bom discutir o motivo disso, de que $\mathrm{Dom}(T)$ precisaria ser Banach (acho que é esse o motivo) e por isso meio que daria no mesmo só chamar $\mathrm{Dom}(T)$ de X(?)]Sim, o motivo é ter um operador definido em todo espaço de Banach.

Teorema 1.2.3. *Seja X é um espaço de Banach complexo e $T : X \to X$ um operador linear limitado. Então se $\lambda \in \sigma(T)$,*

$$|\lambda| \leq \|T\|.$$

Isto é, o espectro de T está contido no disco de raio $\|T\|$ entorno da origem do plano complexo.

Demonstração. Tome $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Podemos então reescrever $(T - \lambda)$ da seguinte maneira:

$$(T - \lambda) = -\lambda(1 - \tfrac{1}{\lambda}T).$$

Daí, se $|\lambda| > \|T\|$, $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$, portanto, $(I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}T^k$ e com isso

$$(T - \lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}T^k\right) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}T^k. \tag{1.2}$$

Ou seja, $\sigma(T) \subseteq B_{\mathbb{C}}(0, \|T\|)$. □

Como $\sigma(T)$ não necessariamente atinge a esfera de raio $\|T\|$, podemos considerar qual é a maior esfera que $\sigma(T)$ efetivamente atinge e, possivelmente, ter uma imagem melhor do espectro de T. Para este fim trazemos a definição a seguir:

Definição 1.2.1 (Raio espectral)**.** Se $T : X \to X$ é um operador linear limitado e $\sigma(T)$ é o seu espectro, chamamos de raio espectral a constante

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Note que, como o espectro é fechado e não-vazio, $\sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$. Isto é, existe $\lambda_0 \in \sigma(T)$ com $|\lambda_0| = r_\sigma(T)$.

1.2.2 Comutatividade e consequências

O estudo de pertubações no formato $-\lambda I$, traz consigo uma vantagem característica da identidade: A comutatividade. Se $S : \mathrm{Dom}(S) \subseteq X \to X$ é um operador linear qualquer $S(-\lambda I) = (-\lambda I)S$, neste caso dizemos que S e $(-\lambda I)$ comutam. Com isso, veja que se T e S são operadores lineares que comutam, S, T_λ e R_λ comutam entre si:

$$(T - \lambda I)S = TS - \lambda IS = ST + S(-\lambda I) = S(T - \lambda I).$$

Para o resolvente, usamos da comutatividade inerente a funções invertíveis, $T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda = I$:

$$R_\lambda S = R_\lambda S I = R_\lambda S T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda S R_\lambda = I S R_\lambda = S R_\lambda.$$

O estudo da comutatividade do resolvente nos dá o seguinte resultado:

Teorema 1.2.4 (Primeira identidade do resolvente)**.** *Seja $T \in B(X,X)$ para X um espaço de Banach, então dados $\lambda, \mu \in \rho(T)$ quaisquer, R_λ e R_μ comutam e*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T).$$

Demonstração. Como T comuta consigo mesmo [Assim está bom? Ou seria melhor tirar esse comentário ao todo?], sabemos que T e R_μ, e consequentemente R_λ e R_μ, comutam (note que, pelo teorema 1.1.1, T, R_λ e R_μ estão definidos sobre todo o conjunto X). Usando que os operadores resolventes tem T_λ e T_μ como inversas, podemos escrever:

$$R_\lambda - R_\mu = R_\lambda T_\mu R_\mu - R_\lambda T_\lambda R_\mu = R_\lambda (T_\mu - T_\lambda) R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu.$$

□

[O único motivo pelo qual eu consigo pensar em termos que admitir $T \in B(X,X)$ nesse teorema é para garantir que $\mathrm{Dom}(R_\lambda) = X$ (é importante dizer que essa igualdade vale na demonstração!!). Para não termos problema com a comutatividade e para garantir que R_λ e R_μ tem o mesmo domínio, para fazer sentido considerarmos sua subtração. Dito isso, existe alguma condição mais fraca para T que possamos substituir sem que o problema anterior dê problemas? Acho que não, mas devo incluir um texto aqui explicitando a necessidade de $T \in B(X,X)$ se for importante como eu penso.]Acho que problema principal é com a definição do ponto regular: na definição clássica assume-se que $ran(T - \lambda) = X$. Para tal definição o Teorema 1.2.4 vale para qualquer T fechado.

Outro resultado importante é uma versão do teorema do mapa espectral para polinômios, que nos dá uma forma geral para o espectro de polinômios de operadores.

Teorema 1.2.5 (Teorema do mapa espectral para polinômios)**.** *Se X é um espaço de Banach complexo, $T \in B(X,X)$ e $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$ é um polinômio,*

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)),$$

onde $p(\sigma(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$ e $p(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + ... + a_0$.

Demonstração. Primeiro, note que $p(T) \in B(X,X)$ já que é a combinação linear de operadores no formato T^k (para $k \leq n$) e como estes são a composição de operadores lineares T e limitados, são também lineares e limitados. Com isso temos então $\sigma(T)$ e $\sigma(p(T))$ não vazios.Sugiro mostrar esse fato!

O caso $n = 0$ se resume a

$$\sigma(p(T)) = \sigma(a_0 I) = \{a_0\} = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\} = p(\sigma(T)).$$

Para $n \geq 1$: Chamaremos de S o operador $p(T)$ e $S_\mu = p(T) - \mu I$ para $\mu \in \mathbb{C}$ fixo. Como $p(\lambda) - \mu$ é um polinômio, pelo teorema fundamental da álgebra, podemos fatorá-lo da seguinte forma:

$$p(\lambda) - \mu = a_n(\lambda - \lambda_n)(\lambda - \lambda_{n-1})...(\lambda - \lambda_1)$$

onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são as suas raízes. Como X é complexo, os operadores $T - \lambda_j I$ estão bem definidos para $1 \leq j \leq n$ e podemos considerar a expressão anterior adaptada para o caso da composição de operadores:

$$a_n(T - \lambda_n I)(T - \lambda_{n-1} I)...(T - \lambda_1 I).$$

Uma vez que T e I comutam, a expansão da expressão acima segue as mesmas propriedades distributivas que $p(\lambda)$ e portanto temos a seguinte relação: não entendi o que mudou comparando com a formula anterior [não mudou nada, só queria explicitar o porque podíamos dizer que $p(T) - \mu I$ se iguala a fórmula anterior. Inicialmente não estava claro pra mim porque o teorema fundamental da álgebra aparentemente funciona também para polinômios de operadores.]

$$S_\mu = p(T) - \mu I = a_n(T - \lambda_n I)(T - \lambda_{n-1} I)...(T - \lambda_1 I)$$

Se todos os $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \rho(T)$, cada um dos $(T - \lambda_j)$ é invertível com inversa limitada e definida para todo X (teorema 1.1.1) e consequentemente S_μ é invertível com inversa contínua e com domínio $\text{Dom}(R_\mu(S)) = X$, portanto $\mu \in \rho(S)$. Temos então que se $\mu \in \sigma(p(T))$, $\lambda_j \in \sigma(T)$ para algum $j \in \{1, ..., n\}$. Como λ_j é uma raiz de $p(\lambda) - \mu$, $p(\lambda_j) - \mu = 0 \implies p(\lambda_j) = \mu$ e temos

$$\mu \in \sigma(p(T)) \implies \mu \in p(\sigma(T)). \tag{1.3}$$

Agora, consideremos $\mu \in p(\sigma(T))$. Ou seja, existe $\lambda_0 \in \sigma(T)$ tal que $p(\lambda_0) = \mu$. O que nos dá duas possibilidades:

1. $T - \lambda_0 I$ não tem inversa. Como $p(\lambda_0) = \mu$, λ_0 é uma raiz de $p(z) - \mu$, ou seja, podemos reescrever S_λ como

$$S_\mu = (T - \lambda_0) \underbrace{a_n(T - \lambda_{n-1})...(T - \lambda_1)}_{q(T)} \tag{1.4}$$

Se $\mu \in \rho(p(T))$, existiria S^{-1} e, uma vez que todos os termos $T - \lambda_j$ para $0 \leq j \leq n-1$, S_μ e S_μ^{-1} comutam entre si, teríamos

$$(T - \lambda_0)q(T)S_\mu^{-1} = q(T)S_\mu^{-1}(T - \lambda_0) = I$$

e com isso, que $T - \lambda_0$ é invertível, um absurdo.

2. $T - \lambda_0 I$ tem inversa. Neste caso $\operatorname{Im}(T - \lambda_0 I) \neq X$. Caso contrário pelo teorema da aplicação aberta, $T - \lambda_0 I$ teria inversa contínua, o que contradiria a hipótese de que $\lambda_0 \in \sigma(T)$. Já que S_μ é a composição de $T - \lambda_0$ e $q(T)$ em (1.4), $\operatorname{Im}(S_\mu) \neq X$. E, pelo teorema 1.1.1, se μ fosse um valor regular S_μ teria $\operatorname{Im}(S_\mu) = X$, temos então que $\mu \in \sigma(p(T))$.

Em ambos os casos,

$$\mu \in p(\sigma(T)) \implies \mu \in \sigma(p(T)). \tag{1.5}$$

Por fim, concluímos com (1.3) e (1.5) que $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$. □

[Nota: É crucial para o teorema anterior que o espaço X seja complexo.]

Teorema 1.2.6. *Se $T \in B(X, X)$, então*

$$r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Demonstração. Pelo teorema 1.2.5, $\sigma(T^n) = (\sigma(T))^n$. Então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$(r_\sigma(T))^n = r_\sigma(T^n).$$

Como o espectro de T está contido na bola de raio $\|T\|$,

$$(r_\sigma(T))^n \leq \|T^n\| \implies r_\sigma(T) \leq \|T^n\|^{1/n} \implies r_\sigma(T) \leq \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Agora, usando a representação 1.2: [Como precisa usar coisas de análise complexa acima do meu nível, por enquanto deixarei a demonstração incompleta.]

□

1.3 Operadores compactos

Os operadores compactos são uma classe de operadores que preserva algumas "características espectrais" análogas a dos operadores entre espaços de dimensão finita.

1.3.1 Propriedades iniciais de operadores compactos

Definição 1.3.1 (Operador linear compacto)**.** Se X e Y são espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear, dizemos que T é um operador linear compacto se satisfaz a seguinte condição:

Para qualquer conjunto $A \subseteq X$ limitado, $\overline{T(A)}$ é compacto em Y.

Uma importante caracterização de operadores compactos vem do fato que, em espaços normados, é equivalente dizer que um conjunto é compacto e que toda sequência nele admite uma subsequência convergente no conjunto. A seguir mostramos como esse fato se manifesta em operadores compactos.

Teorema 1.3.1. *Um operador linear $T : X \to Y$, entre espaços normados X e Y, é compacto se, e somente se, a imagem de qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ limitada, $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ admite uma subsequência convergente.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $T : X \to Y$ um operador linear compacto. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, existe $r > 0$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq rB_X$. Como rB_X é um conjunto limitado, $\overline{T(rB_X)}$ é um conjunto compacto, e portanto, sequencialmente compacto e $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(rB_X) \subseteq \overline{T(rB_X)}$, então $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente em $\overline{T(rB_X)}$.

($\Leftarrow$) Seja $T : X \to Y$ um operador linear com a propriedade de que a imagem de sequências limitadas é uma sequência com subsequência convergente. Tome um conjunto limitado qualquer A e suponha que $\overline{T(A)}$ não é compacto. Neste caso existe uma sequência $(\bar{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{T(A)}$ que não tem subsequência convergente. Como esta sequência está no fecho, podemos construir uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(A)$ tal que $\|y_n - \tilde{y}_n\| < \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(A)$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ limitada, tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, existe uma subsequência $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo a $y \in \overline{T(A)}$. Por fim, vemos que

$$\|y - \bar{y}_{n_j}\| \leq \|y - y_{n_j}\| + \|y_n - \bar{y}_{n_j}\|$$

e segue de imediato que $\bar{y}_{n_j} \to y$, um absurdo. $\square$

Outro fato importante na teoria dos operadores compactos é que para um espaço de Banach X, "o espaço de operadores lineares compactos $B_0(X, X)$ é um *ideal* fechado em $B(X, X)$". Isto é, a composição entre um operador linear compacto $T : X \to X$ e um operador linear limitado $S : X \to X$ forma um operador linear compacto.

Pensando em operadores compactos como operadores que convertem sequências limitadas em sequências com subsequências convergentes, e operadores limitados como operadores que preservam a limitação e convergência de sequências (e consequentemente subsequências), vemos que a compor operadores limitados com operadores compactos não deve afetar o comportamento que caracteriza sua "compacidade" [pensar assim me facilitou enxergar o porque o teorema é verdade, mas não sei se devo incluir no texto]. Explicitamos este resultado no teorema a seguir:

Teorema 1.3.2. *Sejam X um espaço normado, $T : X \to X$ um operador linear compacto e $S : X \to X$ um operador linear limitado, então $ST : X \to X$ e $TS : X \to X$ são ambos operadores lineares compactos.*

Demonstração. Seja $A \subseteq$ um conjunto limitado arbitrário, como T é um operador linear limitado, $T(A)$ ainda é um conjunto limitado em X e $ST(A) = S(T(A))$ é um conjunto relativamente compacto. Ou seja, ST é um operador compacto.

Agora, tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X. Já que S é compacto, $(Sx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(Sx_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente em $\overline{S((x_n)_{n\in\mathbb{N}})}$ e, como T é limitado, $(TS(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\overline{TS((x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}})}$. Ou seja, TS é um operador compacto. $\square$

1.3.2 Propriedades espectrais de operadores compactos

Um fato bem conhecido na Análise Funcional é que a bola unitária de um espaço é compacta se, e somente se, o espaço for de dimensão finita. Uma demonstração usual disso emprega o lema de Riesz, que incluímos a seguir:

Teorema 1.3.3 (Lema de Riesz)**.** *Se X é um espaço normado e Y um subespaço fechado próprio de X, para qualquer $\theta \in [0, 1)$ existe $x \in S_X$ tal que $\|x - y\| \geq \theta$ para todo $y \in Y$.*

Veremos através de um argumento parecido ao teorema da bola unitária uma consequência importante de um operador ter imagem relativamente compacta.

[Falar que focaremos primeiro em estudar as propriedades de operadores na forma $T - \lambda$ (sem assumir que λ é um valor espectral e, depois de construir a teoria básica para operadores compactos perturbados, partimos para estudar o efeito dos valores espectrais]

[Essa primeira parte pode ser resumida em algo relacionado ao estudo das semelhanças de T_λ com o teorema do núcleo e da imagem para operadores lineares entre espaços de dimensão finita.]

Teorema 1.3.4. *Se X é um espaço normado e $T : X \to X$ um operador linear compacto, o conjunto $\sigma_p(T)$ de autovalores de T é no máximo enumerável (podendo ser finito ou vazio). E o único ponto de acumulação deste de $\sigma_p(T)$ é $\lambda = 0$.*

Demonstração. Suponha que, para algum $k > 0$, existam infinitos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ tais que $|\lambda_n| > k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, podemos tomar uma sequência $x_1, x_2, \ldots$ de autovetores associados a cada um destes autovalores. Como estes são linearmente independentes (teorema 1.1.3), podemos definir subespaços $M_0 = \{0\}$ e $M_n = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ que formam uma sequência de subespaços

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$$

onde cada $x \in M_n$ tem uma representação única $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. Como cada subespaço M_{n-1} é um subespaço próprio de M_n e fechado (pois tem dimensão finita) para todo $n \in \mathbb{N}$, pelo lema de Riesz [Devo adicionar referência, incluir o teorema no texto ou incluir o teorema no apêndice?], podemos definir uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores $u_n \in M_n$ onde $\|u_n\| = 1$ e $\|u_n - x\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $x \in M_{n-1}$. Agora, veja que, dados $n, m \in \mathbb{N}$, com $m < n$:

$$\begin{aligned} Tu_n - Tu_m &= \lambda_n u_n + (T - \lambda_n)(u_n) - Tu_m \\ &= \lambda_n u_n + (T - \lambda_n)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) - Tu_m \\ &= \lambda_n u_n + \underbrace{\sum_{i=i}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n)x_i - Tu_m}_{\in M_{n-1}} \end{aligned}$$

Definindo $w = -(\sum_{i=i}^{n-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n)x_i + Tu_m)/\lambda_n \in M_{n-1}$ temos que:

$$\|Tu_n - Tu_m\| = \|\lambda_n u_n - \lambda_n w\| = |\lambda_n|\|u_n - w\| \geq \frac{|\lambda_n|}{2} \geq \frac{k}{2}.$$

Portanto, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência na esfera unitária (limitada) cuja imagem por T não admite subsequência convergente. Um absurdo, já que T é um operador compacto.

Por fim, como $k > 0$ é arbitrário temos que o único ponto de acumulação possível de $\sigma_p(T)$ é $\lambda = 0$ e escrevendo

$$\sigma_p(T) \subseteq \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| > \frac{1}{n}\right\}$$

vemos que $\sigma_p(T)$, como a união enumerável de conjuntos finitos, é enumerável. □

[Adicionar comentário no começo do texto explicitando que com "bola unitária" queremos dizer a bola unitária fechada do espaço em questão.]

Teorema 1.3.5. *Sejam X um espaço normado e $T : X \to X$ um operador linear compacto. Então se $\lambda \neq 0$ é um autovalor de T, o autoespaço* $\ker(T_\lambda)$ *de λ tem dimensão finita.*

Demonstração. Seja $\lambda \neq 0$ um autovalor de T e $B_{\ker(T_\lambda)}$ a bola unitária do autoespaço de λ. Tomamos então uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{\ker(T_\lambda)}$ qualquer. Como, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \lambda B_{\ker(T_\lambda)}$ é uma sequência com subsequência $(\lambda x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Como $\lambda \neq 0$, existem $x \in \lambda B_{\ker(T_\lambda)}$ e $\frac{1}{\lambda}xB_{\ker(T_\lambda)}$ tais que

$$\lambda x_{n_k} \to x \implies x_{n_k} \to \tfrac{1}{\lambda}x$$

Assim, temos que toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na bola unitária de $\ker(T_\lambda)$ admite uma subsequência convergente. Ou seja, $B_{\ker(T_\lambda)}$ é compacta e portanto $\ker(T_\lambda)$ é um espaço de dimensão finita. □

Corolário 1.3.6. *Se X é um espaço normado, T um operador linear compacto e $\lambda \neq 0$ um autovalor de T, então todo autoespaço generalizado de λ tem dimensão finita. Isto é,*

$$\dim(\ker(T_\lambda^n)) < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Tome $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \neq 0$ arbitrários. Como a composição de operadores satisfaz a propriedade distributiva e os operadores $-\lambda I$ e T comutam entre si [Conferir se não precisa de mais nada (acho que não)], podemos usar o teorema binomial para expandir o operador T_λ^n da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_\lambda^n = (T - \lambda I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\lambda)^{n-k} T^k \\ &= (-\lambda)^n I + T \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-\lambda)^{n-k} T^{k-1}}_{S}. \end{aligned}$$

Ou seja, podemos pensar em $T_\lambda^n = W - \mu I$ onde $W = TS$ e $\mu = -(-\lambda)^n \neq 0$. Como T é um operador compacto e S é limitado (é uma combinação linear de operadores T^k limitados), $W = TS$ é um operador compacto (teorema 1.3.2). Assim, pelo teorema 1.3.5,

$$\dim(\ker(T_\lambda^n)) = \dim(\ker(W - \mu I)) < +\infty.$$

$\square$

Avançamos agora para a segunda etapa da nossa análise de "operadores compactos pertubados". Dando continuidade à analogia entre operadores compactos e operadores entre espaços de dimensão finita, investigaremos agora como algumas propriedades de operadores compactos perturbados (com $\lambda \neq 0$) remetem ao teorema do Núcleo e da Imagem, que diz que, para operadores lineares $T : X \to Y$ entre espaços de dimensão finita vale:

$$\dim(T(X)) + \dim(\ker(T)) = \dim(X).$$

A maior divergência entre o que estudaremos a seguir e este teorema é que, em vez de uma avaliação numérica da dimensão dos espaços, estudaremos como $\ker(T_\lambda)$ e T_λ (e suas potências $\ker(T_\lambda^n)$ e $T_\lambda^n(X)$) se dispõe como subespaços de X.

