Московский авиационный институт
Вычислительная математика и программирование

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I СЕМЕСТР

Лектор: *Юрий Иванович Битюков*

Содержание

1 Действительные числа и их свойства. Принцип Архимеда. Грани числовых множеств. Теорема о существовании точных граней

Аксиома (о непрерывности множества $\mathbb{R}$)**.** Пусть $\mathbf{X} \neq \varnothing, \mathbf{Y} \neq \varnothing$ - подмножества множества $\mathbb{R}$ и для $\forall x \in \mathbf{X}$ и $\forall y \in \mathbf{Y}$ выполняется $x \leq y$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y, \forall x \in \mathbf{X}, \forall y \in \mathbf{Y}$.

Определение. Пусть $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$. Множество $\mathbf{X}$ называется ограниченным сверху (снизу), если $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c$ $(x \geq c)$, $\forall x \in \mathbf{X}$.
Если множество ограничено и сверху, и снизу $\Rightarrow$ это ограниченное множество.
(картинка 1)

Определение. Пусть $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ и $\mathbf{X}$ ограничено сверху (снизу). Наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих сверху (снизу) множество $\mathbf{X}$, называется верхней (нижней) гранью множества $\mathbf{X}$.
Обозначается $\sup \mathbf{X}$ $(\inf \mathbf{X})$.
(картинка 2)

Теорема 1.1 (Вейерштрасс - о существовании верхней и нижней грани)**.** *Если $\mathbf{X} \neq \varnothing$ и ограничено сверху (снизу), то существует единственная верхняя (нижняя) грань.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Y} = \{y : y \in \mathbb{R}, y \text{ ограничивает сверху}\} \neq \varnothing$, так как $\mathbf{X}$ ограничено сверху. Тогда для $\forall x \in \mathbf{X}$ и $\forall y \in \mathbf{Y}$ (так как y ограничивает сверху $\mathbf{X}$) выполняется $x \leq y \Rightarrow$ по аксиоме непрерывности $\mathbf{R}$ $\exists \beta \in \mathbf{R} : x \leq \beta \leq y$.
Так как $x \leq \beta, \forall x \in \mathbf{X}$, то β ограничивает сверху $\mathbf{X}$.
Так как $\beta \leq y, \forall y \in \mathbf{Y}$, то β - наименьшее из чисел, ограничивающих сверху $\mathbf{X} \Rightarrow \beta = \sup \mathbf{X}$.
Доказательство единственности верхней грани: Пусть β и $\hat{\beta}$ - верхние грани $\mathbf{X}$.

1. β и $\hat{\beta}$ ограничивают сверху;
2. $\beta \leq \hat{\beta}$;
3. $\hat{\beta} \leq \beta$.

$$\left.\begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta = \hat{\beta}$$ □

Теорема 1.2 (Принцип Архимеда)**.** *Для любого действительного числа β существует натуральное число $n : \beta \leq n$.*

Доказательство. Предположим, что не существует натурального числа $n > \beta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq \beta \Rightarrow \mathbb{N}$ ограничено сверху $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\exists \alpha = \sup \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \leq \beta$; так как $\alpha = \sup \mathbb{N} \Rightarrow \exists n > \alpha - 1, n \in \mathbb{N}; \hat{n}+1 > \alpha$, но $\hat{n}+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha$ не ограничивает сверху $\Rightarrow$ противоречие. □

2 Леммы, связанные с полнотой множества действиетльных чисел: о вложенных отрезках, о конечном покрытии, о предельной точке

Теорема 2.1 (Коши-Кантор - принцип вложенных отрезков)**.** *Пусть дана последовательность отрезков* $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n ...$ $(... I_n \subset ... \subset I_2 \subset I_1)$*. Тогда существует число* $c \in \mathbb{R} : c \in \mathbf{I_k}, \forall k = 1, 2, 3...$ $(c \in \bigcap \mathbf{I_k})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{I_k} = [a_k; b_k], k = 1, 2..., \mathbf{X} -$ множество ; $\mathbf{X} = \{a_k : k \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing, \mathbf{Y} = \{b_k : k \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$. Тогда $a_k \leq b_m, \forall k, m \in \mathbb{N}$. Действительно, если $\exists k, m \in \mathbb{N} : a_k > b_m \Rightarrow a_m \leq b_m < a_k \leq b_k \Rightarrow I_k = [a_k; b_k]$ и $I_m = [a_m; b_m]$ не пересекаются. Но это невозможно, так как если $m > k,$ то $I_m < I_k$; если $m < k,$ то $I_m > I_k$.
Итак, предположение неверно $\Rightarrow a_k \leq b_m, \forall k, m \in \mathbb{N}$.
Итак, $\mathbf{X} = \{a_k\} \neq \varnothing, \mathbf{Y} = \{b_m\} \neq \varnothing$.
$a_k \leq b_m \forall k, m \Rightarrow$ по аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R} : a_k \leq c \leq b_m, \forall k, m \in \mathbb{N} \Rightarrow a_k \leq c \leq b_k \Rightarrow c \in \mathbf{I_k}, \forall k.$ □

