ТЕОРМИН ЛИНАЛ 1 СЕМ

2024-10-19 16:21

Status: #baby

Tags: Теоретический минимум

ТЕОРМИН ЛИНАЛ 1 СЕМ

1. Комплексное число - это элемент $Z \in R^2 : Z = \{(a, b) : a, b \in R\}$, снабженного двумя операциями, индуцированными из R:
   - $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
   - $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
2. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
   $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
3. Ассоциативность сложения

- $(\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in C) \Rightarrow (Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$
  Коммутативность сложения
- $(\forall Z_1, Z_2 \in C) \Rightarrow Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$

4. Ассоциативность умножения

- $((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f))$
  Коммутативность умножения
- $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$

5. Нулевым элементом называют такой элемент, который не изменяет другой при операции сложения. В множестве комплексных чисел таковым является (0, 0). Действительно,
   $\exists (\alpha, \beta): (a, b) + (0, 0) = (a, b)$

6. Существование противоположного элемента. Противоположным элементом к элементу (a, b) называют такой элемент, который в сумме с (a, b) дает нулевой элемент.
   $\exists (\alpha, \beta) : (a, b) + (\alpha, \beta) = (0, 0)$

   Из этого требования следует, что $\alpha = -a$ и $\beta = -b$. Следовательно противоположным элементом к (a, b) будем называть элемент (−a, −b).

7. Существование единицы. Единичным элементом, единицей, называют такой элемент, который не меняет комплексное число при умножении на него.
   $\exists (\alpha, \beta): (a, b) \cdot (\alpha, \beta) = (a, b)$

Соответственно единичным элементом множества комплексных чисел является элемент (1, 0).

8. Обратный элемент — это такой, который при умножении на исходное комплексное число дает единицу.
$\exists (\alpha, \beta): (a, b) \cdot (\alpha, \beta) = (1, 0)$
$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

9. Алгебраической формой комплексного числа $z = (a, b) \in C$ называется представление его в следующем виде:
$z = a + ib$,
где символ i называется мнимой единицей и обладает свойством $i^2 = -1 \in R$.

10. Тригонометрической формой комплексного числа $z \in C$ называется представление его в следующем виде:
$Z = (\rho \cos \psi + \rho \sin \psi) = \rho(\cos \psi + \sin \psi)$.

11. $Z = a - ib$ называется числом, комплексно сопряженным к Z.

12. $|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется модулем комплексного числа.

13. $$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

14. Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая компонента принадлежит множеству B.

    Декартово произведение множеств A и B обозначают A x B. Используя это обозначение, записывают:

    $A \times B = \{(x, y) : x \in A$ и $y \in B\}$.

    Когда декартово произведение выполняется с самим собой, это также называется **декартовым квадратом** множества.

15. Внутренним законом композиции на множестве M называется отображение $M \times M \to M$ декартова произведения $M \times M$ в M. Значение
$(x, y) \mapsto z \in M$
называется композицией элементов x и y относительно этого закона.

16. Закон композиции называется ассоциативным, если для любых трех элементов $x, y, z \in M$ имеет место следующее свойство:

$(x * y) * z = x * (y * z)$.

17. Закон композиции называется коммутативным, если для любой пары элементов $x, y \in M$ имеет место свойство:
$x * y = y * x$.

18. Нейтральным элементом относительно закона композиции $x * y$ называется элемент $e \in M$, такой что:
$e * x = x = x * e, \forall x \in M$.

19. Элемент $\theta \in M$ называется поглощающим относительно закона композиции $x * y$, если имеет место следующее свойство:
$\forall x \in M \; x * \theta = \theta = \theta * x$.

20. Элемент y называется обратным к элементу x относительно внутреннего закона композиции с нейтральным элементом e, если:
$y * x = e = x * y$

21. Множество M с заданным на нем одним или несколькими законами композиции называется алгебраической структурой.

22. Внешним законом композиции элементов множества Ω, называемых множеством операторов закона, и элементов множества M называется отображение множества $\Omega \times M$ в M. Значение
$(\alpha, x) \mapsto y$,

    называется композицией α и x относительно этого закона. Элементы из Ω называются операторами внешнего закона.

23. Алгебраическая структура G называется группой если выполняются следующие требования (аксиомы группы):

    (а) ассоциативность: $x * (y * z) = (x * y) * z$;
    (б) нейтральный элемент: $\exists\, e \in G : \forall x \in G \; x * e = x = e * x$;
    (в) обратный элемент.

24. Структура с законом композиции, который не является ассоциативным, называется магмой.

25. Структура с законом композиции, который является ассоциативным - полугруппой.

26. Структура с законом композиции, который является ассоциативным, и в

котором существует обратный элемент - моноидом.

27. Закон композиции $\circ$ называется дистрибутивным слева относительно закона $*$, если для любых элементов x, y, z $\in$ M имеет место равенство
$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$. (Аналогично справа)

28. Если закон дистрибутивен и слева и справа, то он называется двояко дистрибутивным.

