

Московский авиационный институт
Вычислительная математика и программирование

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
I СЕМЕСТР

Лектор: *Юрий Иванович Битюков*

Содержание

1	Действительные числа и их свойства. Принцип Архимеда. Грани числовых множеств. Теорема о существовании точных граней	2
2	Леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел: о вложенных отрезках, о конечном покрытии, о предельной точке	3
3	Мощность множества. Счетность множества рациональных чисел	4
3.1	Мощность множества	4
3.2	Счетность множества рациональных чисел	4
4	Предел последовательности. Общие свойства предела. Арифметические свойства сходящихся последовательностей. Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства	4
5	Критерий существования предела монотонной последовательности	5
6	Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы последовательностей	5
7	Критерий Коши сходимости последовательностей	5
8	Предел функции. Эквивалентность определений Гейне и Коши. Свойства предела функции	6
8.1	Определения пределов функции	6
8.2	Эквивалентность определений Гейне и Коши	6
8.3	Свойства пределов функции	6

1 Действительные числа и их свойства. Принцип Архимеда. Грани числовых множеств. Теорема о существовании точных граней

Аксиома (о непрерывности множества \mathbb{R}). Пусть $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ - подмножества множества \mathbb{R} и для $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполняется $x \leq y$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y, \forall x \in X, \forall y \in Y$.

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Множество X называется ограниченным сверху (снизу), если $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c$ ($x \geq c$), $\forall x \in X$.

Если множество ограничено и сверху, и снизу \Rightarrow это ограниченное множество.
(картинка 1)

Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и X ограничено сверху (снизу). Наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих сверху (снизу) множество X , называется верхней (нижней) гранью множества X .

Обозначается $\sup X$ ($\inf X$).

(картинка 2)

Теорема 1.1 (Вейерштрасс - о существовании верхней и нижней грани). Если $X \neq \emptyset$ и ограничено сверху (снизу), то существует единственная верхняя (нижняя) грань.

Доказательство. Пусть $Y = \{y : y \in \mathbb{R}, y \text{ ограничивает сверху}\} \neq \emptyset$, так как X ограничено сверху. Тогда для $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ (так как y ограничивает сверху X) выполняется $x \leq y \Rightarrow$ по аксиоме непрерывности $\mathbb{R} \exists \beta \in \mathbb{R} : x \leq \beta \leq y$.

Так как $x \leq \beta, \forall x \in X$, то β ограничивает сверху X .

Так как $\beta \leq y, \forall y \in Y$, то β - наименьшее из чисел, ограничивающих сверху $X \Rightarrow \beta = \sup X$.

Доказательство единственности верхней грани: Пусть β и $\hat{\beta}$ - верхние грани X .

1. β и $\hat{\beta}$ ограничивают сверху;
2. $\beta \leq \hat{\beta}$;
3. $\hat{\beta} \leq \beta$.

□

Теорема 1.2 (Принцип Архимеда). Для любого действительного числа β существует натуральное число $n : \beta \leq n$.

Доказательство. Предположим, что не существует натурального числа $n > \beta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq \beta \Rightarrow \mathbb{N}$ ограничено сверху \Rightarrow по теореме Вейерштрасса $\exists \alpha = \sup \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \leq \beta$; так как $\alpha = \sup \mathbb{N} \Rightarrow \exists n > \alpha - 1, n \in \mathbb{N}; \hat{n} + 1 > \alpha$, но $\hat{n} + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha$ не ограничивает сверху \Rightarrow противоречие. □

2 Леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел: о вложенных отрезках, о конечном покрытии, о предельной точке

Теорема 2.1 (Коши-Кантор - принцип вложенных отрезков). Пусть дана последовательность отрезков $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \dots$ ($\dots I_n \subset \dots \subset I_2 \subset I_1$). Тогда существует число $c \in \mathbb{R} : c \in I_k, \forall k = 1, 2, 3, \dots$ ($c \in \bigcap I_k$).