A princípio, veja que para $T_\lambda^0 = I$, temos $\ker(T_\lambda^0) = \{0\}$ e consequentemente $\ker(T_\lambda^0) \subseteq \ker(T_\lambda)$. Supondo que $\ker(T_\lambda^{k-1}) \subseteq \ker(T_\lambda^k)$ podemos estender essa relação adiante usando que $T_\lambda^{k+1}(x) = T_\lambda(T_\lambda^k(x))$:

$$T_\lambda^{k+1}(\ker(T_\lambda^k)) = T_\lambda(T_\lambda^k(\ker(T_\lambda^k))) = T_\lambda(\{0\}) \subseteq \ker(T_\lambda^{k+1}).$$

Ou seja, $\ker(T_\lambda^k) \subseteq \ker(T_\lambda^{k+1})$. Pelo princípio da indução finita temos então

$$\{0\} = \ker(T_\lambda^0) \subseteq \ker(T_\lambda) \subseteq \ker(T_\lambda^2) \subseteq ... \subseteq \ker(T_\lambda^n) \subseteq ... \tag{1.6}$$

Teorema 1.3.7. *Se X é um espaço normado e $T : X \to X$ é um operador linear compacto, então para todo $\lambda \neq 0$ a imagem de T_λ é fechada.*

Demonstração. Assuma que $T_\lambda(X)$ não é fechada e tome $y \in \overline{T_\lambda(X)} \backslash T_\lambda(X)$. Então, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T_\lambda(X)$ tal que $T_\lambda x_n \to y$. Como $y \notin \ker(T_\lambda)$, já que $0 \in T_\lambda(X)$, podemos assumir também que $x_n \notin \ker(T_\lambda)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pensando em uma sequência qualquer convergindo a y, como $y \neq 0$, a partir de certo ponto n_0 a sequência $(T_\lambda x_n)_{n\geq n_0}$ só teria valores não nulos). Com isso, já que $x_n \notin \ker(T_\lambda)$,

$$d(x_n, \ker(T_\lambda)) = \inf_{z\in\ker(T_\lambda)} \|x_n - z\| > 0.$$

Podemos então tomar $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ker(T_\lambda)$ tal que $\|x_n - z_n\| < 2d(x_n, \ker(T_\lambda)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos a seguir que isso só pode acontecer se

$$\|x_n - z_n\| \to \infty. \tag{1.7}$$

Suponha que (1.7) não ocorre, então existe uma subsequência de $(x_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada, como T é compacto, a imagem dessa subsequência admite uma subsequência $(T(x_{n_k} - z_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Note então que, podemos usar a linearidade de T_λ e T para reescrever $(x_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em termos de T e T_λ:

$$x_n - z_n = \frac{1}{\lambda}(T(x_n - z_n) - T_\lambda(x_n - z_n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Simplificando $T_\lambda z_n = 0$ temos que a subsequência $(x_{n_k} - z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ pode ser escrita como a combinação linear de duas sequências convergentes:

$$x_{n_k} - z_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(T(x_{n_k} - z_{n_k}) - T_\lambda x_n).$$

E portanto $(x_{n_k} - z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para algum $u \in X$. Como T_λ é contínua,

$$T_\lambda x_{n_k} = T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) \to T_\lambda u \in T(X).$$

Como $T_\lambda x_n$ converge para y, $y = T_\lambda u \in T(X)$. Um absurdo. Ou seja, podemos assumir que (1.7) vale.

Agora, movemos a sequência $(x_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para a esfera unitária construindo uma nova sequência $w_n = \frac{1}{\|x_n - z_n\|}(x_n - z_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Teremos então que ela é uma sequência tal que

$$T_\lambda w_n = \frac{1}{\|x_n - z_n\|} T_\lambda x_n \to 0. \tag{1.8}$$

Usando novamente T_λ e T para reescrever $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temos:

$$w_n = \frac{1}{\lambda}(Tw_n - T_\lambda x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como T é compacto e $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_X$ é limitada, admite uma subsequência $(Tw_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente. Uma vez que $(w_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ é a combinação linear de sequências convergentes, é convergente. Ou seja, existe $w \in X$ tal que $w_n \to w$. Como T_λ é contínua, $T_\lambda w_n \to T_\lambda w = 0$ (por 1.8) e $w \in \ker(T_\lambda)$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(x_n, \ker(T_\lambda)) &\leq \|x_n - (z_n + \|x_n - z_n\|w)\| \\ &= \|x_n - z_n\|\|w_n - w\| \\ &< 2d(x_n, \ker(T_\lambda))\|w_n - w\|. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2} < \|w_n - w\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

mas $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente. Um absurdo. Ou seja, $\overline{T_\lambda(X)} \backslash T_\lambda(X) = \emptyset$ e T_λ tem imagem fechada em X. □

[Opcional: Tentar explicar melhor o que está acontecendo na demonstração acima. Por exemplo: "perturbamos a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com vetores z_n no núcleo 'proporcionalmente próximos da distância ínfima à x_n' ... " (professora se a senhora estiver lendo isso, não se preocupe que se eu tentar qualquer mudança assim eu destaco no texto para a senhora poder analisar)] [Explicitar (mais cedo no texto) que, com T_λ^r, nos referimos a $(T-\lambda)^r$ e não $(T^r - \lambda)$. Apenas no primeiro caso que podemos falar de autovetores generalizados.]

Corolário 1.3.8. *Se X é um espaço normado, $T : X \to X$ é um operador linear compacto, $\lambda \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, T_λ^n tem imagem $T_\lambda^n(X)$ fechada.*

Demonstração. Seguindo os mesmos passos da demonstração do corolário 1.3.6, podemos representar T_λ^n como $T_\lambda^n = W - \mu I$ onde $\mu \neq 0$ e W é compacto. Então segue do teorema 1.3.7 que isto é verdade. □

[Não sei ainda porque isso é relevante ou específico para operadores compactos mas ainda assim vou incluir:] ... Note que $T_\lambda^0(X) = I(X) = X$ e $T(X) \subseteq X$. Supondo $T^k(X) \subseteq T^{k-1}$, basta ver que $T^{k+1} = T(T^k(X))$ e conseguimos $T^{k+1}(X) = T(T^k(X)) \subseteq T(T^{k-1}(X))T^k(X)$. Pelo princípio da indução finita vemos que

$$X = T^0(X) \supseteq T(X) \supseteq T^2(X) \supseteq ... \supseteq T^n(X) \supseteq ... \tag{1.9}$$

Como veremos a seguir, podemos nos aprofundar ainda mais no estudo da relação entre os núcleos e as imagens de T_λ^n para diferentes valores de n.

Teorema 1.3.9. *Seja X um espaço normado, $T : X \to X$ um operador linear compacto e $\lambda \neq 0$. Então existe $p \geq 0$ tal que*

$$\{0\} = \ker(T_\lambda^0) \subsetneq ... \subsetneq \ker(T_\lambda^p) = \ker(T_\lambda^{p+1}) = ... \tag{1.10}$$

Demonstração. Suponha que não existe $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\ker(T_\lambda^p) = \ker(T_\lambda^{p+1})$. Então

$$\{0\} = \ker(T_\lambda^0) \subsetneq \ker(T_\lambda) \subsetneq ... \subsetneq \ker(T_\lambda^n) \subsetneq ...$$

Como o núcleo de um operador linear limitado é fechado, cada $\ker(T_\lambda^k)$ é um subespaço próprio fechado de $\ker(T_\lambda^{k+1})$, para todo k inteiro positivo. Pelo lema de Riesz, podemos tomar uma sequência onde $x_n \in \ker(T_\lambda^n)$, $\|x_n\| = 1$ e $\|x_n - y\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $y \in \ker(T_\lambda^{n-1})$). Como essa sequência é limitada e T um operador compacto, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deve admitir uma subsequência convergente. Porém, veja que para quaisquer $n < m$:

$$\begin{aligned}\|Tx_m - Tx_n\| &= \|T_\lambda x_m + \lambda x_m - T_\lambda x_n - \lambda x^n\| \\ &= |\lambda|\|x_m - (-\lambda^{-1}T_\lambda x_m + x_n + \lambda^{-1}T_\lambda x_n)\|.\end{aligned}$$

Como $T_\lambda^m(x_m) = T_\lambda^{m-1}(T_\lambda x_m) = 0$, $T_\lambda x_m \in \ker(T_\lambda^{m-1})$. Analogamente $T_\lambda x_n \in \ker(T_\lambda^{n-1}) \subsetneq \ker(T_\lambda^{m-1})$ e, por construção, $x_n \in \ker(T_\lambda^n) \subsetneq \ker(T_\lambda^{m-1})$. Assim, $(-\lambda^{-1}T_\lambda x_m + x_n + \lambda^{-1}T_\lambda x_n) \in \ker(T_\lambda^{m-1})$. Daí,

$$\|Tx_m - Tx_n\| \geq \frac{|\lambda|}{2}.$$

Então $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não pode ter subsequência convergente. Um absurdo. Ou seja, deve existir p tal que $\ker(T_\lambda^p) = \ker(T_\lambda^{p+1})$. Sem perda de generalidade assuma que p é o menor inteiro não negativo que satisfaz essa relação, seja $k \geq 1$ qualquer e tome $x \in \ker(T_\lambda^{p+k})$. Então

$$T_\lambda^{p+k}x = T_\lambda^p(T_\lambda^k x) = 0 \implies T_\lambda^k x \in \ker(T_\lambda^p) = \ker(T_\lambda^{p+1}).$$

Ou seja, $T^{p+k+1}x = T^{p+1}(T^k x) = 0$ e $x \in \ker(T_\lambda^{p+k+1})$. Portanto,

$$\ker(T_\lambda^{p+k+1}) \subseteq \ker(T_\lambda^{p+k}) \xrightarrow{(1.10)} \ker(T_\lambda^{p+k+1}) = \ker(T_\lambda^{p+k})$$

Pelo princípio da indução finita, temos que

$$\{0\} = \ker(T_\lambda^0) \subsetneq ... \subsetneq \ker(T_\lambda^p) = \ker(T_\lambda^{p+1}) = ...$$

$\square$

Teorema 1.3.10. *Seja X um espaço normado, $T : X \to X$ um operador linear compacto e $\lambda \neq 0$. Então existe $q \geq 0$ tal que*

$$X = T_\lambda^0(X) \supsetneq ... \supsetneq T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X) = ... \tag{1.11}$$

Demonstração. Suponha que não existe $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{p+1}(X)$. Então

$$X = T^0(X) \supsetneq T(X) \supsetneq T^2(X) \supsetneq ... \supsetneq T^n(X) \supsetneq ...$$

Como esta é uma sequência de subespaços próprios e fechados (corolário 1.3.8), pelo lema de Riesz podemos construir uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $x_n \in T^n(X)$, $\|x_n\| = 1$ e $\|x_n - y\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $y \in T^{n+1}(X)$. Daí, para quaisquer $n < m$

$$\begin{aligned}\|Tx_n - T_m\| &= \|\lambda x_n + T_\lambda x_n - \lambda x_m - T_\lambda x_m\| \\ &= |\lambda|\|x_n - (-\lambda^{-1}T_\lambda x_n + x_m + \lambda^{-1}T_\lambda x_m)\|\end{aligned}$$

Segue que $T_\lambda x_n \in T^{n+1}(X)$, $x_m \in T^m(X) \subseteq T^{n+1}(X)$ e $T_\lambda x_m \in T^{m+1}(X) \subsetneq T^{n+1}(X)$. Então $(-\lambda^{-1}T_\lambda x_n + x_m + \lambda^{-1}T_\lambda x_m) \in T^{n+1}(X)$ e temos pela construção da sequência que

$$\|Tx_n - Tx_m\| \geq \frac{|\lambda|}{2}.$$

Como o operador é compacto e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deve admitir uma subsequência convergente. Um absurdo. Ou seja, existe q tal que $T_\lambda^q(X) = T^{q+1}(X)$. Sem perda de generalidade, suponha que q é o menor inteiro não negativo que satisfaz essa relação. Então temos $X = T_\lambda^0(X) \supsetneq ... \supsetneq T^q(X)$. Seja agora, $k \geq 1$ qualquer, então

$$T_\lambda^{q+k}(X) = T_\lambda^k(T_\lambda^q(X)) = T_\lambda^k(T_\lambda^{q+1}(X)) = T^{q+k+1}(X).$$

Pelo princípio da indução finita concluímos que

$$X = T_\lambda^0(X) \supsetneq ... \supsetneq T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X) = ...$$

$\square$

Temos então que a partir de certo ponto $q \geq 0$ [pode ser 0, certo?] a imagem de T_λ^q se torna um subespaço invariante a T_λ. [Quero explorar mais essa ideia para deixar o teorema a seguir um pouco mais fácil de acompanhar, por agora deixo assim mesmo]

[Continuar paralelo que eu idealmente comecei antes e falar algo tipo "Refletindo a similaridade com operadores lineares entre espaços de dimensão finita, o núcleo $\ker(T_\lambda^n)$ e a imagem $T^n(X)$ das potências da transformação T_λ estão relacionadas ..." ou "refletem a relação definida pelo teorema do núcleo e da imagem no sentido que atingem sua forma final no mesmo momento, isto é, $p = q$"]

[Adicionar observação explicitando que ambos p e q podem ser 0 e que a forma como eu escrevi no enunciado talvez não reflita isso, mas é meramente ilustrativa.]

Teorema 1.3.11. *Seja X um espaço normado, $T : X \to X$ um operador linear compacto e $\lambda \neq 0$. Então existe $r \geq 0$ tal que*

$$\{0\} = \ker(T_\lambda^0) \subsetneq ... \subsetneq \ker(T_\lambda^r) = \ker(T_\lambda^{r+1}) = ...$$
$$X = T_\lambda^0(X) \supsetneq ... \supsetneq T_\lambda^r(X) = T_\lambda^{r+1}(X) = ...$$

Isto é, para um mesmo operador $T : X \to X$ $p = q$ nas expressões (1.10) e (1.11).

Demonstração. Pelos teoremas 1.3.9 e 1.3.10 temos que existem $p, q \geq 0$ e nos resta provar que $p = q$. Primeiro mostraremos que $q \geq p$, isto é, que $\ker(T_\lambda^{q+1}) = \ker(T_\lambda^q)$. Para isso, basta mostrar que $\ker(T_\lambda^{q+1}) \subseteq \ker(T_\lambda^q)$. Isto é, que $T_\lambda^{q+1}(x) = T(T^q(x)) = 0 \implies T_\lambda^q(x) = 0$. Equivalentemente, queremos mostrar que

$$T_\lambda(x) = 0 \implies x = 0, \quad x \in T_\lambda^q(X).$$

Suponha que existe $x_1 \in T_\lambda^q(X)$ tal que $T_\lambda(x_1) = 0$ mas $x_1 \neq 0$. Como, $x_1 \in T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X)$, existe $x_2 \in T_\lambda^q(X)$ tal que $T_\lambda x_2 = x_1 \neq 0$, ou seja,

$x_2 \neq 0$. Prosseguindo recursivamente conseguimos $x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}$ tais que $x_1 = T_\lambda x_2 = T_\lambda^2 x_3 = ... = T_\lambda^p x_{p+1} \neq 0$ mas

$$T_\lambda(x_1) = T_\lambda^2 x_2 = T_\lambda^3 x_3 = ... = T_\lambda^{p+1} x_{p+1} = 0.$$

Ou seja, $x_{p+1} \in \ker(T_\lambda^{p+1})$ mas $x_{p+1} \notin \ker(T_\lambda^p)$. Um absurdo. Ou seja, $q \geq p$.

Agora nos resta mostrar que $p \geq q$. Para isso, veja que se $q = 0$, então $p \geq q$ automaticamente. Se $q \geq 1$, mostraremos que $\ker(T_\lambda^{q-1}) \subsetneq \ker(T_\lambda^q)$. Do teorema 1.3.10, temos que

$$T_\lambda^{q-1}(X) \supsetneq T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X),$$

então podemos tomar $y \in T_\lambda^{q-1}(X) \backslash T_\lambda^q(X)$. Então existe $x \in X$ tal que $T_\lambda^{q-1} x = y$ e $T_\lambda y \in T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X)$. Ou seja, existe $z \in X$ tal que $T_\lambda^{q+1} z = T_\lambda y$. Como $y \notin T_\lambda^q(X)$, $y \neq T_\lambda^q(z)$ e

$$T_\lambda^{q-1}(x - T_\lambda z) = y - T^q z \neq 0 \implies x - T_\lambda z \notin \ker(T_\lambda^{q-1})$$

mas $T_\lambda^q(x - T_\lambda z) = T_\lambda y - T_\lambda^{q+1} y = 0$ e $x - T_\lambda z \in \ker(T_\lambda^q)$. Assim, temos que $\ker(T_\lambda^{q-1}) \subsetneq \ker(T_\lambda^q)$ e $p \geq q$. Como já provamos que $q \geq p$, concluímos que $p = q$. $\square$

O nosso raciocínio até agora culmina no seguinte resultado: [Escrever direito algo assim]]

Teorema 1.3.12. *Seja X um espaço normado, $T : X \to X$ um operador linear compacto, $\lambda \neq 0$ e r como no teorema 1.3.11. Então podemos escrever X como*

$$X = \ker(T_\lambda^r) \oplus T_\lambda^r(X).$$

Demonstração. Tome r como no teorema 1.3.11. Temos que $\ker(T_\lambda^r)$ e $T_\lambda^r(X)$ são subespaços fechados e $\ker(T_\lambda^r) \cap T_\lambda^r(X) = \{0\}$, nos resta apenas mostrar que todo $x \in X$ admite uma representação única

$$x = y + z \tag{1.12}$$

onde $y \in \ker(T_\lambda^r)$ e $z \in T_\lambda^r(X)$. Para isso, tome $x \in X$ fixo, queremos $z_0 \in T_\lambda^r(X)$ tal que

$$T_\lambda^r(x - z_0) = T_\lambda^r x - T_\lambda^r z_0 = 0 \iff T_\lambda^r x = T_\lambda^r z_0.$$

Como $T_\lambda^r(X) = T_\lambda^{2r}(X)$, $T_\lambda^r x \in T_\lambda^{2r}(X)$ e existe $x_0 \in X$ tal que $T_\lambda^{2r}x_0 = T_\lambda^r x$. Tomando $z_0 = T_\lambda^r x_0 \in T_\lambda^r(X)$ temos que $x - z_0 \in \ker(T_\lambda^r)$. Nos resta então mostrar que $(x - z_0, z_0)$ é o único par (y, z) que satisfaz a igualdade (1.12):

Suponha que existe outro vetor z_1 em $T_\lambda^r(X)$ tal que $x - z_1 \in \ker(T_\lambda^r)$ (isto é, que satisfaz 1.12). Então $T_\lambda^r(z_0 - z_1) = 0$ e $z_0 - z_1 \in \ker(T_\lambda^r)$. Mas como $T^r(X)$ é um espaço vetorial,

$$z_0 - z_1 \in \ker(T_\lambda^r) \cap T_\lambda^r(X) = \{0\} \implies z_0 - z_1 = 0 \implies z_0 = z_1.$$

Segue então que $x = (x - z_0) + z$ é a única representação para x em (1.12). Como $x \in X$ foi arbitrário, concluímos a demonstração. □

Partindo do estudo de pertubações $\lambda \neq 0$ arbitrárias para a análise de valores espectrais, ilustramos mais uma semelhança entre os espectros de operadores compactos e operadores entre espaços de dimensão finita com o teorema a seguir:

Teorema 1.3.13. *Seja X um espaço de Banach e $T : X \to X$ um operador linear compacto. Então todo valor espectral $\lambda \neq 0$ é um autovalor de T.*

Demonstração. Suponha o contrário, que $\lambda \in \sigma(T)\backslash(\sigma_p(T) \cup \{0\})$. Ou seja, $\lambda \neq 0$ é tal que $\ker(T_\lambda) = \{0\}$. Então

$$\{0\} = \ker(T_\lambda^0) = \ker(T_\lambda).$$

Pelo teorema 1.3.11, temos que $r = 0$. Ou seja, $T_\lambda(X) = X$. Então T_λ é uma bijeção linear limitada e, pelo teorema da aplicação aberta, T_λ tem inversa contínua. Mas neste caso temos que $\lambda \in \rho(T)$. Um absurdo. □

Observação. *Apesar de o teorema anterior assumir X como um espaço de Banach, essa hipótese não é necessária. Demonstramos esse fato no teorema [Teorema equivalente ao 8.6-4 do Kreyszig].*

Quando estudando as propriedades espectrais associadas a transformação T em si, isto é, com uma pertubação $\lambda = 0$, ... [Explicar o caso de $\lambda = 0$, o Kreyszig comenta um pouco. Seria legal se aprofundar mais, talvez antes mesmos desses teoremas falando de $\lambda \neq 0$, "situação única" talvez sejam palavras boas para falar de $\lambda = 0$.]

Capítulo 2

Operadores limitados auto-adjuntos

2.1 Propriedades iniciais

2.1.1 Propriedades espectrais de operadores auto-adjuntos

Voltamos nossa atenção agora a uma nova classe de operadores cujas propriedades espectrais são de nosso interesse: Os operadores auto-adjuntos. Para fazer sentido falar destes precisamos admitir uma noção adicional de estrutura aos nossos espaços, em particular, precisamos de um produto interno. Assim, passamos do estudo de espaços de Banach para espaços de Hilbert.