29. Кольцом R называется множество замкнутое относительно двух согласованно заданных на нем бинарных операций (обычно обозначаемых через + и ·), удовлетворяющих следующим требованиям:
• R - абелева группа относительно "+" (0 - нейтральный элемент);
• R - коммутативный моноид относительно "·" (1 - нейтральный элемент);
• Законы + и · согласованы ("·" дистрибутивен относительно "+"):
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

30. Кольцо Zm вычетов по модулю m $\in$ Z:
$x \equiv y \bmod m,\ y \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$.

31. Многочленом от одной переменной с коэффициентами из кольца R будем называть формальную бесконечную сумму следующего вида:
$p(x) = a0 + a1x + a2x2 + \dots + anxn + \dots$,
где отличны от нуля только некоторые коэффициенты a0, a1, a2, . . . $\in$ R, а x является формальной переменной.

32. Говорят, что многочлен p(x) делится на многочлен q(x) (пишут p кратно q), если существует такой многочлен g(x), что $p(x) = g(x) \cdot q(x)$.

33. **Лемма 3.1.** *Свойства делимости многочленов:*

- *если* $p(x) \vdots q(x)$ *и* $q(x) \vdots r(x)$, *тогда* $p(x) \vdots r(x)$;
- *пусть* $p(x), q(x) \vdots g(x)$, *тогда*

$$\forall a(x), b(x) \in R[x] \quad a(x)p(x) + b(x)q(x) \vdots g(x)$$

34. Два многочлена p(x) и q(x) называются ассоциированными, если
$p(x) = \alpha \cdot q(x)$, где $\alpha \in R$, α != 0.

35. Степенью deg(p) многочлена p $\in$ R[t] называется максимальный
номер его ненулевого коэффициента. Если deg p = n $\in$ N0 то коэффициент an

называется старшим коэффициентом многочлена p.

36. Для нулевого многочлена θ(t) положим deg(θ) = −∞.

37. Свойства степени при делении многочленов:
    - если f кратно g, f, $g \neq 0 \Rightarrow$ deg(f) ⩾ deg(g);
    - если f кратно g, deg(f) = deg(g) ⇒ f ∼ g.

38. Связь между степенью остатка $r(x)$ от деления полинома $p(x)$ на другой полином определяется степенями этих полиномов следующим образом:

    Пусть полиномы $p(x)$ и $d(x)$ — это многочлены, где $p(x)$ делится на $d(x)$ с остатком $r(x)$, тогда существует следующее соотношение:

    $$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x),$$

39. Корнем многочлена p(x) ∈ R[x] кратности m называется число x0 ∈ R, такое что p(x) кратно (x − x0)^m, p(x) не кратно (x − x0)^m+1

40. Остаток от деления p(x) ∈ R[x] на (x − x0) равен f(α)

41. Остаток от деления p(x) ∈ R[x] на (x − x0) равен f(α). Если x0 - корень многочлена p(x) тогда p(x0) = 0.

42. Областью целостности называется кольцо, в котором нет делителей нуля.

43. Элемент z != 0 называется нильпотентом, если ∃n ∈ N : z^n = 0.

44. Полем называется ненулевое кольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

45. **Опр. 2.1. Матрицей** с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ называется прямоугольная таблица следующего вида:

    $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

    где числа $a_{ij} \in \mathbb{K}$ называются **коэффициентами** матрицы. Упорядоченную совокупность элементов с фиксированным первым индексом i_0 называют *строкой* матрицы с номером i_0. Упорядоченную совокупность элементов с фиксированным вторым индексом j_0 называют *столбцом* матрицы с номером j_0.

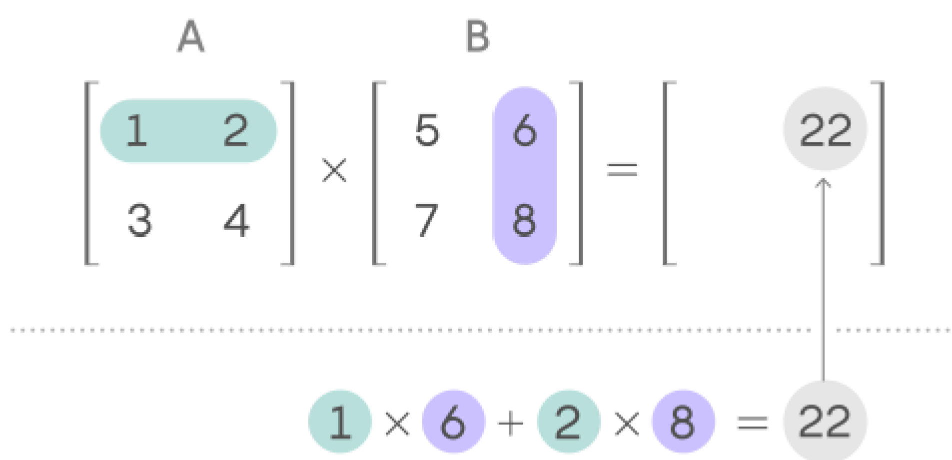
46. MK(m, n) - множество матриц размером m на n с элементами из поля K.

