

## 3 Elementary definitions

### 3.1 Exercícios

(1/2) a) Para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ , converge para o número de Dottie  $D = 0,739085133\dots$  — o único ponto fixo de  $f(x) = \cos x$ .

b) Para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ , converge — muito lentamente — para o único ponto fixo: 0.

c) Sem ponto fixo. Diverge para  $+\infty$ .

d) Para  $x < 1$ , converge para 1, o único ponto fixo. Para  $x > 1$ , diverge para  $+\infty$ .

e) Para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ , converge — muito lentamente — para o único ponto fixo: 0. ■

(3/4/5) Muita coisa para escrever. Fiz em rascunhos. ■

(6) Concluído, redigir.

(7) Se  $f$  é homeomorfismo de  $\mathbb{R}$ , deve ser uma função monótona estrita (pois é injetora e contínua). Sejam  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  os pontos da órbita periódica de período primo  $n > 2$ ; note que  $f$  aplicada a tal órbita é uma bijeção  $\{x_0, \dots, x_n\} \rightarrow \{x_0, \dots, x_n\}$ . Caso  $f$  seja decrescente,  $f(x_0) > f(x_1) > \dots > f(x_n)$  e, como  $f(x_0)$  é maior que todos os outros elementos,  $f(x_0) = x_n$ . Analogamente,  $f(x_n)$  é menor que os outros, então  $f(x_n) = x_0$ . Disso, já tiramos uma contradição, pois  $x_0 \rightarrow x_n \rightarrow x_0$  forma um ciclo fechado sem os elementos restantes; impossível.

Caso  $f$  seja crescente, mudemos levemente a notação: seja  $x_0 \in \mathbb{R}$  um valor inicial da órbita periódica e  $x_k = f^k(x_0)$ . Assim, como  $f(x_0) \neq x_0$ ,  $x_0 < x_1$  ou  $x_0 > x_1$ ; por indução, pois  $x_n = f(x_{n-1})$ , temos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  ou  $x_0 > x_1 > \dots > x_n$ . Mas sabemos que  $x_n = x_0$ , e chegamos numa contradição em ambos os casos.

Para o exemplo pedido, basta tomar  $g(x) = -x$  e verificar que ela satisfaz as condições. ■

(8) Suponha  $f$  uma função com um ponto eventualmente periódico  $x_0 \in \mathbb{R}$ , de período primo  $n$ ; como  $x_0$  não é periódico, existe um menor  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{m+n}(x_0) = f^m(x_0)$ ,  $m \neq 0$ . Portanto,  $m-1 \in \mathbb{N}$ . Note, assim, que  $f(f^{m-1}(x_0)) = f^m(x_0) = f(f^{m+n-1}(x_0))$ , mas  $f^{m-1}(x_0) \neq f^{m+n-1}(x_0)$  porque, senão,  $m$  não seria o menor natural com a propriedade definida. Assim,  $f$  não pode ser injetora e, em particular, não pode ser um homeomorfismo.

É interessante observar que esse argumento é facilmente generalizado para uma injeção em um espaço topológico qualquer. ■

(9) Identificando  $S^1$  com  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , temos que  $S$  é um mapa cujo levantamento para  $\mathbb{R}$  é dado por  $s(x) = x + \omega + \epsilon \sin(x)$ , onde  $S(\theta) = s(\theta) \bmod 2\pi$ . Note que, se provarmos que  $s$  é injetora e sua imagem  $\bmod 2\pi$  é sobrejetora em  $[0, 2\pi)$ , teremos que  $S$  é uma bijeção.

Para tal, temos  $s'(x) = 1 + \epsilon \cos(x) \geq 1 - |\epsilon| > 1 - 1 = 0$  (pois  $|\epsilon| < 1$  e  $|\cos(x)| \leq 1$ ), implicando que  $s$  é estritamente crescente; de fato, injetora. Além disso, observe que  $s(0) = \omega$  e  $s(2\pi) = \omega + 2\pi$  e, como  $s$  é contínua, o teorema do valor intermediário nos garante que  $[\omega, \omega + 2\pi] \subset s([0, 2\pi])$ . Mas é claro que  $\{x \bmod 2\pi \mid x \in [\omega, \omega + 2\pi]\} = [0, 2\pi]$  e, assim,  $s$  restrita e induzida a  $[0, 2\pi)$  é sobrejetora também. Juntando tudo, temos o que queríamos.