Primeiro, revisamos algumas noções básicas:

Definição 2.1.1. Sejam $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ e $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ espaços de Hilbert, e $T : H_1 \to H_2$ um operador linear limitado. Então definimos o operador linear $T^* : H_2 \to H_1$ tal que

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^* y\rangle_1.$$

Chamamos T^* de *Hilbert-adjunto de* T ou simplesmente de *adjunto de* T.

Observação. *Chamaremos T^*, como descrito acima, simplesmente de "adjunto de T" quando no contexto de um espaço de Hilbert. Caso queiramos nos referir aos operadores adjuntos no sentido de Banach, explicitaremos esse fato. No contexto mais geral de espaços de Banach, onde a existência de um produto interno não foi explicitada, a noção de adjunto que assumimos é, naturalmente, a definição geral para espaços de Banach.*

Segue facilmente da definição que T^* é um operador linear e limitado e, em particular, $\|T\| = \|T^*\|$. A existência do operador adjunto T^* para um operador linear limitado $T : H_1 \to H_2$ arbitrário é não trivial, tal fato pode ser provado através de uma variante sesquilinear do teorema da representação de Riesz (c.f. [3] pg.196).

Teorema 2.1.1 (Representação de Riesz)**.** *Seja H um espaço de Hilbert e $\varphi \in H^*$ qualquer, então existe um único vetor $f_\varphi \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, f_\varphi \rangle, \quad \forall x \in H.$$

[Eu gosto de ter uma intuição das coisas, então resolvi escrever sobre isso, mas não sei se vale a pena manter (o texto seguinte). Pode acabar confundindo mais o leitor. Talvez seja útil no futuro para entender melhor algum teorema ou outro conceito, então por enquanto vou deixá-la.]

Enquanto a demonstração em si foge do escopo do nosso trabalho, ela sugere uma certa intuição geométrica interessante acerca da definição do operador adjunto: Podemos pensar em um operador linear limitado T como definindo um operador (eu usaria palavras "uma forma sesquilinear") $G : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ usando $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, de forma que $G(x, y) = \langle Tx, y \rangle_2$. Neste caso G será um operador *sesquilinear*, isto é, linear na primeira coordenada e conjugado-linear na segunda.

Com isso em mente, o operador adjunto de T, $T^* : H_2 \to H_1$, é o operador que define um operador (eu usaria palavras "uma forma sesquilinear") sesquilinear $\tilde{G} : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ definido por $\tilde{G}(x, y) = \langle x, T^* y \rangle_1 = G(x, y)$ usando $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e "protagonizando o comportamento da coordenada conjugada-linear do produto interno".

Dito isso, é provavelmente mais natural pensar em T^* de uma forma mais algébrica como o operador que nos permite mudar de entrada a transformação quando essa está composta em um produto interno. [Será que está certo usar o termo "algébrico" nesse cenário? Penso que sim mas tenho que conferir.] eu tirara esse ultimo paragrafo, não entendo o que você quer dizer

Definição 2.1.2 (Operador auto-adjunto)**.** Chamamos um operador linear e limitado $T : H \to H$ de auto-adjunto se ele coincide com o seu adjunto, isto é,

$$T = T^*.$$

Algebricamente, podemos pensar que operadores auto-adjuntos são aqueles que permitem a seguinte mudança

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

eu tiraria frase anterior Voltando agora nossa atenção às propriedades espectrais de operadores auto-adjuntos temos os seguinte resultados iniciais:

Observação. *Definimos o adjunto de um operador $T : H_1 \to H_2$, entre espaços de Hilbert, especificamente para operadores T lineares e limitados. Durante esse capítulo nos restringiremos a esse caso, mas futuramente voltaremos nossa atenção a como esse conceito pode ser estendido para operadores ilimitados e trataremos de um caso mais geral.*

Teorema 2.1.2. *Se H é um espaço de Hilbert complexo e $T : H \to H$ é um operador linear limitado e auto-adjunto, então $\sigma_p(T) \subseteq \mathbb{R}$. E, se $v_1, v_2 \in H$ são autovetores associados a autovalores distintos, $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.*

Demonstração. Seja $\lambda \in \sigma_p(T)$, então existe $x \in H$ não-nulo tal que $Tx = \lambda x$. Como T é auto-adjunto,

$$\langle \lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, \lambda x\rangle.$$

Como $\langle x, x\rangle > 0$,

$$\lambda\langle x, x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle \implies \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}.$$

Agora, sejam v_1 e v_2 vetores tais que $Tv_1 = \lambda_1 v_1$ e $Tv_2 = \lambda_2 v_2$, para $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\lambda_1 \neq 0$ e teremos:

$$\langle v_1, v_2\rangle = \frac{1}{\lambda_1}\langle Tv_1, v_2\rangle = \frac{1}{\lambda_1}\langle v_1, Tv_2\rangle = \frac{\overline{\lambda_2}}{\lambda_1}\langle v_1, v_2\rangle.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \overline{\lambda_2}$, $\frac{\overline{\lambda_2}}{\lambda_1} \neq 1$, ou seja, $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.

□

Daí temos que os auto-espaços dos autovalores de um operador T limitado e auto-adjunto, quando existem, são ortogonais entre si (quaisquer dois vetores de um auto-espaços diferentes são ortogonais) e que o operador T apenas os expande ou contrai (os escala por um valor λ real).

Quando falamos de ortogonalidade em um espaço de Hilbert H, uma notação é particularmente útil: Se A é um subconjunto de X escrevemos $A^\perp$ para simbolizar o conjunto de vetores ortogonais à todos os vetores em A. Isto é,

$$A^\perp = \{x \in H : \langle a, x\rangle = 0\}$$

rever definição anterior No caso do teorema anterior podemos dizer que $\ker(T_{\lambda_1}) \subseteq (\ker(T_{\lambda_2}))^\perp$ ou simplesmente escrever $\ker(T_{\lambda_1}) \perp \ker(T_{\lambda_2})$. Uma propriedade que nos será útil relacionada à essa notação é a seguinte: Para H um espaço de Hilbert e A um subespaço de H,

$$\overline{A} = (A^\perp)^\perp = A^{\perp\perp}.$$

Se $x \in A^\perp$, então $\langle a, x\rangle = 0$ para todo $a \in A$. Ou seja, $A \subseteq A^{\perp\perp}$. Se $a_0 \in H$ é tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$ para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, então

$$\langle a_0, x\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} a_n, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle a_n, x\rangle = 0, \qquad \forall x \in A^\perp.$$

Com isso, temos $\overline{A} \subseteq A^{\perp\perp}$. Agora, como uma consequência do teorema da projeção ortogonal (c.f. [3] pg.149), já que $\overline{A}$ é fechado, $(\overline{A})^{\perp\perp} = \overline{A}$. Por fim, basta ver que como $A \subseteq \overline{A}$, então $A^\perp \subseteq \overline{A}^\perp$ e $A^{\perp\perp} \subseteq (\overline{A})^{\perp\perp} = \overline{A}$.

Para o próximo resultado, usaremos também a seguinte notação:

Definição 2.1.3. Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. Dizemos que T é *limitado inferiormente* se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|Tx\| \geq m\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

Teorema 2.1.3. *Se H é um espaço de Hilbert complexo e $T : H \to H$ é um operador linear limitado e auto-adjunto,*

$$\lambda \in \rho(T) \iff T_\lambda \text{ é limitado inferiormente.}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $T : H \to H$ é um operador linear limitado e auto-adjunto e $\lambda \in \rho(T)$, $T_\lambda : H \to H$ é limitado e admite uma inversa $R_\lambda : H \to H$ limitada. Ou seja, T_λ é um isomorfismo[1] de H em H e temos que existe $m, M > 0$ tais que

$$m\|x\| \leq \|T_\lambda x\| \leq M\|x\|.$$

Ou seja, T_λ é limitada inferiormente.

($\Leftarrow$) Agora, suponha que $T : H \to H$ é um operador auto-adjunto, $\lambda \in \mathbb{C}$ e que existe $m > 0$ tal que $m\|x\| \leq \|T_\lambda x\|$

É claro que T_λ é injetora, já que

$$T_\lambda x = 0 \implies 0 \leq m\|x\| \leq 0 \implies x = 0.$$

[1] [Vale a pena adicionar que não queremos dizer que T é também unitária? Acho que essa é uma definição de isomorfismo para espaços de Hilbert.]acho que não precisa

Tome agora $x_0 \in H$ tal que $\langle x_0, T_\lambda x\rangle = 0$ para todo $x \in H$. Como T_λ é auto-adjunto, para todo $x \in H$:

$$0 = \langle x_0, Tx - \lambda x\rangle = \langle x_0, Tx\rangle - \langle x_0, \lambda x\rangle = \langle Tx_0, x\rangle - \langle \overline{\lambda} x_0, x\rangle$$

e então $\langle T_\lambda x_0, x\rangle = 0$ para todo $x \in H$. Ou seja[2], $T_\lambda x_0 = 0 \implies x_0 = 0$. Daí temos que $T_\lambda(H)^\perp = \{0\}$ e consequentemente $\overline{T_\lambda(H)} = T_\lambda(H)^{\perp\perp} = H$ e $T_\lambda(H)$ é denso em H.

Por fim, basta ver que já que T_λ é limitada inferiormente, T é injetora e $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ existe e é limitada. Assim,

$$\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T) \implies \lambda \in \rho(T).$$

[Essa demonstração, em particular, o fim eu desviei um pouco do Kreyszig. Mas acho que está certo.] □

Com essa caracterização do conjunto resolvente de operadores limitados e auto-adjuntos, voltamos nossa atenção agora para estudar como podemos restringir o espectro de T:

Teorema 2.1.4. *Se H é um espaço de Hilbert complexo e $T : H \to H$ é um operador linear auto-adjunto, seu espectro $\sigma(T)$ consiste apenas de valores reais.*

Demonstração. Com T auto-adjunto e $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ temos que

$$\langle T_\lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle$$

e

$$\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle + \langle x, -\lambda x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, x\rangle.$$

Assim,

$$2\mathrm{Im}(\langle T_\lambda x, x\rangle) = \langle T_\lambda x, x\rangle - \overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} = (\overline{\lambda} - \lambda)\langle x, x\rangle = -2ib\|x\|^2.$$

Daí, como $|\mathrm{Im}(\langle T_\lambda x, x\rangle)| \leq |\langle T_\lambda x, x\rangle| \leq \|T_\lambda x\|\|x\|$, temos

$$2\|T_\lambda x\|\|x\| \geq 2|\mathrm{Im}(\langle T_\lambda x, x\rangle)| \geq 2|b|\|x\|^2 \implies \|T_\lambda x\| \geq |b|\|x\|.$$

Por fim, se $b \neq 0$, temos que T_λ é limitada inferiormente e, pelo teorema 2.1.3, $\lambda \in \rho(T)$. Ou seja, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. □

[2] Para provar essa passagem basta tomar $x = T_\lambda x_0$ e usar o fato que $\langle T_\lambda x_0, T_\lambda x_0\rangle = \|T_\lambda x_0\|^2$.

A caracterização de um operador como auto-adjunto nos permite inferir ainda mais sobre o seu espectro. Em particular, conseguimos uma limitação mais precisa que o raio espectral. Primeiro, veja que, com T auto-adjunto,

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} \implies \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}.$$

[Com isso podemos também verificar que T_λ com λ um complexo com parte imaginária não nula não pode ser um operador auto-adjunto.]

Quando trabalhando com operadores limitados auto-adjuntos, é muito útil considerar manipulações da expressão $\langle Tx, x\rangle$. Além de ser o cenário ideal para usar o fato de T ser auto-adjunto, em espaços de Hilbert complexos, essa contas trazem implicações diretas para o operador T como é o exemplo a seguir: [relocar?]não entendi necessidade desse paragrafo

Teorema 2.1.5. *Se H é um espaço de Hilbert complexo e $T : H \to H$ é um operador linear limitado e auto-adjunto, então $\sigma(T) \subseteq [m, M]$ onde*

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \quad e \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle.$$

Demonstração. Com T auto-adjunto temos a seguinte propriedade:

$$\langle Tx, x\rangle = \left\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \|x\|^2 \leq M\|x\|^2.$$

Agora, tome $\lambda = M + c$ onde $c > 0$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}\|T_\lambda x\|\|x\| &\geq \langle -T_\lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle - \langle Tx, x\rangle \\ &\geq (\lambda - M)\|x\|^2 \implies \|T_\lambda x\| \geq c\|x\|\end{aligned}$$

Ou seja, com $c > 0$ temos que $\lambda = M + c \in \rho(T)$. Analogamente, tome $\lambda = m - c$. Podemos verificar que

$$\langle Tx, x\rangle = \left\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \|x\|^2 \geq m\|x\|^2.$$

e

$$\|T_\lambda x\|\|x\| \geq \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \geq (m - \lambda)\|x\|^2 = c\|x\|^2$$

Ou seja, para $c > 0$ temos que $\lambda \in \rho(T)$. Com isso concluímos que, de fato, $\sigma(T) \subseteq [m, M]$. □

Teorema 2.1.6. *Se H é um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear limitado e auto-adjunto,*

$$\|T\| = \max\{|m|, M\} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

Para m e M as constantes definidas no teorema 2.1.5.

Demonstração. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|\|x\| = \|T\| \sup_{\|x\|=1} \|x\| = \|T\|.$$

Nos resta então mostrar que $\|T\| \geq \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Se $\ker(T) = H$, então $\|T\| = 0 = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$.

Agora, com $\ker(T) \neq H$, veja que para todo $x \notin \ker(T)$, $\exists y = \frac{Tx}{\|Tx\|} \in H$ tal que

$$\|Tx\| = \frac{\|Tx\|^2}{\|Tx\|} = \frac{1}{\|Tx\|}\langle Tx, Tx\rangle = \langle Tx, y\rangle.$$

Seja x tal que $\|x\| = 1$, com $\|Tx\| \neq 0$, qualquer e $y \in S_X$ tal que $\|Tx\| = \langle Tx, y\rangle$. Como $\langle Tx, y\rangle \in \mathbb{R}$ e T é auto-adjunto, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle Ty, x\rangle$. Com isso:

$$\begin{aligned}
\|Tx\| = \langle Tx, y\rangle &= \frac{\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle}{4} \\
&= \frac{\langle Tx, y\rangle + (\langle Tx, x\rangle - \langle Tx, x\rangle) + \langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle}{4} \\
&= \frac{\langle Tx, x+y\rangle + \langle Ty, x\rangle - \langle Tx, x-y\rangle + \langle Ty, x\rangle}{4} \\
&= \frac{\langle Tx, x+y\rangle + \langle Ty, x\rangle + (\langle Ty, y\rangle - \langle Ty, y\rangle) - \langle Tx, x-y\rangle + \langle Ty, x\rangle}{4} \\
&= \frac{\langle Tx, x+y\rangle + \langle Ty, x+y\rangle - \langle Tx, x-y\rangle + \langle Ty, x-y\rangle}{4} \\
&= \frac{\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle}{4}.
\end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2\langle Tv, v\rangle + \|x-y\|^2\langle Tw, w\rangle\right), \qquad \text{para } \|v\| = \|w\| = 1 \\
&\leq \frac{\sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle|}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\
&= \frac{\sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle|}{4}(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2) \leq \sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle|.
\end{aligned}$$

Por fim, como a escolha de $\|x\| = 1$ foi arbitrária, temos que

$$\|T\| \leq \sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle| \text{ e consequentemente } \|T\| = \sup_{\|x\|=1}|\langle Tx, x\rangle|.$$

□

Conseguimos uma grande restrição no conjunto que o espectro de um operador limitado auto-adjunto pode habitar. A seguir confirmamos que essa restrição, $[m, M]$ é o menor intervalo contendo $\sigma(T)$ que podemos ter.

Teorema 2.1.7. *Sejam $H \neq \{0\}$ um espaço de Hilbert complexo não seria melhor assumir no começo que sempre estamos com espaço de Hilbert complexo, $T : H \to H$ um operador linear limitado e auto-adjunto e m e M as constantes definidas no teorema 2.1.5. Então m e M são valores espectrais.*

Demonstração. Pelo teorema 2.1.3, sabemos que basta provar que $T - M$ e $T - m$ não são limitadas inferiormente. Para isso, consideraremos [Não entendi essa demonstração] □

Na introdução do espectro discutimos brevemente o motivo por trás da sua divisão em espectro pontual, contínuo e residual. Enquanto a motivação geral é de contabilizar as distintas formas que pertubações $-\lambda I$ afetam operadores lineares entre espaços de dimensão infinita, a forma como definimos os espectros contínuos e residual é um tanto particular. A estrutura adicional garantida aos operadores auto-adjuntos ajuda a elucidar essa escolha, como veremos a seguir estes operadores conseguem evitar uma "classe" dessas anomalias que $-\lambda I$ pode causar.

Teorema 2.1.8. *Seja H um espaço de Hilbert complexo e $T : H \to H$ um operador linear limitado e auto-adjunto, então $\sigma_r(T) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que $\lambda \in \sigma_r(T)$. Então $\overline{T_\lambda(H)} \neq H$. Pelo teorema da projeção ortogonal:

$$H = \overline{T_\lambda(H)} \oplus (\overline{T_\lambda(H)})^\perp \implies (\overline{T_\lambda(H)})^\perp \neq \{0\}.$$

seria bom escrever esse teorema num lugar e referir quando precisar Então existe $y \neq 0$ tal que $y \in (\overline{T_\lambda(H)})^\perp \subseteq (T_\lambda(H))^\perp$ tal que $\langle T_\lambda x, y\rangle = 0$ para todo $x \in H$. Como T é auto-adjunto e $\lambda \in \mathbb{R}$ (teorema 2.1.4), $-\lambda I$ e portanto T_λ são operadores lineares limitados auto-adjuntos. Com isso temos:

$$\langle x, T_\lambda y\rangle = \langle x, Ty\rangle - \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx - \lambda x, y\rangle = \langle T_\lambda x, y\rangle = 0 \qquad \forall x \in H.$$

Então $\|T_\lambda y\|^2 = 0 \implies T_\lambda y = 0 \implies \lambda \in \sigma_p(T)$. Um absurdo. Ou seja, o espectro residual de T é vazio. □

2.1.2 Projeções ortogonais

Em espaços de Banach X, projeções são operadores $P : X \to X$ idempotentes, isto é, tais que:

$$P(P(x)) = P(x), \qquad \forall x \in X.$$

Tais operadores nos permitem decompor o espaço com uma soma direta $X = P(X) \oplus \ker(P)$ de forma que $x = P(x) + (I - P)(x)$ para todo $x \in X$. Para um espaço de Hilbert H, nós temos o conceito adicional de projeções ortogonais, operadores $P : H \to H$ idempotentes e tais que $\ker(P) = P(H)^\perp$. A ortogonalidade da decomposição de H traz diversas vantagens que exploraremos adiante.

Para, quando estivermos determinando se uma projeção é ortogonal, evitarmos ter que mudar nosso foco do operador P aos subespaços $P(H)$ e $\ker(P)$ para analisar a sua ortogonalidade, usaremos em geral a seguinte caracterização equivalente de projeções ortogonais:

Teorema 2.1.9. *Seja H um espaço de Hilbert e $P : H \to H$ um operador linear limitado, P é uma projeção ortogonal se, e somente se, P for auto-adjunto e idempotente.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $P : H \to H$ é uma projeção ortogonal. Por definição P é uma projeção e portanto idempotente. Como sabemos, P nos permite decompor o espaço como $x = P(x) + (I - P)(x)$ onde

$P(H) \perp (I-P)(H)$. Tomando $x, y \in H$ quaisquer,

$$\begin{aligned}\langle P(x), y\rangle &= \langle P(x), P(y) + (I-P)(y)\rangle = \langle P(x), P(y)\rangle + \underbrace{\langle P(x), (I-P)(y)\rangle}_{0} \\ &= \langle P(x), P(y)\rangle = \langle P(x), P(y)\rangle + \underbrace{\langle (I-P)(x), P(y)\rangle}_{0} = \langle x, P(y)\rangle.\end{aligned}$$

Ou seja, P é auto-adjunto.