Определение. Семейство множеств $\mathbf{X} = \{\mathbf{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ называется покрытием множества $\mathbf{Y}$, если $\mathbf{Y} \subset \bigcup \mathbf{U}_\alpha$.

Теорема 2.2 (Борель-Лебег)**.** *Из любого покрытия отрезка числовой прямой интервалами можно выделить конечное покрытие.*

Доказательство. Пусть $I = [a; b]$ - отрезок. $\mathbf{X} = \{\mathbf{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ - покрытие I, то есть $I \subset \bigcup \mathbf{U}_\alpha$.
$\mathbf{U}_\alpha = (x_{1\alpha}; x_{2\alpha})$ - интервалы числовой прямой.
Обозначим множество $\mathbf{M} = \{x : x \in [a; b]$ и $[a; x]$ покрывается конечным семейством интервалов из $\mathbf{X}\}$.

1. $\mathbf{M} \neq \varnothing$, так как $a \in \mathbf{M}$, так как $[a; b] \subset \bigcup \mathbf{U}_\alpha \Rightarrow \exists \hat{\alpha} : a \in \mathbf{U}_\alpha \Rightarrow [a; a] \subset \mathbf{U}_{\hat{\alpha}}$.

2. $\mathbf{M} \subset [a; b] \Rightarrow \mathbf{M}$ ограничено. Следовательно, $\exists \beta = \sup \mathbf{M} \leq b$.

Так как $\beta \in [a; b] \Rightarrow \exists \alpha' : \beta \in \mathbf{U}_{\alpha'} = (x'; x'')$.
$x' < \beta \Rightarrow \sup \mathbf{M} \Rightarrow \exists \hat{x} \in \mathbf{M} : x' < \hat{x} \leq \beta \Rightarrow [a; x']$ покрывается конечным семейством интервалов: $\mathbf{U}_{\alpha_1}, \mathbf{U}_{\alpha_2}, ..., \mathbf{U}_{\alpha_k}$
$[a; \hat{x}] \subset \bigcup \mathbf{U}_\alpha \Rightarrow [a; b] \subset \mathbf{U}_{\alpha_1} \cup \mathbf{U}_{\alpha_2} \cup ... \cup \mathbf{U}_{\alpha_k} \cup \mathbf{U}_{\alpha'} \Rightarrow \beta \in \mathbf{M} \Rightarrow$ если предположить, что $\beta < b,$ то $\{\mathbf{U}_{\alpha_1}, \mathbf{U}_{\alpha_2}, ..., \mathbf{U}_{\alpha_k}, \mathbf{U}_{\alpha'}\}$ покрывает $\forall [a : \hat{\hat{x}}]$, где $\hat{\hat{x}} \in (\beta; x'') \Rightarrow \hat{\hat{x}} \in \mathbf{M}$ и $\hat{\hat{x}} > \beta$ - противоречие тому, что $\beta = \sup \mathbf{M}$. □

Определение. Любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0, называется окрестностью этой точки и обозначается $\mathbf{U}(x_0) = (a; b)$.

Определение. Точка x_0 называется предельной точкой множества $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, если для $\forall \mathbf{U}(x_0), \mathbf{U}_{x_0} \cap \mathbf{X}$ - бесконечное множество.

