Стохастический поиск ограничений Байесовских SVAR-моделей

Арефьев Николай Геннадьевич
Хабибуллин Рамис Арсланович

3 августа 2016 г.

1 Работа с распределениями

Для анализа BSVAR-моделей удобно работать с одной из следующих параметризаций:

$$\mathbf{Y}\mathbf{\Psi} - \mathbf{Z}\mathbf{\Xi} = \boldsymbol{\xi}, \text{ где } \mathbb{E}\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\xi} = \mathbf{I}_n \tag{1}$$

$$\mathbf{YK} - \mathbf{ZH} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}, \text{ где } \mathbb{E}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}_n \ \ \operatorname{diag}(\mathbf{K}) = 1; \tag{2}$$

$$\mathbf{YA} - \mathbf{ZB} = \mathbf{UD}^{-\frac{1}{2}}, \text{ где } \mathbb{E}\mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{I}_n, \text{ а } |\det(\mathbf{A})| = 1 \tag{3}$$

1.1 Параметризация 3

В рамках параметризации 3 необходимо подобрать диагональные элементы матрицы $\mathbf{A}$ так, чтобы $|\det(\mathbf{A})| = 1$. Таким образом, расчитывая определитель разложением по j-столбцу, каждый диагональный элемент a_{jj} может быть выражен в виде линейной функции от недиагональных элементов j-столбца:

$$|\det(\mathbf{A})| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{jj}\left|\mathbf{A}_{(-j,-j)}\right| + \sum_{i\neq j} a_{ij}\left|\mathbf{A}_{(-i,-j)}\right| = 1 \tag{4}$$

Что даёт следующее выражение:

$$a_{jj} = \frac{1}{\left|\mathbf{A}_{(-j,-j)}\right|} - \frac{1}{\left|\mathbf{A}_{(-j,-j)}\right|}\sum_{i\neq j}(-1)^{i+j} a_{ij}\left|\mathbf{A}_{(-i,-j)}\right| = \theta - \boldsymbol{\rho}'\tilde{\mathbf{a}}_j \tag{5}$$

где

$$\theta = \frac{1}{\left|\mathbf{A}_{(-j,-j)}\right|} \qquad \boldsymbol{\rho} = \theta\begin{bmatrix} (-1)^{1+j}\left|\mathbf{A}_{(-1,-j)}\right| \\ (-1)^{2+j}\left|\mathbf{A}_{(-2,-j)}\right| \\ \dots \\ (-1)^{2j-1}\left|\mathbf{A}_{(-(j-1),-j)}\right| \\ (-1)^{2j+1}\left|\mathbf{A}_{(-(j+1),-j)}\right| \\ \dots \\ (-1)^{n+j}\left|\mathbf{A}_{(-n,-j)}\right| \end{bmatrix} \tag{6}$$

1.1.1 Распределение $\tilde{\mathbf{a}}_j|\{\tilde{\mathbf{a}}_s\}_{s\neq j},\mathbf{B},\mathbf{D};\mathbf{X}$

$$\begin{aligned}&p(\tilde{\mathbf{a}}_j|\{\tilde{\mathbf{a}}_s\}_{s\neq j},\mathbf{B},\mathbf{D};\mathbf{X})\propto p(\tilde{\mathbf{a}}_j|\{\tilde{\mathbf{a}}_s\}_{s\neq j},\mathbf{B},\mathbf{D})p(\mathbf{Y}|\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{Z})\propto\\&\propto\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}d_j(\tilde{\mathbf{a}}_j-\underline{\mathbf{a}}_j)'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}(\tilde{\mathbf{a}}_j-\underline{\mathbf{a}}_j)\right\}\right]\left[\left|\det(\mathbf{D})^T\right|\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((\mathbf{YA}-\mathbf{ZB})\mathbf{D}(\mathbf{YA}-\mathbf{ZB})'\right)\right\}\right]\end{aligned}\quad(7)$$

