

# 分治

By Soda

2019.7.17



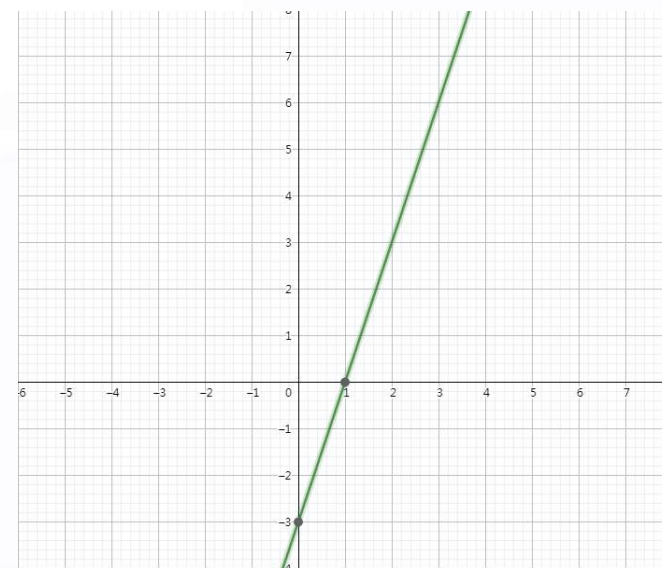
# 二分查找

- 找出函数 $f(x)=3x-3$ 在闭区间 $[0, 4]$ 的零点。

设 $L=-\text{inf}, R=\text{inf}$

```
While(L!=R){  
    mid=(L+R)/2;  
    if(f(mid)>=0)ans=mid,R=mid;  
    else if(f(mid)<0)L=mid;  
}
```

二分查找使用条件： $f(x)$ 为单调函数



# 二分查找

- 查找一个单调递增数列中大于等于 $x$ 的最小值
- 设数列共 $n$ 项
- 1 2 3 4 5 6 6 6 6 7 8

```
int L=1,R=n;  
while(L!=R){  
    int mid=(L+R)/2;  
    if(a[mid]>=x)ans=mid,R=mid;  
    else L=mid;  
}
```



# 二分查找

也可以用STL中的函数

`lower_bound(a+1, a+n+1, num)`

返回`a[]`中第一个大于等于`num`的数字的位置

`upper_bound(a+1, a+n+1, num)`

返回`a[]`中第一个大于`num`的数字的位置





# 例题1

给定 $n$ 个数和一个 $d$ ，这 $n$ 个数都不超过 $m$

每次从没被去掉的数里面选一个数 $a$ ，去掉 $a$ ，然后可以任意一个 $b(b > a + d)$ ，然后去掉任意一个 $c(c > b + d)$ ，以此类推

问最少能选多少个 $a$ ，然后输出每个数都是选第几个 $a$ 的时候被去掉的  
( $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5, n \leq m \leq 10^9, 1 \leq d \leq m$ )



# 例题1

贪心+二分查找

很显然是一个贪心，从左到右查找第一个时间点，然后以此为起点，向后尽量多的删去其他时间点

当知道 $a$ 时间点时，我们要求的是满足 $b > a + k$ 的最小的 $b$ ，于是可以用二分查找找到 $b$ 的位置，然后做标记

CF1041C Coffee Break



## 例题2

给定四个整数集合A,B,C,D，每个集合有n个元素。从A,B,C,D四个集合中分别选出一个元素a,b,c,d，使得 $a+b+c+d=0$ 。找到有多少组a,b,c,d满足上述条件。

