Беда Бедовая

Хабибуллин Рамис Арсланович

5 июня 2016 г.

1 Теоремы о распределениях

Утверждение 1. ***О совместном нормальном распределении.*** *Предположим, что* $\mathbf{x} = [\mathbf{y}', \mathbf{z}']'$, *где* $\mathbf{y}$ *— вектор размерности* $n \times 1$, *а* $\mathbf{z}$ *— вектор размерности* $k \times 1$. *При этом* $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_{kn}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xx}})$. *Пусть при этом можно сделать следующее разбиение параметров:*

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}} \\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xx}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yz}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zy}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Следует помнить, что для любых $\mathbf{i}$ *и* $\mathbf{j} \neq \mathbf{i}$ *переменных* $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{ii}} = \boldsymbol{\Sigma}'_{\mathbf{ii}}$, *а* $\boldsymbol{\Sigma}'_{\mathbf{ij}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{ji}}$

Тогда маргинальные и условные случайные величины имеют следующие распределения:

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}}) \tag{2}$$

$$\mathbf{z} \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}}) \tag{3}$$

$$\mathbf{y}|\mathbf{z} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}|\mathbf{z}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yz}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}}^{-1}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}}), \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}|\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yz}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zy}}) \tag{4}$$

$$\mathbf{z}|\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}|\mathbf{y}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zy}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}}), \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}|\mathbf{y}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zy}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yz}}) \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Доказательство. Совместная функция многомерного нормального распределения $\mathbf{x}$ выглядит следующим образом:

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (2\pi)^{-\frac{nk}{2}}|\det(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xx}})|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xx}}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})\right) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{nk}{2}}|\det(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xx}})|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})', (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}})'\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yz}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zy}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}}) \\ (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}}) \end{bmatrix}\right) \tag{7}$$

Определим $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ как:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \left[(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})', (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}})'\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yz}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zy}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}}) \\ (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}}) \end{bmatrix} \tag{8}$$

Матрица концентрации может быть расписана по правилам нахождения обратной матрицы в следующей форме:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{xx}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{xx}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{yy}} & \mathbf{C}_{\mathbf{yz}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{zy}} & \mathbf{C}_{\mathbf{zz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yz}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zy}})^{-1} & -(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yz}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zy}})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yz}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}}^{-1} \\ -(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zy}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yz}})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zy}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}}^{-1} & (\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zy}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yz}})^{-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Более того, очевидно, что:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{yz}} = -\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yz}}\mathbf{C}_{\mathbf{zz}} = -\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zy}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{zz}}^{-1} = \mathbf{C}'_{\mathbf{zy}} \tag{10}$$

А по правилам раскрытия обратной от суммы матриц можно получить:

$$\mathbf{C_{zz}} = (\mathbf{\Sigma_{zz}} - \mathbf{\Sigma_{zy}}\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}\mathbf{\Sigma_{yz}})^{-1} = \mathbf{\Sigma_{zz}^{-1}} + \mathbf{\Sigma_{zz}^{-1}}\mathbf{\Sigma_{zy}}\mathbf{C_{yy}}\mathbf{\Sigma_{yz}}\mathbf{\Sigma_{zz}^{-1}} \tag{11}$$

$$\mathbf{C_{yy}} = (\mathbf{\Sigma_{yy}} - \mathbf{\Sigma_{yz}}\mathbf{\Sigma_{zz}^{-1}}\mathbf{\Sigma_{zy}})^{-1} = \mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}} + \mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}\mathbf{\Sigma_{yz}}\mathbf{C_{zz}}\mathbf{\Sigma_{zy}}\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}} \tag{12}$$

Таким образом, можно расписать

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y})'\mathbf{C_{yy}}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y}) + 2(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y})'\mathbf{C_{yz}}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z})'\mathbf{C_{zz}}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}) \tag{13}$$

Тогда в терминах $\mathbf{C_{zz}}$ можно вывести следующее соотношение:

$$\begin{split}\mathbf{S}(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y})'(\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}} + \mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}\mathbf{\Sigma_{yz}}\mathbf{C_{zz}}\mathbf{\Sigma_{zy}}\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y}) - \\ - 2(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y})'(\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}\mathbf{\Sigma_{yz}}\mathbf{C_{zz}})(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z})'\mathbf{C_{zz}}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z})\end{split} \tag{14}$$

Обозначим

$$\mathbf{b} = \mathbf{\Sigma_{zy}}\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y}) \tag{15}$$

$$\begin{split}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y})'\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y}) + (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z})'\mathbf{C_{zz}}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}) + \mathbf{b}'\mathbf{C_{zz}}\mathbf{b} - 2\mathbf{b}'\mathbf{C_{zz}}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}) = \\ = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y})'\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y}) + \left[\mathbf{z} - (\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} + \mathbf{b})\right]'\mathbf{C_{zz}}\left[\mathbf{z} - (\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} + \mathbf{b})\right]\end{split} \tag{16}$$

В силу утверждения, верно следующее:

$$|\mathbf{\Sigma_{xx}}| = |\mathbf{\Sigma_{yy}}||\mathbf{\Sigma_{zz}} - \mathbf{\Sigma_{zy}}\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}\mathbf{\Sigma_{yz}}| = |\mathbf{\Sigma_{yy}}||\mathbf{C_{zz}}| \tag{17}$$

Следовательно, совместная функция распределения выглядит следующим образом:

$$p(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{nk}{2}}|\det(\mathbf{\Sigma_{yy}})|^{-\frac{1}{2}}|\det(\mathbf{C_{zz}})|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left((\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y})'\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y}) + \left[\mathbf{z} - (\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} + \mathbf{b})\right]'\mathbf{C_{zz}}\left[\mathbf{z} - (\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} + \mathbf{b})\right]\right)\right\} \tag{18}$$

Для того, чтобы найти маргинальную функцию правдоподобия величины $\mathbf{y}$, необходимо найти следующий интеграл:

$$\begin{split}p(\mathbf{y}) = \int_\mathbf{z} p(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{z} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\det(\mathbf{\Sigma_{yy}})|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y})'\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y})\right\} \times \\ \times \int_\mathbf{z} (2\pi)^{-\frac{k}{2}}|\det(\mathbf{C_{zz}})|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left[\mathbf{z} - (\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} + \mathbf{b})\right]'\mathbf{C_{zz}}\left[\mathbf{z} - (\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} + \mathbf{b})\right]\right)\right\}\mathrm{d}\mathbf{z} = \\ = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\det(\mathbf{\Sigma_{yy}})|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y})'\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y})\right\},\end{split} \tag{19}$$

что есть плотность нормального распределения с параметрами математического ожидания $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{y}$ и дисперсией $\mathbf{\Sigma_{yy}}$.

Для того, чтобы получить условную функцию распределения $\mathbf{z}|\mathbf{y}$, необходимо провести следующую операцию:

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} = (2\pi)^{-\frac{k}{2}}|\det(\mathbf{C_{zz}})|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left[\mathbf{z} - (\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} + \mathbf{b})\right]'\mathbf{C_{zz}}\left[\mathbf{z} - (\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} + \mathbf{b})\right]\right)\right\}, \tag{20}$$

что является плотностью нормального распределения с параметром математического ожидания $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} + \mathbf{\Sigma_{zy}}\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{y})$ и параметром дисперсии $\mathbf{\Sigma_{zz}} - \mathbf{\Sigma_{zy}}\mathbf{\Sigma_{yy}^{-1}}\mathbf{\Sigma_{yz}}$.

Выводы для распределений $\mathbf{z}$ и $\mathbf{y}|\mathbf{z}$ производятся аналогично, если расписать совместную плотность в терминах матрицы $\mathbf{C_{yy}}$. $\square$

Утверждение 2. ***Об условных и маргинальных нормальных распределениях.*** *Предположим, что* $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}, \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz})$*, а условное распределение* $\mathbf{y}|\mathbf{z}$ *может быть описано линейной моделью:* $\mathbf{y}|\mathbf{z} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{a}+\mathbf{Bz}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}|\mathbf{z}})$ [1]*,где* $\mathbf{a}$ *— вектор размерности* $n \times 1$*, а* $\mathbf{B}$ *— матрица гиперпараметров размерности* $n \times k$*. Другими словами:*

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{Bz} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{21}$$

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} + \boldsymbol{\xi}, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}|\mathbf{z}})$*,* $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz})$*,* $\operatorname{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\xi}') = \mathbf{0}$*.*

В этом случае совместная $\mathbf{x} = [\mathbf{y}', \mathbf{z}']'$ *и маргинальная* $\mathbf{y}$ *случайные величины распределены нормально со следующими гиперпараметрами:*

$$\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}, \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz}) \tag{23}$$

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{x}, \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{xx}) \qquad \boldsymbol{\mu}_\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}+\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} \\ \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{xx} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz}\mathbf{B}' + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}|\mathbf{z}} & \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz} \\ \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz}\mathbf{B}' & \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Если при этом $\mathbf{B} = \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zy}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz}^{-1}$*, то:*

$$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}+\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zy}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz}^{-1}\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} \\ \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{xx} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{yz}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zy} + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}|\mathbf{z}} & \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{yz} \\ \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zy} & \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Доказательство.

$$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{y} = \mathbb{E}_\mathbf{y}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}|\mathbf{z}} = \mathbb{E}_\mathbf{y}(\mathbf{y}) = \mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{yy} = \operatorname{var}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz}\mathbf{B}' + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}|\mathbf{z}} \tag{27}$$

Таким образом, $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{a}+\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz}\mathbf{B}' + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}|\mathbf{z}})$.

Для того, чтобы выразить совместную функцию плотности, следует найти математическое ожидание и ковариационную матрицу вектора $\mathbf{x} = [\mathbf{y}', \mathbf{z}']'$. Очевидно, что $\mathbb{E}_\mathbf{x} = [\boldsymbol{\mu}_\mathbf{y}', \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}]'$. Ковариационную матрицу же можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{xx} = \operatorname{var}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}\right) = \operatorname{var}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Bz}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}\right) = \operatorname{var}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{Bz}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}\right) = \\ = \mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{Bz}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{z}'\mathbf{B}'+\boldsymbol{\varepsilon}' & \boldsymbol{\xi}' \end{bmatrix}\right) - \left(\mathbb{E}\begin{bmatrix} \mathbf{Bz}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}\right)\left(\mathbb{E}\begin{bmatrix} \mathbf{Bz}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}\right)' \end{aligned} \tag{28}$$

Распишем каждый член разности отдельно:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{Bz}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{z}'\mathbf{B}'+\boldsymbol{\varepsilon}' & \boldsymbol{\xi}' \end{bmatrix}\right) = \mathbb{E}\begin{bmatrix} \mathbf{Bzz}'\mathbf{B}' + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{z}'\mathbf{B}' + \mathbf{Bz}\boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}' & \mathbf{Bz}\boldsymbol{\xi}' + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\xi}' \\ \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}'\mathbf{B}' + \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\varepsilon}' & \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}' \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}'\mathbf{B}' + \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz}\mathbf{B}' + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}|\mathbf{z}} & \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz} \\ \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz}\mathbf{B}' & \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{29}$$

а также:

$$\mathbb{E}\begin{bmatrix} \mathbf{Bz}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}\mathbb{E}\begin{bmatrix} \mathbf{z}'\mathbf{B}'+\boldsymbol{\varepsilon}' & \boldsymbol{\xi}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}'\mathbf{B}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}\boldsymbol{\mu}_\mathbf{z}'\mathbf{B}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{30}$$

Итого:

$$\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{xx} = \mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{Bz}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{z}'\mathbf{B}'+\boldsymbol{\varepsilon}' & \boldsymbol{\xi}' \end{bmatrix}\right) - \mathbb{E}\begin{bmatrix} \mathbf{Bz}+\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}\mathbb{E}\begin{bmatrix} \mathbf{z}'\mathbf{B}'+\boldsymbol{\varepsilon}' & \boldsymbol{\xi}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz}\mathbf{B}' + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{yy}|\mathbf{z}} & \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz} \\ \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz}\mathbf{B}' & \boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{zz} \end{bmatrix} \tag{31}$$

[1] Например, стандартная линейная модель регрессии $\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ может быть записана в векторной относительно $\mathbf{Z}$ форме: $\mathbf{y} = (\boldsymbol{\beta}' \otimes \mathbf{I}_T)\operatorname{vec}(\mathbf{Z}) + \boldsymbol{\varepsilon}$.

При этом, если подставить $\mathbf{B} = \mathbf{\Sigma_{yz}}\mathbf{\Sigma_{zz}^{-1}}$, то уравнение (31) может быть переписано как:

$$\mathbf{\Sigma_{xx}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma_{yz}}\mathbf{\Sigma_{zz}^{-1}}\mathbf{\Sigma_{zy}} + \mathbf{\Sigma_{yy|z}} & \mathbf{\Sigma_{yz}} \\ \mathbf{\Sigma_{zy}} & \mathbf{\Sigma_{zz}} \end{bmatrix} \tag{32}$$

□

Утверждение 3. ***О совместном Вишарт-нормальном распределении.*** *Предположим, что набор случайных величин* $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega})$ *имеют обратный Вишарт-нормальное распределение со следующими параметрами:* $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}) \sim \mathcal{IW}_n\mathcal{MN}_{kn}(\nu, \mathbf{\Psi_\Omega}, \mathbf{M_\Phi}, \mathbf{V_\Phi})$. *Здесь предполагается, что* $\mathbf{\Omega}$ *— положительно определённая матрица размерности* $n \times n$, *а* $\mathbf{\Phi}$ *— некоторая случайная матрица размерности* $k \times n$. *Верны следующие соотношения:*

$$\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}^{-1} \sim \mathcal{W}_n\mathcal{MN}_{kn}(\nu, \mathbf{\Psi_\Omega^{-1}}, \mathbf{M_\Phi}, \mathbf{V_\Phi}) \tag{33}$$

$$\mathbf{\Omega} \sim \mathcal{IW}_n(\nu, \mathbf{\Psi_\Omega}) \tag{34}$$

$$\mathbf{\Omega}^{-1} \sim \mathcal{W}_n(\nu, \mathbf{\Psi_\Omega^{-1}}) \tag{35}$$

$$\mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega}^{-1} \sim \mathcal{MN}_{kn}(\mathbf{M_\Phi}, \mathbf{V_\Phi}) \tag{36}$$

$$\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})\,|\mathbf{\Omega} = \operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})\,|\mathbf{\Omega}^{-1} \sim \mathcal{N}_{kn}(\mathbf{M_\Phi}, \mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{V_\Phi}) \tag{37}$$

$$\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}), \mathbf{\Omega} \sim \mathcal{IW}_n\mathcal{N}_{kn}(\nu, \mathbf{\Psi_\Omega}, \mathbf{M_\Phi}, \mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{V_\Phi}) \tag{38}$$

$$\mathbf{\Phi} \sim \mathcal{M}t_{kn}(\nu, \mathbf{M_\Phi}, \mathbf{\Psi_\Omega}, \mathbf{V_\Phi}) \tag{39}$$

Доказательство. Для начала выразим распределение случайной величины $\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}$, с которой мы будем работать:

$$p(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}) = k\left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{\nu+n+1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Psi_\Omega}\mathbf{\Omega}^{-1}\right)\right)\right] \times \\ \times \left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{k}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{M_\Phi}\right)' \mathbf{V_\Phi^{-1}}\left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{M_\Phi}\right)\right)\right)\right] \tag{40}$$

Где $k = \left[(2)^{-\nu n/2}|\det(\mathbf{\Psi_\Omega})|^{\nu/2}\Gamma_n^{-1}(\frac{\nu}{2})\right]\left[(2\pi)^{-nk/2}|\det(\mathbf{V_\Phi})|^{-n/2}\right]$.

Для того, чтобы получить распределение $\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}^{-1}$, нужно умножить (78) на Якобиан замены $\mathbf{\Omega} \to \mathbf{\Omega}^{-1}$. При этом и $\mathbf{\Omega}$, и $\mathbf{\Omega}^{-1}$ являются симметричными матрицами, а следовательно, в силу уравнения (238), $|\operatorname{vech}(\mathbf{\Omega})/\operatorname{vech}(\mathbf{\Omega}^{-1})| = |\det(\mathbf{\Omega})|^{(n+1)}$:

$$p(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}^{-1}) = |\det(\mathbf{\Omega})|^{(n+1)}\,p(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}) = k\left[|\det(\mathbf{\Omega}^{-1})|^{\frac{\nu-(n+1)}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Psi_\Omega}\mathbf{\Omega}^{-1}\right)\right)\right] \times \\ \times \left[\left|\det(\mathbf{\Omega}^{-1})z\right|^{\frac{k}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{M_\Phi}\right)' \mathbf{V_\Phi^{-1}}\left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{M_\Phi}\right)\right)\right)\right], \tag{41}$$

что является случайной величиной, распределённой по Вишарт-нормальному закону распределения со следующими гиперпарамтрами: $\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}^{-1} \sim \mathcal{W}_n\mathcal{MN}_{kn}(\nu, \mathbf{\Psi_\Omega^{-1}}, \mathbf{M_\Phi}, \mathbf{V_\Phi})$.

Теперь получим маргинальную функцию плотности матрицы $\mathbf{\Omega}$. Для этого необходимо найти следующий интеграл:

$$p(\mathbf{\Omega}) = \int_{\mathbf{\Phi}\in S(\mathbf{\Phi})} p(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Phi})\,\mathrm{d}\mathbf{\Phi} = \left[(2)^{-\frac{\nu n}{2}}|\mathbf{\Psi_\Omega}|^{\frac{\nu}{2}}\Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]\left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{\nu+n+1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Psi_\Omega}\mathbf{\Omega}^{-1}\right)\right)\right] \times \\ \times \int_{\mathbf{\Phi}\in S(\mathbf{\Phi})} \left[(2\pi)^{-\frac{nk}{2}}|\det(\mathbf{V_\Phi})|^{-\frac{n}{2}}\right]\left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{k}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{M_\Phi}\right)' \mathbf{V_\Phi^{-1}}\left(\mathbf{\Phi} - \mathbf{M_\Phi}\right)\right)\right)\right] \mathrm{d}\mathbf{\Phi} = \\ = \left[(2)^{-\frac{\nu n}{2}}|\det(\mathbf{\Psi_\Omega})|^{\frac{\nu}{2}}\Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]\left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{\nu+n+1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Psi_\Omega}\mathbf{\Omega}^{-1}\right)\right)\right], \tag{42}$$

что есть случайная величина, распределённая по закону распределения обрантого Вишарта: $\mathbf{\Omega} \sim \mathcal{IW}_n(\nu, \mathbf{\Psi_\Omega})$. Аналогично можно показать, что $\mathbf{\Omega}^{-1} \sim \mathcal{W}_n(\nu, \mathbf{\Psi_\Omega}^{-1})$.