47. Матрица называется квадратной, если число ее строк равно числу столбцов.

48. Сложение матриц: $A + B = C$, $cij = aij + bij$

49. $\lambda \in K$ (MK(m,n))
$\lambda \cdot A = B \Leftrightarrow bij = \lambda \cdot aij$

50. Перемножить можно только такие матрицы, у число
столбцов у первого сомножителя которых, совпадает с числом строк второго сомножителя. В результате получается матрица, число строк которой совпадает
с числом строк первого сомножителя, а число столбцом - с числом столбцов второго.



51. Какое результирующее число строк и столбцов будет при перемножении матриц $A n\times m$ и $A m\times k$? $n\times k$

52. Умножение матриц не коммутативно и определено на матрицах из различных множеств M at. Чтобы сделать умножение внутренней операцией на данном множестве, необходимо рассматривать только квадратные матрицы.

53. Операция транспонирования матрицы заключается в замене строк на столбцы и столбцов на строки. То есть, если есть матрица A размером $m\times n$, то транспонированная матрица A^T будет размером $n\times m$.

54.

(а) Согласованность со сложением матриц:

$$\forall A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(m,n): \quad (A+B)^T = A^T + B^T \tag{1}$$

(б) Согласованность с умножением матрицы на число:

$$\forall A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(m,n), \forall \alpha \in \mathbb{K}: \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T \tag{2}$$

(в) Согласованность с умножением матриц:

$$\forall A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(m,n): \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \tag{3}$$

55.

1. Если $A_{1\times 1} = (a)$, тогда $|A| = a$;
2. Если $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

56.

3. Если $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, тогда $|A|$ можно получить *разложением по первой строке*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

57. **Опр. 1.1. Системой линейных алгебраических уравнений** называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

58.

При этом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *неизвестными*, $\{a_{ij}\}$ - *коэффициентами* системы и $b_1, b_2, \ldots b_m$ - *свободные члены*.

59. **NtB 2.1.** В качестве примера, демонстрирующго методы решения СЛАУ, рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Матрица A данной системы иметт вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

60. Решить систему линейных алгебраических уравнений значит найти такие значения ее неизвестных, при которых все уравнения системы окажутся верными равенствами.

61. Расширенной матрицей системы называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов.

62. Эквивалентными преобразованиями матрицы называются следующие три вида преобразований:
(а) перестановка местами произвольных строк матрицы;
(б) умножение произвольной строки матрицы на число λ != 0;
(в) прибавление к произвольной строке матрицы другой строки;

63. Методы Крамера и Гаусса используются для решения систем линейных уравнений.

64. Метод Крамера заключается в вычислении определителя матрицы А и определителей, полученных из матрицы А подстановкой столбца b в эту матрицу.

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем определители:

$$\Delta = \det A, \quad \Delta_1 = \det A_1, \quad \Delta_2 = \det A_2, \quad \Delta_3 = \det A_3,$$

и вычисляем значения неизвестных:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

65. Матрица системы должна быть квадратной и определитель матрицы коэффициентов не должен быть равен нулю.

66. Метод Гаусса заключается в том, чтобы элементарными преобразованиями привести расширенную матрицу системы к верхнетреугольному виду и затем, используя метод подстановки найти решение.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3. \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3. \end{pmatrix}$$

Откуда сразу получаем:

$$x_3 = \frac{d_3}{c_{33}}, \quad x_2 = \frac{d_2 - c_{23}x_3}{c_{22}}, \quad x_1 = \frac{d_1 - c_{12}x_2 - c_{1_3}x_3}{c_{11}}.$$

67. **NtB 2.4.** Исходную систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$A \cdot X = b$$

Решим данное матричное уравнение формально, используя тот факт, что матрица A^{-1}, обратная к матрице A существует:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b \quad \Rightarrow \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot b \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}b.$$

68.

- **метод Гаусса** - элементарными преобразованиями строк, необходимо из матрицы A получить единичную матрицу E, обратная матрица тогда возникнет из следующей конструкции:

$$[A|E] \sim [E|A^{-1}]$$

69.

- **метод союзной матрицы** - вычислив *союзную матрицу* $\widehat{A}$, найти A^{-1} с использованием следующей формулы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A}^T$$

70. Число mij называется алгебраическим дополнением элемента aij матрицы A. mij равен определителю матрицы 2×2, полученной из исходной матрицы A вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j, умноженному на число (−1)i+j.

References