$n \leq 4000$





# 例题2

最暴力的方法显然是 $n^4$

我们可以 $n^2$ 处理出 $a[i]+b[j]$ ，存到一个 $q1[]$ 数组中

并且 $n^2$ 处理出 $c[i]+d[j]$ ，存到一个 $q2[]$ 数组中

将 $q2[]$ 从小到大排序后，扫描 $q1[]$ 同时在 $q2[]$ 中二分查找

uva1152



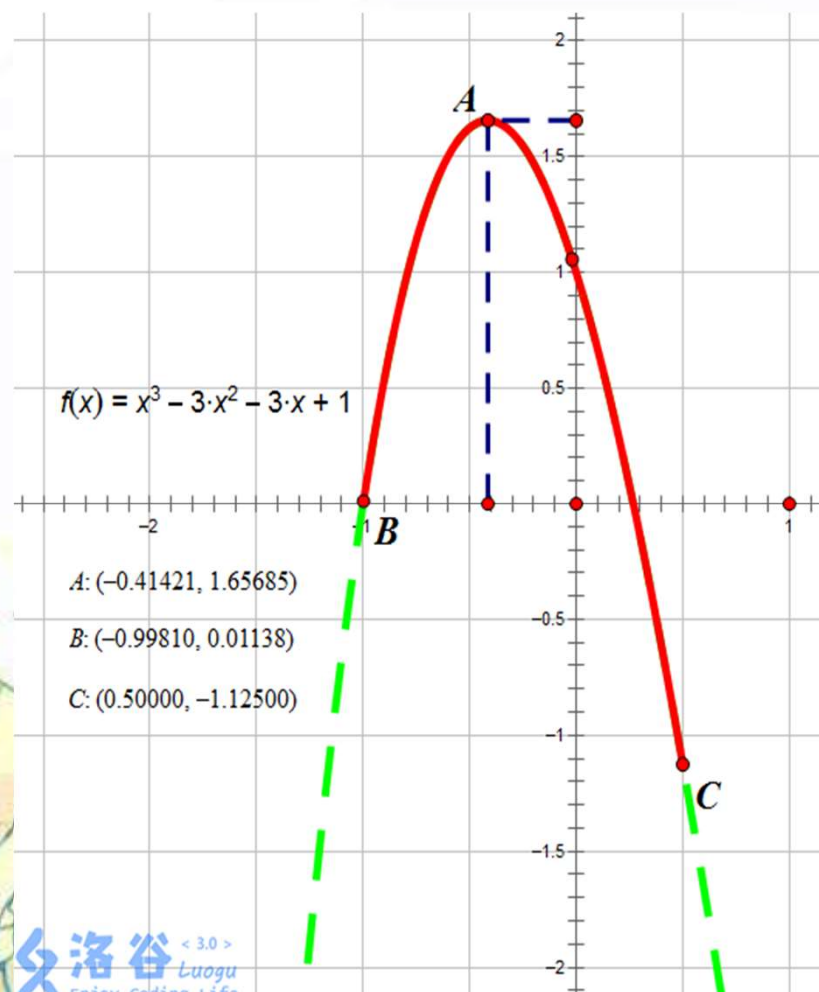


# 三分查找

给出一个N次函数，保证在范围 $[1,r]$ 内存在一点 $x$ ，使得 $[1,x]$ 上单调增， $[x,r]$ 上单调减。试求出 $x$ 的值。

```
while(r-l<eps){  
    mid1=(2*l+r)/3.0;  
    mid2=(l+2*r)/3.0;  
    if(f(mid1)<f(mid2))l=mid1;  
    else r=mid2;  
}  
printf("%.5lf",l);
```

模板题 洛谷3382



## 例题3

在一个2维平面上有两条传送带，每一条传送带可以看成是一条线段。两条传送带分别为线段AB和线段CD。 $lxhgww$ 在AB上的移动速度为P，在CD上的移动速度为Q，在平面上的移动速度R。现在 $lxhgww$ 想从A点走到D点，他想知道最少需要走多长时间



# 例题3

三分套三分

先三分AB传送带上的点，然后check时通过三分CD上的点求此时的最优解，综合最优解得到最终的答案

洛谷2571





# 二分答案

对于存在单调性的问题，利用倒推的方法，先找到一个可能的答案，判断答案是否可行，然后最终确定一个正确答案。

比如求用最少的步数走完一个路径，问最少步数是多少

```
int l=0,r=inf,ans=-1;
while(l<=r){
    int mid=(l+r)>>1;
    if(check(mid))ans=mid,r=mid-1;
    else l=mid+1;
}
```



## 例题4

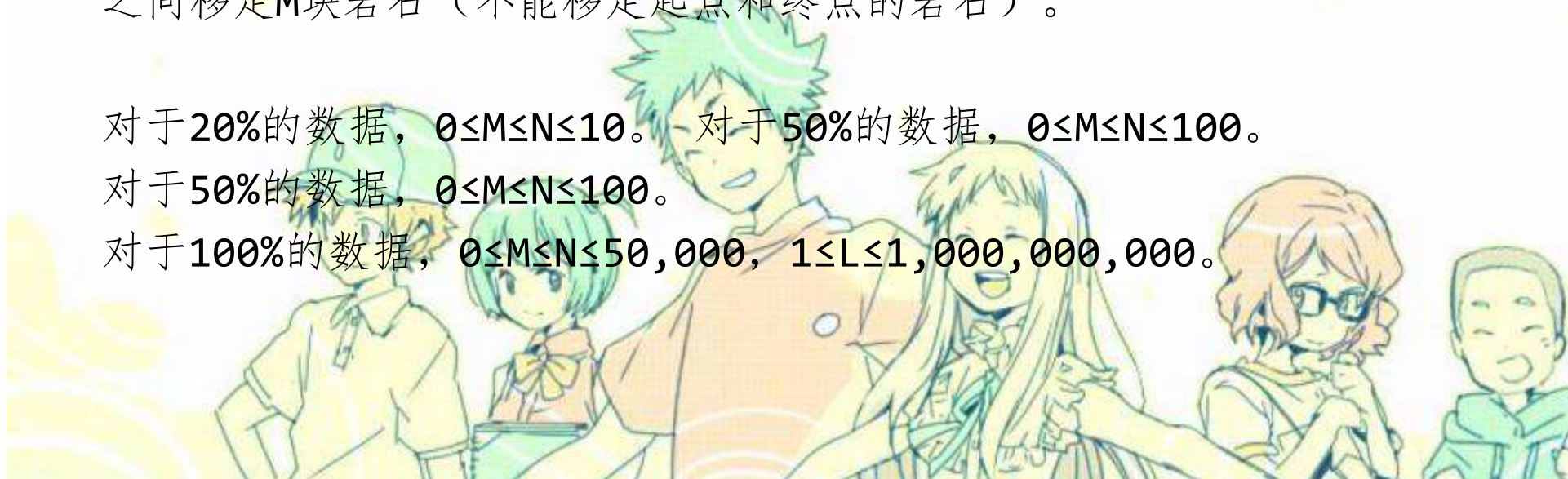
跳石头比赛将在一条笔直的河道中进行，河道中分布着一些巨大岩石。组委会已经选择好了两块岩石作为比赛起点和终点。在起点和终点之间，有 $N$ 块岩石（不含起点和终点的岩石）。在比赛过程中，选手们将从起点出发，每一步跳向相邻的岩石，直至到达终点。

