3 Elementary definitions

3.1 Exercícios

(1/2) a) Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, converge para o número de Dottie $D = 0,739085133...$ — o único ponto fixo de $f(x) = \cos x$.

b) Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, converge — muito lentamente — para o único ponto fixo: 0.

c) Sem ponto fixo. Diverge para $+\infty$.

d) Para $x < 1$, converge para 1, o único ponto fixo. Para $x > 1$, diverge para $+\infty$.

e) Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, converge — muito lentamente — para o único ponto fixo: 0. ∎

(3/4/5) Muita coisa para escrever. Fiz em rascunhos. ∎

(6) Concluído, redigir.

(7) Se f é homeomorfismo de $\mathbb{R}$, deve ser uma função monótona estrita (pois é injetora e contínua). Sejam $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ os pontos da órbita periódica de período primo $n > 2$; note que f aplicada a tal órbita é uma bijeção $\{x_0, \cdots, x_n\} \to \{x_0, \cdots, x_n\}$. Caso f seja decrescente, $f(x_0) > f(x_1) > \cdots > f(x_n)$ e, como $f(x_0)$ é maior que todos os outros elementos, $f(x_0) = x_n$. Analogamente, $f(x_n)$ é menor que os outros, então $f(x_n) = x_0$. Disso, já tiramos uma contradição, pois $x_0 \to x_n \to x_0$ forma um ciclo fechado sem os elementos restantes; impossível.

Caso f seja crescente, mudemos levemente a notação: seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um valor inicial da órbita periódica e $x_k = f^k(x_0)$. Assim, como $f(x_0) \neq x_0$, $x_0 < x_1$ ou $x_0 > x_1$; por indução, pois $x_n = f(x_{n-1})$, temos $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ ou $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$. Mas sabemos que $x_n = x_0$, e chegamos numa contradição em ambos os casos.

Para o exemplo pedido, basta tomar $g(x) = -x$ e verificar que ela satisfaz as condições. ∎

(8) Suponha f uma função com um ponto eventualmente periódico $x_0 \in \mathbb{R}$, de período primo n; como x_0 não é periódico, existe um menor $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m+n}(x_0) = f^m(x_0)$, $m \neq 0$. Portanto, $m - 1 \in \mathbb{N}$. Note, assim, que $f(f^{m-1}(x_0)) = f^m(x_0) = f(f^{m+n-1}(x_0))$, mas $f^{m-1}(x_0) \neq f^{m+n-1}(x_0)$ porque, senão, m não seria o menor natural com a propriedade definida. Assim, f não pode ser injetora e, em particular, não pode ser um homeomorfismo.

É interessante observar que esse argumento é facilmente generalizado para uma injeção em um espaço topológico qualquer. ∎

(9) Identificando S^1 com $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, temos que S é um mapa cujo levantamento para $\mathbb{R}$ é dado por $s(x) = x + \omega + \epsilon \sin(x)$, onde $S(\theta) = s(\theta) \mod 2\pi$. Note que, se provarmos que s é injetora e sua imagem mod 2π é sobrejetora em $[0, 2\pi)$, teremos que S é uma bijeção.

Para tal, temos $s'(x) = 1 + \epsilon \cos(x) \geq 1 - |\epsilon| > 1 - 1 = 0$ (pois $|\epsilon| < 1$ e $|\cos(x)| \leq 1$), implicando que s é estritamente crescente; de fato, injetora. Além disso, observe que $s(0) = \omega$ e $s(2\pi) = \omega + 2\pi$ e, como s é contínua, o teorema do valor intermediário nos garante que $[\omega, \omega + 2\pi] \subset s([0, 2\pi])$. Mas é claro que $\{x \mod 2\pi \mid x \in [\omega, \omega + 2\pi]\} = [0, 2\pi]$ e, assim, s restrita e induzida a $[0, 2\pi)$ é sobrejetora também. Juntando tudo, temos o que queríamos.

Por fim, como S^1 é compacto e Hausdorff, temos que S é uma bijeção contínua de um espaço compacto a um espaço Hausdorff. Então, é automaticamente um homeomorfismo. ∎

(10) Identifiquemos S^1 como $[0, 2\pi)$; como visto no livro, para o mapa dado, $x \in \mathrm{Per}_n(f) \iff x = 2\pi k/(2^n - 1),\ 0 \leq k \leq 2^n - 2$, ou seja, x representa uma $(2^n - 1)$-ésima raiz da unidade. Então, defina $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Per}_n(f)$, isto é, o conjunto de todos os pontos periódicos de f, independente do período.