($\Leftarrow$) Suponha agora que o operador $P : H \to H$ é uma projeção e auto-adjunto. Tome $P(x) \in P(H)$ e $(I-P)(y) \in (I-P)(H)$ quaisquer. Então

$$\langle P(x), (I-P)(y)\rangle = \langle x, P(I-P)(y)\rangle = \langle x, P(y) - P^2(y)\rangle = \langle x, 0\rangle = 0.$$

Como a escolha de vetores em $P(H)$ e $(I-P)(H)$ foi arbitrária, temos que $P(H) \perp (I-P)(H)$, ou seja, P é uma projeção ortogonal. $\square$

Na seção anterior vimos que o valor $\langle Tx, x\rangle$, de "quanto uma transformação T se mantém pontualmente alinhada ao espaço", é prevalente no estudo operadores auto-adjuntos. Em particular, para operadores auto-adjuntos esse alinhamento é sempre um valor real o que nos permite aproveitar a ordem $\leq$ de $\mathbb{R}$ para definir uma ordem parcial[3] $\leq$ no conjunto de operadores auto-adjuntos:

Sejam H um espaço de Hilbert complexo, $T_1 : H \to H$ e $T_2 : H \to H$ operadores lineares limitados e auto-adjuntos. Definimos a seguinte ordem parcial (no conjunto de operadores limitados e auto-adjuntos de H a H):

$$T_1 \leq T_2 \iff \langle T_1 x, x\rangle \leq \langle T_2 x, x\rangle, \qquad \forall x \in H.$$

Isto é, consideramos $T_1 \leq T_2$ (ou $T_2 \geq T_1$) se T_2 "consistentemente mantém um alinhamento maior com o espaço" que T_1. Dizemos ainda que T_1 é um *operador positivo* se $T_1 \geq 0$. Algumas propriedades imediatas são:

- $0 \leq T_1 \leq T_2 \implies 0 \leq T_2$,
- $T_1 \leq T_2 \iff 0 \leq T_2 - T_1$,
- $0 \leq T_1, T_2 \implies 0 \leq T_1 + T_2$.

[3]Como não nos é necessário, não provaremos que de fato é uma ordem parcial.

Observação. *Em diante quando dissermos que $T : H \to H$ é um operador positivo, estará assumido que, além de T satisfazer $T \geq 0$, $T : H \to H$ é um operador linear limitado e auto-adjunto.*

acho confusa essa observação

Sabendo agora que as projeções ortogonais são operadores auto-adjuntos, podemos ordená-las. Em particular, temos que

$$\langle Px, x\rangle = \langle P^2(x), x\rangle = \langle Px, Px\rangle = \|Px\|^2.$$

Ou seja, as projeções ortogonais são operadores positivos. Uma vez que $\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \leq \|Px\|\|x\|$, temos que $\|P\| \leq 1$. E, como $P|_{P(H)} = I|_{P(H)}$, se $P(H) \neq \{0\}$, então $\|P\| = 1$. Com isso,

$$\langle Px, x\rangle \leq \|Px\|\|x\| \leq \|x\|^2 = \langle Ix, x\rangle \implies 0 \leq P \leq I.$$

[Esse último ponto é importante? A parte da norma parece solta depois da discussão de positividade.] acho bom manter isso

Motivados pelo teorema espectral buscamos uma familiaridade maior com as diferentes formas de combinar projeções ortogonais. Em particular, neste momentos exploraremos algumas condições sobre as quais podemos combinar projeções sem que deixem de ser projeções ortogonais, e como isso afeta o espaço que representam.

Teorema 2.1.10. *Sejam H um espaço de Hilbert e $P_1 : H \to H$ e $P_2 : H \to H$ projeções ortogonais sobre H. Então P_1P_2 é uma projeção ortogonal se, e somente se, P_1 e P_2 comutam. E, se P_1P_2 é uma projeção, projeta H no subespaço $P_1(H) \cap P_2(H)$.*

Demonstração. □

Corolário 2.1.11. *Sejam H um espaço de Hilbert e M e N subespaços fechados de H. Então M e N são ortogonais se, e somente se, $P_1P_2 = 0$, onde P_1 e P_2 são as projeções ortogonais com imagens M e N, respectivamente.*

Demonstração. □

Teorema 2.1.12. *Sejam H um espaço de Hilbert e $P_1 : H \to H$ e $P_2 : H \to H$ projeções ortogonais sobre H. Então $P_1 + P_2$ é uma projeção ortogonal se, e somente se, P_1 e P_2 forem ortogonais entre si. Isto é, se, e somente se, $P_1(H)$ e $P_2(H)$ são subespaços ortogonais. E, se $P_1 + P_2$ for uma projeção ortogonal projeta H em $P_1(H) \oplus P_2(H)$.*

Para finalizar a nossa reflexão sobre as interações básicas entre projeções ortogonais, apresentamos um resultado que nos dá várias formas equivalentes de pensarmos em como ordenar projeções e suas implicações.

Teorema 2.1.13. *Seja H um espaço de Hilbert e $P_1 : H \to H$ e $P_2 : H \to H$ projeções ortogonais. São equivalentes:*

1. $P_1 \leq P_2$.
2. $P_1(H) \subseteq P_2(H)$.
3. $\ker(P_2) \subseteq \ker(P_1)$.

Teorema 2.1.14. *Se H é um espaço de Hilbert e $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monotonamente crescente de projeções ortogonais $P_n : H \to H$ para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq .... \leq P_n \leq ...,$$

então $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente fortemente? para uma projeção $P : H \to H$ que projeta H em $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n}$ com núcleo $\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(P_n)$. Onde $Y_n = P_n(H)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração teste. Uma vez que toda projeção P é tal que $P \leq I$, temos que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monotonamente crescente e limitada

$$P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq .... \leq P_n \leq ... \leq I$$

e, portanto, converge pontualmente a um operador positivo $P : H \to H$. Para ver que $P(H) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n}$ basta ver que $Px = \lim_{n\to\infty} P_n x = x$ para todo $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ e que P é contínuo para conseguirmos $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n} \subseteq P(H)$. Acho que dessa forma não dá certo, eu teria que primeiro provar que $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n}$é complementado por $\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(P_n)$ pra mostrar que P realmente coincide com $I|_{P(H)} \oplus 0|_{\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(P_n)}$. □

qual é o problema com completar a demonstração, por que teste? Acho que falta mostrar que o limite é a projeção [O teorema a seguir eu que enunciei e provei (então pode estar errado). Adicionei ele para sustentar um fato usado pelo Schmudgen na demonstração do lema 4.4.]

Teorema 2.1.15. *Se H é um espaço de Hilbert e $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de projeções ortogonais tais que $P_n(H) \perp P_m(H)$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ é uma projeção ortogonal*[4] *sobre $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H)}$ com núcleo $\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(P_n)$.*

Demonstração. Como as projeções P_n são 2-a-2 ortogonais, as somas parciais $S_k = \sum_{n=1}^{k} P_n$ são projeções ortogonais sobre $\bigcup_{n=1}^{k} P_n(H)$ com núcleo $\bigcap_{n=1}^{k} \ker(P_n)$. Tomando $p, q \in \mathbb{N}$ com $p < q$ temos que

$$\bigcup_{n=1}^{p} P_n(H) \subseteq \bigcup_{n=1}^{q} P_n(H) \implies S_p \leq S_q.$$

Ou seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monotonamente crescente de projeções ortogonais. Pelo teorema 2.1.14 temos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente a uma projeção ortogonal S tal que

$$Sx = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} P_n(x)$$

com imagem $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H)}$ e núcleo $\bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(P_n)$. $\square$

2.2 O Teorema Espectral

Em espaços de Hilbert H de dimensão $n < +\infty$, se $T : H \to H$ é um operador linear auto-adjunto com autovalores distintos $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (e autovetores $x_1, ..., x_n$ na esfera unitária, respectivamente). Temos que esses autovetores são vetores ortogonais (teorema 2.1.2) e não-nulos, formando assim uma base de H. Podemos assim reescrever:

$$Tx = T\left(\sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k\rangle T(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, x_k\rangle x_k.$$

Chamando de P_k os operadores $P_k(x) = \langle x, x_k\rangle x_k$ é fácil ver que são projeções ortogonais de H aos subespaços $\text{span}\{x_k\}$, respectivamente. Nos permitindo assim decompor a transformação T como uma combinação de n formas

[4]Considerando a convergência forte da série. Isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ é o operador definido por $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \text{s-lim}_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} P_n$.

$\lambda_1, ..., \lambda_n$ de escalar subespaços ortogonais final da frase não entendi:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k.$$

Nesta seção procuramos uma forma semelhante de decompor um operador linear limitado e auto-adjunto $T : H \to H$ entre espaços de Hilbert complexos de dimensão infinita. O nosso primeiro passo será achar um paralelo à seleção de finitas projeções $P_1, ..., P_n$ para um espaço de dimensão infinita (inspirando a definição da medida espectral discutida a seguir). Em seguida desenvolveremos uma forma de combinar o efeito de T sobre esses subespaços distintos. Por fim, usaremos essas ferramentas para conseguir uma decomposição favorável de T e discutiremos variações desse resultado.

2.2.1 A medida espectral

Uma medida μ é uma ferramenta que nos permite "contabilizar continuamente" o que significa essa frase? uma noção de magnitude sobre um conjunto qualquer (por exemplo, em intervalos reais). Nesta seção buscamos aproveitar o maquinário de teoria da medida para definir uma forma de "contabilizar continuamente" projeções ortogonais. Para este fim, chamaremos de $\mathrm{Proj}(H)$ notação esquisita o conjunto de projeções ortogonais $P : H \to H$, onde H é um espaço de Hilbert.

No teorema seguinte veremos que considerar H um espaço de Hilbert complexo tem vantagens mesmo se não estamos considerando o espectro de operadores. Em particular, usaremos que em um espaço de Hilbert complexo

$$\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle \quad \forall x \in H \iff T = S. \tag{2.1}$$

O sentido ($\Leftarrow$) é imediato. Para ($\Rightarrow$) usamos que $T - S$ é um operador tal que $\langle (T-S)x, x\rangle = 0$ para todo $x \in H$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (T-S)(x+\alpha y), (x+\alpha y)\rangle \\ &= \cancel{\langle (T-S)x, x\rangle} + \overline{\alpha}\langle (T-S)x, y\rangle + \alpha\langle (T-S)y, x\rangle + \cancel{\langle (T-S)(\alpha y), (\alpha y)\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\langle (T-S)x, y\rangle + \alpha\langle (T-S)y, x\rangle \end{aligned}$$

Considerando $\alpha = 1$ e $\alpha = -i$ temos que

$$\langle (T-S)x, y\rangle + \langle (T-S)y, x\rangle = 0 \qquad e \qquad \langle (T-S)x, y\rangle - \langle (T-S)y, x\rangle = 0$$

Ou seja $\langle (T-S)x, y\rangle = 0$ para quaisquer $x, y \in H$. Tomando $y = (T-S)x$ temos que $(T-S)x = 0$ para qualquer escolha de $x \in H$, e $T = S$.

No contexto de um espaço de Hilbert complexo[5] discutiremos o conceito que motiva essa seção:

Definição 2.2.1 (Medida Espectral)**.** Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de um conjunto Ω onde está o Ω? e H um espaço de Hilbert. Uma função $E : \mathcal{A} \to \mathrm{Proj}(H)$ é chamada de medida espectral se:

1. $E(\Omega) = I$,

2. E for σ-aditiva. Isto é, se, para qualquer escolha de conjuntos $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ 2-a-2 disjuntos:

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)(x), \qquad \forall x \in H.$$

Observação. *No contexto de uma medida espectral E, a sua σ-aditividade é relativa à topologia forte. Assim, escreveremos*

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n) := \operatorname*{s-lim}_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} E(M_n).$$

Onde $\text{s-lim}_{n\to\infty} f_n$*, para uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções $f_n : A \to B$ quaisquer, é a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in A$. tirar essa ultima frase esquisita sobre f_n, $s - lim$ é o conceito bem-conhecido*

Similarmente à medidas comuns, $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, uma medida espectral E define uma forma de avaliar cada conjunto da "subdivisão" $\mathcal{A}$ de um conjunto Ω. Em particular, E atribui à cada um desses uma projeção ortogonal de forma a distribuir projeções relativas à todo o espaço H, isto é, $E(\Omega) = I$. Para entendermos melhor como essa "distribuição" ocorre, desenvolveremos algumas propriedades iniciais:

[5] Para a definição de medida espectral assim como alguns teoremas e propriedades sobre as medidas espectrais, não é necessária a hipótese de H ser um espaço de Hilbert *complexo*. Deixamos à caráter do leitor discernir para quais casos a complexidade é necessária. eu não confundiria com essa restrição para o espaços complexos, deixaria fixo no começo que o espaço é complexo

Teorema 2.2.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra sobre um conjunto Ω, H um espaço de Hilbert complexo e $E : \mathcal{A} \to \text{Proj}(H)$ uma medida espectral. Temos que:*

I. $E(\emptyset) = 0$, *onde* 0 *é o operador nulo.*

II. E *é finitamente aditiva. Isto é, se* $M_1, ..., M_k \in \mathcal{A}$ *são conjuntos 2-a-2 disjuntos, para* $k \in \mathbb{N}$. *Então*

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{k} M_n\right) = \sum_{n=1}^{k} E(M_n).$$

III. Para $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$, $M_1 \subseteq M_2 \implies E(M_1) \leq E(M_2)$.

IV. Se $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ *e* M_1 *e* M_2 *são disjuntos, então os subespaços* $E(M_1)(H)$ *e* $E(M_2)(H)$ *são ortogonais.*

V. Se $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$, *então* $E(M_1)E(M_2) = E(M_2)E(M_1) = E(M_1 \cap M_2)$.

Demonstração. I. Seja $M_1 = \Omega$ e $M_n = \emptyset$ para $n \geq 2$. Claramente $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(M_n)_{n\geq 2}$ são sequências de conjuntos 2-a-2 disjuntos. Então:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n) = E(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} E(\emptyset) \\ &= E(\Omega) + E\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} M_n\right) = E(\Omega) + E(\emptyset) \implies E(\emptyset) = 0. \end{aligned}$$

II. Agora, tome $M_1, ..., M_k \in \mathcal{A}$ 2-a-2 disjuntos. Podemos definir $M_n = \emptyset$ para $n \geq 2$ e teremos uma sequência $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de $\mathcal{A}$ 2-a-2 disjuntos, então:

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{k} M_n\right) = E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \sum_{n=1}^{k} E(M_n) + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} E(\emptyset)}_{E(\emptyset)=0} = \sum_{n=1}^{k} E(M_n).$$

III. Sejam $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ tais que $M_1 \subseteq M_2$. Como

$$E(M_2) = E(M_1 \cup (M_2 \backslash M_1)) = E(M_1) + E(M_2 \backslash M_1)$$

é uma projeção ortogonal, pelo teorema 2.1.12, $E(M_1)(H) \subseteq E(M_2)(H)$, ou seja, $E(M_1) \leq E(M_2)$.

IV. Se $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ são disjuntos, $E(M_1 \cup M_2)$ é uma projeção ortogonal igual à $E(M_1) + E(M_2)$. Pelo teorema 2.1.12, $E(M_1)(H)$ e $E(M_2)(H)$ são subespaços ortogonais.

V. Sejam $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ quaisquer,

$$\begin{aligned} E(M_1)E(M_2) =& (E(M_1\backslash M_2) + E(M_1 \cap M_2))(E(M_2\backslash M_1) + E(M_1 \cap M_2)) \\ =& E(M_1\backslash M_2)E(M_2\backslash M_1) + E(M_1\backslash M_2)E(M_1 \cap M_2) \\ &+ E(M_1 \cap M_2)E(M_2\backslash M_1) + E(M_1 \cap M_2)E(M_1 \cap M_2) \end{aligned}$$

Como $M_1\backslash M_2$, $M_1 \cap M_2$ e $M_2\backslash M_1$ são 2-a-2 disjuntos, pelo corolário 2.1.11, os 3 primeiros termos da soma resultam no operador nulo e nós temos:

$$E(M_1)E(M_2) = E(M_1 \cap M_2)E(M_1 \cap M_2) = E^2(M_1 \cap M_2) = E(M_1 \cap M_2).$$

□

Teorema 2.2.2. *Se H é um espaço de Hilbert complexo e $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra sobre o conjunto Ω, uma função $E : \mathcal{A} \to \mathrm{Proj}(H)$ é uma medida espectral se, e somente se, $E(\Omega) = I$ e $E_x(M) := \langle E(M)x, x\rangle$ for uma medida positiva.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se E é uma medida espectral, $E(\Omega) = I$ e E é σ-aditiva. Tomando um conjunto enumerável $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos 2-a-2 disjuntos de $\mathcal{A}$, como o produto interno é aditivo e contínuo na primeira entrada,

$$\left\langle E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) x, x\right\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)x, x\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(M_n)x, x\rangle.$$

Assim E_x é σ-aditiva. Por fim, como $E(M)$ é uma projeção ortogonal, é um operador positivo e E_x é uma medida positiva:

$$E_x(M) = \langle E(M)x, x\rangle \geq 0, \qquad \forall M \in \mathcal{A}.$$

($\Leftarrow$) Tome E_x uma medida positiva, $E(\Omega) = I$ e, novamente, seja $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ um conjunto enumerável de elementos 2-a-2 disjuntos de $\mathcal{A}$. Uma vez que E_x é σ-aditiva, é também finitamente aditiva. Ou seja,

$$\left\langle E\left(\bigcup_{n=1}^{k} M_n\right) x, x\right\rangle = \sum_{n=1}^{k} \langle E(M_n)x, x\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{k} E(M_n)x, x\right\rangle, \qquad \forall x \in H$$

Por (2.1) temos que E também é finitamente aditiva. Como E define projeções ortogonais, temos, pelo teorema 2.1.12, que para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $E(M_i)(H) \perp E(M_j)(H)$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$. Como a escolha de k é arbitrária, $(E(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ em si é uma sequência de projeções ortogonais tais que $E(M_i)(H) \perp E(M_j)(H)$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. Com isso, e pelo teorema 2.1.15, a sequência de somas parciais $(\sum_{n=1}^{k} E(M_n))_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortemente a uma projeção ortogonal representada[6] por $\sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)$. Agora, usando a σ-aditividade de H e a continuidade do produto interno, temos:

$$\left\langle E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) x, x\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(M_n)x, x\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)x, x\right\rangle$$

para todo $x \in H$. Então E também é σ-aditiva e, por definição, é uma medida espectral. $\square$

Observação. *Quando temos uma medida espectral E, a notação E_x representando a medida $E_x(M) = \langle E(M)x, x\rangle$ será conveniente, então adiante assumiremos sempre que E_x descreve precisamente a medida descrita no teorema anterior.*

2.2.2 Integração espectral de funções limitadas

Com a noção de uma medida espectral bem estabelecida, seguiremos um trajeto comum à teoria da medida para definir a integração com relação a uma medida espectral.

Seja H um espaço de Hilbert complexo, Ω um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra sobre Ω, chamamos de $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ o espaço de Banach[7] de funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ limitadas e $\mathcal{A}$-mensuráveis com a norma $\|f\|_\Omega = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$. Chamamos de $\mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$ o subespaço de funções simples. Isto é, funções da forma

$$\varphi = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \chi_{M_n}$$

onde $\chi_M : \Omega \to \mathbb{C}$ é a função característica de M_n. Para $M_1, ..., M_k \in \mathcal{A}$ 2-a-2 disjuntos e $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{C}$. Definimos então a integral com relação a E

[6] [Eu escrevi assim porque a série me remete muito à convergência na norma, que não é o caso. Porém, já explicitei antes no texto que tratamos a série com a convergência pontual, se a senhora achar repetitivo posso tirar, sem problemas.]

[7] Adicionar referência de porque é um espaço de Banach.

para funções simples $\varphi = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \chi_{M_n}$ como

$$\int_\Omega \varphi dE = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n E(M_n).$$

Podemos logo verificar que

$$\left\| \int_\Omega \varphi dE \right\| \leq \|\varphi\|_\Omega \tag{2.2}$$

já que $\|E(\cup_{n=1}^{k} M_n)\| \leq 1$ (é uma projeção) e

$$\begin{aligned} \left\| \int_\Omega \varphi dE \right\| &= \left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n E(M_n) \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{k} \|\varphi\|_\Omega E(M_n) \right\| \\ &\leq \|\varphi\|_\Omega \left\| E\left(\bigcup_{n=1}^{k} M_n \right) \right\| \leq \|\varphi\|_\Omega. \end{aligned}$$

Para estender essa definição para funções $f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$, exploraremos 3 fatos:

1. Para qualquer $f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$ que converge a f na norma $\|\cdot\|_\Omega$. Ou seja, $\mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$.

2. O limite $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n dE$, para uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_s(\Omega, \mathcal{A})$ tal que $\varphi_n \to f$, existe.

3. O limite $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n dE$ independe da escolha de sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\Omega} f$.