Для того, чтобы выразить условную функцию плотности $\mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega}$, необходимо совместную функцию плотности разделить на маргинальную плотность для $\mathbf{\Omega}$:

$$p(\mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega}) = \frac{p(\mathbf{\Phi},\mathbf{\Omega})}{p(\mathbf{\Omega})} = \left[(2\pi)^{-\frac{nk}{2}}|\det(\mathbf{V_\Phi})|^{-\frac{n}{2}}\right]\left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{k}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi})'\mathbf{V_\Phi}^{-1}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi})\right)\right)\right], \tag{43}$$

что является плотностью матричного нормального распределения, то есть $\mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega} \sim \mathcal{MN}_{kn}(\mathbf{M_\Phi}, \mathbf{V_\Phi})$. Очевидно, что также и $\mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega}^{-1} \sim \mathcal{MN}_{kn}(\mathbf{M_\Phi}, \mathbf{V_\Phi})$

При этом можно показать, что если $\mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega}$ является матричной нормальной величиной, то векторизация матрицы $\mathbf{\Phi}$ имеет многомерное нормальное распределение со следующими параметрами: $\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})|\mathbf{\Omega} \sim \mathcal{N}_{kn}(\mathbf{M_\Phi}, \mathbf{\Omega}\otimes\mathbf{V_\Phi})$. Для этого рассмотрим разложение Холецкого матриц $\mathbf{\Omega} = \mathbf{LL}'$ и $\mathbf{V_\Phi}^{-1} = \mathbf{PP}'$. Тогда можно рассмотреть член, который стоит под экспонентой условной функции распределения (здесь используются теоремы 1 и 2):

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\left(\mathbf{LL}'(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi})'\mathbf{V_\Phi}^{-1}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi})\right) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{L}'(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi})'\mathbf{PP}'(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi})\mathbf{L}\right) = \\
&\quad = \operatorname{tr}\left((\mathbf{P}'(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi})\mathbf{L})'(\mathbf{P}'(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi})\mathbf{L})\right) = ((\mathbf{L}'\otimes\mathbf{P}')\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi}))'((\mathbf{L}'\otimes\mathbf{P}')\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi})) = \\
&= (\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi}))'\underbrace{(\mathbf{L}\otimes\mathbf{P})(\mathbf{L}'\otimes\mathbf{P}')}_{(\mathbf{LL}'\otimes\mathbf{PP}')}(\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi})) = (\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi}))'\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\otimes\mathbf{V_\Phi}^{-1}\right)(\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi})),
\end{aligned} \tag{44}$$

При этом известно, что $(\mathbf{\Omega}\otimes\mathbf{V_\Phi})^{-1} = \mathbf{\Omega}^{-1}\otimes\mathbf{V_\Phi}^{-1}$ и $|\det(\mathbf{\Omega})|^{-k/2}|\det(\mathbf{V_\Phi})|^{-n/2} = |\det(\mathbf{\Omega}^{-1}\otimes\mathbf{V_\Phi}^{-1})|^{\frac{1}{2}} = |\det(\mathbf{\Omega}\otimes\mathbf{V_\Phi})|^{-\frac{1}{2}}$. Тогда можно переписать функцию плотности (43) в следующем виде (поскольку $\mathbf{\Phi}$ и $\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})$ отличаются только структурой расположения элементов, Якобиан замены $= 1$):

$$p(\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})|\mathbf{\Omega}) = (2\pi)^{-\frac{nk}{2}}|\det(\mathbf{\Omega}\otimes\mathbf{V_\Phi})|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi}))'\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\otimes\mathbf{V_\Phi}^{-1}\right)(\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}-\mathbf{M_\Phi}))\right), \tag{45}$$

что является плотностью многомерного нормального распределения: $\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})|\mathbf{\Omega} \sim \mathcal{N}_{kn}(\mathbf{M_\Phi}, \mathbf{\Omega}\otimes\mathbf{V_\Phi})$

Для того, чтобы найти маргинальную функцию распределения для $\mathbf{\Phi}$, необходимо найти следующий интеграл (удобнее рассмотреть совместную функцию плотности $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}^{-1})$ и проинтегрировать по положительно определённой матрице $\mathbf{\Omega}^{-1} > 0$):

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}^{-1}>0} p(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Omega}^{-1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} = \int_{\boldsymbol{\Omega}^{-1}>0}\left[(2)^{-\frac{\nu n}{2}}|\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}}|^{\frac{\nu}{2}}\Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]\left[|\det(\boldsymbol{\Omega}^{-1})|^{\frac{\nu-(n+1)}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\right)\right)\right]\times$$
$$\times\left[(2\pi)^{-\frac{nk}{2}}|\det(\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}})|^{-\frac{n}{2}}\,|\boldsymbol{\Omega}|^{-\frac{k}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}\right)'\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}\right)\right)\right)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}^{-1} =$$
$$=\left[\underbrace{(2)^{-\frac{\nu n}{2}}|\det(\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}})|^{\frac{\nu}{2}}\Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right)(2\pi)^{-\frac{nk}{2}}|\det(\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}})|^{-\frac{n}{2}}}_{D}\right]\times$$
$$\times\int_{\boldsymbol{\Omega}^{-1}>0}\left|\det(\boldsymbol{\Omega}^{-1})\right|^{\frac{\nu+k-(n+1)}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\underbrace{\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}}+\left(\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}\right)'\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}\right)}_{\mathbf{S}}\right)\right]\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}^{-1} =$$
$$= D|\det(\mathbf{S})|^{-\left(\frac{\nu+k-(n+1)}{2}+\frac{(n+1)}{2}\right)}(2)^{n\left(\frac{\nu+k-(n+1)}{2}+\frac{n+1}{2}\right)}\Gamma_n\left(\frac{\nu+k-(n+1)}{2}+\frac{n+1}{2}\right)=$$
$$=(\pi)^{-\frac{nk}{2}}\Gamma_n\left(\frac{\nu+k}{2}\right)\Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right)|\det(\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}})|^{-\frac{n}{2}}|\det(\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}})|^{\frac{\nu}{2}}\left|\det\left(\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}}+\left(\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}\right)'\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}\right)\right)\right|^{-\frac{\nu+k}{2}}=$$
$$=(\pi)^{-\frac{nk}{2}}\Gamma_n\left(\frac{\nu+k}{2}\right)\Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right)|\det(\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}})|^{-\frac{n}{2}}|\det(\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}})|^{-\frac{k}{2}}\left|\det\left(\mathbf{I}_n+\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}\right)'\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}\right)\right)\right|^{-\frac{\nu+k}{2}}, \tag{46}$$

что является матричным t-распределением с параметрами $\boldsymbol{\Phi}\sim\mathcal{M}t_{kn}(\nu,\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}},\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}})$.

Можно показать, что в векторном виде $\operatorname{vec}(\boldsymbol{\Phi})$ распределено как многомерное t-распределение:

$$p(\operatorname{vec}(\boldsymbol{\Phi}))=(\pi)^{-\frac{nk}{2}}\Gamma_n\left(\frac{\nu+k}{2}\right)\Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right)|\det(\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\otimes\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}}^{-1})|^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left(1+\operatorname{vec}\left(\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}\right)'\left(\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\otimes\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}\right)\operatorname{vec}\left(\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}\right)\right)^{-\frac{\nu+k}{2}} \tag{47}$$

□

Утверждение 4. *О переходе к Вишарт-нормальному распределению. Если* $\boldsymbol{\Omega}^{-1}\sim\mathcal{W}_n(\nu,\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}})$ *и* $\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{\Omega}\sim\mathcal{MN}_{kn}(\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{\Omega},\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}})$*, то совместная функция распределения принадлежит семейству Вишарт-нормальных распределений:* $\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Omega}^{-1}\sim\mathcal{W}_n\mathcal{MN}_{kn}(\nu,\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}},\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}},\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}})$*. Соответственно, если* $\boldsymbol{\Omega}\sim\mathcal{IW}_n(\nu,\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}})$ *и* $\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{\Omega}\sim\mathcal{MN}_{kn}(\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{\Omega},\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}})$*, то* $\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Omega}\sim\mathcal{IW}_n\mathcal{MN}_{kn}(\nu,\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}},\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}},\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}})$.

Доказательство. Для доказательства необходимо просто вывести совместную функцию плотности:

$$p(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Omega}^{-1})=p(\boldsymbol{\Omega}^{-1})p(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{\Omega}^{-1})=k\left[|\det(\boldsymbol{\Omega}^{-1})|^{\frac{\nu-(n+1)}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\right)\right)\right]\times$$
$$\times\left[|\det(\boldsymbol{\Omega})|^{-\frac{k}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}\right)'\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}\left(\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}\right)\right)\right)\right] \tag{48}$$

Где $k=\left[(2)^{-\nu n/2}|\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{\Omega}}|^{\nu/2}\Gamma_n^{-1}(\frac{\nu}{2})\right]\left[(2\pi)^{-nk/2}|\det(\mathbf{V}_{\boldsymbol{\Phi}})|^{-n/2}\right]$. Аналогично выражается $p(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Omega})$. □

2 Байесовские методы для VAR-моделей

Рассмотрим стандартную векторную авторегрессию p-порядка, описывающую динамику n переменных:

$$\mathbf{y}_t'=\mathbf{y}_{t-1}'\boldsymbol{\Phi}_1+\ldots+\mathbf{y}_{t-p}'\boldsymbol{\Phi}_p+\mathbf{d}_t'\boldsymbol{\Psi}+\mathbf{u}_t', \tag{49}$$

где $u_t \sim \text{i.i.d.}\,\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega})$, $\mathbf{y}_t$ — вектор зависимой переменной размерности $(n \times 1)$, $\mathbf{d}_t$ — вектор детерминированных переменных размерности $(k_d \times 1)$. Эти переменные могут включать в себя константу, тренд, сезонные дамми и прочие дамми-переменные.

Тогда можно записать динамику системы $\mathbf{Y}_{1:T}$ при условии начальных значений $\mathbf{Y}_{(1-p):0}$ в матричной форме:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1' \\ \mathbf{y}_2' \\ \dots \\ \mathbf{y}_T' \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{Y} \\ (T\times n)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0' & \mathbf{y}_{-1}' & \dots & \mathbf{y}_{1-p}' & \mathbf{d}_1' \\ \mathbf{y}_1' & \mathbf{y}_0' & \dots & \mathbf{y}_{2-p}' & \mathbf{d}_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{y}_{T-1}' & \mathbf{y}_{T-2}' & \dots & \mathbf{y}_{T-p}' & \mathbf{d}_T' \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{Z} \\ (T\times k)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1 \\ \mathbf{\Phi}_2 \\ \dots \\ \mathbf{\Phi}_p \\ \mathbf{\Psi} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{\Phi} \\ (k\times n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1' \\ \mathbf{u}_2' \\ \dots \\ \mathbf{u}_T' \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{u} \\ (T\times n)}} \tag{50}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}\mathbf{\Phi} + \mathbf{u} \tag{51}$$

Для удобства обозначим число экзогенных переменных k и матрицу всех доступных данных $\mathbf{X} = [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]$.

Функция правдоподобия модели 49 может быть записана с помощью строк матриц, входящих в уравнение 51:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}|\mathbf{Z}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}) &\propto \\ &\propto |\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{y}_t' - \sum_{j=1}^{p}\mathbf{y}_{t-j}'\mathbf{\Phi}_j - \mathbf{d}_t'\mathbf{\Psi})\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}_t' - \sum_{j=1}^{p}\mathbf{y}_{t-j}'\mathbf{\Phi}_j - \mathbf{d}_t'\mathbf{\Psi})'\right) \propto \\ &\propto |\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{Y}_{t,\bullet} - \mathbf{Z}_{t,\bullet}\mathbf{\Phi})\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{Y}_{t,\bullet} - \mathbf{Z}_{t,\bullet}\mathbf{\Phi})'\right) \end{aligned}$$

В литературе для удобства дальнейших операций с функцией правдоподобия обычно записывают член под экспонентой с помощью следа матрицы в виде: $\operatorname{tr}\left\{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{\Phi})\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{\Phi})'\right\}$. Чтобы понять, правомерна ли подобная замена, рассмотрим произведение трех матриц:

$$\underset{(T\times n)}{\mathbf{M}}\ \mathbf{H}\ \underset{(n\times T)}{\mathbf{M}'} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,\bullet} \\ \mathbf{M}_{2,\bullet} \\ \dots \\ \mathbf{M}_{T,\bullet} \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,\bullet}', & \mathbf{M}_{2,\bullet}', & \dots, & \mathbf{M}_{T,\bullet}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,\bullet}\mathbf{H}\mathbf{M}_{1,\bullet}' & \mathbf{M}_{1,\bullet}\mathbf{H}\mathbf{M}_{2,\bullet}' & \dots & \mathbf{M}_{1,\bullet}\mathbf{H}\mathbf{M}_{T,\bullet}' \\ \mathbf{M}_{2,\bullet}\mathbf{H}\mathbf{M}_{1,\bullet}' & \mathbf{M}_{2,\bullet}\mathbf{H}\mathbf{M}_{2,\bullet}' & \dots & \mathbf{M}_{2,\bullet}\mathbf{H}\mathbf{M}_{T,\bullet}' \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{T,\bullet}\mathbf{H}\mathbf{M}_{1,\bullet}' & \mathbf{M}_{T,\bullet}\mathbf{H}\mathbf{M}_{2,\bullet}' & \dots & \mathbf{M}_{T,\bullet}\mathbf{H}\mathbf{M}_{T,\bullet}' \end{bmatrix}$$

Из последней записи видно, что $\operatorname{tr}(\mathbf{M}\mathbf{H}\mathbf{M}') = \sum_{t=1}^{T}\mathbf{M}_{t,\bullet}\mathbf{H}\mathbf{M}_{t,\bullet}'$, что и требовалось доказать.

Таким образом, с учётом вышеназванной замены, получаем следующую функцию правдоподобия:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}|\mathbf{Z}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}) &\propto |\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\mathbf{\Phi})\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\mathbf{\Phi})'\right\}\right) \propto \\ &\propto |\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\mathbf{\Phi})'(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\mathbf{\Phi})\right\}\right) \end{aligned} \tag{52}$$

Утверждение 5. *Об естественных сопряжённых распределениях параметров VAR-моделей. Для VAR-модели, что может быть записана в виде уравнения (51), естественным сопряжённым априорным распределением параметров может считаться семейство обратного Вишарт-нормальных распределений. Другими словами:*

$$\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Phi}|\mathbf{X} \sim \mathcal{IW}_n\mathcal{MN}_{kn}(\overline{\nu} = T - k, \overline{\mathbf{\Psi}} = \widehat{\mathbf{S}}, \overline{\mathbf{\Phi}} = \widehat{\mathbf{\Phi}}, \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Omega}, \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{\Phi}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{53}$$

$$\mathbf{\Omega}|\mathbf{X} \sim \mathcal{IW}_n(\overline{\nu} = T - k, \overline{\mathbf{\Psi}} = \widehat{\mathbf{S}}) \tag{54}$$

$$\mathbf{\Omega}^{-1}|\mathbf{X} \sim \mathcal{W}_n(\overline{\nu} = T - k, \overline{\mathbf{\Psi}} = \widehat{\mathbf{S}}^{-1}) \tag{55}$$

$$\mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega}, \mathbf{X} \sim \mathcal{MN}_{kn}(\overline{\mathbf{\Phi}} = \widehat{\mathbf{\Phi}}, \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Omega}, \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{\Phi}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{56}$$

$$\mathbf{\Phi}|\mathbf{X} \sim \mathcal{M}t_{kn}(\overline{\nu} = T - k, \mathbf{M} = \widehat{\mathbf{\Phi}}, \mathbf{P} = \mathbf{\Omega}, \mathbf{Q} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{57}$$

Тогда в терминах векторизации параметров $\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})$*:*

$$\mathbf{\Omega}, \operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})|\mathbf{X} \sim \mathcal{IW}_n\mathcal{N}_{kn}(\overline{\nu} = T-k, \overline{\mathbf{\Psi}} = \widehat{\mathbf{S}}, \overline{\boldsymbol{\varphi}} = \widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \overline{\mathbf{V}}_{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{\Omega} \otimes (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{58}$$

$$\mathbf{\Omega}|\mathbf{X} \sim \mathcal{IW}_n(\overline{\nu} = T-k, \overline{\mathbf{\Psi}} = \widehat{\mathbf{S}}) \tag{59}$$

$$\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})|\mathbf{\Omega}, \mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{kn}(\overline{\boldsymbol{\varphi}} = \widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \overline{\mathbf{V}}_{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{\Omega} \otimes (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{60}$$

$$\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})|\mathbf{X} \sim t_{kn}(\overline{\nu} = T-k, \boldsymbol{\mu} = \widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{V} = \mathbf{\Omega} \otimes (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{61}$$

Доказательство. Для того, чтобы выразить естественные сопряжённые распределения параметров VAR-модели, можно выразить апостериорные распределения для случая Jeffreys priors.

Для того, чтобы вывести Jeffreys prior для $\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}$, определим $\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})$, $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{vech}(\mathbf{\Omega})$, а также $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\omega}]'$. Тогда по определению Jeffreys prior выглядит следующим образом:

$$p(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}) \propto |\det(\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}))|^{\frac{1}{2}} = \left|\det \left[\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln(\mathcal{L}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}))}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'}\right)\right]\right|^{\frac{1}{2}} \tag{62}$$

При этом:

$$\ln(\mathcal{L}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega})) = const - \frac{T}{2}ln(|\det(\mathbf{\Omega})|) - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{Y}) + \operatorname{tr}(\mathbf{Z\Phi\Omega}^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{Z}') - 2\operatorname{tr}(\mathbf{Z}'\mathbf{Y}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Phi}')\right) = \tag{63}$$

$$const - \frac{T}{2}ln(|\det(\mathbf{\Omega})|) - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{Y}) + \operatorname{tr}(\mathbf{\Phi}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z\Phi\Omega}^{-1}) - 2\operatorname{tr}(\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{Z\Phi})\right) \tag{64}$$

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{L}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}))}{\partial \operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})} = \operatorname{vec}\left(-\mathbf{Z}'\mathbf{Z\Phi\Omega}^{-1} + \mathbf{Z}'\mathbf{Y\Omega}^{-1}\right) = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{Z}'\mathbf{Y})\operatorname{vec}(\mathbf{\Omega}^{-1}) - (\mathbf{\Omega}^{-1} \otimes \mathbf{Z}'\mathbf{Z})\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}) \tag{65}$$

$$\frac{\partial \ln(\mathcal{L}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}))}{\partial \operatorname{vech}(\mathbf{\Omega})} = \operatorname{vech}\left(\mathbf{\Omega}^{-1} - \frac{1}{2}\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z\Phi\Omega}^{-1} + \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{Z}\mathbf{Y}'\mathbf{\Omega}^{-1}\right) \tag{66}$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\mathcal{L}(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}))}{\partial \operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})\partial \operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})'} = \mathbf{\Omega}^{-1} \otimes \mathbf{Z}'\mathbf{Z} \tag{67}$$

$$\tag{68}$$

Я сдаюсь. В статьях пишут, что Jeffreys prior — это:

$$p(\mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega}) \propto 1 \tag{69}$$

$$p(\mathbf{\Omega}) \propto |\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{n+1}{2}} \tag{70}$$

$$\tag{71}$$

Следовательно,

$$p(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}) = p(\mathbf{\Omega})p(\mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega}) \propto |\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{n+1}{2}} \tag{72}$$

Вывод апостериорных плотностей разделим на два этапа.