Tome $x_0 \in [0, 2\pi)$ qualquer, $\epsilon > 0$ e seja $I := (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset \mathbb{R}$. Sabemos que as raízes da unidade são distribuídas uniformemente em S^1, e, para um n qualquer, a distância de uma para a próxima é $L_n = 2\pi(k+1)/(2^n - 1) - 2\pi k/(2^n - 1) = 2\pi/(2^n - 1)$; sabemos que $L_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, tome $m \in \mathbb{N}$ t.q. $L_m < 2\epsilon$ e, assim, é fácil ver que, com $2^m - 1$ raízes distribuídas uniformemente em $[0, 2\pi)$ e uma distância de L_m dentre elas, deve haver ao menos uma raíz em I.

Concluímos que S é denso em S^1. ■

(11) Argumento essencialmente idêntico ao anterior, pois um ponto é eventualmente fixo para esse mapa sse é da forma $\theta_k = 2\pi k/2^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq 2^n - 1$. ■

4 Hyperbolicity

4.1 Exercícios

(1) Nos rascunhos. ■

(2) Feito até (b). ■

(3) Suponha que existe uma sequência de pontos fixos hiperbólicos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para p, outro ponto fixo distinto dos x_n. Como f é difeomorfismo, $f'(p)$ existe e

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Já que $x_n \to p$ e $x_n \neq p\ \forall n \in \mathbb{N}$, pelo teorema de Heine,

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n - p}{x_n - p} = 1,$$

o que contradiz a hiperbolicidade de p. Ou seja, os pontos fixos hiperbólicos de qualquer difeomorfismo são isolados.

Agora, finalizamos observando que f é homeomorfismo em $\mathbb{R}$, então seus pontos periódicos são de período 1 ou 2 apenas. Além disso, é claro que $\mathrm{Per}_2(f) = \mathrm{Fix}(f^2)$ e que $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Per}_1(f) \subset \mathrm{Per}_2(f)$. Portanto, como composição de difeomorfismos é difeomorfismo, f^2 é difeomorfismo e analisar seus pontos fixos implica em analisar todos os pontos periódicos de f. Isto é, o resultado dos parágrafos acima garante que os pontos periódicos de f são isolados. ■

(4) Defina o *tent map* $T\colon [0,1] \to [0,1]$:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome um $1/2^n \leq p \leq 1/2^{n-1}$ qualquer; então, $0 \leq 2^m p \leq 1/2^{n-m-1} < 1/2$ para todo $m < n - 1$, mas $1/2 \leq 2^{n-1} p \leq 1$. Assim, compondo $n - 1$ vezes a função $2x$ e a função $2(1-x)$ uma vez, nessa ordem, temos

$$T^n(p) = 2(1 - 2^{n-1} p).$$

Também note que

$$T^n(p) = p \iff p = \frac{2}{2^n + 1}.$$

Isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 2/(2^n + 1)$ é um ponto de período n de T. É claro que $p_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e, além disso, se $n > 0$,

$$\left|(T^n)'(p)\right| = |-2^n| = 2^n \neq 1,$$

então todo p_n é hiperbólico. Concluímos observando que 0 é um ponto fixo de T e $f'(0) = 2 \neq 1$; ou seja, 0 é um ponto não-isolado no conjunto dos pontos periódicos hiperbólicos. ■

(5) Fazer. ■

(6) Buscando por pontos fixos, $x^3 - \alpha x = x \iff x[x^2 - (\alpha+1)] = 0$; caso $\alpha \in (-1, 1]$, f_α tem três pontos fixos — $x_0 = 0$, $x_\pm = \pm\sqrt{\alpha + 1}$ — e, caso $\alpha \in (-\infty, -1]$, f_α tem apenas um ponto fixo ($x_0 = 0$). Portanto, $\alpha = -1$ é um ponto de bifurcação.

