

**Luca Palmieri, Marco Santagiustina**

# **La Polarizzazione del Campo Elettromagnetico**

**Appunti per il corso di Antenne e Propagazione Wireless**

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria delle  
Telecomunicazioni**

**(Versione del 28.02.2017)**

**Anno Accademico 2016/2017**



# Indice

<b>1</b>	<b>La polarizzazione</b>	<b>1</b>
1.1	Polarizzazione di un'onda monocromatica . . . . .	1
1.2	Vettori complessi . . . . .	4
1.3	Rapporto di polarizzazione rettilinea . . . . .	7
1.4	Versori circolari e rapporto di polarizzazione circolare . . . . .	9
1.5	Vettori complessi paralleli ed ortogonali . . . . .	11
1.6	Vettori di Stokes e sfera di Poincarè . . . . .	13
1.7	Rappresentazione matriciale dei dispositivi . . . . .	15
1.8	Misura della polarizzazione e applicazioni . . . . .	17
	<b>Bibliografia</b>	<b>21</b>



# Capitolo 1

## La polarizzazione

In questa dispensa sono raccolti i fondamenti riguardanti la polarizzazione del campo elettromagnetico e la rappresentazione attraverso vettori complessi dei vettori sinusoidali. Per un'analisi più dettagliata si consiglia una lettura delle opere citate nella bibliografia.

La polarizzazione del campo elettromagnetico (da non confondere con la polarizzazione del mezzo  $\bar{p}$  definita da  $\bar{d} = \epsilon_0 \bar{e} + \bar{p}$ ) è una proprietà fondamentale, che distingue i campi elettromagnetici da molte altre grandezze fisiche. Essenzialmente rappresenta il fatto che il campo elettrico e quello magnetico sono grandezze vettoriali. In questa dispensa si studierà esclusivamente la polarizzazione del campo elettrico, essendo quella del campo magnetico derivabile allo stesso modo.

In molti problemi di elettromagnetismo la conoscenza della polarizzazione può diventare imprescindibile affinché un dispositivo o un sistema possano funzionare nel modo corretto. Alla fine di questa dispensa si daranno alcuni esempi applicativi per comprendere quest'ultima affermazione.

### 1.1 Polarizzazione di un'onda monocromatica

Si consideri il vettore campo elettrico di un'onda monocromatica sinusoidale, ovvero un'onda in cui tutte le componenti variano nel tempo con legge sinusoidale. In un dato punto  $\bar{r}$  dello spazio, il generico campo elettrico sinusoidale può essere espresso come segue:

$$\bar{e}(t, \bar{r}) = \sum_{n=1}^3 \hat{x}_n E_n(\bar{r}) \cos(\omega t + \phi_{E_n}(\bar{r})); \quad (1.1)$$

dove  $\hat{x}_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ , sono i versori di un qualsiasi sistema di riferimento cartesiano ortogonale,  $E_n \in \mathcal{R}$  e  $\phi_{E_n} \in [0, 2\pi]$  per  $n = 1, 2, 3$ .

La precedente relazione puo essere riscritta sviluppando il coseno attraverso le formule della trigonometria e riordinando opportunamente i termini:

$$\begin{aligned}\bar{e}(t, \bar{r}) &= \sum_{n=1}^3 \hat{x}_n E_n(\bar{r}) (\cos \omega t \cos \phi_{E_n}(\bar{r}) - \sin \omega t \sin \phi_{E_n}(\bar{r})) = \\ &= \left( \sum_{n=1}^3 \hat{x}_n E_n(\bar{r}) \cos \phi_{E_n}(\bar{r}) \right) \cos \omega t - \left( \sum_{n=1}^3 \hat{x}_n E_n(\bar{r}) \sin \phi_{E_n}(\bar{r}) \right) \sin \omega t = \\ &= \bar{E}^r(\bar{r}) \cos \omega t - \bar{E}^i(\bar{r}) \sin \omega t.\end{aligned}\tag{1.2}$$

dove  $\bar{E}^r(\bar{r})$ ,  $\bar{E}^i(\bar{r})$  sono vettori reali, indipendenti dal tempo. Il vettore campo elettrico dato dalla 1.1 presenta quindi tre fondamentali proprietà:

- 1) in ogni istante  $t$ ,  $\bar{e}(t, \bar{r})$  giace nel piano individuato dai vettori  $\bar{E}^r(\bar{r})$  e  $\bar{E}^i(\bar{r})$ ; questo piano prende il nome di *piano di polarizzazione*;
- 2) essendo ogni singola componente del vettore periodica, la traiettoria percorsa da  $\bar{e}(t, \bar{r})$  nel piano di polarizzazione è una curva chiusa;
- 3) la curva chiusa è un ellisse.

Le prime due proprietà sono ovvie, osservando la relazione 1.2; si vuole ora dimostrare la terza. A tale scopo si introduce sul piano di polarizzazione un sistema di riferimento  $\{\hat{x}', \hat{y}'\}$ , così che si possa porre (da questo punto in poi si omette la dipendenza dei vettori dal punto  $\bar{r}$  per semplicità di notazione)  $\bar{E}^r = E_x^r \hat{x}' + E_y^r \hat{y}'$  ed  $\bar{E}^i = E_x^i \hat{x}' + E_y^i \hat{y}'$ , ossia:

$$\begin{aligned}\bar{e}(t) &= (E_x^r \cos \omega t - E_x^i \sin \omega t) \hat{x}' + (E_y^r \cos \omega t - E_y^i \sin \omega t) \hat{y}' = \\ &= e'_x(t) \hat{x}' + e'_y(t) \hat{y}'.\end{aligned}\tag{1.3}$$

La stessa equazione, riscritta in forma matriciale, diventa:

$$\begin{pmatrix} e'_x(t) \\ e'_y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} E_x^r & -E_x^i \\ E_y^r & -E_y^i \end{pmatrix}}_* \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}}_{**}.\tag{1.4}$$

Si vede allora che il luogo dei punti descritti da  $\bar{e}(t)$  è una circonferenza (\*\*) distorta e rotata secondo una trasformazione lineare (\*): quindi un'ellisse. Per questo si è soliti dire che un campo monocromatico ha *polarizzazione ellittica*.

