Численное решение задачи двухфазной фильтрации

Самигуллин Линар

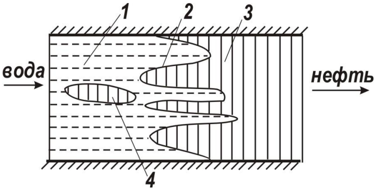
МФТИ, Роснефть

28 апреля 2024 г.

Содержание

Постановка задачи

В насыщенную нефтью пористую среду закачивают воду.
Необходимо рассчитать поле водонасыщенности в момент времени t.



Допущения:

- Пористая среда и жидкости несжимаемы
- Жидкости несмешивающиеся
- Пренебрегаем капиллярным давлением
- Рассматриваем одномерный случай без гравитационных сил

Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (r_\alpha \vec{v}_\alpha) = 0,$$

В нашем случае для воды: $r_1 = \rho_1 S \phi$,
для нефти: $r_2 = \rho_2 (1 - S)\phi$, где S - водонасыщенность.
Подставляя, получим 2 уравнения:

$$\frac{\partial(\rho_1 S \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 S \phi \vec{v}_1) = 0$$

$$\frac{\partial\left(\rho_2 (1 - S)\phi\right)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 (1 - S)\phi \vec{v}_2) = 0$$

Уравнение неразрывности

Заметим, что $\vec{W}_\alpha = S_\alpha \phi \vec{v}_\alpha$, - вектор скорости фильтрации жидкости α, тогда:

$$\frac{\partial(\rho_1 S \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_1 \vec{W}_1\right) = 0,$$

Так как пористая среда и жидкости несжимаемы, тогда:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{W}_1 = 0,$$

Уравнение неразрывности

Просуммировав уравнения для нефти и воды, получим:

$$\nabla \cdot \left(\vec{W}_1 + \vec{W}_2 \right) = 0$$

В одномерном плоскопараллельном случае:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial W_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(W_1 + W_2 \right) = 0$$

Уравнение движения

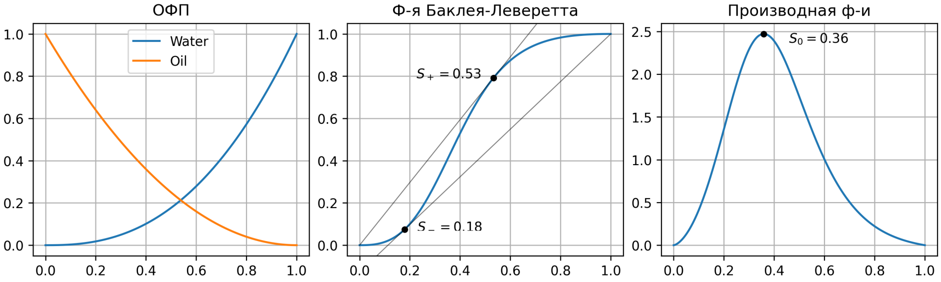
Обобщенный закон Дарси, пренебрегая капиллярным давлением:

$$\vec{W}_\alpha = -k\frac{f_\alpha(S_\alpha)}{\mu_\alpha}\nabla P$$

В одномерном случае:

$$W_\alpha = -k\frac{f_\alpha(S_\alpha)}{\mu_\alpha}\frac{\partial P}{\partial x}$$