Во-первых, выразим функцию правдоподобия в удобной для Байесовского анализа форме. Во-вторых, выразим сами апостериорные плотности.

Этап первый. Для того, чтобы его реализовать, необходимо расписать функцию правдоподобия в терминах OLS-оценки параметров VAR: $\widehat{\mathbf{\Phi}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y}$. Для этого рассмотрим выражение под экспонентой в функции правдоподобия:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\Phi})'(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\Phi})\right\} = \operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}+\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\Phi})'(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}+\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\Phi})\right\} = \\
&= \operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right\} + \operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}-\boldsymbol{\Phi})'\mathbf{Z}'(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right\} + \operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})'\mathbf{Z}(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}-\boldsymbol{\Phi})\right\} + \\
&+ \operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}-\boldsymbol{\Phi})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}-\boldsymbol{\Phi})\right\} = \operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right\} + \operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}-\boldsymbol{\Phi})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}-\boldsymbol{\Phi})\right\} + \\
&+ \operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}-\boldsymbol{\Phi})'\underbrace{(\mathbf{Z}'\mathbf{Y}-\underbrace{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}}_{\mathbf{X}'\mathbf{Y}}+\underbrace{\mathbf{Z}'(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})}_{\mathbf{Z}'\mathbf{Y}-\mathbf{Z}'\mathbf{Y}})}_{\mathbf{0}}\mathbf{Z}'(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}-\boldsymbol{\Phi})\right\}
\end{aligned}
\tag{73}
$$

Таким образом,

$$
\operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\Phi})'(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\Phi})\right\} = \operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right\} + \operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}-\boldsymbol{\Phi})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}-\boldsymbol{\Phi})\right\} \tag{74}
$$

Следовательно, функция правдоподобия принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Omega},\mathbf{Z}) = \\
&= (2\pi)^{-\frac{nT}{2}}|\det(\boldsymbol{\Omega})|^{-\frac{T}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{75}
$$

Обозначим $\widehat{\mathbf{S}} = (\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}})$. Тогда функция правдоподобия записывается в виде:

$$
p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Omega},\mathbf{Z}) = (2\pi)^{-\frac{nT}{2}}|\det(\boldsymbol{\Omega})|^{-\frac{T}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\widehat{\mathbf{S}}\right)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right)\right\} \tag{76}
$$

Помимо данного представления возможно представление в векторной форме параметров $\operatorname{vec}(\boldsymbol{\Phi})$. Для этого необходимо выразить подынтегральное выражение в функции правдоподобия (76). Распишем разложение Холецкого матрицы концентрации $\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \mathbf{L}\mathbf{L}'$ и рассмотрим следующее выражение (для вывода использовались теоремы 1 и 2):

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\left(\mathbf{L}\mathbf{L}'(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{L}'(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\mathbf{L}\right) = \operatorname{tr}\left(\left(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\mathbf{L}\right)'\left(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\mathbf{L}\right)\right) = \\
&= \operatorname{vec}\left(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\mathbf{L}\right)'\operatorname{vec}\left(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\mathbf{L}\right) = \left((\mathbf{L}'\otimes\mathbf{Z})\operatorname{vec}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right)'\left((\mathbf{L}'\otimes\mathbf{Z})\operatorname{vec}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right) = \\
&= \left(\operatorname{vec}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right)'\underbrace{(\mathbf{L}\otimes\mathbf{Z}')(\mathbf{L}'\otimes\mathbf{Z})}_{(\mathbf{L}\mathbf{L}'\otimes\mathbf{Z}'\mathbf{Z})}\left(\operatorname{vec}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right) = \left(\operatorname{vec}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right)'(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\otimes\mathbf{Z}'\mathbf{Z})\left(\operatorname{vec}(\boldsymbol{\Phi}-\widehat{\boldsymbol{\Phi}})\right),
\end{aligned}
$$

где оценку $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}$ можно переписать в следующем виде: $\operatorname{vec}(\widehat{\boldsymbol{\Phi}}) = \operatorname{vec}\left((\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y}\right) = \operatorname{vec}\left(((\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}')\,\mathbf{Y}\mathbf{I}_n\right) = (\mathbf{I}_n\otimes(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}')\operatorname{vec}(\mathbf{Y})$. Для удобства дальнейших рассуждений обозначим $\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{vec}(\boldsymbol{\Phi})$. В этом случае функция правдоподобия, выраженная в терминах векторизованных параметров, выглядит следующим образом:

$$p(\mathbf{Y}|\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}),\mathbf{\Omega},\mathbf{Z}) \propto \left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\widehat{\mathbf{S}}\right)\right)\right] \times$$
$$\times \left[\left|\det(\mathbf{\Omega}^{-1}\otimes(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}))\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})-\widehat{\varphi})'\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\otimes\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)(\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})-\widehat{\varphi})\right)\right)\right]\left|\det(\mathbf{\Omega}^{-1}\otimes(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}))\right|^{-\frac{1}{2}}, \tag{77}$$

где $\widehat{\mathbf{S}} = (\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}})$ и $\widehat{\varphi} = (\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}')\operatorname{vec}(\mathbf{Y})$. При этом из (228) видно, что $|\det(\mathbf{\Omega}^{-1}\otimes(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}))|^{0.5} = |\det(\mathbf{\Omega})|^{-0.5k}|\det(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})|^{0.5n}$. Тогда выражение (77) превращается в следующее уравнение:

$$p(\mathbf{Y}|\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}),\mathbf{\Omega},\mathbf{Z}) \propto \left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{T-k}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\widehat{\mathbf{S}}\right)\right)\right] \times$$
$$\times \left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{k}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})-\widehat{\varphi})'\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\otimes\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)(\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})-\widehat{\varphi})\right)\right)\right] \tag{78}$$

Перейдём ко второму этапу. На втором этапе необходимо выразить апостериорную функцию распределения параметров. Для параметров $\mathbf{\Phi}$ в матричной форме апостериорная совместная функция плотности выглядит следующим образом:

$$p(\mathbf{\Phi},\mathbf{\Omega}|\mathbf{X}) \propto p(\mathbf{\Phi},\mathbf{\Omega})p(\mathbf{Y}|\mathbf{\Phi},\mathbf{\Omega},\mathbf{Z}) \propto |\mathbf{\Omega}|^{-\frac{n+1}{2}}p(\mathbf{Y}|\mathbf{\Phi},\mathbf{\Omega}^{-1},\mathbf{Z}) \propto$$
$$\propto \left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{T-k+n+1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\widehat{\mathbf{S}}\right)\right\}\right]\left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{k}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{\Phi}-\widehat{\mathbf{\Phi}})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\mathbf{\Phi}-\widehat{\mathbf{\Phi}})\right)\right\}\right], \tag{79}$$

При этом эта функция плотности принадлежит семейству Вишарт-нормальных распределений. Таким образом, в силу утверждения, верно следующее:

$$\mathbf{\Omega},\mathbf{\Phi}|\mathbf{X} \sim \mathcal{IW}_n\mathcal{MN}_{kn}(\overline{\nu}=T-k,\overline{\mathbf{\Psi}}=\widehat{\mathbf{S}},\overline{\mathbf{\Phi}}=\widehat{\mathbf{\Phi}},\mathbf{\Sigma}=\mathbf{\Omega},\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{\Phi}}=(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{80}$$
$$\mathbf{\Omega}|\mathbf{X} \sim \mathcal{IW}_n(\overline{\nu}=T-k,\overline{\mathbf{\Psi}}=\widehat{\mathbf{S}}) \tag{81}$$
$$\mathbf{\Omega}^{-1}|\mathbf{X} \sim \mathcal{W}_n(\overline{\nu}=T-k,\overline{\mathbf{\Psi}}=\widehat{\mathbf{S}}^{-1}) \tag{82}$$
$$\mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega},\mathbf{X} \sim \mathcal{MN}_{kn}(\overline{\mathbf{\Phi}}=\widehat{\mathbf{\Phi}},\mathbf{\Sigma}=\mathbf{\Omega},\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{\Phi}}=(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{83}$$
$$\mathbf{\Phi}|\mathbf{X} \sim \mathcal{M}t_{kn}(\overline{\nu}=T-k,\mathbf{M}=\widehat{\mathbf{\Phi}},\mathbf{P}=\mathbf{\Omega},\mathbf{Q}=(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{84}$$

Для параметров $\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})$ в векторизованной форме апостериорная совместная функция плотности выглядит следующим образом:

$$p(\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}),\mathbf{\Omega}^{-1}|\mathbf{X}) \propto \left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{T-k+n+1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\widehat{\mathbf{S}}\right)\right)\right] \times$$
$$\times \left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{k}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})-\widehat{\varphi})'\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\otimes\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)(\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})-\widehat{\varphi})\right)\right)\right] \tag{85}$$

Таким образом, в силу утверждения, верно следующее:

$$\mathbf{\Omega},\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})|\mathbf{X} \sim \mathcal{IW}_n\mathcal{N}_{kn}(\overline{\nu}=T-k,\overline{\mathbf{\Psi}}=\widehat{\mathbf{S}},\overline{\mathbf{\Phi}}=\widehat{\mathbf{\Phi}},\overline{\mathbf{V}}_{\varphi}=\mathbf{\Omega}\otimes(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{86}$$
$$\mathbf{\Omega}|\mathbf{X} \sim \mathcal{IW}_n(\overline{\nu}=T-k,\overline{\mathbf{\Psi}}=\widehat{\mathbf{S}}) \tag{87}$$
$$\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})|\mathbf{\Omega},\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{kn}(\overline{\mathbf{\Phi}}=\operatorname{vec}(\widehat{\mathbf{\Phi}}),\overline{\mathbf{V}}_{\varphi}=\mathbf{\Omega}\otimes(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{88}$$
$$\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})|\mathbf{X} \sim t_{kn}(\overline{\nu}=T-k,\mathbf{M}=\widehat{\mathbf{\Phi}},\mathbf{V}=\mathbf{\Omega}\otimes(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{89}$$

□

Утверждение 6. *О выводе апостериорных плотностей параметров VAR-моделей для случая Вишарт-Нормальных априорных распределений. В случае, если в качестве априорных распределений параметров используется Вишарт-нормальные распределения вида:*

$$\mathbf{\Omega} \sim \mathcal{IW}_n(\underline{\nu}, \underline{\mathbf{S}}) \tag{90}$$

$$\mathbf{\Omega}^{-1} \sim \mathcal{W}_n(\underline{\nu}, \underline{\mathbf{S}}^{-1}) \tag{91}$$

$$\mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega}^{-1} \sim \mathcal{MN}_{kn}(\underline{\mathbf{\Phi}}, \mathbf{\Omega}, \underline{\mathbf{V}}) \tag{92}$$

$$\mathrm{vec}\,(\mathbf{\Phi})\,|\mathbf{\Omega} = \mathrm{vec}\,(\mathbf{\Phi})\,|\mathbf{\Omega}^{-1} \sim \mathcal{N}_{kn}\left(\mathrm{vec}(\underline{\mathbf{\Phi}}), (\mathbf{\Omega} \otimes \underline{\mathbf{V}})\right), \tag{93}$$

то апостериорное распределение параметров будет также принадлежать семейству Вишарт-нормальных распределений со следующим набором гиперпараметров:

$$\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Phi}|\mathbf{X} \sim \mathcal{W}_n\mathcal{MN}_{kn}(\overline{\nu}, \overline{\mathbf{S}}, \overline{\mathbf{\Phi}}, \overline{\mathbf{V}}) \tag{94}$$

$$\overline{\mathbf{V}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \underline{\mathbf{V}}^{-1})^{-1} \tag{95}$$

$$\overline{\mathbf{\Phi}} = \overline{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}'\mathbf{Y} + \underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}}) \tag{96}$$

$$\overline{\nu} = \underline{\nu} + T \tag{97}$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}} + \widehat{\mathbf{S}} - \overline{\mathbf{\Phi}}'\overline{\mathbf{V}}^{-1}\overline{\mathbf{\Phi}} + \widehat{\mathbf{\Phi}}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}} + \underline{\mathbf{\Phi}}'\underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}} = \underline{\mathbf{S}} + (\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\underline{\mathbf{\Phi}})'(\mathbf{I}_T - \mathbf{Z}\underline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\underline{\mathbf{\Phi}}) \tag{98}$$

Поэтому

$$\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Phi}|\mathbf{X} \sim \mathcal{IW}_n\mathcal{MN}_{kn}(\overline{\nu} = T - k, \overline{\mathbf{\Psi}} = \widehat{\mathbf{S}}, \overline{\mathbf{\Phi}} = \widehat{\mathbf{\Phi}}, \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Omega}, \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{\Phi}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{99}$$

$$\mathbf{\Omega}|\mathbf{X} \sim \mathcal{IW}_n(\overline{\nu} = T - k, \overline{\mathbf{\Psi}} = \widehat{\mathbf{S}}) \tag{100}$$

$$\mathbf{\Omega}^{-1}|\mathbf{X} \sim \mathcal{W}_n(\overline{\nu} = T - k, \overline{\mathbf{\Psi}} = \widehat{\mathbf{S}}^{-1}) \tag{101}$$

$$\mathbf{\Phi}|\mathbf{\Omega}, \mathbf{X} \sim \mathcal{MN}_{kn}(\overline{\mathbf{\Phi}} = \widehat{\mathbf{\Phi}}, \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Omega}, \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{\Phi}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{102}$$

$$\mathbf{\Phi}|\mathbf{X} \sim \mathcal{M}t_{kn}(\overline{\nu} = T - k, \mathbf{M} = \widehat{\mathbf{\Phi}}, \mathbf{P} = \mathbf{\Omega}, \mathbf{Q} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \tag{103}$$

Доказательство. Для начала запишем совместную функцию априорного распределения параметров:

$$p(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}) \propto \left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{1}{2}(\underline{\nu}+n+1)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\underline{\mathbf{S}}\mathbf{\Omega}^{-1})\right\}\right] \left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{k}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{\Phi} - \underline{\mathbf{\Phi}})'\underline{\mathbf{V}}^{-1}(\mathbf{\Phi} - \underline{\mathbf{\Phi}})\right)\right\}\right] \tag{104}$$

В силу представления функции правдоподобия в форме, апостериорную функцию распределения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Omega}|\mathbf{X}) \propto &\left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{1}{2}(T+\underline{\nu}+n+1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}(\widehat{\mathbf{S}} + \underline{\mathbf{S}})\right)\right)\right] \times \\ &\times \left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{k}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{\Phi} - \widehat{\mathbf{\Phi}})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\mathbf{\Phi} - \widehat{\mathbf{\Phi}}) + \mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{\Phi} - \underline{\mathbf{\Phi}})'\underline{\mathbf{V}}^{-1}(\mathbf{\Phi} - \underline{\mathbf{\Phi}})\right)\right\}\right] \end{aligned} \tag{105}$$

Тогда выражение под экспонентой может быть расписано в следующем виде:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{\Phi} - \widehat{\mathbf{\Phi}})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\mathbf{\Phi} - \widehat{\mathbf{\Phi}}) + (\mathbf{\Phi} - \underline{\mathbf{\Phi}})'\underline{\mathbf{V}}^{-1}(\mathbf{\Phi} - \underline{\mathbf{\Phi}}) = \\ &= \mathbf{\Phi}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{\Phi} - \widehat{\mathbf{\Phi}}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}} + \widehat{\mathbf{\Phi}}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}} + \mathbf{\Phi}'\overline{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{\Phi} - \underline{\mathbf{\Phi}}'\overline{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}'\overline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}} + \underline{\mathbf{\Phi}}'\overline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}} = \\ &= \mathbf{\Phi}'\underbrace{(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \underline{\mathbf{V}}^{-1})}_{\overline{\mathbf{V}}^{-1}}\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}'(\underbrace{\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}}}_{\mathbf{Z}'\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}}) - (\underbrace{\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}}}_{\mathbf{Z}'\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}})'\mathbf{\Phi} + \widehat{\mathbf{\Phi}}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}} + \underline{\mathbf{\Phi}}'\underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}} = \\ &= \mathbf{\Phi}'\overline{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}'\overline{\mathbf{V}}^{-1}\underbrace{\overline{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}'\mathbf{Y} + \underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}})}_{\overline{\mathbf{\Phi}}} - \underbrace{(\mathbf{Z}'\mathbf{Y} + \underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}})'\overline{\mathbf{V}}}_{\overline{\mathbf{\Phi}}'}\overline{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{\Phi} + \widehat{\mathbf{\Phi}}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}} + \underline{\mathbf{\Phi}}'\underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}} = \\ &= (\mathbf{\Phi} - \overline{\mathbf{\Phi}})'\overline{\mathbf{V}}^{-1}(\mathbf{\Phi} - \overline{\mathbf{\Phi}}) - \overline{\mathbf{\Phi}}'\overline{\mathbf{V}}^{-1}\overline{\mathbf{\Phi}} + \widehat{\mathbf{\Phi}}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}} + \underline{\mathbf{\Phi}}'\underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}} \end{aligned} \tag{106}$$

Итого:

$$p(\mathbf{\Phi},\mathbf{\Omega}|\mathbf{X}) \propto \left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{1}{2}(\overline{\nu}+n+1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\overline{\mathbf{S}}\right)\right)\right]\left[|\det(\mathbf{\Omega})|^{-\frac{k}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{\Phi}-\overline{\mathbf{\Phi}})'\overline{\mathbf{V}}^{-1}(\mathbf{\Phi}-\overline{\mathbf{\Phi}})\right)\right\}\right] \tag{107}$$

$$\overline{\mathbf{V}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+\underline{\mathbf{V}}^{-1})^{-1} \tag{108}$$

$$\overline{\mathbf{\Phi}} = \overline{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}'\mathbf{Y}+\underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}}) \tag{109}$$

$$\overline{\nu} = \underline{\nu}+T \tag{110}$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}}+\widehat{\mathbf{S}}-\overline{\mathbf{\Phi}}'\overline{\mathbf{V}}^{-1}\overline{\mathbf{\Phi}}+\widehat{\mathbf{\Phi}}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}}+\underline{\mathbf{\Phi}}'\underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}} \tag{111}$$

Таким образом, апостериорное распределение параметров принадлежит семейству Вишарт-нормальных распределений. Условные и маргинальные функции плотности могут быть выражены подобно утверждению .

