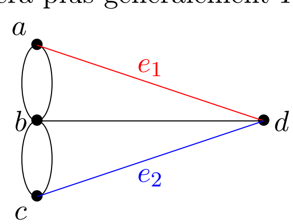
1 Théorie des graphes :

1.1 Définitions

1.1.1 Introduction

Un **graphe** Γ est un triplet (V, E, γ) où :
— V est un ensemble fini dont les éléments sont appelés **sommets**
— E est un ensemble fini dont les éléments sont appelés **arrêtes**
— γ est une fonction qui associe à chaque arrête $e \in E$ une paire de sommets $\{x, y\} \in V$

Qu'on notera plus généralement $P = (V, E)$



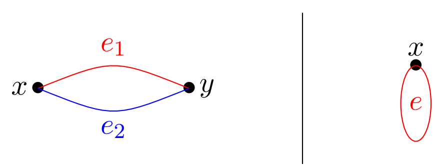
$$V = \{a, b, c, d\}$$
$$E = \{e_1, e_2, ...\}$$
$$\gamma(e_1) = \{a, d\}$$
$$\gamma(e_2) = \{c, d\}$$

Exemple de graphe

Soit $\gamma(e) = \{x, y\}$ pour $e \in E, \{x, y\} \in V$. On dit que x et y sont **adjacents** et que e est **incidenté** à x et y.

1.1.2 Cas particulier d'arête

On appelle **arête multiple** toutes les arêtes incidenté à 2 même points. Un **lacet** est une arête qui incidente le même point.



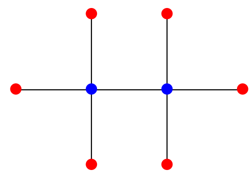
Graphe avec arête multiple et graphe avec lacet

Un graphe est dit **simple** s'il ne contient pas d'arête multiple ni de lacet

1.1.3 Degré d'un sommet

Le **degré** d'un sommet $v \in V$ est le nombre d'arête incidentes à v (les lacets compte pours 2 arêtes). On le note : $deg(v)$.

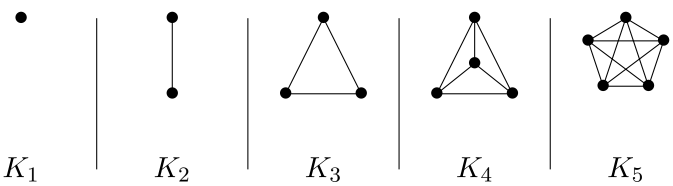
Théorème : Soit $\Gamma = (V, E)$, alors $\sum_{v \in V} deg(v) = 2\#E$. Autrement dit la somme des degrés de tout les sommets est égale au nombre d'arête $\times 2$. Ce qui implique que la somme des degrés d'un graphe est d'office paire.



7 arêtes
2 sommets (bleu) de degré 4
6 sommets (rouge) de degré 1
$2 \times 4 + 6 \times 1 = 14 = 2\times$ nombre d'arête totale

1.1.4 Graphe complet

Le **graphe complet** K est le graphe simple à n sommets pour lequel chaque paire de sommet à une arête. Autrement dit, les sommets sont tous adjacents entre-eux.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

1.1.5 Sous-graphes

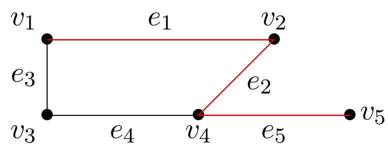
Un graphe $\Gamma' = (U, F)$ est un **sous-graphe** de $\Gamma = (V, E)$ si :
$U \subseteq$ et $F \subseteq E$. On notera $\Gamma' \leq \ \Gamma$

1.2 Chemins

1.2.1 Definition

Soit $P = (V, E)$ et $v, w \in V$, un **chemin** de v à w de longueur n est une séquence alternée de $(n+1)$ sommets $v_0, v_1, ..., v_n$ et de n arêtes $e_1, e_2, ..., e_n$ de la forme : $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n)$.

