Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

# Лабораторная работа №6
# Работа с системой компьютерной вёрстки $\TeX$
# Вариант 41

Выполнила: Леонтьева Арина Николаевна P3113
Проверила: к.п.н., доцент Авксентьева Елена Юрьевна

Санкт-Петербург 2024

# Задачи

**М241-М245; Ф253-Ф257**

**М241.** Докажите, что

$$3^{1974} + 5^{1974}$$

делится на 13.

С. И. Мейзус

**М242.** Пусть $A_iH_i$ - высота и $A_iM_i$ - медиана, проведенные из вершины $A_i$ остроугольного треугольника $A_1\ A_2\ A_3$ (i = 1, 2, 3). Докажите, что одно из трех произведений

$$|\ H_1M_1\ | \cdot |\ A_2A_3\ |,\ |\ H_2M_2\ | \cdot |\ A_3A_1\ |,$$
$$|\ H_3M_3\ | \cdot |\ A_1A_2\ |$$

равно сумме двух других *). Верно ли это утверждение для прямоугольного и тупоугольного треугольника?

*С.Сальников, ученик 10 класса*

*(г. Мары)*

**М243.** n отрезков $A_1B_1, A_2B_2,\ ..., A_nB_n$ (рис.1) расположены на плоскости так, что каждый из них начинается на одной из двух данных прямых, оканчивается на другой прямой, и проходит через точку G (не лежащую на данных прямых) - центр тяжести единичных масс, помещенных в точках $A_1, A_2,\ ..., A_n$. Докажите, что

$$\frac{A_1G}{GB_1} + \frac{A_2G}{GB_2} + ...\ + \frac{A_nG}{GB_n} = n\ .$$

*А. М. Лопшиц*

*) Через |KL| обозначается длина отрезка с концами K и L.

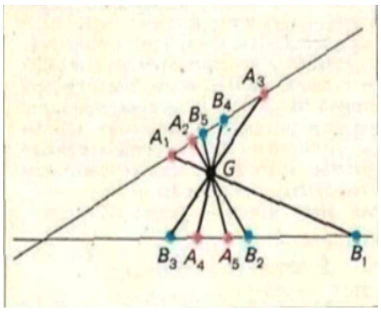



Рис.1

**М244.** Даны два набора из n вещественных чисел:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \quad \text{и} \quad b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$$

Докажите, что если выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) из $a_i < a_j$ следует, что $b_i < b_j$;

б)* из $a_i < a < a_j$, где $a = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, следует, что $b_i \le b_j$;

то верно неравенство:

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \ge$$
$$\ge (a_1 + a_2 + ... + a_n)$$
$$(b_1 + b_2 + ... + b_n).$$

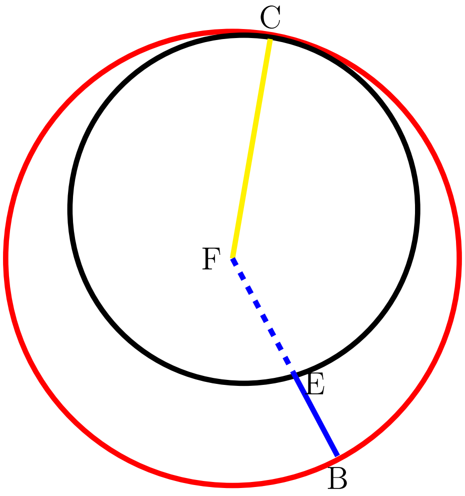
*А.Григорян, ученик 10 класса (Баку)*

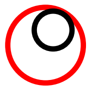
**М245.** Предлагается построить N точек на полскости так, чтобы все попарные расстояния между ними равнлись заранее заданным числам: для каждых двух точек $M_i$, $M_j$ известно, чему должно равняться расстояние $|m_iM_j| = r_{i_j}$ (i и j - любые числа от 1 до N).

| |
|---|
| а) Можно ли произвести построение, если расстояния $r$ заданы так, что всякие 5 из $N$ точек построить можно? |
| б) Достаточно ли требовать, чтобы можно было построить всякие 4 из $N$ точек? |
| в)* Что изменится, если строить точки не на плоскости, а в пространстве? Каково тогда наименьшее $K$, для которого возможность построения любых $K$ из данных $N$ точек обеспечивает построение и всех $N$ точек? |

*Таблица 1: Вопросы для построения точек*

*М. Л. Гервер*




*Если два круга*  *касаются друг друга, то у них уже не один и тот же центр*

Действительно, пусть это возможно, и у кругов будет один центр. Из предполагаемого центра проведем FB и CF к точке касания

Тогда CF = FE (опр. 15)

и CF = FB (опр. 15)

∴ FE = FB ;

часть равна целому, что невозможно. Следовательно, выбранная точка не является центром обоих кругов и таким же образом можно показать, что так же и никакая другая.

ч.т.д