Рассмотрим след под экспонентой функции правдоподобия:

$$\operatorname{tr}\left((\mathbf{YA}-\mathbf{ZB})\mathbf{D}(\mathbf{YA}-\mathbf{ZB})'\right)=\sum_{j=1}^{n}d_j\left(\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j-2\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j+\mathbf{b}_j'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j\right)\quad(8)$$

Теперь можно получить условную функцию распределения $\tilde{\mathbf{a}}_j|\{\tilde{\mathbf{a}}_s\}_{s\neq j}$, рассматривая данную функцию распределения как функцию от вектора $\tilde{\mathbf{a}}_j$.

При этом вектор $\mathbf{a}_j$ может быть разбит на диагональный элемент a_{jj} и вектор недиагональных элементов $\tilde{\mathbf{a}}_j$. Таким образом, первый член выражения (8) может быть выражен следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}\mathbf{a}_j=\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1&\mathbf{y}_2&\dots&\mathbf{y}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\dots\\a_{nj}\end{bmatrix}=\mathbf{y}_ja_{jj}+\mathbf{Y}_{(:,-j)}\tilde{\mathbf{a}}_j=\mathbf{y}_j(\theta+\boldsymbol{\rho}'\tilde{\mathbf{a}}_j)+\mathbf{Y}_{(:,-j)}\tilde{\mathbf{a}}_j=\theta\mathbf{y}_j+\underbrace{(\mathbf{Y}_{(:,-j)}-\mathbf{y}_j\boldsymbol{\rho}')}_{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{a}}_j=\\=\theta\mathbf{y}_j+\mathbf{G}\tilde{\mathbf{a}}_j\end{aligned}\quad(9)$$

Тогда:

$$\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j=(\theta\mathbf{y}_j+\mathbf{G}\tilde{\mathbf{a}}_j)'(\theta\mathbf{y}_j+\mathbf{G}\tilde{\mathbf{a}}_j)=\theta^2\mathbf{y}_j'\mathbf{y}_j+2\theta\tilde{\mathbf{a}}_j'\mathbf{G}'\mathbf{y}_j+\tilde{\mathbf{a}}_j'\mathbf{G}'\mathbf{G}\tilde{\mathbf{a}}_j\quad(10)$$

$$\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j=(\theta\mathbf{y}_j+\mathbf{G}\tilde{\mathbf{a}}_j)'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j=\theta\mathbf{y}_j'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j+\tilde{\mathbf{a}}_j'\mathbf{G}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j\quad(11)$$

Итого выражение под экспонентой для апостериорной совместной плотности выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbf{a}}_j'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\tilde{\mathbf{a}}_j-2\tilde{\mathbf{a}}_j'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\underline{\mathbf{a}}_j+\underline{\mathbf{a}}_j'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\underline{\mathbf{a}}_j+\theta^2\mathbf{y}_j'\mathbf{y}_j+2\theta\tilde{\mathbf{a}}_j'\mathbf{G}'\mathbf{y}_j+\tilde{\mathbf{a}}_j'\mathbf{G}'\mathbf{G}\tilde{\mathbf{a}}_j-2(\theta\mathbf{y}_j'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j+\tilde{\mathbf{a}}_j'\mathbf{G}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j)=\\&=\tilde{\mathbf{a}}_j'\underbrace{(\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}+\mathbf{G}'\mathbf{G})}_{\overline{\mathbf{M}}_j^{-1}}\tilde{\mathbf{a}}_j-2\tilde{\mathbf{a}}_j'\overline{\mathbf{M}}_j^{-1}\underbrace{\overline{\mathbf{M}}_j\left(\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\underline{\mathbf{a}}_j+\mathbf{G}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j-\theta\mathbf{G}'\mathbf{y}_j\right)}_{\overline{\mathbf{a}}_j}+\underline{\mathbf{a}}_j'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\underline{\mathbf{a}}_j+\theta^2\mathbf{y}_j'\mathbf{y}_j-2\theta\mathbf{y}_j'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j=\\&=(\tilde{\mathbf{a}}_j-\overline{\mathbf{a}}_j)'\overline{\mathbf{M}}_j^{-1}(\tilde{\mathbf{a}}_j-\overline{\mathbf{a}}_j)+\underbrace{\underline{\mathbf{a}}_j'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\underline{\mathbf{a}}_j+\theta^2\mathbf{y}_j'\mathbf{y}_j-2\theta\mathbf{y}_j'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j-\overline{\mathbf{a}}_j'\overline{\mathbf{M}}_j^{-1}\overline{\mathbf{a}}_j}_{const}\end{aligned}\quad(12)$$