Além disso, $f'_\alpha(x) = 3x^2 - \alpha$, então $f'_\alpha(x_0) = -\alpha$ e $f'(x_\pm) = 2\alpha + 3$. Analisando as derivadas, concluímos que os retratos de fase são da seguinte forma (aqui, R indica um ponto repulsor, A indica um ponto atrator e N indica um ponto não-hiperbólico):

$\boxed{\alpha \in (-1,1)} : (x_-, x_0, x_+) = (\text{R, A, R})$ $\quad$ $\boxed{\alpha = 1} : (x_-, x_0, x_+) = (\text{R, NA, R})$

$\boxed{\alpha \in (-\infty,-1)} : (x_0) = (\text{R})$ $\quad$ $\boxed{\alpha = -1} : (x_0) = (\text{NR})$

Analisou-se a atração ou repulsão dos pontos não-hiperbólicos observando o seguinte: $|f_{-1}(x)| = |x + x^3| > |x|$ implica que pontos próximos de x_0 se afastarão dele (aumentando de magnitude). Semelhantemente, $|f_1(x)| = |x^3 - x| \leq |x| - |x^3| \leq |x|$ para $x \in [-1, 1]$, então pontos próximos de x_0 se aproximarão dele (diminuindo de magnitude).

Por fim, para $\alpha > 1$, observe que $f'_\alpha(x_0) < -1$ e, portanto, x_0 se torna repulsor. Portanto, $\alpha = 1$ também é um ponto de bifurcação. Variando o α e buscando por outros pontos não-hiperbólicos através das derivadas nos pontos fixos, não encontra-se nenhum outro no intervalo dado; conclui-se que $\alpha_\pm = \pm 1$ são os únicos pontos de bifurcação que nos interessam. ■

(7) Se $f_k(x) = kx$, então o único ponto fixo é $x = 0$ e $f'_k(0) = k$. Se $k > 1$, a origem é repulsora; se $0 < k < 1$, a origem é atratora; se $-1 < k < 0$, a origem é atratora; e, se $k < -1$, a origem é repulsora. Assim, temos nossos quatro conjuntos abertos para valores de k: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$.

Sobre os casos excepcionais: em $f_0(x) = 0$, todo ponto é eventualmente fixo. Em $f_1(x) = x$, todo ponto é fixo. E, em $f_{-1}(x) = -x$, todo ponto (exceto o 0) é de período primo 2. ■

5 An example: the quadratic family

5.1 Caracterização do conjunto de Cantor

Acredito que o resultado a seguir é interessante por si só para merecer a própria seção; contudo, ele também nos auxiliará com alguns exercícios mais adiante.

Lema 5.1. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto ternário de Cantor. Então, $p \in \mathcal{C} \iff p = 0.X_1X_2X_3\ldots_3$, onde $X_i \in \{0, 2\}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ — isto é, $\mathcal{C}$ é composto exatamente dos pontos em $[0, 1]$ que admitem uma representação apenas de 0s e 2s em base 3.

Demonstração. Tome

$$p = 0.X_1X_2X_3\ldots X_k\ldots_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{3^k},$$

como acima. Suponha que existe um menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n = 1$ e os próximos dígitos não são apenas 0s ou apenas 1s (senão, p é da forma $0.000\ldots0111\ldots = 0.000\ldots02$ ou $0.000\ldots01 = 0.000\ldots0222\ldots$, ambos podendo ser representados apenas com 0s e 2s); provaremos que todos os p sob essas condições formam exatamente $\mathrm{I} \setminus \mathcal{C}$. Finalizar. ■

5.2 Exercícios

(1) Idêntico à primeira parte da demonstração da proposição 5.3 no livro. ■

(2) Note que $F(x) = x \iff \mu x(1 - x) = x \iff x[\mu x - (\mu - 1)] = 0$, então $x_1 = 0$ ou $x_2 = \frac{\mu-1}{\mu}$ são os pontos fixos de F. Caso $0 < \mu \leq 1$, $x_2 \leq 0$; mas $F(x) \geq 0$ para $x \in \mathrm{I}$, então nenhuma órbita com valor inicial em I pode convergir para x_2 (a não ser que ele seja nulo, $x_1 = x_2$). Além disso, observe que $F(x) = \mu x(1 - x) \leq x(1 - x) \leq x$, pois $\mu \in (0, 1]$ e $1 - x \leq 1$ para $x \in \mathrm{I}$; isto é, as órbitas com valores iniciais em I são decrescentes.

Como órbitas monótonas em conjuntos compactos devem convergir para algum ponto fixo, $F^n(x)$, x em I, deve convergir para o único ponto fixo disponível: $x_1 = 0$. ■

(8) Seja $\mathcal{C}$ o conjunto ternário de Cantor e sejam A_0, A_1, $A_2, \ldots$ as uniões de intervalos abertos retiradas a cada etapa de construção. Assim,

$$\mathcal{C} = \mathrm{I} \ \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right).$$

Fechado: Pelas leis de De Morgan,

$$\mathcal{C} = \mathrm{I} \ \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^c,$$

que é uma intersecção de conjuntos fechados e, portanto, fechada.

