Московский авиационный институт
Вычислительная математика и программирование

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I СЕМЕСТР

Лектор: *Юрий Иванович Битюков*

Содержание

1 Действительные числа и их свойства. Принцип Архимеда. Грани числовых множеств. Теорема о существовании точных граней

Аксиома (о непрерывности множества $\mathbb{R}$)**.** Пусть $\mathbf{X} \neq \varnothing, \mathbf{Y} \neq \varnothing$ - подмножества множества $\mathbb{R}$ и для $\forall x \in \mathbf{X}$ и $\forall y \in \mathbf{Y}$ выполняется $x \leq y$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y, \forall x \in \mathbf{X}, \forall y \in \mathbf{Y}$.

Определение. Пусть $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$. Множество $\mathbf{X}$ называется ограниченным сверху (снизу), если $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c$ $(x \geq c)$, $\forall x \in \mathbf{X}$.
Если множество ограничено и сверху, и снизу $\Rightarrow$ это ограниченное множество.
(картинка 1)

Определение. Пусть $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ и $\mathbf{X}$ ограничено сверху (снизу). Наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих сверху (снизу) множество $\mathbf{X}$, называется верхней (нижней) гранью множества $\mathbf{X}$.
Обозначается $\sup \mathbf{X}$ $(\inf \mathbf{X})$.
(картинка 2)

Теорема 1.1 (Вейерштрасс - о существовании верхней и нижней грани)**.** *Если* $\mathbf{X} \neq \varnothing$ *и ограничено сверху (снизу), то существует единственная верхняя (нижняя) грань.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Y} = \{y : y \in \mathbb{R}, y$ ограничивает сверху$\} \neq \varnothing$, так как $\mathbf{X}$ ограничено сверху. Тогда для $\forall x \in \mathbf{X}$ и $\forall y \in \mathbf{Y}$ (так как y ограничивает сверху $\mathbf{X}$) выполняется $x \leq y \Rightarrow$ по аксиоме непрерывности $\mathbf{R}$ $\exists \beta \in \mathbf{R} : x \leq \beta \leq y$.
Так как $x \leq \beta, \forall x \in \mathbf{X}$, то β ограничивает сверху $\mathbf{X}$.
Так как $\beta \leq y, \forall y \in \mathbf{Y}$, то β - наименьшее из чисел, ограничивающих сверху $\mathbf{X} \Rightarrow \beta = \sup \mathbf{X}$.
Доказательство единственности верхней грани: Пусть β и $\hat{\beta}$ - верхние грани $\mathbf{X}$.

$\square$