Теорема 2.3 (Больцано-Вейерштрасс)**.** *Всякое бесконечное ограниченное непустое множество* $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ *имеет предельную точку.*

Доказательство. Так как $\mathbf{X}$ - ограниченное множество, оно ограничено сверху и снизу, то есть $\exists a, \exists b : a \leq x \leq b, \forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X} \subset [a; b]$.
Предположим, что $\mathbf{X}$ не имеет предельных точек $\Rightarrow \forall x \in [a; b]$ не является предельной точкой $\mathbf{X} \Rightarrow \exists \mathbf{U}(x)$ - окрестность: $\mathbf{U}(x) \cap \mathbf{X}$ - конечное множество $\Rightarrow [a; b] \subset \mathbf{U}(x), x \in [a; b] \Rightarrow$ по теореме Бореля-Лебега существует конечное покрытие $\{\mathbf{U}(x_1), \mathbf{U}(x_2), ..., \mathbf{U}(x_n)\} : \mathbf{X} \subset [a; b] \bigcup \mathbf{U}(x_i)$, но $\mathbf{U}(x_i) \cap \mathbf{X}$ - конечное множество $\Rightarrow \mathbf{X}$ - конечное, но, по условию, $\mathbf{X}$ - бесконечное $\Rightarrow$ противоречие. □

3 Мощность множества. Счетность множества рациональных чисел

3.1 Мощность множества

Определение. Множество $\mathbf{X}$ называется равномощным множеству $\mathbf{Y}(\mathbf{X} \sim \mathbf{Y})$, если существует взаимнооднозначное отображение $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, так и однозначное отображение $f^{-1} : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$. Введенное отношение $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$ является отношением эквивалентности.

Определение. Класс эквивалентности, которому принадлежит данное множество, называется мощностью этого множества. Если $\mathbf{X} \sim \mathbb{N}$, то оно называется счётным.

3.2 Счетность множества рациональных чисел

Определение. Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называются счётными. $\mathbf{X} \sim \mathbb{N} \Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \to \mathbf{X}$ - взаимнооднозначное $\Rightarrow \forall x \in \mathbf{X}\ \exists n : f(n) = x$. Обозначают $x_n = f(n)$.

Теорема 3.1. *Множество* $[0; 1]$ *не является счетным.*

Доказательство. Множество ??? □

4 Предел последовательности. Общие свойства предела. Арифметические свойства сходящихся последовательностей. Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства

Определение. Число A называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, если для $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - A| < \epsilon$.

5 Критерий существования предела монотонной последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется неубывающей (невозрастающей, убывающей, возрастающей), если $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1},\ x_n > x_{n+1},\ x_n < x_{n+1}$).

Теорема 5.1.
- *Если последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ неубывающая и ограничена сверху, то она имеет предел.*
- *Если последовательность невозрастающая и ограничена снизу, то она имеет предел.*

Доказательство. Так как $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена сверху $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\exists\beta = \sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Докажем, что $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Возьмем $\forall\epsilon > 0 \Rightarrow$ по определению $\sup \Rightarrow \exists n_\epsilon :$ $x_{n_\epsilon} > \beta - \epsilon$.
Так как $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - неубывающая $\Rightarrow \forall n > n_\epsilon \Rightarrow x_n \geq x_{n_\epsilon} > \beta-\epsilon \Rightarrow \beta-\epsilon < x_n \leq \beta < \beta+\epsilon \Rightarrow$ $|x_n - \beta| < \epsilon, \forall n > n_\epsilon \Rightarrow \beta = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. □

6 Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы последовательностей

7 Критерий Коши сходимости последовательностей

Теорема 7.1. *Последовательность $\{\mathbf{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет предел $\Leftrightarrow$ она фундаментальна, то есть $\forall\epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\epsilon$ выполняется $|x_n - x_m| < \epsilon$.*

Доказательство. Туда: Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Rightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\epsilon\ |x_n - A| < \dfrac{\epsilon}{2} \Rightarrow$
$\forall n, m > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - x_m| = |(x_n - A) + (A - x_m)| \leq |x_n - A| + |x_n - A| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
Обратно: Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна, то есть $\forall\epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\epsilon \Rightarrow$ $|x_n - x_m| < \epsilon$.

1. Докажем, что $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена.
   Пусть $\epsilon = 1$ по уравнению выше $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < 1; m = n_1 + 1 \Rightarrow$ $\forall n > n_1; |x_n| = |(x_n) - x_{n_1+1} + x_{n_1+1}| \leq |x_n - x_{n_1+1}| + |x_{n_1+1}| < 1 + |x_{n_1+1}|$.
   $M = max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_1}|, 1 + |x_{n_1+1}|)$.