Альтернативное выражение для $\overline{\mathbf{S}}$. Все действия, проведённые в данной части доказательства, аналогичны тем, что использовал Sudipto Banerjee в материалах к курсу "Introduction to Bayesian Analysis"для School of Public Health Университета Миннесота[2] для случая одномерной регрессии. Рассмотрим $\overline{\mathbf{S}}$ (??). Распишем для начала следующее слагаемое:

$$\widehat{\mathbf{S}}+\widehat{\mathbf{\Phi}}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y}-\underbrace{\widehat{\mathbf{\Phi}}'\mathbf{Z}'\mathbf{Y}}_{\mathbf{Y}'\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y}}-\underbrace{\mathbf{Y}'\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}}}_{\mathbf{Y}'\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y}}+\underbrace{2\widehat{\mathbf{\Phi}}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{\Phi}}}_{\mathbf{Y}'\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} \tag{112}$$

Теперь распишем матрицы апостериорных параметров (следует помнить, что матрица ковариации симметричная):

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{S}}-\underline{\mathbf{S}} &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y}+\underline{\mathbf{\Phi}}'\underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}}-\overline{\mathbf{\Phi}}'\overline{\mathbf{V}}^{-1}\overline{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y}+\underline{\mathbf{\Phi}}'\underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}}-(\mathbf{Z}'\mathbf{Y}+\underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}})'\overline{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}'\mathbf{Y}+\underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}}) = \\ &= \mathbf{Y}'(\mathbf{I}_T-\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')\mathbf{Y}-\mathbf{Y}'\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}}-\underline{\mathbf{\Phi}}'\underline{\mathbf{V}}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}'\mathbf{Y}+\underline{\mathbf{\Phi}}'(\underline{\mathbf{V}}^{-1}-\underline{\mathbf{V}}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\underline{\mathbf{V}}^{-1})\underline{\mathbf{\Phi}}\end{aligned} \tag{113}$$

В силу того, что обратная матрица, равная сумме двух матриц может быть расписана как:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{BDC})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}^{-1}+\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1}, \tag{114}$$

то верно следующее выражение (если представить, что $\mathbf{A}=\underline{\mathbf{V}}$, $\mathbf{D}=(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}$, $\mathbf{B}=\mathbf{C}=\mathbf{I}_k$):

$$\underline{\mathbf{V}}^{-1}-\underline{\mathbf{V}}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\underline{\mathbf{V}}^{-1} = \underline{\mathbf{V}}^{-1}-\underline{\mathbf{V}}^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+\underline{\mathbf{V}}^{-1})^{-1}\underline{\mathbf{V}}^{-1} = \left(\underline{\mathbf{V}}+(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\right)^{-1} \tag{115}$$

Это же выражение можно расписать по той же формуле, приняв за $\mathbf{A}=(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}$, $\mathbf{D}=\underline{\mathbf{V}}$, $\mathbf{B}=\mathbf{C}=\mathbf{I}_k$:

$$\left((\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}+\underline{\mathbf{V}}\right)^{-1} = \mathbf{Z}'\mathbf{Z}-\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\underbrace{(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+\underline{\mathbf{V}}^{-1})^{-1}}_{\overline{\mathbf{V}}}\mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \mathbf{Z}'(\mathbf{I}_T-\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')\mathbf{Z} \tag{116}$$

Можно также заметить, что $\overline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{V}}^{-1}+\mathbf{Z}'\mathbf{Z})=\mathbf{I}_k$, а значит, $\overline{\mathbf{V}}\underline{\mathbf{V}}^{-1}=\mathbf{I}_k-\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$, то есть:

$$\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\underline{\mathbf{V}}^{-1} = \mathbf{Z}-\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}'\mathbf{Z} = (\mathbf{I}_T-\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')\mathbf{Z} \tag{117}$$

Но если рассмотреть транспонированное выражение $\underline{\mathbf{V}}^{-1}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}'$ (в силу симметричности $(\mathbf{I}_T-\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')$):

$$\overline{\mathbf{V}}\underline{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}'(\mathbf{I}_T-\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')' = \mathbf{Z}'(\mathbf{I}_T-\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}') \tag{118}$$

[2] http://www.biostat.umn.edu/ ph7440/

Подставляя (117) в (113), получаем следующее:

$$\mathbf{Y}'(\mathbf{I}_T-\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')\mathbf{Y}-\mathbf{Y}'(\mathbf{I}_T-\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')\mathbf{Z}\underline{\mathbf{\Phi}}+\underline{\mathbf{\Phi}}'\mathbf{Z}'(\mathbf{I}_T-\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')\mathbf{Y}+\underline{\mathbf{\Phi}}'(\mathbf{I}_T-\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')\underline{\mathbf{\Phi}} = (\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\underline{\mathbf{\Phi}})'(\mathbf{I}_T-\mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\underline{\mathbf{\Phi}}) \tag{119}$$

При этом:

$$(\mathbf{I}_T - \mathbf{Z}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')^{-1} = \mathbf{I}_T - \mathbf{Z}(\underline{\mathbf{V}}^{-1} + \mathbf{Z}'\mathbf{Z})\mathbf{Z}' = \mathbf{I}_T - \mathbf{Z}\underline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}' \tag{120}$$

Итого получаем следующую форму апостериорного гиперпараметра:

$$\overline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}} + (\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\underline{\mathbf{\Phi}})'(\mathbf{I}_T - \mathbf{Z}\underline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}')^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\underline{\mathbf{\Phi}}) \tag{121}$$

□

Утверждение 7. *Распределение Вишарта для диагональных матриц. Пусть случайная диагональная матрица имеет распределение Вишарта* $\mathbf{X} = diag(\mathbf{x}) \sim \mathcal{W}_n(\nu, \mathbf{\Psi})$ $(\mathbf{x} = [x_{11}, \dots, x_{nn}])$, *где матрица* $\mathbf{\Psi} = diag(\boldsymbol{\psi})$, *а* $\boldsymbol{\psi} = [\psi_{11}, \dots, \psi_{nn}]'$. *Тогда функцию плотности* $\mathbf{X}$ *можно расписать как произведение плотностей Гамма-распределений:*

$$p(\mathbf{X}) = p(x_1)p(x_2|x_1)\dots p(x_n|x_1\dots x_{n-1}) = p(\mathbf{X}) = p(x_1)p(x_2)p(x_3)\dots p(x_n) = \prod_{i=1}^{n} \gamma\left(\frac{\nu-n+1}{2}, \psi_{ii}\right) \tag{122}$$

Доказательство. В силу диагональности $\mathbf{\Psi}^{-1} = diag(\tilde{\boldsymbol{\psi}})$, где $\tilde{\boldsymbol{\psi}} = [\psi_{11}^{-1}, \dots, \psi_{nn}^{-1}]$, при этом $|\det(\mathbf{\Psi})| = \prod_{i=1}^{n} \psi_{ii}$. Таким образом:

$$p(\mathbf{X}) \propto \left[|\det(\mathbf{X})|^{\frac{\nu-(n+1)}{2}} \exp\left(-\operatorname{tr}(\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{S})\right)\right] \propto \prod_{i=1}^{n}\left(x_{ii}^{\frac{\nu-n+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{x_{ii}}{\psi_{ii}}\right)\right), \tag{123}$$

что есть ядро функции плотности гамма-распределения с параметрами $x_{ii} \sim \Gamma\left(\frac{\nu-n+1}{2}, \psi_{ii}\right)$. □

Утверждение 8. *Маргинальная функция правдоподобия для VAR-модели в редуцированной форме. Предположим, что генерирущий данные процесс описывается некоторой VAR-моделью* $\mathcal{M}_s$, *априорные распределения параметров которой принадлежат семейству Вишарт-нормальных распределений со следующими гиперпараметрами:*

$$\mathbf{\Omega}_s|\mathcal{M}_s \sim \mathcal{IW}(\underline{\nu}_s, \underline{\mathbf{S}}_s) \tag{124}$$
$$\mathbf{\Omega}_s^{-1}|\mathcal{M}_s \sim \mathcal{W}(\underline{\nu}_s, \underline{\mathbf{S}}_s^{-1}) \tag{125}$$
$$\mathbf{\Phi}_s|\mathbf{\Omega}; \mathcal{M}_s = \mathbf{\Phi}_s|\mathbf{\Omega}_s^{-1} \sim \mathcal{MN}_{nk}(\underline{\mathbf{\Phi}}_s, \mathbf{\Omega}_s, \underline{\mathbf{V}}_s) \tag{126}$$
$$\operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}_s)|\mathbf{\Omega}_s; \mathcal{M}_s = \operatorname{vec}(\mathbf{\Phi}_s)|\mathbf{\Omega}_s^{-1}; \mathcal{M}_s \sim \mathcal{N}_{nk}\left(\operatorname{vec}(\underline{\mathbf{\Phi}}_s), (\mathbf{\Omega}_s \otimes \underline{\mathbf{V}}_s)\right), \tag{127}$$

Тогда маргинальная функция правдоподобия при условии модели есть суть функция плотности матричного t-распределения со следующими гиперпараметрами:

$$\mathbf{Y}|\mathbf{Z}_s; \mathcal{M}_s \sim \mathcal{M}t_{Tn}(\underline{\nu}_s, \mathbf{Z}\underline{\mathbf{\Phi}}_s, (\mathbf{I}_n - \mathbf{Z}\underline{\mathbf{V}}_s\mathbf{Z}')^{-1}, \underline{\mathbf{S}}_s) \tag{128}$$
$$\mathbf{Y}|\mathbf{\Omega}_s^{-1}; \mathbf{Z}_s; \mathcal{M}_s \sim \mathcal{M}t_{Tn}(\underline{\nu}_s, \mathbf{Z}\underline{\mathbf{\Phi}}_s, (\mathbf{I}_n - \mathbf{Z}\underline{\mathbf{V}}_s\mathbf{Z}')^{-1}, \overline{\mathbf{S}}_s - \underline{\mathbf{S}}_s) \tag{129}$$
$$\overline{\mathbf{V}}_s = (\mathbf{Z}_s'\mathbf{Z}_s + \underline{\mathbf{V}}_s^{-1})^{-1} \tag{130}$$
$$\overline{\mathbf{\Phi}}_s = \overline{\mathbf{V}}_s(\mathbf{Z}_s'\mathbf{Y} + \underline{\mathbf{V}}_s^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}}_s) \tag{131}$$
$$\overline{\nu}_s = \underline{\nu}_s + T \tag{132}$$
$$\overline{\mathbf{S}}_s = \underline{\mathbf{S}}_s + \widehat{\mathbf{S}}_s - \overline{\mathbf{\Phi}}_s'\overline{\mathbf{V}}_s^{-1}\overline{\mathbf{\Phi}}_s + \widehat{\mathbf{\Phi}}_s'\mathbf{Z}_s'\mathbf{Z}_s\widehat{\mathbf{\Phi}}_s + \underline{\mathbf{\Phi}}_s'\underline{\mathbf{V}}_s^{-1}\underline{\mathbf{\Phi}}_s \tag{133}$$

Доказательство. Для начала найдём маргинальную функцию правдоподобия при условии матрицы концентрации. Для этого необходимо найти следующий интеграл:

$$
\begin{aligned}
&p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\Omega}_s^{-1};\mathbf{Z},\mathcal{M}_s) = \\
&= \int_{\boldsymbol{\Phi}_s\in S(\boldsymbol{\Phi}_s)} p(\boldsymbol{\Phi}_s|\boldsymbol{\Omega}_s^{-1};\mathcal{M}_s)p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\Phi}_s,\boldsymbol{\Omega}_s^{-1};\mathbf{Z},\mathcal{M}_s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_s = C_s|\det(\boldsymbol{\Omega}_s)|^{-\frac{T}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Omega}_s^{-1}(\overline{\mathbf{S}_s}-\underline{\mathbf{S}_s})\right)\right)\times \\
&\quad\times\int_{\boldsymbol{\Phi}_s\in S(\boldsymbol{\Phi}_s)}(2\pi)^{\frac{1}{2}nk}|\det(\overline{\mathbf{V}}_s)|^{-\frac{n}{2}}|\det(\boldsymbol{\Omega}_s)|^{-\frac{k}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Omega}_s^{-1}(\boldsymbol{\Phi}-\overline{\boldsymbol{\Phi}}_s)'\overline{\mathbf{V}}_s^{-1}(\boldsymbol{\Phi}-\overline{\boldsymbol{\Phi}}_s)\right)\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_s = \\
&\qquad = C_s|\det(\boldsymbol{\Omega}_s)|^{-\frac{T}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Omega}_s^{-1}(\overline{\mathbf{S}}_s-\underline{\mathbf{S}}_s)\right)\right),
\end{aligned}
\tag{134}
$$

$$
C_s = (2\pi)^{-\frac{1}{2}nT}\left(\frac{|\det(\overline{\mathbf{V}}_s)|}{|\det(\underline{\mathbf{V}}_s)|}\right)^{\frac{n}{2}}
\tag{135}
$$

Для того, чтобы найти безусловную маргинальную функцию правдоподобия, необходимо найти следующий интеграл:

$$
\begin{aligned}
&p(\mathbf{Y}|\mathbf{Z},\mathcal{M}_s) = \int_{\boldsymbol{\Omega}_s^{-1}>0} p(\boldsymbol{\Omega}_s^{-1}|\mathcal{M}_s)p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\Omega}_s^{-1};\mathbf{Z},\mathcal{M}_s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_s^{-1} = \\
&= D_s\int_{\mathbf{C}_s>0}\left[|\det(\mathbf{C}_s)|^{\frac{1}{2}(\underline{\nu}-n-1)}\exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{C}_s\underline{\mathbf{S}}_s\right)\right)\right]\left[|\det(\mathbf{C}_s)|^{\frac{T}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{C}_s(\overline{\mathbf{S}}_s-\underline{\mathbf{S}}_s)\right)\right)\right]\mathrm{d}\mathbf{C}_s = \\
&\qquad = D_s\int_{\mathbf{C}_s>0}|\det(\mathbf{C}_s)|^{\frac{1}{2}(T+\underline{\nu}-n-1)}\exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{C}_s\overline{\mathbf{S}}_s\right)\right)\mathrm{d}\mathbf{C}_s
\end{aligned}
\tag{136}
$$

$$
D_s = |\det(\underline{\mathbf{S}}_s)|^{\frac{1}{2}\underline{\nu}_s}(2)^{-\frac{1}{2}n\underline{\nu}_s}(2\pi)^{-\frac{1}{2}nT}\left(\frac{|\overline{\mathbf{V}}_s|}{|\underline{\mathbf{V}}_s|}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\Gamma_n(\frac{1}{2}\underline{\nu})}
\tag{137}
$$

Если присмотреться, этот интеграл может быть предаставлен в виде интеграла (253). Следовательно, решать его можно аналогично:

$$
p(\mathbf{Y}|\mathbf{Z},\mathcal{M}_s) = D_s|\det(\overline{\mathbf{S}}_s)|^{-\frac{1}{2}(T+\underline{\nu}_s)}(2)^{\frac{n}{2}(T+\underline{\nu}_s)}\Gamma_n\left(\frac{T+\underline{\nu}_s}{2}\right)
\tag{138}
$$

Для того, чтобы причесать формулу, используем, что $|\det(\mathbf{A}+\mathbf{BDC})| = |\det(\mathbf{A})||\det(\mathbf{B})||\det(\mathbf{D}^{-1}+\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})|$:

$$
|\det\left(\mathbf{I}_n+\mathbf{Z}\underline{\mathbf{V}}\mathbf{Z}'\right)| = |\det\left(\underline{\mathbf{V}}\right)||\det\left(\underline{\mathbf{V}}^{-1}+\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)| = |\det\left(\underline{\mathbf{V}}\right)||\det\left(\overline{\mathbf{V}}\right)|^{-1}
\tag{139}
$$

Итого, подставив (121) и (139) в (138), получаем:

$$
\begin{aligned}
&p(\mathbf{Y}|\mathbf{Z},\mathcal{M}_s) = (\pi)^{-\frac{nT}{2}}\frac{\Gamma_n\left(\frac{T+\underline{\nu}_s}{2}\right)}{\Gamma_n\left(\frac{1}{2}\underline{\nu}_s\right)}|\det(\mathbf{I}_n-\mathbf{Z}\underline{\mathbf{V}}_s\mathbf{Z}')|^{-\frac{n}{2}}|\det(\underline{\mathbf{S}}_s)|^{\frac{1}{2}\underline{\nu}_s}\times \\
&\times|\det(\underline{\mathbf{S}}_s+(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\underline{\boldsymbol{\Phi}}_s)'(\mathbf{I}_n-\mathbf{Z}\underline{\mathbf{V}}_s\mathbf{Z}')^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\underline{\boldsymbol{\Phi}}_s))|^{-\frac{1}{2}(T+\underline{\nu}_s)} = (\pi)^{-\frac{nT}{2}}\frac{\Gamma_n\left(\frac{T+\underline{\nu}_s}{2}\right)}{\Gamma_n\left(\frac{1}{2}\underline{\nu}_s\right)}|\det(\mathbf{I}_n-\mathbf{Z}\underline{\mathbf{V}}_s\mathbf{Z}')|^{-\frac{n}{2}}\times \\
&\qquad\times|\det(\underline{\mathbf{S}}_s)|^{-\frac{T}{2}}|\det\left(\mathbf{I}_n+\underline{\mathbf{S}}_s^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\underline{\boldsymbol{\Phi}}_s)'(\mathbf{I}_n-\mathbf{Z}\underline{\mathbf{V}}_s\mathbf{Z}')^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\underline{\boldsymbol{\Phi}}_s)\right)|^{-\frac{1}{2}(T+\underline{\nu}_s)},
\end{aligned}
\tag{140}
$$

что есть ничто иное, как матричное t-распределение:

$$
\mathbf{Y}|\mathbf{Z},\mathcal{M}_s \sim \mathcal{M}t_{Tn}(\underline{\nu}_s,\mathbf{Z}\underline{\boldsymbol{\Phi}}_s,(\mathbf{I}_n-\mathbf{Z}\underline{\mathbf{V}}_s\mathbf{Z}')^{-1},\underline{\mathbf{S}}_s)
\tag{141}
$$

□

3 Декомпозиция Бартлетта и её расширения

Утверждение 9. *О нормировке параметра математического ожидания распределения Вишарта. Если* $\mathbf{\Omega} \sim \mathcal{W}_n(\nu, \mathbf{S})$ *и матрица* $\mathbf{M}$ *размерности* $k \times n$ *ранга* k*, то* $\mathbf{M\Omega M}' \sim \mathcal{W}_n(\nu, \mathbf{MSM}')$.

Утверждение 10. *О разложении Бартлетта. Пусть* $\mathbf{\Omega} \sim \mathcal{W}_n(\nu, \mathbf{I}_n)$*, где* $\nu \geqslant n$*. При этом разложение Холецкого* $\mathbf{\Omega} = \mathbf{LL}'$*, где* $\mathbf{L}$ *— нижняя треугольная матрица размерности* $n \times n$*. Тогда внедиагональные элементы* l_{ij} *матрицы* $\mathbf{L}$*, где* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$*, независимо одинаково распределены как* $l_{ij} \sim \mathcal{N}(0,1)$*. При этом квадраты диагональных элементов* l_{ij}^2 *матрицы* $\mathbf{L}$ *распределены как* $\mathcal{G}((\nu - i + 1)/2, 2)$*, или, что то же самое,* $\chi^2_{\nu-i+1}$.

