ЛЕКЦИЯ 1
БЕГУЩИЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Вспомним механику.
Мы изучали механическое движение одной материальной точки, системы точек и твердого тела.
Дли описания их механического движения мы использовали много разных величин: кинематические и динамические. В частности, мы рассматривали уравнение Ньютона $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, решением которых были разные кинематические уравнения движения $\mathbf{r}(t)$.
Теперь мы рассматриваем механическое движение среды.

[●] УРАВНЕНИЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

1) УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ, СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ:

– *Уравнение плоской бегущей волны*, распространяющейся в положительном направлении оси X со скоростью υ:

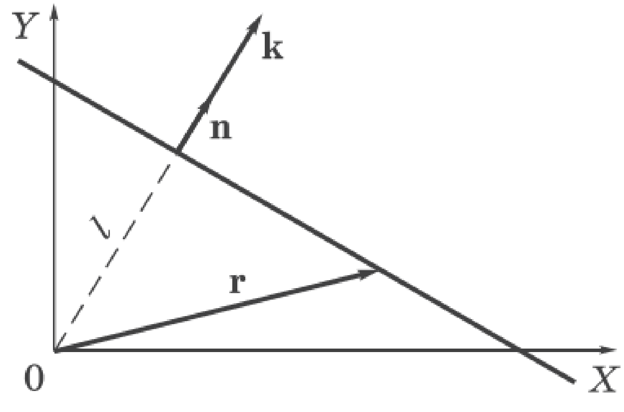
$$\boxed{\xi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)} \qquad (1)$$

где ξ – смещение элементов частиц среды из положения равновесия (возмущение) в точке x в момент времени t.

– *Уравнение плоской бегущей волны*, распространяющейся в направлении произвольного единичного вектора $\mathbf{n}$ со скоростью υ:

$$\boxed{\xi = f\left(t - \frac{\mathbf{nr}}{\upsilon}\right) = f\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right)} \qquad (2)$$

где $\mathbf{nr} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$ – углы между вектором $\mathbf{n}$ и осями координат.



– *Уравнение сферической бегущей волны*, распространяющейся со скоростью υ от точечного источника в однородной изотропной среде:

$$\boxed{\xi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right)} \tag{3}$$

где r – расстояние от точечного источника.

– *Уравнение цилиндрической бегущей волны*, расходящейся со скоростью υ от источника, равномерно распределенного вдоль оси (на больших расстояниях R от источника по сравнению с длиной волны), можно представить в виде:

$$\boxed{\xi = \frac{1}{\sqrt{R}} f\left(t - \frac{R}{\upsilon}\right)} \tag{4}$$

где R – расстояние от источника. Среда предполагается однородной и изотропной.

2) УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ, СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ:

Частный случай плоской бегущей волны (1)

– *Уравнение плоской гармонической (монохроматической) волны*, распространяющейся в положительном направлении оси *X* со скоростью υ:

$$\boxed{\xi(x, t) = a\cos(\omega t - kx)}, \tag{5}$$

где a – амплитуда волны, ω – *циклическая (круговая) частота* колебаний частиц среды ($с^{-1}$), k – *волновое число*

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{6}$$

где λ – *длина волны*:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu} \tag{7}$$

где ν – частота колебаний, T – *период колебаний*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \tag{8}$$

Запомнить: плоская гармоническая волна (5) периодична во времени и пространстве, с периодом (8) и длиной волны (7)!

Отметим, что скорость υ – это *фазовая скорость волны*:

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} \tag{9}$$

т. е. скорость, с которой распространяется определенное значение фазы волны – величины в скобках формул (1) и (5).

