

Московский авиационный институт  
Вычислительная математика и программирование

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**  
**I СЕМЕСТР**

Лектор: *Юрий Иванович Битюков*

## Содержание

1	Действительные числа и их свойства. Принцип Архимеда. Грани числовых множеств. Теорема о существовании точных граней	2
2	Леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел: о вложенных отрезках, о конечном покрытии, о предельной точке	3
3	Мощность множества. Счетность множества рациональных чисел	4
3.1	Мощность множества . . . . .	4
3.2	Счетность множества рациональных чисел . . . . .	4
4	Предел последовательности. Общие свойства предела. Арифметические свойства сходящихся последовательностей. Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства	4
5	Критерий существования предела монотонной последовательности	5
6	Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы последовательностей	5
7	Критерий Коши сходимости последовательностей	5

# 1 Действительные числа и их свойства. Принцип Архимеда. Грани числовых множеств. Теорема о существовании точных граней

**Аксиома** (о непрерывности множества  $\mathbb{R}$ ). Пусть  $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$  - подмножества множества  $\mathbb{R}$  и для  $\forall x \in X$  и  $\forall y \in Y$  выполняется  $x \leq y$ . Тогда  $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$ .

**Определение.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}$ . Множество  $X$  называется ограниченным сверху (снизу), если  $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c$  ( $x \geq c$ ),  $\forall x \in X$ .

Если множество ограничено и сверху, и снизу  $\Rightarrow$  это ограниченное множество.

(картинка 1)

**Определение.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}$  и  $X$  ограничено сверху (снизу). Наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих сверху (снизу) множество  $X$ , называется верхней (нижней) гранью множества  $X$ .

Обозначается  $\sup X$  ( $\inf X$ ).

(картинка 2)

**Теорема 1.1** (Вейерштрасс - о существовании верхней и нижней грани). Если  $X \neq \emptyset$  и ограничено сверху (снизу), то существует единственная верхняя (нижняя) грань.

*Доказательство.* Пусть  $Y = \{y : y \in \mathbb{R}, y \text{ ограничивает сверху}\} \neq \emptyset$ , так как  $X$  ограничено сверху. Тогда для  $\forall x \in X$  и  $\forall y \in Y$  (так как  $y$  ограничивает сверху  $X$ ) выполняется  $x \leq y \Rightarrow$  по аксиоме непрерывности  $\mathbb{R} \exists \beta \in \mathbb{R} : x \leq \beta \leq y$ .

Так как  $x \leq \beta, \forall x \in X$ , то  $\beta$  ограничивает сверху  $X$ .

Так как  $\beta \leq y, \forall y \in Y$ , то  $\beta$  - наименьшее из чисел, ограничивающих сверху  $X \Rightarrow \beta = \sup X$ .

*Доказательство единственности верхней грани:* Пусть  $\beta$  и  $\hat{\beta}$  - верхние грани  $X$ .

1.  $\beta$  и  $\hat{\beta}$  ограничивают сверху;
2.  $\beta \leq \hat{\beta}$ ;
3.  $\hat{\beta} \leq \beta$ .

□

**Теорема 1.2** (Принцип Архимеда). Для любого действительного числа  $\beta$  существует натуральное число  $n : \beta \leq n$ .

*Доказательство.* Предположим, что не существует натурального числа  $n > \beta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq \beta \Rightarrow \mathbb{N}$  ограничено сверху  $\Rightarrow$  по теореме Вейерштрасса  $\exists \alpha = \sup \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \leq \beta$ ; так как  $\alpha = \sup \mathbb{N} \Rightarrow \exists n > \alpha - 1, n \in \mathbb{N}; \hat{n} + 1 > \alpha$ , но  $\hat{n} + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha$  не ограничивает сверху  $\Rightarrow$  противоречие. □

## 2 Леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел: о вложенных отрезках, о конечном покрытии, о предельной точке

**Теорема 2.1** (Коши-Кантор - принцип вложенных отрезков). Пусть дана последовательность отрезков  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \dots$  ( $\dots I_n \subset \dots \subset I_2 \subset I_1$ ). Тогда существует число  $c \in \mathbb{R} : c \in I_k, \forall k = 1, 2, 3, \dots$  ( $c \in \bigcap I_k$ ).