Доказательство. Рассмотрим распределение матрицы $\mathbf{\Omega}$:

$$p(\mathbf{\Omega}) = 2^{-\frac{n\nu}{2}} \Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right) |\det(\mathbf{\Omega})|^{\frac{\nu-n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{\Omega})\right\} \tag{142}$$

При этом

$$\operatorname{tr}(\mathbf{\Omega}) = \operatorname{tr}(\mathbf{LL}') = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} l_{ij}^2 \tag{143}$$

$$\det(\mathbf{\Omega}) = \det(\mathbf{LL}') = (\det(\mathbf{L}))^2 = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}^2 \tag{144}$$

$$\Gamma_n\left(\frac{\nu}{2}\right) = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\nu - i + 1}{2}\right) \tag{145}$$

$$\tag{146}$$

А в силу выводов раздела приложения A.4.4, Якобиан замены исходной матрицы на её разложение Холецкого:

$$\left|\frac{\partial \operatorname{vech}(\mathbf{\Omega})}{\partial \operatorname{vech}(\mathbf{L})}\right| = 2^n \prod_{i=1}^{n} l_{ii}^{n-i+1}$$

Кроме того, сделаем замену $l_{ii} \to l_{ii}^2$. То есть необходимо также домножить на $2^{-n}\prod_{i=1}^{n} l_{ii}^{-1}$. Тогда функция распределения матрицы $\mathbf{L}$ выглядит как (следует помнить, что в матрице $\mathbf{L}$ ровно $n(n-1)/2$ недиагональных элементов):

$$p(\mathbf{L}) = p(\mathbf{\Omega})\left|\frac{\partial \operatorname{vech}(\mathbf{\Omega})}{\partial \operatorname{vech}(\mathbf{L})}\right| = 2^{\frac{n\nu}{2}} \pi^{-\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i=1}^{n} \Gamma^{-1}\left(\frac{\nu - i + 1}{2}\right) \prod_{i=1}^{n} l_{ii}^{\nu-n-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} l_{ij}^2\right\} \prod_{i=1}^{n} l_{ii}^{n-i} =$$
$$= \prod_{i=1 (i<j)}^{n}\left[(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}l_{ij}^2\right)\right] \prod_{i=1}^{n}\left[2^{-(\nu-i+1)/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{n-i+1}{2}\right)(l_{ii}^2)^{(n-i+1)/2}\exp\left(-\frac{1}{2}l_{ii}^2\right)\right] \tag{147}$$

Таким образом, $l_{ij} \sim \mathcal{N}(0,1)$, а $l_{ii} \sim \mathcal{G}((\nu - i + 1)/2, 2)$. Следует также помнить, что $mathcalG((\nu - i + 1)/2, 2) = \chi^2_{\nu-i+1}$. □

Утверждение 11. *Об алгоритме AS 53 (Wishart Variate Generator). Пусть* $\mathbf{\Omega} \sim \mathcal{W}_n(\nu, \mathbf{S})$*. Тогда матрица* $\mathbf{\Omega}$ *может быть сгенерирована следующим образом.*

1. *Сгенерировать нижнюю треугольную матрицу* $\mathbf{L}$*, диагональные элементы которой* $l_{ii} \sim \chi^2_{\nu-i+1}$*, а внедиагональные элементы* $l_{ij} \sim \mathcal{N}(0,1)$*;*

2. *Рассчитать* $\mathbf{\Omega} = \mathbf{MLL}'\mathbf{M}'$*, где* $\mathbf{M}$ *— разложение Холецкого матрицы* $\mathbf{S} = \mathbf{MM}'$.

Утверждение 12. *О разложении Бартлетта для смещённого математического ожидания распределённой по Вишарту матрицы. Пусть* $\mathbf{\Omega} \sim \mathcal{W}_n(\nu, \mathbf{S})$. *Тогда:*

1. *Элементы разложения Холецкого матрицы* $\mathbf{M}'\mathbf{\Omega}\mathbf{M} = \mathbf{R}\mathbf{R}'$ *(где* $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{M}\mathbf{M}'$*) распределены следующим образом. Недиагональные элементы* $r_{ij}, i < j$ *распределены независимо нормально* $\sim \mathcal{N}(0, 1)$. *А диагональные элементы* $r_{ii} \sim \mathcal{G}((\nu - i + 1)/2, 2)$,

2. *Элементы разложения Холецкого матрицы* $\mathbf{\Omega} = \mathbf{L}\mathbf{L}'$ *распределены следующим образом.*

Доказательство. Для доказательства первой части утверждения достаточно сделать замену $\mathbf{\Omega} \to \mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Omega}$. Тогда в силу вывода в приложении A.4.3 Якобиан замены будет равен $|\det(\mathbf{S})|^{-(n+1)/2}$:

$$p(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Omega}) = p(\mathbf{\Omega}) \det(\mathbf{S})|^{-(n+1)/2} 2^{-\frac{n\nu}{2}} = \Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right) |\det(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Omega})|^{\frac{\nu-n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Omega})\right\} \tag{148}$$

Следовательно, $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Omega} \sim \mathcal{W}_n(\nu, \mathbf{I}_n)$, и доказательство первой части утверждения прямо следует из разложения Бартлетта (утверждение 10).

Для доказательства второй части утверждения нужно расписать функцию распределения следующим образом ($\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{M}\mathbf{M}', \mathbf{\Omega} = \mathbf{L}\mathbf{L}'$):

$$p(\mathbf{\Omega}) = 2^{-\frac{n\nu}{2}} \Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right) |\det(\mathbf{M}\mathbf{M}')|^{-\frac{\nu}{2}} |\det(\mathbf{L}\mathbf{L}')|^{\frac{\nu-n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{M}'\mathbf{L}\mathbf{L}'\mathbf{M})\right\} \tag{149}$$

При этом

$$\operatorname{tr}(\mathbf{M}'\mathbf{L}\mathbf{L}'\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i'\mathbf{L}\mathbf{L}'\mathbf{m}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=i}^{n} m_{is} \sum_{r=i}^{n} m_{ir} \sum_{j=1}^{\min(r,s)} l_{jr} l_{js} \tag{150}$$

$$|\det(\mathbf{M}\mathbf{M}')|^{-\frac{\nu}{2}} |\det(\mathbf{L}\mathbf{L}')|^{\frac{\nu-n-1}{2}} = |\det(\mathbf{M})|^{-\nu} |\det(\mathbf{L})|^{\nu-n-1} = \prod_{i=1}^{n} m_{ii}^{-\nu} l_{ii}^{\nu-n-1} \tag{151}$$

$$\Gamma_n\left(\frac{\nu}{2}\right) = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\nu - i + 1}{2}\right) \tag{152}$$

$$\tag{153}$$

ЗАВЕРШИТЬ!!!ЗАВЕРШИТЬ!!!ЗАВЕРШИТЬ!!!ЗАВЕРШИТЬ!!! □

4 Байесовский анализ SVAR-моделей

Структурная авторегрессионная модель может быть записана в следующей форме:

$$\mathbf{Y}\mathbf{A} = \mathbf{Z}\mathbf{B} + \mathcal{E} \tag{154}$$

В предположении, что $\mathcal{E} \sim \mathcal{MN}_{Tn}(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega})$, функцию правдоподобия может быть записана в следующей форме (здесь $\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}'$):

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} |\det(\mathbf{A})|^{T} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((\mathbf{Y}\mathbf{A} - \mathbf{Z}\mathbf{B})(\mathbf{Y}\mathbf{A} - \mathbf{Z}\mathbf{B})'\right)\right\} \tag{155}$$

Утверждение 13. *О видах представления функции правдоподобия для структурных векторных авторегрессий при условии нормального распределения ошибок. Функция правдоподобия для структурных* *векторных авторегрессий в случае нормального распределения ошибок при условии параметров* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *может быть представлена одним из следующих способов:*

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{A},\mathbf{B}) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}}|\det(\mathbf{A})|^T \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((\mathbf{YA}-\mathbf{ZB})(\mathbf{YA}-\mathbf{ZB})'\right)\right\} \tag{156}$$

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{A},\mathbf{B}) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}}|\det(\mathbf{A})|^T \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((\mathbf{YA}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})'(\mathbf{YA}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})\right)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((\mathbf{B}-\widehat{\mathbf{B}})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\mathbf{B}-\widehat{\mathbf{B}})\right)\right\} \tag{157}$$

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}|\mathbf{A},\mathbf{B}) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}}|\det(\mathbf{A})|^T \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((\operatorname{vec}(\mathbf{YA})-(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{Z})\widehat{\mathbf{b}})'(\operatorname{vec}(\mathbf{YA})-(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{Z})\widehat{\mathbf{b}})\right)\right\}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((\mathbf{b}-\widehat{\mathbf{b}})'(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{Z}'\mathbf{Z})(\mathbf{b}-\widehat{\mathbf{b}})\right)\right\} \end{aligned} \tag{158}$$

где $\widehat{mbB} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{YA}$, $\mathbf{b} = \operatorname{vec}(\mathbf{B})$, $\widehat{\mathbf{b}} = \operatorname{vec}(\widehat{\mathbf{B}})$.

Доказательство. Для вывода формы (157) следует расписать функцию правдоподобия в терминах $\widehat{\mathbf{B}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{YA}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\{(\mathbf{YA}-\mathbf{ZB})'(\mathbf{YA}-\mathbf{ZB})\} = \operatorname{tr}\left\{(\mathbf{YA}-\mathbf{ZB}+\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})'(\mathbf{YA}-\mathbf{ZB}+\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}}\right\} = \\ = \operatorname{tr}\left\{(\mathbf{YA}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})'(\mathbf{YA}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})\right\} + \operatorname{tr}\left\{(\widehat{\mathbf{B}}-\mathbf{B})'\mathbf{Z}'(\mathbf{YA}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})\right\} + \operatorname{tr}\left\{(\mathbf{YA}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})'\mathbf{Z}(\widehat{\mathbf{B}}-\mathbf{B})\right\} + \\ + \operatorname{tr}\left\{(\widehat{\mathbf{B}}-\mathbf{B})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\widehat{\mathbf{B}}-\mathbf{B})\right\} = \operatorname{tr}\left\{(\mathbf{YA}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})'(\mathbf{YA}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})\right\} + \operatorname{tr}\left\{(\widehat{\mathbf{B}}-\mathbf{B})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\widehat{\mathbf{B}}-\mathbf{B})\right\} + \\ + \operatorname{tr}\left\{(\widehat{\mathbf{B}}-\mathbf{B})'\underbrace{(\mathbf{Z}'\mathbf{YA}-\underbrace{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}}}_{\mathbf{X}'\mathbf{YA}}+\underbrace{\mathbf{Z}'(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})}_{\mathbf{Z}'\mathbf{YA}-\mathbf{Z}'\mathbf{YA}})}_{\mathbf{0}})\mathbf{Z}'(\widehat{\mathbf{B}}-\mathbf{B})\right\}, \end{aligned} \tag{159}$$

что и требовалось доказать.

Для вывода формы (158) необходимо воспользоваться теоремами 1 и 2 и выразить $\mathbf{b} = \operatorname{vec}(\mathbf{B})$ и $\widehat{\mathbf{b}} = \operatorname{vec}(\widehat{\mathbf{B}})$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left\{(\mathbf{YA}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})'(\mathbf{YA}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})\right\} + \operatorname{tr}\left\{(\widehat{\mathbf{B}}-\mathbf{B})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\widehat{\mathbf{B}}-\mathbf{B})\right\} = \\ = \operatorname{vec}(\mathbf{YA}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}})'\operatorname{vec}(\mathbf{YA}-\mathbf{Z}\widehat{\mathbf{B}}) + \operatorname{vec}\left(\mathbf{Z}(\mathbf{B}-\widehat{\mathbf{B}})\right)'\operatorname{vec}\left(\mathbf{Z}(\mathbf{B}-\widehat{\mathbf{B}})\right) = \\ = (\operatorname{vec}(\mathbf{YA})-(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{Z})\widehat{\mathbf{b}})'(\operatorname{vec}(\mathbf{YA})-(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{Z})\widehat{\mathbf{b}}) + (\mathbf{b}-\widehat{\mathbf{b}})'(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{Z})(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{Z})(\mathbf{b}-\widehat{\mathbf{b}}) \end{aligned} \tag{160}$$

□

Утверждение 14. *О выводе апостериорных плотностей параметров SVAR-моделей вида Sims-Zha в случае неинформативных априорных распределений.*

Утверждение 15. *О выводе апостериорных плотностей параметров SVAR-моделей вида Waggoner-Zha.*

Утверждение 16. *О выводе апостериорных плотностей параметров SVAR-моделей вида Baumeister-Gamilton.*

Утверждение 17. *О выводе формы функции правдоподобия структурной векторной авторегрессии для случая нормальных ошибок и верхней треугольной матрицы* $\mathbf{A}$. *Я премного благодарен Ирине Дмитриевне Козловцевой за помощь в выводе формулы. Для случая, когда* $\mathbf{A}$ *— верхняя треугольная, функцию правдоподобия можно представить в других формах. Квадраты диагональных элементов этой матрицы обозначим* $d_{ii}, i = 1 \dots n$. *Обозначим также* $\mathbf{S}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})'(\mathbf{Y} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})$. *При этом пусть* $\widetilde{\mathbf{a}}_j = \mathrm{vechd}(\mathbf{A}, j)$. *При этом* $\widetilde{\mathbf{s}}_i = \mathrm{vechd}(\mathbf{S}, j)$, $\mathbf{S}_j$ *— верхняя левая подматрица матрицы* $\mathbf{S}$ *размерности* $j \times j$, *а* s_{ij} *— её* (i,j)*-элемент. Определим* $v_i = s_{ii} - \widetilde{\mathbf{s}}_i' \mathbf{S}_i^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_i$ *(по соглашению* $v_{11} = s_{11}$*). Тогда функцию прадоподобия можно записать в следующей форме:*

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} \prod_{i=1}^{n} \left(|d_{ii}|^{\frac{T}{2}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_{ii} v_i + \sum_{j=2}^{n} (\widetilde{\mathbf{a}}_j + d_{jj}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j)' \mathbf{S}_{j-1} (\widetilde{\mathbf{a}}_j + d_{jj}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j)\right)\right\} \quad (161)$$

Доказательство. Данное утверждение напрямую будет следовать из утверждения 13, если доказать, что:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{S}\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} v_i + \sum_{j=2}^{n} (\widetilde{\mathbf{a}}_j + d_{jj}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j)' \mathbf{S}_{j-1} (\widetilde{\mathbf{a}}_j + d_{jj}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j) \quad (162)$$

Приступим. Обозначим $\mathbf{a}_i$ как i-столбец матрицы $\mathbf{A}$ (здесь предполагается, что $\mathbf{g}_1 = \emptyset$). Обозначим также через $\mathbf{S}_{r \times k}$ верхнюю подматрицу матрицы $\mathbf{S}$ размерности $r \times k$. Тогда:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{S}\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i' \mathbf{S} \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_i' & d_{ii}^{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_i \\ d_{ii}^{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left[\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_i' & d_{ii}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \mathbf{S}_{i \times n} \right] \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_i \\ d_{ii}^{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_i' & d_{ii}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \mathbf{S}_i \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_i \\ d_{ii}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_i' & d_{ii}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{i-1} & \widetilde{\mathbf{s}}_i{}' \\ \widetilde{\mathbf{s}}_i & s_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_i \\ d_{ii}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mathbf{a}}_i' (\mathbf{S}_{i-1} \mathbf{g}_i + d_{ii}^{\frac{1}{2}} \widetilde{\mathbf{s}}_i) + d_{ii}^{\frac{1}{2}} (\widetilde{\mathbf{s}}_i{}' \widetilde{\mathbf{a}}_i + d_{ii}^{\frac{1}{2}} s_{ii}) =$$

$$= d_{11} s_{11} + \sum_{j=2}^{n} d_{jj} s_{jj} + \widetilde{\mathbf{a}}_j' \mathbf{S}_{j-1} \widetilde{\mathbf{a}}_j + 2 d_{jj}^{\frac{1}{2}} \widetilde{\mathbf{a}}_j' \widetilde{\mathbf{s}}_j = d_{11} s_{11} + \sum_{j=2}^{n} d_{jj} s_{jj} + \widetilde{\mathbf{a}}_j' \mathbf{S}_{j-1} \widetilde{\mathbf{a}}_j + 2 d_{jj}^{\frac{1}{2}} \widetilde{\mathbf{a}}_j' \mathbf{S}_{j-1} \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j =$$

$$= d_{11} s_{11} + \sum_{j=2}^{n} d_{jj} s_{jj} + (\widetilde{\mathbf{a}}_j + d_{jj}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j)' \mathbf{S}_{j-1} (\widetilde{\mathbf{a}}_j + d_{jj}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j) - d_{jj} \widetilde{\mathbf{s}}_j' \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d_{ii} v_i + \sum_{j=2}^{n} (\widetilde{\mathbf{a}}_j + d_{jj}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j)' \mathbf{S}_{j-1} (\widetilde{\mathbf{a}}_j + d_{jj}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{j-1}^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j) \quad (163)$$

□

Утверждение 18. ***О выводе апостериорных плотностей параметров SVAR-моделей вида George et. al. Случай поиска ограничений только на верхнюю треугольную матрицу A.*** *Рассмотрим функцию правдоподобия в форме, выведенной в утверждении 17. При этом поиск ограничений ведётся по m элементам из $n(n-1)/2$ недиагональных элементов матрицы $\mathbf{A}$. При этом $\mathbf{\Phi} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$, $\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{vec}(\mathbf{\Phi})$, Для следующего набора априорных распределений:*

$$\mathbb{P}(\omega_{ij} = 1) = p_{ij}, \forall i, j: \quad 1 \leqslant i < j < n \tag{164}$$
$$\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{A}, \boldsymbol{\omega} \sim \mathcal{N}_{nk}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}, \underline{\mathbf{V}}) \tag{165}$$
$$d_{ii}|\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega} \sim \mathcal{G}(\underline{\alpha}_i^{\omega}, \underline{\beta}_i^{\omega}) \tag{166}$$
$$\widetilde{\mathbf{a}}_i|\boldsymbol{\varphi}, d_{ii}, \boldsymbol{\omega} \sim \mathcal{N}_{i-1}(\mathbf{0}, \underline{\mathbf{H}}_i^{\omega}\underline{\mathbf{R}}_i^{\omega}\underline{\mathbf{H}}_i^{\omega}) \tag{167}$$
$$\underline{\mathbf{H}}_i^{\omega} = \operatorname{diag}([h_{12}^{\omega}, \ldots, h_{(n-1)n}^{\omega}]) \tag{168}$$
$$h_{ij}^{\omega} = \begin{cases} c \to 0, \text{ если } \omega_s(\widetilde{(a)}_{ij}) = 1, \\ d \to \infty, \text{ если } \omega_s(\widetilde{(a)}_{ij}) = 0 \end{cases} \tag{169}$$