Si dimostra che un campo polarizzato ellitticamente, riferito ad un sistema  $\{\hat{x}, \hat{y}\}$  parallelo agli assi principali dell'ellisse, può essere scritto in forma matriciale come segue (si veda la figura 1.1):

$$\bar{e}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t + \phi) \\ \pm b \sin(\omega t + \phi) \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

dove  $\phi$  è una fase, influente per quanto riguarda la polarizzazione, mentre  $a, b$  sono due costanti reali e positive che rappresentano la lunghezza dei semiassi dell'ellisse. I diversi segni davanti a  $b$  indicano i due possibili sensi di rotazione del vettore nel piano. Prendendo il segno  $+$  il senso di rotazione coincide con quello di una vite di tipo destrorso che avanza nella direzione dell'asse  $\hat{z}'$ , uscente dal piano di polarizzazione  $\hat{x}', \hat{y}'$ . A tale polarizzazione viene per convenzione assegnato il nome di *polarizzazione ellittica destrorsa* (o destrorigira). Nell'altro caso invece la polarizzazione è detta *ellittica sinistrorsa* (o levogira).

E' utile anche osservare che esistono alcuni casi degeneri. Quando  $a \neq 0, b = 0$  oppure  $a = 0, b \neq 0$  l'ellisse degenera in una retta parallela rispettivamente all'asse  $\hat{x}$  oppure all'asse  $\hat{y}$ ; in questi casi la polarizzazione è detta *rettilinea*. Ancora, se  $a = b$ , allora l'ellisse degenera in una circonferenza e la polarizzazione è *circolare* (destrorsa o sinistrorsa a seconda del segno nella 1.5).

Per esprimere  $\bar{e}(t)$  rispetto ad un sistema generico, rotato di un angolo  $\delta$  (si veda ancora la figura 1.1), si deve eseguire un'opportuna trasformazione, tale che risulti:

$$\begin{aligned} \bar{e}'(t) = \mathbf{R}\bar{e}(t) &= \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos(\omega t + \phi) \\ \pm b \sin(\omega t + \phi) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a \cos \delta \\ -a \sin \delta \end{pmatrix} \cos(\omega t + \phi) + \begin{pmatrix} \pm b \sin \delta \\ \pm b \cos \delta \end{pmatrix} \sin(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Per proseguire l'analisi, conviene ora passare ad una diversa rappresentazione delle grandezze in esame, che risulta più comoda e maneggevole nel caso del regime sinusoidale, ovvero alla rappresentazione con i vettori complessi (detta anche rappresentazione di Steinmetz). Tali vettori saranno ampiamente usati durante il corso ed in questa dispensa se ne analizzano le principali proprietà.

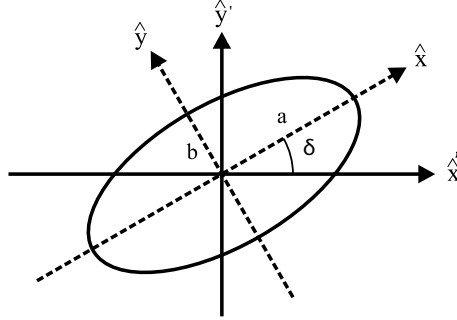


FIGURA 1.1. Ellisse di polarizzazione.

## 1.2 Vettori complessi

Come è noto dal corso di Elettrotecnica è possibile rappresentare grandezze scalari (ad esempio la tensione  $v(t)$  o la corrente  $i(t)$ ), variabili con legge sinusoidale attraverso un fasore, ossia un numero complesso, indipendente dal tempo. L'operazione che permette di ricavare la grandezza temporale a partire dal fasore è quella del calcolo della parte reale del fasore moltiplicato per  $\exp(j\omega t)$  dove  $\omega$  è la pulsazione del segnale. Ricordando ad esempio il caso della tensione:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) = \text{Re} [V \exp(j\omega t)], \quad (1.7)$$

dove il fasore

$$V = V_0 \exp(j\phi) \in \mathbb{C}, \quad (1.8)$$

ha *modulo*  $|V| = V_0$  e *fase*  $\angle V = \phi$  (Nota: fasore al valore massimo, a differenza dell'Elettrotecnica dove si usano fasori ai valori efficaci; ciò introduce un fattore 1/2 nella formula per il calcolo della potenza complessa).

Si vuole ora estendere questa rappresentazione al caso del campo elettrico o magnetico; le grandezze da rappresentare sono vettori reali a tre componenti, ognuna variabile in modo sinusoidale, ma che può avere un fattore di sfasamento diverso (come nella relazione 1.1).

Si definisce quindi un fasore di tipo vettoriale, rappresentativo del vettore reale in regime monocromatico sinusoidale, il quale è dato da:

$$\bar{E}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^3 \hat{x}_n E_n(\vec{r}) \exp(j\phi_{E_n}(\vec{r})). \quad (1.9)$$

Infatti, si può verificare facilmente che la relazione che lega il vettore  $\bar{E}$  al vettore reale  $\vec{e}$  è semplicemente una estensione della relazione di tipo scalare



1.7, ossia:

$$\bar{e}(t, \bar{r}) = \text{Re} [\bar{E}(\bar{r}) \exp(j\omega t)] \quad (1.10)$$

Il vettore  $\bar{E}$ , che dipende solo dalla posizione e non dal tempo, ha quindi tre componenti (una per ogni asse reale) che sono numeri complessi di modulo  $E_n$  e fase  $\phi_{En}$ , ossia è un *vettore complesso*.

Si definiscono qui brevemente alcune proprietà dei vettori complessi, che verranno utilizzate spesso durante il Corso. Come si vedrà ci sono varie differenze fra le proprietà di questi vettori e quelle, già note allo Studente, dei vettori reali. Bisogna quindi avere una certa cautela prima di trarre conclusioni sulle caratteristiche dei vettori sulla scorta delle nozioni sui vettori reali.

L'insieme dei vettori complessi  $\bar{A} \in \mathbb{C}^3$  è uno spazio vettoriale definito sul corpo dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ ; le operazioni di somma di vettori e prodotto di uno scalare (in questo caso un numero complesso) per un vettore sono le usuali operazioni di somma componente per componente e prodotto fra ogni componente e lo scalare. In tale spazio vettoriale può essere introdotto un *prodotto interno* e quindi una *norma*. Il prodotto interno  $\langle | \rangle$  fra due vettori complessi  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  viene definito da

$$\langle \bar{A} | \bar{B} \rangle = \bar{A} \cdot \bar{B}^* = \sum_{n=1}^3 A_n B_n \exp[j(\phi_{An} - \phi_{Bn})]. \quad (1.11)$$

L'operazione di coniugio del secondo vettore si rende necessaria affinché tale prodotto interno possa effettivamente definire una norma (ossia una applicazione su  $\mathcal{R}$ ). Infatti la norma, o modulo del vettore  $\bar{A}$ , è dato da

$$|\bar{A}| = \sqrt{\langle \bar{A} | \bar{A} \rangle} = \sqrt{\bar{A} \cdot \bar{A}^*} = \sqrt{\sum_{n=1}^3 A_n^2} \quad (1.12)$$

il quale è sempre un numero reale.