Доказательство. Пусть $I_k = [a_k; b_k], k = 1, 2, \dots, \mathbf{X}$ — множество; $\mathbf{X} = \{a_k : k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset, \mathbf{Y} = \{b_k : k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Тогда $a_k \leq b_m, \forall k, m \in \mathbb{N}$. Действительно, если $\exists k, m \in \mathbb{N} : a_k > b_m \Rightarrow a_m \leq b_m < a_k \leq b_k \Rightarrow I_k = [a_k; b_k]$ и $I_m = [a_m; b_m]$ не пересекаются. Но это невозможно, так как если $m > k$, то $I_m \subset I_k$; если $m < k$, то $I_m \supset I_k$.

Итак, предположение неверно $\Rightarrow a_k \leq b_m, \forall k, m \in \mathbb{N}$.

Итак, $\mathbf{X} = \{a_k\} \neq \emptyset, \mathbf{Y} = \{b_m\} \neq \emptyset$.

$a_k \leq b_m, \forall k, m \Rightarrow$ по аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R} : a_k \leq c \leq b_m, \forall k, m \in \mathbb{N} \Rightarrow a_k \leq c \leq b_k \Rightarrow c \in I_k, \forall k$. \square

Определение. Семейство множеств $\mathbf{X} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ называется покрытием множества \mathbf{Y} , если $\mathbf{Y} \subset \bigcup U_\alpha$.

Теорема 2.2 (Борель-Лебег). Из любого покрытия отрезка числовой прямой интервалами можно выделить конечное покрытие.

Доказательство. Пусть $I = [a; b]$ - отрезок. $\mathbf{X} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ - покрытие I , то есть $I \subset \bigcup U_\alpha$. $U_\alpha = (x_{1\alpha}; x_{2\alpha})$ - интервалы числовой прямой.

Обозначим множество $\mathbf{M} = \{x : x \in [a; b] \text{ и } [a; x] \text{ покрывается конечным семейством интервалов из } \mathbf{X}\}$.

1. $\mathbf{M} \neq \emptyset$, так как $a \in \mathbf{M}$, так как $[a; b] \subset \bigcup U_\alpha \Rightarrow \exists \hat{\alpha} : a \in U_{\hat{\alpha}} \Rightarrow [a; a] \subset U_{\hat{\alpha}}$.
2. $\mathbf{M} \subset [a; b] \Rightarrow \mathbf{M}$ ограничено. Следовательно, $\exists \beta = \sup \mathbf{M} \leq b$.

Так как $\beta \in [a; b] \Rightarrow \exists \alpha' : \beta \in U_{\alpha'} = (x'; x'')$.

$x' < \beta \Rightarrow \sup \mathbf{M} \Rightarrow \exists \hat{x} \in \mathbf{M} : x' < \hat{x} \leq \beta \Rightarrow [a; x']$ покрывается конечным семейством интервалов: $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_k}$

$[a; \hat{x}] \subset \bigcup U_\alpha \Rightarrow [a; b] \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_k} \cup U_{\alpha'} \Rightarrow \beta \in \mathbf{M} \Rightarrow$ если предположить, что $\beta < b$, то $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_k}, U_{\alpha'}\}$ покрывает $\forall [a; \hat{x}]$, где $\hat{x} \in (\beta; x'') \Rightarrow \hat{x} \in \mathbf{M}$ и $\hat{x} > \beta$ - противоречие тому, что $\beta = \sup \mathbf{M}$. \square

Определение. Любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0 , называется окрестностью этой точки и обозначается $U(x_0) = (a; b)$.

Определение. Точка x_0 называется предельной точкой множества $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, если для $\forall U(x_0), U_{x_0} \cap \mathbf{X}$ - бесконечное множество.

Теорема 2.3 (Больцано-Вейерштрасс). Всякое бесконечное ограниченное непустое множество $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ имеет предельную точку.