Primeiramente, veja que para quaisquer $f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ e $\varepsilon > 0$, a imagem de f está contida na bola fechada [Explicitar no começo a notação para bola aberta e bola fechada] $B_{\|f\|_\Omega}[0] \subseteq \mathbb{C}$. Como $B_{\|f\|_\Omega}[0]$ é um conjunto compacto e $\{B_\varepsilon(z) : z \in B_{\|f\|_\Omega}[0]\}$ é uma cobertura de abertos, existe uma subcobertura finita $\{B_\varepsilon(z_1), ..., B_\varepsilon(z_n)\}$. Como f é $\mathcal{A}$-mensurável, $f^{-1}(B_\varepsilon(z_1)), ..., f^{-1}(B_\varepsilon(z_n)) \in \mathcal{A}$. Como esses conjuntos não necessariamente são disjuntos, tomamos

$$M_k = f^{-1}(B_\varepsilon(z_k)) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} f^{-1}(B_\varepsilon(z_i)) \right) \in \mathcal{A}, \qquad \forall k \in \{1, ..., n\}.$$

E então podemos definir

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} z_k \chi_{M_k} \in \mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$$

e teremos que, para qualquer $x \in \Omega$, existe $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $z_k \in M_k$ e $f(x) \in B_\varepsilon(z_k)$. Assim, $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - z_k| < \varepsilon$. Ou seja, $\|f - \varphi\|_\Omega \leq \varepsilon$.

E, para qualquer $f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ podemos tomar $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\Omega} f$. Com isso definimos:

$$\int_\Omega f dE = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n dE.$$

Para ver que esse limite existe, usamos a equação (2.2) para identificar que $(\int_\Omega \varphi_n dE)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de operadores lineares limitados (já que $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_\Omega$). Como $B(H, H)$ é um espaço de Banach, a sequência $(\int_\Omega \varphi_n dE)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Por fim verificamos que, dada qualquer outra escolha $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$, tal que $\phi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\Omega} f$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_n dE = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n dE.$$

Para isso, basta ver que $(\varphi_n - \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$ que converge a 0 (e que a integral é aditiva para funções simples):

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left\| \int_\Omega (\varphi_n - \phi_n) dE \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \phi_n\|_\Omega = 0.$$

Alternativamente também indicamos a integral $\int_\Omega f dE$ por $\int_\Omega f(\lambda) dE(\lambda)$. Com a integral bem definida podemos desenvolver agora algumas de suas propriedades:

Teorema 2.2.3. *Sejam H um espaço de Hilbert complexo, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra sobre um conjunto Ω, $E : \mathcal{A} \to \mathrm{Proj}(H)$ uma medida espectral, $f, g \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Temos que:*

I. $E(M) = \int_\Omega \chi_M dE$ *para qualquer* $M \in \mathcal{A}$.

II. $\int_\Omega \alpha f + \beta g dE = \alpha \int_\Omega f dE + \beta \int_\Omega g dE$.

III. $\int_\Omega f g dE = (\int_\Omega f dE)(\int_\Omega f dE)$.

IV. $\left\langle \left(\int_\Omega f dE\right) x, x \right\rangle = \int_\Omega f(\lambda) d\langle E(\lambda)x, x\rangle$.

V. $\left\| \left(\int_\Omega f dE\right) x \right\|^2 = \int_\Omega |f(\lambda)|^2 d\langle E(\lambda)x, x\rangle$.

VI. $(\int_\Omega f dE)E(M) = E(M)(\int_\Omega f dE) = \int_M f dE$ *para qualquer* $M \in \mathcal{A}$.

Demonstração.

I. Segue imediatamente da definição da integral, já que χ_M é uma função simples.

II. Primeiro, verificaremos essa relação para funções simples. Tome $\varphi = \sum_{n=1}^m \alpha_n \chi_{M_n}$ e $\phi = \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{N_j}$ para $\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_k, \theta \in \mathbb{C}$, $M_1, ..., M_m$ 2-a-2 disjuntos e $N_1, ..., N_k$ também 2-a-2 disjuntos, todos elementos de $\mathcal{A}$. Claramente,

$$\int_\Omega \theta \varphi dE = \sum_{n=1}^m \theta \alpha_n E(M_n) = \theta \sum_{n=1}^m \alpha_n E(M_n) = \theta \int_\Omega \varphi dE.$$

Agora, sejam $M = \bigcup_{n=1}^m M_n$ e $N = \bigcup_{j=1}^k N_j$, somando essas funções teremos uma função da forma

$$\varphi + \phi = \sum_{n=1}^m \alpha_n \chi_{M_n \cap (\Omega \setminus N)} + \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{N_j \cap (\Omega \setminus M)} + \sum_{\substack{1 \le n \le m \\ 1 \le j \le k}} (\alpha_n + \beta_j) \chi M_n \cap N_j.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\varphi + \phi) dE = &\sum_{n=1}^m \alpha_n E(M_n \cap (\Omega \setminus N)) + \sum_{j=1}^k \beta_j E(N_j \cap (\Omega \setminus M)) \\ &+ \sum_{\substack{1 \le n \le m \\ 1 \le j \le k}} (\alpha_n + \beta_j) E(M_n \cap N_j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\varphi + \phi) dE &= \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \left(\sum_{j=1}^{k} E(M_n \cap N_j) + E(M_n \cap (\Omega \setminus N)) \right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} \beta_j \left(\sum_{n=1}^{m} E(M_n \cap N_j) + E(N_j \cap (\Omega \setminus M)) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \alpha_n E(M_n) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j E(N_j) \\
&= \int_\Omega \varphi dE + \int_\Omega \phi dE.
\end{aligned}$$

Com isso confirmamos a afirmação do enunciado para o caso em que f e g são simples. Para verificar o caso geral, com $f, g \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, basta usarmos $\varphi_n \to f$, $\phi_n \to g$ $(\varphi_1, ..., \phi_1, ... \in \mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A}))$ e a linearidade do limite:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\alpha f + \beta g) dE &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\alpha \varphi_n + \beta \phi_n) dE \\
&= \alpha \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n dE + \beta \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_n dE \\
&= \alpha \int_\Omega f dE + \beta \int_\Omega g dE.
\end{aligned}$$

III. Para o enunciado ter algum significado precisamos reconhecer que $f, g \in \mathcal{B} \implies fg \in \mathcal{B}$. Verificar que fg é uma função mensurável é algo

Novamente, verificaremos inicialmente esse fato para funções simples $\varphi = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \chi_{M_n}$ e $\phi = \sum_{j=1}^{k} beta_j \chi_{N_j}$ como no item anterior. É fácil ver que a composição de funções simples resulta em uma função simples da forma:

$$(\varphi\phi)(x) = \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \alpha_n \beta_j \chi_{M_n \cap N_j}.$$

Daí, pela definição da integral espectral para funções simples e pelo

Teorema 2.2.1:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi\phi dE &= \sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\alpha_n\beta_j E(M_n\cap N_j)\\ &= \sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\alpha_n\beta_j E(M_n)E(N_j)\\ &= \sum_{n=1}^{m}\alpha_n E(M_n)\sum_{j=1}^{k}\beta_j E(N_j)\\ &= \left(\int_\Omega \varphi dE\right)\left(\int_\Omega \phi dE\right).\end{aligned}$$

Agora, estenderemos resultado para funções $f, g \in \mathcal{B}$ quaisquer. Para isso, tome $\varphi_n \to f$ e $\phi_n \to g$ $(\varphi_1, ..., \phi_1, ... \in \mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A}))$. O próximo passo natural é confirmar que $\varphi_n\phi_n$ (que são funções simples) convergem em norma para fg.

Então

$$\int_\Omega fgdE = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega($$

IV. Sabemos, do teorema 2.2.2, que $\mu_x(M) = \langle E(M)x, x\rangle$ (para $M \in \mathcal{A}$) define uma medida positiva em $\mathcal{A}$.

Agora, seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_s(\Omega, \mathcal{A})$ tal que $\varphi_n = \sum_{i=1}^{k_n}\alpha_{n,i}\chi_{M_{n,i}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\Omega} f$

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\int_\Omega fdE\right)x, x\right\rangle &= \left\langle\left(\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_n dE\right)x, x\right\rangle\\ &= \left\langle\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \varphi_n dE\right)x, x\right\rangle\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\langle\left(\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_{n,i}E(M_{n,i})\right)x, x\right\rangle\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\alpha_{n,i}\langle E(M_{n_i})x, x\rangle\\ &= \int_\Omega f(\lambda)d\langle E(\lambda)x, x\rangle.\end{aligned}$$

A última dessas igualdades não é trivial mas segue argumentos usuais da teoria da medida que, por fugirem do nosso foco, são omitidos. [vale à pena incluir isso? Acho que para mostrar aquela igualdade precisaria de uma articulação usando a definição da integral com medida complexa e o teorema da convergência dominada.] parece que apenas ultima igualdade precisa ser justificada, sim

V. Nas mesmas condições do item anterior, verificamos que, pela continuidade da função $\|\cdot\|^2$, [A demonstração a seguir eu que pensei nela, então tem uma chance particularmente alta de estar errada]

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\int_\Omega f dE\right)x\right\|^2 &= \left\|\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_{n,i}E(M_{n,i})\right)x\right\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\|\left(\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_{n,i}E(M_{n,i})\right)x\right\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\langle\left(\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_{n,i}E(M_{n,i})\right)x, \left(\sum_{j=1}^{k_n}\alpha_{n,j}E(M_{n,j})\right)x\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\overline{\alpha_{n,j}}\left\langle\left(\sum_{i=1}^{k_n}\alpha_{n,i}E(M_{n,i})\right)x, E(M_{n,j})x\right\rangle.
\end{aligned}$$

Como cada operador $E(M_{n,j})$ é auto-adjunto e pelo Teorema 2.2.1:

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\int_\Omega f dE \right) x \right\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \overline{\alpha_{n,j}} \left\langle E(M_{n,j}) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) \right) x, x \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \overline{\alpha_{n,j}} \left\langle \left(\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i} \cap M_{n,j}) \right) x, x \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \overline{\alpha_{n,j}} \left\langle \alpha_{n,j} E(M_{n,j}) x, x \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \overline{\alpha_{n,j}} \alpha_{n,j} \left\langle E(M_{n,j}) x, x \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} |\alpha_{n,j}|^2 \left\langle E(M_{n,j}) x, x \right\rangle \\
&= \int_\Omega |f(\lambda)|^2 d\langle E(\lambda) x, x \rangle.
\end{aligned}$$

VI. Tome $M \in \mathcal{A}$ qualquer. Pela definição da integral espectral temos

$$\int_\Omega f dE = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n dE = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}).$$

Agora, tome $G_M : B(H,H) \to B(H,H)$ tal que $G_M(T) = E(M) \circ T$. Claramente G_M é linear e limitado ($\|G_M(T)\| \leq \|E_M\| \|T\| \leq \|T\|$). Ou seja, é um operador contínuo e como $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i})$ converge na norma de $B(H,H)$, pelo teorema 2.2.1

$$\begin{aligned}
E(M) \left(\int_\Omega f dE \right) &= E(M) \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} E(M) \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i} \cap M).
\end{aligned}$$

Similarmente, o operador $H_M : B(H,H) \to B(H,H)$, tal que $H_M(T) = T \circ E(M)$ para todo $T \in B(H,H)$, também é contínuo e com isso:

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega f dE\right) E(M) &= \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i})\right) E(M)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i}) E(M)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i} \cap M).\end{aligned}$$

Por fim, uma vez que $\|f - \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i}\chi_{M_{n,i}}\|_\Omega \xrightarrow{n\to\infty} 0$, então

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i}\chi_{M_{n,i}\cap M}\right\|_M \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_M f dE &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i} E(M_{n,i} \cap M)\\ &= E(M)\left(\int_\Omega f dE\right) = \left(\int_\Omega f dE\right) E(M).\end{aligned}$$

□

2.2.3 O Teorema Espectral para operadores limitados auto-adjuntos

Com a noção de integral espectral desenvolvida na seção anterior, e as informações que temos sobre o espectro de operadores limitados auto-adjuntos, o que você quer dizer com frases anteriores? Peço desculpas, está incompleto o texto, assim que possível vou corrigir essa seção e envio a senhora.

Teorema 2.2.4 (Teorema da representação de Riesz)**.** *Se X é um espaço de Hausdorff localmente compacto, então para todo funcional linear limitado φ em $C_0(X)$ existe uma medida de Borel complexa μ única tal que*

$$\varphi(f) = \int_a^b f d\mu, \qquad \forall f \in C_0(X).$$

[Falar da notação, pelo menos, de integrais no sentido de teoria da medida. Por exemplo, no teorema abaixo nós omitimos a variável quando escrevemos.]

[Introduzir as notações $\mathbb{C}[t]$ e $\overline{p}$]

Teorema 2.2.5 (Teorema Espectral)**.** *Se H é um espaço de Hilbert complexo, $T : H \to H$ é um operador linear limitado e auto-adjunto e $[a,b]$ é um intervalo compacto em $\mathbb{R}$ que contém $\sigma(T)$, então existe uma medida espectral E única na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}([a,b])$ tal que:*

$$T = \int_a^b \lambda dE(\lambda)$$

e $p(T) = \int_a^b p(\lambda)dE(\lambda)$ para qualquer $p \in \mathbb{C}[t]$. Além disso, se F for uma medida espectral em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $T = \int_a^b \lambda dF(\lambda)$ teremos que $F(M) = E(M \cap [a,b])$ para todo $M \in \mathcal{B}(A)$.

Demonstração. Começaremos provando a existência da medida espectral E. Para isso, nossa argumentação estará centrada em encontrar uma medida complexa com o Teorema 2.2.4 e, usando ela, criar uma medida espectral adequada.

Primeiro, definimos o operador $F_{x,y} : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$ de forma que

$$F_{x,y}(p) = \langle p(T)x, y\rangle.$$

Onde $p = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0$ e $p(T) = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + ... + a_0 I$, com $a_n, ..., a_0 \in \mathbb{C}$. De imediato temos que

$$|F_{x,y}(p)| = \langle p(T)x, y\rangle \leq \|p(T)\|\|x\|\|y\| \leq \|p\|_{[a,b]}\|x\|\|y\|.$$

Ou seja, para cada escolha de $x, y \in H$, $F_{x,y}$ é um funcional linear limitado sobre $(\mathbb{C}[t], \|\cdot\|_{[a,b]})$. Para usar o Teorema 1.3.3 corrigir o numero de teorema precisamos estender $F_{x,y}$ à $C_0([a,b]) = C([a,b])$ (já que $[a,b]$ é compacto). Pelo teorema de Weierstrass, os polinômios $\mathbb{C}[t]$ são densos no espaço de funções contínuas e limitadas $C([a,b])$. Como $\mathbb{C}$ é um espaço de Banach, $F_{x,y}$ admite uma extensão linear limitada única $\tilde{F}_{x,y} : C([a,b]) \to \mathbb{C}$. E, pelo teorema da representação de Riesz temos que existe uma medida complexa $\mu_{x,y}$ que nos permite escrever:

$$F_{x,y}(p) = \langle p(T)x, y\rangle = \int_a^b p d\mu_{x,y}. \tag{2.3}$$

Nosso próximo passo será provar algumas propriedades acerca das medidas $\mu_{x,y}$. Da linearidade da primeira entrada do produto interno temos que, dados $x_1, x_2, y \in H$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\int_a^b pd\mu_{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,y} &= \langle p(T)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y\rangle \\ &= \alpha_1\langle p(T)x_1, y\rangle + \alpha_2\langle p(T)x_2, y\rangle \\ &= \alpha_1 \int_a^b pd\mu_{x_1,y} + \alpha_2 \int_a^b p(\lambda)d\mu_{x_2,y} \\ &= \int_a^b pd(\alpha_1\mu_{x_1,y} + \alpha_2\mu_{x_2,y}).\end{aligned}$$

Pela unicidade da medida no teorema da representação de Riesz temos:

$$\mu_{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,y} = \alpha_1\mu_{x_1,y} + \alpha_2\mu_{x_2,y}.$$

Analogamente, pela conjugada-linearidade da segunda entrada do produto interno temos:, para $x, y_1, y_2 \in H$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\int_a^b pd\mu_{x,\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2} &= \langle p(T)x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle \\ &= \overline{\alpha_1}\langle p(T)x, y_1\rangle + \overline{\alpha_2}\langle p(T)x, y_2\rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \int_a^b pd\mu_{x,y_1} + \overline{\alpha_2} \int_a^b p(\lambda)d\mu_{x,y_2} \\ &= \int_a^b pd(\overline{\alpha_1}\mu_{x,y_1} + \overline{\alpha_2}\mu_{x,y_2}).\end{aligned}$$

Que nos dá

$$\mu_{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,y} = \overline{\alpha_1}\mu_{x_1,y} + \overline{\alpha_2}\mu_{x_2,y}.$$

Com isso, podemos pensar em $\mu_{x,y}(M)$, com $M \in \mathcal{B}([a,b])$, como uma função sesquilinear $H \times H \mapsto \mathbb{C}$ que leva $(x,y) \in H \times H$ para $\mu_{x,y}(M) \in \mathbb{C}$. Como tal, podemos usar o teorema da representação de Riesz para funções sesquilineares (c.f. teorema 3.8-4 do Kreyszig [citar corretamente]) para encontrar um operador linear limitado e único $E(M) : H \to H$ tal que:

$$\mu_{x,y}(M) = \langle E(M)x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in H. \tag{2.4}$$

Esses operadores $E(M)$ que darão origem a medida espectral que buscamos. Mas primeiro, precisamos mostrar que $E(M)$ é realmente uma projeção. Para este fim, veja que, como T (e consequentemente T^k para $k \in \mathbb{N}$) é um operador auto-adjunto:

$$\begin{aligned}\int_a^b p d\mu_{x,y} &= \langle p(T)x, y\rangle = \langle (a_n T^n + ... + a_0 I)x, y\rangle = \sum_{k=0}^n a_k \langle T^k x, y\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \langle x, T^k y\rangle = \sum_{k=0}^n \langle x, \overline{a_k} T^k y\rangle = \langle x, \overline{p}(T)y\rangle \\ &= \overline{\langle \overline{p}(T)y, x\rangle} = \overline{\int_a^b \overline{p} d\mu_{y,x}} = \int_a^b p d\overline{\mu_{y,x}}.\end{aligned}$$

Mais uma vez, pela unicidade do teorema da representação de Riesz,

$$\mu_{x,y} = \overline{\mu_{y,x}}$$

e com isso, para quaisquer $x, y \in H$:

$$\langle E(M)x, y\rangle = \mu_{x,y}(M) = \overline{\mu_{y,x}(M)} = \overline{\langle E(M)y, x\rangle} = \langle x, E(M)y\rangle.$$

Ou seja, $E(M)$ é um operador auto-adjunto. Para provar agora que $E(M)$ é idempotente, usaremos a seguinte propriedade[8]:

$$\int_a^b p d\mu_{q(A)x,y} = \langle p(A)q(A)x, y\rangle = \langle (pq)(A)x, y\rangle = \int_a^b pq d\mu_{x,y}$$

Agora, definindo $\upsilon_{x,y}(N) = \int_N q d\mu$ para $N \in \mathcal{B}([a,b])$ qualquer, podemos verificar que $\upsilon_{x,y}$ é uma medida complexa tal que

$$\int_a^b p d\mu_{q(A)x,y} = \int_a^b p d\upsilon_{x,y}.$$

Pela unicidade da medida no teorema da representação de Riesz, temos que $\mu_{q(A)x,y} = \upsilon_{x,y}$ e

$$\langle E(M)q(A)x, y\rangle = \int_M q d\mu_{x,y}, \qquad \forall M \in \mathcal{B}([a,b]).$$

[8]Na passagem $p(a)q(a) = (pq)(A)$, usamos que o produto dos polinômios $p(A)$ e $q(A)$ coincide com o polinômio $(pq)(A)$ para $pq \in \mathbb{C}[t]$.Esse fato segue, por exemplo, do teorema fundamental da álgebra.

Com isso, e dado que $E(M)$ é auto-adjunto, temos que

$$\int_a^b q d\mu_{x,E(M)y} = \langle q(A)x, E(M)y\rangle = \langle E(M)q(A)x, y\rangle = \int_a^b q\chi_M d\mu_{x,y}.$$

Mais uma vez, como $\eta(N) = \int_N \chi_M d\mu_{x,y}$ define uma medida para $N \in \mathcal{B}([a,b])$ e $\int_a^b q d\eta = \int_a^b q\chi_M d\mu_{x,y}$, podemos usar a unicidade da medida no teorema da representação de Riesz para conseguir que:

$$\mu_{x,E(M)y}(N) = \int_N \chi_M d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(M \cap N), \qquad \forall N \in \mathcal{B}([a,b]).$$

Então, para $N = M$ e $M \in \mathcal{B}([a,b])$ e $x, y \in H$ quaisquer :

$$\langle E^2(M)x, y\rangle = \langle E(M)x, E(M)y\rangle = \mu_{x,E(M)y}(M) = \mu_{x,y}(M) = \langle E(M)x, y\rangle.$$

Então $E^2(M) = E(M)$ e $E(M)$ é uma projeção ortogonal. Agora, como $\mu_{x,x}$ é uma medida complexa, é σ-aditiva e pelo Teorema 2.2.2, E é uma medida espectral.