Следовательно,

$$p(\tilde{\mathbf{a}}_j|\{\tilde{\mathbf{a}}_s\}_{s\neq j},\mathbf{B},\mathbf{D};\mathbf{X})\propto\exp\{-\frac{1}{2}d_j(\tilde{\mathbf{a}}_j-\overline{\mathbf{a}}_j)'\overline{\mathbf{M}}_j^{-1}(\tilde{\mathbf{a}}_j-\overline{\mathbf{a}}_j)\}\quad(13)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_j|\{\tilde{\mathbf{a}}_s\}_{s\neq j},\mathbf{B},\mathbf{D};\mathbf{X}\sim\mathcal{N}_{(n-1)}(\overline{\mathbf{a}}_j,d_j^{-1}\overline{\mathbf{M}}_j)\quad(14)$$

$$\overline{\mathbf{M}}_j=(\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}+\mathbf{G}'\mathbf{G})^{-1}\quad(15)$$

$$\overline{\mathbf{a}}_j=\overline{\mathbf{M}}_j\left(\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\underline{\mathbf{a}}_j+\mathbf{G}'(\mathbf{Z}\mathbf{b}_j-\theta\mathbf{y}_j)\right)\quad(16)$$

$$\mathbf{G}=(\mathbf{Y}_{(:,-j)}-\mathbf{y}_j\boldsymbol{\rho}')\quad(17)$$

1.1.2 Распределение $\mathbf{B}|\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}$

Для того, чтобы найти распределение элементов матрицы $\mathbf{B}|\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}$, необходимо расписать следующую функцию распределения:

$$p(\mathbf{B}|\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}) \propto p(\mathbf{B}|\mathbf{A},\mathbf{D})p(\mathbf{Y}|\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}) \tag{18}$$

Априорные предположения относительно гиперпараметра математического ожидания матрицы $\mathbf{B}$ можно формулировать либо в терминах структурных элементов матрицы $\mathbb{E}(\mathbf{B}) = \underline{\mathbf{B}}$, либо в терминах редуцированной формы параметров матрицы $\mathbb{E}(\mathbf{B}) = \underline{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{A}^{-1}$.