2. Есть предел: $\alpha_n = inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} = \inf\limits_{k\geq n} x_k;\ \ \beta_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} = \sup\limits_{k\geq n} x_k;\ \ \alpha_n \leq \alpha_{n+1}; \beta_n \leq \beta_{n+1}$.
   Получаем систему вложенных отрезков $[\alpha_n; \beta_n] \supset [\alpha_{n+1}; \beta n + 1]$. По теореме Коши-Кантора, $\exists A \in [\alpha_n; \beta_n], \forall n\ \alpha_n \leq A \leq \beta_n, \forall n$. Если $k \leq n$, то $x_k\ in\{x_n, x_{n+1}, ...\} \Rightarrow \alpha_n \leq$ $x_k \leq \beta_n \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n \leq A \leq \beta_n \\ \alpha_n \leq x_n \leq \beta_n \end{cases} \Rightarrow |A - x_n| \leq \beta_n - \alpha_n$
   По уравнению выше для $\forall\epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{3}$.
   Пусть $m = n_\epsilon + 1 \Rightarrow x_{n_\epsilon+1} - \frac{\epsilon}{3} < x_k < x_{n_\epsilon+1} + \frac{\epsilon}{3}, \forall k > n_\epsilon$ Тогда при $\forall n > n_\epsilon \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\alpha_n \geq x_{n_\epsilon+1} - \frac{\epsilon}{3} \\ \beta_n \leq x_{n_\epsilon+1} + \frac{\epsilon}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \beta_n - \alpha_n \leq \dfrac{2\epsilon}{3} < \epsilon \Rightarrow$ Итак, $\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon : \forall n > n_\epsilon \Rightarrow |A - x_n| \leq \beta_n - \alpha_n < \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

□

8 Предел функции. Эквивалентность определений Гейне и Коши. Свойства предела функции

8.1 Определения пределов функции

Определение (предел по Коши или язык эпсилон-дельта $(\epsilon - \delta)$)**.** Пусть a - предельная точка множества множества $\mathbf{X}$. Число A называется пределом функции $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ при $x \to a$ по множеству $\mathbf{X}$, если для $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x \in \mathbf{X}, 0 < |x - a| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$.

Определение (язык окрестностей)**.** $A = \lim\limits_{x\to a;\ x\in\mathbf{X}} f(x) \Leftrightarrow \forall \mathbf{U}_\epsilon(A), \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0 : f(\mathbf{X} \cap \overset{\circ}{\mathbf{U}}_{\delta_\epsilon}(a) \subset \mathbf{U}_\epsilon(A)$

Определение (предел по Гейне или язык последовательностей)**.** Пусть а - предельная точка $\mathbf{X}$ и $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$. Число A называется пределом функции f при $x \to a,$ по множеству $\mathbf{X}$, если для любой последовательсноти$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbf{X}; x_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N}$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} f = A$.

8.2 Эквивалентность определений Гейне и Коши

Теорема 8.1. *Определение предела по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Туда: Пусть $A = \lim\limits_{x\to a;\ x\in\mathbf{X}} f(x)$ по Коши $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x \in \mathbf{X}, 0 < |x - a| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$.
Возьмем $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbf{X}, x_n \neq a, \forall n; \lim\limits_{n\to\infty} = a \Rightarrow$ для числа $\delta_\epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - a| < \delta_\epsilon,$ но $x_n \neq a \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x_n) - A| < \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.
Обратно: Пусть $A = \lim\limits_{x\to a;\ x\in\mathbf{X}} f(x)$ по Гейне. Предположим, что определение по Коши не выполняется: $\lim\limits_{x\to a;\ x\in\mathbf{X}} \neq A\ \exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in \mathbf{X} : 0 < |x_\delta - a| < \delta : |f(x_\delta) - A| \geq \epsilon$.
Для $\delta = \frac{1}{n}\ \exists x_n = x_{\delta_n} \in \mathbf{X}, 0 < |x_\delta - a| < \delta_n = \frac{1}{n}, |f(x_n) - A| \geq \epsilon_0$ для некоторого $\epsilon_0 > 0$.
Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, x_n \neq a, \forall n,$ но $\lim n \to \infty f(x_n) \neq A \Rightarrow$ противоречие.
Итак, определение по Гейне не выполняется $\Rightarrow$ противоречие. □

8.3 Свойства пределов функции