*Доказательство.* Пусть  $I_k = [a_k; b_k], k = 1, 2, \dots, \mathbf{X}$  – множество;  $\mathbf{X} = \{a_k : k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset, \mathbf{Y} = \{b_k : k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ . Тогда  $a_k \leq b_m, \forall k, m \in \mathbb{N}$ . Действительно, если  $\exists k, m \in \mathbb{N} : a_k > b_m \Rightarrow a_m \leq b_m < a_k \leq b_k \Rightarrow I_k = [a_k; b_k]$  и  $I_m = [a_m; b_m]$  не пересекаются. Но это невозможно, так как если  $m > k$ , то  $I_m \subset I_k$ ; если  $m < k$ , то  $I_m \supset I_k$ .

Итак, предположение неверно  $\Rightarrow a_k \leq b_m, \forall k, m \in \mathbb{N}$ .

Итак,  $\mathbf{X} = \{a_k\} \neq \emptyset, \mathbf{Y} = \{b_m\} \neq \emptyset$ .

$a_k \leq b_m, \forall k, m \Rightarrow$  по аксиоме непрерывности  $\exists c \in \mathbb{R} : a_k \leq c \leq b_m, \forall k, m \in \mathbb{N} \Rightarrow a_k \leq c \leq b_k \Rightarrow c \in I_k, \forall k$ .  $\square$

**Определение.** Семейство множеств  $\mathbf{X} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$  называется покрытием множества  $\mathbf{Y}$ , если  $\mathbf{Y} \subset \bigcup U_\alpha$ .

**Теорема 2.2** (Борель-Лебег). Из любого покрытия отрезка числовой прямой интервалами можно выделить конечное покрытие.

*Доказательство.* Пусть  $I = [a; b]$  - отрезок.  $\mathbf{X} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$  - покрытие  $I$ , то есть  $I \subset \bigcup U_\alpha$ .  $U_\alpha = (x_{1\alpha}; x_{2\alpha})$  - интервалы числовой прямой.

Обозначим множество  $\mathbf{M} = \{x : x \in [a; b] \text{ и } [a; x] \text{ покрывается конечным семейством интервалов из } \mathbf{X}\}$ .

1.  $\mathbf{M} \neq \emptyset$ , так как  $a \in \mathbf{M}$ , так как  $[a; b] \subset \bigcup U_\alpha \Rightarrow \exists \hat{\alpha} : a \in U_{\hat{\alpha}} \Rightarrow [a; a] \subset U_{\hat{\alpha}}$ .
2.  $\mathbf{M} \subset [a; b] \Rightarrow \mathbf{M}$  ограничено. Следовательно,  $\exists \beta = \sup \mathbf{M} \leq b$ .

Так как  $\beta \in [a; b] \Rightarrow \exists \alpha' : \beta \in U_{\alpha'} = (x'; x'')$ .

$x' < \beta \Rightarrow \sup \mathbf{M} \Rightarrow \exists \hat{x} \in \mathbf{M} : x' < \hat{x} \leq \beta \Rightarrow [a; x']$  покрывается конечным семейством интервалов:  $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_k}$

$[a; \hat{x}] \subset \bigcup U_\alpha \Rightarrow [a; b] \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_k} \cup U_{\alpha'} \Rightarrow \beta \in \mathbf{M} \Rightarrow$  если предположить, что  $\beta < b$ , то  $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_k}, U_{\alpha'}\}$  покрывает  $\forall [a; \hat{x}]$ , где  $\hat{x} \in (\beta; x'') \Rightarrow \hat{x} \in \mathbf{M}$  и  $\hat{x} > \beta$  - противоречие тому, что  $\beta = \sup \mathbf{M}$ .  $\square$

**Определение.** Любой интервал  $(a; b)$ , содержащий точку  $x_0$ , называется окрестностью этой точки и обозначается  $U(x_0) = (a; b)$ .

**Определение.** Точка  $x_0$  называется предельной точкой множества  $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ , если для  $\forall U(x_0), U_{x_0} \cap \mathbf{X}$  - бесконечное множество.

**Теорема 2.3** (Больцано-Вейерштрасс). Всякое бесконечное ограниченное непустое множество  $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$  имеет предельную точку.

*Доказательство.* Так как  $X$  - ограниченное множество, оно ограничено сверху и снизу, то есть  $\exists a, \exists b : a \leq x \leq b, \forall x \in X \Rightarrow X \subset [a; b]$ .