Un chemin est **simple** si aucun sommet ne se répète, sauf peut-être celui de départ ou d'arrivée.



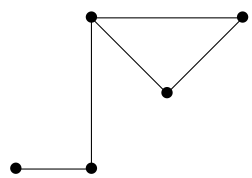
$(v_1, e_1, v_2, e_2, v_4, e_5, v_5)$ est un chemin simple entre v_1 et v_5

Remarque : Dans un graphe simple on notera juste la suite des sommets (car il existe qu'un seul chemin les reliants). Avec l'exemple ci-dessus : (v_1, v_2, v_4, v_5)

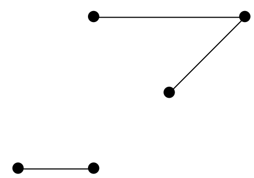
1.2.2 Graphe connexe

Un graphe $\Gamma = (V, E)$ est **connexe** si $\forall x, y \in V : \exists$ un chemin de x à y.

Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe et $x \in V$, la **composante connexe** de Γ contenant x est le sous-graphe Γ' de Γ dont les sommets et les arêtes sont contenues dans un chemin de Γ' démarrant en x.



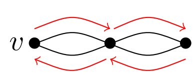
Graphe connexe



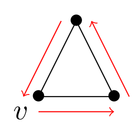
Graphe non-connexe avec 2 composantes connexe

1.2.3 Cycles

Soit $\Gamma = (V, E)$ et $v \in V$, un **cycle** est un chemin allant de v à v. Il est **simple** si on ne passe pas plusieurs fois sur le même sommet (à part v).



Cycle non-simple

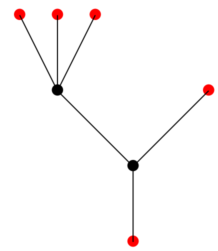


Cycle simple

1.3 Arbres

1.3.1 Définition

Un **arbre** est un graphe simple, connexe qui ne contient aucun cycle. Ses sommets de degrés 1 sont appelés **feuilles**.



Exemple d'arbre (feuilles en rouge)

Si T est un arbre avec $p \geq 2$ sommets, alors T contient au moins 2 feuilles.

<u>Théorème :</u> Soit T un graphe simple à p sommets, alors :
T est un arbre $\Leftrightarrow T$ à $(p-1)$ arêtes et aucun cycle $\Leftrightarrow T$ à $(p-1)$ arêtes et est connexe.

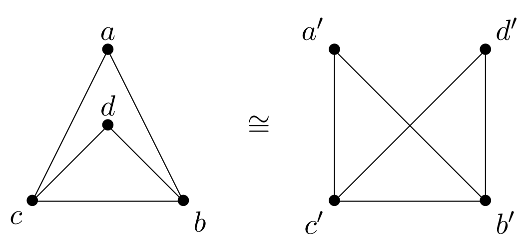
1.3.2 Arbre couvrant

Un **arbre couvrant** dans un graphe Γ est un arbre qui est un sous-arbre de Γ et qui contient tout les sommets de Γ.

Il est utile entre-autre pour résoudre le problème du voyageur de commerce.

1.4 Isomorphisme

2 graphes $\Gamma_1 = (V_1, E_1, \gamma_1)$ et $\Gamma_2 = (V_2, E_2, \gamma_2)$ sont **isomorphes** s'il existe une bijection $f : v_1 \to v_2$ et une bijection $g : E_1 \to E_2$ tel que $\forall e \in E_1$ est incident à $v, w \in V_1$ si et seulement si $g(e)$ est incidente à $f(v), f(w) \in V_2$.
On note cela : $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$.
Autrement dit, les graphes ont le même nombre de sommets et sont connectés de la même façon. Autrement dit, si les deux graphes venaient à être dessinés, alors il n'y aurait qu'à déplacer les sommets de l'un pour obtenir la copie conforme de l'autre.