Accanto alla definizione della norma, possono essere definiti, in analogia con lo spazio dei vettori reali, i concetti di vettori complessi paralleli, ortogonali e di proiezione di un vettore complesso su un altro vettore complesso. In particolare due vettori  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  si dicono paralleli se esiste un *numero complesso*  $\lambda$  tale per cui:

$$\bar{A} = \lambda \bar{B} \quad (1.13)$$

Due vettori sono invece ortogonali se il loro prodotto interno è nullo, ossia:

$$\langle \bar{A} | \bar{B} \rangle = \bar{A} \cdot \bar{B}^* = 0 \quad (1.14)$$

Infine la proiezione di un vettore complesso  $\bar{A}$  su un vettore complesso  $\bar{B}$  è data da:

$$A_B = \langle \bar{A} | \bar{B} \rangle = \bar{A} \cdot \bar{B}^* \quad (1.15)$$

ed è quindi uno scalare (complesso). Nel dominio dei vettori reali i concetti di vettori paralleli e ortogonali sono ben noti; nel dominio dei vettori complessi il loro significato è invece diverso; ciò sarà spiegato più dettagliatamente in uno dei successivi paragrafi, dopo aver studiato quali siano le proprietà di tali vettori in relazione alla polarizzazione del campo precedentemente definita.

Tornando al vettore complesso rappresentativo del campo elettrico 1.9, usando la 1.2 e 1.10, è facile verificare che esso può anche essere scritto come:

$$\bar{E} = \bar{E}^r + j\bar{E}^i = \text{Re} [\bar{E}] + j\text{Im} [\bar{E}] \quad (1.16)$$

e quindi

$$\bar{e}(t) = \text{Re} [\bar{E}] \cos(\omega t + \phi) - \text{Im} [\bar{E}] \sin(\omega t + \phi), \quad (1.17)$$

Si osservi che i vettori  $\bar{E}^r$  ed  $\bar{E}^i$  non sono in generale ortogonali fra loro; risulta quindi più comodo esprimere il vettore complesso non rispetto ad essi ma piuttosto in base ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale qualsiasi nel piano di polarizzazione. In tal caso si può scrivere

$$\bar{E} = E'_x \hat{x}' + E'_y \hat{y}', \quad (1.18)$$

dove

$$E'_x = \langle \bar{E} | \hat{x}' \rangle = \bar{E} \cdot \hat{x}'^* = \bar{E} \cdot \hat{x}', \quad (1.19)$$

$$E'_y = \langle \bar{E} | \hat{y}' \rangle = \bar{E} \cdot \hat{y}'^* = \bar{E} \cdot \hat{y}', \quad (1.20)$$

dove l'ultimo passaggio in entrambe le relazioni precedenti sfrutta il fatto che i versori della base cartesiana ortogonale sono vettori reali.

Nel sistema degli assi principali dell'ellisse si verifica, in base alla equazione 1.5, che il vettore complesso diviene:

$$\bar{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = a \exp(j\phi) \hat{x} \mp jb \exp(j\phi) \hat{y} \quad (1.21)$$

Nota l'espressione del vettore complesso nel piano di polarizzazione, la determinazione dello stato di polarizzazione del campo (ossia il discernere se la polarizzazione sia ellittica, rettilinea, circolare, destrorsa o sinistrorsa) si può realizzare ad esempio calcolando il relativo vettore reale (nel dominio del tempo) e disegnando per punti la traiettoria dello stesso. Tale procedimento è laborioso come lo studente può verificare risolvendo l'esercizio che segue.

**Esercizio 1.1** Sia dato il seguente vettore complesso rappresentativo di un campo elettrico monocromatico sinusoidale  $\bar{E} = -\hat{x}' + 2 \exp(j2\pi/3)\hat{y}'$  scritto in un generico sistema di coordinate cartesiane ortogonali del piano di polarizzazione. Si tracci l'ellisse sul piano di polarizzazione (suggerimento: si calcoli e disegni il vettore  $\bar{e}(t)$  per vari istanti, sottomultipli del periodo di oscillazione).

## 1.3 Rapporto di polarizzazione rettilinea

In questo paragrafo si introduce una grandezza, il rapporto di polarizzazione rettilinea, che si ricava direttamente dalle componenti del vettore complesso ed il cui studio permette di determinare in modo semplice lo stato di polarizzazione del campo.

Nel sistema di riferimento degli assi principali dell'ellisse si definisce *rapporto di polarizzazione rettilinea* la seguente grandezza scalare

$$p = j \frac{E_y}{E_x} \quad (1.22)$$

Mediante la 1.21 si ha che

$$p = j \frac{\mp j b \exp(j\phi)}{a \exp(j\phi)} = \pm \frac{b}{a} \quad (1.23)$$

il quale è un numero reale, positivo nel caso in cui la polarizzazione sia destrorsa (segno +), negativo nel caso la polarizzazione sia sinistrorsa (segno -), nullo,  $b = 0$ , nel caso di polarizzazione rettilinea essendo il caso  $a = 0$  riconducibile al precedente con una rotazione di assi. Infatti, se invece del sistema degli assi principali si definisce un sistema di assi diverso, ruotato di un angolo  $\delta$  rispetto al precedente, si dimostra (usando la relazione 1.6) che il rapporto di polarizzazione rettilinea è un numero complesso, legato a  $p$  da:

$$p' = j \frac{E'_y}{E'_x} = j \frac{|E'_y|}{|E'_x|} \exp[j(\phi'_y - \phi'_x)] = \frac{p - j \tan \delta}{1 - jp \tan \delta} \quad (1.24)$$