Combinando (2.3) e (2.4) temos:

$$\langle p(T)x, y\rangle = \int_a^b p(\lambda)\langle E(\lambda)x, y\rangle, \qquad \forall x, y \in H.$$

Do item 1 do Teorema 2.2.3 temos que:

$$\langle p(T)x, y\rangle = \left\langle \left(\int_a^b p dE\right) x, y \right\rangle, \quad \forall x, y \in H \implies p(T) = \int_a^b p(\lambda) dE(\lambda).$$

[Adicionei a caixa abaixo como uma forma de explicitar que é o fim da parte da existência, mas não sei se fica muito]

$$\boxed{p(T) = \int_a^b p(\lambda) dE(\lambda).}$$

Em particular, para $p(\lambda) = \lambda$, temos $T = \int_a^b \lambda dE$.

[A medida E acima é a mesma para qualquer escolha de polinômio p, né?] unicidade não importa aqui já que você mostra a existência

Agora, para ver que essa representação é única, suponha que existe uma medida espectral $F : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Proj}(H)$ tal que $p(T) = \int_{\mathbb{R}} p(\lambda) dF$ para qualquer $p \in \mathbb{C}[t]$ [certo?]. E seja $N_n = [b + \frac{1}{n}, +\infty)$ uma sequência de intervalos em $\mathbb{R}$. [Desviei um pouco do livro a seguir] Usando o Teorema 2.2.3 temos, para $x \in H$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda dF \right) F(N_n)x, F(N_n)x \right\rangle &= \left\langle F(N_n) \left(\int_{\mathbb{R}} f dF \right) F(N_n)x, x \right\rangle \\
&= \left\langle \int_{N_n} \lambda dF x, x \right\rangle = \int_{N_n} \lambda d\langle F(\lambda)x, x\rangle \\
&\geq (b + \tfrac{1}{n}) \int_{N_n} d\langle F(\lambda)x, x\rangle \\
&= (b + \tfrac{1}{n})\langle F(N_n)x, x\rangle \\
&= (b + \tfrac{1}{n})\langle F(N_n)x, F(N_n)x\rangle \\
&= (b + \tfrac{1}{n})\|F(N_n)x\|^2.
\end{aligned}$$

Já que $T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dF$ e tomando

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \quad \text{e} \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle,$$

temos por hipótese e pelo teorema 2.1.5 sempre usar letra T no teorema que $[m, M] \subseteq [a, b]$. Assim, $F(N_n)x = 0$ para todo $x \in H$ e $n \in \mathbb{N}$. Caso contrário, haveria x_0 tal que $\|F(N_n)x_0\| > 0$ (para algum $n \in \mathbb{N}$), $x_1 = \|F(N_n)x_0\|^{-1}x_0 \in H$ e $x_2 = F(N_n)x_1 \in H$ com $\|x_2\| = 1$ que nos daria $\langle Tx_2, x_2\rangle \geq b \geq M$, um absurdo. Com isso, temos que $F((b, +\infty)) = \text{s-lim}_{n\to\infty} F(N_n) = 0$.

Analogamente, para $E_n = (-\infty, a - \frac{1}{n}]$ temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda dF \right) F(E_n)x, F(E_n)x \right\rangle &= \int_{E_n} \lambda d\langle F(\lambda)x, x\rangle \\
&\leq (a - \tfrac{1}{n}) \int_{E_n} d\langle F(\lambda)x, x\rangle \\
&= (a - \tfrac{1}{n})\langle F(E_n)x, x\rangle \\
&= (a - \tfrac{1}{n})\langle F(E_n)x, F(E_n)x\rangle \\
&= (a - \tfrac{1}{n})\|F(E_n)x\|^2,
\end{aligned}$$

para quaisquer $x \in H$ e $n \in \mathbb{N}$. Como $\langle Tx, x\rangle \geq m$ para todo $x \in H$ com $\|x\| = 1$, $F(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $F((-\infty, a)) = 0$. Pelo teorema 2.2.3:

$$\langle p(T)x, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} p(\lambda) d\langle F(\lambda)x, x\rangle = \int_a^b p(\lambda) d\langle F(\lambda)x, x\rangle, \qquad \forall p \in \mathbb{C}[t].$$

[Não entendi a implicação que nos leva à $\langle E(N)x,x\rangle = \langle F(N)x,x\rangle$] use a unicidade da medida para $\langle p(T)x,x\rangle$ Com isso temos $\langle E(N)x,x\rangle = \langle F(N)x,x\rangle$ para todo $n \in \mathcal{B}([a,b])$. Por (2.1), temos que

$$\begin{aligned} F(M) &= F(M\cap[a,b]) + \underbrace{F(M\backslash(-\infty,a))}_{0} + \underbrace{F(M\backslash(b,+\infty))}_{0} \\ &= E(M\cap[a,b]), \qquad \forall M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

□

[O corolário à seguir é necessário? Achei difícil de provar.] acho bom deixar

Corolário 2.2.6. *Sejam $T : H \to H$ um operador linear limitado e auto-adjunto, E uma medida espectral com a qual $T = \int_a^b \lambda dE$ para $\sigma(T) \subseteq [a,b]$, e $S : H \to H$ um operador linear limitado, S e T comutam se, e somente se, S comuta com todas as projeções $E(M)$ para $M \in \mathcal{B}([a,b])$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $T = \int_a^b \lambda dE$ e que $S \in B(H,H)$ são tais que $TS = ST$. Pelo teorema espectral, $p(T) = \int_a^b p(\lambda)dE(\lambda)$ para cada $p \in \mathbb{C}[t]$. Então

$$\begin{aligned} \int_a^b p(\lambda)d\langle E(\lambda)Sx,y\rangle &= \langle p(T)Sx,y\rangle = \langle Sp(T)x,y\rangle = \langle p(T)x,S^*y\rangle \\ &= \int_a^b p(\lambda)d\langle E(\lambda)x,S^*y\rangle, \qquad \forall p \in \mathbb{C}[t]. \end{aligned}$$

Pela unicidade da medida no teorema 2.2.4,

$$\langle E(M)Sx,y\rangle = \langle E(M)x,S^*y\rangle = \langle SE(M)x,y\rangle, \qquad \forall x,y \in H, \forall M \in \mathcal{B}([a,b]).$$

Ou seja, $E(M)S = SE(M)$ para todo $M \in \mathcal{B}([a,b])$.

($\Leftarrow$) Por outro lado, suponha que $S \in B(H,H)$ é tal que $E(M)S = SE(M)$ para todo $M \in \mathcal{B}([a,b])$ para E uma medida espectral tal que $T = \int_a^b \lambda dE$. [Precisa de um teorema que me deixou confuso (proposição 4.23 do Schmudgen). Envolve a integração para funções ilimitadas, pelo que eu entendi] □

Capítulo 3

Operadores ilimitados auto-adjuntos

O Teorema Espectral nos oferece além de uma representação adicional a operadores lineares limitados e auto-adjuntos. Mas conecta diretamente o espaço $B($ de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

3.1 O Teorema Espectral para operadores ilimitados

Nesta seção nosso foco será em adaptar o Teorema Espectral para reduzir a hipótese do operador ser limitado. Para operadores auto-adjuntos, essa ainda não é uma noção muito clara, já que definimos operadores adjuntos diretamente no caso limitado (2.1.1). Assim, o primeiro passo natural é definir o que queremos dizer com isso.

3.1.1 Integração espectral de funções ilimitadas

Nesta subseção buscaremos uma generalização da noção de integração espectral para o caso em que f não é uma função limitada. Sem o requisito de f ser uma função limitada, podemos abranger ainda mais o seu formato: Seja H um espaço de Hilbert complexo e $E : \mathcal{A} \to \text{Proj}(H)$ uma medida espectral, consideraremos funções $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que são *finitas em quase* *todo ponto* com relação a E[1]. Isto é,

$$E(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}) = 0.$$

Neste caso representaremos por $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A}, E)$, ou simplesmente $\mathcal{S}$, o conjunto de funções $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ finitas em quase todo ponto.

Quando definimos a integração espectral na subseção 2.2.2, a limitação das funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ a serem integradas, e em particular a norma do $\|f\|_\Omega$, foram centrais à nossa abordagem. A forma como contornaremos contornaremos esse obstáculo para generalizar a integração espectral remete a uma estratégia que agora nos deve ser costumeira: Reteremos alguma noção de limitação. Isso vem a nós na forma das sequências limitantes:

Definição 3.1.1. Uma sequência $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita uma sequência limitante de um conjunto de funções $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$ se:

i. cada $f \in \mathcal{F}$ é limitada em M_n para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii. $M_n \subseteq M_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; e

iii. $E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = I$.

Estas são sequência crescentes de conjuntos mensuráveis $M_n \subseteq \Omega$ que "caminham para representar toda a medida do espaço Ω que habitam". E são particularmente convenientes por "interagirem bem" com a medida espectral em alguns sentidos: Uma consequência imediata do Teorema 2.2.1 é que medida E acompanha o crescimento dos conjuntos

$$M_n \subseteq M_{n+1} \implies E(M_n) \leq E(M_{n+1}).$$

Além disso, reescrevendo $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como uma sequência de conjuntos disjuntos $M^*_{n+1} = M_{n+1} \setminus M_n$ podemos verificar que as projeções $E(M_n)$ convergem fortemente para a identidade:

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} E(M_n) = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} E(M^*_k) = E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M^*_k\right) = E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = I. \quad (3.1)$$

[1]Omitiremos a menção da medida espectral quando ela estiver clara no contexto, dizendo apenas que f é "finita em quase todo ponto"

A convergência forte nos garante também que, coletivamente, as projeções $E(M_n)$ representam um subconjunto denso em H na topologia da norma. Especificamente,

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E(M_n)H} = H. \tag{3.2}$$

Para ver isso, suponha o contrário, então existe um ponto $x_0 \in H$ e um aberto U entorno de x_0 tal que $U \subseteq H \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E(M_n)(H)$. Então, como

$$E(M_n)x_0 \in E(M_n)H \subseteq H \setminus U$$

e $H \setminus U$ é fechado, $\lim_{n\to\infty} E(M_n)x_0 \in H \setminus U \implies \lim_{n\to\infty} E(M_n)x_0 \neq x_0$, uma contradição à equação (3.1).

Exemplo 3.1.1. Se $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_k\}$ é uma família de $k \in \mathbb{N}$ funções de $\mathcal{S}$, $M_n = \{x \in \Omega : |f_i(x)| \leq n,\ i = 1, ..., k\}$ define uma sequência limitante $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

[Preciso demonstrar o exemplo?]

Seguindo por passos similares aos da definição da integral espectral para funções limitadas no começo da subseção 2.2.2, definimos uma noção de integral espectral para funções em $\mathcal{S}$:

Teorema 3.1.1. *Se $f \in S$, definimos o conjunto*

$$\mathcal{D}(\textstyle\int f dE) = \left\{x \in H : \int_\Omega |f(t)|^2 d\langle E(t)x, x\rangle < +\infty\right\}. \tag{3.3}$$

E, temos que:

I. Existe uma sequência $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitante de $\{f\}$.

II. Para qualquer sequência limitante $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{f\}$,

$$x \in \mathcal{D}(\textstyle\int f dE) \iff \left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x \text{ converge em } H \tag{3.4}$$

e o limite forte dos operadores $\int_\Omega f\chi_{M_n} dE$ define em $\mathcal{D}(\int f dE)$ um operador linear $\int_\Omega f dE : \mathcal{D}(\int f dE) \to H$ por

$$\left(\int_\Omega f dE\right) x := \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(\textstyle\int f dE).$$

III. O operador $\int_\Omega f dE$ independe da escolha de sequência limitante $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

IV. *$\int_\Omega f dE$ é um operador densamente definido. Em particular,* $\mathrm{Dom}(\int_\Omega f dE)$ *contém* $\bigcup_n^\infty E(M_n)H$.

Demonstração.

I. Segue de imediato do exemplo 3.1.1.

II. Seja $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitante e $x \in \mathrm{Dom}(\int_\Omega f dE)$ qualquer. Como f é limitado em M_n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $f\chi_{M_n}$ é uma função limitada e o operador $\int_\Omega f\chi_{M_n} dE$ está bem definido. Agora veja que, pelo Teorema 2.2.3,

$$\left\| \left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE \right) x \right\|^2 = \int_\Omega |f\chi_{M_n}|^2 dE_x.$$

Como E_x é uma medida positiva (pelo Teorema 2.2.2), existe o espaço normado[2] $(L_2(\Omega, E_x), \|\cdot\|_{L_2(\Omega,E_x)})$ onde $f\chi_{M_n}$ é representante de uma classe de equivalência e podemos escrever:

$$\left\| \left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE \right) x \right\|^2 = \|f\chi_{M_n}\|_{L_2(\Omega,E_x)}. \tag{3.5}$$

Se $x \in \mathcal{D}(\int f dE)$ então $f \in L_2(\Omega, E_x)$ e como $f\chi_{M_n}(t) \xrightarrow{n\to\infty} f(t)$ em quase todo ponto e as funções $f\chi_{M_n}$ são limitadas por f, pelo Teorema da Convergência Uniforme, $f\chi_{M_n}$ converge em $L_2(\Omega, E_x)$ e portanto

$$\left\| \left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE - \int_\Omega f\chi_{M_m} dE \right) x \right\|^2 = \|f\chi_{M_n} - f\chi_{M_m}\|_{L_2(\Omega,E_x)} \to 0.$$

Isto é, $(\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em H.

Por outro lado, supondo que $(\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em H, temos que $\|\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} dE\right) x\|$ também convergirá e já que $|f\chi_{M_n}|^2 \to |f|^2$ em quase todo ponto monotonamente, pelo Teorema da Convergência Monótona e (3.5),

$$\int_\Omega |f|^2 dE_x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f\chi_{M_n}|^2 dE_x < +\infty \implies x \in \mathcal{D}(\textstyle\int f dE).$$

[2][adicionar referência ao Bartle página 59]. Explicitar também que dizemos $f \in L_2(\Omega, E_x)$ onde deveria ser $[f]$ para simplificar a notação.

Agora, com a equivalência (3.4) estabelecida, é fácil verificar que $\mathcal{D}(\int fdE)$ é um subespaço vetorial de H, já que, para quaisquer $x, y \in \mathcal{D}(\int fdE)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ se $\left(\int_\Omega f\chi_{M_n}dE\right)x \to w$ e $\left(\int_\Omega f\chi_{M_n}dE\right)y = z$ então

$$\left(\int_\Omega f\chi_{M_n}dE\right)(x+\alpha y) \to w + \alpha z. \tag{3.6}$$

Sabendo que $\mathcal{D}(\int fdE)$ é um subespaço vetorial, nos resta apenas verificar que $\int_\Omega fdE$ está bem definido como um operador, que é uma consequência de (3.4) e que é linear, que segue de 3.6.

III. Sejam $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(M'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências limitantes. Pelo Teorema 2.2.3, para qualquer $x \in \mathrm{Dom}(\int_\Omega fdE)$

$$\begin{aligned}\left\|\left((\int_\Omega f\chi_{M_n}dE\right)x - \left(\int_\Omega f\chi_{M'_m}dE\right)x\right\|^2 &= \left\|\left(\int_\Omega f\chi_{M_n} - f\chi_{M'_m}dE\right)x\right\|^2\\ &= \int_\Omega |f\chi_{M_n} - f\chi_{M'_m}|^2 dE_x.\\ &= \left\|f\chi_{M_n} - f\chi_{M'_m}\right\|_{L_2(\Omega,E_x)}\\ &\leq \|f\chi_{M_n} - f\|_2 + \left\|f - f\chi_{M'_m}\right\|_2.\end{aligned}$$

Agora basta verificarmos que $f\chi_{M_n} - f \to 0$ e $f - f\chi_{M'_m} \to 0$ em $L_2(\Omega, E_x)$ com $n \to \infty$ e $m \to \infty$, respectivamente.

Para isso, notamos que, pela definição do domínio de $\int_\Omega fdE$ em (3.3), $f \in L_2(\Omega, E_x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(\int_\Omega fdE)$ e novamente pelo Teorema 2.2.3:

$$\left\|\left(\int_\Omega fdE - \int_\Omega f\chi_{M_n}dE\right)x\right\|^2 = \|f - f\chi_{M_n}\|_2,$$

e

$$\left\|\left(\int_\Omega fdE - \int_\Omega f\chi_{M'_m}dE\right)x\right\|^2 = \|f - f\chi_{M'_m}\|_2.$$

Assim,

$$\left(\int_\Omega f\chi_{M_n}dE\right)x \xrightarrow{\|\cdot\|} \left(\int_\Omega fdE\right)x \implies f\chi_{M_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$$

e, analogamente,

$$\left(\int_\Omega f\chi_{M'_m}dE\right)x \xrightarrow{\|\cdot\|} \left(\int_\Omega fdE\right)x \implies f\chi_{M'_m} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f.$$

Concluímos então que $\left\|\left(\int_\Omega f\chi_{M_n}dE - \int_\Omega f\chi_{M'_m}dE\right)x\right\| \to 0$ com $n, m \to \infty$ e portanto que $\lim_{n\to\infty}(\int_\Omega f\chi_{M_n}dE)x = (\lim_{m\to\infty} f\chi_{M'_m}dE)$. Como a escolha de x foi arbitrária temos que a integral independe da escolha de sequência limitante.

IV. Como vimos em (3.2), $\bigcup_n^\infty E(M_n)H$ é um subespaço denso de H. Então basta provar que este subespaço é um subconjunto de $\mathrm{Dom}(\int_\Omega fdE)$.

Como $M_k \subseteq M_n$ para naturais $k \leq n$, pelo Teorema 2.2.3,

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega f\chi_{M_n}dE\right)E(M_k)x &= \left(\int_{M_k} f\chi_{M_n}dE\right)x\\ &= \left(\int_{M_n} f\chi_{M_k}dE\right)x\\ &= \left(\int_\Omega f\chi_{M_k}dE\right)x.\end{aligned}$$

Ou seja, $((\int_\Omega f\chi_{M_n}dE)E(M_k)x)_{n\geq k}$ trivialmente converge e, pelo Teorema 3.1.1, $E(M_k)x \in \mathrm{Dom}(\int_\Omega fdE)$.

Dado que as escolhas de $k \in \mathbb{N}$ e x foram arbitrárias, concluímos que $E(M_k)H \subseteq \mathrm{Dom}(\int_\Omega fdE)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e portanto

$$\bigcup_n^\infty E(M_n)H \subseteq \mathrm{Dom}\left(\int_\Omega fdE\right).$$

□

Com a integral espectral definida para o caso $f \in \mathcal{S}$, podemos agora verificar algumas de suas propriedades:

Teorema 3.1.2. *Sejam $f, g \in S(\Omega, \mathcal{A}, E)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

I. $\int_\Omega \alpha f + \beta g dE = \overline{\alpha \int_\Omega fgdE + \beta \int_\Omega gdE}$.

II. $\int_\Omega fgdE = \overline{(\int_\Omega fdE)(\int_\Omega gdE)}$.

III. $\mathrm{Dom}((\int_\Omega fdE)(\int_\Omega gdE)) = \mathrm{Dom}(\int_\Omega fdE) \cap \mathrm{Dom}(\int_\Omega gdE)$.

Demonstração. □

Teorema 3.1.3. *Seja $f \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{A}, E)$. O operador $\int_\Omega f dE$ é invertível se, e somente se, $f \neq 0$ em quase todo ponto segundo E. Neste caso,*

$$\int_\Omega f^{-1} dE = (\int_\Omega f dE)^{-1}$$

onde $f^{-1}(t) = \frac{1}{f(t)}$ respeitando as seguintes convenções $\frac{1}{\infty} = 0$ e $\frac{1}{0} = \infty$.