апостериорные плотности вероятности параметров выглядят следующим образом:

$$d_{ii}|\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}; \mathbf{X} \sim \mathcal{G}(\overline{\alpha}_i^{\omega}, \overline{\beta}_i^{\omega}) \tag{170}$$
$$\widetilde{\mathbf{a}}_i|\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}; \mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{i-1}(\overline{\mathbf{a}}_i, \overline{\mathbf{M}}_i^{\omega}) \tag{171}$$
$$\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{A}, \boldsymbol{\omega}; \mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{nk}(\overline{\boldsymbol{\varphi}}, \overline{\mathbf{V}}) \tag{172}$$

где

$$\overline{\mathbf{V}} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}' \otimes \mathbf{Z}'\mathbf{Z} + \underline{\mathbf{V}}^{-1}\right)^{-1} \tag{173}$$
$$\overline{\boldsymbol{\varphi}} = \overline{\mathbf{V}}\left((\mathbf{A}\mathbf{A}' \otimes \mathbf{Z}'\mathbf{Z})\,\widehat{P\boldsymbol{\varphi}} + \underline{\mathbf{V}}^{-1}\underline{\boldsymbol{\varphi}}\right) \tag{174}$$
$$\overline{\mathbf{M}}_i^{\omega} = \left((\underline{\mathbf{H}}_j^{\omega}\underline{\mathbf{R}}_j^{\omega}\underline{\mathbf{H}}_j^{\omega})^{-1} + \mathbf{S}_{j-1}\right)^{-1} \tag{175}$$
$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}} = \operatorname{vec}((\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y}) = \left[\mathbf{I}_n \otimes ((\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}')\right]\operatorname{vec}(\mathbf{Y}) \tag{176}$$
$$\overline{\mathbf{a}} = -d_{jj}^{\frac{1}{2}}\overline{\mathbf{M}}_j^{\omega}\widetilde{\mathbf{s}}_j \tag{177}$$
$$\overline{\alpha}_i^{\omega} = \underline{\alpha}_i^{\omega} + \frac{T}{2} \tag{178}$$
$$\overline{\beta}_i^{\omega} = \begin{cases} \underline{\beta}_i^{\omega} + \frac{1}{2}s_{ii}, \text{ если } i = 1 \\ \underline{\beta}_i^{\omega} + \frac{1}{2}s_{ii} + \frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{s}}_i'\overline{\mathbf{M}}_i^{\omega}\widetilde{\mathbf{s}}_i, \text{ если } i \neq 1 \end{cases} \tag{179}$$

Вектор-индикатор ограничений имеет распределение Бернулли:

$$\omega_{ij}|\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\omega}_k; \mathbf{X} \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{1+U}\right) \tag{180}$$

В общем случае:

$$U = \frac{p(\widetilde{\mathbf{a}}_j|\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\omega}_{-s}, \omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 0)}{p(\widetilde{\mathbf{a}}_j|\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\omega}_{-s}, \omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)}\frac{p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 0)}{p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)} = \frac{u_{ij}^0}{u_{ij}^1} \tag{181}$$
$$u_{ij}^1 = |\det\left(\underline{\mathbf{H}}_i^1\right)|^{-2(j-1)}|\det\left(\underline{\mathbf{R}}_i^1\right)|^{-(j-1)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{a}}_j'\left(\underline{\mathbf{H}}_i^1\underline{\mathbf{R}}_i^1\underline{\mathbf{H}}_i^1\right)^{-1}\widetilde{\mathbf{a}}_j\right\}p_{ij} \tag{182}$$
$$u_{ij}^0 = |\det\left(\underline{\mathbf{H}}_i^0\right)|^{-2(j-1)}|\det\left(\underline{\mathbf{R}}_i^0\right)|^{-(j-1)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{a}}_j'\left(\underline{\mathbf{H}}_i^0\underline{\mathbf{R}}_i^0\underline{\mathbf{H}}_i^0\right)^{-1}\widetilde{\mathbf{a}}_j\right\}(1-p_{ij}) \tag{183}$$

В случае, если $\mathbf{R}_j = \mathbf{I}_{j-1}$*:*

$$u^1_{ij} = \frac{1}{\underline{h}^1_{ij}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{a}_{ij}}{\underline{h}^1_{ij}}\right)^2\right\} p_{ij} \tag{184}$$

$$u^0_{ij} = \frac{1}{\underline{h}^0_{ij}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{a}_{ij}}{2\underline{h}^0_{ij}}\right)^2\right\} (1-p_{ij}) \tag{185}$$

Доказательство. Для начала распишем совместную функцию плотности параметров $\{d_{ii}\}_{i=1}^n$ и $\{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j=2}^n$ при условии данных $\mathbf{X}$ и ограничений $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{gathered}
p(\{d_{ii}\}_{i=1}^n, \{\widetilde{\mathbf{a}}_j\}_{j=2}^n | \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}; \mathbf{X}) \propto \\
\propto \left[\prod_{i=1}^n \left((d_{ii})^{\underline{\alpha}_i^\omega - 1} \exp\left\{-\underline{\beta}_i^\omega d_{ii}\right\}\right)\right] \left[\prod_{j=2}^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{a}}_j'(\underline{\mathbf{H}}_j^\omega \underline{\mathbf{R}}_j^\omega \underline{\mathbf{H}}_j^\omega)^{-1}\widetilde{\mathbf{a}}_j\right\}\right] \prod_{i=1}^n \left(|d_{ii}|^{\frac{T}{2}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n d_{ii} v_i\right\} \times \\
\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^n (\widetilde{\mathbf{a}}_j + d_{jj}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{j-1}^{-1}\widetilde{\mathbf{s}}_j)' \mathbf{S}_{j-1} (\widetilde{\mathbf{a}}_j + d_{jj}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{j-1}^{-1}\widetilde{\mathbf{s}}_j)\right\} = \left[(d_{11})^{\overline{\alpha}_1^\omega - 1} \exp\left\{-(\underline{\beta}_1^\omega + \frac{1}{2}s_{11}) d_{11}\right\}\right] \times \\
\times \left[\prod_{j=2}^n \left((d_{ii})^{\underline{\alpha}_j^\omega + \frac{T}{2} - 1} \exp\left\{-(\underline{\beta}_j^\omega + v_i) d_{ii}\right\}\right)\right] \times \\
\times \left[\prod_{j=2}^n \exp\left\{-\frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{a}}_j' \underbrace{((\underline{\mathbf{H}}_j^\omega \underline{\mathbf{R}}_j^\omega \underline{\mathbf{H}}_j^\omega)^{-1} + \mathbf{S}_{j-1})}_{(\overline{\mathbf{M}}_j^\omega)^{-1}} \widetilde{\mathbf{a}}_j + \underbrace{2 d_{jj}^{\frac{1}{2}} \widetilde{\mathbf{a}}_j' \widetilde{\mathbf{s}}_j}_{2 d_{jj}^{\frac{1}{2}} \widetilde{\mathbf{a}}_j' (\overline{\mathbf{M}}_j^\omega)^{-1} \overline{\mathbf{M}}_j^\omega \widetilde{\mathbf{s}}_j} + d_{jj} \widetilde{\mathbf{s}}_j' \mathbf{S}_{j-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j)\right\}\right] = \\
= \left[(d_{11})^{\overline{\alpha}_1^\omega - 1} \exp\left\{-(\underline{\beta}_1^\omega + \frac{1}{2}s_{11}) d_{11}\right\}\right] \left[\prod_{j=2}^n \left((d_{ii})^{\overline{\alpha}_j^\omega - 1} \exp\left\{-\underbrace{\left(\underline{\beta}_j^\omega + \frac{v_i}{2} + \frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{s}}_j' \mathbf{S}_{j-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j - \frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{s}}_j' \left(\overline{\mathbf{M}}_j^\omega\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j\right)}_{\overline{\beta}_i^\omega = \underline{\beta}_i^\omega + \frac{1}{2}\left(s_{ii} + \widetilde{\mathbf{s}}_j' \left(\overline{\mathbf{M}}_j^\omega\right)^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_j\right)} d_{ii}\right\}\right)\right. \\
\times \left[\prod_{j=2}^n \exp\left\{-\frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{a}}_j + \underbrace{d_{jj}^{\frac{1}{2}} \overline{\mathbf{M}}_j^\omega \widetilde{\mathbf{s}}_j}_{\overline{\mathbf{a}}_j})' \left(\overline{\mathbf{M}}_j^\omega\right)^{-1} (\widetilde{\mathbf{a}}_j + d_{jj}^{\frac{1}{2}} \overline{\mathbf{M}}_j^\omega \widetilde{\mathbf{s}}_j)\right\}\right] = \\
= \left[\prod_{i=1}^n d_{ii}^{\overline{\alpha}_i^\omega} \exp\left\{-\overline{\beta}_i^\omega\right\}\right] \left[\prod_{j=2}^n \exp\left\{-\frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{a}}_j - \overline{\mathbf{a}}_j)' \left(\overline{\mathbf{M}}_j^\omega\right)^{-1} (\widetilde{\mathbf{a}}_j - \overline{\mathbf{a}}_j)\right\}\right]
\end{gathered} \tag{186}$$

Для того, чтобы выразить апостериорную функцию плотности $\boldsymbol{\varphi}$ при условии параметров $\mathbf{A}$ и $\boldsymbol{\omega}$, необходимо расписать следующую функцию:

$$p(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{A}, \boldsymbol{\omega}; \mathbf{X}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\varphi}})' \underline{\mathbf{V}}^{-1} (\boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\varphi}})\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\Phi})\mathbf{A}\mathbf{A}'(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\Phi})'\right\} \tag{187}$$

что аналогично утверждению 3. Следовательно, можно получить апостериорную плотность, аналогичную описанному в настоящем утверждении.

Для того, чтобы выразить апостериорную при условии остальных параметров функцию плотности параметра $\boldsymbol{\omega}$, контролирующего ограничения на матрицу $\mathbf{A}$, рассмотрим апостериорную условную функцию плотности каждого отдельного его элемента:

$$p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1|\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\omega}_{-s}; \mathbf{X}) = \frac{p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\omega}_{-s}; \mathbf{X}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)}{p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\omega}_{-s}; \mathbf{X})} =$$
$$= \frac{p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\omega}_{-s}; \mathbf{X}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)}{p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\omega}_{-s}; \mathbf{X}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1) + p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 0)p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\omega}_{-s}; \mathbf{X}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 0)} \tag{188}$$

Следует обратить внимание на два факта. Во-первых, функция плотности парметров при условии ограничения на конкретный элемент может быть расписана следующим образом:

$$p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\omega}_{-s}; \mathbf{X}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij})) = p(\boldsymbol{\omega}_{-s}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij}))p(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\omega})p(\mathbf{D}|\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega})p(\widetilde{\mathbf{A}}|\mathbf{D}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega})p(\mathbf{X}|\widetilde{\mathbf{A}}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}) \tag{189}$$

При этом если переменные $\mathbf{Z}$ являются слабо экзогенными, то $p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\varphi}, \widetilde{\mathbf{A}}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\gamma}) = p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\varphi}, \widetilde{\mathbf{A}}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\gamma}; \mathbf{Z})p(\mathbf{Z})$.

Во-вторых, для случаев $\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1$ и $\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 0$ различия заключаются лишь в априорной функции распределения конкретного элемента матрицы $\widetilde{\mathbf{A}}$. Это свзано с тем, что набор ограничений ω не ограничивает в явном виде значения функции правдоподобия, но ограничивает исключительно параметры априорных распределений диагональных элементов, в связи с чем $p(\mathbf{Y}|\widetilde{\mathbf{A}}, \mathbf{D}, \varphi, \omega; \mathbf{Z}) = p(\mathbf{Y}|\widetilde{\mathbf{A}}, \mathbf{D}, \varphi; \mathbf{Z})$. В силу независимости строк матрицы $\widetilde{\mathbf{A}}$ уравнение (188) можно переписать как:

$$p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1|\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\omega}_{-s}; \mathbf{X}) =$$
$$= \frac{p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)p(\widetilde{\mathbf{a}}_j|\mathbf{D}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}_{-s}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)}{p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)p(\widetilde{\mathbf{a}}_j|\mathbf{D}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}_{-s}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1) + p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 0)p(\widetilde{\mathbf{a}}_j|\mathbf{D}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}_{-s}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 0)} \tag{190}$$

Более того, можно обратить внимание, что каждое из этих распределений можно нормировать на константу, что даёт доказательство этой части утверждения.

В случае, если $\mathbf{R}_j = \mathbf{I}_{j-1}$, эту же формулу можно переписать в терминах функции плотности конкретного (i, j)-элемента:

$$p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1|\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\omega}_{-s}; \mathbf{X}) =$$
$$= \frac{p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)p(\widetilde{a}_{ij}|\mathbf{D}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}_{-s}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)}{p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1)p(\widetilde{a}_{ij}|\mathbf{D}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}_{-s}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 1) + p(\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 0)p(\widetilde{a}_{ij}|\mathbf{D}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}_{-s}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij}) = 0)} \tag{191}$$

Сокращение в функциях плотности $p(\widetilde{a}_{ij}|\mathbf{D}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}_{-s}|\omega_s(\widetilde{a}_{ij}))$ одинаковых констант даёт доказательство утверждения. □

Утверждение 19. *О выводе апостериорных плотностей параметров SVAR-моделей вида George et. al. Случай поиска ограничений только на матрицу $\mathbf{\Phi}$ при условии верхней треугольной матрицы $\mathbf{A}$.* *Рассмотрим функцию правдоподобия в форме, выведенной в утверждении 17. При этом поиск ограничений ведётся по f элементам из nk элементов матрицы $\mathbf{\Phi} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$. Вектор параметров при лаговых переменных $\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{vec}(\mathbf{\Phi})$ может быть разделён на два подвектора параметров: вектора параметров, по которому производится поиск ограничений $\boldsymbol{\varphi}_R$ размерности $m \times 1$ и вектора параметров $\boldsymbol{\varphi}_{UR}$ размерности $nk - m \times 1$, имеющих одинаковое априорное распределение для любого набора ограничений. При этом априори авторы статьи предполагают, что $\boldsymbol{\varphi}_R \perp \boldsymbol{\varphi}_{UR}$ (это связано с тем, что а приори предполагается, что $\gamma_{ij} = 0$ соответствует ограничению, а $\gamma_{ij} = 1$ соответствует неинформативным априорным предположениям).*

Помимо этого предположения можо рассматривать аналог g-prior Зельнера для векторных авторегрессий для случая $\boldsymbol{\gamma}_{i:s} = 0$: $[\mathbf{V}^{\gamma} = \mathbf{K}^{-1} \otimes (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})]_{(s-i)\times(s-i)}$. Однако в этом случае не обязательно $\boldsymbol{\varphi}_R \perp \boldsymbol{\varphi}_{UR}$, и следует рассматривать совместную функцию плотности $\boldsymbol{\varphi} = [\boldsymbol{\varphi}'_R, \boldsymbol{\varphi}'_{UR}]'$. В случае, если $\boldsymbol{\gamma}_{i:s} = 1$, логично предположить независимость ограниченных параметров. Таким образом, для *следующего набора априорных распределений:*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\gamma_{ij}=1)=q_{ij}, \forall i,j: \;\; 1 \leqslant i < j < n && (192)\\
&\boldsymbol{\varphi}_R|\mathbf{A},\boldsymbol{\gamma} \sim \mathcal{N}_{nk}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}_R^{\gamma}, \underline{\mathbf{G}}_R^{\gamma}\underline{\mathbf{P}}_R^{\gamma}\underline{\mathbf{G}}_R^{\gamma}) && (193)\\
&\boldsymbol{\varphi}_{UR}|\mathbf{A},\boldsymbol{\gamma} \sim \mathcal{N}_{nk}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}_{UR}, \underline{\mathbf{V}}_{UR}^{\gamma}) && (194)\\
&\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{A},\boldsymbol{\gamma} \sim \mathcal{N}_{nk}(\underline{\boldsymbol{\varphi}}^{\gamma}, \underline{\mathbf{V}}^{\gamma}) && (195)\\
&d_{ii}|\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\gamma} \sim \mathcal{G}(\underline{\alpha}_i, \underline{\beta}_i) && (196)\\
&\widetilde{\mathbf{a}}_i|\boldsymbol{\varphi}, d_{ii}, \boldsymbol{\gamma} \sim \mathcal{N}_{i-1}(\mathbf{0}, \underline{\mathbf{H}}_i\underline{\mathbf{R}}_i\underline{\mathbf{H}}_i) && (197)\\
&\underline{\mathbf{G}}_R^{\gamma} = \operatorname{diag}([g_{12}^{\gamma}, \ldots, g_m^{\gamma}]) && (198)\\
&g_{ij}^{\gamma} = \begin{cases} c \to 0, \textit{если } \gamma_s(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{ij}) = 1, \\ d \to \infty, \textit{если } \gamma_s(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{ij}) = 0 \end{cases} && (199)\\
&\mathbf{V}_{\mathbf{R}}^{\gamma} = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{\gamma}=1 \\ \boldsymbol{\gamma}=0 \\ UR \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{\gamma}=1 & \boldsymbol{\gamma}=0 & UR \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{G}}_R^{\gamma}\underline{\mathbf{P}}_R^{\gamma}\underline{\mathbf{G}}_R^{\gamma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{V}}_0^{\gamma} & \underline{\mathbf{V}}_{0.UR}^{\gamma} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{V}}_{UR.0}^{\gamma} & \underline{\mathbf{V}}_{UR}^{\gamma} \end{bmatrix} \end{array} && (200)\\
&\underline{\boldsymbol{\varphi}}_R^0 = \mathbf{0} && (201)\\
&\underline{\boldsymbol{\varphi}}_R^1 = \underline{\boldsymbol{\varphi}}_R^1 && (202)
\end{aligned}
$$

