1 Cap. 3

1.1 Exercícios

(1/2) a) Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, converge para o número de Dottie $D = 0,739085133...$ — o único ponto fixo de $f(x) = \cos x$.

b) Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, converge — muito lentamente — para o único ponto fixo: 0.

c) Sem ponto fixo. Diverge para $+\infty$.

d) Para $x < 1$, converge para 1, o único ponto fixo. Para $x > 1$, diverge para $+\infty$.

e) Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, converge — muito lentamente — para o único ponto fixo: 0. ■

(3/4/5) Muita coisa para escrever. Fiz em rascunhos. ■

(6) Concluído, redigir.

(7) Se f é homeomorfismo de $\mathbb{R}$, deve ser uma função monótona estrita (pois é injetora e contínua). Sejam $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ os pontos da órbita periódica de período primo $n > 2$; note que f aplicada a tal órbita é uma bijeção $\{x_0, \cdots, x_n\} \to \{x_0, \cdots, x_n\}$. Caso f seja decrescente, $f(x_0) > f(x_1) > \cdots > f(x_n)$ e, como $f(x_0)$ é maior que todos os outros elementos, $f(x_0) = x_n$. Analogamente, $f(x_n)$ é menor que os outros, então $f(x_n) = x_0$. Disso, já tiramos uma contradição, pois $x_0 \to x_n \to x_0$ forma um ciclo fechado sem os elementos restantes; impossível.

Caso f seja crescente, mudemos levemente a notação: seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um valor inicial da órbita periódica e $x_k = f^k(x_0)$. Assim, como $f(x_0) \neq x_0$, $x_0 < x_1$ ou $x_0 > x_1$; por indução, pois $x_n = f(x_{n-1})$, temos $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ ou $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$. Mas sabemos que $x_n = x_0$, e chegamos numa contradição em ambos os casos.

Para o exemplo pedido, basta tomar $g(x) = -x$ e verificar que ela satisfaz as condições. ■

(8) Suponha f uma função com um ponto eventualmente periódico $x_0 \in \mathbb{R}$, de período primo n; como x_0 não é periódico, existe um menor $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m+n}(x_0) = f^m(x_0)$, $m \neq 0$. Portanto, $m - 1 \in \mathbb{N}$. Note, assim, que $f(f^{m-1}(x_0)) = f^m(x_0) = f(f^{m+n-1}(x_0))$, mas $f^{m-1}(x_0) \neq f^{m+n-1}(x_0)$ porque, senão, m não seria o menor natural com a propriedade definida. Assim, f não pode ser injetora e, em particular, não pode ser um homeomorfismo.

É interessante observar que esse argumento é facilmente generalizado para uma injeção em um espaço topológico qualquer. ■

(9) Fazer. ■

(10) Identifiquemos S^1 como $[0, 2\pi)$; como visto no livro, para o mapa dado, $x \in \text{Per}_n(f) \iff x = 2\pi k/(2^n - 1)$, $0 \leq k \leq 2^n - 2$, ou seja, x representa uma $(2^n - 1)$-ésima raiz da unidade. Então, defina $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(f)$, isto é, o conjunto de todos os pontos periódicos de f, independente do período.

Tome $x_0 \in [0, 2\pi)$ qualquer, $\epsilon > 0$ e seja $I := (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset \mathbb{R}$. Sabemos que as raízes da unidade são distribuídas uniformemente em S^1, e, para um n qualquer, a distância de uma para a próxima é $L_n = 2\pi(k+1)/(2^n - 1) - 2\pi k/(2^n - 1) = 2\pi/(2^n - 1)$; sabemos que $L_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, tome $m \in \mathbb{N}$ t.q. $L_m < 2\epsilon$ e, assim, é fácil ver que, com $2^m - 1$ raízes distribuídas uniformemente em $[0, 2\pi)$ e uma distância de L_m dentre elas, deve haver ao menos uma raíz em I.

Concluímos que S é denso em S^1. ■

(11) Argumento essencialmente idêntico ao anterior, pois um ponto é eventualmente fixo para esse mapa sse é da forma $\theta_k = 2\pi k/2^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq 2^n - 1$. ■

2 Cap. 4

2.1 Exercícios

(1) Nos rascunhos. ■

(2) Nos rascunhos. ■

(3) Suponha que existe uma sequência de pontos fixos hiperbólicos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para p, outro ponto fixo distinto dos x_n. Como f é difeomorfismo, $f'(p)$ existe e

$$f'(p) = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Já que $x_n \to p$ e $x_n \neq p$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo teorema de Heine,

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - p}{x_n - p} = 1,$$

o que contradiz a hiperbolicidade de p. Ou seja, os pontos fixos hiperbólicos de qualquer difeomorfismo são isolados.

Agora, finalizamos observando que f é homeomorfismo em $\mathbb{R}$, então seus pontos periódicos são de período 1 ou 2 apenas. Além disso, é claro que $\mathrm{Per}_2(f) = \mathrm{Fix}(f^2)$ e que $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Per}_1(f) \subset \mathrm{Per}_2(f)$. Portanto, como composição de difeomorfismos é difeomorfismo, f^2 é difeomorfismo e analisar seus pontos fixos implica em analisar todos os pontos periódicos de f. Isto é, o resultado dos parágrafos acima garante que os pontos periódicos de f são isolados. ■

(4) Defina o *tent map* $T\colon [0,1] \to [0,1]$:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, \ 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x), \ 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome um $1/2^n \leq p \leq 1/2^{n-1}$ qualquer; então, $0 \leq 2^m p \leq 1/2^{n-m-1} < 1/2$ para todo $m < n-1$, mas $1/2 \leq 2^{n-1}p \leq 1$. Assim, compondo $n-1$ vezes a função $2x$ e a função $2(1-x)$ uma vez, nessa ordem, temos

$$T^n(p) = 2(1 - 2^{n-1}p).$$

Também note que

$$T^n(p) = p \iff p = \frac{2}{2^n + 1}.$$

Isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 2/(2^n+1)$ é um ponto de período n de T. É claro que $p_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e, além disso, se $n > 0$,

$$\left|(T^n)'(p)\right| = |-2^n| = 2^n \neq 1,$$

então todo p_n é hiperbólico. Concluímos observando que 0 é um ponto fixo de T e $f'(0) = 2 \neq 1$; ou seja, 0 é um ponto não-isolado no conjunto dos pontos periódicos hiperbólicos. ■

(5) Fazer. ■

(6) Fazer. ■

(7) Fazer. ■