为了提高比赛难度，组委会计划移走一些岩石，使得选手们在比赛过程中的最短跳跃距离尽可能长。由于预算限制，组委会至多从起点和终点之间移走 $M$ 块岩石（不能移走起点和终点的岩石）。

对于20%的数据， $0 \leq M \leq N \leq 10$ 。对于50%的数据， $0 \leq M \leq N \leq 100$ 。

对于50%的数据， $0 \leq M \leq N \leq 100$ 。

对于100%的数据， $0 \leq M \leq N \leq 50,000$ ， $1 \leq L \leq 1,000,000,000$ 。



# 例题4

二分答案

二分最大的最小值，并以二分值作为条件，找到需要移走的石头最少为多少，如果该数目大于 $m$ ，则将二分值减小，否则将二分值增大。

codevs4768





# 例题5

妈妈下班回家，街坊邻居说小明被一群陌生人强行押上了警车！妈妈丰富的经验告诉她小明被带到了t区，而自己在s区。

该市有m条大道连接n个区，一条大道将两个区相连接，每个大道有一个拥挤度。小明的妈妈虽然很着急，但是不愿意拥挤的人潮冲乱了她优雅的步伐。所以请你帮她规划一条从s至t的路线，使得经过道路的拥挤度最大值最小。

30%  $n \leq 10$

60%  $n \leq 100$

100%  $n \leq 10000, m \leq 2n$ , 拥挤度  $\leq 10000$

题目保证  $1 \leq s, t \leq n$  且  $s \neq t$ ，保证可以从s区出发到t区。



# 例题5

法一：

将拥挤度作为边权，建立最小生成树。然后求s与t之间唯一通路的最大边权就可以了。

法二：

先二分答案，设定一个最大边的最小值，然后将大于这个边权的边视为不通，然后判断s与t能否联通。

洛谷1396



## 例题6

有 $N$ 条绳子，它们的长度分别为 $L_i$ 。如果从他们中切割出 $K$ 条长度相同的绳子的话，这 $K$ 条绳子每条最长能有多长？答案保留到小数点后2位

$$1 \leq N \leq 10000$$

$$1 \leq K \leq 10000$$





# 例题6

可以认为是最大化最小值，答案范围左右边界分别为0和最长绳子的长度

poj1064



## 例题7

在一场测试中有 $N$ 项，每一项都有 $b_i$ 个题目，答对 $a_i$ 个。总的答对率就是 $(a_1+a_2+\dots+a_n)/(b_1+b_2+\dots+b_n)$ ，现在可以让你从这 $N$ 项测验中抽出 $K$ 项不计入总的答题中，问最高答对率会是多少？

$$1 \leq n \leq 1000$$

$$0 \leq k < n$$



# 例题7

二分搜索答对率，每得到一个值 $x$ ，将其乘以 $b_i$ ，将 $y_i = a_i - b_i * x$ ，再将 $y_i$ 从大到小排序，看前 $n-k$ 个 $y_i$ 的和是否大于等于0，是则表明当前 $x$ 是最大答对率或小于最大答对率，否则表示当前 $x$ 大于最大答对率。

poj2976





## 例题8

火车从始发站（称为第**1**站）开出，在始发站上车的人数为**a**，然后到达第**2**站，在第**2**站有人上、下车，但上、下车的人数相同，因此在第**2**站开出时（即在到达第**3**站之前）车上的人数保持为**a**人。从第**3**站起（包括第**3**站）上、下车的人数有一定规律：上车的人数都是前两站上车人数之和，而下车人数等于上一站上车人数，一直到终点站的前一站（第**n-1**站），都满足此规律。现给出的条件是：共有**N**个车站，始发站上车的人数为**a**，最后一站下车的人数是**m**（全部下车）。试问**x**站开出时车上的人数是多少？

$$a \leq 20$$

$$n \leq 20$$

$$m \leq 2000$$

$$x \leq 20$$



## 例题8

唯一的变量 $y$ 是在第二站上车的人数

发现 $y$ 越大，对应的最后一站下车人数越大，也就是满足单调性，二分答案就可以了

洛谷1011



Thanks~