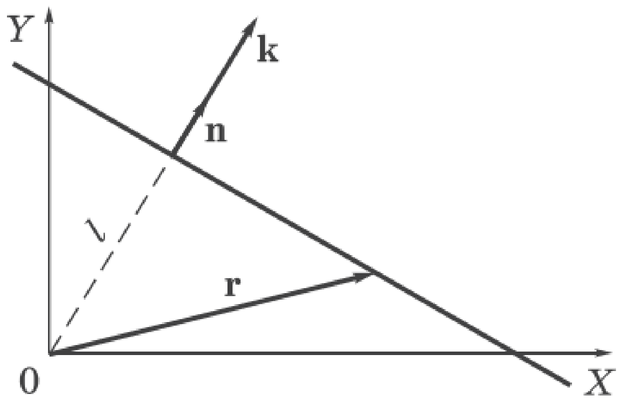
Частный случай плоской бегущей волны (2)

– *Уравнение плоской гармонической (монохроматической) волны*, распространяющейся в произвольном направлении вдоль единичного вектора $\mathbf{n}$:

$$\boxed{\xi = a\cos\omega\left(t - \frac{\mathbf{nr}}{\upsilon}\right) = a\cos(\omega t - \mathbf{kr})} \tag{10}$$

где $\mathbf{k}$ – волновой вектор:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{\upsilon}\mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n} \tag{11}$$



<u>Запомнить</u>: плоская гармоническая волна (10) периодична во времени и пространстве, с периодом (8) и длиной волны (7)!

Фазовая скорость плоской волны в направлении вектора $\mathbf{k}$ равна υ!

Фазовая скорость плоской волны в направлении, составляющем угол φ с вектором $\mathbf{k}$, определяется дифференцированием фазы $\omega t - \mathbf{kr} = \mathrm{const}$ по времени t

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}_\varphi \tag{12}$$

где $\mathbf{v}_\varphi = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ – скорость распространения фазы в интересующем нас направлении. Отсюда найдем модуль $\mathbf{v}_\varphi$

$$\upsilon_\varphi = \frac{\omega/k}{\cos\varphi} = \frac{\upsilon}{\cos\varphi} \tag{13}$$

где $\upsilon = \omega/k$ – фазовая скорость плоской волны в направлении вектора $\mathbf{k}$, т. е. при $\varphi = 0$.

– Фазовые скорости плоской волны в направлении осей *X*, *Y*, *Z*, с которыми вектор $\mathbf{k}$ составляет углы α, β, γ соответственно, равны:

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon}{\cos\alpha},\ \ \upsilon_y = \frac{\upsilon}{\cos\beta},\ \ \upsilon_z = \frac{\upsilon}{\cos\gamma} \tag{14}$$

Отсюда следует, что фазовая скорость υ не является вектором. В противном случае мы имели бы $\upsilon_x = \upsilon\cos\alpha$ и т. д.

Частный случай сферической бегущей волны (3)

– *Уравнение сферической гармонической (монохроматической) волны*, распространяющейся со скоростью υ от точечного источника в однородной изотропной среде:

$$\boxed{\xi(x,t) = \frac{a_0}{r}\cos(\omega t - kr)}, \qquad (15)$$

где a_0 – постоянная, a_0/r – амплитуда волны. Интересно, что при прохождении сферической волны в каждой точке среды всегда наблюдаются как сгущения, так и разряжения (в отличие от плоской волны, которая может состоять только из одних сгущений или разряжений).

Частный случай цилиндрической волны (4)

– *Уравнение цилиндрической гармонической (монохроматической) волны*, расходящейся со скоростью υ от источника, равномерно распределенного вдоль оси (на больших расстояниях R от источника по сравнению с длиной волны), можно представить в виде:

$$\boxed{\xi = \frac{1}{\sqrt{R}}\cos(\omega t - kR)} \qquad (16)$$

где R – расстояние от источника. Среда предполагается однородной и изотропной. Цилиндрическая волна, как и сферическая, непременно должна содержать как сгущения, так и разряжения.

3) УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ, СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ:

– *Уравнение плоской бегущей волны*, распространяющейся в поглощающей среде в положительном направлении оси X со скоростью υ:

$$\boxed{\xi(x,t) = a_0 e^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx)} \qquad (16)$$

где γ – коэффициент затухания волны (м$^{-1}$).