Demonstração. $\square$

3.1.2 A transformada limitada ? "Bounded transform"

Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H_1 \to H_2$ um operador linear com domínio $\mathrm{Dom}(T)$ denso em T. Definimos então o conjunto:

$$D(T^*) = \{y \in H_2 : \exists u \in H_1 \text{ tal que } \langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, u\rangle_1 \ \forall x \in \mathrm{Dom}(T)\}.$$

Para que $y \in D(T^*)$ precisamos que exista $u \in H_1$ tal que $\langle x, u\rangle_1 = \langle Tx, y\rangle_2$ seja válido para todo $x \in H_1$. Pensando em $\langle Tx, y\rangle_2$ como um funcional em termos de x, temos que se $u \in H_1$ existir este será um funcional limitado. Por outro lado, podemos usar o teorema de Riesz-Fréchet [Usamos dois teoremas conhecidos como teorema da representação de Riesz, o primeiro é esse e o outro é sobre medidas complexas, também chamado de Riesz-Markov. Escrevi assim para diferenciar mas não sei se é bom escrever assim.] para identificar que se $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ for um funcional linear limitado existe $u \in H_1$ como procuramos. Ou seja,

$$y \in D(T^*) \iff x \mapsto \langle Tx, y\rangle_2 \text{ é contínuo.}$$

Como H_2 é um espaço de Hilbert e o domínio $\mathrm{Dom}(T)$ é denso em H_1, quando $y \in D(T^*)$, $\varphi_y : \mathrm{Dom}(T) \to H_2$ tal que $\varphi_y(x) = \langle Tx, y\rangle_2$ é limitado e portanto admite uma extensão linear limitada $\tilde{\varphi}_y$ única. Ou seja, a escolha de $u \in H_1$ tal que $\langle x, u\rangle$ que em $\mathrm{Dom}(T)$ coincide com φ, é única. Com isso temos a seguinte definição:

Definição 3.1.2. Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H_1 \to H_2$ um operador linear densamente definido ($\overline{\mathrm{Dom}(T)} = H_1$). Chamamos de *Hilbert-adjunto de* T, ou simplesmente *adjunto de* T, o operador $T^* : D(T^*) \to H_1$ tal que $T^*(y) = u$ para $u \in H_1$ que satisfaz $\langle x, u\rangle_1 = \langle Tx, y\rangle_2$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(T)$.

Observação. *Observe que essa definição abrange a apresentada em (2.1.1) e assim, em diante entenderemos "adjunto de T" e T^* no contexto de espaços de Hilbert como referindo-se a essa noção. Quando o operador T em questão for limitado, teremos que as definições essencialmente coincidem, devendo se apenas tomar cuidado com o domínio em questão*[3].

De forma análoga a noção de operador adjunto que já tínhamos desenvolvido, o operador T^* pode ser resumido por possibilitar a igualdade:

$$\langle Tx, y\rangle_1 = \langle x, T^*y\rangle_2, \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}(T),\ \forall y \in \mathrm{Dom}(T^*).$$

[Reformatar essa equação para a igualdade ficar centralizada? Escrevendo aqui "para quaisquer $x \in \mathrm{Dom}(T)$ e $y \in \mathrm{Dom}(T^*)$"] No caso de $H = H_1 = H_2$ dizemos que T é *auto-adjunto* se $T = T^*$ e de forma mais geral chamaremos T de *simétrico* se $T \subseteq T^*$ (isto é, $\mathrm{Dom}(T) \subseteq \mathrm{Dom}(T^*)$ e $Tx = T^*x$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(T)$).

Teorema 3.1.4. *Se $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H \to H$ é um operador auto-adjunto, então é um operador linear fechado.*

Demonstração. Seja $((x_n, Tx_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}(T)$ uma sequência convergindo para (x, y) no gráfico de T. Então $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$. Daí vemos que, para qualquer $z \in \mathrm{Dom}(T)$:

$$\begin{aligned}\langle x, Tz\rangle &= \langle \lim_{n\to\infty} x_n, Tz\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Tz\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, z\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} Tx_n, z\rangle = \langle y, z\rangle\end{aligned}$$

Portanto, y é tal que $\langle x, Tz\rangle = \langle y, z\rangle$ para todo $z \in \mathrm{Dom}(T)$ e portanto $y \in \mathrm{Dom}(T^*) = \mathrm{Dom}(T)$. Por definição de T^* temos que $T^*x = y$. Como $T = T^*$, $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$. Ou seja, T é um operador linear fechado. □

Com o conceito de operadores auto-adjuntos, que abrange também operadores ilimitados, estabelecido, podemos começar a caminhar em direção à generalização do teorema espectral. Para atingir tal meta, trabalharemos em adaptar um operador auto-adjunto arbitrário para "torna-lo limitado" e com

[3] Sendo $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H \to H$ um operador linear limitado densamente definido, como seu contradomínio é Banach, admite uma única extensão linear limitado $\tilde{T}$ que por sua vez tem um auto-adjunto como em (2.1.1) e é fácil ver que $T^* = \tilde{T}\big|_{D(T^*)}$ [Tem cara de que dá pra fortalecer, o que podemos dize sobre $D(T^*)$?]

este usaremos o teorema espectral já desenvolvido. Primeiro, veja o seguinte fato:

[Lembrete: Escrever nessa seção, que assim como na anterior sempre assumimos que os espaços de Hilbert são complexos.]

Teorema 3.1.5. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H \to H$ um operador densamente definido. Então $\mathcal{G}(T^*) = V(\mathcal{G}(T))^{\perp}$ para $V : H^2 \to H^2$ dada por $V(x, y) = (-y, x)$.*

Demonstração. Para $x \in \mathrm{Dom}(T)$ e $y \in \mathrm{Dom}(T^*)$ e $\langle (x, y), (z, w)\rangle_{H\times H} = \langle x, z\rangle + \langle y, w\rangle$ o produto interno de $H \times H$:

$$\begin{aligned}\langle V(x, Tx), (y, T^*y)\rangle_{H\times H} &= \langle(-Tx, x), (y, T^*y)\rangle_{H\times H}\\ &= -\langle Tx, y\rangle + \langle x, T^*y\rangle = 0.\end{aligned}$$

Ou seja, $\mathcal{G}(T^*) \subseteq V(\mathcal{G}(T))^{\perp}$. Agora, seja $(y, w) \in V(\mathcal{G}(T))^{\perp}$. Então

$$\langle V(x, Tx), (y, u)\rangle = \langle -Tx, y\rangle + \langle x, u\rangle = 0, \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}(T).$$

Assim, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, u\rangle$ e com isso, $y \in \mathrm{Dom}(T^*)$ e $T^*y = u$. Daí temos que $(y, u) \in \mathcal{G}(T^*)$ e $V(\mathcal{G}(T))^{\perp} \subseteq G(T^*)$. Ou seja, $\mathcal{G}(T^*) = V(\mathcal{G}(T))^{\perp}$. □

[Tomar cuidado com os domínios e contra-domínios!!]

[O teorema a seguir eu modifiquei para o caso onde T é auto-adjunto, já que é onde usaremos. Espero que ele não seja necessário novamente no futuro em uma forma mais geral.]

Teorema 3.1.6. *Seja H um espaço de Hilbert e $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H \to H$ um operador densamente definido e auto-adjunto. Então $I + T^2 : \mathrm{Dom}(T) \to H$ é um operador invertível com inversa $(I + T^2)^{-1} : H \to \mathrm{Dom}(T)$ limitada e auto-adjunta.*

Demonstração. [Decidir o símbolo u ou y para usar para vetores na imagem de $(I + T^2)y$. Comecei com u, seguindo o Schmudgen mas acabei usando y já que era mais natural para mim.] Como $\mathcal{G}(T^*)$ e $V(\mathcal{G}(T))$, para $V(x, y) = (-y, x)$, são subespaços de $H^2 = H\times H$ ortogonais (teorema 3.1.5), pelo teorema da projeção ortogonal:

$$H^2 = \mathcal{G}(T) \oplus V(\mathcal{G}(T))$$

Então, para todo $u \in H$ existem $x, y \in \mathrm{Dom}(T)$ únicos tais que:

$$(0, u) = (y, Ty) + V(x, Tx) = (y, Ty) + (-Tx, x) = (y - Tx, x + Ty).$$

Ou seja, para todo $u \in H$ existe um único $x \in \mathrm{Dom}(T)$ tal que $Tx = y$ e $x + Ty = x + T^2x = (I + T^2)x = u$. Ou seja, $(I + T^2) : \mathrm{Dom}(T) \to H$ é uma bijeção [No Schmudgen ele explicita uma conta para mostrar a injetividade, mas ao meu ver sai facilmente da definição da soma direta, como eu fiz aqui].

Para ver que $(I + T^2)^{-1}$ é limitado, basta tomar $y \in H$ qualquer, e por $(I + T^2) : \mathrm{Dom}(T) \to H$ ser sobrejetora, sabemos que existe $x \in \mathrm{Dom}(T)$ tal que $(I + T^2)x = y$, então

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 = \|(I + T^2)x\|^2 &= \langle x + T^2x, x + T^2x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, T^2x\rangle + \langle T^2x, x\rangle + \langle T^2x, T^2x\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\|Tx\|^2 + \|T^2x\|^2 \\
&\geq \|x\|^2 = \|(I + T^2)^{-1}y\|^2.
\end{aligned}$$

Por fim, veja que para qualquer $y = (I + T^2)x \in H$ e, como $(I + T^2)$ é a soma de dois operadores auto-adjuntos, é auto-adjunto,

$$\langle (I + T^2)^{-1}y, y\rangle = \langle x, (I + T^2)x\rangle = \langle (I + T^2)x, x\rangle = \langle y, (I + T^2)^{-1}y\rangle.$$

Então $(I + T^2)^{-1}$ é um operador limitado e auto-adjunto. □

[Devemos estender o operador no teorema anterior para que ele haja entre H e H?Preservaria a bijetividade?]

Teorema 3.1.7. *Todo operador linear limitado positivo T admite uma raiz quadrada $T^{1/2}$. Isto é, um operador $T^{1/2}$ tal que $T = T^{1/2}T^{1/2}$.*

Demonstração. Veja o apêndice. □

Com isso podemos construir o operador que nos permitirá usar do Teorema Espectral 2.2.5:

$$\boxed{Z_T = T((I + T^2)^{-1})^{1/2}.}$$

Onde $Z_T : H \to H$. A sua construção se dá nessa forma para nos garante algumas propriedades importantes:

Teorema 3.1.8. *Seja* $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H \to H$ *um operador auto-adjunto então:*

1. Z_T *é um operador linear limitado com* $\|Z_T\| \leq 1$.
2. Z_T *é um operador auto-adjunto.*
3. $I - Z_T^2 = (1 + T^2)^{-1}$

Demonstração. Para esta demonstração adotaremos a notação $C_T = (I + T^2)^{-1}$.

1. Que Z_T é limitado segue pelo fato de que T é fechado (Teorema 3.1.4) e que $C_T^{1/2}$ é limitado (segue da definição do operador raiz quadrada): Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência qualquer em H tal que $x_n \to x$ e $Z_T(x_n) \to y$. Uma vez que $C_T^{1/2}$ é limitado, $C_T^{1/2}x_n \to C_T^{1/2}x$ e como T é um operador fechado, $C_T^{1/2}x_n \to C_T^{1/2}x$ e $TC_T^{1/2}x_n \to y$ implicam que $y = T(C_T^{1/2}x)$. Ou seja, $(x, Z_T(x)) \in \mathcal{G}(Z_T)$ e portanto $Z_T : H \to H$ é um operador linear fechado. Pelo teorema do gráfico fechado, Z_T é limitado.

   Agora, tome $y \in C_T^{1/2}(H)$ qualquer. Então $y = C_T^{1/2}x$ e

   $$\begin{aligned}
   \|Z_T y\|^2 &= \|TC_T^{1/2}C_T^{1/2}x\|^2 = \|TC_T x\|^2 \\
   &= \langle TC_T x, TC_T x\rangle \leq \langle TTC_T x, C_T x\rangle + \underbrace{\langle x, C_T x\rangle}_{\geq 0} \\
   &= \langle (I + T^2)C_T x, C_T x\rangle = \langle x, C_T x\rangle = \langle C_T^{1/2}x, C_T^{1/2}x\rangle \\
   &= \|C_T^{1/2}x\|^2 = \|y\|^2.
   \end{aligned}$$

   Assim temos que $\|Z_T y\| \leq \|y\|$ para $y \in C_T^{1/2}(H)$. Para ver que é suficiente analisar estes pontos verificaremos primeiro que $C_T^{1/2}(H)$ é denso em H: Como $C_T : H \to \mathrm{Dom}(T)$ é sobrejetora, $C_T(H) = \mathrm{Dom}(T)$ que é denso em H. Uma vez que $C_T^{1/2}(H) \subseteq H$ e

   $$\mathrm{Dom}(T) \subseteq C_T(H) = C_T^{1/2}(C_T^{1/2}(H)) \subseteq C_T^{1/2}(H),$$

   Temos que $C_T^{1/2}(H)$ é denso em H.

   Por fim, para qualquer $x \in H$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_T^{1/2}(H)$ tal que $x_n \to x$. Pela continuidade de Z_T e da norma verificamos que

   $$\|Z_T x\| = \lim_{n\to\infty} \|Z_T x_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

2.

3.
$$I - Z_T^2 = I - (TC_T^{1/2})(TC_T^{1/2})$$

□

3.1.3 O Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos

Teorema 3.1.9 (Teorema Espectral)**.** *Seja $T : \mathrm{Dom}(T) \subseteq H \to H$ um operador linear auto-adjunto em um espaço de Hilbert H. Então existe uma única medida espectral E definida em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que*

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda).$$

Demonstração. Como previsto pela seção anterior, nós usaremos o operador T para definir $Z_T : H \to H$

$$Z_T = (T(I + T^2)^{-1})^{1/2}$$

que, pelo Teorema 3.1.8, é um operador linear limitado e auto-adjunto com norma $\|Z_T\|$. Pelos Teoremas 1.2.3 e 2.1.4 podemos concluir que $\sigma(Z_T) \subseteq [-1, 1]$. Pelo Teorema Espectral 2.2.5 temos a existência de uma medida espectral F sobre $\mathcal{B}([-1, 1])$ (única) e a seguinte representação:

$$Z_T = \int_{[-1,1]} \lambda dF(\lambda).$$

Segue que $F(\{-1\}) = \int_{\{-1\}} 1dF(\lambda)$ por 2.2.3. Do mesmo teorema temos que

$$I + Z_T = \int_{[-1,1]} 1dF(\lambda) + \int_{[-1,1]} \lambda dF(\lambda) = \int_{-1}^{1} 1 + \lambda dF(\lambda),$$

e com isso,

$$(I + Z_T)F(\{-1\}) = \int_{\{-1\}} 1 + \lambda dF(\lambda) = 0$$

portanto $F(\{-1\})(H) \subseteq \ker(I + Z_T)$. Analogamente,

$$I - Z_T = \int_{-1}^{1} 1 - \lambda dF(\lambda),$$

e,

$$(I - Z_T)F(\{1\}) = \int_{\{1\}} 1 - \lambda dF(\lambda) = 0 \implies F(\{1\})(H) \subseteq \ker(I - Z_T).$$

Combinando isso temos que

$$F(\{1\})H + F(\{-1\})H \subseteq \ker((I + Z_T)(I - Z_T)) = \ker(I - Z_T^2)$$

Pelo Teorema 3.1.8, $\ker(I - Z_T^2) = \ker((I + T^2)^{-1}) = \{0\}$ (já que é uma bijeção). Assim, $F(\{-1\}) = F(\{1\}) = 0$. É esse fato que nos possibilitará usar a função $f(t) = t(1 - t^2)^{-1/2}$, a inversa da função $t(1 + t^2)^{-1/2}$ que inspirou nossa abordagem à esse problema [adicionar mais contexto]:

Isso nos garante que f será finita em quase todo ponto segundo F, já que onde F é não nula (um subconjunto de $(-1, 1)$), f atinge valores finitos[4].

Além disso, sabendo que $f \in \mathcal{S}([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]), F)$, mostraremos que $T = \int_{[-1,1]} f dF$: Pelo Teorema 3.1.2 e dado que $t, (1 - t^2)^{-1/2} \in \mathcal{S}$, sabemos que $\int_{\mathbb{R}}$ terá como domínio

$$\text{Dom}\left(\int_{[-1,1]} f dF\right) = \text{Dom}\left(\int_{[-1,1]} \lambda dF\right) \cap \text{Dom}\left(\int_{[-1,1]} (1 - \lambda^2)^{1/2} dF\right).$$

Uma vez que $|\lambda| \leq 1$ e por (3.3),

$$\begin{aligned}
\text{Dom}\left(\int_{[-1,1]} \lambda dF\right) &= \left\{x \in H : \int_{[-1,1]} \lambda dF_x < +\infty\right\} \\
&\supseteq \left\{x \in H : \int_{[-1,1]} 1 dF_x < +\infty\right\} \\
&= \{x \in H : F_x([-1, 1]) < +\infty\} \\
&= \{x \in H : \langle F([-1, 1])x, x\rangle < +\infty\} \\
&= \left\{x \in H : \|x\|^2 < +\infty\right\} = H,
\end{aligned}$$

temos que

$$\text{Dom}\left(\int_{[-1,1]} f dF\right) = \text{Dom}\left(\int_{[-1,1]} (1 - \lambda^2)^{1/2} dF\right).$$

Com o domínio □

[4]É uma convenção usual em teoria da medida estabelecermos $0 \cdot \infty = 0$. Permitindo assim a integração de funções como f levando $[-1, 1]$ a $\overline{\mathbb{R}}$ (os reais estendidos).

3.2 Consequências do Teorema Espectral

3.2.1 Cálculo funcional

Nosso objeto de estudo serão as funções $f(T)$ definidas por

$$f(T) = \int f(\lambda) dE_T(\lambda).$$

Onde $T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_T(\lambda)$, f é uma função finita em quase todo ponto (na medida E_T), densamente definida com domínio:

$$\mathrm{Dom}(f(T)) = \left\{ x \in H : \int |f(\lambda)|^2 \langle E_T(\lambda)x, x\rangle < +\infty \right\}.$$

Note que o domínio de $f(T)$ é definido precisamente para que $\|f(T)x\| \leq +\infty$, como se pode ver pela equivalência do Teorema [...]: $\|f(T)x\|^2 = \int |f(\lambda)|^2 \langle E_T(\lambda)x, x\rangle$.

Teorema 3.2.1. *Sejam $f, g \in \mathcal{S}$, $x, y \in \mathrm{Dom}(f(A))$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Então segue que:*

1. $\langle f(A)x, y\rangle = \int f(\lambda) d\langle E_A(\lambda)x, y\rangle$.

2.

Demonstração.

1.

□

O Teorema Espectral como apresentado aqui apenas declara a existência de uma medida espectral E_T associada a um operador auto-adjunto T, a forma que essa medida toma como função é uma noção ainda nebulosa. Parte dos nossos esforços nessa seção serão dedicados precisamente a elucidar o comportamento desta medida.

Teorema 3.2.2. *Seja T um operador auto-adjunto e E_T a medida espectral associada a ele. Temos então que:*

1. *O suporte de E_T é precisamente o espectro de T:*

$$\operatorname{supp}(E_T) = \overline{\{M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : E_T(M) \neq 0\}} = \sigma(T).$$

   Em particular, $\lambda \in \sigma(T)$ se, e somente se, $E_T(\lambda - \varepsilon) \neq E_T(\lambda + \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$.

2. *$\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T se, e somente se, $E_T(\{\lambda\}) \neq 0$. E quando λ é um autovalor, $E_T(\{\lambda\})$ é a projeção ortogonal de H no autoespaço $\ker(T - \lambda I)$.*

Demonstração.

1.

$\square$

Capítulo 4

Apêndice/Rascunho

[Não sei se vale a pena incluir teoremas como o que vem a seguir no relatório, mas caso sim estou deixando parte da demonstração que eu havia escrito em outro teorema.]

Teorema 4.0.1. *Se X é um espaço métrico, um conjunto A é compacto se, e somente se, toda sequência em A admite uma subsequência convergente em A.*

Demonstração. Podemos então tomar uma cobertura $\{B_Y(y, \frac{1}{2}) : y \in \overline{T(B_X(0, M))}\}$ de $\overline{T(B_X(0, M))}$, então existe uma subcobertura finita $\{B_Y(y_1, \frac{1}{2}), ..., B_Y(y_n, \frac{1}{2})\}$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{T(B_X(0, M))}$ algum $B(y_j, \frac{1}{2})$ contém infinitos pontos da sequência. Tome $x_{n_1} \in B(y_j, \frac{1}{2})$, como $\overline{B(y_j, \frac{1}{2})}$ é compacto, dada uma cobertura $\{B(y, \frac{1}{4} : y \in \overline{B(y_j, \frac{1}{2})}\}$ existe uma subcobertura e c $\square$

4.1 Teoria espectral em espaços de Banach reais

Consideraremos a *complexificação* X_C de um espaço de Banach real X como a seguir:

Definimos $X_C = X \oplus iX = \{x + iy : x, y \in X\}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ respeitando as seguintes operações:

$$(x + iy) + (w + iz) = (x + w) + i(y + z) \in X_C,$$
$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx) \in X_C.$$

Definimos ainda uma norma $\|x+iy\|_C = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \|(\cos\theta)x + (\sin\theta)y\|$ com a qual:

1. X_C é Banach, já que
$$\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|x+iy\|_C \leq 2\max\{\|x\|, \|y\|\}. \tag{4.1}$$
Daí, se $(x_n+iy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são Cauchy e como X é Banach, existem $x, y \in X$ tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Finalmente, temos que $x_n + iy_n \to x + iy$.