Предположим, что  $X$  не имеет предельных точек  $\Rightarrow \forall x \in [a; b]$  не является предельной точкой  $X \Rightarrow \exists U(x)$  - окрестность:  $U(x) \cap X$  - конечное множество  $\Rightarrow [a; b] \subset U(x), x \in [a; b] \Rightarrow$  по теореме Бореля-Лебега существует конечное покрытие  $\{U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)\} : X \subset [a; b] \cup U(x_i)$ , но  $U(x_i) \cap X$  - конечное множество  $\Rightarrow X$  - конечное, но, по условию,  $X$  - бесконечное  $\Rightarrow$  противоречие.  $\square$

### 3 Мощность множества. Счетность множества рациональных чисел

#### 3.1 Мощность множества

**Определение.** Множество  $X$  называется равномощным множеству  $Y (X \sim Y)$ , если существует взаимнооднозначное отображение  $f : X \rightarrow Y$ , так и однозначное отображение  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Введенное отношение  $X \sim Y$  является отношением эквивалентности.

**Определение.** Класс эквивалентности, которому принадлежит данное множество, называется мощностью этого множества. Если  $X \sim \mathbb{N}$ , то оно называется счётным.

#### 3.2 Счетность множества рациональных чисел

**Определение.** Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называются счётными.  $X \sim \mathbb{N} \Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \rightarrow X$  - взаимнооднозначное  $\Rightarrow \forall x \in X \exists n : f(n) = x$ . Обозначают  $x_n = f(n)$ .

**Теорема 3.1.** Множество  $[0; 1]$  не является счетным.

*Доказательство.* Множество ???  $\square$

### 4 Предел последовательности. Общие свойства предела. Арифметические свойства сходящихся последовательностей. Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства

**Определение.** Число  $A$  называется пределом числовой последовательности  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , если для  $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - A| < \epsilon$ .

## 5 Критерий существования предела монотонной последовательности

## 6 Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы последовательностей

## 7 Критерий Коши сходимости последовательностей

**Теорема 7.1.** Последовательность  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  имеет предел  $\Leftrightarrow$  она фундаментальна, то есть  $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\epsilon$  выполняется  $|x_n - x_m| < \epsilon$ .

*Доказательство. Туда:* Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\epsilon |x_n - A| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \forall n, m > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - x_m| = |(x_n - A) + (A - x_m)| \leq |x_n - A| + |x_m - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ .

*Обратно:* Пусть  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  фундаментальна, то есть  $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$ .

1. Докажем, что  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ограничена.

Пусть  $\epsilon = 1$  по уравнению выше  $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < 1; m = n_1 + 1 \Rightarrow \forall n > n_1; |x_n| = |(x_n) - x_{n_1+1} + x_{n_1+1}| \leq |x_n - x_{n_1+1}| + |x_{n_1+1}| < 1 + |x_{n_1+1}|$ .

$M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_1}|, 1 + |x_{n_1+1}|)$ .

2. Есть предел:  $\alpha_n = \inf_{k \geq n} \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = \inf_{k \geq n} x_k; \beta_n = \sup_{k \geq n} \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = \sup_{k \geq n} x_k; \alpha_n \leq \alpha_{n+1}; \beta_n \leq \beta_{n+1}$ .

Получаем систему вложенных отрезков  $[\alpha_n; \beta_n] \supset [\alpha_{n+1}; \beta_{n+1}]$ . По теореме Коши-Кантора,  $\exists A \in [\alpha_n; \beta_n], \forall n \alpha_n \leq A \leq \beta_n, \forall n$ . Если  $k \leq n$ , то  $x_k \in \{x_n, x_{n+1}, \dots\} \Rightarrow \alpha_n \leq$

$$x_k \leq \beta_n \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n \leq A \leq \beta_n \\ \alpha_n \leq x_n \leq \beta_n \end{cases} \Rightarrow |A - x_n| \leq \beta_n - \alpha_n$$

По уравнению выше для  $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{3}$ .

Пусть  $m = n_\epsilon + 1 \Rightarrow x_{n_\epsilon+1} - \frac{\epsilon}{3} < x_k < x_{n_\epsilon+1} + \frac{\epsilon}{3}, \forall k > n_\epsilon$  Тогда при  $\forall n > n_\epsilon \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &\geq x_{n_\epsilon+1} - \frac{\epsilon}{3} \\ \beta_n &\leq x_{n_\epsilon+1} + \frac{\epsilon}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta_n - \alpha_n \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon \Rightarrow \text{Итак, } \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon : \forall n > n_\epsilon \Rightarrow |A - x_n| \leq \beta_n - \alpha_n < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$

□

## 8 Предел функции. Эквивалентность определений Гейне и Коши. Свойства предела функции