Si osservi come la relazione fra  $p'$  e  $p$  sia la stessa, dal *punto di vista matematico*, di quella che realizza la trasformazione di ammettenza normalizzata lungo una linea di trasmissione priva di perdite (con le sostituzioni formali  $p' \rightarrow y(-L)$ ,  $p \rightarrow y_L$  e  $\delta \rightarrow -\beta L$ ). Una delle proprietà di tale trasformazione è quella di mantenere il segno della parte reale al variare dell'argomento della funzione tangente, in questo caso dell'angolo di rotazione  $\delta$  (si ricordi ad

esempio che se si usano carichi passivi,  $\text{Re}[y_L] > 0$ , allora  $\text{Re}[y(-L)] > 0 \forall L$ . La polarizzazione del campo è invariante ad una rotazione del sistema di riferimento nel piano di polarizzazione; infatti l'ellisse rimane tale in ogni sistema ruotato. Si conclude quindi che il segno della parte reale del rapporto di polarizzazione rettilinea, che è invariante alle rotazioni, indica il tipo di polarizzazione. Perciò è sufficiente studiare  $p'$  per determinare la polarizzazione del campo. In particolare valgono le seguenti corrispondenze:

- 1)  $\text{Re}[p'] > 0$ : polarizzazione ellittica destrorsa (segno  $+$  nella 1.23);
- 2)  $\text{Re}[p'] < 0$ : polarizzazione ellittica sinistrosa (segno  $-$  nella 1.23);
- 3)  $\text{Re}[p'] = 0$ : polarizzazione rettilinea (in particolare lungo l'asse  $\hat{x}$  se  $p' = p = 0$ , o lungo l'asse  $\hat{y}'$  se  $\text{Im}[p'] \rightarrow \infty$ );
- 4)  $p = p' = 1$ : polarizzazione circolare destrorsa (infatti  $a = b$  con il segno  $+$   $\Rightarrow p = 1$  e quindi dalla equazione 1.24 si ricava  $p' = 1 \forall \delta$ );
- 5)  $p = p' = -1$ : polarizzazione circolare sinistrosa (infatti  $a = b$  con il segno  $-$   $\Rightarrow p = -1$  e quindi dalla equazione 1.24 si ricava  $p' = -1 \forall \delta$ ).

Il rapporto di polarizzazione rettilinea permette la determinazione rapida dello stato di polarizzazione di un campo (elettrico o magnetico) anche in problemi con dipendenza spaziale. Come esempio lo Studente risolva i seguenti esercizi.

**Esercizio 1.2** Si determini, usando il rapporto di polarizzazione rettilinea, lo stato di polarizzazione del campo associato al vettore complesso dell'esercizio 1.1.

**Esercizio 1.3** Assegnate le seguenti componenti del campo elettrico:  $\vec{e}'_x(z, t) = E'_x \cos(\omega t - \beta z) \hat{x}'$ ,  $\vec{e}'_{y1}(z, t) = E'_y \cos(\omega t - \beta z) \hat{y}'$ ,  $\vec{e}'_{y2}(z, t) = E'_y \sin(\omega t - \beta z) \hat{y}'$  si determini in ogni punto  $z$  lo stato di polarizzazione dei vettori: a)  $\vec{e}_0(z, t) = \vec{e}'_x(z, t)$ ; b)  $\vec{e}_1(z, t) = \vec{e}'_x(z, t) + \vec{e}'_{y1}(z, t)$ ; c)  $\vec{e}_2(z, t) = \vec{e}'_x(z, t) + \vec{e}'_{y2}(z, t)$ . Si disegni inoltre l'ellisse nel piano di polarizzazione, nel punto  $z = 0$  per tutti e tre i casi.

Oltre a permettere una rapida determinazione teorica della polarizzazione di un campo elettromagnetico, il rapporto di polarizzazione rettilinea può essere a volte determinato sperimentalmente. Rimandando a testi più specializzati quali [1] una trattazione dettagliata, si farà cenno a queste misure in un paragrafo successivo.

## 1.4 Versori circolari e rapporto di polarizzazione circolare

Come si è visto nel precedente paragrafo è possibile esprimere il vettore complesso rappresentativo di un campo in una qualsiasi base cartesiana ortogonale sul piano di polarizzazione.

Accanto a questo insieme di basi, esiste un'altra famiglia di basi che risulta molto utile nelle applicazioni e nel calcolo, *la base dei versori circolari*. A partire dal sistema cartesiano riferito agli assi principali, la base circolare è definita da

$$\hat{R} = \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{L} = \frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}}. \quad (1.25)$$

Tale coppia di vettori è una base ortonormale dei vettori complessi sul piano di polarizzazione, al pari di quella cartesiana  $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ . Infatti  $\{\hat{R}, \hat{L}\}$ :

- 1) giacciono sul piano di polarizzazione;
- 2) sono dei versori (modulo unitario);
- 3) sono ortogonali fra loro (nella definizione data per i vettori complessi).

La condizione 1) è facilmente verificata in quanto  $\{\hat{R}, \hat{L}\}$  sono una combinazione lineare dei versori  $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ . La condizione 2) si verifica facilmente in quanto:

$$|\hat{R}| = \sqrt{\hat{R} \cdot \hat{R}^*} = \sqrt{\frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1 \quad (1.26)$$

$$|\hat{L}| = \sqrt{\hat{L} \cdot \hat{L}^*} = \sqrt{\frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1 \quad (1.27)$$

dove si è sfruttato il fatto che  $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$  e  $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = 1$ . Infine la proprietà 3) è verificata poichè

$$\langle \hat{R} | \hat{L} \rangle = \hat{R} \cdot \hat{L}^* = \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}} = \frac{1-1}{2} = 0 \quad (1.28)$$

I nuovi versori hanno una interpretazione ben precisa, che si può ricavare calcolando il loro rapporto di polarizzazione rettilinea. Infatti:

$$\hat{R} = \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}} \Rightarrow p_R = 1 \quad (1.29)$$

$$\hat{L} = \frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} \Rightarrow p_L = -1. \quad (1.30)$$

Quindi  $\hat{R}$  è un *versore complesso a polarizzazione circolare destrorsa*, mentre  $\hat{L}$  è un *versore complesso a polarizzazione circolare sinistrorsa*. Per tale ragione la base 1.25 è detta *base a polarizzazione circolare*.