Доказательство. Так как X - ограниченное множество, оно ограничено сверху и снизу, то есть $\exists a, \exists b : a \leq x \leq b, \forall x \in X \Rightarrow X \subset [a; b]$.

Предположим, что X не имеет предельных точек $\Rightarrow \forall x \in [a; b]$ не является предельной точкой $X \Rightarrow \exists U(x)$ - окрестность: $U(x) \cap X$ - конечное множество $\Rightarrow [a; b] \subset U(x), x \in [a; b] \Rightarrow$ по теореме Бореля-Лебега существует конечное покрытие $\{U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)\} : X \subset [a; b] \cup U(x_i)$, но $U(x_i) \cap X$ - конечное множество $\Rightarrow X$ - конечное, но, по условию, X - бесконечное \Rightarrow противоречие. \square

3 Мощность множества. Счетность множества рациональных чисел

3.1 Мощность множества

Определение. Множество X называется равномощным множеству $Y (X \sim Y)$, если существует взаимнооднозначное отображение $f : X \rightarrow Y$, так и однозначное отображение $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Введенное отношение $X \sim Y$ является отношением эквивалентности.

Определение. Класс эквивалентности, которому принадлежит данное множество, называется мощностью этого множества. Если $X \sim \mathbb{N}$, то оно называется счётным.

3.2 Счетность множества рациональных чисел

Определение. Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называются счётными. $X \sim \mathbb{N} \Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \rightarrow X$ - взаимнооднозначное $\Rightarrow \forall x \in X \exists n : f(n) = x$. Обозначают $x_n = f(n)$.

Теорема 3.1. Множество $[0; 1]$ не является счетным.

Доказательство. Множество ??? \square

4 Предел последовательности. Общие свойства предела. Арифметические свойства сходящихся последовательностей. Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства

Определение. Число A называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, если для $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - A| < \epsilon$.

5 Критерий существования предела монотонной последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется неубывающей (невозрастающей, убывающей, возрастающей), если $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$, $x_n > x_{n+1}$, $x_n < x_{n+1}$).

Теорема 5.1. • Если последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ неубывающая и ограничена сверху, то она имеет предел.

- Если последовательность невозрастающая и ограничена снизу, то она имеет предел.

Доказательство. Так как $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена сверху \Rightarrow по теореме Вейерштрасса $\exists \beta = \sup\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Докажем, что $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Возьмем $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow$ по определению $\sup \Rightarrow \exists n_\epsilon : x_{n_\epsilon} > \beta - \epsilon$.

Так как $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - неубывающая $\Rightarrow \forall n > n_\epsilon \Rightarrow x_n \geq x_{n_\epsilon} > \beta - \epsilon \Rightarrow \beta - \epsilon < x_n \leq \beta < \beta + \epsilon \Rightarrow |x_n - \beta| < \epsilon, \forall n > n_\epsilon \Rightarrow \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. \square

6 Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы последовательностей

7 Критерий Коши сходимости последовательностей

Теорема 7.1. Последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет предел \Leftrightarrow она фундаментальна, то есть $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\epsilon$ выполняется $|x_n - x_m| < \epsilon$.

Доказательство. Туда: Пусть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\epsilon |x_n - A| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \forall n, m > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - x_m| = |(x_n - A) + (A - x_m)| \leq |x_n - A| + |x_m - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Обратно: Пусть $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ фундаментальна, то есть $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$.

1. Докажем, что $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена.

Пусть $\epsilon = 1$ по уравнению выше $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < 1; m = n_1 + 1 \Rightarrow \forall n > n_1; |x_n| = |(x_n) - x_{n_1+1} + x_{n_1+1}| \leq |x_n - x_{n_1+1}| + |x_{n_1+1}| < 1 + |x_{n_1+1}|$.
 $M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_1}|, 1 + |x_{n_1+1}|)$.