A. Гиперпараметр матожидания $\mathbb{E}(\mathbf{b}_j) = \underline{\mathbf{b}}_j$.

$$\begin{aligned}
&p(\mathbf{B}|\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}) \propto \\
&\propto \left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} d_j(\mathbf{b}_j-\underline{\mathbf{b}}_j)'\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}(\mathbf{b}_j-\underline{\mathbf{b}}_j)\right\}\right]\left[\left|\det(\mathbf{D})^{\frac{T}{2}}\right|\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} d_j\left(\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j-2\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j+\mathbf{b}_j'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j\right)\right.\right. \\
&= \left|\det(\mathbf{D})^{\frac{T}{2}}\right|\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} d_j\left(\mathbf{b}_j'\underbrace{(\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}+\mathbf{Z}'\mathbf{Z})}_{\overline{\mathbf{V}}_j^{-1}}\mathbf{b}_j-2\mathbf{b}_j'\overline{\mathbf{V}}_j^{-1}\underbrace{\overline{\mathbf{V}}_j(\mathbf{Z}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j+\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}\underline{\mathbf{b}}_j)}_{\overline{\mathbf{b}}_j}+\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j+\underline{\mathbf{b}}_j'\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}\underline{\mathbf{b}}_j\right)\right\} = \\
&= \left|\det(\mathbf{D})^{\frac{T}{2}}\right|\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} d_j\left((\mathbf{b}_j-\overline{\mathbf{b}}_j)'\overline{\mathbf{V}}_j^{-1}(\mathbf{b}_j-\overline{\mathbf{b}}_j)+\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j+\underline{\mathbf{b}}_j'\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}\underline{\mathbf{b}}_j-\overline{\mathbf{b}}_j'\overline{\mathbf{V}}_j^{-1}\overline{\mathbf{b}}_j\right)\right\}
\end{aligned} \tag{19}$$

Итого совместное апостериорное распределение векторов $\mathbf{b}_j \forall j = 1..n$ выглядит следующим образом:

$$p(\mathbf{B}|\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} d_j\left((\mathbf{b}_j-\overline{\mathbf{b}}_j)'\overline{\mathbf{V}}_j^{-1}(\mathbf{b}_j-\overline{\mathbf{b}}_j)\right)\right\} \tag{20}$$

$$\mathbf{b}_j|\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_k(\overline{\mathbf{b}}_j, d_j^{-1}\overline{\mathbf{V}}_j) \tag{21}$$

$$\overline{\mathbf{V}}_j = (\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}+\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \tag{22}$$

$$\overline{\mathbf{b}}_j = \overline{\mathbf{V}}_j(\mathbf{Z}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j+\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}\underline{\mathbf{b}}_j) \tag{23}$$

B. Гиперпараметр матожидания $\mathbb{E}(\mathbf{b}_j) = \underline{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{a}_j$.

$$\begin{aligned}
&p(\mathbf{B}|\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}) \propto \\
&\quad\propto \left|\det(\mathbf{D})^{\frac{T}{2}}\right|\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} d_j\left((\mathbf{b}_j-\overline{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{a}_j)'\overline{\mathbf{V}}_j^{-1}(\mathbf{b}_j-\overline{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{a}_j)+\mathbf{a}_j'(\mathbf{Y}'\mathbf{Y}+\overline{\boldsymbol{\Phi}}'\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}\overline{\boldsymbol{\Phi}}-\overline{\boldsymbol{\Phi}}'\overline{\mathbf{V}}_j^{-1}\overline{\boldsymbol{\Phi}})\mathbf{a}_j\right)\right\}
\end{aligned} \tag{24}$$

Итого:

$$p(\mathbf{B}|\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} d_j\left((\mathbf{b}_j-\overline{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{a}_j)'\overline{\mathbf{V}}_j^{-1}(\mathbf{b}_j-\overline{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{a}_j)\right)\right\} \tag{25}$$

$$\mathbf{b}_j|\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_k(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{a}_j, d_j^{-1}\overline{\mathbf{V}}_j) \tag{26}$$

$$\overline{\mathbf{V}}_j = (\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}+\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \tag{27}$$

$$\overline{\boldsymbol{\Phi}} = \overline{\mathbf{V}}_j(\mathbf{Z}'\mathbf{Y}+\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}\underline{\boldsymbol{\Phi}}) \tag{28}$$

1.1.3 Распределение $\mathbf{D}|\mathbf{A},\mathbf{B};\mathbf{X}$

Для того, чтобы вывести распределение $\mathbf{D}|\mathbf{A},\mathbf{B};\mathbf{X}$, необходимо расписать следующую функцию плотности:

$$p(\mathbf{D}|\mathbf{A},\mathbf{B};\mathbf{X}) \propto p(\mathbf{D}|\mathbf{A},\mathbf{B})p(\mathbf{Y}|\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{Z}) \propto \\ \propto \left[\prod_{j=1}^{n}(d_j)^{\underline{\alpha}_j-1}\exp\{-\underline{\beta}_j d_j\}\right]\left[\left|\det(\mathbf{D})^{\frac{T}{2}}\right|\exp\left\{-\frac{1}{2}d_j\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j-2\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j+\mathbf{b}_j'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j)\right\}\right] \quad (29)$$