Por fim, como  $S^1$  é compacto e Hausdorff, temos que  $S$  é uma bijeção contínua de um espaço compacto a um espaço Hausdorff. Então, é automaticamente um homeomorfismo. ■

(10) Identifiquemos  $S^1$  como  $[0, 2\pi)$ ; como visto no livro, para o mapa dado,  $x \in \text{Per}_n(f) \iff x = 2\pi k/(2^n - 1)$ ,  $0 \leq k \leq 2^n - 2$ , ou seja,  $x$  representa uma  $(2^n - 1)$ -ésima raiz da unidade. Então, defina  $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Per}_n(f)$ , isto é, o conjunto de todos os pontos periódicos de  $f$ , independente do período.

Tome  $x_0 \in [0, 2\pi)$  qualquer,  $\epsilon > 0$  e seja  $I := (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset \mathbb{R}$ . Sabemos que as raízes da unidade são distribuídas uniformemente em  $S^1$ , e, para um  $n$  qualquer, a distância de uma para a próxima é  $L_n = 2\pi(k+1)/(2^n - 1) - 2\pi k/(2^n - 1) = 2\pi/(2^n - 1)$ ; sabemos que  $L_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, tome  $m \in \mathbb{N}$  t.q.  $L_m < 2\epsilon$  e, assim, é fácil ver que, com  $2^m - 1$  raízes distribuídas uniformemente em  $[0, 2\pi)$  e uma distância de  $L_m$  dentre elas, deve haver ao menos uma raiz em  $I$ .

Concluimos que  $S$  é denso em  $S^1$ . ■

(11) Argumento essencialmente idêntico ao anterior, pois um ponto é eventualmente fixo para esse mapa sse é da forma  $\theta_k = 2\pi k/2^n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq k \leq 2^n - 1$ . ■

## 4 Hyperbolicity

### 4.1 Exercícios

(1) Nos rascunhos. ■

(2) Feito até (b). ■

(3) Suponha que existe uma sequência de pontos fixos hiperbólicos  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge para  $p$ , outro ponto fixo distinto dos  $x_n$ . Como  $f$  é difeomorfismo,  $f'(p)$  existe e

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Já que  $x_n \rightarrow p$  e  $x_n \neq p \forall n \in \mathbb{N}$ , pelo teorema de Heine,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - p}{x_n - p} = 1,$$

o que contradiz a hiperbolicidade de  $p$ . Ou seja, os pontos fixos hiperbólicos de qualquer difeomorfismo são isolados.

Agora, finalizamos observando que  $f$  é homeomorfismo em  $\mathbb{R}$ , então seus pontos periódicos são de período 1 ou 2 apenas. Além disso, é claro que  $\text{Per}_2(f) = \text{Fix}(f^2)$  e que  $\text{Fix}(f) = \text{Per}_1(f) \subset \text{Per}_2(f)$ . Portanto, como composição de difeomorfismos é difeomorfismo,  $f^2$  é difeomorfismo e analisar seus pontos fixos implica em analisar todos os pontos periódicos de  $f$ . Isto é, o resultado dos parágrafos acima garante que os pontos periódicos de  $f$  são isolados. ■

(4) Defina o *tent map*  $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ :

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tome um  $1/2^n \leq p \leq 1/2^{n-1}$  qualquer; então,  $0 \leq 2^m p \leq 1/2^{n-m-1} < 1/2$  para todo  $m < n - 1$ , mas  $1/2 \leq 2^{n-1} p \leq 1$ . Assim, compondo  $n - 1$  vezes a função  $2x$  e a função  $2(1 - x)$  uma vez, nessa ordem, temos

$$T^n(p) = 2(1 - 2^{n-1}p).$$

Também note que

$$T^n(p) = p \iff p = \frac{2}{2^n + 1}.$$

Isto é, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n = 2/(2^n + 1)$  é um ponto de período  $n$  de  $T$ . É claro que  $p_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e, além disso, se  $n > 0$ ,

$$|(T^n)'(p)| = |-2^n| = 2^n \neq 1,$$

então todo  $p_n$  é hiperbólico. Concluimos observando que 0 é um ponto fixo de  $T$  e  $f'(0) = 2 \neq 1$ ; ou seja, 0 é um ponto não-isolado no conjunto dos pontos periódicos hiperbólicos. ■

**(5) Fazer.** ■

**(6)** Buscando por pontos fixos,  $x^3 - \alpha x = x \iff x[x^2 - (\alpha + 1)] = 0$ ; caso  $\alpha \in (-1, 1]$ ,  $f_\alpha$  tem três pontos fixos —  $x_0 = 0$ ,  $x_\pm = \pm\sqrt{\alpha + 1}$  — e, caso  $\alpha \in (-\infty, -1]$ ,  $f_\alpha$  tem apenas um ponto fixo ( $x_0 = 0$ ). Portanto,  $\alpha = -1$  é um ponto de bifurcação.

Além disso,  $f'_\alpha(x) = 3x^2 - \alpha$ , então  $f'_\alpha(x_0) = -\alpha$  e  $f'(x_\pm) = 2\alpha + 3$ . Analisando as derivadas, concluimos que os retratos de fase são da seguinte forma (aqui, R indica um ponto repulsor, A indica um ponto atrator e N indica um ponto não-hiperbólico):

$\alpha \in (-1, 1]$	$: (x_-, x_0, x_+) = (\text{R}, \text{A}, \text{R})$	$\alpha = 1$	$: (x_-, x_0, x_+) = (\text{R}, \text{NA}, \text{R})$
$\alpha \in (-\infty, -1]$	$: (x_0) = (\text{R})$	$\alpha = -1$	$: (x_0) = (\text{NR})$

Analisou-se a atração ou repulsão dos pontos não-hiperbólicos observando o seguinte:  $|f_{-1}(x)| = |x + x^3| > |x|$  implica que pontos próximos de  $x_0$  se afastarão dele (aumentando de magnitude). Semelhantemente,  $|f_1(x)| = |x^3 - x| \leq |x| - |x^3| \leq |x|$  para  $x \in [-1, 1]$ , então pontos próximos de  $x_0$  se aproximarão dele (diminuindo de magnitude).

Por fim, para  $\alpha > 1$ , observe que  $f'_\alpha(x_0) < -1$  e, portanto,  $x_0$  se torna repulsor. Portanto,  $\alpha = 1$  também é um ponto de bifurcação. Variando o  $\alpha$  e buscando por outros pontos não-hiperbólicos através das derivadas nos pontos fixos, não encontra-se nenhum outro no intervalo dado; conclui-se que  $\alpha_\pm = \pm 1$  são os únicos pontos de bifurcação que nos interessam. ■

**(7)** Se  $f_k(x) = kx$ , então o único ponto fixo é  $x = 0$  e  $f'_k(0) = k$ . Se  $k > 1$ , a origem é repulsora; se  $0 < k < 1$ , a origem é atratora; se  $-1 < k < 0$ , a origem é atratora; e, se  $k < -1$ , a origem é repulsora. Assim, temos nossos quatro conjuntos abertos para valores de  $k$ :  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, \infty)$ .

Sobre os casos excepcionais: em  $f_0(x) = 0$ , todo ponto é eventualmente fixo. Em  $f_1(x) = x$ , todo ponto é fixo. E, em  $f_{-1}(x) = -x$ , todo ponto (exceto o 0) é de período primo 2. ■

## 5 An example: the quadratic family

### 5.1 Exercícios

**(1)** Idêntico à primeira parte da demonstração da proposição 5.3 no livro. ■