1 Théorie des graphes :

1.1 Définitions

1.1.1 Introduction

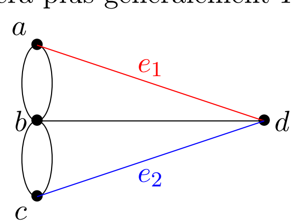
Un **graphe** Γ est un triplet (V, E, γ) où :

— V est un ensemble fini dont les éléments sont appelés **sommets**

— E est un ensemble fini dont les éléments sont appelés **arrêtes**

— γ est une fonction qui associe à chaque arrête $e \in E$ une paire de sommets $\{x, y\} \in V$

Qu'on notera plus généralement $P = (V, E)$



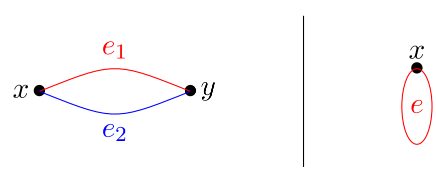
$$V = \{a, b, c, d\}$$
$$E = \{e_1, e_2, ...\}$$
$$\gamma(e_1) = \{a, d\}$$
$$\gamma(e_2) = \{c, d\}$$

Exemple de graphe

Soit $\gamma(e) = \{x, y\}$ pour $e \in E, \{x, y\} \in V$. On dit que x et y sont **adjacents** et que e est **incidenté** à x et y.

1.1.2 Cas particulier d'arête

On appelle **arête multiple** toutes les arêtes incidenté à 2 même points. Un **lacet** est une arête qui incidente le même point.



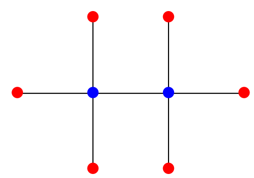
Graphe avec arête multiple et graphe avec lacet

Un graphe est dit **simple** s'il ne contient pas d'arête multiple ni de lacet

1.1.3 Degré d'un sommet

Le **degré** d'un sommet $v \in V$ est le nombre d'arête incidentes à v (les lacets compte pours 2 arêtes). On le note : $deg(v)$.

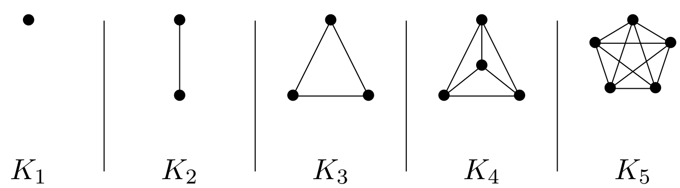
Théorème : Soit $\Gamma = (V, E)$, alors $\sum_{v \in V} deg(v) = 2\#E$. Autrement dit la somme des degrés de tout les sommets est égale au nombre d'arête $\times 2$. Ce qui implique que la somme des degrés d'un graphe est d'office paire.



7 arêtes
2 sommets (bleu) de degré 4
6 sommets (rouge) de degré 1
$2 \times 4 + 6 \times 1 = 14 = 2\times$ nombre d'arête totale

1.1.4 Graphe complet

Le **graphe complet** K est le graphe simple à n sommets pour lequel chaque paire de sommet à une arête. Autrement dit, les sommets sont tous adjacents entre-eux.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

1.1.5 Sous-graphes

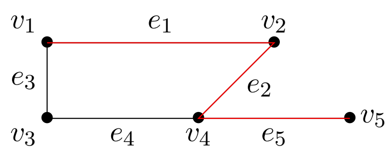
Un graphe $\Gamma' = (U, F)$ est un **sous-graphe** de $\Gamma = (V, E)$ si :
$U \subseteq$ et $F \subseteq E$. On notera $\Gamma' \leq \Gamma$

1.2 Chemins

1.2.1 Definition

Soit $P = (V, E)$ et $v, w \in V$, un **chemin** de v à w de longueur n est une séquence alternée de $(n+1)$ sommets $v_0, v_1, ..., v_n$ et de n arêtes $e_1, e_2, ..., e_n$ de la forme : $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n)$.

Un chemin est **simple** si aucun sommet ne se répète, sauf peut-être celui de départ ou d'arrivée.



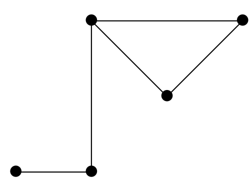
$(v_1, e_1, v_2, e_2, v_4, e_5, v_5)$ est un chemin simple entre v_1 et v_5

Remarque : Dans un graphe simple on notera juste la suite des sommets (car il existe qu'un seul chemin les reliants). Avec l'exemple ci-dessus : (v_1, v_2, v_4, v_5)

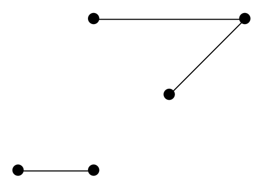
1.2.2 Graphe connexe

Un graphe $\Gamma = (V, E)$ est **connexe** si $\forall x, y \in V : \exists$ un chemin de x à y.

Soit $\Gamma = (V, E)$ un graphe et $x \in V$, la **composante connexe** de Γ contenant x est le sous-graphe Γ' de Γ dont les sommets et les arêtes sont contenues dans un chemin de Γ' démarrant en x.



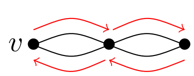
Graphe connexe



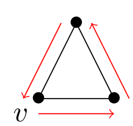
Graphe non-connexe avec 2 composantes connexe

1.2.3 Cycles

Soit $\Gamma = (V, E)$ et $v \in V$, un **cycle** est un chemin allant de v à v. Il est **simple** si on ne passe pas plusieurs fois sur le même sommet (à part v).



Cycle non-simple



Cycle simple