# Динамика угла поворота частицы

> Выполнил: Литти Тимофей

## 1. Обезразмеривание уравнения

Нам дано исходное уравнение (1):

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega - \omega_c \sin\beta$$

Согласно заданию, введем безразмерное время $\tau = t\omega_c$.

Тогда производная по времени преобразуется следующим образом:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \omega_c \frac{d\beta}{d\tau}$$

Подставим это в уравнение (1):

$$\omega_c \frac{d\beta}{d\tau} = \omega - \omega_c \sin\beta$$

Разделим обе части на $\omega_c$ и введем параметр $\varepsilon = \frac{\omega}{\omega_c}$:

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \varepsilon - \sin\beta$$

Это и есть искомое уравнение в безразмерном виде. Угол частицы $\theta$ в безразмерном времени находится из соотношения $\beta = \varepsilon\tau - \theta$, откуда:

$$\theta(\tau) = \varepsilon\tau - \beta(\tau)$$

---

## 2. Реализация на Python (Метод Рунге-Кутты 4-го порядка)

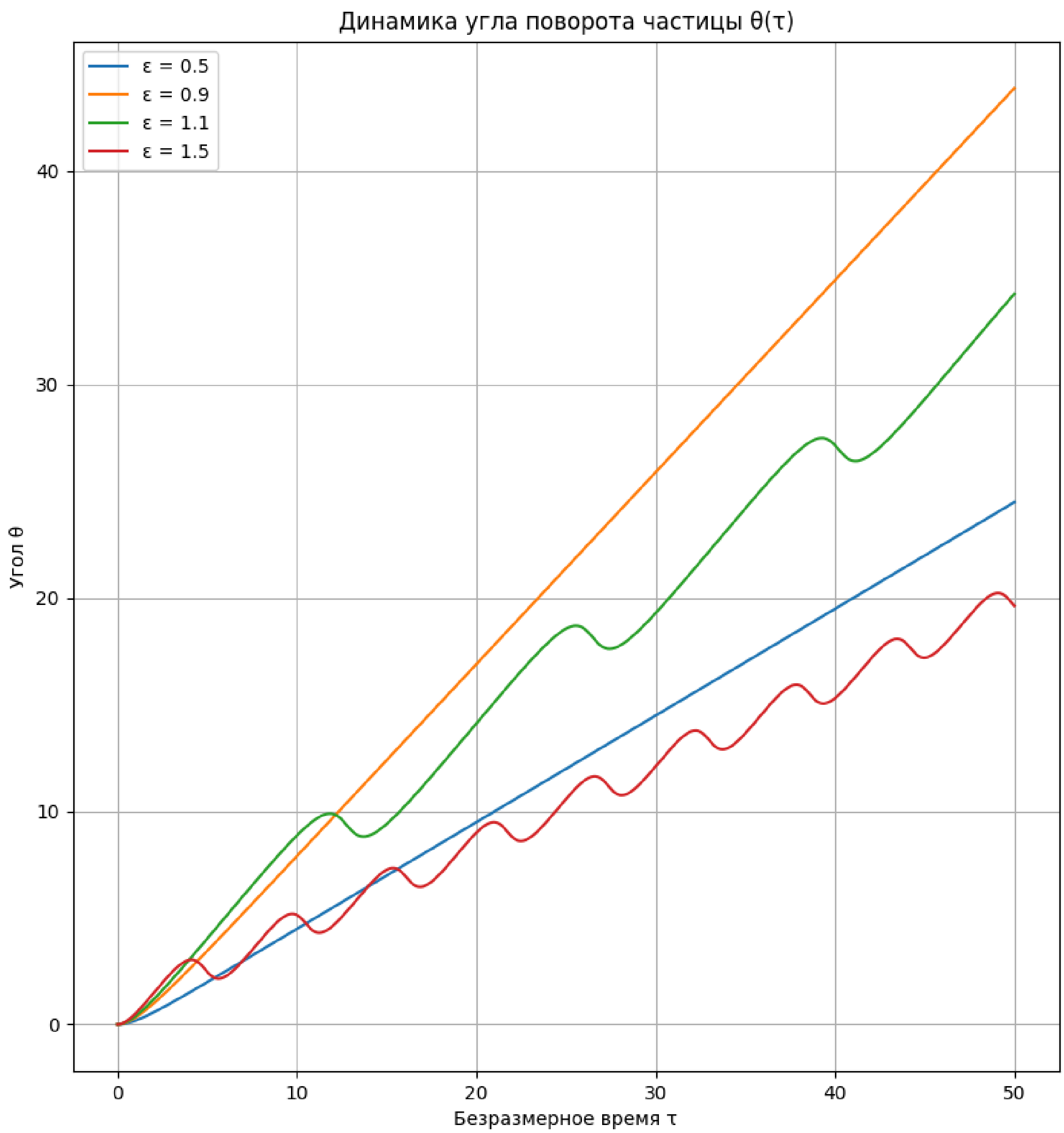
Для решения уравнения $\frac{d\beta}{d\tau} = f(\tau, \beta)$ мы будем использовать классический метод Рунге-Кутты (RK4).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def rk4_step(f, beta, tau, h, eps):
    k1 = h * f(tau, beta, eps)
    k2 = h * f(tau + h/2, beta + k1/2, eps)
```

