

① a) Marginal distribution of $p(x)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$p(x)$	0,16	0,17	0,14	0,22	0,34

Marginal distribution of $p(y)$

	y_1	y_2	y_3
$p(y)$	0,26	0,47	0,27

b) Conditional distribution of $p(x | Y = y_1)$:

$$p(x = x_1 | Y = y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{P(Y = y_1)} = \frac{0,01}{0,26} \approx 0,038$$

$$p(x = x_2 | Y = y_1) = \frac{0,02}{0,26} \approx 0,077$$

$$p(x = x_3 | Y = y_1) = \frac{0,03}{0,26} \approx 0,115$$

$$p(x = x_4 | Y = y_1) = \frac{0,1}{0,26} \approx 0,385$$

$$p(x = x_5 | Y = y_1) = \frac{0,1}{0,26} \approx 0,385$$

Conditional distribution of $p(x | Y = y_3)$:

$$p(x = x_1 | Y = y_3) = \frac{0,1}{0,27} \approx 0,37$$

$$p(x = x_2 | Y = y_3) = \frac{0,05}{0,27} \approx 0,185$$

$$p(x = x_3 | Y = y_3) = \frac{0,03}{0,27} \approx 0,111$$

$$p(x=x_4 | Y=y_3) = 0,05/0,27 \approx 0,185$$

$$p(x=x_5 | Y=y_3) = 0,04/0,27 \approx 0,148$$

② We have $E_x[X|y] = \sum_x x \cdot p(x|y)$

$$E_y[E_x[X|y]] = E_y\left[\sum_x x \cdot p(x|y)\right]$$

$$= \sum_y p(y) \cdot \sum_x x \cdot p(x|y)$$

$$= \sum_y \sum_x p(y) \cdot p(x|y) \cdot x$$

$$= \sum_x x \sum_y p(y) \cdot p(x|y)$$

$$= \sum_x x \sum_y p(x, y) \quad \left. \vphantom{\sum_y} \right\}$$

$$p(x) = \sum_y p(x, y)$$

$$\Rightarrow E_y[E_x[X|y]] = \sum_x x p(x) = E_x[X]$$

③ X : số ng được hỏi sử dụng sp X
 Y : ng đc hỏi ~~đ~~ sử dụng sp Y

$$\Rightarrow p(X) = 0,207$$

$$p(Y) = 0,5$$

$$p(X|Y) = 0,365$$

$$p(X, Y) = p(X|Y) \cdot p(Y) = 0,365 \cdot 0,5 = 0,1825$$

b) o ching $X \Rightarrow \bar{X}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(Y|\bar{X}) &= \frac{p(\bar{X}|Y) \cdot p(Y)}{p(\bar{X})} \\ &= \frac{(1 - p(X|Y))p(Y)}{1 - p(X)} \\ &= \frac{(1 - 0,365) \cdot 0,5}{1 - 0,207} \approx 0,4 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad E_x[X] = \sum x p(x)$$

$$\text{or } E_x[X] = \int x f(x) dx$$

$$\Rightarrow E[E_x[X]] = E_x[X] \quad \textcircled{1}$$

$$V_x = E_x[(X - E_x[X])^2]$$

$$= E_x[X^2 - 2XE_x[X] + (E_x[X])^2]$$

$$= E_x[X^2] - 2E_x[X \cdot E_x[X]] + (E_x[X])^2 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \Rightarrow V_x = E_x[X^2] - 2E_x[X]E_x[X] + (E_x[X])^2$$

$$= E_x[X^2] - 2(E_x[X])^2 + (E_x[X])^2$$

$$= E_x[X^2] - (E_x[X])^2$$

⑤ Giả sử bạn đầu chọn ô cửa thứ 1

\Rightarrow Ta có kết quả khi ng chơi lựa chọn giữ hay đổi lựa chọn của mình.

	Cửa 1	Cửa 2	Cửa 3	Xác suất win
Giữ	win	lose	lose	$1/3$
Đổi	lose	win	win	$2/3$

\Rightarrow Ng chơi nên đổi sang ô cửa còn lại