Não-vazio: $0 = 0.000\ldots$ é representado apenas por 0s em base 3, então o lema 5.1 garante que $0 \in \mathcal{C}$.

Perfeito: Se $p \in \mathcal{C}$, represente-o como 0s e 2s em base 3 e tome a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde p_n possui os mesmos dígitos que p exceto pelo n-ésimo dígito, que é trocado (0 é trocado por 2 e 2 é trocado por 0). É claro que $p_n \neq p$ e $p_n \in \mathcal{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; além disso, como $|p_n - p| = 2/3^n \to 0$ quando $n \to \infty$, então $p_n \to p$. Portanto, todo $p \in \mathcal{C}$ é ponto de acumulação.

Totalmente desconexo: Caso existisse um intervalo $[x, y] \subset \mathcal{C}$, teríamos que a medida L de $\mathcal{C}$ seria, ao menos, $L \geq |x - y| > 0$, contradizendo o resultado do exercício (9) abaixo. ■

(9) Na n-ésima etapa de construção de $\mathcal{C}$, retira-se 2^{n-1} intervalos de comprimento $1/3^n$ cada, do conjunto da etapa anterior. Isto é, denotando por L_n a soma dos comprimentos na n-ésima etapa:

$$L_n = L_{n-1} - \frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

Como $L_0 = 1$, concluímos indutivamente que

$$\begin{aligned} L_n =& L_{n-1} - \frac{2^{n-1}}{3^n} \\ &= L_{n-2} - \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}} - \frac{2^{n-1}}{3^n} \\ &= \cdots \\ &= L_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{3^{k+1}}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\boxed{L_n = 1 - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k}$$

Observe que o termo subtraído na expressão é uma soma geométrica que, quando $n \to \infty$, se torna uma série geométrica. No caso,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1-2/3} = 3$$

e, portanto, $L_n \to L_\infty = 1 - \frac{1}{3}\cdot 3 = 1 - 1 = 0$. ■

(10) O processo é análogo ao do exercício anterior. Contudo, agora, os intervalos restantes após a n-ésima etapa possuem $(2/5)^n$ de comprimento cada e, assim, o comprimento a ser retirado para a (n+1)-ésima etapa é de $2^n \cdot 1/5 \cdot (2/5)^n = 4^n/5^{n+1}$. Portanto,

$$\boxed{L_n = 1 - \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^k}$$

e, assim,

$$L_\infty = 1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-4/5} = 1 - \frac{1}{5}\cdot 5 = 0,$$

da mesma forma que no exercício anterior. Interessantemente, o processo pode ser generalizado para qualquer conjunto de Cantor onde se retira uma fração fixa α ($0 < \alpha < 1$) do meio dos subintervalos e, ainda assim, o comprimento final sempre será $L_\infty = 0$. ■

(11) Nesse exercício, por conveniência, a discussão será feita exclusivamente em base 3, onde $3_{10} = 10_3$ e uma multiplicação por 3 equivale a um deslocamento da vírgula. $L\colon \mathcal{C}\cap[0,1/3] \to \mathcal{C}$ é escrita como $L(x) = 10x$; é claro que L é contínua e, além disso, é fácil verificar que possui inversa $L^{-1}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}\cap[0,1/3]$ dada por $L^{-1}(x) = x/10$, que também é claramente contínua. Basta mostrar que as imagens de L e L^{-1} estão, de fato, nos respectivos contradomínios.

Um ponto x pertence a $\mathcal{C}\cap[0,1/3]$ se e somente se está em $\mathcal{C}$ e seu primeiro dígito (na representação com 0s e 2s) após a vírgula é 0, pois $x \le 1/3$; ou seja, $x = 0.0X_1X_2\ldots$, com $X_i \in \{0,2\}$. Portanto, se $p = 0.Y_1Y_2Y_3\dots$ pertence a $\mathcal{C}$, temos que $L^{-1}(p) = 1/10 \cdot 0.Y_1Y_2Y_3\dots = 0.0Y_1Y_2\dots \in \mathcal{C} \cap [0, 1/3]$, como queríamos — já que os dígitos continuam sendo 0 ou 2 e o primeiro dígito é sempre 0. Semelhantemente, $L(0.0Y_1Y_2\dots) = 0.Y_1Y_2\dots \in \mathcal{C}$ para todo $0.0Y_1Y_2\dots \in \mathcal{C} \cap [0, 1/3]$. Assim, as funções estão bem-definidas e L é um homeomorfismo. ■

(12) Fazer.