```python
    k3 = h * f(tau + h/2, beta + k2/2, eps)
    k4 = h * f(tau + h, beta + k3, eps)
    return beta + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6

def model_db_dtau(tau, beta, eps):
    return eps - np.sin(beta)

def solve_dynamics(eps, tau_max=50, h=0.01, beta0=0):
    steps = int(tau_max / h)
    tau_vals = np.linspace(0, tau_max, steps)
    beta_vals = np.zeros(steps)
    beta_vals[0] = beta0

    for i in range(1, steps):
        beta_vals[i] = rk4_step(model_db_dtau, beta_vals[i-1], tau_vals[i-
1], h, eps)
    theta_vals = eps * tau_vals - beta_vals
    return tau_vals, theta_vals, beta_vals

# Визуализация
eps_values = [0.5, 0.9, 1.1, 1.5]
plt.figure(figsize=(12, 6))

for eps in eps_values:
    tau, theta, _ = solve_dynamics(eps)
    plt.plot(tau, theta, label=f'ε = {eps}')

plt.title("Динамика угла поворота частицы θ(τ)")
plt.xlabel("Безразмерное время τ")
plt.ylabel("Угол θ")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

---

## График




# 3. Анализ результатов

## Сравнение режимов $\varepsilon < 1$ и $\varepsilon > 1$

- **Синхронный режим ($\varepsilon < 1$):** В этом случае $\omega < \omega_c$. Магнитное поле вращается достаточно медленно, чтобы частица успевала за ним. После переходного процесса производная $\frac{d\beta}{d\tau}$ становится равной нулю, и угол отставания частицы от поля $\beta$ становится постоянным: $\sin\beta = \varepsilon$. График $\theta(\tau)$ представляет собой прямую линию, параллельную графику вращения поля.

- **Асинхронный режим ($\varepsilon > 1$):** Здесь $\omega > \omega_c$. Поле вращается слишком быстро, и вязкое трение не позволяет частице вращаться синхронно. Уравнение не имеет стационарного решения. Частица совершает сложное движение: она пытается следовать за полем, но периодически "проскальзывает". На графике $\theta(\tau)$ видны характерные осцилляции (неравномерная скорость вращения).

## Влияние начальных условий

При $\varepsilon < 1$ система всегда стремится к стационарному значению $\beta_{st} = \arcsin(\varepsilon)$. Время установления этого режима зависит от того, насколько далеко начальное значение $\beta(0)$ находится от $\beta_{st}$:

- Если $\beta(0)$ близко к стационарному значению, выход на плато происходит быстро.
- Если $\beta(0)$ находится вблизи неустойчивой точки равновесия ($\pi - \beta_{st}$), системе требуется значительно больше времени, чтобы "скатиться" к устойчивому состоянию.