Il vettore complesso rappresentativo del campo elettrico può essere scritto nella nuova base come

$$\bar{E} = E_R \hat{R} + E_L \hat{L} \quad (1.31)$$

dove le componenti del vettore nella base circolare sono legate a quelle della base cartesiana dalle:

$$E_R = \langle \bar{E} | \hat{R} \rangle = \bar{E} \cdot \hat{R}^* = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y}) \cdot \frac{\hat{x} + j\hat{y}}{\sqrt{2}} = \frac{E_x + jE_y}{\sqrt{2}} \quad (1.32)$$

$$E_L = \langle \bar{E} | \hat{L} \rangle = \bar{E} \cdot \hat{L}^* = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y}) \cdot \frac{\hat{x} - j\hat{y}}{\sqrt{2}} = \frac{E_x - jE_y}{\sqrt{2}} \quad (1.33)$$

Nel caso in cui la base cartesiana scelta non sia quella degli assi principali dell'ellisse ma un'altra ruotata di  $\delta$ , si possono definire altri versori circolari  $\hat{R}'$ ,  $\hat{L}'$  e le relative componenti del vettore  $E'_R$ ,  $E'_L$ , come nelle relazioni precedenti con semplici sostituzioni.

In analogia con quanto fatto nel precedente paragrafo si può definire anche per questa base un rapporto di polarizzazione che permette di studiare la polarizzazione del campo rappresentato con facilità. Tale grandezza è

$$q = \frac{E_L}{E_R} \quad (1.34)$$

e viene detta *rapporto di polarizzazione circolare*. Tale rapporto ha una semplice legge di variazione quando si effettua una rotazione di un angolo  $\delta$  del sistema di riferimento, passando da quello degli assi principali ad uno generico  $\{\hat{x}', \hat{y}'\}$  nel piano di polarizzazione. Infatti si può provare che

$$q' = q \exp(j2\delta) \quad (1.35)$$

L'ultima relazione ha, ancora una volta, una analogia matematica con le formule delle linee prive di perdite (in particolare con la trasformazione del coefficiente di riflessione lungo la linea, attraverso le sostituzioni formali  $q \rightarrow \rho_L$ ,  $q' \rightarrow \rho(-L)$ ,  $\delta \rightarrow -\beta L$ ). Questa similitudine, puramente matematica, permette di concludere direttamente che i due rapporti di polarizzazione, rettilinea e circolare, sono fra loro legati dalla seguente relazione bilineare:

$$q' = \frac{1 - p'}{1 + p'} \quad (1.36)$$

ed inoltre dato che al variare dell'angolo  $\delta$  il modulo di  $q'$  non varia, è quest'ultima grandezza indica lo stato di polarizzazione del campo. In particolare, anche considerando quanto esposto nel paragrafo precedente, si ottiene:

- 1)  $|q'| < 1$ : polarizzazione ellittica destrorsa (infatti corrisponde a  $\text{Re}[p'] > 0$ );
- 2)  $|q'| > 1$ : polarizzazione ellittica sinistrorsa (infatti corrisponde a  $\text{Re}[p'] < 0$ );
- 3,4)  $|q'| = 1$ : polarizzazione rettilinea (infatti corrisponde a  $\text{Re}[p'] = 0$ );
- 5)  $|q'| = 0$ : polarizzazione circolare destrorsa (infatti corrisponde a  $p' = 1$ );
- 6)  $|q'| \rightarrow +\infty$ : polarizzazione circolare sinistrorsa (infatti corrisponde a  $p' = -1$ );

Quindi il rapporto di polarizzazione circolare può essere utilizzato per la determinazione dello stato di polarizzazione in modo del tutto equivalente a quello rettilineo.

**Esercizio 1.4** Si esprima il vettore complesso dell'esercizio 1.1 nella base circolare e se ne determini lo stato di polarizzazione mediante il rapporto di polarizzazione circolare.

## 1.5 Vettori complessi paralleli ed ortogonali

A questo punto si è in grado di definire il significato di vettori paralleli ed ortogonali nello spazio dei vettori complessi.

Si consideri la definizione di vettori paralleli precedentemente data e si scrivano i vettori generici  $\bar{A}, \bar{B}$  in una qualsiasi base di vettori cartesiani ortogonali:

$$\bar{A} = A'_x \hat{x}' + A'_y \hat{y}' = \lambda \bar{B} = \lambda B'_x \hat{x}' + \lambda B'_y \hat{y}' \quad (1.37)$$

e quindi  $A'_x = \lambda B'_x$ ,  $A'_y = \lambda B'_y$ . Calcolando il rapporto di polarizzazione rettilinea del vettore  $\bar{A}$  si ottiene:

$$p'_A = j \frac{A'_y}{A'_x} = j \frac{\lambda B'_y}{\lambda B'_x} = j \frac{B'_y}{B'_x} = p'_B \quad (1.38)$$

Quindi i vettori nel dominio del tempo dei campi rappresentati da vettori complessi paralleli godono delle sole proprietà di:

- a) avere lo stesso stato di polarizzazione (compreso il verso di rotazione);
- b) avere un ugual rapporto fra i semiassi dei rispettivi ellissi (non gli stessi valori a meno che  $|\lambda| = 1$ ).

I vettori reali relativi a due vettori complessi paralleli in  $\mathbb{C}^3$ , non sono quindi in generale paralleli fra loro come lo Studente può verificare nell'esercizio seguente.

**Esercizio 1.5** Dati i vettori complessi  $\bar{A} = (1 - j)\hat{x}' + 2j\hat{y}'$  e  $\bar{B} = 2\exp(j\pi/4)\bar{A}$ , si traccino i relativi ellissi di polarizzazione. Si osservi come in ogni istante i vettori reali  $\bar{a} = \text{Re} [\bar{A} \exp(j\omega t)]$  e  $\bar{b} = \text{Re} [\bar{B} \exp(j\omega t)]$  non siano paralleli fra loro.

E' facile determinare che il parallelismo nel dominio dei vettori complessi implica quello dei vettori reali rappresentati solo in due casi. Il primo se  $\angle\lambda = 2\pi n$  con  $n$  intero, ossia se  $\lambda \in \mathcal{R}$ ; infatti se  $\lambda$  è reale le componenti di un vettore non sono sfasate rispetto a quelle dell'altro. Il secondo caso è quello in cui i vettori complessi sono polarizzati rettilineamente lungo lo stesso asse; infatti in tale caso i relativi vettori reali rimangono anch'essi diretti lungo lo stesso asse.