– *Уравнение плоской бегущей волны,* распространяющейся в поглощающей среде в произвольном направлении вдоль единичного вектора **n**:

$$\boxed{\xi = a e^{-\gamma \mathbf{nr}}\cos(\omega t - \mathbf{kr})} \qquad (17)$$

где γ – коэффициент затухания волны (м$^{-1}$).

– *Уравнение сферической бегущей волны*, распространяющейся в поглощающей среде со скоростью υ от точечного источника:

$$\boxed{\xi(x,t) = \frac{a_0}{r}\, e^{-\gamma r}\cos(\omega t - kr)} \qquad (18)$$

– *Уравнение цилиндрической бегущей волны*, распространяющейся в поглощающей среде со скоростью υ от источника, равномерно распределенного вдоль оси:

$$\boxed{\xi(x,t) = \frac{a}{\sqrt{R}}\, e^{-\gamma r} \cos(\omega t - kR)} \tag{19}$$

где a – постоянная.

[●] ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Волновое уравнение – дифференциальное уравнение в частных производных, связывающие изменения функций, характеризующих волну, во времени и пространстве.

Волновое уравнение аналогично основному уравнению динамики, которое описывает *все* возможные движения материальной точки. Волновые уравнения являются обобщенным выражением волн, независимо от их конкретного вида.

1) ЛИНЕЙНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ:

– Уравнение плоской бегущей волны $\xi(x,t) = f(t \mp x/\upsilon)$, распространяющейся в положительном (отрицательном) направлении оси X со скоростью υ, является решением *линейного волнового уравнения:*

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial x} = \mp \frac{1}{\upsilon}\frac{\partial \xi}{\partial t}} \tag{20}$$

Уравнение (20) есть одномерное дифференциальное уравнение 1-го порядка в частных производных.

– Производная по времени – есть проекция скорости частицы среды, движущейся около своего положения равновесия:

$$u_x = \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{21}$$

Проекция u_x может быть положительной или отрицательной.

– Производная по координате – есть *относительная деформация среды* (сжатие/растяжение для продольной волны или сдвиг для поперечной волны):

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{22}$$

Эта величина алгебраическая, она может быть больше нуля (растяжение), равна нулю и меньше нуля (сжатие) для продольных волн.

1) ОБЩЕЕ ОДНОМЕРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ:

– Уравнение плоской бегущей волны $\xi(x,t) = f(t \mp x/v)$, распространяющейся в положительном (отрицательном) направлении оси X со скоростью v, или их комбинация

$$\xi(x,t) = f_1(t - x/v) + f_2(t + x/v) \tag{23}$$

являются решением *общего одномерного волнового уравнения:*

$$\boxed{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}} \tag{24}$$

где v – фазовая скорость, f_1 и f_2 – произвольные функции, соответствующие волнам, распространяющимся в противоположных направлениях оси X. Уравнение (25) есть одномерное дифференциальное уравнение 2-го порядка в частных производных.

2) ОБЩЕЕ ТРЕХМЕРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ:

– Уравнение плоской бегущей волны $\xi = f(t - \mathbf{nr}/v)$, распространяющейся в направлении произвольного единичного вектора $\mathbf{n}$ со скоростью v, а также сферической бегущей волны $\xi = f(t - r/v)/r$ и цилиндрической бегущей волны $\xi = f(t - R/v)/\sqrt{R}$, или их комбинация, являются решением *общего трехмерного волнового уравнения*

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}^2\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}} \tag{25}$$

где

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{26}$$

оператор Лапласа. Для сферической и цилиндрической бегущей волны оператор Лапласа нужно записывать в соответствующей системе координат (сферической или цилиндрической).

– Общее волновое уравнение можно разбить на три одномерных уравнения вдоль осей *X*, *Y*, *Z*:

$$\boxed{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\cos^2\alpha}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = \frac{\cos^2\beta}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{\cos^2\gamma}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}} \tag{27}$$

где α, β, γ – углы между волновым вектором $\mathbf{k}$ и осями координат.

