SONLI KETMA-KETLIKLAR VA ULARNING LIMITI

18-§. Sonli ketma-ketlik tushunchasi. Ketma-ketlik limitining ta'rifi

Reja:

1.Sonli ketma-ketlik tushunchasi.
2.Ketma-ketlikning berilish usullari.
3.Ketma-ketlik limitining ta'rifi.
4.O'z-o'zini tekshirish savollari.
5.Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Sonli ketma-ketlik tushunchasi. Agar har bir natural son n ga biror haqiqiy x_n soni mos qo'yilgan bo'lsa, u holda

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik (sonli ketma-ketlik) berilgan deyiladi.

Ketma-ketlik qisqacha $\{x_n\}$ shaklda yoziladi. x_n ga ketma-ketlikning hadi (n-hadi) yoki elementi (n –elementi) deyiladi. n ga x_n-hadning nomeri deyiladi.

Sonli ketma-ketlik bu aniqlanish sohasi natural sonlar to'plamidan iborat bo'lgan funksiyadir. Bu funksiyaning o'zgarish sohasi, ya'ni x_n $(n \in N)$ sonlar to'plami ketma–ketlikning qiymatlari to'plami deyiladi. Ketma-ketlikning qiymatlari to'plami chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin, ammo ketma-ketlikning hadlari (elementlari) to'plami hamma vaqt cheksiz to'plamdir, chunki ketma-ketlikning 2 ta hadi bir-biridan hech bo'lmaganda nomeri bilan farq qiladi, masalan; $\{(-1)^n\}$ ketma-ketlikni qaraylik. Bu ketma-ketlikning qiymatlari to'plami 1 va -1 sonlaridan iborat. Uning hadlari to'plami cheksiz to'plamdir.

$\{n^2\}$ va $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketliklarning qiymatlari to'plami cheksiz to'plam bo'ladi.

2. Ketma-ketlikning berilish usullari. Ketma-ketlik har bir hadining nomeri bo'yicha shu hadni hisoblash formulasi orqali berilishi mumkin.

Masalan:

$$x_n = \frac{1}{n},\ x_n = \frac{(-1)^n + 1}{2},\ x_n = \frac{n^2+1}{n},\ x_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ketma-ketlik ba'zan rekurrent formula orqali berilishi mumkin:

a) Birinchi hadi beriladi (yoki dastlabki bir nechta hadi beriladi).

b) Ketma-ketlik hadining o'zidan oldingi hadiga (o'ziga qo'shni hadlariga) bog'lanish formulasi beriladi.

Masalan: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ x_3 = x_2 + x_1 = 2,\quad x_4 = x_3 + x_2 = 3, \dots$.

Arifmetik va geometrik progressiyada ayirmasi d va maxraji q bo'lsa, ularning n –hadini topish formulasi rekurrent formula orqali berilgan ketma-ketlikka misol bo'la oladi:

$$a_{n+1} = a_n + d, \qquad b_{n+1} = b_n q.$$

3.Ketma-ketlik limitining ta'rifi.

18.1-ta'rif. Agar ixtiyoriy musbat ε soni uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ nomer topilsaki, $n_0(\varepsilon)$ dan katta barcha $n \in N$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ kabi yoziladi yoki $n \to \infty$ da $x_n \to a$ deb belgilanadi.

Bu ta'rifni logik simvollar yodamida quyidagicha yozish mumkin:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N\ \big(n_0 = n_0(\varepsilon)\big),\ \forall n > n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizligi bajarilsa a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Demak,

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \ \forall n > n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon. \quad (18.1)$$

Agar ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lsa, bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi.

Demak, yaqinlashuvchi ketma-ketlik logik simvollar orqali quyidagicha yoziladi:

$$\exists a \in R,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \ \forall n > n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon. \quad (18.2)$$

Bu munosabat bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyilar ekan.

18.1-ta'rifning inkori logik simvollar yordamida quyidagicha yoziladi:

$$\exists\varepsilon_0 > 0,\ \forall n_0 \in N,\ \ \exists n > n_0,\ |x_n - a| \geq \varepsilon_0. \quad (18.3)$$

Ravshanki, (18.3) munosabat a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lmasligini bildiradi.