Si consideri ora il caso dei vettori complessi ortogonali. La condizione di ortogonalità con i vettori espressi in un sistema di riferimento cartesiano qualsiasi, diventa

$$\bar{A} \cdot \bar{B}^* = A'_x B'^*_x + A'_y B'^*_y = 0 \quad (1.39)$$

da cui si ottiene facilmente

$$\frac{A'_x}{A'_y} = -\frac{B'^*_y}{B'^*_x}. \quad (1.40)$$

L'ortogonalità implica quindi la seguente relazione fra i rapporti di polarizzazione rettilinea

$$\frac{1}{p'_A} = -p'^*_B \Rightarrow \frac{\text{Re}[p'_A]}{|p'_A|^2} = -\text{Re}[p'_B]. \quad (1.41)$$

In conclusione vettori complessi ortogonali rappresentano dei campi che:

a) se la polarizzazione è ellittica, hanno la stessa ellitticità ma verso di rotazione opposto, se la polarizzazione è rettilinea ( $\text{Re}[p'_A] = \text{Re}[p'_B] = 0$ ) i vettori hanno polarizzazione ortogonale dato che nel sistema degli assi principali la 1.39 implica che i due vettori hanno componenti sui soli assi coordinati;

b) hanno un rapporto fra i semiassi dei rispettivi ellissi invertito (infatti  $1/|p'_A| = |p'_B|$  che si deriva dalla 1.41 implica che  $1/|p_A| = |p_B|$  da cui discende la proprietà detta ricordando anche la definizione 1.22); in pratica dire che il rapporto fra semiassi è invertito significa che i relativi ellissi sono ruotati di 90 gradi.

Quindi vettori ortogonali nel dominio dei vettori complessi corrispondono a campi vettoriali istantaneamente ortogonali nel dominio del tempo solo nel



caso di polarizzazione rettilinea. Un caso particolare in cui l'ortogonalità fra vettori complessi non implica quella nel dominio del tempo è presentata nell'esercizio che segue.

**Esercizio 1.6** Si determinino i vettori  $\bar{r}(t)$  e  $\bar{l}(t)$  nel dominio del tempo, corrispondenti ai versori complessi che definiscono la base circolare  $\{\hat{R}, \hat{L}\}$ . Dopo aver tracciato gli ellissi di polarizzazione dei due vettori si osservi la non ortogonalità nel dominio del tempo.

## 1.6 Vettori di Stokes e sfera di Poincarè

Ad ogni campo monocromatico riferito al suo piano di polarizzazione e rappresentato dal vettore complesso  $\bar{E} = E'_x \hat{x}' + E'_y \hat{y}'$ , può essere associato un vettore reale,  $\bar{S}$ , di quattro elementi, detto “di Stokes”, così definito:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E'_x|^2 + |E'_y|^2 \\ |E'_x|^2 - |E'_y|^2 \\ E'_x E'^*_y + E'^*_x E'_y \\ -j(E'_x E'^*_y - E'^*_x E'_y) \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Il vettore di Stokes contiene tutta l'informazione relativa allo stato di polarizzazione e, come si avrà modo di vedere, il formalismo dei vettori di Stokes si presta molto bene a rappresentare la polarizzazione del campo. Si calcoli infatti il vettore di Stokes associato al generico campo dato dalla 1.6; risulta essere:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 \\ (a^2 - b^2) \cos 2\delta \\ (a^2 - b^2) \sin 2\delta \\ 2ab \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

espressione che non dipende dalla fase  $\phi$  del campo. Per meglio comprendere le proprietà di polarizzazione del campo, conviene normalizzare  $\bar{S}$  rispetto a  $S_0$ , cioè rispetto all'intensità di  $\bar{E}$ , ottenendo il *versore di Stokes*:

$$\hat{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} (a^2 - b^2) \cos 2\delta \\ (a^2 - b^2) \sin 2\delta \\ 2ab \end{pmatrix}; \quad (1.44)$$

dove ovviamente si è tralasciata la prima componente che dopo la normalizzazione è sempre unitaria. Con riferimento alla figura 1.1, detta  $\epsilon =$

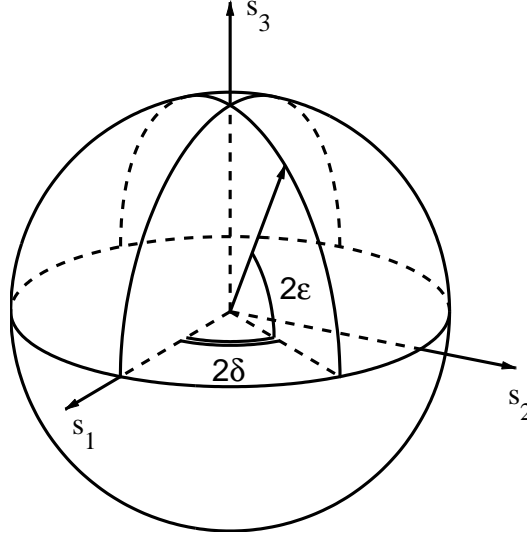


FIGURA 1.2. Sfera di Poincarè.

$\arctan(\pm b/a)$  l'ellitticità dell'ellisse, il versore di Stokes relativo al generico campo 1.6 può essere così riscritto:

$$\hat{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\epsilon \cos 2\delta \\ \cos 2\epsilon \sin 2\delta \\ \sin 2\epsilon \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

La (1.45) permette di cogliere il significato fisico delle varie componenti del versore di Stokes. Infatti, si vede che quando l'ellisse di polarizzazione degenera in una circonferenza ( $a = b$ ), si ha  $\epsilon = \pm\pi/4$ , ossia  $s_1 = s_2 = 0$  e  $s_3 = \pm 1$ , quindi il versore di Stokes di un campo polarizzato circolare destrorso è  $\hat{s} = (0, 0, 1)$  mentre nell'altro caso di polarizzazione circolare sinistrorsa  $\hat{s} = (0, 0, -1)$ . Analogamente, quando l'ellisse degenera in una retta ( $a = 0$  oppure  $b = 0$ ) risulta  $\sin 2\epsilon = 0$ , per cui il versore di Stokes di un campo polarizzato rettilineamente soddisfa  $s_3 = 0$ .

Il fatto che i versori di Stokes abbiano, per costruzione, modulo unitario e costante, si presta ad una elegante quanto utile rappresentazione geometrica: infatti, l'estremità del generico versore  $\hat{s}$  giace su di una superficie sferica, di raggio unitario, nota come *sfera di Poincarè* (si veda la figura 1.2). In base a quanto detto in precedenza, si vede che l'equatore della sfera è il luogo delle polarizzazioni rettilinee, mentre i due poli corrispondono alle polarizzazioni circolari (destrorsa il polo nord, sinistrorsa il polo sud). Gli altri punti

della sfera individuano generiche polarizzazioni ellittiche (destrorse se nella semisfera superiore, sinistrorse altrimenti).

