Задачи

М241-М245; Ф253-Ф257

М241. Докажите, что

$$3^{1974} + 5^{1974}$$

делится на 13.

С. И. Мейзус

М242. Пусть A_iH_i - высота и A_iM_i - медиана, проведенные из вершины A_i остроугольного треугольника $A_1\ A_2\ A_3$ (i = 1, 2, 3). Докажите, что одно из трех произведений

$$\mid H_1M_1 \mid \cdot \mid A_2A_3 \mid, \ \mid H_2M_2 \mid \cdot \mid A_3A_1 \mid,$$

$$\mid H_3M_3 \mid \cdot \mid A_1A_2 \mid$$

равно сумме двух других *). Верно ли это утверждение для прямоугольного и тупоугольного треугольника?

С.Сальников, ученик 10 класса

(г. Мары)

М243. n отрезков $A_1B_1, A_2B_2,\ ..., A_nB_n$ (рис.1) расположены на плоскости так, что каждый из них начинается на одной из двух данных прямых, оканчивается на другой прямой, и проходит через точку G (не лежащую на данных прямых) - центр тяжести единичных масс, помещенных в точках $A_1, A_2,\ ..., A_n$. Докажите, что

$$\frac{A_1G}{GB_1} + \frac{A_2G}{GB_2} + ...\ + \frac{A_nG}{GB_n} = n\ .$$

А. М. Лопшиц

*) Через |KL| обозначается длина отрезка с концами K и L.

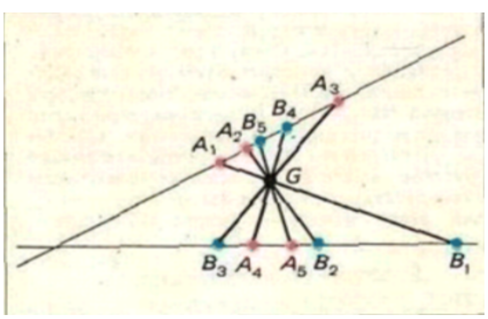

Рис.1

М244. Даны два набора из n вещественных чисел:

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n \quad \text{и} \quad b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n$$

Докажите, что если выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) из $a_i < a_j$ следует, что $b_i < b_j$;

б)* из $a_i < a < a_j$, где $a = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, следует, что $b_i \le b_j$;

то верно неравенство:

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \ge \ge (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n).$$

А.Григорян, ученик 10 класса (Баку)

М245. Предлагается построить N точек на полскости так, чтобы все попарные расстояния между ними равнлись заранее заданным числам: для каждых двух точек $M_i,\ M_j$ известно, чему должно равняться расстояние $|m_iM_j| = r_{i_j}$ (i и j - любые числа от 1 до N).

а) Можно ли произвести построение, если расстояния r заданы так, что всякие 5 из N точек построить можно?
б) Достаточно ли требовать, чтобы можно было построить всякие 4 из N точек?
в)* Что изменится, если строить точки не на плоскости, а в пространстве? Каково тогда наименьшее K, для которого возможность построения любых K из данных N точек обеспечивает построение и всех N точек?

Таблица 1: Вопросы для построения точек

М. Л. Гервер