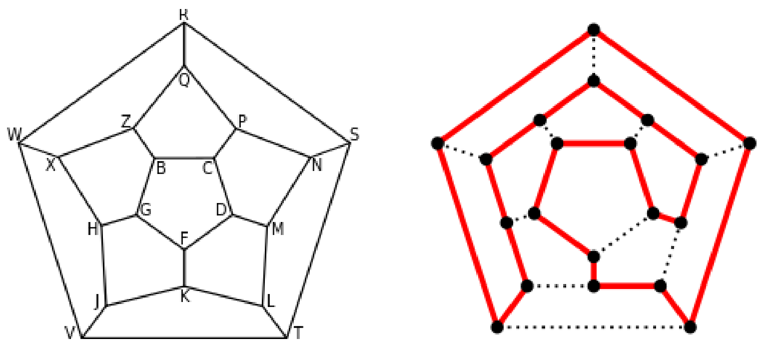
$f(a) = a'$
$f(b) = b'$
$f(c) = c'$
$f(d) = d'$

Exemple de graphe isomorphe

Pour prouver que 2 graphes sont isomorphe on montre la bijection de chaque sommet (il doit avoir le même degré dans le graphe isomorphe et être adjacents aux même sommet).
Inversement pour prouver que 2 graphes ne sont pas isomorphe, il nous suffit de trouver un sommet qui n'est pas une bijection.

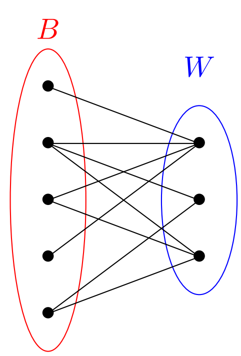
1.5 Graphe Hamiltonien

Un **graphe hamiltonien** est un graphe possédant au moins un cycle passant par tout les sommets une et une seule fois. Chacun de ses cycles sont appelés **cycle hamiltonien**.



Exemple de graphe hamiltonien et d'un cycle hamiltonien

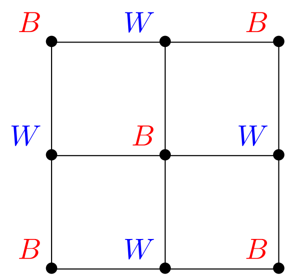
Un graphe $\Gamma = (V, E)$ est **biparti** si on peut écrire $V = B \cup W$ avec $B \cap W = \emptyset$ et toute les arêtes de Γ joint un sommet de B à un sommet de W. Avec B et W des sous-ensembles de sommets.



Exemple de graphe biparti

Si un graphe est biparti, alors tout ses cycles simples sont de longueur paire.

Un graphe triparti avec un nombre impair de sommets n'est pas hamiltonien.

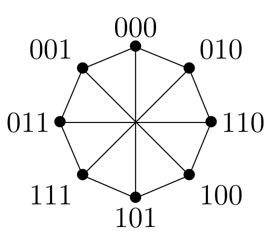


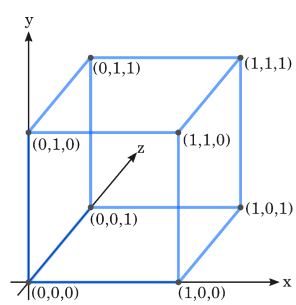
Exemple de graphe triparti non-hamiltonien

<u>Théorème :</u> Soit Γ un graphe simple avec $p \geq 3$ sommets et $\forall v \in V$: $deg(v) \geq \frac{1}{2}p$, alors Γ est hamiltonien.

1.6 Illustration - Le code de Gray

Un code de Gray d'ordre n est un arrangement cyclique de 2^n mots binaires de longueur n tels que 2 mots ne différent qu'en une seule position. Par exemple pour $n = 3$:





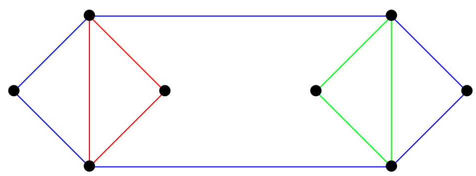
Comparable aux sommets d'un cube

1.7 Graphe Eulérien

Un **cycle eulérien** dans un graphe Γ est un cycle qui contient toutes les arêtes de Γ. Un graphe est **eulérien** s'il contient un de ses graphes.