Infine, si dimostra una proprietà in base alla quale, dati due campi  $\bar{E}_1$  ed  $\bar{E}_2$  ortogonali tra loro (cioè tali per cui  $\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2^* = 0$ ), i rispettivi versori di Stokes sono antiparalleli,  $\hat{s}_1 = -\hat{s}_2$ .

## 1.7 Rappresentazione matriciale dei dispositivi

Si supponga che in un dato punto dello spazio,  $\bar{r}_1$ , vi sia un campo elettrico sinusoidale che, riferito al suo piano di polarizzazione, sia rappresentato dal vettore complesso  $\bar{E}(\bar{r}_1)$ . Analogamente in  $\bar{r}_2$  vi sia il campo  $\bar{E}(\bar{r}_2)$ , riferito ad un piano in generale diverso dal precedente. Se il mezzo è lineare, il legame tra i due campi non può che essere esso stesso lineare, per cui risulta  $\bar{E}(\bar{r}_2) = \mathbf{J}\bar{E}(\bar{r}_1)$ , dove la matrice  $\mathbf{J}$ , detta “di Jones”, ha dimensione  $2 \times 2$  ed è ad elementi complessi.

L'utilità delle matrici di Jones si apprezza soprattutto quando i piani di polarizzazione dei campi in  $\bar{r}_1$  e  $\bar{r}_2$  sono paralleli, così che i rispettivi vettori possano essere espressi rispetto allo stesso sistema di riferimento  $\{\hat{x}', \hat{y}'\}$ . Questo capita tipicamente quando si considera la propagazione di un'onda attraverso una cascata di dispositivi o mezzi sensibili alla polarizzazione (mezzi anisotropi). Alcuni di tali dispositivi sono presentati qui di seguito.

Ad esempio un polarizzatore rettilineo ideale, il cui asse sia parallelo all'asse  $\hat{x}'$ , viene definito come quel dispositivo tale da consentire il passaggio della sola componente del campo  $E'_x$ . Se  $\bar{E}_{in} = E'_{inx}\hat{x}' + E'_{iny}\hat{y}'$  è il campo elettrico presente all'ingresso, il campo di uscita  $\bar{E}_{out}$  è [3]:

$$\bar{E}_{out} = \begin{pmatrix} E_{inx} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{E}_{in} = \mathbf{J}_P(0) \bar{E}_{in}, \quad (1.46)$$

con  $\mathbf{J}_P(0)$  matrice di Jones del dispositivo. Se, invece, il polarizzatore fosse rotato di un angolo  $\psi$ , allora risulterebbe:

$$\bar{E}_{out} = \mathbf{J}_P(\psi) \bar{E}_{in} = \mathbf{J}_R(-\psi) \mathbf{J}_P(0) \mathbf{J}_R(\psi) \bar{E}_{in}, \quad \mathbf{J}_R(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

dove  $\mathbf{J}_R(\psi)$  è la matrice che rappresenta la rotazione del dispositivo (oppure una matrice che realizza un opportuno cambiamento di base).

Altro esempio è la lamina birifrangente, i cui assi siano paralleli agli assi  $\hat{x}'$  e  $\hat{y}'$ . La caratteristica di questa lamina è di introdurre fra le polarizza-

zioni rettilinee uno sfasamento definito. Ad esempio una lamina *a quarto di lunghezza d'onda* è caratterizzata dalla seguente matrice di Jones [3]:

$$\bar{E}_{out} = \begin{pmatrix} \exp(-j\pi/4) & 0 \\ 0 & \exp(j\pi/4) \end{pmatrix} \bar{E}_{in} = \mathbf{J}_{\lambda/4}(0) \bar{E}_{in} ,$$

Il nome deriva dal fatto che fra le componenti viene introdotto uno sfasamento pari a quello che si avrebbe se le due componenti si fossero propagate per distanze che differiscono di un quarto di lunghezza d'onda. Infatti  $\pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2 = \beta\lambda/4$  dove  $\beta$  sia la costante di fase delle onde. La generica lamina birifrangente ha infatti una matrice di Jones data da [3]:

$$\mathbf{J}_B(0) = \begin{pmatrix} e^{-j\beta_x L} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta_y L} \end{pmatrix} ,$$

dove  $L$  è la lunghezza della lamina e  $\beta_x$  e  $\beta_y$  sono due costanti di fase, ognuna relativa ad una componente. La matrice di una lamina rotata, analogamente a quanto visto prima, sarà invece:  $\mathbf{J}_B(\psi) = \mathbf{J}_R(-\psi) \mathbf{J}_B(0) \mathbf{J}_R(\psi)$ .

Un ulteriore vantaggio del formalismo di Jones è che la matrice di una cascata di elementi è pari al prodotto (ordinato) delle matrici dei singoli elementi. Ad esempio, si consideri un campo  $\bar{E}_{in}$  che passa prima attraverso una lamina birifrangente orientata secondo il sistema di riferimento e successivamente attraverso un polarizzatore rotato di un angolo  $\psi$ ; il campo di uscita sarà pari a:

$$\bar{E}_{out} = \mathbf{J}_{tot} \bar{E}_{in} = \left( \mathbf{J}_R(-\psi) \mathbf{J}_P(0) \mathbf{J}_R(\psi) \right) \mathbf{J}_{\lambda/4}(0) \bar{E}_{in} .$$

L'espressione esplicita della  $\mathbf{J}_{tot}$  è a volte complicata (soprattutto nel caso di rotazioni delle lamine) tuttavia si può apprezzare la compattezza del formalismo.

**Esercizio 1.7** Sia dato un vettore complesso, rappresentativo di un campo elettrico,  $\bar{E}_{in} = \hat{x}' + \hat{y}'$ . Si determini lo stato di polarizzazione all'ingresso e all'uscita di: a) una lamina a quarto di lunghezza d'onda (orientata con gli assi paralleli agli assi di riferimento); b) una cascata di due lamine a quarto di lunghezza d'onda (entrambe orientate come nel caso precedente); c) una lamina mezz'onda (orientata con gli assi paralleli agli assi di riferimento)

Come si vede dall'esercizio, la cascata di vari elementi o dispositivi che mutino la polarizzazione permette il controllo della stessa, fatto che può tornare molto utile in varie applicazioni.

Infine si osserva che le matrici di Jones godono di diverse proprietà (unitarietà, condizioni di reciprocità etc.) ma si rimanda ai testi della bibliografia per ulteriori approfondimenti.

