Демо кр 1.

№1

Док-ть: при $n \in N$:

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3n+1)}$$

1. База индукции $n=1$:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

2. Пусть $n=k$

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\dots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1^{\backslash(3k+1)}}{3}-\frac{1}{3(3k+1)}=\frac{3k}{3(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}$$

3. Док-м, что рав-во вып-ся при $n=k+1$:

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\dots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{1^{\backslash(3k+4)}}{3}-\frac{1}{3(3k+4)}$$

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\dots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{3k+3}{3(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}$$

Р/ левую часть р-ва:

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\dots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\underbrace{\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}}_{\frac{k+1}{3k+4}}$$

№2

$$x_n=\frac{2n+1}{n+1}$$

1. Док-ть: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N: n>N \quad |x_n-A|<\varepsilon$

$|x_n-2|<\varepsilon$

$$\left|\frac{2n+1}{n+1}-2\right|<\varepsilon$$

$$\left|-\frac{1}{n+1}\right|<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad | \cdot (n+1)$$

$$1 < \varepsilon (n+1)$$

$$1 < \varepsilon n + \varepsilon$$

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < n$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$$

2. Док-ть: сходимость X_n с помощью критерия Коши

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m > N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$

$$x_n = \frac{2n+1}{n+1} \qquad x_m = \frac{2m+1}{m+1}$$

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{2n+1}{n+1} - \frac{2m+1}{m+1}\right| = \left|\frac{(2n+1)(m+1) - (2m+1)(n+1)}{(m+1)(n+1)}\right| =$$

$$= \left|\frac{2mn + 2n + m + 1 - 2mn - 2m - n - 1}{(m+1)(n+1)}\right| = \left|\frac{n-m}{(m+1)(n+1)}\right|$$

$m < n \qquad \frac{2m+1}{m+1} < \varepsilon$

$$2m + 1 < \varepsilon m + \varepsilon$$

$$2m - \varepsilon m < \varepsilon - 1$$

$$m(2-\varepsilon) < \varepsilon - 1$$

$$m < \frac{\varepsilon - 1}{2 - \varepsilon} \qquad m = \frac{\varepsilon - 1}{2-\varepsilon} \quad | \cdot (-1)$$

$$m > \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}$$

$$\left\{ m, n > \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon} \right\}$$

3. $X_n = \frac{2n+1}{n+1}$ по т. Вейерштрасса: 1) огр-ть 2) монотонность, $n \in N$

1) $\{X_n\} = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{7}{4}; \frac{9}{5}; \frac{11}{6}; \dots \right\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \inf\{X_n\} = 1{,}5 \\ \sup\{X_n\} = 2 \end{array}\right| \Rightarrow X_n$ ограничена

2) $$X_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+1} = \frac{2n+3}{n+2}$$

$$X_{n+1} - X_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+3)(n+1)-(2n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{2n^2+2n+3n+3-2n^2-4n-n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

т.к $n \in \mathbb{N}$

т.к $X_{n+1} > X_n$, то $\{X_n\}$ – возр.

по т. Вейерштрасса, т.к X_n – ограничена и монотонна, то она сходится и мы можем найти ее предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2.$$

4. $\sup\{X_n\} = 2$

$\inf\{X_n\} = 1{,}5$

$\max\{X_n\} = -$

$\min\{X_n\} = 1{,}5$

№3

$$X_n = (-1)^n\left(\frac{n^2+3n+1}{3n^2+5}\right)$$

заметим, что $(-1)^n$ меняется в зависимости от четности n, тогда р! 2 подпосл-ти: $2k$, $2k+1$

ОС:

$$X_{2k} = (-1)^{2k}\left(\frac{(2k)^2+6k+1}{3(2k)^2+5}\right) = \frac{4k^2+6k+1}{12k^2+5}$$

$$\lim_{k\to\infty} X_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2+6k+1}{12k^2+5} = \lim_{k\to\infty} \frac{4+\frac{6}{k}+\frac{1}{k^2}}{12+\frac{5}{k^2}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$X_{2k+1} = (-1)^{2k+1}\left(\frac{(2k+1)^2+3(2k+1)+1}{3(2k+1)^2+5}\right) = -\frac{4k^2+4k+1+6k+3+1}{12k^2+12k+8} =$$

$$= -\frac{4k^2+10k+5}{12k^2+12k+8} \cancel{= \frac{4+\frac{10}{k}+\frac{5}{k^2}}{12+\frac{12}{k}+\frac{8}{k^2}}}$$

$$\lim_{k\to\infty} X_{2k+1} = -\frac{4+\frac{10}{k}+\frac{5}{k^2}}{12+\frac{12}{k}+\frac{8}{k^2}} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$X = \{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \frac{1}{3}$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\frac{1}{3}$

№4

1. Док-ть по опр-ию предела по Коши, что

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$|x-1| < \delta$ $\qquad$ $\left|\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - 2\right| < \varepsilon$

$-\delta < x-1 < \delta$

$-\delta+1 < x < \delta+1$

$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1$

$|\sqrt{x}+1-2| < \varepsilon$

$|\sqrt{x}-1| < \varepsilon$

$-\varepsilon < \sqrt{x}-1 < \varepsilon$

$-\varepsilon+1 < \sqrt{x} < \varepsilon+1$

$\begin{cases} \sqrt{x} < \varepsilon+1 \\ \sqrt{x} > -\varepsilon+1 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\underbrace{\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1}_{\delta} < x < \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1$

ч.т.д.

2. Док-ть что предела не сущ по Гейне

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Предел $f(x)$ при $x \to a$ не сущ, если $x_n \to a$ и $y_n \to a$, такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$

1) Пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $n \to \infty \Rightarrow x_n \to 0^+$

2) Пусть $y_n = -\frac{1}{n}$, $n \to \infty \Rightarrow y_n \to 0^-$

3) $f(x_n) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \operatorname{arctg}(n)$

при $n \to \infty$ $\operatorname{arctg}(n) \to \frac{\pi}{2}$

4) $f(y_n) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \operatorname{arctg}(-n)$

при $n \to \infty$ $\operatorname{arctg}(-n) \to -\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{\pi}{2} \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ не сущ.

№5

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2-n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2-n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2-n+1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2-n+1}\right)} = \frac{n^2+3n+4 - n^2+n-1}{\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2-n+1}} = \frac{4n+3}{\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2-n+1}} =$

$= \frac{n\left(4+\frac{3}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} + n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{4+\overset{\to 0}{\frac{3}{n}}}{\sqrt{1+\underset{\downarrow 0}{\frac{3}{n}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{4}{n}}} + \sqrt{1-\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n^2}}}} =$

$= \frac{4}{2} = 2$

2) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{4x^2+5x+1}{x^3+1} = \cancel{\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}} =$

$= \cancel{\frac{\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}} = \cancel{\frac{-4+5-1}{1}}$

$= \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{4x^2+4x+x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{(x+1)(4x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{4x+1}{x^2-x+1}\right) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{-4+1}{1+1+1} = -1.$

3) $\lim\limits_{x\to 2} (3-x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}(x-2)}} = \cancel{\lim\limits_{x\to 2} \ln(3-x)}$