Относительные фазовые проницаемости



ОФП по Corey:

$$f_1(S) = S^n$$
$$f_2(S) = (1 - S)^m$$

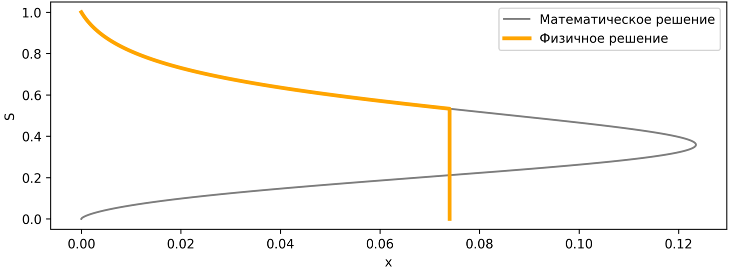
Функция Баклея-Леверетта:

$$b(S) = \frac{f_1(S)}{f_1(S) + \frac{\mu_1}{\mu_2} f_2(S)}$$

Точное решение

Характеристическая скорость

$$U(S) = \frac{W}{\phi}\frac{db(S)}{dS}$$



Обзор методов решения

- Численное решение гиперболического уравнения относительно S, с граничным условием $W(t)$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{W}{\phi}\frac{\partial b(S)}{\partial x} = 0$$

- Численное решение системы уравнений относительно S и P, с граничным условием $P(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{1}{\phi}\dfrac{\partial W_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial P}{\partial x}\left(\dfrac{f_1(S)}{\mu_1} + \dfrac{f_2(S)}{\mu_2}\right)\right] = 0 \end{cases}$$

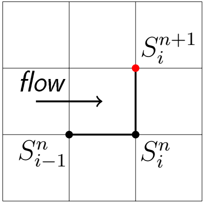
Разностная противопоточная схема

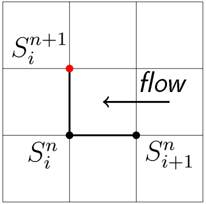
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{W}{\phi}\frac{\partial b(S)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\tau} + \frac{W}{\phi}\frac{b(S_i^n) - b(S_{i-1}^n)}{h} = 0, \quad W > 0$$

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\tau} + \frac{W}{\phi}\frac{b(S_{i+1}^n) - b(S_i^n)}{h} = 0, \quad W < 0$$

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{W\tau}{\phi h}\left(b(S_i^n) - b(S_{i-1}^n)\right)$$





Результат **upwind** схемы

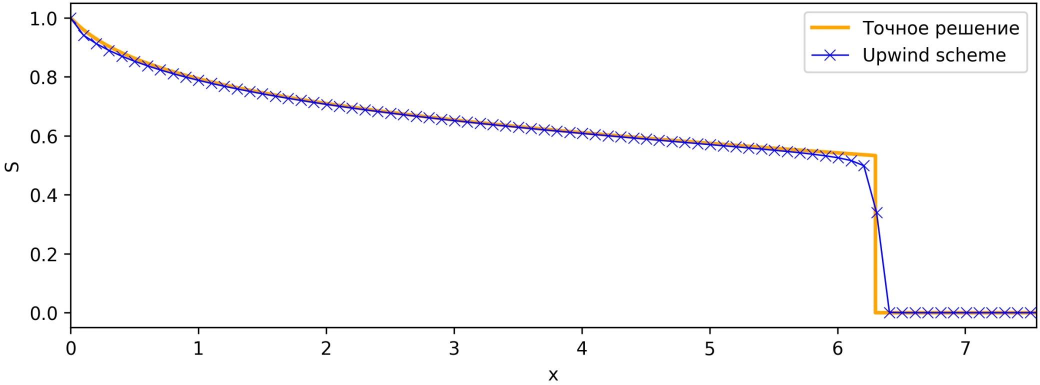


Рис. 1: Поле водонасыщенности по противопоточной схеме

Метод IMPES

Алгоритм **IM**plicit**P**ressure**E**xplicit**S**aturation:

1. Находим **неявно** поле P^n по S^n
2. По найденному полю P^n находим **явно** S^{n+1}

Уравнение для давления

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{f_1(S)}{\mu_1}+\frac{f_2(S)}{\mu_2}\right)\right]=0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\left(\frac{f_1(S)}{\mu_1}+\frac{f_2(S)}{\mu_2}\right)+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_1(S)}{\mu_1}+\frac{f_2(S)}{\mu_2}\right)=0$$