2. O subespaço $X + i0$ é isometricamente isomorfo à X, já que podemos levar $X \ni x \to x + i0 \in X_C$ de forma que
$$\|x\| = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \|(\cos\theta)x\| = \|x+i0\|_C.$$

Tendo agora transformado um espaço de Banach real X em X_C complexo, precisamos somente transformar $T : X \to X$ o operador em $T_C : X_C \to X_C$. Existem algumas formas de fazer isso, a forma que favoreceremos será

$$T_C(x+iy) = Tx + i0y = Tx + i0 \in X_C, \quad \forall (x+iy) \in X_C.$$

Claramente T_C é linear e, se T for limitado, teremos $\|T_C\| = \|T\|$.

Adiante, a não ser que explicitado o contrário, assumiremos que todos espaços de Banach estão definidos sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. E, no contexto de espaços de Banach reais, X_C e T_C serão as complexificações de X e T como descritas anteriormente.

Apesar de que a complexificação X_C de um espaço de Banach real X nos permite usar a teoria espectral de forma mais livre, uma pergunta é natural: Podemos voltar à X? Em outras palavras, como o estudo espectral de T_C afeta T? Enquanto os paralelos entre um espaço e sua complexificação são um tópico de estudo interessante, foge do nosso foco. Restringimos nossos comentários, então, à um pequeno teorema que motiva a definição de T_C que adotamos, e que talvez ilustre um pouco a relação entre o operador resolvente de T_C e T:

[Por favor **ignorar** o teorema a seguir, ele não está completo. Como ele não é muito importante será deixado de lado por enquanto. V V V V V V V V]

Teorema 4.1.1. *Se X é um espaço de Banach real, $T \in B(X,X)$ e tome*

$$\rho_{\mathbb{R}}(T) = \{\alpha \in \mathbb{R} : T^{-1} \text{ existe, é limitado e tem domínio denso}\}$$

e $\sigma_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \backslash \rho_{\mathbb{R}}(T)$. Então, considerando $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$$\rho_{\mathbb{R}}(T) = \rho(T_C) \cap \mathbb{R} \quad e \quad \sigma_{\mathbb{R}}(T) = \sigma(T_C) \cap \mathbb{R}.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Tome $\lambda + i0 \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \in \rho(T) \cap \mathbb{R}$, se $(T_C - \lambda) \in B(X_C, X_C)$ invertível se, então existe $S_C \in B(X_C, X_C)$ tal que:

$$(T_C - \lambda)S_C = S_C(T_C - \lambda) = I$$

Como T_C é definido para desconsiderar o componente y imaginário de vetores $x + iy \in X_C$, seria natural definirmos $S'(x + iy) = S_C(x + i0)$ que por sua vez pode ser adaptado para agir estritamente em X, definindo $Sx = \mathrm{Re}(S'(x + i0))$. Com isso temos que $S : X \to X$ é linear e:

$$\begin{aligned}(T - \lambda)Sx &= (T_C - \lambda)S'(x + i0) = (T_C - \lambda)S_C(x + i0) = x + i0 = x \\ &= S_C(T_C - \lambda)(x + i0) = S_C((Tx - \lambda)x) = S'((T - \lambda))x \\ &= S(T - \lambda)x = x, \quad \forall x \in X\end{aligned}$$

Como S está definida para todo $x \in X$, tem domínio denso e pelo teorema da aplicação aberta, S é limitada.

□

Em particular, se pensarmos em $\mathbb{R}$ como o subconjunto dos complexos com termo imaginário nulo, podemos escrever:

$$\rho_{\mathbb{R}}(T) = \rho(T_C) \cap \mathbb{R}$$

[$\wedge \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge$].

4.2 Rascunho: Teorema espectral do Kreyszig

Na busca de generalizar a decomposição

$$T = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n P_n,$$

a espaços de Hilbert de dimensão infinita, já desenvolvemos um paralelo ($(E_\lambda)_{\lambda\in[m,M]}$) às projeções $P_1, ..., P_n$ e agora buscamos uma forma alternativa de combinar tais projeções com seus valores espectrais. Uma alternativa natural ao somatório é a integral de Riemann, porém, precisaremos de uma noção um pouco mais geral. Fazendo-se assim necessário definirmos a integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b f(\lambda)dw(\lambda).$$

Essa nova definição se mostra bem

Definição 4.2.1. Dizemos que uma função $w : [a, b] \to X$ possui **variação limitada** se sua variação total $\text{Var}(w)$ em $[a, b]$ é finita. Isto é, se

$$Var(w) = \sup_{P\in} \sum_{i=1}^{n} \|\|$$

[Podemos ignorar essa definição inicial e tratar diretamente o que queremos. Caso seja importante usar a integral de Riemann-Stieltjes em um cenário mais geral podemos adaptar a subseção seguinte e escrever uma subseção própria pro caso geral da integral de Riemann-Stieltjes.]

4.2.1 Operadores positivos e raízes quadradas

Agora verificaremos algumas propriedades não-triviais, começando pela composição de operadores positivos. Para isso relembramos a importância da comutatividade para a composição de operadores auto-adjuntos: A composição ST de dois operadores $T : X \to X$ e $S : X \to X$ auto-adjuntos é auto-adjunta se, e somente se, T e S comutam ($ST = TS$). Para ver isso basta ver que

$$(ST)^* = T^*S^* = TS \implies (ST)^* = ST \iff ST = TS.$$

Teorema 4.2.1. *Se X é um espaço de Hilbert e T e S são dois operadores positivos que comutam, seu produto ($ST = TS$) é também um operador positivo.*

Demonstração. $\square$

[Percebi que tem várias demonstrações meio trabalhosas a seguir que aparentam só serem usadas para conseguir alguns resultados necessários, sem muito valor por si só. Como eu não sei se será bom incluí-las aqui (não sou contra, só acho que o texto ficará bem extenso, e talvez as-colocássemos no apêndice), resolvi deixar incompleto por enquanto.]

Para operadores auto-adjuntos, é muito vantajoso poder representar um operador T por $T = A^2$ (note que A comuta consigo mesma, ou seja, T é auto-adjunto se, e somente se, A também for) já que

$$\langle Tx, x\rangle = \langle A^2x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2.$$

Como a norma de um vetor é não-negativa, $T = A^2 \geq 0$. Ou seja, a nossa busca de operadores T auto-adjuntos que admitem essa decomposição se restringe a operadores T positivos. Veremos a seguir que T ser positivo é, além de necessário, suficiente para que consigamos decomposição desejável.

Definição 4.2.2 (Raiz quadrada de T)**.** Seja X um espaço de Hilbert e $T : X \to X$ um operador positivo, chamamos um operador linear limitado e auto-adjunto $A : X \to X$ de *raiz quadrada de T* se $T = A^2$. Neste caso denotamos A também por $T^{1/2}$.

Teorema 4.2.2. *Se X é um espaço de Hilbert complexo (por que precisa ser complexo?) e $T : X \to X$ é um operador positivo, então existe um único operador raiz quadrada $A : X \to X$ positivo. Além disso, A comuta com todo operador que comuta com T.*

Demonstração. □

4.2.2 O teorema espectral

Na busca de generalizar a decomposição

$$T = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n P_n,$$

a espaços de Hilbert de dimensão infinita, já desenvolvemos um paralelo $((E_\lambda)_{\lambda\in[m,M]})$ às projeções $P_1, ..., P_n$ e agora buscamos uma forma alternativa de combinar tais projeções com seus valores espectrais. Uma alternativa natural ao somatório é a integral de Riemann, porém, precisaremos de uma noção um pouco mais geral. A integral de Riemann é definida como o limite a seguir[1]

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(\lambda_i - \lambda_{i-1}),$$

onde $|P| = \max_{n\in\{1,\dots,n\}} |\lambda_i - \lambda_{i-1}|$ e onde o limite é considerado sobre o conjunto de todas as partições

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = b.$$

do intervalo $[a, b]$ com $n \in \mathbb{N}$ qualquer. A integral de Riemann-Stieltjes é uma generalização dessa definição que nos permite incorporar diretamente funções $w(\lambda)$ que "customizam" a forma de avaliar a mudança no espaço entre os momentos λ_{i-1} e λ_i. Em paralelo às somas de Riemann, consideraremos somas na forma:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(w(\lambda_i) - w(\lambda_{i-1})) \tag{4.2}$$

Para $P = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e $\tau = \{t_1, \dots, t_n\}$ uma seleção de pontos em $[a, b]$ tais que $\lambda_{i-1} \leq t_i \leq \lambda_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ e $w : [a, b] \to X$ (onde X é um espaço normado).

Com isso definimos a integral de Riemann-Stieltjes da seguinte forma:

$$\int_a^b f(\lambda)dw(\lambda) = \lim_{|P|\to 0} S_\tau(f, P).$$

Onde o limite à direita é dado com relação à norma de X. Enquanto a consideração de uma função $w : [a, b] \to X$ drasticamente abrange o significado da integral, pode trazer algumas complicações com relação a sua convergência. Para não desviar do nosso foco, provaremos a validade da integral de Riemann-Stieltjes diretamente para as funções w que usaremos.

Em particular, nos interessamos em usar a integral de Riemann-Stieltjes para "combinar continuamente" as transformações $f(\lambda_k)$ do subespaço respectivo ao intervalo $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$, determinado pela projeção $E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})$ em (4.2). Enquanto uma resolução da identidade $(E(\lambda))_{\lambda\in[a,b]}$ é ideal para conferir a $[a, b]$ uma subdivisão do espaço X, variando do operador nulo

[1]Estamos simplificando consideravelmente a definição da integral de Riemann e assumindo diretamente que a função f sendo considerada é Riemann-integrável.

$\lim_{\lambda \to a+0} E(\lambda) = 0$ até a identidade $\lim_{\lambda \to b-0} E(\lambda)$, o fato da família não necessariamente ser contínua à esquerda pode causar problemas no ponto a se $E(a) \neq E(a+0)$. Para levar em consideração esse possível salto de em a, modificaremos levemente o formato da partição que empregaremos. Adiante, quando falarmos de uma partição para integrais na forma $\int_a^b f(\lambda) dE(\lambda)$, onde $(E(\lambda))_{\lambda \in [a,b]}$ é uma resolução da identidade, assumiremos que $P = \{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n\}$ é uma partição tal que

$$a - 1 < \lambda_0 < a = \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n = b.$$

Os pontos $\{t_1, ..., t_n\}$ por sua vez são escolhidos como antes, a única restante mudança sendo a adaptação da função f. Como o intervalo que nos interessa é $[a, b]$, procuramos funções contínuas definidas sobre ele e simplesmente usamos uma extensão contínua sua ao intervalo $[a-1, b]$ (note que como a partição só contém um ponto entre $a-1$ e a, a integral independe da escolha de extensão). Alguns livros empregam notações $\int_{a-0}^b f(\lambda) dE(\lambda)$ para destacar esse fato, optamos no entanto pela notação usual $\int_a^b f(\lambda) d\lambda$ acompanhada de uma explicação mais detalhada.

Teorema 4.2.3. *Seja H um espaço de Hilbert, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma função contínua qualquer e $\{E(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ uma resolução da identidade. Então $\int_{a+0}^b f dE(\lambda)$ define um operador linear limitado em $B(X, X)$. Isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um operador T e $\delta > 0$ em $B(X, X)$ tal que $\|T - S(f, P)\| < \varepsilon$ sempre que $|P| < \delta$. Onde*

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(E(\lambda_i) - E(\lambda_{i-1}))$$

Demonstração. Sejam P_1 e P_2 partições de $[a-1, b]$, onde $P_1 = \{\lambda_0, ..., \lambda_n\}$ e P_2 é um refinamento de P_1, em que $P_2 = \{\lambda'_{k,l} : (k, l) \in \{0, ..., n\} \times \{0, ..., n_k\}\}$ de tal forma que

$$\lambda_k = \lambda'_{k,0} < \lambda'_{k,1} < ... < \lambda'_{k,n_k-1} < \lambda'_{k,n_k} = \lambda_{k+1} = \lambda'_{k+1,0}$$

(onde $t_0, ..., t_n$ e $\{t_{k,l} : 0 \leq l \leq n_k,\ 0 \leq k \leq n\}$ são escolhidas arbitrariamente). Veja agora que podemos escrever

$$E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1}) = \sum_{l=1}^{n_k} E(\lambda_{k,l}) - E(\lambda_{k,l-1}) \tag{4.3}$$

Com isso teremos

$$
\begin{aligned}
\|S(f,P_1)-S(f,P_2)\| &= \left\|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(E(\lambda_k)-E(\lambda_{k-1})) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k} f(t'_{k,l})(E(\lambda_{k,l})-E(\lambda_{k,l-1}))\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k} f(t_k)(E(\lambda_{k,l})-E(\lambda_{k,l-1})) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k} f(t'_{k,l})(E(\lambda_{k,l})-E(\lambda_{k,l-1}))\right\| \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k}(f(t_k)-f(t'_{k,l}))(E(\lambda_{k,l})-E(\lambda_{k,l-1}))\right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k} |f(t_k)-f(t'_{k,l})|\|(E(\lambda_{k,l})-E(\lambda_{k,l-1}))\|.
\end{aligned}
$$

Tomando $\varepsilon > 0$ qualquer, como f é contínua em $[a,b]$, para cada $t \in [a,b]$, existe um aberto $B(t,\delta(t))$ tal que $|f(t)-f(s)| < \varepsilon$ para todo $s \in B(t,\delta(t))$. Como $[a-1,b]$ é compacto e $\{B(t,\delta(t))\}$ uma cobertura de abertos desse intervalo, existe uma subcobertura finita $\{B(t_1,\delta(t_1)),...,B(t_m,\delta(t_m))\}$. Tomando $\delta = \min\{\delta(t_1),...,\delta(t_m)\}$ garantimos que $|f(t)-f(s)| \leq \varepsilon$ para quaisquer $t,s \in [a-1,b]$ tais que $|t-s| < \delta$.

Note que o argumento anterior independe da partição (de fato, para funções em geral a continuidade uniforme é equivalente a continuidade pontual com domínio compacto). Assim, tomando $|P_1| < \delta$, temos $|t_k - t'_{k,l}| < \delta$ e $|f(t_k) - f(t'_{k,l})| < \epsilon$. Com isso

$$\|S(f,P_1)-S(f,P_2)\| \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k} \varepsilon\|(E(\lambda_{k,l})-E(\lambda_{k,l-1}))\|$$

e, usando a mesma relação de (4.3):

$$\|S(f,P_1)-S(f,P_2)\| \leq \varepsilon\|(E(b)-E(\lambda_0)) \ \leq \varepsilon.$$

Essa última desigualdade é verdadeira já que $E(b)-E(\lambda_0)$ é uma projeção ortogonal e portanto tem norma menor ou igual à 1. Note ainda que a escolha de δ depende apenas da função f, assim essa relação vale pra qualquer partição $|P_1| < \delta$ e um refinamento seu P_2.

Agora, para generalizar essa relação para partições P_1 e P_2 arbitrárias com $|P_1|,|P_2| < \delta$, consideraremos um refinamento simultâneo de P_1 e P_2. P_1 e P_2 partições quaisquer e P_3 uma partição que seja um refinamento de

P_1 e de P_2, pelo que provamos anteriormente existe $\delta > 0$ tal que $|P_1| < \delta$ e $|P_2| < \delta_2$ implicam

$$\|S(f, P_1) - S(f, P_3)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \|S(f, P_2) - S(f, P_3)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Assim,

$$\|S(f, P_1) - S(f, P_2)\| \leq \|S(f, P_1) - S(f, P_3)\| + \|S(f, P_2) - S(f, P_3)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

E conseguimos assim o resultado geral de que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|P_1|, |P_2| < 0 \implies \|S(f, P_1) - S(f, P_2)\|. \tag{4.4}$$

Com isso vemos que qualquer sequência de operadores $(S(f, P_n))_{n\in\mathbb{N}}$, com $\lim_{n\to\infty} |P_n| = 0$, é de Cauchy em $B(X, X)$ e portanto converge a um operador $T \in B(X, X)$. Por fim, para ver que $T = \int_a^b f(\lambda) dE(\lambda)$, e que o limite realmente existe, usaremos mais uma vez a relação em (4.4): Seja $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tal que $\|S(f, P) - S(f, P')\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $|P|, |P'| < \delta$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|T - S(f, P_m)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e $|P_m| < \delta$, então para qualquer $|P| < \delta$

$$\|T - S(f, P)\| \leq \|T - S(f, P_m)\| + \|S(f, P_m) - S(f, P)\| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ou seja, $T = \int_a^b f(\lambda) dE(\lambda)$ e a integral está bem definida. □

4.3 Rascunho: Medida espectral

Estava tentando provar $E(M_1) \leq E(M_2) \implies M_1 \subseteq M_2$. Caso sirvam para alguma coisa (como inspiração para outra demonstração usando medida espectral), já que envolveram uma forma de manipular diferente, estou incluindo a seguir: Sejam agora $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ quaisquer de forma que $E(M_1) \leq E(M_2)$. Pelo teorema 2.1.13 sabemos que $E(M_1)(H) \subseteq E(M_2)(H)$ e como $M_1 \backslash M_2 \subseteq M_2$,

$$E(M_1 \backslash M_2)(H) \subseteq E(M_1)(H) \subseteq E(M_2)(H).$$

E, já que $M_1 \backslash M_2 \subseteq \Omega \backslash M_2$, $E(M_1 \backslash M_2)(H) \subseteq E(\Omega \backslash M_2)$. Por fim, como $E(M_2)(H)$ e $E(\Omega \backslash M_2)$ são ortogonais (pelo teorema 2.1.12), $E(M_1 \backslash M_2)(H) = \{0\}$ e $M_1 \backslash M_2 = \emptyset$.

4.4 Rascunho: Mathstodon

Nono post do Mathstodon: The Spectral Theorem comes in many flavors, one might encounter it first in it's finite dimensional case, for $\mathbb{C}^n$. If $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ is a self-adjoint linear map then there is a basis $\{x_1, ..., x_n\}$ of $\mathbb{C}^n$ consisting of eigenvectors of T with which we have:

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, x_i \rangle x_i.$$

As its name suggests, it falls to Spectral Theory to extend this result into infinite dimensional spaces. As it's usually the case, this brings forth considerable difficulties. One way of easing these difficulties is to retain some notion of finitude, in this case compactness.

Specifically, if we now concern ourselves with a complex Hilbert Space H and a compact self-adjoint linear operator $T : H \to H$ we find that T has at most a countable number of eigenvalues $\{\lambda_i : i \in J\}$ and we verify the following decomposition

$$T = \sum_{i \in J} \lambda_i P_i,$$

where P_i is the orthogonal projection of H onto the eigenspace $\ker(T - \lambda_i I)$.

Décimo post do Mathstodon: To go even further we need to overcome in some way consequences of infinite-dimensionality. For this, we deal with the spectrum instead of just the eigenvalues of an operator $T : H \to H$, now only assumed to be bounded and self-adjoint. As I discussed in a previous post, studying the spectrum of bounded self-adjoint operators we find that it lies in a compact interval $[a, b]$ of the real line.

In the case of a discrete spectrum we can use a series to represent the self-adjoint operator. In the general case this is not possible and we look for the standard continuous alternative to summation: Integrals!

In the integration of real-valued functions over the real line we combine real numbers in proportion to the size of the partition of the domain that they represent, now we need to combine projections. To do this we define a spectral measure E that maps the Borel sets on the real line to the space of orthogonal projections and from this derive the theory of Spectral Integration. With which we get the result that for any given bounded self-adjoint operator $T : H \to H$ we have a spectral measure E such that we may write

$$\boxed{T = \int_a^b \lambda dE(\lambda).}$$

Although more intricate, this version of the Spectral Theorem still holds the essence of the original theorem: The decomposition of a self-adjoint operator into a "sum"of multiples of orthogonal projections.

P.S: There is still a notion of uniqueness for the spectral measure E: If there was any spectral measure on $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ satisfying the decomposition above for the operator T we would have $E(M \cap [a, b]) = F(M)$ for all $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Décimo primeiro post do mathstodon: These posts are motivated by a poster I recently presented in an event at my university. Said poster may be found here:

Post 12 do Mathstodon: [Sobre operadores ilimitados auto-adjuntos]

Post 13 do Mathstodon: [Sobre o teorema espectral para o caso ilimitado]

Índice

Bibliografia

[1] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operators, Part 1: General Theory.* John Wiley & Sons, 1958.

[2] I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek. *Classes of Linear Operators Vol. I.* Birkhäuser Basel, 2001.

[3] E. Kreyszig. *Functional Analysis.* John Wiley & Sons, 1978.

[4] F. Riesz and B. Sz.-Nagy. *Functional Analysis.* Dover Publications, 1955.

[5] K. Schmudgen. *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space.* Springer Dordrecht, 2012.