Таким образом:

$$p(\mathbf{D}|\mathbf{A},\mathbf{B};\mathbf{X}) \propto (d_j)^{\overline{\alpha}_j-1}\exp\left\{-\overline{\beta}_j d_j\right\} \quad (30)$$

$$\overline{\alpha}_j = \underline{\alpha}_j + \frac{T}{2} \quad (31)$$

$$\overline{\beta}_j = \underline{\beta}_j - \frac{1}{2}(\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j-2\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j+\mathbf{b}_j'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j) \quad (32)$$

1.1.4 Распределение $\tilde{\mathbf{a}}_j,\mathbf{b}_j|\{\tilde{\mathbf{a}}_s\}_{s\neq j},\mathbf{D};\mathbf{X}$

А. Гиперпараметр матожидания $\mathbb{E}(\mathbf{b}_j)=\underline{\mathbf{b}}_j$.

$$p(\tilde{\mathbf{a}}_j,\mathbf{b}_j|\{\tilde{\mathbf{a}}_s\}_{s\neq j},\mathbf{D};\mathbf{X}) \propto p(\tilde{\mathbf{a}}_j|\{\tilde{\mathbf{a}}_s\}_{s\neq j},\mathbf{D})p(\mathbf{b}_j|\mathbf{A},\mathbf{D})p(\mathbf{Y}|\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{Z}) \propto \\ \propto \left[\exp\left\{-\frac{1}{2}d_j(\tilde{\mathbf{a}}_j-\underline{\mathbf{a}}_j)'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}(\tilde{\mathbf{a}}_j-\underline{\mathbf{a}}_j)\right\}\right]\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}d_j(\mathbf{b}_j-\underline{\mathbf{b}}_j)'\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}(\tilde{\mathbf{b}}_j-\underline{\mathbf{b}}_j)\right\}\right]\times \\ \times\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}d_j(\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j-2\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j+\mathbf{b}_j'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{b}_j)\right\}\right]\propto \\ \propto\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{b}_j'\underbrace{(\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}+\mathbf{Z}'\mathbf{Z})}_{\overline{\mathbf{V}}_j^{-1}}\mathbf{b}_j-2\mathbf{b}_j'\overline{\mathbf{V}}_j^{-1}\underbrace{\overline{\mathbf{V}}_j(\mathbf{Z}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j+\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}\underline{\mathbf{b}}_j)}_{\overline{\mathbf{b}}_j}+\underline{\mathbf{b}}_j'\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}\underline{\mathbf{b}}_j+\mathbf{a}_j'\mathbf{Y}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j\right)\right\}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}d_j(\tilde{\mathbf{a}}_j'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\tilde{\mathbf{a}}_j-2\tilde{\mathbf{a}}_j'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\underline{\mathbf{a}}_j+\underline{\mathbf{a}}_j'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\underline{\mathbf{a}}_j)\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{2}d_j(\mathbf{b}_j-\overline{\mathbf{b}}_j)'\overline{\mathbf{V}}_j^{-1}(\mathbf{b}_j-\overline{\mathbf{b}}_j)\right\}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}d_j\left(\tilde{\mathbf{a}}_j'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\tilde{\mathbf{a}}_j-2\tilde{\mathbf{a}}_j'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\underline{\mathbf{a}}_j+\underline{\mathbf{a}}_j'\underline{\mathbf{M}}_j^{-1}\underline{\mathbf{a}}_j-(\mathbf{Z}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j+\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}\underline{\mathbf{b}}_j)'\underline{\mathbf{V}}_j(\mathbf{Z}'\mathbf{Y}\mathbf{a}_j+\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}\underline{\mathbf{b}}_j)+\underline{\mathbf{b}}_j'\underline{\mathbf{V}}_j^{-1}\underline{\mathbf{b}}_j\right)\right\} \quad (33)$$