Пусть $\alpha=\left(\frac{f_1(S)}{\mu_1}+\frac{f_2(S)}{\mu_2}\right)$, тогда:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\alpha+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x}=0$$

Дискретизация

На n-м слое:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}}{h^2} \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_i - P_{i-1}}{h}$$

$$\alpha_i = \frac{f_1(S_i)}{\mu_1} + \frac{f_2(S_i)}{\mu_2} \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{h}\left(\alpha_i - \alpha_{i-1}\right)$$

Таким образом получим:

$$\left(P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}\right)\alpha_i + \left(P_i - P_{i-1}\right)\left(\alpha_i - \alpha_{i-1}\right) = 0$$

$$P_{i-1}\alpha_{i-1} - P_i\left(\alpha_i + \alpha_{i-1}\right) + P_{i+1}\alpha_i = 0$$

СЛАУ с трехдиагональной матрицей:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} -(\alpha_1+\alpha_0) & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & -(\alpha_2+\alpha_1) & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -(\alpha_3+\alpha_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}) \end{bmatrix},$$

n - кол-во координатных узлов.

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -P_0\alpha_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -P_{n+1}\alpha_n \end{bmatrix} \qquad A\cdot P = B$$

Уравнение для водонасыщенности

Для нахождения скоростей применим противопоточную схему, считая $W > 0$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{\phi}\frac{\partial W_1}{\partial x} = 0$$

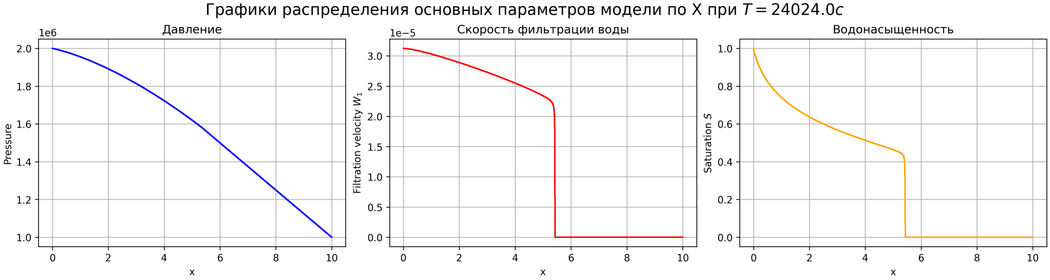
$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\tau} \qquad \frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{(W_1)^n_{i+1/2} - (W_1)^n_{i-1/2}}{h}$$

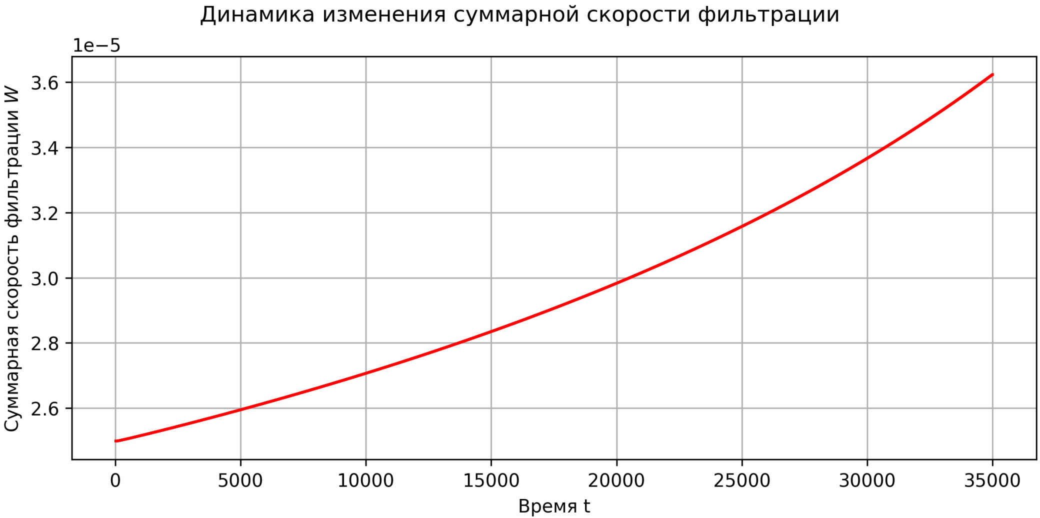
$$(W_1)^n_{i+1/2} = -k\frac{f_1(S_i^n)}{\mu_1}\frac{P^n_{i+1} - P^n_i}{h}$$