апостериорные плотности вероятности параметров выглядят следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{A},\boldsymbol{\gamma};\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{nk}(\overline{\boldsymbol{\varphi}}^{\gamma}, \overline{\mathbf{V}}^{\gamma}) && (203)\\
&d_{ii}|\boldsymbol{\gamma};\mathbf{X} \sim \mathcal{G}(\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i) && (204)\\
&\widetilde{\mathbf{a}}_i|\boldsymbol{\gamma};\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{i-1}(\overline{\mathbf{a}}_i, \overline{\mathbf{M}}_i) && (205)\\
& && (206)
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{V}}^{\gamma} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}' \otimes \mathbf{Z}'\mathbf{Z} + (\underline{\mathbf{V}}^{\gamma})^{-1}\right)^{-1} && (207)\\
&\overline{\boldsymbol{\varphi}}^{\gamma} = \overline{\mathbf{V}}^{\gamma}\left((\mathbf{A}\mathbf{A}' \otimes \mathbf{Z}'\mathbf{Z})\,\widehat{\boldsymbol{\varphi}} + (\underline{\mathbf{V}}^{\gamma})^{-1}\underline{\boldsymbol{\varphi}}^{\gamma}\right) && (208)\\
&\overline{\mathbf{M}}_i = \left((\underline{\mathbf{H}}_j\underline{\mathbf{R}}_j\underline{\mathbf{H}}_j)^{-1} + \mathbf{S}_{j-1}\right)^{-1} && (209)\\
&\overline{\mathbf{a}} = -d_{jj}^{\frac{1}{2}}\overline{\mathbf{M}}_j\widetilde{\mathbf{s}}_j && (210)\\
&\overline{\alpha}_i = \underline{\alpha}_i + \frac{T}{2} && (211)\\
&\overline{\beta}_i = \begin{cases} \underline{\beta}_i + \frac{1}{2}s_{ii}, \textit{ если } i = 1 \\ \underline{\beta}_i + \frac{1}{2}s_{ii} + \frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{s}}_i'\overline{\mathbf{M}}_i\widetilde{\mathbf{s}}_i, \textit{ если } i \neq 1 \end{cases} && (212)
\end{aligned}
$$

Вероятность ограничения может быть выражена как:

$$
\gamma_{ij}|\boldsymbol{\varphi},\mathbf{D},\boldsymbol{\gamma}_k;\mathbf{X} \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{1+V}\right) \qquad (213)
$$

В общем случае:

$$V = \frac{p(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}, \gamma_s(\varphi_{ij}) = 0)}{p(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}, \gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)} \frac{p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 0)}{p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)} = \frac{v_{ij}^0}{v_{ij}^1} \tag{214}$$

$$v_{ij}^1 = |\det(\underline{\mathbf{V}}^1)|^{-nk} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}^1)' \left(\underline{\mathbf{V}}^1\right)^{-1} (\boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}^1)\right\} p_{ij} \tag{215}$$

$$v_{ij}^0 = |\det(\underline{\mathbf{V}}^0)|^{-nk} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}^0)' \left(\underline{\mathbf{V}}^0\right)^{-1} (\boldsymbol{\varphi} - \underline{\boldsymbol{\varphi}}^0)\right\} (1 - p_{ij}) \tag{216}$$

В случае, если $\mathbf{P}_j = \mathbf{I}_{j-1}$ *и* $\mathbf{V}_{0.UR} = \mathbf{0}$*:*

$$v_{ij}^1 = \frac{1}{\underline{g}_{ij}^1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_{ij}}{\underline{g}_{ij}^1}\right)^2\right\} p_{ij} \tag{217}$$

$$v_{ij}^0 = \frac{1}{\underline{g}_{ij}^0} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_{ij}}{\underline{g}_{ij}^0}\right)^2\right\} (1 - p_{ij}) \tag{218}$$

Доказательство. Все апостериорные распределения выводятся аналогично распределениям из утверждения 18. Поэтому остановимся на выводе апостериорных вероятностей индикаторов ограничений. Распишем апостериорную вероятность индикаторной функции:

$$\begin{aligned} p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 1|\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\omega}_{-s}; \mathbf{X}) &= \frac{p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}; \mathbf{X}|\gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)}{p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}; \mathbf{X})} = \\ = \frac{p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}; \mathbf{X}|\gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)}{p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}; \mathbf{X}|\gamma_s(\varphi_{ij}) = 1) + p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 0)p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}; \mathbf{X}|\gamma_s(\varphi_{ij}) = 0)} \end{aligned} \tag{219}$$

Распишем совместную плотность с помощью цепной формулы:

$$p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}; \mathbf{X}|\gamma_s(\varphi_{ij}) = j)) = p(\boldsymbol{\gamma}_{-s}|\gamma_s(\varphi_{ij}) = j)p(\mathbf{D}|\boldsymbol{\gamma})p(\widetilde{\mathbf{A}}|\mathbf{D}, \boldsymbol{\gamma})p(\boldsymbol{\varphi}|\widetilde{\mathbf{A}}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\gamma})p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\varphi}, \widetilde{\mathbf{A}}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\gamma}) \tag{220}$$

При этом если переменные $\mathbf{Z}$ являются слабо экзогенными, то $p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\varphi}, \widetilde{\mathbf{A}}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\gamma}) = p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\varphi}, \widetilde{\mathbf{A}}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\gamma}; \mathbf{Z})p(\mathbf{Z})$. Подобно 18, функции плотности для $\gamma_s = 1$ и $\gamma_s = 0$ отличаются лишь априорными плотностями параметров $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\begin{aligned} &p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}; \mathbf{X}|\gamma_s(\varphi_{ij}) = j)) = \\ &= \frac{p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)p(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}_{-s}, \gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)}{p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)p(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}, \gamma_s(\varphi_{ij}) = 1) + p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 0)p(\boldsymbol{\varphi}|\mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}, \gamma_s(\varphi_{ij}) = 0)} \end{aligned} \tag{221}$$

В случае, если предполагается независимость ограничиваемых параметров (случай $\underline{\mathbf{V}}_{0.UR}^{\gamma} = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_R^0 = \mathbf{P}_R^1 = \mathbf{I}_f$), вероятность индикаторов ограничений расписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &p(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}; \mathbf{X}|\gamma_s(\varphi_{ij}) = j)) = \\ &= \frac{p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)p(\varphi_{ij}|\mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}_{-s}, \gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)}{p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 1)p(\varphi_{ij}|\mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}, \gamma_s(\varphi_{ij}) = 1) + p(\gamma_s(\varphi_{ij}) = 0)p(\varphi_{ij}|\mathbf{D}, \widetilde{\mathbf{A}}, \boldsymbol{\gamma}_{-s}, \gamma_s(\varphi_{ij}) = 0)} \end{aligned} \tag{222}$$

□

A Выводы из линейной алгебры

Большая часть материала этого раздела — это компиляция и осмысление материала статьи (Magnus and Neudecker, 1986).

A.1 Произведение Кронекера и его свойства

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\otimes(\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})\otimes\mathbf{C} \tag{223}$$

$$\mathbf{A}\otimes(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})+(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\otimes\mathbf{C} = (\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})+(\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}) \tag{224}$$

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})' = \mathbf{A}'\otimes\mathbf{B}' \tag{225}$$

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{B}^{-1} \tag{226}$$

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}) = \mathbf{AC}\otimes\mathbf{BD} \tag{227}$$

$$|\det(\underbrace{\mathbf{A}}_{p\times p}\otimes\underbrace{\mathbf{B}}_{m\times m})| = |\det(\mathbf{A})|^m|\det(\mathbf{B})|^p \tag{228}$$

A.2 Оператор векторизации и его связь с произведением Кронекера

Оператор векторизации определим следующим образом: это оператор, преобразующий заданную матрицу в вектор-столбец, состоящий из векторов-столбцов исходной матрицы: $\mathrm{vec}(\mathbf{A}) = [\mathbf{a}_{\bullet,1},\ \mathbf{a}_{\bullet,2},\ \dots,\ \mathbf{a}_{\bullet,n}]$. Так, например, для матрицы размера (3×3) данная операция выглядит следующим образом:

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A}) = \mathrm{vec}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

Теорема 1. *Магическая теорема:* $\mathrm{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}'\otimes\mathbf{A})\,\mathrm{vec}(\mathbf{X})$

Доказательство. Пусть $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n]$ и $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m]$. Тогда k-столбец $\mathbf{AXB}$ выглядит следующим образом:

$$(\mathbf{AXB})_{\bullet,k} = \mathbf{AXb}_k = \mathbf{A}\sum_{i=1}^{m}\mathbf{x}_i b_{ik} = \sum_{i=1}^{m} b_{ik}\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} b_{1k}\mathbf{A} & b_{2k}\mathbf{A} & \dots b_{mk}\mathbf{A} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix}}_{\mathrm{vec}(\mathbf{X})} = (\mathbf{b}_k'\otimes\mathbf{A})\,\mathrm{vec}(\mathbf{X})$$

Собираем всё воедино:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AXB}_{\bullet,1} \\ \mathbf{AXB}_{\bullet,2} \\ \dots \\ \mathbf{AXB}_{\bullet,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1' \otimes \mathbf{A} \\ \mathbf{b}_2' \otimes \mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{b}_n' \otimes \mathbf{A} \end{bmatrix} \operatorname{vec}(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}' \otimes \mathbf{A}) \operatorname{vec}(\mathbf{X}), \text{ q.e.d.}$$

□

Теорема 2. *2я Магическая теорема:* $\operatorname{tr}(\mathbf{B}'\mathbf{B}) = \operatorname{vec}(\mathbf{B})' \operatorname{vec}(\mathbf{B})$.

Доказательство. Распишем матрицу $\mathbf{B}$ в терминах столбцов: $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n]$. Тогда:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{B}'\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b}_j' \mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 = \operatorname{vec}(\mathbf{B})' \operatorname{vec}(\mathbf{B})$$

□

A.3 Матрицы дупликации и элиминации. Оператор полувекторизации

Рассмотрим симметричную матрицу $\mathbf{A}$. В силу того, что для $i \neq j$ $\{i,j\}$ элементы симметричной матрицы по построению совпадают с $\{i,j\}$ элементами, может быть важно рассмотреть вектор, состоящий из по построению не повторяющихся элементов матрицы. Для этого используется операция полувекторизации $\operatorname{vech}(\bullet)$, которая, например, для матрицы 3×3 выглядит следующим образом:

$$\operatorname{vech}(\mathbf{A}) = \operatorname{vech}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

Очевидно, что операцию полувекторизации можно свести к операции векторизации, домножив его слева на матрицу $\mathbf{D}_n$, состоящую из 0 и 1:

$$\mathbf{D}_n \operatorname{vech}(\mathbf{A}) = \operatorname{vec}(\mathbf{A}) \tag{229}$$

Матрица $\mathbf{D}_n$ называется **матрицей дупликации**. Для случая матрицы размерности 3×3 операция (229) выглядит следующим образом:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{D}_n} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}}_{\operatorname{vech}(\mathbf{A})} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}}_{\operatorname{vec}(\mathbf{A})} \tag{230}$$

К сожалению, матрица дупликации всегда несимметричная ($\text{rank}(\mathbf{D}_n) = 0.5n(n+1)$). Поэтому обратная к ней матрица не определена, и вместо обычной обратной матрицы пользуются псевдообратной матрицей Мура-Пенроуза:

$$\mathbf{D}_n^+ = (\mathbf{D}_n'\mathbf{D}_n)^{-1}\mathbf{D}_n' \tag{231}$$

Для случая 3×3 эта матрица выглядит следующим образом:

$$(\mathbf{D}_n^+)' = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

По определению псевдообратной матрицы верно следующее выражение:

$$\mathbf{D}_n^+\mathbf{D}_n = \mathbf{I}_{n(n-1)/2} \tag{232}$$

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— диагональная (верхняя треугольная или нижняя треугольная) матрица размерности* $n \times n$ *с диагональными элементами* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$*. Тогда матрица* $\mathbf{D}_n^+(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{D}_n$ *также диагональная (верхняя треугольная или нижняя треугольная) с диагональными элементами* $a_{ii}a_{jj}(1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n)$*.*

Доказательство. Доказательство представлено в работе (Magnus and Neudecker, 1986), стр. 174. □

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— диагональная (верхняя треугольная или нижняя треугольная) матрица размерности* $n \times n$ *с собственными значениями* $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \ldots, \lambda_{nn}$*. Тогда собственные значения матрицы* $\mathbf{D}_n^+(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{D}_n$ *есть* $\lambda_i\lambda_j(1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n)$ *и верны следующие соотношения:*

$$\text{tr}(\mathbf{D}_n^+(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{D}_n) = \frac{\text{tr}(\mathbf{A})^2 + \text{tr}(\mathbf{A}^2)}{2}$$
$$|\det(\mathbf{D}_n^+(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{D}_n)| = |\det(\mathbf{A})|^{n+1}$$

Доказательство. Доказательство представлено в работе (Magnus and Neudecker, 1986), стр. 174-175.

По теореме Shur, существует невырожденная матрица $\mathbf{S}$, такая, что $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{M}$, где матрица $\mathbf{M}$ — верхняя треугольная матрица со собственными значениями $\lambda_{ii}, i \geqslant 1$ на её диагонали. Следовательно, по свойствам кронекеровского произведения,

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_n^+(\mathbf{M} \otimes \mathbf{M})\mathbf{D}_n = \mathbf{D}_n^+\left((\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}) \otimes (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S})\right)\mathbf{D}_n = \mathbf{D}_n^+\left(\mathbf{S}^{-1} \otimes \mathbf{S}^{-1}\right)(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S})\mathbf{D}_n =$$
$$= \underbrace{\mathbf{D}_n^+\left(\mathbf{S}^{-1} \otimes \mathbf{S}^{-1}\right)\mathbf{D}_n}_{\widetilde{\mathbf{S}}^{-1}}\underbrace{\mathbf{D}_n^+\mathbf{D}_n(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{D}_n}_{\widetilde{\mathbf{M}}}\underbrace{\mathbf{D}_n^+(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S})\mathbf{D}_n}_{\widetilde{\mathbf{S}}} \tag{233}$$

Следует обратить внимание на тот факт, что исходная матрица может быть представлена декомпозицией Шура $\mathbf{B} = \widetilde{\mathbf{S}}^{-1}\widetilde{\mathbf{M}}\widetilde{\mathbf{S}}$. А значит, матрицы $\mathbf{B}$ и $\widetilde{\mathbf{M}}$ имеют одинаковый набор собственных значений. По лемме **??** на диагональных элементах матрицы $\mathbf{B}$ стоят $\mu_s = \lambda_i\lambda_j(1 \leqslant j \leqslant n), 1 \leqslant s \leqslant n(n+1)/2$, которые являются собственными значениями матрицы $\mathbf{B}$, а значит, и матрицы $\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{B} = \mathbf{D}_n^+(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{D}_n$.

Поскольку след матрицы есть сумма её собственных знчений, то:

$$\text{tr}(\mathbf{D}_n^+(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{D}_n) = \sum_{s=1}^{n(n+1)/2} \mu_s = \sum_i^n \sum_{j \leqslant i} \lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}\sum_s^n \lambda_s^2 + \frac{1}{2}\sum_i^n \sum_{j \leqslant i} \lambda_i\lambda_j = \frac{\text{tr}(\mathbf{A})^2 + \text{tr}(\mathbf{A}^2)}{2}$$

Поскольку определитель матрицы есть произведение её собственных значений, то:

$$|\mathbf{D}_n^+(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A})\mathbf{D}_n| = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{i}(\lambda_i\lambda_j) = \prod_{i}^{n}\left(\lambda_i^i\prod_{j=1}^{i}\lambda_j\right) = \prod_{i}^{n}\lambda_i^{i+1+\sum_{j=i+1}^{n}1} = \prod_{i}^{n}\lambda_i^{n+1} = |\mathbf{A}|^{n+1}$$

□

A.4 Якобианы для трансформации некоторых матриц

A.4.1 Якобиан замены элементов обратной матрицы на элементы исходной

Рассмотрим некоторую матрицу $\mathbf{A}$ размерности $n\times n$, для которой обратная определена как $\mathbf{C}=\mathbf{A}^{-1}$. Но это означает, что выполняется $\mathbf{CA}=\mathbf{I}_n$. Следовательно, взяв дифференциал по матрицам, можно получить:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{C}\mathbf{A}+\mathbf{C}\,\mathrm{d}\mathbf{A} &= \mathbf{0} \\ \mathrm{d}\mathbf{C} &= -\mathbf{C}\,\mathrm{d}\mathbf{A}\mathbf{C} \end{aligned}$$

Таким образом, производная обратной матрицы по каждому элементу исходной выглядит как:

$$\frac{\partial C_{kl}}{\partial A_{ij}} = C_{ki}C_{jl} \tag{234}$$

Тогда Якобиан рассматриваемой замены выглядит следующим образом:

$$\left|\frac{\partial\operatorname{vec}(\mathbf{C})}{\partial\operatorname{vec}(\mathbf{A})}\right| = \left| - \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} A_{11} & \dots & A_{n1} & A_{12} & \dots & A_{n2} & \dots & A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{array} \\ \begin{array}{c} C_{11} \\ \vdots \\ C_{n1} \\ C_{12} \\ \vdots \\ C_{n2} \\ \vdots \\ C_{1n} \\ \vdots \\ C_{nn} \end{array} & \begin{bmatrix} C_{11}C_{11} & & C_{1n}C_{11} & C_{11}C_{21} & & C_{1n}C_{21} & & C_{11}C_{n1} & & C_{1n}C_{n1} \\ & & & & & & & & & \\ C_{n1}C_{11} & & C_{nn}C_{11} & C_{n1}C_{21} & & C_{nn}C_{21} & & C_{n1}C_{n1} & & C_{nn}C_{n1} \\ C_{11}C_{12} & & C_{1n}C_{12} & C_{11}C_{22} & & C_{1n}C_{22} & & C_{11}C_{n2} & & C_{1n}C_{n2} \\ & & & & & & & & & \\ C_{n1}C_{12} & & C_{nn}C_{12} & C_{n1}C_{22} & & C_{nn}C_{22} & & C_{n1}C_{n2} & & C_{nn}C_{n2} \\ & & & & & & & & & \\ C_{11}C_{1n} & & C_{1n}C_{1n} & C_{11}C_{2n} & & C_{1n}C_{2n} & & C_{11}C_{nn} & & C_{1n}C_{nn} \\ & & & & & & & & & \\ C_{n1}C_{1n} & & C_{nn}C_{1n} & C_{n1}C_{2n} & & C_{nn}C_{2n} & & C_{n1}C_{nn} & & C_{nn}C_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \right| =$$

$$= \left| - \begin{bmatrix} C_{11}\mathbf{C} & C_{21}\mathbf{C} & \dots & C_{n1}\mathbf{C} \\ C_{12}\mathbf{C} & C_{22}\mathbf{C} & \dots & C_{n2}\mathbf{C} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n}\mathbf{C} & C_{2n}\mathbf{C} & \dots & C_{nn}\mathbf{C} \end{bmatrix} \right| = |\mathbf{C}'\otimes\mathbf{C}| = |\mathbf{C}'|^n|\mathbf{C}|^n = |\mathbf{C}|^{2n} = |\mathbf{A}|^{-2n} \tag{235}$$

Тот же самый результат можно получить, просто векторизовав $\mathrm{d}\mathbf{C}$ и $\mathrm{d}\mathbf{A}$:

$$\operatorname{vec}(\mathrm{d}\mathbf{C}) = -(\mathbf{C}'\otimes\mathbf{C})\operatorname{vec}(\mathrm{d}\mathbf{A}) \tag{236}$$

$$\left|\frac{\partial\operatorname{vec}(\mathbf{C})}{\partial\operatorname{vec}(\mathbf{A})}\right| = |\mathbf{C}'\otimes\mathbf{C}| = |\mathbf{A}|^{-2n} \tag{237}$$

A.4.2 Якобиан замены элементов обратной матрицы на элементы исходной для симметричной матрицы

Для симметричных матриц ситуация осложняется тем, что теперь в матрицах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ ровно $n(n+1)/2$ уникальных неповторяющихся элементов. Это значит, что количество замен сокращается ровно на $n(n-1)/2$ штук. Поэтому вместо того, чтобы рассматривать замену векторизации матрицы $\mathbf{C}$ на векторизацию матрицы $\mathbf{A}$, можно рассмотреть замену векторизации нижней треугольной подматрицы $\mathbf{C}$ на векторизацию нижней треугольной подматрицы $\mathbf{A}$.