Quyidagi

$$\forall a \in R, \exists\varepsilon_0 > 0, \forall n_0 \in N,\ \ \exists n > n_0, |x_n - a| \geq \varepsilon_0$$

munosabat esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limitga ega emasligini, ya'ni bironta son bu ketma-ketlikning limiti bo'lmasligini bildiradi. Boshqacha aytganda, bu munosabat $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi emasligini anglatadi.

Yaqinlashuvchi bo'lmagan ketma-ketlik uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Agar $\forall n$ da $x_n = a$ bo'lsa u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik statsionar ketma-ketlik deyiladi. Statsionar ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

bo'ladi. (18.1) munosabatdan ko'rinadiki, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsa, u holda $\{x_n - a\}$ ketma-ketlikning limiti 0 bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$, va aksincha $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'ladi.

18.1-mashq. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ bo'lsa, u holda $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k, \dots$ ketma-ketlikning limiti ham a bo'lishini isbotlang.

Yana ta’rifga qaytib quyidagi mulohazalarni olamiz: $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizlikka ekvivalent. Ketma-ketlik limiti ta’rifidagi $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizlikdan ko‘rinadiki, agar a soni x_n ketma-ketlikning limiti bo‘lsa,x_n ketma-ketlikning ma’lum bir nomerdan keyingi hadlarning barchasi $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervalda yotadi. Bu interval tashqarisida yo elementi umuman bo‘lmaydi, yo bo‘lsa ham cheklita bo‘ladi.

$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$intervalga a nuqtaning $\varepsilon -$atrofi deyiladi va $U_\varepsilon(a)$ kabi belgilanadi:

$$U_\varepsilon(a) = \{x: a-\varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x: |x-a| < \varepsilon\},$$

______|_________|___________|_____

$a - \varepsilon$ $\qquad$ a $\qquad$ $a + \varepsilon$

18.1-ta’rifni, ya’ni ketma-ketlik limitining ta’rifini quyidagicha ham ta’riflash mumkin.

a soni x_n ketma-ketlikning limiti deyiladi, agar a nuqtaning $\forall\varepsilon$ atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko‘p elementi joylashgan bo‘lib, tashqarisida esa cheklita elementi qolgan bo‘lsa. Logik simvollardan foydalanib ketma-ketlik limitini quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \to x_n \in U_\varepsilon(a)$$

18.1-misol. Limit ta’rifidan foydalanib, quyidagi ketma-ketlikning limitini toping:

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

Yechish. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ekanligini ko‘rsatamiz.

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}, \ |x_n - 0| = \frac{1}{n}$$

bo‘lganligi uchun $\frac{1}{n} < \varepsilon$,$n > \frac{1}{\varepsilon}$ tengsizlikdan n_0 nomerni $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ deb olsak, barcha n>n_0 larda $|x_n - 0| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi, bu esa $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ekanligini bildiradi.

Ketma-ketlik limiti mohiyatini chuqurroq tushuntirish uchun ε sonining turli qiymatlarida $\frac{1}{n} < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi uchun $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural sonini topib, ketma-ketlikning n_0 dan katta barcha hadlari 0 nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(0)$ atrofida ketma-ketlikning cheksiz ko‘p hadi joylashib uning tashqarisida cheklita hadi qolishini ko‘rsatish kerak. ε ga turli qiymatlar berib, ushbu jarayonni kuzatish uchun quyidagi havolaga o‘ting: http://localhost:5173/theme2

18.2-misol. Ketma-ketlik limiti ta'rifining inkori, ya'ni (18.3) munosabat bo'yicha $a = 1$ soni $x_n = sin\frac{n\pi}{2}$ ketma-ketlikning limiti bo'lmasligini ko'rsating.