[●] УРАВНЕНИЯ И СКОРОСТИ РАЗНЫХ УПРУГИХ ВОЛН

Найдя уравнение какой-либо волны, можно найти скорость ее распространения, сопоставив это уравнение с общим волновым уравнением (24) или (25).

1) СКОРОСТЬ ВОЛНЫ В ТОНКОМ СТЕРЖНЕ:

Под тонким имеется в виду стержень, толщина которого мала по сравнению с длиной волны λ.

– Малые продольные колебания (деформации) в тонком стержне описываются волновым уравнением:

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=E\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{28}$$

где E – модуль Юнга (Па), ρ – плотность материала стержня.

– Сопоставляя уравнение (28) с общим одномерным волновым уравнением (24), найдем скорость υ продольной волны, распространяющейся в стержне:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{29}$$

Заметим, что для не тонкого стержня выражение для υ имеет более сложный вид и значение υ оказывается больше, чем в случае тонкого стержня.

– Можно показать, что скорость поперечных упругих волн в неограниченной изотропной твердой среде:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{30}$$

где G – fмодуль сдвига среды, ρ – ее плотность.

2) СКОРОСТЬ ВОЛНЫ В ГИБКОМ ШНУРЕ:

– Малые поперечные колебания натянутого шнура описываются волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{F}{\rho_1}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{31}$$

где F – сила, действующая вдоль шнура на единицу длины, ρ_1 – линейная плотность шнура (масса единицы его длины).

– Сопоставляя уравнение (31) с общим одномерным волновым уравнением (24), найдем скорость υ поперечной волны, распространяющейся в шнуре:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{F}{\rho_1}} \tag{32}$$

3) СКОРОСТЬ ЗВУКА В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ:

– Продольные колебания частиц в жидкости (газе) описываются волновым уравнением аналогичным (28):

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{33}$$

Но в этом случае

$$E = -V \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} \tag{34}$$

где V – объем выделенного рассматриваемого элемента Δx в жидкости (газе), p – давление внутри жидкости (газа), которое меняется вместе с плотностью ρ при прохождении волны (из-за сжатия и разряжения отдельных слоев). Учитывая, что объем V элемента Δx и его плотность меняются при прохождении волны, но их произведение, т. е. масса $\rho V = \mathrm{const}$, находим:

$$\mathrm{d}V = -V \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \tag{35}$$

После подстановки этого выражения в (34) получим $E = \rho\, \mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho$. Отсюда скорость волны согласно формуле (29) примет вид

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} \tag{36}$$

– Для идеального газа:

$$pV^{\gamma} = \mathrm{const} \tag{37}$$

где γ – так называемая постоянная адиабаты, равная отношению теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме, $\gamma = C_p/C_V$ – величина, характерная для каждого газа. Отсюда дифференциал натурального логарифма выражения (28)

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} + \gamma \frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$

откуда $\mathrm{d}p/\mathrm{d}V = -\gamma p/V$, и формула (34) принимает вид

$$E = \gamma p \tag{38}$$

Таким образом, скорость звуковой волны в газе

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \tag{39}$$

Учитывая уравнение состояния идеального газа $pV = (m/M)RT$, выражение (39) можно записать в виде:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{40}$$

[●] ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ

Найдя уравнение какой-либо волны, можно найти скорость ее распространения, сопоставив это уравнение с общим волновым уравнением (24) или (25).

1) ПЛОТНОСТЬ УПРУГОЙ (ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ) ЭНЕРГИИ РАСТЯНУТОГО (ИЛИ СЖАТОГО) СТЕРЖНЯ:

При удлинении (сжатии) стержня от 0 до x энергия стержня увеличивается на величину

$$U = \frac{\varkappa x^2}{2} \tag{41}$$

где $\varkappa$ – коэффициент упругости. Плотность же упругой энергии

$$w_{\text{п}} = \frac{U}{Sl} \tag{42}$$

где S и l – площадь поперечного сечения и длина стержня.

