离散卷积定理的矩阵形式证明

相关定义如下

定义1

循环矩阵(circulant matrix)指矩阵的列为前一列循环后移一位的**方阵**

定义2

傅里叶变换矩阵即**DFT矩阵(DFT matrix)**定义为

$$Q \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} W^0 & W^1 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & \dots & W^{2(N-1)} \\ & & \vdots & \\ W^0 & W^{N-1} & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \tag{1}$$

其中$W = e^{-2\pi i/N},\ i = \sqrt{-1}$

IDFT矩阵定义为DFT矩阵的**共轭转置。**

则待证明内容可表示为

$$\begin{aligned} H_C &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_{C0} & \boldsymbol{H}_{C1} & \dots & \boldsymbol{H}_{C(N-1)} \end{pmatrix} \\ &= Q^H \Lambda Q \end{aligned} \tag{2, 3}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = Q\boldsymbol{H}_{C0} \tag{5}$$

先证明下述性质

性质

IDFT矩阵的列向量为任意循环矩阵的特征向量，且特征值为循环矩阵第一列的DFT

证明

定义循环移位矩阵P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix} \tag{6}$$

具有将输入向量向后圆移一位的性质。则有

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}, \ P^{N-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \tag{7}$$

下面证明IDFT矩阵的列向量为循环移位矩阵的特征向量。

P的特征值λ为

$$\begin{aligned} |\lambda E - P| &= \lambda^N - 1 && (8) \\ &= \prod_{i=1,2,\dots,N} (\lambda - e^{2\pi i/N}) && (9) \\ \lambda_i = e^{2\pi i/N}&, i = 1, 2, \dots, N && (10) \end{aligned}$$

在复平面单位圆上均匀分布。

考虑到P的循环移位性质，可知P的特征向量具有循环移位等于乘以一复常数的性质，即

$$\begin{gathered} P\boldsymbol{V}_i = \lambda_i \boldsymbol{V}_i \\ \begin{pmatrix} v_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = e^{2\pi i/N} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{11}$$

可以推知，**V**应为单位圆上匀速旋转的点构成的复序列，旋转速度为对应的特征值的共轭。

则IDFT矩阵的列向量为P的特征向量。

即$Q^H = (\boldsymbol{Q}_0 \quad \boldsymbol{Q}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{Q}_{N-1})$，$\boldsymbol{Q}_k$为P的特征向量，对应的特征值$\lambda_k = W^k = e^{-2k\pi i/N}$，

则有

$$PQ^H = (W^0\boldsymbol{Q}_0 \quad W^1\boldsymbol{Q}_1 \quad \dots \quad W^{N-1}\boldsymbol{Q}_{N-1}) \tag{12}$$

对任意循环矩阵H_C，有

$$H_C = a_0 I + a_1 P + a_2 P^2 + \cdots + a_{N-1} P^{N-1} \tag{13}$$

循环矩阵第一列的DFT为

$$Q^H \boldsymbol{H}_{C0} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + \cdots + a_{N-1} \\ a_0 + a_1 W^1 + \cdots + a_{N-1} W^{N-1} \\ \vdots \\ a_0 + a_1 W^{N-1} + \cdots + a_{N-1} W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{N-1} \end{pmatrix} \tag{14}$$

IDFT矩阵列向量作为H_C矩阵的特征向量时，特征值为

$$H_C \boldsymbol{Q}_k = (a_0 + a_1 W^k + a_2 W^{2k} + \cdots + a_{N-1} W^{(N-1)k}) \boldsymbol{V}_k = A_k \boldsymbol{Q}_k \tag{15}$$

则

$$\begin{aligned} H_C Q^H &= (A_0 \boldsymbol{Q}_0 \quad A_1 \boldsymbol{Q}_1 \quad \ldots \quad A_{N-1} \boldsymbol{Q}_{N-1}) &(16) \\ &= Q^H \begin{pmatrix} A_0 & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{N-1} \end{pmatrix} &(17) \\ H_C &= Q^H \begin{pmatrix} A_0 & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{N-1} \end{pmatrix} (Q^H)^{-1} &(18) \\ &= Q^H \begin{pmatrix} A_0 & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{N-1} \end{pmatrix} Q &(19) \end{aligned}$$

当$Q^{-1} = Q^H$，即Q为正交矩阵时，式（19）成立。

显然离散傅立叶变换和逆变换互为逆过程，DFT矩阵和IDFT矩阵是一对逆矩阵，故证明完毕。

分析

循环矩阵可视为**托普利兹矩阵(Toeplitz matrix)**（对角线元素相同的矩阵）的一种特例，两种矩阵分别对应循环卷积和线性卷积。

DFT矩阵和IDFT矩阵实际上由**相同的列向量以不同顺序构成**，故DFT矩阵也可将任意循环矩阵相似对角化。

本文给出了离散卷积定理的一种证明方式。离散卷积定理指两序列的循环卷积的离散傅立叶变换等于各自的变换序列对应值相乘。

离散卷积定理将循环卷积转化为频谱相乘，结合**FFT**算法，可将计算复杂度从$O(N^2)$降低至$O(Nlog_2N)$，在**信号**和**图像**处理中均有重要意义。

从结论重新理解性质。IDFT矩阵的列向量是复指数函数，频谱为**冲激函数**，与任意函数相乘等于乘以一复常数，故其为循环矩阵的特征向量，特征值为该频点值。

附录

DFT矩阵为正交矩阵的证明。

先给出正交矩阵的一个基本性质

性质

正交矩阵的充要条件为矩阵的列向量两两正交且自内积为1（规范正交基）。

证明

$$\begin{aligned}
& \quad\quad (20)\\
I &= M^{-1}M = M^HM \quad\quad (21)\\
\Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{Q}_k^* &= \begin{cases}1, j = k\\ 0, j \neq k\end{cases} \quad\quad (22)
\end{aligned}$$

给出2种证法

证法1

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{Q}_k^* &= 1 && (23)\\
\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{Q}_j^* &= W^0 + W^{j-k} + W^{2(j-k)} + \cdots + W^{(N-1)(j-k)} && (24)\\
W^{j-k}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{Q}_j^* &= W^{j-k} + W^{2(j-k)} + \cdots + W^{N(j-k)} && (25)\\
&= \boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{Q}_j^* && (26)\\
\therefore \boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{Q}_j^* &= 0 && (27)
\end{aligned}$$

证法2

证明可由正规矩阵/实对称矩阵的性质得出。

正规矩阵指与自身的共轭转置矩阵满足乘法交换律的矩阵。即

$$MM^H = M^HM \quad\quad (28)$$

正规矩阵存在N个相互正交的特征向量，证明略。

显然N阶循环矩阵为实对称矩阵 ，故为正规矩阵。

由结论2证明可知，N阶循环矩阵仅有N个特征向量，即为DFT矩阵的N个列向量。故DFT矩阵为正交矩阵。

参考资料

1. Gilbert Strang. MATRIX METHODS IN DATA ANALYSIS, SIGNAL PROCESSING, AND MACHINE LEARNING(lecture 31, lecture 32)
2. 郑宝东，王忠英(2013). 线性代数与空间解析几何