Yechish. $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ deb olamiz, u holda $\forall n_0 \in N$ son uchun $n = 2n_0$ deb olsak, $n > n_0$ bo'lgan n natural son mavjud va

$$|x_n - a| = \left|sin\frac{2n_0\pi}{2} - 1\right| = |sin(n_0\pi) - 1| = 1 > \frac{1}{2}$$

munosabat bajariladi. Demak, (18.3) munosabatga ko'ra $a = 1$ soni $x_n = sin\frac{n\pi}{2}$ ketma-ketlikning limiti emasligini aniqlaymiz.

18.3-misol. $x_n = \{(-1)^n\}$ ketma-ketlikni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5, …x_n, …
-1	1	-1	1	-1 …$(-1)^n$ …

Faraz qilaylik 1 nuqta bu ketma-ketlikning limiti bo'lsin, u holda 1 nuqtaning $\forall\varepsilon$ atrofida ketma-ketlikning cheksizta elementi joylashgan bo'lishi tashqarisida esa cheklita elementi joylashgan bo'lishi kerak. (1-$\frac{1}{2}$; $1 + \frac{1}{2}$) atrofini olaylik, bu atrofi x_n ketma-ketlikning hamma juft nomer hadlari joylashgan lekin bu nuqtaning tashqarisida barcha toq nomerli hadlari qolayapti. Demak 1 nuqta ketma-ketlikning limiti bo'la olmaydi. -1 nuqta ham xuddi shunday limiti bo'la olmasligini osongina ko'rish mumkin. 1 va -1 dan farqli istalgan $a \in R$ soni uchun, uning shunday $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ atrofi topilib, $1 \notin U_\varepsilon(a)$, $-1 \notin U_\varepsilon(a)$ va $U_\varepsilon(a)$ atrofda qaralayotgan ketma-ketlikning bironta ham elementi yotmasligini ko'rish qiyin emas. Shuning uchun bu tanlangan nuqta ham bu ketma-ketlikning limiti bo'la olmaydi. Demak, bu ketma-ketlik limitga ega emas ekan.

4.O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Sonli ketma-ketlik limitining ta'rifini atroflar yordamida bering.

2. $x_n = (-1)^n$ ketma-ketlikning limiti mavjud emasligini $''\varepsilon - \delta''$ tilida ko'rsating.

3. $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlik limitining mavjudligini $''\varepsilon - \delta''$ tilida ko'rsating.

4. Logik simvollar yordamida quyidagi mulohazalarning inkorini yozing.

a) $A = \{a\ soni - \{x_n\}$ ketma-ketlik limiti}.

b) *B*={$\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlikdir}.

5.Mustaqil yechish uchun misollar.

18.1. Ketma-ketlik limitining ta'rifi (18.1-ta'rif) bo'yicha a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lishini isbotlang.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}$, $a = \dfrac{3}{2}$. **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}$, $a = 2$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n = \dfrac{5n+1}{10n-3}$, $a = \dfrac{1}{2}$. **4.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n = \dfrac{3n^2}{2-n^2}$, $a = -3$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$, $a = 0$. **6.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n = \dfrac{2n+3}{n+5}$, $a = 2$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+3}$, $a = -2$. **8.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, $a = 0$.

Bu har bir hol uchun quyidagi jadvalni to‘ldiring:

ε	0,1	0,01	0,001	…
$n_0(\varepsilon)$				

18.2. Ketma-ketlik limiti ta’rifining inkori ((18.3) munosabat) bo‘yicha a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo‘lmasligini korsating.

1. $a = -1, x_n = (-1)^n$. **2.** $a = \frac{1}{2},\ x_n = \frac{1}{2n+1}$.

3. $a = 1,\ x_n = (-1)^n + 1$. **4.** $a = \frac{1}{2},\ x_n = cos\frac{\pi n}{3}$.

5. $a = \frac{1}{2},\ x_n = sin\frac{\pi n}{6}$. **6.** $a = -\frac{1}{2},\ x_n = \frac{n+1}{3-2n^2}$.

18.3. $x_n = \frac{1}{n^2}(1+2+3+4+\ldots+n)$ ketma-ketlikni yaqinlashuvchilikka tekshiring.