Учитывая, что $\varkappa x = F = \sigma S$ и $\varepsilon = x/l$, тогда

$$U = \frac{Fx}{2} = \frac{\sigma S \cdot \varepsilon l}{2} = \frac{E\varepsilon^2}{2} Sl \tag{43}$$

Отсюда видно, что плотность упругой энергии

$$w_{\text{п}} = \frac{E\varepsilon^2}{2} \tag{44}$$

2) ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ПО НЕМУ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ:

При прохождении продольной волны в стержне каждая единица его объема обладает как потенциальной энергией упругой деформации $w_{\text{п}}$, так и кинетической энергией $w_{\text{к}}$. Плотность полной энергии

$$w = w_{\text{к}} + w_{\text{п}} = \frac{\rho \dot{\xi}^2}{2} + \frac{E\varepsilon^2}{2} \tag{45}$$

Для тонкого стержня $E = \rho v^2$, согласно (29), и выражение (45) можно переписать так:

$$w = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right] \tag{46}$$

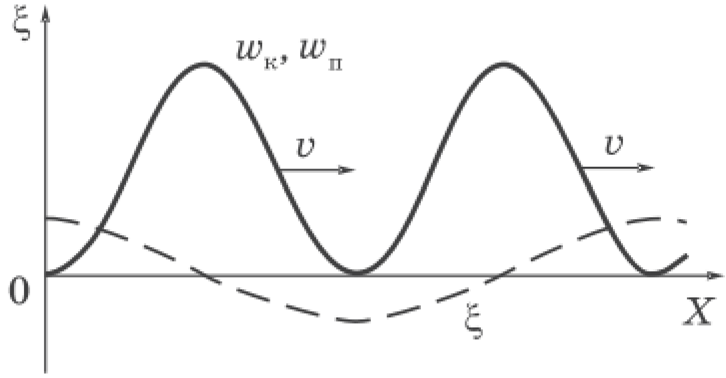
Согласно линейному волновому уравнению (20) оба слагаемых равны друг другу, т. е. плотности кинетической и упругой энергии одинаковы и изменяются синфазно. Поэтому мы имеем в результате

$$\boxed{w = \rho\dot{\xi}^2} \tag{47}$$

В частности, для гармонической волны $\xi(x,t) = a\cos(\omega t - kx)$

$$w = \rho a^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx) \tag{48}$$

Соответствующее распределение $w(x)$ вдоль стержня в некоторый момент показано на рисунке



Среднее значение плотности энергии за период (или за время значительно большее периода колебаний) равно

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2 \tag{49}$$

поскольку среднее значение квадрата синуса равно 1/2.

Примечание! В заключение отметим, что полученные выражения справедливы и для упругих волн в жидкостях и газах!

3) ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ЭНЕРГИИ:

При прохождении волны энергия перемещается в среде вместе с возмущением. Поэтому вводят понятие *потока энергии* Φ. Это количество энергии, переносимое волной через определенную поверхность S в единицу времени:

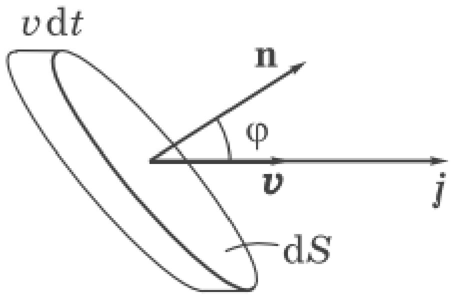
$$\Phi = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{50}$$

где $\mathrm{d}W$ – энергия, переносимая через данную поверхность за время $\mathrm{d}t$.

Поток энергии в разных точках поверхности S может иметь различную интенсивность. Для характеристики этого обстоятельства вводят понятие *плотности потока энергии*. Это поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную к направлению переноса энергии:

$$j = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S_\perp} \tag{51}$$

где $\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t$, а $\mathrm{d}W$ – это энергия, заключенная внутри косого цилиндра с основанием площадью $\mathrm{d}S$ и образующей длиной $\upsilon\mathrm{d}t$, где υ – скорость переноса энергии (фазовая скорость волны, скорость возмущения).