Proposition : Si un graphe est eulérien, alors tout ses sommets sont de degrés pairs.

Lemme : Soit Γ un graphe dans lequel chaque sommet est de degré pair, alors l'ensemble E se partitionne[1] en une union de cycles disjoints.



toutes les arêtes se trouvent dans un seul cycle

Théorème : Soit Γ un graphe connexe. Γ est un graphe eulérien $\Leftrightarrow$ chaque sommet à un degré pair.

1.8 Ordre partiel

Soit P un ensemble. Un **ordre partiel** sur P est une relation sur P. C'est-à-dire un ensemble de couple $(p_1, p_2) \in P \times P$ noté $p_1 \leq p_2$ tel que :

— Réflexivité : $p \leq p$

— Anti-symétrie : $p \leq q$ et $q \leq p \Rightarrow p = q$

— Transitivité : $p \leq q$ et $q \leq r \Rightarrow p \leq r$

On note $(P, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné.

Un ordre partiel $(P, \leq)$ peut se représenter à l'aide d'un graphe. Si l'on place les arêtes entre les différents sommets en respectant les 3 règles d'un ordre partiel alors on obtient un **diagramme de Hasse**. C'est à dire le graphe simple $\Gamma = (P, E)$ tels que :

— $e = \{x, y\} \in E \Leftrightarrow x \leq y$ et $\exists z | x \leq z \cap z \leq y$

— Dans sa représentation : si $x \leq y, x$ sera placé plus bas que y

1. collection de sous-ensemble $C_1, ..., C_n$ de E tels que $E = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ et $\forall i \neq j, C_i \cap C_j = \emptyset$

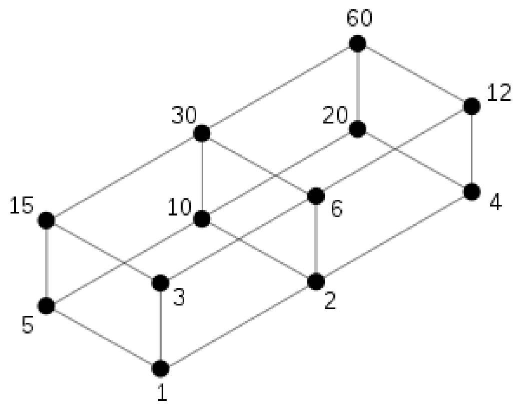


Diagramme de Hasse de l'ensemble des diviseurs de 60,
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$*, ordonnés par la relation de divisibilité*

Soit $(P, \leq)$ un ordre partiel :
- Une **chaine** dans P est un sous-ensemble C de P tels que :
  $\forall c_1, c_2 \in C : c_1 \leq c_2$ ou $c_2 \leq c_1$.
  (Dans l'exemple ci-dessus : $\{1, 2, 4, 20, 60\}$ en est une (1 divise 2, qui divisent 4, qui divisent 20, qui divisent 60))
- Une **antichaîne** dans P est un sous-ensemble A de P tels que :
  $\forall a_1 \neq a_2 \in A : a_1 \not\leq a_2$ et $a_2 \not\leq a_1$. Autrement dit c'est une partie dont les éléments sont 2 à 2 incomparables. (Dans l'exemple ci-dessus : $\{5, 3, 2\}$ en est une (5 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2))

Théorème (Dilworth) : Soit $(P, \leq)$ un ensemble fini partiellement ordonné. Alors $\exists$ une antichaine A une partition de P par des chaînes $Q = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ tels que $\#Q = \#A$. Autrement dit, le théorème de Dilworth établit, pour un ordre fini, l'existence d'une antichaîne A et d'une partition de l'ensemble ordonné en une famille Q de chaînes, telles que A et Q aient même cardinal.

Remarques :
- Q une partition de P et A une antichaîne dans P alors $\#A \leq \#Q$
- $(P, \leq)$ ordre total. Alors une antichaîne non-vide à exactement 1 élément.