2. Есть предел: $\alpha_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = \inf_{k \geq n} x_k; \beta_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = \sup_{k \geq n} x_k; \alpha_n \leq \alpha_{n+1}; \beta_n \leq \beta_{n+1}$.

Получаем систему вложенных отрезков $[\alpha_n; \beta_n] \supset [\alpha_{n+1}; \beta_{n+1}]$. По теореме Коши-Кантора, $\exists A \in [\alpha_n; \beta_n], \forall n \alpha_n \leq A \leq \beta_n, \forall n$. Если $k \leq n$, то $x_k \in \{x_n, x_{n+1}, \dots\} \Rightarrow \alpha_n \leq$

$$x_k \leq \beta_n \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n \leq A \leq \beta_n \\ \alpha_n \leq x_n \leq \beta_n \end{cases} \Rightarrow |A - x_n| \leq \beta_n - \alpha_n$$

По уравнению выше для $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{3}$.

Пусть $m = n_\epsilon + 1 \Rightarrow x_{n_\epsilon+1} - \frac{\epsilon}{3} < x_k < x_{n_\epsilon+1} + \frac{\epsilon}{3}, \forall k > n_\epsilon$ Тогда при $\forall n > n_\epsilon \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &\geq x_{n_\epsilon+1} - \frac{\epsilon}{3} \\ \beta_n &\leq x_{n_\epsilon+1} + \frac{\epsilon}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta_n - \alpha_n \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon \Rightarrow \text{Итак, } \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon : \forall n > n_\epsilon \Rightarrow |A - x_n| \leq \epsilon$$

$$\beta_n - \alpha_n < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$

□

8 Предел функции. Эквивалентность определений Гейне и Коши. Свойства предела функции

8.1 Определения пределов функции

Определение (предел по Коши или язык эпсилон-дельта ($\epsilon - \delta$)). Пусть a - предельная точка множества \mathbf{X} . Число A называется пределом функции $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ при $x \rightarrow a$ по множеству \mathbf{X} , если для $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x \in \mathbf{X}, 0 < |x - a| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$.

Определение (язык окрестностей). $A = \lim_{x \rightarrow a; x \in \mathbf{X}} f(x) \Leftrightarrow \forall U_\epsilon(A), \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : f(\mathbf{X} \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_\epsilon}(a)) \subset U_\epsilon(A)$

Определение (предел по Гейне или язык последовательностей). Пусть a - предельная точка \mathbf{X} и $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Число A называется пределом функции f при $x \rightarrow a$, по множеству \mathbf{X} , если для любой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbf{X}; x_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N}$ выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} f = A$.

8.2 Эквивалентность определений Гейне и Коши

Теорема 8.1. *Определение предела по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Туда: Пусть $A = \lim_{x \rightarrow a; x \in \mathbf{X}} f(x)$ по Коши $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x \in \mathbf{X}, 0 < |x - a| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$.

Возьмем $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbf{X}, x_n \neq a, \forall n; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow$ для числа $\delta_\epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\epsilon \Rightarrow |x_n - a| < \delta_\epsilon$, но $x_n \neq a \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x_n) - A| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Обратно: Пусть $A = \lim_{x \rightarrow a; x \in \mathbf{X}} f(x)$ по Гейне. Предположим, что определение по Коши не выполняется: $\lim_{x \rightarrow a; x \in \mathbf{X}} f(x) \neq A \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in \mathbf{X} : 0 < |x_\delta - a| < \delta : |f(x_\delta) - A| \geq \epsilon$.

Для $\delta = \frac{1}{n} \exists x_n = x_{\delta_n} \in \mathbf{X}, 0 < |x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}, |f(x_n) - A| \geq \epsilon_0$ для некоторого $\epsilon_0 > 0$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \neq a, \forall n$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A \Rightarrow$ противоречие.

Итак, определение по Гейне не выполняется \Rightarrow противоречие. □

8.3 Свойства пределов функции