1.1.5 Распределение вектора ограничений матрицы A

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{\gamma}$, каждый элемент которого обозначает, ограничен ли соответствующий элемент матрицы $\mathbf{A}$. Ограничение реализуется в виде изменения параметра дисперсии априорного распределения параметров. Если ограничение наложено, дисперсия данного коэффициента стремится к 0, иначе предполагается близкое к неинформативному априорному распределению:

$$\begin{cases}\mathrm{var}(\mathrm{vec}(\mathbf{A})_j)=\tau_j^1, \text{ если } \gamma_j=1\\ \mathrm{var}(\mathrm{vec}(\mathbf{A})_j)=\tau_j^0, \text{ если } \gamma_j=0\end{cases} \quad (34)$$

где $\tau_j^0 >> \tau_j^1$. Определим априорную вероятность ограничения при условии данных как π_j^γ. Тогда:

$$\left\{\gamma_j|\gamma_{(-j)}\sim Bernoulli(1,\pi_j^\gamma)\right. \quad (35)$$

Для того, чтобы выразить апостериорную условную функцию плотности, рассмотрим следующее выражение:

$$p(\gamma_j|\gamma_{(-j)};\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}) = \frac{p(\gamma_j=1)p(\gamma_{(-j)};\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}|\gamma_j=1)}{p(\gamma_{(-j)};\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X})} = \\ = \frac{p(\gamma_j=1)p(\gamma_{(-j)};\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}|\gamma_j=1)}{p(\gamma_j=1)p(\gamma_{(-j)};\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}|\gamma_j=1)+p(\gamma_j=0)p(\gamma_{(-j)};\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}|\gamma_j=0)} \tag{36}$$

При этом совместную плотность всех параметров, кроме γ_j при условии γ_j можно записать в следующей форме:

$$p(\gamma_{(-j)};\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}|\gamma_j=q) = p(\gamma_{(-j)})p(\mathbf{D}|\boldsymbol{\gamma})p(\mathbf{B}|\mathbf{D};\boldsymbol{\gamma})p(\mathbf{A}|\mathbf{B},\mathbf{D};\boldsymbol{\gamma})p(\mathbf{Y}|\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\boldsymbol{\gamma};\mathbf{X}) \tag{37}$$

Так как γ_j изменяет только гиперпараметры ковариационной матрицы коэффициентов матрицы $\mathbf{B}$, получаем:

$$p(\gamma_j|\gamma_{(-j)};\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}) = \frac{p(\gamma_j=1)p(\mathbf{A}|\mathbf{B},\mathbf{D};\boldsymbol{\gamma}_{(-j)},\gamma_j=1)}{p(\gamma_j=1)p(\mathbf{A}|\mathbf{B},\mathbf{D};\boldsymbol{\gamma}_{(-j)},\gamma_j=1)+p(\gamma_j=0)p(\mathbf{A}|\mathbf{B},\mathbf{D};\boldsymbol{\gamma}_{(-j)},\gamma_j=0)} \tag{38}$$

ACHTUNG!!! Понять как $p(\mathbf{D}|\boldsymbol{\gamma}), p(\mathbf{B}|\mathbf{D};\boldsymbol{\gamma})$ зависят от гиперпараметров распределения $p(\mathbf{A}|\mathbf{B},\mathbf{D};\boldsymbol{\gamma}_{(-j)},$ 1)

1.1.6 Распределение вектора ограничений матрицы B

По аналогии с предыдущим пунктом,

1.2 Связь параметризации 2 с параметризацией 3

Логично априори предполагать, что распределение параметров $w_j|\{\tilde{\mathbf{a}}_s\}_{s=1}^n,\mathbf{B}\sim\mathcal{G}(\underline{\alpha}_j,\underline{\beta}_j)$. Однако, по отношению к $\mathbf{D}$ этого сказать нельзя.