Таким образом, этот якобиан можно вывести из (235) , используя вместо векторизации операцию полувекторизации. Но так как полувекторизация может быть получена из векторизации умножением на матрицу дупликации $\mathbf{D}$, то из леммы 2 следует, что:

$$\mathbf{D}\,\mathrm{vech}(\mathrm{d}\mathbf{C}) = -(\mathbf{C}' \otimes \mathbf{C})\mathbf{D}\,\mathrm{vech}(\mathrm{d}\mathbf{A}) \tag{238}$$

$$\left|\frac{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{C})}{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{A})}\right| = |\mathbf{D}_n^+(\mathbf{C}' \otimes \mathbf{C})\mathbf{D}_n| = |\mathbf{C}|^{n+1} = |\mathbf{A}|^{-(n+1)} \tag{239}$$

A.4.3 Якобиан замены элементов матрицы на элементы произведения матрицы на другую матрицу

Рассмотрим замену матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$. Векторизуем матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ по строкам. Тогда очевидно, что:

$$\left|\frac{\partial\,\mathrm{vec}(\mathbf{A})}{\partial\,\mathrm{vec}(\mathbf{B})}\right| = \left|\frac{\partial\,\mathrm{vec}(\mathbf{B})}{\partial\,\mathrm{vec}(\mathbf{A})}\right|^{-1} = \left[\det\begin{pmatrix} \mathbf{C}' & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}' & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}' \end{pmatrix}\right]^{-1} = |\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{C}'|^{-1} = |\mathbf{I}_n|^{-n}|\mathbf{C}'|^{-n} = |\mathbf{C}|^{-n} \tag{240}$$

Для симметричных матриц подобная замена не определена: если матрица $\mathbf{A}$ симметрична, матрица $\mathbf{B}$ несимметрична, поэтому Якобиан для тако замены не определён. Зато для такой матрицы определен Якобиан замены $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \mathbf{CAC}$, где $\mathbf{C}$ — невырожденная матрица размерности $n \times n$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{B} &= \mathbf{C}\,\mathrm{d}\mathbf{A}\mathbf{C} \\ \mathrm{vec}(\mathrm{d}\mathbf{B}) &= (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{C})\,\mathrm{vec}(\mathrm{d}\mathbf{A}) \\ \mathrm{vech}(\mathrm{d}\mathbf{B}) &= \mathbf{D}_n^+(\mathbf{C}' \otimes \mathbf{C})\mathbf{D}_n\,\mathrm{vech}(\mathrm{d}\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Таким образом, в силу леммы 2 Якобиан такой замены выглядит следующим образом:

$$\left|\frac{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{B})}{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{A})}\right| = |\mathbf{C}' \otimes \mathbf{C}| = |\mathbf{C}|^{n+1} \tag{241}$$

A.4.4 Якобиан замены симметричной положительно определённой матрицы на матрицу разложения Холецкого для неё

Рассмотрим симметричную положительно определённую матрицу $\mathbf{X}$ размерности $n \times n$, разложение Холецкого $\mathbf{T}$ для которой можно записать как $\mathbf{X} = \mathbf{TT}'$. При этом распишем $\mathbf{T}' = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n]$, где $\mathbf{t}_i$ — соответствующий вектор-столбец матрицы $\mathbf{T}'$. Следует обратить внимание на то, что, поскольку матрица $\mathbf{T}'$ верхняя треугольная, в векторе $\mathbf{t}_j$ элементы l_{ij} для $i \geqslant j+1$ являются нулевыми. Тогда исходную матрицу можно расписать как:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1(n-1)} & x_{1n} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{2(n-1)} & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1(n-1)} & x_{2(n-1)} & \dots & x_{(n-1)(n-1)} & x_{(n-1)n} \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{(n-1)n} & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1'\mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_1'\mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_1'\mathbf{t}_{n-1} & \mathbf{t}_1'\mathbf{t}_n \\ \mathbf{t}_2'\mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2'\mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_2'\mathbf{t}_{n-1} & \mathbf{t}_2'\mathbf{t}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{t}_{n-1}'\mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_{n-1}'\mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_{n-1}'\mathbf{t}_{n-1} & \mathbf{t}_{n-1}'\mathbf{t}_n \\ \mathbf{t}_n'\mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_n'\mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n'\mathbf{t}_{n-1} & \mathbf{t}_n'\mathbf{t}_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t_{11}^2 & t_{11}t_{12} & t_{11}t_{13} & \dots & t_{11}t_{1(n-1)} & t_{11}t_{1n} \\ t_{12}t_{11} & \sum_{i=1}^2 t_{i2}^2 & \sum_{i=1}^2 t_{i2}t_{i3} & \dots & \sum_{i=1}^2 t_{i2}t_{i(n-1)} & \sum_{i=1}^2 t_{i2}t_{in} \\ t_{13}t_{11} & \sum_{i=1}^2 t_{i3}t_{i2} & \sum_{i=1}^3 t_{i3}^2 & \dots & \sum_{i=1}^3 t_{i3}t_{i(n-1)} & \sum_{i=1}^3 t_{i3}t_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1(n-1)}t_{11} & \sum_{i=1}^2 t_{i(n-1)}t_{i2} & \sum_{i=1}^3 t_{i(n-1)}t_{i3} & \dots & \sum_{i=1}^{n-1} t_{i(n-1)}^2 & \sum_{i=1}^{n-1} t_{i(n-1)}t_{in} \\ t_{1n}t_{11} & \sum_{i=1}^2 t_{in}t_{i2} & \sum_{i=1}^3 t_{in}t_{i3} & \dots & \sum_{i=1}^{n-1} t_{in}t_{i(n-1)} & \sum_{i=1}^{n} t_{in}^2 \end{bmatrix} \quad (242)$$

Следовательно:

$$x_{ij} = \begin{cases} \sum_{s=1}^{\min(i,j)} t_{si}t_{sj}, \text{ если } i \neq j \\ \sum_{s=1}^{i} t_{si}^2, \text{ если } i = j \end{cases} \quad (243)$$

Производная диагональных элементов матрицы $\partial x_{ii}/\partial t_{sl} = 2t_{ii}, \forall s \leqslant l, \forall l = i$ и $\partial x_{ii}/\partial t_{sl} = 0$ иначе. Тогда для диагональных элементов матрицы $\mathbf{X}$ вектор производных по элементам матрицы $\mathbf{T}$ выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{\partial x_{ii}}{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{T})}\right)' = x_{ii} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} t_{11} & \dots & t_{1i} & \dots & t_{1n} & t_{22} & \dots & t_{2i} & \dots & t_{ii} & \dots & t_{nn} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2t_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2t_{2i} & \dots & 2t_{ii} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad (244)$$

Для несимметричных же элементов сложнее. В силу того, что матрица $\mathbf{X}$ симметричная, можно без ограничения общности рассматривать только элементы $x_{ij} : i \leqslant j$. Тогда $\min(i,j) = i$. Следует обратить внимание на тот факт, что производная элемента x_{ij} по любому диагональному элементу x_{ss}, кроме $s = i \leqslant j$, равна нулю: $\partial x_{ij}/\partial t_{ss} = 0, \forall s \neq i$, а $\partial x_{ij}/\partial t_{ii} = t_{ij}$. Более того, $\partial x_{ij}/\partial t_{sl} = 0, \forall l > j$, $\partial x_{ij}/\partial t_{si} = t_{sj}, \forall s \leqslant i$, $\partial x_{ij}/\partial t_{sj} = t_{si}, \forall s \leqslant i$. Тогда для элементов матрицы $\mathbf{X}$ вне главной диагонали вектор производных по элементам матрицы $\mathbf{T}$ выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{\partial x_{ii}}{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{T})}\right)' = x_{ij} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} t_{11} & \dots & t_{1i} & \dots & t_{1j} & \dots & t_{1n} & t_{22} & \dots & t_{ii} & \dots & t_{ij} & \dots & t_{nn} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & t_{1j} & 0 & t_{1i} & 0 & 0 & 0 & \dots & t_{ij} & 0 & t_{ii} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad (245)$$

Следовательно, Якобиан рассматриваемой замены может быть записан в следующей форме:

$$\left|\frac{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{X})}{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{T})}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccccc} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} & t_{22} & \dots & t_{2n} & t_{33} & \dots & t_{3n} & t_{44} & \dots & t_{(n-1)n} & t_{nn} \end{array} \\
\begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \\ x_{33} \\ \vdots \\ x_{3n} \\ \vdots \\ x_{(n-1)n} \\ x_{nn} \end{array} &
\begin{bmatrix}
2t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
t_{12} & t_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
t_{13} & 0 & t_{11} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
t_{1n} & 0 & 0 & \dots & t_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 2t_{12} & 0 & \dots & 0 & 2t_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & t_{1n} & 0 & \dots & t_{12} & t_{2n} & \dots & t_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2t_{13} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 2t_{33} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & t_{1n} & \dots & t_{13} & 0 & \dots & t_{23} & t_{3n} & \dots & t_{33} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & t_{1(n-1)} & 0 & \dots & t_{2(n-1)} & 0 & \dots & t_{3(n-1)} & 0 & \dots & t_{n-1.n-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 2t_{1n} & 0 & \dots & 2t_{2n} & 0 & \dots & 2t_{3n} & 0 & \dots & 0 & 2t_{nn}
\end{bmatrix}
\end{array}\right|$$

(24

Очевидно, что это определитель треугольной матрицы. Следовательно, определитель равен произведению её диагональных элементов. Среди диагональных элементов 2 встречается ровно n раз (количество диагональных элементов в матрице $\mathbf{X}$), x_{11} встречается n раз (количество элементов первого вектора-столбца матрицы $\mathbf{X}$), x_{22} встречается $n-1$ раз (количество элементов второго вектора-столбца матрицы $\mathbf{X}$), и т.д. Тогда Якобиан может быть выражен следующим образом:

$$\left|\frac{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{X})}{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{T})}\right| = 2^n \prod_{i=1}^{n} t_{ii}^{n-i+1} \tag{247}$$

A.5 Многомерная гамма-функция

Многомерная гамма-функция — это многомерный интеграл по положительно определённой матрице $\mathbf{S} > 0$ размерности $n \times n$ следующей формы (смотри Siegel, 1935):

$$\Gamma_n(a) = \int_{\mathbf{S}>0} |\det(\mathbf{S})|^{a-(n+1)/2} \exp\{-\operatorname{tr}(\mathbf{S})\} \, d\mathbf{S} \tag{248}$$

Данный интеграл, подобно одномерной гамме-функции, можно вывести аналитически:

$$\Gamma_n(a) = \pi^{n(n-1)/2} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(a + \frac{j-1}{2}\right) \tag{249}$$

Для некоторых выводов нам также может быть полезен следующий интеграл, который может быть выражен через многомерную гамма-функцию:

$$\int_{\mathbf{S}>0} |\det(\mathbf{S})|^{\nu} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{SK})\right\} d\mathbf{S}, \tag{250}$$

где $\mathbf{K}$ — некоторая постоянная матрица размерности $n \times n$. Для того, чтобы привести эту функцию к (249), сделаем замену переменных $\mathbf{B} = 0.5\mathbf{SK}$. Учитывая результат, полученный в подразделе A.4.3, данный интеграл превращается в следующее выражение:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{S}>0} |\det(\mathbf{2BK}^{-1})|^{\nu+[(n+1)/2]-(n+1)/2} \exp\{-\operatorname{tr}(\mathbf{B})\} \, d\mathbf{B} \left|\frac{\partial \operatorname{vec}(\mathbf{S})}{\partial \operatorname{vec}(\mathbf{B})}\right| = \\ &= |\det(\mathbf{K})|^{-(n+\nu)}(2)^{n+\nu} \int_{\mathbf{S}>0} |\det(\mathbf{B})|^{\nu+[(n+1)/2]-(n+1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{B})\right\} d\mathbf{B} = \\ &= |\det(\mathbf{K})|^{-(n+\nu)}(2)^{n+\nu}\Gamma_n\left(\nu + \frac{n+1}{2}\right) \end{aligned} \tag{251}$$

В случае, если матрицы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{K}$ симметричные, положительно определённые и невырожденные, следует сделать разложение Холецкого для постоянной матрицы $\mathbf{K}$: $\mathbf{K} = \mathbf{LL}'$. Известно, что $\operatorname{tr}(\mathbf{SK}) = \operatorname{tr}(\mathbf{SLL}') = \operatorname{tr}(\mathbf{L}'\mathbf{SL})$. Следовательно, нужно сделать замену $\mathbf{S} \to \mathbf{L}'\mathbf{SL}$.

Тогда в силу вывода (241) и того факта, что $|\mathbf{L}| = |\mathbf{K}|^{\frac{1}{2}}$, Якобиан может быть найден следующим образом:

$$\left|\frac{\partial \operatorname{vech}(\mathbf{S})}{\partial \operatorname{vech}(\mathbf{B})}\right| = \left|\det(\frac{1}{2}\mathbf{K})\right|^{-(n+1)/2} \tag{252}$$

Тогда формула (251) преобразуется в следующее выражение (следует помнить, что для положительной константы c и матрицы $\mathbf{A}$ размерности $n \times n$ верно, что $|c\mathbf{A}| = c^n|\mathbf{A}|$):

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{S}>0} |\det(\mathbf{2BK}^{-1})|^{\nu+[(n+1)/2]-(n+1)/2} \exp\{-\operatorname{tr}(\mathbf{B})\} \, d\mathbf{B} \left|\frac{\partial \operatorname{vech}(\mathbf{S})}{\partial \operatorname{vech}(\mathbf{B})}\right| = \\ &= |\det(\mathbf{K})|^{-((n+1)/2+\nu)}(2)^{(\nu+(n+1)/2)} \int_{\mathbf{S}>0} |\mathbf{B}|^{\nu+[(n+1)/2]-(n+1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{B})\right\} d\mathbf{B} = \\ &= |\det(\mathbf{K})|^{-(\nu+(n+1)/2)}(2)^{n(\nu+(n+1)/2)}\Gamma_n\left(\nu + \frac{n+1}{2}\right) \end{aligned} \tag{253}$$

B Распределения

B.1 Распределение Вишарта

Пусть $\mathbf{X}$ есть $n \times \nu$ $(n > \nu - 1)$ случайная матрица, которую можно записать через векторы-строки: $\mathbf{X}' = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n]$, причём каждый вектор $\mathbf{x}_i$ $i.i.d \sim \mathcal{N}_\nu(\mathbf{0}, \mathbf{\Psi})$. Тогда будем говорить, что матрица $\mathbf{S} = \mathbf{X}'\mathbf{X} \sim \mathcal{W}_n(\nu, \mathbf{\Psi})$.

Обозначение: $\mathbf{S} \sim \mathcal{W}_n(\nu, \mathbf{\Psi})$

Функция плотности распределения:

$$p(\mathbf{S}) = (2\pi)^{-\frac{\nu n}{2}} \Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right) |\det(\mathbf{\Psi})|^{-\frac{\nu}{2}} \left[|\det(\mathbf{S})|^{\frac{\nu-(n+1)}{2}} \exp\left(-\operatorname{tr}(\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{S})\right)\right] \tag{254}$$

B.2 Обратное Распределение Вишарта

Если некоторая матрица имеет распределение Вишарта $\mathbf{S} \sim \mathcal{W}_n(\nu, \mathbf{\Psi})$, то обратная к ней имеет обратное распределение Вишарта: $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} \sim \mathcal{IW}_n(\nu, \mathbf{\Xi})$, где $\mathbf{\Xi} = \mathbf{\Psi}^{-1}$.

Обозначение: $\mathbf{C} \sim \mathcal{IW}_n(\nu, \mathbf{\Xi})$

Функция плотности распределения:

$$p(\mathbf{S}) = (2\pi)^{-\frac{\nu n}{2}} \Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right) |\det(\mathbf{\Xi})|^{\frac{\nu}{2}} \left[|\det(\mathbf{C})|^{-\frac{\nu-(n+1)}{2}} \exp\left(-\operatorname{tr}(\mathbf{\Xi}\mathbf{C}^{-1})\right)\right] \tag{255}$$

B.3 Матричное нормальное распределение

Если случайная матрица $\mathbf{X}$ размерности $k \times n$ имеет матричное нормальное распределение, $\mathbf{M}$ — матрица размерности $k \times n$, $\mathbf{U}$ — матрица размерности $k \times k$, а $\mathbf{W}$ — матрица размерности $n \times n$ то:

Обозначение: $\mathbf{X} \sim \mathcal{MN}_{kn}(\mathbf{M}, \mathbf{U}, \mathbf{W})$

Функция плотности распределения:

$$p(\mathbf{X}) = (2\pi)^{-\frac{nk}{2}} |\mathbf{U}|^{-\frac{n}{2}} |\det(\mathbf{W})|^{-\frac{k}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{M})'\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{M})\right)\right] \tag{256}$$

B.4 Вишарт-нормальное распределение

B.5 Матричное t-распределение

Если случайная матрица $\mathbf{X}$ размерности $k \times n$ имеет матричное нормальное распределение, $\mathbf{M}$ — матрица размерности $k \times n$, $\mathbf{Q}$ — матрица размерности $k \times n$ и с $\nu \geqslant n$ степенями свободы.

Обозначение: $\mathbf{X} \sim \mathcal{M}t_{kn}(\nu, \mathbf{M}, \mathbf{P}, \mathbf{Q})$

Функция плотности распределения:

$$p(\mathbf{X}) = (\pi)^{-\frac{kn}{2}} \Gamma_n\left(\frac{\nu+k}{2}\right) \Gamma_n^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right) |\det(\mathbf{P})|^{-\frac{k}{2}} |\det(\mathbf{Q})|^{-\frac{n}{2}} \left|\det\left(\mathbf{I}_k + \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{M})'\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{M})\right)\right|^{-(\nu+k)/2} \tag{257}$$

Список литературы

Magnus, J. R. and Neudecker, H. (1986). Symmetry, 0-1 matrices and jacobians: A review. *Econometric Theory*, 2(02):157–190.