$$(W_1)^n_{i-1/2} = -k\frac{f_1(S_{i-1}^n)}{\mu_1}\frac{P^n_i - P^n_{i-1}}{h}$$

Тогда поле насыщенности можно получить по явной схеме:

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{\tau}{\phi h}\left((W_1)^n_{i+1/2} - (W_1)^n_{i-1/2}\right)$$




Динамика изменения суммарной скорости фильтрации
1e−5
3.6
3.4
3.2
3.0
2.8
2.6
Суммарная скорость фильтрации W
0
5000
10000
15000
20000
25000
30000
35000
Время t

Сравнение результатов

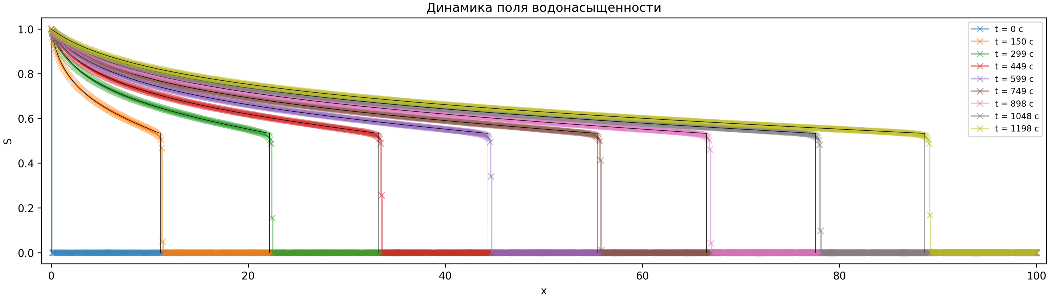


Рис. 2: Поле водонасыщенности в разные моменты времени при $W = \mathrm{const}$

Сравнение результатов

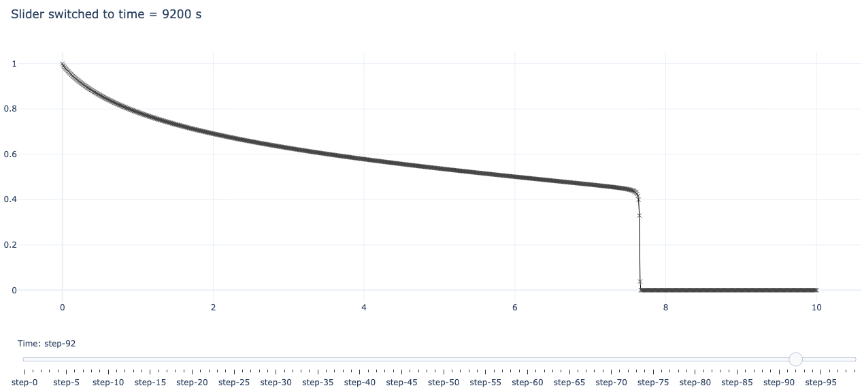


Рис. 3: Поле водонасыщенности при $P_{bottom} = \text{const}$

Выводы

1. Решена численно задача двухфазной фильтрации Баклея-Леверетта в одномерной постановке с граничными условиями 1-го и 2-го рода,
2. Разработана база для дальнейшего моделирования переноса кислоты и кислотного растворения пористой среды.