## 1.8 Misura della polarizzazione e applicazioni

I metodi di misura della polarizzazione variano molto a seconda della frequenza dei segnali da analizzare.

Nel campo delle radiofrequenze risulta comodo misurare il rapporto di polarizzazione rettilinea. In accordo con la relazione 1.24 la misura si riduce al determinare il rapporto fra i moduli e la differenza delle fasi fra le componenti dei campi in un qualsiasi sistema di riferimento sul piano di polarizzazione. Ciò può essere realizzato attraverso una antenna costituita da due dipoli incrociati a novanta gradi. Questa antenna deve essere innanzitutto orientata in modo da massimizzare la potenza ricevuta (adattamento in polarizzazione); i dipoli infatti sono sensibili alle sole componenti del campo elettrico parallele al loro asse. Quindi l'orientamento di massima potenza ricevuta indica che non vi sono altre componenti e che i dipoli giacciono sul piano di polarizzazione. A questo punto si determina il rapporto dei valori efficaci ed il relativo sfasamento (attraverso un circuito sfasatore variabile) dei segnali di tensione delle singole antenne; tale valore determina  $p'$  da cui lo stato di polarizzazione.

In alternativa si possono inviare (direttamente o con uno sfasamento) ai canali x-y di un oscilloscopio i segnali di tensione e visualizzare l'ellisse di polarizzazione, calcolando così il rapporto dei semiassi. Visualizzando poi i segnali singolarmente si ottiene il verso di rotazione della polarizzazione.

Alle frequenze dei segnali ottici la misura della polarizzazione avviene invece con un analizzatore di polarizzazione (anche detto polarimetro), ossia un dispositivo che mediante misure di potenza ottica risale ai parametri di Stokes del campo elettrico. Esistono vari tipi di analizzatori di polarizzazione; uno molto utilizzato è quello basato sulla cascata di una lamina a quarto d'onda, libera di ruotare, ed un polarizzatore rettilineo, fisso. La misura consiste nel ruotare in almeno quattro posizioni diverse la lamina e misurare la potenza in uscita dal polarizzatore. Da tali misure si dimostra di poter risalire ai valori dei 4 parametri di Stokes e quindi allo stato di polarizzazione.

La polarizzazione è una proprietà importante dei campi elettromagnetici e in molte applicazioni si devono considerare gli effetti ad essa dovuti. Un esempio, nel campo delle antenne, è la condizione di *adattamento in polarizzazione*. Tutte le antenne, in ricezione, mostrano un certo grado di sensibilità rispetto allo stato di polarizzazione del campo incidente. Il caso estremo è rappresentato dalle antenne filiformi, dove il conduttore è in grado di rivelare una differenza di potenziale ai suoi estremi solo per la componente del campo parallela all'asse dell'antenna stessa. Quindi se la polarizzazione dell'onda

incidente è rettilinea sull'asse ortogonale a quello dell'antenna, la differenza di potenziale sarà nulla e non si rivela alcun campo. Questo spiega perché le antenne per la ricezione dei segnali televisivi (antenne Yagi) sono costituite da una schiera di antenne filiformi tutte orientate nello stesso modo e poste con il loro asse parallelo al suolo (in quanto la trasmissione è realizzata con stato di polarizzazione rettilinea parallelo al suolo). La polarizzazione è quindi un fattore da considerare a livello progettuale, nel caso di antenne. Si può citare il caso delle sonde di campo elettromagnetico, che devono essere appunto realizzate con almeno due dipoli (o spire) incrociati, i quali misurano le due componenti ortogonali nel piano di polarizzazione. Le sonde migliori utilizzano tre dipoli (o spire) in modo che la misura di ampiezza di campo sia indipendente dall'orientazione della sonda stessa. Anche le antenne ad apertura (ad esempio i riflettori parabolici) possono mostrare problemi di esercizio dovuti alla polarizzazione. Infatti il campo incidente, che in genere ha una polarizzazione rettilinea, subisce una diversa riflessione a seconda del punto di incidenza sulla parabola, distorcendo lo stato di polarizzazione del segnale inviato al ricevitore, posto sul fuoco della parabola (effetti di depolarizzazione).

Altri dispositivi sensibili alla polarizzazione sono certi tipi di guide d'onda, come ad esempio le guide rettangolari. Si tratta di "tubi di flusso" per il vettore di Poynting, di sezione rettangolare, che permettono quindi il trasporto del campo dal generatore all'utilizzatore (tipicamente una antenna). Rimandando al seguito del corso lo studio teorico dettagliato di tali dispositivi, si evidenzia qui il fatto che solo certe polarizzazioni (dette di tipo TE o TM) possono propagarsi nella guida e che la propagazione ha caratteristiche diverse (costante di fase, dispersione etc.) per ognuno di questi "modi" a polarizzazione determinata.

Nell'ambito dell'ottica applicata alle telecomunicazioni ci sono vari fenomeni e dispositivi dipendenti dalla polarizzazione. Fra i più significativi c'è il fenomeno della dispersione di polarizzazione nelle fibre ottiche. Senza entrare troppo nel dettaglio teorico, alquanto complesso, la fibra ottica risulta essere un canale lineare e quindi descrivibile attraverso una matrice di Jones. D'altro canto, si osserva che lo stato di polarizzazione dei segnali cambia, ma in modo diverso a seconda dello stato in ingresso, della frequenza ed il fenomeno è inoltre aleatoriamente tempo variante. Di qui il fatto che la polarizzazione in uscita varia nel tempo e in frequenza in modo imprevedibile. Dal punto di vista del modello, la matrice di Jones diventa anch'essa aleatoriamente tempo variante e dipendente dalla frequenza. L'uso di alcuni dispositivi ottici, che funzionano solo per certe polarizzazioni di ingresso, diventa quindi

---

critico in una linea in fibra ottica non potendo garantire un preciso stato di polarizzazione in uscita. Fra questi dispositivi si contano vari amplificatori ottici (a semiconduttore, parametrici), guide d'onda, filtri ed altri ancora.





# Bibliografia

- [1] A. Paraboni, *Antenne*, McGraw-Hill, Milano, 1999.
- [2] Technical Staff of CSELT, *Fiber optic communications handbook*, F. Tosco editor, TAB Books, Blue Ridge Summit, PA, 1990.
- [3] E. Collett, *Polarized light, fundamentals and applications*, Dekker, New York, 1993.
- [4] C. G. Someda, *Electromagnetic waves*, Chapman & Hall, Londra, 1998.