Так выразим же! В силу диагональности $\mathbf{W}$ и $\mathbf{D}$, матрица $\mathbf{K}$ может быть получена из матрицы $\mathbf{A}$ следующим образом:

$$\mathbf{K} = \mathbf{AC} \tag{39}$$

где $c_{jj} = a_{jj}^{-1}$. Следовательно, функция правдоподобия парметризации 2 может быть записана следующим образом:

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{H},\mathbf{K},\mathbf{W};\mathbf{X}) \propto \\ \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[(\mathbf{YK}-\mathbf{ZH})\mathbf{W}(\mathbf{YK}-\mathbf{ZH})'\right]\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[(\mathbf{YAC}-\mathbf{ZH})\mathbf{W}(\mathbf{YAC}-\mathbf{ZH})'\right]\right\} = \\ = \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[(\mathbf{Y}-\mathbf{ZHC}^{-1})\mathbf{CWC}'(\mathbf{Y}-\mathbf{ZHC}^{-1})'\right]\right\} \tag{40}$$

Таким образом, $\mathbf{HC}=\mathbf{B}$, а $d_j = w_j c_j^2 = w_j/a_{jj}^2$.

Предположим теперь, что предполагалось, что $w_j\sim\mathcal{G}(\underline{\alpha}_j,\underline{\beta}_j)$. Тогда замена переменных даёт $\mathrm{d}w_j = \mathrm{d}d_j a_{jj}^2$. Следовательно,

$$p(d_j|\mathbf{A},\mathbf{B}) \propto p(w_j|\mathbf{A},\mathbf{B})a_{jj}^2 \propto (w_j)^{\underline{\alpha}_j-1)}\exp\{-\underline{\beta}_j w_j\} \propto (d_j)^{\underline{\alpha}_j-1}\exp\{-\underline{\beta}_j\frac{d_j}{a_{jj}^2}\} \tag{41}$$

Таким образом, необходимо пересчитать параметр $\beta_j = \underline{\beta}_j/a_{jj}^2$.

Рассмотрим теперь матрицу $\mathbf{H}|\mathbf{A},\mathbf{D};\mathbf{X}$. Якобиан замены:

$$\left|\frac{\mathrm{vec}(\mathbf{h}_j)}{\mathrm{vec}(\mathbf{b}_j)}\right| = c_j^{-k} = a_{jj}^k \tag{42}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{b}_j|\mathbf{A},\mathbf{D}) = p(\mathbf{h}_j|\mathbf{A},\mathbf{D})a_{jj}^k \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}d_j(\mathbf{h}_j - \underline{\mathbf{h}}_j)'\mathbf{V}_{h.j}^{-1}(\mathbf{h} - \underline{\mathbf{h}}_j)\right\} = \\ = \exp\left\{-\frac{1}{2}d_j(a_{jj}\mathbf{b}_j - \underline{\mathbf{h}}_j)'\mathbf{V}_{h.j}^{-1}(a_{jj}\mathbf{b}_j - \underline{\mathbf{h}}_j)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}d_j a_{jj}^2(\mathbf{b}_j - \underline{\mathbf{h}}_j/a_{jj})'\mathbf{V}_{h.j}^{-1}(a_{jj}\mathbf{b}_j - \underline{\mathbf{h}}_j/a_{jj})\right\} \end{aligned} \tag{43}$$

Тогда:

$$\mathbf{b}_j|\mathbf{A},\mathbf{D} \sim \mathcal{N}_k(\underline{\mathbf{h}}_j/a_{jj}, \mathbf{V}_{h.j}/(a_{jj}^2 d_j)) \tag{44}$$