Так как размеры этого цилиндра малы, то $\mathrm{d}W = w\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}V$ – объем данного цилиндра, и мы можем записать:

$$\mathrm{d}W = w\upsilon\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S\cos\varphi = w\upsilon\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S_{\perp}.$$

С учетом этого соотношения выражение (51) примет вид:

$$j = w\upsilon \tag{52}$$

Для определения плотности потока и его направления вводят *вектор Умова* $\mathbf{j}$:

$$\boxed{\mathbf{j} = w\mathbf{v}} \tag{53}$$

где $\boldsymbol{\upsilon}$ – вектор скорости, нормальный к волновой поверхности в данном месте. Для гармонической волны

$$\mathbf{v} = \frac{\omega}{k}\mathbf{n}$$

Здесь $\upsilon_x = (\omega/k)\cos\alpha$, - угол между вектором $\mathbf{j}$ и ортом $\mathbf{i}$ оси X. Это не фазовая скорость вдоль оси X, которая вычисляется по формуле (14).

В случае монохроматической волны вектор $\mathbf{j}$, как и плотность энергии, изменяется со временем по закону квадрата синуса (48). Поэтому среднее по времени значение вектора Умова с учетом (49) можно записать как.

$$\boxed{\langle\mathbf{j}\rangle = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2\mathbf{v}} \tag{54}$$

Это выражение справедливо для волн любого вида – плоской, сферической, цилиндрической, затухающих и др.

Среднее по времени значение плотности потока энергии называют *интенсивностью волны*:

$$I = \langle j\rangle \tag{55}$$

Для монохроматической волны:

$$I = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2\upsilon \tag{56}$$

где, напомним, a – амплитуда волны (например, для сферической волны с затуханием $(a_0/r)\,e^{-\gamma r}$).

Зная вектор Умова во всех точках интересующей нас поверхности S, можно найти поток энергии сквозь эту поверхность:

$$\boxed{\Phi = \int\limits_S \mathbf{j}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int\limits_S j_n \mathrm{d}S} \qquad (57)$$

здесь $\mathrm{d}S = \mathbf{n}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Выражение (57) означает, что поток энергии равен потоку вектора $\mathbf{j}$ сквозь эту поверхность S.

3) ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ЭНЕРГИИ ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ ВОЛН:

Необходимо отметить, что полученное выражение (53) для вектора Умова справедливо только для бегущей волны, у которой есть фазовая скорость $\mathbf{v}$. Если же мы имеем дело с более сложным образованием – суперпозицией (наложением) нескольких продольных волн, выражению для вектора Умова (53) следует придать другой вид:

$$\boxed{\mathbf{j} = -\sigma\mathbf{u}} \qquad (58)$$

где σ – напряжение (или избыточное давление), $\mathbf{u}$ – скорость частиц среды (не скорость волны!). Это выражение справедливо для жидких и газообразных сред, для твердых же сред, строго говоря, – только в случае тонкого стержня или тонкой пластины.

– Вывод (58). Вывод формулы (58) можно получить, рассмотрев произвольную продольную волну в тонком стержне, распространяющуюся в положительном направлении оси X. Из формул $\mathbf{j} = w\mathbf{v}$, $w = \rho\dot{\xi}^2$ и $v = E/\rho$ для такой волны найдем

$$j_x = \frac{w}{v}v^2 = \frac{1}{v}\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2\frac{E}{\rho} = \left(\frac{1}{v}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}E.$$

Выражение в последних скобках, согласно линейному волновому уравнению (20), равно $-\partial\xi/\partial x$ (для волны, распространяющейся в положительном направлении оси X). Значит

$$j_x = -E\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\sigma u_x, \qquad (59)$$

откуда и следует (58).